

THÈSE  
présentée pour obtenir  
le grade de DOCTEUR  
de l'Université Louis Pasteur  
(Strasbourg I)  
Spécialité MATHÉMATIQUES

par Philippe BALCER

**CARACTÈRES PREMIERS DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3  
ET THÉORIE TOPOLOGIQUE DES CHAMPS EN GENRE 1**

Soutenue le vendredi 20 février 1998 devant la commission d'examen :

MM.	Daniel BENNEQUIN	Directeur de thèse
	Michel BOILEAU	Rapporteur externe
	Thomas DELZANT	Membre du jury
	Marc ROSSO	Directeur de thèse
	Vladimir TOURAEV	Rapporteur interne
	Pierre VOGEL	Rapporteur externe

**INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE**  
**Université Louis Pasteur et C.N.R.S (URA 01)**  
**7, rue René Descartes**  
**67084 STRASBOURG Cédex**

**CARACTÈRES PREMIERS DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3  
ET THÉORIE TOPOLOGIQUE DES CHAMPS EN GENRE 1**

par

Philippe BALCER

AMS subject classification : 57N, 57M99, 57M25.

Mots clés : knots, incompressible surfaces, boundary-slopes, Dehn surgery, reductible 3-manifolds.

L'objectif est de faire un lien entre la théorie topologique des champs et les méthodes de la topologie de la dimension 3.

Suivant une idée de Pierre Vogel, un invariant topologique engendre une théorie topologique des champs. L'idée est d'appliquer cette construction à un caractère premier (celui qui distingue un facteur premier donné) en se limitant à l'espace de Verlinde du tore de genre 1. Après une étude complète des différents types de recollements le long d'un tore, il est établi dans le cas d'un espace lenticulaire un théorème de finitude. C'est une finitude comme module sur  $SL_2(\mathbb{Z})$  de l'espace vectoriel associé à la surface de genre 1. Ensuite, on réalise certains types de générateurs de ce module par des variétés explicites.

La finitude obtenue avec les espaces lenticulaires permet d'envisager un espace vectoriel de  $G$ -orbites où  $G$  est un sous-groupe d'indice fini de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . A ce propos, nous introduisons la notion de  $G$ -chirurgie, qui est semble-t-il nouvelle et nous montrons la  $\Gamma_0(4)$ -invariance de  $\tau_3$ .

## REMERCIEMENTS

*J'ai eu la chance d'avoir à mes côtés un directeur de thèse qui voit loin, qui a des idées et beaucoup d'audace.*

*Pendant toutes les années où il m'a guidé, j'ai eu en lui un soutien inconditionnel, aussi bien mathématique que moral. Sans ses talents de pédagogue, sans sa patience face à mes erreurs, sans son aide dans l'élaboration de ce travail, sur le fond comme sur la forme, cette thèse n'aurait pas abouti.*

*J'exprime donc toute ma profonde reconnaissance envers mon maître : Daniel Bennequin.*

*Merci à Marc Rosso d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse à Strasbourg. J'ai toujours pu compter sur sa disponibilité et son ouverture d'esprit.*

*Merci à Michel Boileau pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail et pour une mémorable conversation qui fût déterminante pour moi. Il m'a également fait profiter de sa grande connaissance du sujet, et communiqué des références à des travaux voisins.*

*Merci à Vladimir Touraev pour avoir accepté de juger mon travail. Ses nombreuses remarques et ses encouragements m'ont aidé et stimulé.*

*Merci à Pierre Vogel pour avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que pour m'avoir fait de pertinentes remarques.*

*Merci à Thomas Delzant pour avoir accepté d'être membre du jury et pour le chaleureux intérêt manifesté pour mon travail.*

*Merci à Cameron Gordon et John Luecke pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes questions.*

*Merci à Marcus Slupinski pour avoir été mon tuteur pédagogique. Il m'a donné de bons conseils.*

*Merci à Tilmann Wurzbacher. Les conversations que j'ai eu avec lui ont toujours été pour moi un facteur d'encouragement.*

*Je remercie Michel Émery. Lorsqu'il était responsable de la formation doctorale, il a toujours été prêt à m'aider pour diverses difficultés.*

*Merci à Michèle Audin. Grâce à elle, j'ai pu assister au séminaire de Montréal en juillet 95. De plus, elle a toujours été là pour me conseiller ou pour m'aider.*

*Merci à Christian Mercat pour ses relectures, ses remarques et les nombreux services qu'il m'a rendu.*

*Merci à Jean Stutzmann pour l'aide et les conseils en informatique. Cela m'a fait gagner du temps.*

*Merci à mes collègues de bureau, Philippe Heinrich et Karim Kellay. Grâce à eux, il règne une très bonne ambiance de travail.*

*La bibliothèque est l'outil de travail le plus important en mathématique. Je tiens ici à remercier le personnel qui y travaille : Annie Matter, Christine Disdier, Véronique Bertrand, Michèle Lépine et Jean-Claude Ville. J'ai toujours pu compter sur leur aide efficace.*

*Merci à Marie-France Biechel, Yvonne Grienenberger et Philippe Blondel pour le soin apporté à la reliure de cette thèse.*

*Merci à Sophie Gérardy pour ses relectures et corrections. Elle a été à mes côtés durant ces années et cela n'a pas toujours été facile. Cependant, elle a toujours su faire ou dire ce qu'il fallait au moment où il le fallait. C'est le meilleur soutien qu'on puisse espérer.*

# SOMMAIRE

## Introduction

### PARTIE 1 : GÉNÉRALITÉS

1. Le monoïde des variétés de dimension 3
2. Les caractères de  $\mathcal{V}$ 
  - 2.1 *Définition*
  - 2.2 *Exemples*
3. Les invariants quantiques
4. La théorie topologique des champs
  - 4.1 *Aperçu des axiomes*
  - 4.2 *La construction de Pierre Vogel*

### PARTIE 2 : OUTILS DE LA DIMENSION 3

5. Les surfaces incompressibles
6. Les variétés fibrées
  - 6.1 *Présentation*
  - 6.2 *Le  $[0,1]$ -fibré tordu sur la bouteille de Klein*
7. La sous-variété caractéristique
8. Le groupe de difféotopie d'une variété de dimension 3
9. Les résultats de Gordon et Luecke

### PARTIE 3 : RECOLLEMENT EN GENRE 1

10. Les variétés à bord paramétré
  - 10.1 *Définition*
  - 10.2 *Le cas particulier du tore solide*
  - 10.3 *La notion de courbe bordante*
  - 10.4 *Homéomorphismes bordants*
11. L'homologie du recollement
12. Étude du recollement en genre 1
  - 12.1 *Le recollement compressible-compressible*
  - 12.2 *Le recollement incompressible-incompressible*
  - 12.3 *Le recollement incompressible-compressible*
  - 12.4 *Le cas des espaces lenticulaires*

- 13. Le problème du nœud absorbant
  - 13.1 *Énoncé*
  - 13.2 *Le lemme homologique*
  - 13.3 *Le groupe fondamental*
  - 13.4 *Le théorème sur les espaces lenticulaires*

## **PARTIE 4 : LE MODULE DU TORE**

- 14. Le  $\Gamma$ -module  $E_1$ 
  - 14.1 *Le  $\Gamma$ -module  $\mathbb{C}\langle(V)\rangle$*
  - 14.2 *Description du noyau*
- 15. Les générateurs d'un caractère premier
  - 15.1 *Introduction*
  - 15.2 *Le centre*
  - 15.3 *L'invariant de Haken*
  - 15.4 *La variété de Whitehead*
  - 15.5 *Construction d'un générateur simple*
- 16. L'espace vectoriel en genre 1 et sa forme hermitienne
  - 16.1 *Le sous-module du tore solide*
  - 16.2 *La forme hermitienne*

## **PARTIE 5 : CARACTÈRES $G$ -INVARIANTS**

- 17. La  $G$ -chirurgie
  - 17.1 *Sous-groupe de Hecke*
  - 17.2 *Action d'un groupe sur les paramètres de chirurgie*
  - 17.3 *Présentation par chirurgie de Dehn d'une variété*
  - 17.4 *La forme de relèvement de l'enlacement*
  - 17.5 *L'invariant  $\tau_3$*
  - 17.6 *La condition  $n_2 \neq 0$*
  - 17.7 *La phase de  $\tau_3$*
  - 17.8 *Les autres*

Appendice 1 : l'invariant de Walker

Appendice 2 : homologie d'un recollement

## **BIBLIOGRAPHIE**

# INTRODUCTION

L'objectif de cette thèse est de faire un lien entre la théorie topologique des champs et les méthodes de la topologie géométrique de la dimension 3.

Le premier chapitre est un rappel de choses connues.

On travaille dans la catégorie des variétés orientées connexes de dimension 3. On dit qu'une telle variété est première si elle est asphérique ou isomorphe à  $S^2 \times S^1$ . On présente la propriété fondamentale : la décomposition en une somme connexe de variétés premières existe (Kneser) et elle est unique à l'ordre près des facteurs (Milnor). Ainsi l'étude des variétés de dimension 3 orientables fermées se ramène théoriquement à l'étude des variétés premières. Un caractère est un invariant topologique multiplicatif pour la somme connexe et on peut se restreindre à ce type d'invariant topologique pour classer les variétés de dimension 3.

Ensuite on expose des exemples de caractères connus.

Une classe très importante de caractères est celle des invariants quantiques. Ces invariants proviennent de représentations de dimension finie d'algèbres de Hopf modulaires. A partir d'une présentation par chirurgie d'une variété et en interprétant l'entrelacs parallélisé de chirurgie comme un opérateur, on en extrait des nombres qui ne dépendent que de la variété.

Les invariants quantiques proviennent d'une théorie topologique des champs (Witten, Reshetikhin, Turaev). On expose rapidement cette théorie. Suivant une idée de Pierre Vogel, en partant d'un invariant multiplicatif et involutif, on reconstruit canoniquement une théorie quantique des champs : pour cela on considère  $\mathbb{C}\langle\mathcal{V}(\Sigma_g)\rangle$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  engendré par l'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés connexes de bord  $\Sigma_g$  où  $\Sigma_g$  désigne une surface orientable de genre  $g \geq 1$ . Le recollement de deux variétés suivant  $\Sigma_g$  donne une variété fermée que l'invariant évalue. L'extension de cette évaluation à une combinaison linéaire induit une forme bilinéaire hermitienne. Enfin le quotient  $E(\Sigma_g)$  de  $\mathbb{C}\langle\mathcal{V}(\Sigma_g)\rangle$  par le noyau de cette forme est muni d'une forme non dégénérée et il vérifie les axiomes d'une théorie topologique des champs.

Le deuxième chapitre met en place tous les outils nécessaires afin de construire l'espace  $E(\Sigma_1)$  pour un caractère premier  $\chi_P$  : celui qui vaut 0 pour une variété contenant  $P$  ou  $-P$  dans sa décomposition et 1 sinon. Ces outils sont spécifiques à la dimension 3 : variétés de Haken, théorie de Waldhausen, décomposition de Jaco-Shalen-Johannson et de façon déterminante le théorème de Gordon et Luecke



sur les surfaces planaires d'une variété de dimension 3 ainsi que le théorème de chirurgie cyclique de Culler, Gordon, Luecke et Shalen.

Les notions exposées au chapitre deux nous permettent dans le troisième chapitre de faire une étude complète de tous les types de recollements qui se produisent en genre 1 : le recollement de deux tores solides, le recollement de deux variétés à bord incompressible et enfin les chirurgies de Dehn. Pour cela, après une présentation des variétés à bord paramétré, nous faisons une étude des homéomorphismes bordants qui montre que l'action du groupe modulaire sur le bord d'une variété à bord incompressible peut être non libre.

La question principale qui se pose est la suivante :

*étant données une variété  $M$  irréductible à bord connexe incompressible de genre 1 et une variété première  $P$ , quelles sont les obturations de Dehn qui donnent  $P$  ou  $-P$  en facteur ?*

L'objectif était la conjecture suivante : les ensembles  $\mathcal{C}(M)$  de chirurgies sur  $\partial M$  faisant apparaître  $\pm P$  en facteur forment un ensemble fini d'orbites sous l'action de  $SL_2(\mathbb{Z})$  qui ne dépend que de  $P$ . On note  $\mathcal{P}(\Sigma_1)$  les éléments irréductibles de  $\mathcal{V}(\Sigma_1)$ .

Dans le cas des espaces lenticulaires, à l'aide du théorème de chirurgie cyclique, on obtient d'abord :

*soient  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma_1)$  à bord incompressible et deux pentes  $\alpha$  et  $\alpha'$  telles que  $M(\alpha) = L(p, q)$  et  $M(\alpha') = \pm L(p, q')$ , alors  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$ .*

Ensuite, le problème de décomposition est abordé. Après une étude homologique et homotopique, on en déduit grâce au travail de Gordon, Luecke, Shalen, Culler et grâce au théorème des pentes planaires de Gordon et Luecke :

*soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma_1)$  à bord incompressible. Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux pentes telles que  $M(\alpha) = L(p, q) \# V$  et  $M(\alpha') = L(p, q') \# V'$  (avec  $L(p, q)$  et  $L(p, q') \neq S^3$ ). Alors  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$ .*

Donc dans le cas des espaces lenticulaires, ce résultat entraîne que l'espace vectoriel  $E(\Sigma_1)$  est un  $SL_2(\mathbb{Z})$ -module de type fini. Donc si  $G$  est un sous-groupe d'indice fini de  $SL_2(\mathbb{Z})$ , l'espace vectoriel  $H_0(G, E(\Sigma_1))$  est de dimension finie.

Le problème à traiter était de nature géométrique et si ici le résultat se limite aux caractères premiers lenticulaires, c'est parce que la géométrie utilisée vient des résultats de Gordon et Luecke.

REMARQUE : Michel Boileau nous a signalé un résultat de Boyer et Zhang qui recoupe les notres. Il s'agit du corollaire H de [Boy-Z] (Cf 13.4). Leur méthode repose sur l'espace des représentations du groupe fondamental dans  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Les preuves de cette thèse sont différentes et plus élémentaires.

Dans le chapitre quatre, on démontre que pour tout caractère premier  $\chi_P$ , il existe une variété  $M$  de bord  $\Sigma_1$  telle que pour toute variété  $N$  irréductible, on ait  $\chi_P(M \cup_{\Sigma_1} -N) = 1$  (un centre) et pour tout  $r$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , une variété  $M_r$  telle qu'il existe un unique tore solide  $H_r$  avec  $\chi_P(M_r \cup_{\Sigma_1} -H_r) = 0$  ( $r$  est le paramètre de chirurgie et la variété  $M_r$  est appelée générateur simple). Pour certains invariants quantiques en genre 1, on a un espace vectoriel de dimension finie engendré par des tores solides (représentation unitaire d'une extension centrale du groupe modulaire). Ici, dans le cas d'un caractère premier, on a en plus des générateurs à bord incompressible. On en déduit par exemple que le module librement engendré par les anses pleines s'injecte dans le module associé à un caractère premier.

Dans ce chapitre, nous présentons la forme hermitienne du module associé à un caractère premier et nous décrivons les diverses possibilités dans le cas des espaces lenticulaires y compris  $S^2 \times S^1$ .

Le dernier chapitre aborde une notion nouvelle.

Une voie possible pour la construction d'une théorie rationnelle est de regarder l'espace vectoriel des  $G$ -orbites où  $G$  est un sous-groupe d'indice fini de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et de régulariser la forme hermitienne.

Dans cette optique, nous introduisons la  $G$ -chirurgie. On part d'un sous-groupe  $G$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  qui contient le stabilisateur de  $1/0$ . Avec un tel sous-groupe, on peut définir une action sur les paramètres de chirurgie de Dehn.

En utilisant des sous-groupes considérés par Hecke (les sous-groupes du type  $\Gamma_0(N)$  et  $\Gamma_1(N)$ ), on montre que l'on obtient des exemples de caractères  $G$ -invariants non triviaux. En particulier, on montre que l'invariant  $\tau_3$  est  $\Gamma_0(4)$ -invariant.

REMARQUES : 1) le présent texte incorpore des remarques et des références qui m'ont été communiquées par les rapporteurs et les membres du jury. Je les en remercie.

2) Les derniers paragraphes concernant l'invariant  $\tau_3$  ont été rédigés entre le travail des rapporteurs et la soutenance.



# PARTIE 1 : GÉNÉRALITÉS

## 1. Le monoïde des variétés de dimension 3

On se place dans la catégorie des variétés de dimension 3 connexes, de classe  $C^\infty$ , compactes, orientées et sans bord. On note  $\mathcal{V}$  l'ensemble des classes d'isomorphisme. Si  $V$  est une variété orientée,  $-V$  désigne la même variété avec l'autre orientation.

La somme connexe de deux variétés  $V$  et  $V'$  est obtenue en enlevant l'intérieur d'une boule à  $V$  et à  $V'$  et en identifiant les deux bords avec un difféomorphisme renversant l'orientation. On note  $V \# V'$  le résultat obtenu. Cela définit un unique élément de  $\mathcal{V}$  (Gugenheim, 1953).

On vérifie que  $(\mathcal{V}, \#)$  a une structure de monoïde commutatif, avec  $S^3$  pour élément neutre. On dit qu'un élément de  $\mathcal{V}$  différent de  $S^3$  est premier s'il n'existe pas de décomposition non triviale. Dans [Mil], il est montré que  $S^1 \times S^2$  est première, et que tout élément de  $\mathcal{V}$  autre que  $S^3$  et  $S^1 \times S^2$  est premier si et seulement si toute sphère plongée borde une boule. Enfin on note  $\mathcal{P}$  les éléments premiers de  $\mathcal{V}$  et on supposera que  $S^3$  n'est pas dans  $\mathcal{P}$ . On a le théorème suivant d'existence (dû à Kneser, 1929) et d'unicité (dû à Milnor, [Mil]) d'une décomposition de variété de dimension 3 :

THÉORÈME 1.1. — *Tout élément de  $\mathcal{V}$  se décompose en une somme  $P_1 \# \dots \# P_r$  de variétés premières et la décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.*

REMARQUES : 1) Si la conjecture de Poincaré est vraie, une variété  $V$  est première et différente de  $S^2 \times S^1$  si et seulement si  $\pi_2(V) = 0$  ([Mil]).

2) L'unicité est fautive pour les variétés non orientables. On pose  $N = S^2 \times [0, 1]/(x, 0) = (-x, 1)$ . Alors on a  $N \# N = N \# S^2 \times S^1$ .

De plus la variété  $S^1 \times \mathbb{P}^2 \mathbb{R}$  est première et différente de  $S^2 \times S^1$ , et  $\pi_2(S^1 \times \mathbb{P}^2 \mathbb{R})$  est non réduit à 0.

3) On a l'unicité de la décomposition à homéomorphisme près mais pas à isotopie près ([Lau]).

4) Les espaces lenticulaires sont des variétés premières car ils admettent un scindement de Heegaard de genre 1. On en déduit qu'il y a une infinité de variétés premières.

Le théorème de Kneser-Milnor s'étend aux variétés à bord ([Gro1, Gro2]), la somme connexe se définit comme précédemment et on a :

THÉORÈME 1.2. — *Soit  $M$  une variété compacte distincte de  $S^3$ . Alors  $M$  se décompose en une somme  $M_1 \# \dots \# M_n$  où chaque  $M_i$  est premier. De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.*

REMARQUE : on a une autre notion de somme connexe pour les variétés à bord. On choisit un disque  $D$  (resp.  $D'$ ) plongé dans le bord d'une variété  $M$  (resp.  $M'$ ) et on identifie  $D$  et  $D'$  par un homéomorphisme qui renverse l'orientation. La classe d'isomorphisme du recollement ne dépend pas du disque choisi sur une composante connexe du bord de  $M$  (resp.  $M'$ ). On a des théorèmes de décomposition analogue à 1.1 et 1.2 dans le cas d'un bord connexe ([Gro1,Gro2]).

Une variété avec ou sans bord est dite irréductible si toute sphère  $S^2$  plongée borde une boule (exemple : la sphère  $S^3$ , une variété première différente de  $S^2 \times S^1$ ).

## 2. Les caractères de $\mathcal{V}$

### 2.1. Définition

Un caractère  $\chi$  de  $\mathcal{V}$  est un invariant topologique à valeur dans un anneau  $k$ , tel que  $\chi(V \# V') = \chi(V)\chi(V')$  où  $V$  et  $V'$  appartiennent à  $\mathcal{V}$ . Nous supposons toujours que  $\chi(S^3) = 1$ . Donc pour le connaître entièrement il suffit de connaître ses valeurs sur  $\mathcal{P}$ . Un caractère  $\chi$  est dit non trivial si il existe une variété  $V \in \mathcal{V}$  telle que  $\chi(V) \neq 1$ . C'est le cas par exemple pour les invariants quantiques de Reshetikhin et Turaev ([Wit], [R-T])  $\tau_r$  pour  $r > 2$ .

L'ensemble des caractères d'un monoïde commutatif forme encore un monoïde commutatif.

Soit  $\chi$  un caractère de  $\mathcal{V}$ . Alors  $\chi^{-1}(\{0\})$  est un idéal de  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{V} \setminus \chi^{-1}(\{0\})$  est encore un monoïde. D'après [C-P],  $\chi^{-1}(\{0\})$  est une réunion d'idéaux engendrés par une variété première.

Soit  $k$  un anneau commutatif unitaire. On pose  $k\langle\mathcal{V}\rangle$  le  $k$ -module libre engendré par le monoïde  $\mathcal{V}$ . Alors un caractère  $\chi$  s'étend par linéarité en un morphisme d'anneaux. Les caractères s'identifient aux homomorphismes unifères de  $k\langle\mathcal{V}\rangle$  dans  $k$ . Dans ce travail nous prendrons  $k = \mathbb{C}$ .

### 2.2. Exemples de caractères

Soit  $\lambda$  l'invariant de Casson-Walker ([Wal,Les1,Les2], voir appendice 1). C'est un invariant additif des sphères d'homologie rationnelle ( $\mathbb{Q}$ -sphères) à valeurs dans le corps  $\mathbb{Q}$  :  $\lambda(V_1 \# V_2) = \lambda(V_1) + \lambda(V_2)$ . On rappelle que si  $V$  est une  $\mathbb{Q}$ -sphère, alors  $\lambda(V) \in \frac{1}{6t(V)}\mathbb{Z}$  où  $t(V)$  est l'ordre de la torsion de  $H_1(V, \mathbb{Z})$ . Le choix d'un réel  $x$  nous donne un caractère en posant  $\chi(V) = e^{ix\lambda(V)}$  si la variété  $V$  est une  $\mathbb{Q}$ -sphère et 0 sinon. Il est multiplicatif et involutif ( $\chi(-V) = \overline{\chi(V)}$ ).

L'ordre de la torsion  $t(V)$  définit aussi un caractère en posant pour  $y$  réel,  $\chi(V) = e^{y \cdot t(V)}$ .

Nous aurons besoin dans ce travail de l'invariant de Haken définit sous forme additive par le cardinal minimum d'un ensemble maximal de tores incompressibles séparants disjoints et non parallèles.

Le prototype des caractères invariants par homotopie est  $e^{y \cdot \text{Rang}(\pi_1(V))}$  où  $\text{Rang}(G)$  désigne le nombre minimum de générateurs d'une présentation de  $G$ . C'est un caractère d'après le théorème de Grushko. Enfin un dernier exemple, grâce à un argument de Haken, la fonction  $e^{y \cdot \text{genre}(V)}$  est un caractère ( $\text{genre}(V)$  est le genre minimal d'un scindement de Heegaard qui réalise  $V$ ). Boileau et Zieschang ont montré que ces deux derniers caractères sont différents [Boi-Z].

Dans ce travail, nous considérerons les caractères premiers : soit  $P$  une variété première, on pose

$$\chi_P(V) = \begin{cases} 0 & \text{si } V \text{ contient } P \text{ ou } -P \text{ dans sa décomposition} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3. Les invariants quantiques

Une remarquable source d'invariants des variétés de dimension 3 est la théorie des groupes quantiques (cf [KRT]).

Les principaux exemples de groupes quantiques furent introduits vers 1985 par V. Drinfeld et M. Jimbo pour la quantification des systèmes complètement intégrables de la théorie des champs et de la mécanique statistique. Ce sont des déformations à un paramètre  $U_q(\mathcal{G})$  des structures d'algèbre de Hopf sur les algèbres enveloppantes  $U(\mathcal{G})$  des algèbres de Lie simples complexes  $\mathcal{G}$  comme par exemple  $U_q(\mathfrak{sl}(n+1))$ .

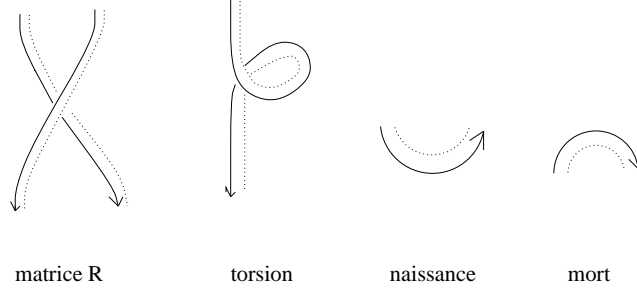
A ces déformations sont associées des solutions non triviales de l'équation de Yang-Baxter quantique qui fournissent des représentations des groupes de tresses d'Artin.

Plus précisément, étant donnée une algèbre de Hopf  $A$ , il peut exister un élément inversible  $R$  de  $A \otimes A$  tel que  $\Delta^{\text{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$ , qui exprime la presque co-commutativité de  $A$ . Alors si  $V$  est une représentation de  $A$ , on a, dans  $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$ ,  $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$  (où  $R_{12} = R \otimes 1$ ,  $R_{23} = 1 \otimes R$  et  $R_{13} = (\tau \otimes 1)(1 \otimes R)$ ), et toujours dans  $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$ ,  $\rho = \tau \circ R$ , où  $\tau$  est la volte, vérifie  $\rho_{12}\rho_{23}\rho_{12} = \rho_{23}\rho_{12}\rho_{23}$ , ce qu'il faut pour les tresses.

Si  $A = U_q(\mathcal{G})$ ,  $q^r \neq 1$  pour tout entier  $r > 1$ , on trouve une matrice  $R$  dans certaines complétions formelles ; cela donne des matrices ordinaires pour les modules  $V$  de dimensions finies.

Quand on spécialise à  $q = \exp(2\pi i \frac{s}{r})$ ,  $(s, r) = 1$  et  $(r, n+1) = 1$ , le quotient  $u_\varepsilon$  de  $U_q(\mathfrak{sl}(n+1))$  par un certain idéal bilatère de Hopf, engendré par les éléments du centre, est une algèbre de Hopf de dimension finie qui possède une matrice  $R$  (M. Rosso, [KRT, p43]). Cette construction peut s'étendre à toutes les algèbres de Lie simples et toutes les racines primitives de l'unité (Turaev-Wenzl, [Vog, KRT]).

A côté des matrices  $R$  universelles qui représentent les croisements des brins de la projection plane d'un entrelacs, il arrive qu'on sache définir dans  $A$  des éléments qui représentent des torsions de bandes, et d'autres éléments pour les arcs de naissances et de morts de couples de brins. Il en résulte des invariants de nœuds et d'entrelacs : pour un entrelacs  $L$ , le nombre  $\tau(L)$  est une somme de traces d'opérateurs associés à un coloriage des composantes connexes de  $L$  par des représentations irréductibles de  $A$ .



Pour les invariants de variétés fermées, il faut une structure supplémentaire sur un ensemble de  $A$ -modules de dimension finie, qui est codée par la notion de catégorie modulaire. Par exemple, pour  $\varepsilon = \exp(2\pi i \frac{s}{r})$ , Reshetikhin et Turaev, Rosso, Andersen ont démontré qu'il n'y a qu'un nombre fini de  $u_\varepsilon$ -modules simples de dimension finie, et qu'une catégorie quotient de celle des  $u_\varepsilon$ -modules de dimension finie (celle où  $f \approx 0$  si et seulement si pour tout  $g$  on a  $tr(gf) = 0$ ) satisfait à toutes les conditions requises pour être modulaire.

En particulier, dans cette catégorie, les produits tensoriels d'objets simples se décomposent en somme de modules simples (bien que l'algèbre  $u_\varepsilon$  ne soit pas semi-simple).

En partant de là, on a une définition d'invariants de variété de dimension 3 : on présente la variété  $M$  comme le résultat d'une chirurgie entière sur un entrelacs  $L$  de  $S^3$ . Alors  $\tau(M) = \tau(L)$  avec la normalisation  $\tau(S^3) = 1$ . Ainsi chaque algèbre de Lie simple et chaque racine primitive de l'unité engendre un invariant involutif et multiplicatif.

Pour l'algèbre de Lie  $sl_2(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon = \exp(2\pi i/r)$ , c'est l'invariant  $\tau_r(M)$  défini par Reshetikhin et Turaev (dans la normalisation de [KM]). Kirby et Melvin ont montré que l'invariant  $\tau_r$  s'exprime en fonction des valeurs du polynôme de Jones.

$$q^{-2} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} - q^2 \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = (q - q^{-1}) \begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right. \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

Tout est parti du polynôme introduit par V. Jones en 1984. En 1988, Witten a donné une interprétation physique de ce polynôme en expliquant ses propriétés tridimensionnelles [Wit]; la même année Reshetikhin et Touraev ont donné un sens mathématique à la théorie de Chern-Simons proposée par Witten [R-T], en construisant ainsi un chemin qui va de l’algèbre aux nœuds et aux variétés.

## 4. La théorie topologique des champs

### 4.1. Aperçu des axiomes

Nous allons dans la suite considérer une théorie topologique des champs (TQFT) dans un sens assez étroit mais en relâchant l’hypothèse essentielle de dimension finie. La théorie topologique des champs est une notion qui a été dégagée par Atiyah, Segal et Witten.

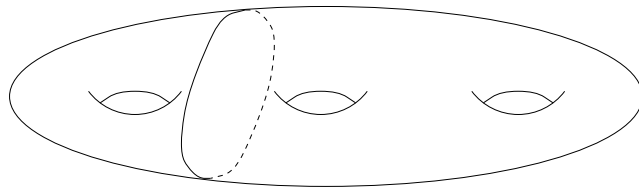
Les relations avec les invariants quantiques et l’étude approfondie des axiomes ont été en particulier menées par Touraev [Tur1].

Ce sont Reshetikhin et Touraev qui ont construit la théorie prédite par Witten en se servant des groupes quantiques. Il faut aussi citer les approches de Crane, Degiovanni, Quinn, Funar.

Funar développe une notion de représentation hermitienne tensorielle [Fun] qui peut se substituer à celle de foncteur modulaire comme premier ingrédient d’une TQFT.

Fixons pour chaque entier  $g \geq 0$  une surface orientée fermée de genre  $g$  de référence  $\Sigma_g$  et désignons par  $\Gamma_g$  le groupe modulaire de  $\Sigma_g$ , c’est-à-dire le quotient du groupe des difféomorphismes de  $\Sigma_g$  qui préservent l’orientation par le sous-groupe de ceux qui sont isotopes à l’identité.

Une représentation hermitienne tensorielle de  $\Gamma_*$  est la donnée d’une famille  $\{E_g, g \geq 0\}$  d’espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$  qui sont munis d’une forme hermitienne non dégénérée notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , d’une action unitaire  $\rho_g$  de  $\Gamma_g$  et d’une famille de plongements isométriques de  $E_g \otimes E_h$  dans  $E_{g+h}$  notés  $r_{g,h}$ . On demande :  $E_0 = \mathbb{C}$ ,  $r_{g,0} = r_{0,g} = Id_{E_g}$  et l’espace  $\overline{E}_g$  est associé à  $-\Sigma_g$ .



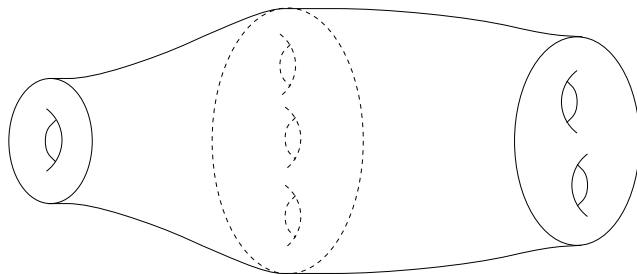
Le tout est soumis à la contrainte de commutativité et d’associativité correspondant au retournement par rapport à la coupure et aux découpages successifs.

Une TQFT associée à cette représentation hermitienne est la donnée d’un vecteur de  $E_g$  pour chaque variété de dimension 3 orientée compacte de bord



$\partial M$  munie d'un isomorphisme  $\varphi : \partial M \rightarrow \Sigma_g$  et plus généralement d'un élément  $Z(M) \in E_g \otimes \overline{E_h} \dots$  pour toute variété compacte de bord paramétré par  $\Sigma_g \cup -\Sigma_h \dots$

On demande au vecteur  $Z(M)$  de ne dépendre que de la classe d'isomorphisme de  $M$  (voir section 10) et que le recollement soit donné par des contractions de tenseurs (fonctorialité).



En particulier pour une variété  $V$  sans bord, on obtient un nombre  $Z(V) \in E_0 = \mathbb{C}$  qui vaut le produit scalaire  $\langle M, N \rangle$  quel que soit le découpage de  $V = M \cup_{\Sigma_g} -N$ . Ainsi à partir de  $Z$ , on obtient un caractère involutif

REMARQUE : ici il s'agit d'une TQFT en version simplifiée, sans anomalie, sans structure supplémentaire comme les  $p_1$ -structures, les décorations, les structures spin.

#### 4.2. La construction de Pierre Vogel

L'idée est de construire une théorie topologique à partir d'un caractère; elle est réalisée dans [BHMV, Fun, Tur1]. Partons d'un invariant  $\chi$  des variétés de dimension 3 orientées qui est multiplicatif et involutif :

$$\begin{cases} \chi(S^3) = 1, \\ \chi(-V) = \overline{\chi(V)}, \\ \chi(V \# V') = \chi(V)\chi(V'). \end{cases}$$

Soit  $\Sigma$  la surface de référence de genre  $g$  et soient  $M$  et  $M'$  deux variétés de bord  $\Sigma$ ; nous dirons que les variétés  $M$  et  $M'$  sont isomorphes si il existe un difféomorphisme préservant l'orientation et qui induit l'identité sur le bord. L'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés orientées compactes, connexes et de bord  $\Sigma_g$  sera noté  $\mathcal{V}(\Sigma)$ . Nous reviendrons en détail sur cette notion dans la section 10.

Considérons le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ayant pour base  $\mathcal{V}(\Sigma)$  et noté  $\mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle$ . Les éléments  $x$  de  $\mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle$  s'écrivent  $\sum_i \lambda_i M_i$  où  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  et  $M_i \in \mathcal{V}(\Sigma)$ , la somme étant finie. On définit l'application

$$B_\chi : \mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle \times \mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle \rightarrow \mathbb{C}$$

sur la base par  $B_\chi(M, N) = \chi(M \cup_\Sigma -N)$ ; on la prolonge en forme hermitienne sur  $\mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle$  par  $B(x, y) = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\mu}_j \chi(M_i \cup_\Sigma -N_j)$  si  $x = \sum_i \lambda_i M_i$  et  $y = \sum_j \mu_j N_j$ . Notons  $\mathcal{N}_\chi^g$  le noyau de  $B$  ([Fun,BH MV]) :

$$\mathcal{N}_\chi^g = \{x \in \mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle / \forall y \in \mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle, B(x, y) = 0\}.$$

Le quotient  $E_\chi^g$  de  $\mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle$  par  $\mathcal{N}_\chi^g$  définit une représentation hermitienne tensorielle, avec TQFT associée.

On dit qu'un caractère  $\chi$  est rationnel si l'espace  $E_\chi^g$  est de dimension finie pour tout  $g$ .

REMARQUE : c'est le cas des invariants de Witten et Reshetikhin-Turaev. Dans les axiomes de foncteurs modulaires et d'invariants quantiques, la condition de rationalité est la plus forte et la plus difficile à vérifier.

Le présent travail va porter uniquement sur l'espace  $E_1$  et on cherchera des conditions de finitude plus faibles : finitude comme  $\Gamma_1$ -module pour des caractères comme  $\chi_P$ .



## PARTIE 2 : OUTILS DE LA DIMENSION 3

### 5. Les surfaces incompressibles

Toutes les variétés et sous-variétés considérées ici seront supposées compactes, connexes, orientées et éventuellement à bord non vide.

DÉFINITION 5.1 : la surface  $S$  est dite compressible dans une variété  $V$  de dimension 3 si au moins une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- la surface  $S$  est une sphère qui borde une boule ou
- il existe un disque  $D \subset V$  tel que  $D \cap S = \partial D$  et la classe d'homotopie  $[\partial D]$  est non triviale dans  $\pi_1(S)$ .

On dit qu'une surface est incompressible si elle n'est pas compressible.

EXEMPLES : 1) le bord d'un tore solide (homéomorphe à  $D^2 \times S^1$ ) est compressible.

2) Un nœud de  $S^3$  est non trivial si et seulement si son complémentaire est à bord incompressible.

3) Soient  $M$  et  $M'$  deux complémentaires de nœuds non triviaux dans  $S^3$ . Soit  $(\mu, \lambda)$  (resp.  $(\mu', \lambda')$ ) le méridien et un parallèle de  $M$  (resp.  $M'$ ). Soit  $f$  un homéomorphisme de  $\partial M$  sur  $\partial M'$  qui renverse l'orientation et qui envoie  $\mu$  sur  $\lambda'$  et  $\lambda$  sur  $\mu'$ . Le recollement de  $M$  et  $M'$  via  $f$  donne une sphère d'homologie avec un tore incompressible séparant.

Pour les surfaces incompressibles, on a la caractérisation suivante ([Jac, p34]) :

PROPOSITION 5.2. — *Soit  $S$  une surface dans une variété  $V$  de dimension 3 qui n'est pas une sphère  $S^2$ . Alors la surface  $S$  est incompressible si et seulement si l'application  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(V)$  induite par le plongement est injective.*

DÉFINITION 5.3 : on dit qu'une variété de dimension 3,  $M$ , irréductible est suffisamment grande si elle possède une surface incompressible, on les appelle aussi les variétés de Haken.

EXEMPLES : 1) Si une variété première  $V$  différente de  $S^2 \times S^1$  vérifie  $H_1(V, \mathbb{Q}) \neq 0$ , alors elle est de Haken.

2) Le groupe fondamental d'une variété de Haken est un produit amalgamé (cas séparant) ou une HNN-extension (cas non séparant), en particulier il est toujours sans torsion.

3) Réciproquement si une variété irréductible a un groupe fondamental infini alors elle n'est pas forcément de Haken ([Wald2]).

Un résultat très important de Waldhausen sur les variétés de Haken, est l'analogie des théorèmes de Nielsen sur les surfaces compactes :

THÉORÈME 5.4[Wald1]. — Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés de Haken à bord incompressible. Soit  $f : (M, \partial M) \rightarrow (M', \partial M')$  une application continue telle que le morphisme  $\pi_1(f)$  soit injectif. Alors l'application est homotope à un revêtement ou alors  $M$  est homéomorphe au produit d'un intervalle par une surface.

Si  $\pi_1(f)$  est un isomorphisme, l'application  $f$  est homotope à un homéomorphisme.

REMARQUE : la classe d'isomorphisme d'une variété de Haken est donc déterminée par son groupe fondamental et sa structure périphérique.

On en déduit immédiatement les corollaires suivants :

COROLLAIRE 5.5. — Soient  $V$  et  $V'$  deux variétés de Haken fermées. Alors elles sont homéomorphes si et seulement si  $\pi_1(V) = \pi_1(V')$ .

Waldhausen a aussi montré dans [Wald1] que dans une variété de Haken, deux difféomorphismes homotopes sont isotopes. On a donc :

THÉORÈME 5.6. — Le groupe de difféotopie d'une variété de Haken fermée  $V$  s'identifie à  $Out(\pi_1(V))$ .

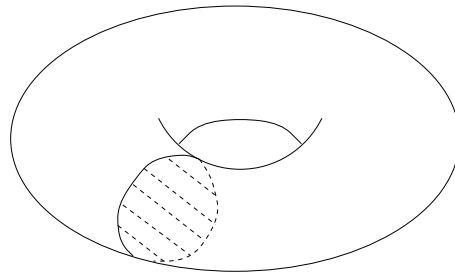
DÉFINITION 5.7 : on dit qu'une surface  $S$  proprement plongée dans une variété  $M$  est  $\partial$ -compressible si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

une composante du bord de  $S$  borde un disque  $D$  dans  $\partial M$ ,

ou il existe un disque  $D$  tel que  $D \cap (S \cup \partial M) = \partial D$  et que  $D \cap S$  soit un arc indéformable dans  $\partial S$ .

Une surface qui n'est pas  $\partial$ -compressible est dite  $\partial$ -incompressible.

EXEMPLE : la seule surface incompressible et  $\partial$ -incompressible d'un tore solide est son disque de compression.



DÉFINITION 5.8 : on dit qu'une surface  $S$  proprement plongée dans une variété  $M$  est essentielle si elle est incompressible et  $\partial$ -incompressible.

REMARQUE : un tore ou un anneau  $S$  est essentiel lorsque les applications  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  et  $\pi_1(S, \partial S) \rightarrow \pi_1(M, \partial M)$  induites par le plongement sont injectives.

Voici un résultat de finitude de Hatcher [Hat] basé sur le travail de Floyd et Oertel [Fl-O]

THÉORÈME 5.9. — *Soit  $M$  une variété orientable irréductible avec un bord homéomorphe à un tore. Alors le nombre de classes d'isotopie non orientée de courbes du bord qui sont le bord d'une surface incompressible et  $\partial$ -incompressible est fini.*

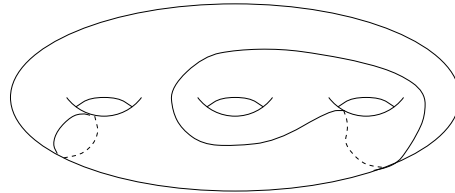
A partir des anses pleines, on peut construire toutes les variétés de dimension 3 fermées (scindement de Heegaard).

DÉFINITION 5.10 : soit  $B$  une boule fermée. On considère une famille de  $2g$  disques distincts sur le bord, notée  $\{D_1, D'_1, \dots, D_g, D'_g\}$ ,  $g > 0$ . On effectue le recollement orientable de  $D \times [0, 1]$  en identifiant  $D \times 0$  avec  $D_i$  et  $D \times 1$  avec  $D'_i$ . Cette opération est faite pour toute la famille de disques, et on obtient une variété irréductible ayant pour bord une surface de genre  $g$ .

Le résultat obtenu s'appelle une anse pleine de genre  $g$ .

DÉFINITION 5.11 : soit  $\Sigma$  une surface fermée orientable de genre  $g$ . Un système de découpe (cut system) de  $\Sigma$  est une classe d'isotopie de  $g$  courbes disjointes  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$  telle que  $\Sigma - \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$  soit homéomorphe à une sphère privée de  $2g$  disques.

On dit que le système de découpe est partiel si on peut le compléter en un système de découpe.



Réciproquement on a :

PROPOSITION 5.12. — *Soit  $M$  une variété irréductible compacte dont le bord est un tore et qui possède une courbe du bord compressible alors c'est un tore solide.*

Démonstration : le noyau  $\ker(\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M))$  est non trivial. Donc d'après le théorème du lacet, il existe un cercle  $C$  plongé dans  $\Sigma$  dont la classe d'homotopie est non nulle dans  $\Sigma$  (courbe de compression) et nulle dans  $M$  et d'après le lemme de Dehn, il existe un disque  $D$  plongé dans  $M$  ayant pour bord  $C$ .

Le disque  $D$  a deux côtés, et en retirant un voisinage tubulaire de  $D$ , on obtient une variété dont le bord est une surface de genre 0 (chirurgie d'indice deux). Comme la variété est irréductible, c'est une boule.

Ainsi  $M$  se réalise comme la réunion orientable d'une boule sur laquelle on colle une anse, c'est donc un tore solide.  $\square$

REMARQUE : cette proposition est un résultat de Papakyriakopoulos et elle se généralise au genre  $g$  ([Pa1,Pa2]).

## 6. Les fibrations de Seifert

### 6.1. Présentation

DÉFINITION 6.1.1 : fibration du tore solide.

On identifie le disque  $D$  comme l'ensemble  $\{re^{i\theta}, r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi[ \}$ . Soient  $I = [0, 1]$  et  $(p, q)$  un couple d'entiers premiers entre eux. Soit  $f : D \times 0 \rightarrow D \times 1$  l'homéomorphisme défini par  $f((r, \theta), 0) = ((r, \theta + 2\pi p/q), 1)$ . Soit  $T_{p,q}$  la variété obtenue à partir de  $D \times I$  en identifiant  $D \times 0$  avec  $D \times 1$  via l'application  $f$ . La variété  $T_{p,q}$  est isomorphe au tore solide  $D^2 \times S^1$ , mais nous nous intéressons à sa réalisation comme réunion de cercles (ces cercles sont, sauf pour  $r = 0$ , réunion de  $q$  images d'intervalles  $I$  et enlacent  $p$  fois l'âme du tore).

Un tore solide fibré est un tore solide muni de cette structure.

DÉFINITION 6.1.2 : Une variété de Seifert est une variété de dimension 3 compacte, orientée, connexe telle que :

la variété  $M$  se réalise comme une réunion de cercles appelés fibres et chaque fibre admet un voisinage qui est un tore solide fibré.

DÉFINITION 6.1.3 : les fibres qui admettent comme voisinage un tore solide de type  $(p, 1)$  sont dites régulières; sinon lorsque  $q > 1$ , l'âme d'un tore fibré  $T_{p,q}$  s'appelle fibre exceptionnelle et l'entier  $q$  est l'ordre de cette fibre.

On a une application quotient dont l'image s'appelle espace des orbites.

Par compacité, le nombre de fibres exceptionnelles est fini.

Les variétés de Seifert qui sont de Haken ont été classifiées par Waldhausen. Dans le cas non Haken avec un groupe fondamental infini, la classification a été faite par Orlik-Vogt-Zieschang. Dans le cas d'un groupe fondamental fini, elle est due à Seifert et Threlfall.

PROPOSITION 6.1.4. — Si  $M$  est une variété de Seifert et  $M \neq \mathbb{P}^3 \mathbb{R} \# \mathbb{P}^3 \mathbb{R}$ , alors  $M$  est irréductible.

EXEMPLES : Tous les lenticulaires sont des fibrés de Seifert. Pour la sphère  $S^3$ , c'est la fibration de Hopf.

Le bord d'une variété de Seifert est une réunion de tores.

Les complémentaires des nœuds toriques sont fibrés (sur un disque avec deux fibres exceptionnelles).

Nous dirons qu'une variété est à fibration unique si toutes les fibrations de Seifert sont homéomorphes entre elles.

LISTE DES VARIÉTÉS À FIBRATION NON UNIQUE 6.1.5 [Joh2]

- a) Les espaces lenticulaires y compris  $S^3$  et  $S^2 \times S^1$ .
- b) Le  $[0, 1]$ -fibré tordu sur une bouteille de Klein (voir 6.2).
- c) Le double du  $[0, 1]$ -fibré tordu sur une bouteille de Klein qui admet une fibration sur la sphère  $S^2$  avec quatre fibres exceptionnelles.
- d) Le tore solide
- e) Les prismes : ce sont des fibrés sur  $S^2$  avec trois fibres exceptionnelles d'indices 2, 2 et  $\alpha$  avec  $\alpha > 1$ . On les obtient également comme des fibrés sur  $\mathbb{P}^2$  avec une fibre exceptionnelle.

THÉORÈME 6.1.6 [Joh2]. — *Soient  $M$  et  $N$  deux fibrés de Seifert et  $f : M \rightarrow N$  un homéomorphisme. Alors si la variété  $M$  n'appartient pas à la liste 6.5, l'homéomorphisme est isotope à un homéomorphisme qui respecte la fibration de  $M$  sur  $N$ .*

L'énoncé d'isotopie pour une variété de Haken a été démontré par Waldhausen [Wald3]. Dans le cas d'une variété avec un groupe fondamental infini, mais qui n'est pas de Haken, cela a été fait par Scott. Pour le reste, c'est dû à Otal et Boileau [Boi-O]. Si on veut simplement une homotopie, le résultat vient de Seifert pour un groupe fondamental infini et de Seifert et Threlfall pour le cas d'un groupe fondamental fini.

Dans une variété de Seifert, à isotopie près, les tores essentiels sont verticaux ou horizontaux. Les tores verticaux sont réunion de fibres régulières. Les tores horizontaux sont transverses aux feuilletage de Seifert et sont fibres d'une fibration sur le cercle : c'est le cas des variétés euclidiennes.

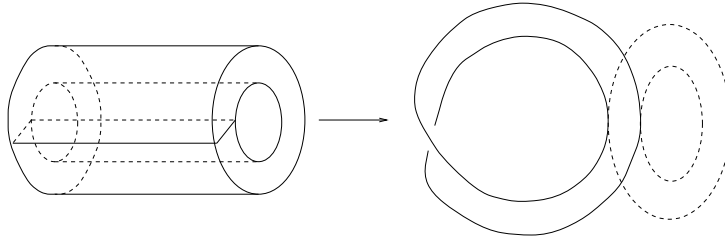
Mise à part l'exception qui va suivre, nous ne parlerons pas de fibrés en intervalles car les propriétés de ce type de variétés ne seront pas utilisées ici.

### 6.2. Le $[0, 1]$ -fibré tordu sur la bouteille de Klein

Nous allons décrire les différentes fibrations qui réalisent cette variété. On la note  $M$ .

- La variété  $M$  est le  $[0, 1]$ -fibré tordu sur une bouteille de Klein.
- La variété  $M$  est le fibré en cercles orientable sur une bande de Moebius.





- La variété  $M$  est le fibré singulier de Seifert sur un disque avec deux fibres exceptionnelles d'ordre 2.
- Une autre présentation possible est un fibré en anneaux sur un cercle.

La bouteille de Klein a un groupe fondamental qui s'identifie au groupe  $\pi_1(V) = \langle a, b; a^2 = b^2 \rangle$  (somme connexe de deux plans projectifs). La fibre est contractile donc le groupe fondamental de  $M$  est  $\pi_1(V) = G$ .

Afin de relier les différentes définitions de cette variété, nous proposons la construction suivante : on part de  $I \times S^1 \times J$  avec  $I = [-1, 1]$ ,  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $J = [0, 2\pi]$ . La variété  $M$  s'obtient en recollant  $I \times S^1 \times \{0\}$  avec  $I \times S^1 \times \{2\pi\}$  en identifiant  $(x, \varphi, 0)$  à  $(-x, -\varphi, 2\pi)$ .

L'image dans le recollement de  $\{0\} \times S^1 \times J$  est une bouteille de Klein sur laquelle  $M$  se réalise comme un fibré en intervalles  $I$ .

Il y a dans  $M$  deux bandes de Möbius évidentes : ce sont les images de  $I \times \{0\} \times J$  et  $I \times \{\pi\} \times J$ , sur lesquelles  $M$  se réalise comme fibré en cercles.

La fibration de Seifert de  $M$  sur un disque  $\Delta$  avec deux fibres exceptionnelles d'indice 2, se voit en prenant les images dans le recollement des  $\{x, \varphi\} \times J$ , les deux exceptions sont  $\{0, 0\} \times J$  et  $\{0, \pi\} \times J$ .

Comme anneaux incompressibles, on a  $G_\theta = I \times S^1 \times \{\theta\}$  et  $K_\varphi = I \times \{\varphi\} \times J \cup I \times \{-\varphi\} \times J$ , avec  $\varphi \neq 0, 2\pi$ . Waldhausen [Wald3] a démontré que toute surface orientable (à bord ou non) incompressible dans  $M$ , non parallèle au bord est isotope à  $G$  ou à  $K$ .

Soit  $f$  la fibre de la fibration de la variété  $M$  au dessus de la bande de Möbius, alors le bord orienté de l'anneau  $G$  est  $2f$ . C'est-à-dire que  $f$  est une pente bordante (Cf 10.3) et la courbe  $2f$  engendre le noyau de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})$ .

Soit  $f_1$  la fibre type de la fibration singulière de  $M$  sur  $D^2$ . Alors le bord orienté de l'anneau  $K$  est  $f_1 \cup -f_1$ . Dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$ ,  $f_1$  est le double d'une classe  $g_1$ . On a  $H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

REMARQUE : cette variété est atoroidale sans être hyperbolique (voir section 7).

## 7. La sous-variété caractéristique

Soit  $M$  une variété de dimension 3 éventuellement à bord. Une sous-variété caractéristique  $V(M)$  de  $M$  est une sous-variété de codimension 0 plongée dans  $M$  telle que :

1) chaque composante connexe de  $V(M)$  est une variété de Seifert (resp. un fibré en intervalles sur une surface), dont le bord est réunion d'anneaux ou de tores de  $\partial M$  constitués d'une réunion de fibres (resp. réunion de bords de fibres) et d'anneaux ou de tores essentiels dans  $M$ .

2) La variété  $V(M)$  est maximale, c'est-à-dire que toute sous-variété de  $M$  qui vérifie 1) peut être isotopée dans  $V(M)$  et qu'aucune réunion de composantes de  $M - V(M)$  ne peut être ajoutée à  $V(M)$  en respectant 1).

REMARQUES : 1) un sous-groupe abélien libre de rang 2 de  $\pi_1(M)$  se réalise comme un sous-groupe de  $\pi_1(V(M))$ .

Si le bord de  $M$  est incompressible ou vide, alors la variété  $V(M)$  est de Seifert et son bord est formé de tores essentiels.

2) L'adhérence de  $\partial V(M) - \partial M$  est une réunion de tores incompressibles et d'anneaux incompressibles proprement plongés.

THÉORÈME 7.1([Joh1,Joh2,J-S]). — *Soit  $M$  une variété de dimension 3 orientable et compacte, alors  $V(M)$  existe et est unique dans  $M$  à isotopie près.*

REMARQUE : la sous-variété  $V(M)$  peut être vide si  $M$  est hyperbolique.

DÉFINITION 7.2 : soit  $M$  une variété irréductible dont le bord est une réunion de tores. Si la variété  $V(M)$  est homéomorphe à  $\partial M \times [0, 1]$ , alors on dit que la variété  $M$  est simple.

DÉFINITION 7.3 : une variété  $M$  de dimension 3 est atoroïdale si tout sous-groupe de  $\pi_1(M)$  isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$  est périphérique.

REMARQUES :

- une variété simple est atoroïdale.
- Le théorème 7.1 a été établi indépendamment par Jaco - Shalen [J-S] et Johannson [Joh1].
- Deux variétés simples homotopiquement équivalentes sont homéomorphes. Pour ces variétés, les équivalences d'homotopie se déforment en difféomorphismes. C'est un théorème de Johannson ([Joh2,prop 16.9]). Par exemple, on en déduit que si  $K$  est un noeud de  $S^3$  qui n'est pas un noeud torique ou un câble, alors le complémentaire de  $K$  est caractérisé par son groupe fondamental.
- Si  $M$  est un fibré singulier de Seifert, alors  $V(M) = M$ .
- Le célèbre théorème de Thurston dit que si  $M$  est irréductible et atoroïdale et n'est pas un fibré en intervalles sur une bouteille de Klein ou  $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ , alors  $\overset{\circ}{M}$  admet une métrique hyperbolique complète de volume fini. Autrement dit, il

existe un sous-groupe discret sans torsion  $\Gamma \subset \mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$  tel que  $\overset{\circ}{M} = \mathbb{H}^3/\Gamma$ . Ces variétés sont caractérisées par leur groupe fondamental ([Th1, Th2]).

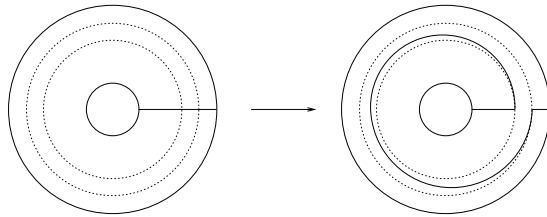
- La propriété que tout sous-groupe  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  de  $\pi_1(M)$  se réalise, à conjugaison près, comme sous-groupe de  $\pi_1(V(M))$  est vraie en toute généralité d'après les travaux de J. Haas, P. Tukia, D. Gabai et A. Casson-D. Jungreis. Une variété compacte orientable dont le groupe fondamental contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , contient un tore incompressible ou bien est de Seifert.

### 8. Le groupe de difféotopie d'une variété de Haken

Nous allons définir les twists de Dehn. Pour une surface, on sait que ces transformations engendrent le groupe modulaire d'une surface fermée orientable et de plus on peut montrer qu'un nombre fini de twists engendre ce groupe (voir le livre de Birman).

DÉFINITION 8.1 : twist de Dehn pour une surface.

Soient  $\Sigma$  une surface fermée orientable de genre  $g$  et  $\gamma$  une courbe fermée simple plongée dans  $\Sigma$ . Soit  $U$  un voisinage tubulaire de  $\gamma$ ; ce voisinage est homéomorphe à un anneau  $(S^1 \times [0, 1])$ . On choisit donc un système de coordonnées  $(\theta, t)$  où  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $t \in [-1, 1]$ . Le twist de Dehn associé à la courbe  $\gamma$  est l'application  $\tau_\gamma$  de  $\Sigma$  dans  $\Sigma$  qui vaut  $\tau_\gamma(\theta, t) = (\theta + \pi(t + 1), t)$  sur  $U$  et l'identité à l'extérieur de  $U$ .



Pour les variétés de dimension 3, l'idée est la même, mais les twists de Dehn sont associés à des tores et à des anneaux lorsqu'il y a un bord.

DÉFINITION 8.2 : soient  $T$  un tore plongé dans une variété  $M$  et  $U_T$  un voisinage tubulaire de  $T$ . Le tore  $T$  est identifié à  $S^1 \times S^1$ . Un voisinage de  $T$  s'identifie à  $S^1 \times S^1 \times [-1, 1]$ ; alors soit  $(\varphi, \theta, t)$  un système de coordonnées. On choisit un couple d'entiers  $(m, n)$  et on pose  $\tau_{(m,n)}(\varphi, \theta, t) = (\varphi + m\pi(t + 1), \theta + n\pi(t + 1), t)$ . Si le tore  $T$  est non séparant, alors l'ensemble des transformations  $\tau_{m,n}$  forme un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .

Les twists sur un anneau se définissent de façon analogue avec un paramètre  $n \in \mathbb{Z}$ .

On note  $\text{Aut}(M)$  le groupe des automorphismes de  $M$  et  $\text{Aut}^0(M)$  le sous-groupe distingué des automorphismes isotopes à l'identité. On pose  $\Gamma(M) = \text{Aut}(M)/\text{Aut}^0(M)$ .

THÉORÈME 8.3(Johannson). — *Soit  $M$  une variété de Haken. Alors le sous-groupe de  $\Gamma(M)$  engendré par les twists de Dehn est d'indice fini.*

COROLLAIRE 8.4. — *Si la variété  $M$  est simple alors le groupe  $\Gamma(M)$  est fini.*

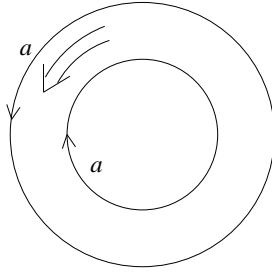
On suppose que la surface  $\Sigma$  est un tore connexe de genre 1. On note  $\langle, \rangle$  la forme d'intersection algébrique de la surface  $\Sigma$ .

PROPOSITION 8.5. — *Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{V}(\Sigma)$ . Alors un twist de Dehn induit la transformation identité sur  $\Sigma$ .*

Démonstration : il suffit de regarder un twist  $\tau_A$  sur un anneau  $A$  essentiel et proprement plongé. On pose  $[\partial A] = a + a'$  dans  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  avec  $a = a'$  ou  $a = -a'$ . Soit  $\gamma$  une courbe essentielle de  $\Sigma$ . Alors  $[\tau_A(\gamma)]$  vaut  $\gamma + n\langle\gamma, a\rangle a - n\langle\gamma, a'\rangle a'$ . Donc  $[\tau_A(\gamma)] = \gamma$ .  $\square$

REMARQUES : 1) si  $a = -a'$ , l'anneau  $A$  se déforme en un tore et le twist sur  $A$  est isotope à un twist sur un tore.

2) Si  $a = a'$  alors  $[\partial A] = 2a$ . Le twist avance de  $n$  tours sur l'un des deux cercles du bord mais recule de  $n$  tours sur l'autre.



3) On peut comparer ce qui vient d'être dit à [Gab1, p 470].

## 9. Les résultats de Gordon et Luecke

Nous avons évoqué à la section 5 le théorème de Hatcher. Nous énonçons ici des théorèmes qui nous permettront par la suite d'obtenir des résultats de finitude pour les théories de champs déduites de caractères premiers.

Dans tout ce qui suit, on suppose que  $M$  est une variété irréductible, à bord connexe de genre 1.

DÉFINITION 9.1 : une pente est la classe d'isotopie non orientée d'une courbe fermée simple essentielle sur un tore.

Le choix d'une base de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  donne un couple d'entiers  $(a, b)$  premiers entre eux et définis au signe près, tel que la pente se représente par le quotient  $a/b$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ .

DÉFINITION 9.2 : soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux pentes. On note  $\Delta(\alpha, \beta)$  le nombre d'intersection géométrique, c'est-à-dire le nombre minimum de points d'intersection entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

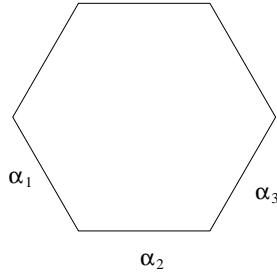
En représentant la pente  $\alpha$  par  $a/b$  et la pente  $\beta$  par  $c/d$ , on a  $\Delta(\alpha, \beta) = |ad - bc|$ .

EXEMPLE : si  $\Delta(r, s) = 0$  alors  $r = s$ .

DÉFINITION 9.3 : on dit qu'une pente est planaire si elle est le bord d'une surface planaire (c'est-à-dire homéomorphe à une sphère privée de disques) incompressible et  $\partial$ -incompressible. On a le théorème suivant de Gordon et Luecke [Go-L2] :

THÉORÈME 9.4. — *Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux pentes planaires de  $M$  alors  $\Delta(\alpha, \beta) \leq 1$ .*

On en déduit qu'il y a au plus trois obturations réductibles. Si une pente planaire a pour coordonnées  $1/0$  alors les deux autres valent  $n/1$  et  $n + 1/1$  (elles sont entières).



En identifiant deux par deux les côtés opposés d'un hexagone régulier, on obtient un tore avec les courbes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  qui vérifient  $\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta(\alpha_2, \alpha_3) = \Delta(\alpha_3, \alpha_1) = 1$ .

Voici un autre résultat de finitude, dû à Culler, Gordon, Luecke et Shalen [CGLS]. Si  $r$  est une pente de  $\partial M$ , notons  $M(r)$  la variété obtenue en collant un tore plein à  $M$  de telle sorte que  $r$  borde un disque.

THÉORÈME 9.5. — *Supposons que la variété  $M$  ne soit pas un fibré de Seifert. Si  $\pi_1(M(r))$  et  $\pi_1(M(s))$  sont des groupes cycliques alors  $\Delta(r, s) = 1$ .*

**10. Les variétés à bord paramétré**

*10.1. Définition*

Ici,  $\Sigma$  désigne une surface fermée orientée connexe de genre  $g$ . Ce sera notre surface de référence. On note  $-\Sigma$  la surface avec l'orientation opposée, et  $\Gamma$  le groupe modulaire de  $\Sigma$ , c'est-à-dire le quotient du groupe des difféomorphismes préservant l'orientation par le sous-groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité de  $\Sigma$ .

Soit  $m$  une variété compacte connexe, orientée, à bord homéomorphe à  $\Sigma$ . On dit que la variété  $m$  est à bord paramétré si elle est munie d'un homéomorphisme  $\varphi$  préservant l'orientation entre  $\partial m$  et  $\Sigma$ . La règle pour orienter le bord est celle de la normale sortante en premier (outward normal first, Stokes).

Soient  $M = (m, \varphi)$  et  $M' = (m', \varphi')$  deux variétés à bord paramétré. Ici  $-M$  désigne la variété  $M$  avec l'orientation opposée; elle est de bord  $-\Sigma$ . Le quotient  $V = (m \amalg -m') / (x = \varphi'^{-1}\varphi(x))$  a une structure de variété fermée orientée. On note  $V = m \cup_{\varphi'^{-1}\varphi} -m'$  ou  $M \cup_{\Sigma} -M'$ .

PROPOSITION 10.1.1. — *La variété  $m$  étant fixée, on a une action de  $\Gamma$  sur la collection des variétés  $M$  définie par :  $\sigma.M = (m, \sigma \circ \varphi)$  et on a  $M \cup_{\Sigma} -M' = \sigma.M \cup_{\Sigma} -\sigma.M'$  quelque soit  $\sigma$  élément de  $\Gamma$ .*

PROPOSITION 10.1.2. — *Le recollement vérifie  $M \cup_{\Sigma} -M' = -(M' \cup_{\Sigma} -M)$ .*

On introduit la relation d'équivalence  $\approx$  suivante définie sur la collection des variétés à bord paramétré :

$$(m, \varphi) \approx (m', \varphi') \Leftrightarrow \exists f : m \rightarrow m' \text{ un homéomorphisme tel que } f|_{\partial m} = \varphi'^{-1}\varphi.$$

L'ensemble des classes d'équivalence sera noté  $\mathcal{V}(\Sigma)$  et l'ensemble des éléments irréductibles de  $\mathcal{V}(\Sigma)$  sera noté  $\mathcal{P}(\Sigma)$ .

On a donc :

LEMME 10.1.3. — *Soit  $h$  un automorphisme de  $\Sigma$  tel que  $\varphi'^{-1}h\varphi$  se prolonge en un homéomorphisme qui respecte l'orientation de  $M$  sur  $M'$ , alors  $h(M) \approx M'$ .*

Soit  $(m, \varphi)$  un élément de  $\mathcal{V}(\Sigma)$ . Alors  $M$  s'identifie à une variété de bord  $\Sigma$  en identifiant  $\partial m$  à  $\Sigma$  par  $\varphi$ .

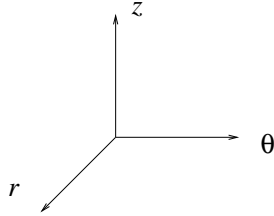
On peut donc aussi travailler dans la catégorie des variétés de bord  $\Sigma$ . Deux éléments  $M$  et  $M'$  sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme  $f$  de  $M$  dans  $M'$

isotope à l'identité sur  $\Sigma$ . Les variétés  $M$  et  $\sigma.M$  sont isomorphes si  $\sigma$  se prolonge en un homéomorphisme respectant l'orientation de  $M$ .

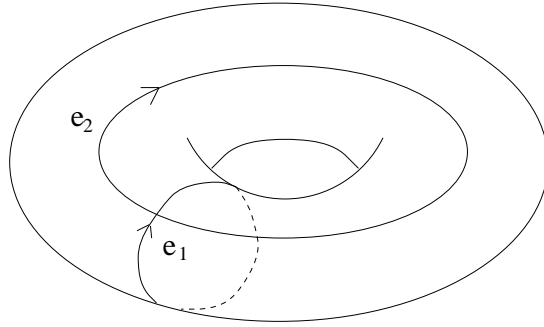
REMARQUE : la notion précédente ne nécessite pas une surface connexe.

10.2. *Le cas particulier du tore solide.*

Nous noterons  $H$  la variété identifiée à  $D^2 \times S^1$  avec l'orientation donnée par le trièdre  $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_z)$ .



On choisit une base orientée  $\{e_1, e_2\}$  du  $H_1$  du bord identifié au tore  $\Sigma$ . La courbe  $e_1$  borde un disque et la courbe  $e_2$  engendre le groupe fondamental.



Le groupe  $\Gamma_1$  est isomorphe à  $SL_2(\mathbb{Z})$ . On note  $\Gamma_1^\infty$  le sous-groupe de  $\Gamma_1$  engendré par les homéomorphismes de  $\partial H$  qui s'étendent à  $H$ . Dans ces conditions :

$$\Gamma_1^\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ On pose } \mathbb{Q} \cup \{1/0\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}).$$

PROPOSITION 10.2.1. — On a  $\Gamma_1/\Gamma_1^\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ .

Démonstration : soit  $r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , alors  $r$  est de la forme  $a/c$  avec  $(a, c) = 1$ . On associe à  $r$  une matrice  $\begin{pmatrix} a & -v \\ c & u \end{pmatrix}$  où  $(u, v)$  vérifie  $ua + vc = 1$ . Cela induit la bijection demandée.  $\square$

Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  agissant sur le bord de  $H$ , alors la courbe de coordonnées  $(a, c)$  borde un disque dans  $\sigma.H$ . La variété  $\sigma.H$  à bord paramétré sera notée  $H_{a/c}$ . Le rationnel  $a/c$  est la pente bordante de  $\sigma.H$ .

PROPOSITION 10.2.2. — Pour tout  $r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , on a  $H_r \approx -H_{-r}$ .

### 10.3. La notion de pente bordante

Soit  $\Sigma$  une surface de genre  $g$  et  $M$  un élément de  $\mathcal{V}(\Sigma)$ . On note  $i_*$  (resp.  $i^*$ ) l'application induite en homologie (resp. cohomologie) par le plongement de  $\Sigma$  dans  $M$ . La dualité de Poincaré, notée  $DP$ , envoie la suite exacte de cohomologie de la paire  $(M, \Sigma)$  dans sa suite exacte d'homologie (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_2(M) & \longrightarrow & H_2(M, \Sigma) & \longrightarrow & H_1(\Sigma) & \xrightarrow{i_*} & H_1(M) & \longrightarrow & H_1(M, \Sigma) & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & DP & & DP & & DP & & DP & & DP & & \\
0 & \longrightarrow & H^1(M, \Sigma) & \longrightarrow & H^1(M) & \xrightarrow{i^*} & H^1(\Sigma) & \longrightarrow & H^2(M, \Sigma) & \longrightarrow & H^2(M) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Les groupes abéliens  $H^1(M)$  et  $H^1(\Sigma)$  sont libres car ils sont respectivement isomorphes à  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(M), \mathbb{Z})$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\Sigma), \mathbb{Z})$  ( $\langle DP(y), \alpha \rangle = y(\alpha)$  où  $\alpha \in H^1(\Sigma)$ ,  $y \in H_1(\Sigma)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la forme d'intersection).

Le cup-produit s'annule sur  $i^*(H^1(M))$ . En prenant les coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , on déduit de l'égalité  $i^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(i_*, \mathbb{Z})$  que l'image  $i^*(H^1(M))$  est un sous-groupe libre de rang  $g$  de  $H^1(\Sigma, \mathbb{Z})$  (Thom, cf [Spa]).

Supposons à présent que  $g = 1$ . Il existe un élément  $\lambda$  de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ , unique au signe près, représentant d'une courbe simple connexe et un entier  $n$  tels que  $n\lambda = \gamma$  engendre le noyau  $\ker(i_*) = DP(\text{im}(i^*))$ .

DÉFINITION 10.3.1 : on dit que  $\lambda$  est la pente bordante de  $M$  et qu'elle est d'indice  $n$  (on dira parfois que  $\gamma$  est la courbe bordante).

Choisissons un élément  $\mu$  de  $H_1(\Sigma)$  tel que  $\langle \lambda, \mu \rangle = 1$  et un élément  $x$  de  $H^1(M)$  tel que  $DP(i^*(x)) = n\lambda$ ; on a  $x(i_*(\mu)) = i^*(x)(\mu) = \langle DP(i^*(x)), \mu \rangle = n$ . Comme l'image de  $i^*$  est de rang 1 engendrée par  $x$ , on a aussi que pour tout  $z$  de  $H^1(M)$ ,  $n$  divise  $z(i_*(\mu)) = (i^*z)(\mu)$ . Donc l'image de  $i_*(\mu)$  dans  $H_1(M)/\text{Torsion}$  est de contenu  $n$  [Bour, 7, par. 4, n°2]; il existe  $\nu \in H_1(M)/\text{Torsion}$  tel que  $i_*(\mu) = n\nu$ , et  $\nu$  est lui-même indivisible.

Le sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  engendré par  $i_*(\mu)$  et  $i_*(\lambda)$  est l'homologie périphérique. Avec ce qui précède, on peut décrire quelle extension de  $H_1(M, \Sigma)$  par  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est  $H_1(M, \mathbb{Z})$  :

soient  $p$  un nombre premier qui divise  $n$  et  $r$  le plus grand entier tel que  $p^r$  divise  $n$ . Il existe un diviseur élémentaire  $p^s$  de  $H_1(M)$  tel que l'injection de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $H_1(M)$  induise l'injection  $p^{s-r}$  de  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ . Donc localisée en  $p$ , l'extension est  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^{s-r}\mathbb{Z}$ .

Le produit  $m$  des  $p^{s-r}$  pourrait s'appeler diviseur périphérique de  $M$ .

On a démontré le résultat suivant :



LEMME 10.3.2. — Il existe un entier  $n \geq 1$  (l'indice) et un entier  $m \geq 1$  (le diviseur) dont tout facteur premier est diviseur de  $n$ , et un sous-groupe  $H$  de  $H_1(M, \Sigma)$  tels que :

$$\begin{aligned} H_1(M, \Sigma) &\cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times H, \\ H_1(M) &\cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times H, \end{aligned}$$

l'injection de l'homologie périphérique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est donnée par  $(\alpha, \beta) \mapsto (m\alpha, n\beta, 0)$ . Autrement dit  $i_* : H_1(\Sigma) \rightarrow H_1(M)$  est donnée par  $\lambda \mapsto (m, 0, 0)$  et  $\mu \mapsto (0, n, 0)$ , où  $\lambda$  est la pente bordante et  $\mu$  une pente complémentaire ( $\langle \lambda, \mu \rangle = 1$ ).

EXEMPLES : 1) soit  $K$  un complémentaire de noeud dans  $S^3$ . Alors la courbe bordante se réalise comme le bord de la surface de Seifert du noeud. Dans le cas de la sphère, le méridien et la courbe bordante forment une base. Cette notion de base canonique se généralise aux sphères d'homologie entière.

2) Nous allons ici donner un exemple de courbe bordante d'indice  $n$ . Soit  $T_{0,n}$  une sphère privée de  $n$  disques ( $n \geq 2$ ). Le bord est un ensemble de  $n$  cercles que l'on numérote de 1 à  $n$ . Soit  $\sigma$  la permutation circulaire définie par  $\sigma(i) = i + 1$  pour  $i \leq n - 1$  et  $\sigma(n) = 1$ . On considère un homéomorphisme  $f$  de  $T_{0,n}$  sur  $T_{0,n}$  qui induit la permutation  $\sigma$  sur l'ensemble des cercles.

On pose  $M = T_{0,n} \times [0, 1]/(x, 0) = (f(x), 1)$ . C'est le complémentaire d'un noeud de  $S^2 \times S^1$  dont la classe d'homologie dans  $H_1(S^2 \times S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  vaut  $n$ .

Le groupe fondamental de la variété  $M$  est une HNN-extension de  $\mathbb{Z}$  par le groupe libre à  $n - 1$  générateurs :  $\pi_1(M) = \langle x_1, \dots, x_n, t ; x_1 \dots x_n = 1, tx_i t^{-1} = x_{i+1} \rangle$ .

Soit  $p \in \mathbb{Z}$ , alors  $x_i^p$  commute avec  $t$  si et seulement si  $n$  divise  $p$ .

Le groupe  $H_1(M, \mathbb{Z})$  s'identifie à  $\pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ , ainsi on obtient  $H_1(M, \mathbb{Z}) = \langle x, t ; [x, t] = 1, x^n = 1 \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

On en déduit que la variété  $M$  a une courbe bordante d'indice  $n$ . Pour  $n = 2$ , la variété  $M$  est le  $[0, 1]$ -fibré tordu sur la bouteille de Klein.

#### 10.4. Homéomorphismes bordants

La surface  $\Sigma$  est ici de genre 1. Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$ .

DÉFINITION 10.4.1 : on dit que la variété  $M$  est réversible si un homéomorphisme induisant  $-Id_\Sigma$  sur  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  s'étend à  $M$ .

REMARQUE : pour un espace de noeud cela revient à dire qu'il existe un homéomorphisme préservant l'orientation de l'espace et renversant l'orientation du noeud.

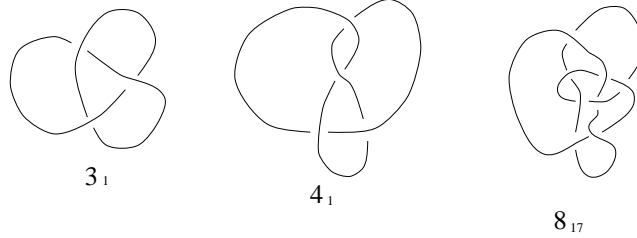
DÉFINITION 10.4.2 : on dit que la variété  $M$  est amphicheirale s'il existe un automorphisme de  $M$  renversant l'orientation qui induit sur le bord un automorphisme non trivial en homologie.

Nous dirons que la variété  $M$  est (-)-amphicheirale si la pente bordante est renversée et (+)-amphicheirale sinon.

EXEMPLES : le nœud de trèfle (type  $3_1$ ) n'est pas amphicheiral mais réversible. Le nœud de huit (type  $4_1$ ) est réversible et (+) et (-)-amphicheiral. Le nœud  $8_{17}$  est amphicheiral mais non réversible (Kawauchi, 1964) [B-Z,p15]. D'après Kawauchi, le nœud  $8_{17}$  est (-)-amphicheiral sans être (+)-amphicheiral [Kaw].

Si  $K$  est un nœud orienté premier, non réversible, non amphicheiral,  $K \# K^*$  est (+)-amphicheiral et pas (-)-amphicheiral. En revanche, le nœud  $K \# -K^*$  est (-)-amphicheiral et pas (+)-amphicheiral. Ici  $K^*$  est le miroir de  $K$  et  $-K^*$  le miroir avec l'orientation renversée.

Tous les nœuds jusqu'à 10 croisements amphicheiraux sont (-)-amphicheiraux.



On note  $\lambda$  la pente bordante et on choisit une base  $\{\lambda, \mu\}$  dans  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ .

Par unicité de la pente bordante, un homéomorphisme  $\varphi$  de la variété  $M$  sur elle-même respectant globalement le bord, induit un automorphisme du bord  $\Sigma$  qui préserve la pente bordante. On a donc quatre possibilités :

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous commençons par les deux cas d'amphicheiralité, c'est-à-dire  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

LEMME 10.4.3. — *Si l'application  $\varphi$  induit sur le bord une application isotope à  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  (resp.  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ), il existe une base  $(\lambda, \mu')$  où la restriction au bord de  $\varphi$  s'écrit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  (resp.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ),*

Démonstration : pour  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , si  $n$  est impair, alors  $\mu' = 2\mu - n\lambda$  et si  $n$  est pair alors  $\mu' = \mu - \frac{n}{2}\lambda$ . Pour  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on fait la même chose en remplaçant  $n$  par  $-n$ .  $\square$

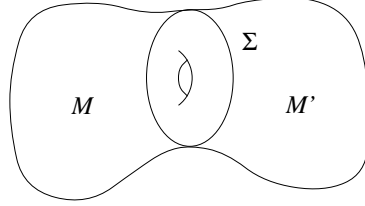
PROPOSITION 10.4.4. — *On suppose que la variété  $M$  est irréductible et à bord incompressible. Il n'existe pas d'automorphisme  $f$  de  $M$  qui induit sur le bord  $\Sigma$  la transformation  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  avec  $n \neq 0$ .*

Démonstration : comme le sous-groupe des automorphismes de  $M$  engendré par les twists de Dehn est d'indice fini, quitte à remplacer  $f$  par une certaine puissance, on peut supposer que  $f$  est un produit de twists de Dehn.

Les twists sur un tore laissent le bord  $\Sigma$  invariant ainsi que les twists sur un anneau dont le bord serait dans le tore  $\Sigma$  (proposition 8.5).  $\square$

### 11. L'homologie d'un recollement en genre 1

Nous allons calculer l'homologie singulière d'une variété de dimension 3 obtenue par recollement de deux variétés  $M$  et  $M'$  de bord  $\Sigma$  connexe de genre 1.



Suivant le lemme 10.3.2, on choisit des bases symplectiques  $\{\lambda, \mu\}$  et  $\{\lambda', \mu'\}$  de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ ,  $\lambda$  et  $\lambda'$  étant les pentes bordantes respectives de  $M$  et  $M'$ . On notera aussi  $n, m, n'$  et  $m'$  les indices et les facteurs. On écrit  $\lambda' = c\lambda + d\mu$ ,  $\mu' = a\lambda + b\mu$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $ad - bc = -1$ . Notons que  $|d| = \Delta(\lambda, \lambda')$  est le nombre d'intersection des deux pentes bordantes (on a  $\lambda = b\lambda' - d\mu'$ ,  $\mu = -a\lambda' + c\mu'$ ). Les notations sont celles de 10.3.2.

PROPOSITION 11.1. — Si  $H_1(M, \Sigma) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times H$  et  $H_1(M', \Sigma) \cong \mathbb{Z}/m'\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z} \times H'$ , alors

$$H_1(M \cup_{\Sigma} -M') \cong H \times H' \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_4\mathbb{Z},$$

avec  $a_1 = \text{pgcd}(m, n, m', n')$ ,  $a_1 a_2 = \text{pgcd}[mn, m'n', \text{pgcd}(m, n)\text{pgcd}(m', n')]$ ,  
 $a_1 a_2 a_3 = \text{pgcd}[mnm'n', mn^2 \text{pgcd}(m', n'), m'n'^2 \text{pgcd}(m, n)]$ ,  
 $a_1 a_2 a_3 a_4 = mn^2 m' n'^2 d$ .

Seul le dernier facteur invariant dépend du choix du recollement, et ceci par l'intermédiaire de  $\Delta(\lambda, \lambda')$ .

Démonstration : l'application  $p$  désigne le plongement canonique de  $M$  dans  $M \cup_{\Sigma} -M'$ . La suite de Mayer-Vietoris homologique s'écrit :

$$\cdots \longrightarrow H_1(\Sigma) \xrightarrow{i_* \oplus i'_*} H_1(M) \oplus H_1(M') \xrightarrow{p_* - p'_*} H_1(M \cup_{\Sigma} -M') \longrightarrow 0$$

qui devient

$$\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m'n'\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times H \times H' \longrightarrow H_1(M \cup_{\Sigma} -M') \longrightarrow 0$$

avec  $\lambda \mapsto (m, 0, bm', -dn', 0, 0)$  et  $\mu \mapsto (0, n, -am', cn', 0, 0)$ ; donc  $H_1(M \cup -M')$  est isomorphe au produit de  $H \times H'$  et du quotient  $E$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  par l'image de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sous l'application matricielle

$$A = \begin{pmatrix} mn & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & m'n' & bm' & -am' \\ 0 & 0 & -dn' & cn' \end{pmatrix}$$

Le groupe  $E$  est la somme  $\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_4\mathbb{Z}$  où  $a_i$  divise  $a_{i+1}$ ; les  $a_i$  sont les facteurs invariants de  $E$  qui sont aussi ceux de la matrice  $A$ . Pour les déterminer, on utilise la proposition 4 [Bour, Alg VII, p. 20] : le produit  $\delta_i = a_1 a_2 \dots a_i$  est un pgcd des mineurs d'ordre  $i$  de  $A$ . Ainsi  $a_1 = \delta_1 = \text{pgcd}(m, n, m', n')$ ,

$$\delta_2 = \text{pgcd}(mn, m'n', amn', cmn', bm'n, dnn') = \text{pgcd}[mn, m'n', \text{pgcd}(m, n)\text{pgcd}(m', n')],$$

$$\delta_3 = \text{pgcd}(mnm'n', dnm'n'^2, cmm'n'^2, bmm'n^2, dmn^2n') = \text{pgcd}[mnm'n', mn^2\text{pgcd}(m', n'), m'n'^2\text{pgcd}(m, n)],$$

$$\text{et enfin } \delta_4 = mn^2m'n'^2d. \quad \square$$

Cependant, il faut remarquer que si l'indice de  $M$  ou de  $M'$  vaut 1, l'argument se simplifie (et c'est le seul cas utilisé vraiment dans la suite). En effet, supposons par exemple  $n = 1$ , alors  $m = 1$  et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m'n' & bm' & -am' \\ 0 & 0 & -dn' & cn' \end{pmatrix}$$

est équivalente (par changements de base des réseaux source et but) à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m'n' & bm' \\ 0 & 0 & 0 & -dn' \end{pmatrix}$$

Dans ce cas (le plus important), on a donc

PROPOSITION 11.2. — *On a*

$$H_1(M \cup_{\Sigma} -M') = H \times H' \times \mathbb{Z}/\text{pgcd}(m', n')\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dn'\text{ppcm}(m', n')\mathbb{Z},$$

lorsque  $H_1(M) = H \times \mathbb{Z}$ ,  $H_1(M') = H' \times \mathbb{Z}/m'n'\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

COROLLAIRE 11.3. — *Si  $M$  est un tore plein  $D^2 \times S^1$ , alors  $H_1(M \cup_{\Sigma} -M', \mathbb{Z})$  est une extension de  $H_1(M', \Sigma)$  par  $\mathbb{Z}/dn'\mathbb{Z}$ .*

Il suffit de remarquer que  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\text{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$ .

REMARQUE : cette formule de recollement nous dit que tout complémentaire de nœud dans une sphère d'homologie entière a une courbe bordante d'indice 1.

## 12. Étude du recollement en genre 1

Dans toute la suite,  $\Sigma$  désigne le tore  $S^1 \times S^1$ . On note  $\{e_1, e_2\}$  une base de  $H_1(S^1 \times S^1)$ .

### 12.1. Le recollement compressible-compressible

Ce sont les scindements de Heegaard de genre 1 où le recollement donne un espace lenticulaire.

DÉFINITION 12.1.1 : soit  $H$  le tore solide où le générateur  $e_1$  borde un disque et le générateur  $e_2$  engendre le groupe fondamental. On se donne un couple d'entiers  $(p, q)$  premiers entre eux. L'espace lenticulaire  $L(p, q)$  est par définition la variété  $H_{0/1} \cup_{\Sigma} -H_{p/q}$ .

Par exemple, en faisant agir la transformation  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sur  $H_0$  et sur  $H_{p/q}$  on obtient d'après 10.1.1,  $L(p, q) = H_{1/0} \cup_{\Sigma} -H_{-q/p}$  et par 10.2.2,  $L(p, q) = -(H_{-q/p} \cup_{\Sigma} -H_{1/0})$ . On a par exemple  $L(p, q) = -L(p, p - q)$ .

Plus généralement,

PROPOSITION 12.1.2. — *La variété  $H_{p/q} \cup_{\Sigma} -H_{p'/q'}$  est isomorphe à  $L(pq' - p'q, p'u - q'v)$  où  $(u, v)$  est un couple d'entiers vérifiant  $up - vq = 1$ .*

Démonstration : on choisit une transformation envoyant  $p/q$  sur  $1/0$ . Dans ces conditions,  $p'/q'$  se transforme en  $\frac{p'u - q'v}{pq' - p'q}$  où  $u$  et  $v$  sont premiers entre eux et la variété obtenue est isomorphe à  $L(pq' - p'q, -p'u + q'v)$ .  $\square$

On rappelle que  $L(p, q)$  est isomorphe à  $L(p', q')$  si et seulement si  $p = p'$  et  $q \equiv +q' \pmod{p}$  ou  $q \equiv -q'^{-1} \pmod{p}$  ([Rol1, chap 9]) et qu'une variété fermée  $V$  est un espace lenticulaire si et seulement si il existe dans  $V$  un tore solide dont le complémentaire soit encore un tore solide.

On a pour tout entier  $n$ ,  $L(1, n) = S^3$  et  $L(0, n) = S^2 \times S^1$ .

### 12.2. Le recollement incompressible-incompressible

Soient  $M$  et  $M'$  deux éléments de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible.

PROPOSITION 12.2.1. — *La variété  $M \cup_{\Sigma} -M'$  est irréductible.*

Démonstration : soit  $S$  une sphère plongée dans le recollement. Si  $S \cap \Sigma$  est vide, alors  $S$  borde une boule. Sinon, on note  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  les courbes de l'intersection. Il existe  $k$  tel que  $\gamma_k$  borde un disque de  $S$ , et par incompressibilité la courbe  $\gamma_k$  est contractile sur  $\Sigma$ , donc on peut la retirer par une isotopie de  $S$  dans le recollement qui peut faire disparaître d'autres courbes  $\gamma_i$  mais pas en ajouter. Ainsi par récurrence, on se ramène à  $S \cap \Sigma = \emptyset$ .  $\square$

REMARQUE : on n'a pas utilisé le fait que  $\Sigma$  est de genre 1 et connexe.

DÉFINITION 12.2.2 : soit  $P$  une variété première contenant des tores incompressibles séparants. Nous noterons  $S(P)$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible qui se plongent dans  $P$  avec un complémentaire à bord incompressible. Nous les qualifierons de pièces essentielles.

Le groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  opère sur les éléments de  $S(P)$  et on note  $s(P)$  l'ensemble des orbites de  $S(P)$  pour cette action.

REMARQUE : d'après 10.4, le groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  n'opère pas forcément librement sur les pièces essentielles.

PROPOSITION 12.2.3. — *L'ensemble  $s(P)$  est fini.*

Démonstration : soit  $T$  un tore essentiel qui sépare la variété  $P$ ; les pièces essentielles associées à cette décomposition sont notées  $M$  et  $M'$ .

Ce tore appartient à une sous-variété caractéristique  $V(P)$  de  $P$ . Notons  $X$  la composante connexe de  $V(P)$  qui contient le tore  $T$ . Il existe une fibration de Seifert de  $X$  dont l'espace des orbites est une surface compacte connexe  $B$  telle que le tore  $T$  soit une réunion de fibres non exceptionnelles.

Supposons que  $X$  ait une unique fibration de Seifert à isotopie près. Dans ce cas, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le type de  $X \cap M$ . Elles sont données par le type d'orientation ( $\{\pm 1\}$ ), le genre  $h$  et le nombre  $n$  de trous de la surface (le genre  $h$  est majoré par le genre de  $B$  et  $n$  est majoré  $n(B) + 1$ ).

Les seuls cas à fibration non unique contenant un tore essentiel séparant sont le tore solide  $H$ , le  $[0, 1]$ -fibré tordu sur une bouteille de Klein  $K$  et enfin le double de  $K$  ( $K \cup_{\partial K} -K$ ).

Dans tous ces cas,  $X \cap M$  ne peut être isomorphe qu'aux variétés  $H$  ou  $K$ .  $\square$

REMARQUE : Jaco, dans un travail non publié avait démontré ce résultat avant la théorie des sous-variétés caractéristiques [Boil].

### 12.3. Le recollement incompressible-compressible

DÉFINITION 12.3.1 : obturation de Dehn.

Soit  $M$  une variété s'appuyant sur  $\Sigma$ . Soit  $\gamma$  une courbe fermée simple plongée dans  $\Sigma$  non homologue à 0. Soit  $H_\gamma$  le tore solide dont  $\gamma$  borde un disque. On pose  $M(\gamma) = M \cup_\Sigma (-H_\gamma)$ . La variété  $M(\gamma)$  ne dépend que de la classe d'isotopie non orientée de  $\gamma$ . Cette opération est appelée l'obturation de Dehn (Dehn filling) dont  $\gamma$  est la pente [Gor1].

La variété  $M(\gamma)$  hérite de l'orientation de  $M$ . Si la variété  $M$  est irréductible et que l'obturation  $M(\gamma)$  est une somme connexe non triviale, alors la variété  $M$  contient une surface plane incompressible et  $\partial$ -incompressible (Cf 9).

DÉFINITION 12.3.2 : chirurgie de Dehn.

Soit  $V$  une variété fermée orientée (un élément de  $\mathcal{V}$ ) et  $K$  un nœud dans  $V$ . On pose  $M = V - U(K)$  où  $U(K)$  est un voisinage tubulaire du nœud  $K$ . Le choix

d'une paramétrisation  $\varphi : \partial M \rightarrow \Sigma$  du bord de la variété  $M$  nous permet de faire une obturation par une courbe  $\gamma$  de  $\Sigma$ . La variété obtenue s'appelle la chirurgie de Dehn sur la courbe  $\varphi^{-1}(\gamma)$ .

EXEMPLES : la paramétrisation du bord est telle que la pente  $1/0$  redonne  $V$ .

Le résultat de la chirurgie  $p/q$  sur une courbe non nouée de  $S^3$  est  $L(p, q)$ . C'est cette construction de  $L(p, q)$  qui motive les choix des signes dans 12.1.1.

DÉFINITION 12.3.3 : on dit qu'une pente est réductible si son obturation donne une variété décomposée (c'est-à-dire qui n'est pas première).

La question qui se pose maintenant est la suivante : soit  $\mathcal{C}(M)$  l'ensemble des pentes  $r$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  telles que  $P$  ou  $-P$  soit un facteur de  $M(r)$ . Est-ce que le nombre de classes d'équivalence pour l'action de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sur l'ensemble  $\mathcal{C}(M)$  est fini lorsque la variété  $M$  décrit  $\mathcal{P}(\Sigma)$  ?

Commençons par les pentes  $\alpha$  telles que  $M(\alpha) = P$  ou  $-P$ .

Rappelons ici, quelques notions sur le complémentaire d'un nœud dans une variété  $V$  : soient  $k$  et  $k'$  deux nœuds dans  $V$ . Les nœuds  $k$  et  $k'$  sont dits de même type s'il existe un homéomorphisme (resp. un homéomorphisme qui préserve l'orientation)  $f : V \rightarrow V$  tel que  $f(k) = k'$  et on note  $(V, k) \sim (V, k')$  (resp.  $(V, k) \approx (V', k')$ ). On peut consulter [Gor1, Mat, Do-M] pour ces notions. On dit que le nœud  $k$  est déterminé par son complémentaire (resp. par son complémentaire orienté) si  $V - k$  est homéomorphe à  $V - k'$  (resp. en préservant l'orientation) implique  $(V, k) \sim (V, k')$  (resp.  $(V, k) \approx (V', k')$ ). Mathieu a construit des exemples [Mat] de nœuds dans une variété de Seifert de base  $S^2$  avec trois fibres exceptionnelles qui ne sont pas déterminés par leur complémentaire, mais les homéomorphismes renversent l'orientation. Il n'y a pas d'exemples connus pour le type orienté.

Pour  $V = S^3$ , Gordon et Luecke [Go-L1, Gra] ont démontré que les nœuds sont déterminés par leur complémentaire.

Dans une variété  $V$  qui se décompose uniquement avec des variété isomorphes à  $S^2 \times S^1$  ou  $S^1 \times S^1 \times S^1$ , Gabai [Gab1] démontre que les nœuds sont déterminés par leur complémentaire orienté.

Soient  $M \in \mathcal{P}(\Sigma)$  et deux pentes  $\alpha$  et  $\alpha'$  telles que  $M(\alpha) \approx M(\alpha')$  (resp.  $M(\alpha) \approx -M(\alpha')$ ); dans  $V = M(\alpha)$ , on a deux nœuds dont les complémentaires sont homéomorphes, le premier  $k$  est l'âme de la chirurgie de pente  $\alpha$  et le second  $k'$  est l'image de l'âme de la chirurgie de pente  $\alpha'$  par l'homéomorphisme  $f$  de  $M(\alpha')$  sur  $M(\alpha)$  (respectant ou renversant l'orientation).

Si dans la variété  $V$  les nœuds sont déterminés par leur complémentaire, l'homéomorphisme  $f$  peut être choisi de sorte que  $k = k'$ . Dans ces conditions,  $f(\alpha') = \alpha$ . Maintenant si  $\alpha \neq \alpha'$ , d'après 10.4, la pente  $\alpha$  se déduit de  $\alpha'$  par une symétrie.

En revanche, si dans  $V$  les nœuds ne sont pas déterminés par leur complémentaire, en prenant deux nœuds  $k$  et  $k'$  de complémentaire  $M$  (avec l'orientation induite par  $V$  ou son inverse) qui n'ont pas le même type, les méridiens  $\mu$  et  $\mu'$  donnent des pentes différentes sans qu'il y ait d'homéomorphisme envoyant  $\mu$  sur  $\mu'$

#### 12.4. Le cas des espaces lenticulaires

Les calculs de Heil [Heil] et le théorème de chirurgie cyclique [CGLS] (cf 9) nous donnent un énoncé lorsque la variété  $P$  est l'espace lenticulaire  $L(p, q)$  (y compris  $S^2 \times S^1$ ).

THÉORÈME 12.4.1. — *Soient  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible et deux pentes  $\alpha$  et  $\alpha'$  telles que  $M(\alpha) = L(p, q)$  et  $M(\alpha') = \pm L(p, q')$ , alors  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$ .*

Démonstration : si la variété  $M$  n'est pas de Seifert, le simple fait que les variétés  $M(\alpha)$  et  $M(\alpha')$  aient un groupe fondamental cyclique entraîne  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$  par le théorème 9.4 [CGLS].

Si  $P = S^2 \times S^1$ , l'âme  $k$  de la chirurgie  $M(\alpha)$  doit rencontrer  $S^2$  de façon essentielle sinon  $M$  est réductible. Alors  $M$  contient une surface plane essentielle de pente  $\alpha$ . Donc  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$  par le théorème 9.3.

On peut donc supposer la variété  $M$  de Seifert et comme son bord est incompressible, ce n'est pas  $D^2 \times S^1$ . Choisissons une fibration de Seifert de  $M$  de base  $B$  et de fibre  $f$ ; le choix de la fibre  $f$  est unique sauf si  $M$  est le  $[0,1]$ -fibré tordu  $K$  sur une bouteille de Klein que l'on obtient soit comme le fibré orienté en cercle sur une bande de Möbius soit comme le fibré de Seifert sur un disque avec deux fibres exceptionnelles d'ordre 2 (Cf 6.2). Notons  $g$  le genre de l'espace des orbites et  $r$  le nombre de fibres exceptionnelles; on a  $g \geq 1$  ou  $r \geq 2$ .

Si la base  $B$  est non orientable, la fibre  $f$  est la pente bordante et la chirurgie de pente  $\pm f$  fait apparaître une sphère  $S^2$  non séparante. Une chirurgie de pente  $\alpha \neq f$  nous donne une variété de Seifert avec une base non orientable; pour avoir un lenticulaire il faut que cette base soit  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  et qu'il n'y ait pas de fibre exceptionnelle ([Orl p 99, Jac p 92]). Avec une fibre exceptionnelle, c'est  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  ou une variété prismatique  $(2, 2, n)$  avec  $n > 1$ . Donc la variété  $M$  est isomorphe à  $K$  et la chirurgie se fait sur une courbe  $\alpha$  telle que  $\langle \alpha, f_1 \rangle = 1$  où  $f_1$  est la fibre de  $M$  au dessus de  $D^2$  avec deux fibres exceptionnelles, alors  $M(\alpha) = L(4n, 2n - 1)$  où  $n = \langle \alpha, f \rangle \in \mathbb{Z}$ , [Orl, p100]. Donc  $p$  détermine  $\alpha$ .

Si  $B$  est orientable, la chirurgie sur  $\alpha = \pm f$  donne  $(S^2 \times S^1)^{\#2g} \# L_1 \dots \# L_r$  avec au moins  $r$  facteurs [Heil]. Supposons  $\alpha \neq \pm f$ , une chirurgie donne un espace lenticulaire si et seulement si  $\Delta(\alpha, f) = 1$  et si la variété  $M$  est un fibré sur  $D^2$  avec deux fibres exceptionnelles de paramètres  $\beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2$  avec  $0 < \alpha_1 < \beta_1, 0 < \alpha_2 < \beta_2$ ; alors  $M(\alpha) = L(p, q)$  où  $p = b\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1$  ( $q = m\alpha_2 - n\beta_2, m\alpha_1 - n(b\alpha_1 + \beta_1) = 1$ ), le nombre  $b$  (d'Euler) caractérise  $\alpha$  et



donc à nouveau  $p$  détermine  $\alpha$ .  $\square$

REMARQUES : 1) quand  $M$  est de Seifert, la démonstration nous dit qu'il n'y a qu'une pente pour obtenir  $L(p, q)$ , y compris  $L(0, 1) = S^2 \times S^1$ . Deux pentes différentes donnent des lenticulaires  $L(p, q)$  et  $L(p', q')$  avec  $p \neq p'$ .

2) Ceci n'est pas vrai si la variété  $M$  n'est pas de Seifert. L'exemple de Morimoto [Mor] dans  $L(5, 1)$  montre que deux pentes distinctes peuvent redonner le même lenticulaire. Le théorème 12.4.1 est donc optimal. Les deux pentes différentes sont obtenues par l'action d'un homéomorphisme du bord qui s'étend à la variété; ce n'est pas un espace associé à deux nœuds différents.

3) Il ne faudrait pas croire que pour une variété première  $P$  quelconque,  $M(\alpha) = P$  et  $M(\alpha') = -P$  entraîne  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$ . Par exemple, si  $M$  est le complémentaire du nœud de huit, on a  $M(4) = -M(-4)$  et  $\Delta(4, -4) = 8$  [Gor1].

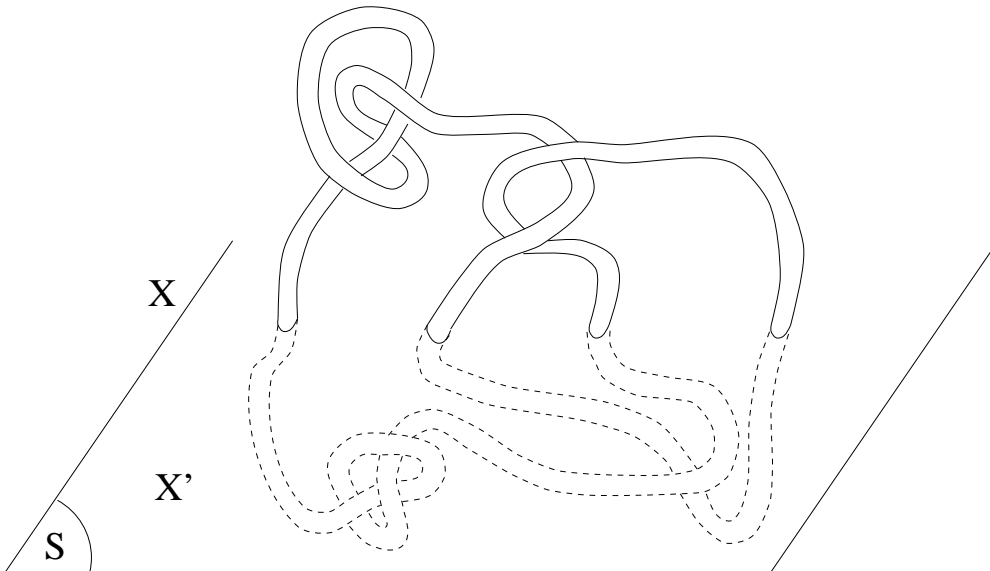
4) En général, on conjecture qu'il n'y a qu'un nombre fini de pentes  $\alpha$  telles que  $M(\alpha) = \pm P$ . Si  $M$  est hyperbolique, cela découle du théorème de chirurgie cyclique de Thurston [Th1].

COROLLAIRE 12.4.2. — *Un complémentaire de nœud dans un espace lenticulaire est associé à au plus trois types de nœud.*

### 13. Le problème du nœud absorbant

#### 13.1. Énoncé

Soit  $V$  une variété qui se décompose non trivialement sous la forme  $\widehat{X} \# \widehat{X}'$ . Soit  $k$  un nœud dans  $V$  tel que le complémentaire  $M = V - U(k) = X \cup X'$  de  $k$  soit irréductible et à bord incompressible.



Le problème est le suivant :

peut-on trouver une obturation de  $M$  qui donne  $P$  isomorphe à  $\widehat{X}$  (ou à  $-\widehat{X}$ ) ?

Autrement dit, le nœud  $k$  peut-il absorber la variété  $\widehat{X}'$  ?

Inversement, si  $M$  est une variété irréductible et à bord incompressible telle qu'une obturation donne  $P$ , alors existe-t-il une pente telle que l'obturation contienne  $P$  (ou  $-P$ ) en facteur strict ?

Plus précisément :

soit  $P$  une variété première. Soit  $M$  une variété irréductible à bord un tore incompressible. Si  $M(\alpha) = P$  et  $M(\beta) = \pm P \# V$  ( $V \neq S^3$ ), a-t-on  $\Delta(\alpha, \beta) \leq 1$  ?

### 13.2. Le lemme homologique

On note  $(a, b) = 1$  lorsque les entiers  $(a, b)$  sont premiers entre eux.

LEMME 13.2.1. — Soient  $M$  un élément de  $\mathcal{V}(\Sigma)$ ,  $\mu$  et  $\alpha$  deux pentes différentes ( $\alpha \neq \pm\mu$ ),  $\gamma$  la pente bordante et  $n'$  son indice. On note  $V = M(\mu)$  et on suppose que  $M(\alpha) = V' \# V''$  avec  $H_1(V', \mathbb{Z}) = H_1(V, \mathbb{Z})$  (il se peut que  $V'' = S^3$ ). On considère les nombres d'intersections géométriques de pentes :  $c = \Delta(\mu, \alpha)$ ,  $y = \Delta(\gamma, \mu)$  (donc  $c \geq 1$  et  $y \geq 0$ ) et on note  $h''$  le cardinal de  $H_1(V'', \mathbb{Z})$ . Dans ces conditions :

i) on ne peut avoir  $y = 0$  (c'est-à-dire  $\gamma = \pm\mu$ ).

ii) Le groupe  $H_1(V'', \mathbb{Z})$  est monogène et il est infini si et seulement si  $y = n' = 1$  et  $\alpha = \pm\gamma$ .

iii) Lorsque  $y = 1$  et  $h'' \neq \infty$ , on a  $(h'', cn') = 1$ .

iv) Lorsque  $y > 1$ , on a  $\alpha \neq \pm\gamma$  et  $(c, h'') = 1$ , de plus  $y$  divise  $c$  et  $(n', h'') = 1$ .

En particulier  $(yn', h'') = 1$ .

Démonstration : on choisit une base symplectique  $\{\mu, \lambda\}$  de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  où on écrit  $\gamma = x\mu + y\lambda$  et  $\alpha = a\mu + c\lambda$  (ce qui revient à faire des choix d'orientation). On pose  $d = ay - cx$ , si bien que  $|d| = \Delta(\alpha, \gamma)$ .

D'après la proposition 11.2, en notant  $n'$  l'indice de  $\gamma$  dans  $M$  et  $m'$  le facteur, on a  $H_1(V) = H' \times \mathbb{Z}/\text{pgcd}(m', n') \times \mathbb{Z}/yn'\text{ppcm}(m', n')$  et  $H_1(V) \oplus H_1(V'') = H' \times \mathbb{Z}/\text{pgcd}(m', n') \times \mathbb{Z}/dn'\text{ppcm}(m', n')$ ; notons  $e = n'\text{ppcm}(m', n')$ . On doit donc avoir  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/ye \oplus H_1(V'')$ .

Si  $y = 0$ , on a  $h'' = 0$  et  $d = 0$ , donc  $c = 0$ , car  $x = \pm 1$ , ce qui est interdit.

Le ii) est immédiat. Montrons maintenant le iii). Si  $y = 1$  et  $h'' \neq \infty$ , on a  $d \neq 0$  et  $\pm h'' = d$  et  $(h'', e) = 1$ ; comme  $(a, c) = 1$  et  $\pm h'' = a - cx$  il vient aussi  $(h'', c) = 1$ .

Enfin si  $y > 1$ , on ne peut avoir  $d = 0$ , le groupe  $H_1(V'', \mathbb{Z})$  est fini et cyclique d'ordre  $h''$ . Pour l'isomorphisme de  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z}$  avec  $\mathbb{Z}/ye\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/h''\mathbb{Z}$ , on doit avoir  $\pm d = yh''$  et  $(h'', ye) = 1$ . Alors on a  $cx = y(a \mp h'')$  et comme  $(x, y) = 1$ ,  $y$  divise  $c$ . En posant  $c = ny$  on obtient  $nx = a \mp h''$ ; on a  $(a, n) = 1$  donc  $(h'', n) = 1$  si bien que  $(h'', c) = 1$ .  $\square$

PROPOSITION 13.2.2. — Soient  $M$  un élément de  $\mathcal{V}(\Sigma)$ ,  $\mu$  et  $\alpha$  deux

*pentés différentes. Supposons que  $H_1(M(\mu))$  soit cyclique d'ordre  $h$  fini, que  $M(\alpha) = V' \# V''$  avec  $H_1(V')$  cyclique d'ordre  $h$  et  $H_1(V'')$  cyclique d'ordre  $h''$  fini; alors  $h$  et  $h''$  sont premiers entre eux.*

Démonstration : avec les notations de la preuve précédente, l'hypothèse dit que le facteur  $m' = 1$ ,  $n' = e$ . On a  $h = ye$ , d'où la conclusion d'après iv) du lemme. Il n'y a rien à dire si  $h = 1$  ou  $h'' = 1$ .  $\square$

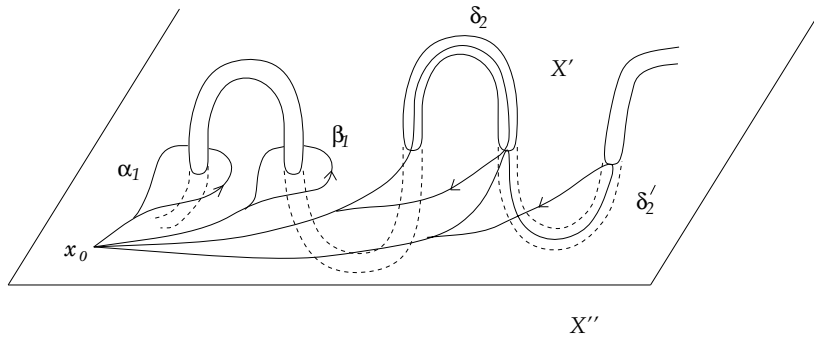
REMARQUE : on peut partout ici remplacer l'hypothèse  $M(\alpha) = V' \# V''$  par la plus faible  $H_1(M(\alpha)) = H_1(M(\mu)) \oplus H''$ . Il n'y a rien à changer aux arguments.

### 13.3. Le groupe fondamental

Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible et  $V = M(\mu)$  le résultat de l'obturation sur la pente  $\mu$ . On suppose qu'il existe une pente de décomposition  $\alpha$  telle que  $M(\alpha) = V' \# V''$  avec  $V'$  et  $V'' \neq S^3$ . Soit  $G$  (resp.  $G'$  et  $G''$ ) le groupe fondamental de  $V$  (resp.  $V'$  et  $V''$ ). On note  $\hat{S}$  une sphère séparante de  $M(\alpha)$  qui devient une surface planeaire  $S$  dans  $M$ . La surface  $S$  décompose la variété  $M$  en  $X'$  et  $X''$ .

Nous supposons que  $\Sigma$  rencontre  $\hat{S}$  de façon essentielle en  $2n$  cercles  $C_1, D_1, \dots, C_n, D_n$ . Ces cercles bordent des disques disjoints dans  $M(\alpha)$ .

Nous allons présenter  $G' * G''$  et  $G$  à partir des groupes fondamentaux  $\Pi'$  et  $\Pi''$  de  $X'$  et  $X''$ . Pour cela choisissons un point base  $x_0$  sur la surface  $S$ . On choisit des lacets  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$  (resp.  $\alpha'_1, \beta'_1, \dots, \alpha'_n, \beta'_n$ ) dans  $\Pi'$  (resp  $\Pi''$ ) et aussi des lacets  $\delta_1, \dots, \delta_n$  (resp.  $\delta'_1, \dots, \delta'_n$ ) dans  $\Pi'$  (resp.  $\Pi''$ ) comme sur la figure. Les lacets  $\alpha$  font le tour des cercles  $C$ , les lacets  $\beta$  font le tour des cercles  $D$ ; La surface  $\Sigma$  est découpée par la sphère  $\hat{S}$  en anneaux  $A_1, \dots, A_n$  (resp.  $A'_1, \dots, A'_n$ ). A chaque arc essentiel d'un anneau allant d'un cercle  $C$  à un cercle  $D$ , on associe un lacet  $\delta$  (resp.  $\delta'$ ). Le lacet  $\delta_i$  part de  $x_0$ , comme  $\alpha_i$ , il rejoint  $C_i$  puis il entre dans  $A_i$  et ressort par  $D_i$  pour revenir comme  $\beta_i$ . Le lacet  $\delta'_i$  part comme  $\beta'_i$  rejoint  $D_i$ , entre dans  $A'_i$  et sort par  $C_{i+1}$  pour revenir comme  $\alpha'_{i+1}$ .



Notons que pour tout  $i$ ,  $\beta_i = \delta_i^{-1} \alpha_i^{-1} \delta_i$ ,  $\beta'_i = \delta'^{-1}_i \alpha'^{-1}_i \delta'_i$ .

On pose  $u_i = \delta_i \delta'_i \delta_{i+1} \delta'_{i+1} \dots \delta'_{i-1}$  et  $u'_i = \delta'_i \delta_{i+1} \delta'_{i+1} \dots \delta_i$  (produit cyclique).

1) Le groupe  $\pi_1(M(\alpha), x_0) = G' * G''$  est engendré par  $\Pi'$  et  $\Pi''$  avec les relations supplémentaires  $\alpha_1 = \alpha'_1 = \beta_1 = \beta'_1 = \dots = \beta'_n = 1$ .

En effet tout chemin se déforme dans  $M$  et les relations s'obtiennent en écrivant que toute homotopie d'un lacet à un autre peut être choisie transverse aux remplissages des  $A_i$  et  $A'_i$ .

2) Le groupe  $\pi_1(M, x_0)$  est le produit amalgamé de  $\Pi'$  et  $\Pi''$  au dessus de  $\pi_1(S, x_0)$ . Il a pour générateurs  $\Pi'$  et  $\Pi''$  et on ajoute les relations  $\alpha_1 = \alpha'_1, \beta_1 = \beta'_1, \dots, \alpha_n = \alpha'_n, \beta_n = \beta'_n$ .

3) Pour chaque  $i$  entre 1 et  $n$  les lacets  $\alpha_i, u_i$  (resp.  $\beta'_i, u'_i$ ) proviennent de  $\pi_1(\Sigma)$  (il suffit de prendre un point base  $y_i$  sur  $C_i$  et de le joindre à  $x_0$  dans  $S$ , suivant un bout de  $\alpha_i$  (resp.  $\beta'_i$ ). Ils forment une base orientée de  $H_1(\Sigma) = \pi_1(\Sigma)$ . Il existe des entiers  $L$  et  $N$  premiers entre eux tel que le méridien  $\mu$  s'exprime  $\alpha_i^L u_i^{-N}$  pour tout  $i$  (de même  $\beta_i'^{-L} u_i'^{-N}$ ).

Le nombre  $N$  n'est autre que  $\Delta(\alpha, \mu)$ .

4) Le groupe  $\pi_1(M(\mu), x_0) = G$  est engendré par  $\Pi'$  et  $\Pi''$  et avec les relations supplémentaires  $\alpha_1 = \alpha'_1, \beta_1 = \beta'_1, \dots, \beta_n = \beta'_n$  et  $\alpha_1^L = u_1^N, \beta_1^{-L} = u_1'^N, \alpha_2^L = u_2^N, \dots$

Cela résulte du point 2, comme on démontre le point 1.

En particulier, on constate qu'en ajoutant aux relations qui définissent le groupe  $\pi_1(M(\alpha), x_0)$  la relation  $u_1^N = 1$ , on obtient un groupe isomorphe à celui qui est défini en ajoutant aux relations de  $\pi_1(M(\mu), x_0)$  les relations  $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 1$ .

Notons aussi que dans le produit libre  $G' * G''$ , l'élément  $u_1$  ne se ramène pas par conjugaison à  $G'$  ou à  $G''$ , car la variété  $M$  est supposée irréductible. D'où le résultat suivant :

LEMME 13.3.1. — *Le quotient de  $G' * G''$  par le sous groupe normal engendré par  $u^N$  (où  $N = \Delta(\alpha, \mu)$  et  $u$  de longueur réduite cyclique  $\geq 2$ ) est isomorphe à un quotient de  $G$ .*

REMARQUE : le théorème 6.3 de Gonzalez-Acuna et Short dit que si  $N > 5$ , les groupes  $G'$  et  $G''$  s'injectent dans le quotient par  $u^N$ .

Nous allons maintenant énoncer le résultat de Baumslag, Morgan et Shalen [BMS].

THÉORÈME 13.3.2. — *Soient  $l, m$  et  $N$  des entiers  $> 1$ . Dans le groupe  $\langle a, b; a^l = b^m = u^N = 1 \rangle$  où  $u = a^{r_1} b^{s_1} \dots a^{r_k} b^{s_k}$  avec  $k \geq 1, 0 < r_i < l, 0 < s_i < m$ ; les éléments  $a, b$  et  $u$  sont respectivement d'ordre  $l, m$  et  $N$ .*

On en déduit :

THÉORÈME 13.3.3. — *Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible. Soient  $\alpha$  et  $\mu$  deux pentes telles que  $M(\mu)$  soit un espace lenticulaire  $L(p, q)$  ( $\neq S^3$  et  $S^2 \times S^1$ ) et  $M(\alpha)$  soit la somme connexe de  $L(p, q')$  et de  $L(p'', q'')$  (tous deux  $\neq S^3$  et  $S^2 \times S^1$ ). Alors  $\Delta(\mu, \alpha) \leq 1$ .*

Démonstration : d'après le lemme 13.2.1, les entiers  $p$  et  $p''$  sont premiers entres eux. Si  $N = \Delta(\mu, \alpha) > 1$ , le théorème 13.3.2 dit que le générateur de  $\pi_1(L(p'', q'')) = \mathbb{Z}/p''\mathbb{Z}$  s'injecte dans tout quotient de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/p''\mathbb{Z}$  par  $u^N$  si  $u$  est cycliquement réduit de longueur  $\geq 2$ . D'après le lemme 13.3.1, on aurait  $p''|p$ , ce qui est absurde.  $\square$

REMARQUE : le théorème 13.3.3, pour  $M(\mu)$  à groupe fondamental cyclique fini a été annoncé par Boyer et Zhang.

#### 13.4. Le théorème sur les espaces lenticulaires

Pour établir leur théorème de chirurgie cyclique [CGLS, th 2.0.3] Culler, Gordon, Luecke et Shalen ont démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 13.4.1. — *Soient  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible tel que  $\dim H_1(M, \mathbb{Q}) = 1$  et  $\alpha$  une pente de décomposition sur  $\Sigma$  ( $M(\alpha) = V' \# V''$  avec  $V'$  et  $V'' \neq S^3$ ). Alors ou bien  $M(\alpha)$  est la somme connexe de deux espaces lenticulaires ou bien  $M$  contient une surface incompressible fermée qui demeure incompressible pour toute obturation sur une pente  $\mu$  avec  $\Delta(\alpha, \mu) > 1$ .*

Si une variété  $P$  irréductible et fermée n'est pas de Haken, alors c'est une sphère d'homologie rationnelle et tout complémentaire de nœud dans  $P$  est un cercle d'homologie rationnelle. Par hypothèse, elle ne contient aucune surface incompressible fermée (qui serait ici forcément séparante). D'où

PROPOSITION 13.4.2. — *Soient  $P$  une variété première qui n'est pas de Haken,  $k$  un nœud dans  $P$  et son complémentaire  $M = P - U(k)$  de bord  $\Sigma$  que l'on suppose incompressible. Soient  $\mu$  le méridien de  $k$  et  $\alpha$  une pente de décomposition. Alors ou bien  $\Delta(\alpha, \mu) \leq 1$  ou bien  $M(\alpha)$  est la somme de deux lenticulaires.*

En prenant  $P = L(p, q)$  avec  $P \neq S^3$ , et en ajoutant le théorème 13.3.3, on obtient donc :

THÉORÈME 13.4.3. — *Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible. Soient  $\mu$  et  $\alpha$  deux pentes telles que  $M(\mu) = L(p, q)$  et  $M(\alpha)$  se décompose en  $L(p, q') \# V''$ ,  $V'' \neq S^3$ , alors  $\Delta(\alpha, \mu) \leq 1$ .*

D'autre part, d'après le théorème de Gordon et Luecke (9.3), deux pentes de décompositions  $\alpha$  et  $\alpha'$  satisfont à  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$ . Maintenant, d'après le théorème 12.4.1 on obtient :

THÉORÈME 13.4.4. — On considère  $L(p, q) \neq S^3$  et  $S^2 \times S^1$ . Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible. Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux pentes telles que  $M(\alpha) = L(p, q) \# V$  et  $M(\alpha') = L(p, q') \# V'$ . Alors  $\Delta(\alpha, \alpha') \leq 1$ .

REMARQUES : 1) ici la variété  $V$  ou  $V'$  peut être la sphère  $S^3$ .

2) Les arguments qui nous ont permis de conclure sont voisins en plus compliqués de ceux de [Go-L3].

3) Avec  $q' = p - q$ , on a  $-L(p, q)$ . Donc on a bien traité un cas du problème de 12.3.

REMARQUES : 1) Michel Boileau nous a signalé le résultat suivant de Boyer-Zhang [Boy-Z] p 201 corollaire H :

THÉORÈME. — Soit  $M$  une variété de dimension 3 connexe, compacte, orientable telle que  $\partial M$  soit un tore. Supposons que  $M$  ne soit pas une variété de Seifert atoroidale. Si pour  $i = 1, 2$ ,  $M(r_i)$  est ou bien réductible ou bien a un groupe fondamental cyclique, alors  $\Delta(r_1, r_2) \leq 1$ . Par conséquent, il y a au plus 3 pentes qui donnent une obturation réductible ou avec un groupe fondamental cyclique.

La démonstration complète de ce résultat n'est pas publiée, mais il est clair qu'elle s'appuie sur la théorie de l'hyperbolisation de Thurston [Th2] et sur le chapitre 1 de [CGLS] qui étudie la géométrie de l'espace des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ . Il faut signaler que Boyer et Zhang retrouvent aussi le théorème 9.3 de [Go-L2]. Le travail ici repose sur une approche plus directe, plus élémentaire et le résultat de finitude visé semble nouveau.

2) De toute façon, les problèmes abordés ici semblent devoir utiliser de la géométrie, soit hyperbolique (Thurston, Shalen, Culler, Morgan), soit topologique (cycles de Scharlemann, Gordon, Luecke). Notons que la démonstration du théorème de Baumslag-Morgan-Shalen utilise de façon cruciale un plongement dans  $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ . Selon Boileau, les méthodes utilisées ici permettent d'étendre le résultat à d'autres variétés premières que les espaces lenticulaires.



## PARTIE 4 : LE MODULE DU TORE

### 14. Le $\Gamma$ -module $E_1$

Dans toute la suite  $\Sigma$  désigne le tore  $S^1 \times S^1$ . Dans cette section, nous allons construire l'espace vectoriel de genre 1 pour un caractère premier  $\chi_P$ . On pose  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ .

#### 14.1. Le $\Gamma$ -module $\mathbb{C}\langle\mathcal{V}(\Sigma)\rangle$

Les vecteurs de  $\mathbb{C}\langle\mathcal{V}(\Sigma)\rangle$  sont de la forme  $\sum_i \lambda_i M_i$  où  $M_i$  est une variété de bord  $\Sigma$ . En 4.4, nous avons noté, pour un caractère  $\chi$ ,  $B_\chi$  la forme hermitienne,  $\mathcal{N}_\chi$  son noyau et  $E_\chi^1$  le quotient de  $\mathbb{C}\langle\mathcal{V}(\Sigma)\rangle$  par  $\mathcal{N}_\chi$ . Soit  $\sigma$  un élément de  $\Gamma$ , alors on pose  $\sigma.x = \sum_i \lambda_i \sigma.M_i$  où l'action de  $\Gamma$  sur les variétés  $M_i$  est décrite dans le paragraphe 10.1.

Avec les notations de 4.4 et d'après 10.1.1 on a :

PROPOSITION 14.1.1. — *Le groupe  $\Gamma$  agit isométriquement sur  $\mathbb{C}\langle\mathcal{V}(\Sigma)\rangle$ . Autrement dit,  $B(\sigma.x, \sigma.y) = B(x, y)$  pour tout  $\sigma$  de  $\Gamma$ .*

L'objectif est la description de  $E_\chi^1$

#### 14.2. Description du noyau

Une variété  $M$  de  $\mathcal{V}(\Sigma)$  qui n'est pas irréductible est de la forme  $M = V \# M'$  où  $V$  est un élément de  $\mathcal{V}$  différent de  $S^3$ . On a  $\partial M = \partial M'$  et l'élément  $M - \chi(V)M'$  est toujours dans le noyau. Dans ces conditions, le sous-module  $\mathbb{C}\langle\mathcal{P}(\Sigma)\rangle$  de  $\mathbb{C}\langle\mathcal{V}(\Sigma)\rangle$  se projette surjectivement sur le quotient  $E_\chi^1$ . On peut donc se restreindre aux combinaisons linéaires d'éléments irréductibles.

Les éléments de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  sont pour un caractère  $\chi_P$  de types bien différents : il y a d'abord les tores solides  $H_{p/q}$  qui sont les pièces compressibles, ensuite les pièces essentielles (12.2.2) et enfin les autres que nous qualifierons de pièces génériques.

Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible. On pose  $\mathcal{C}(M) = \{r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) / \chi_P(M(r)) = 0\}$ . Autrement dit ce sont les pentes qui font apparaître  $\pm P$  dans la décomposition de l'obturation.

LEMME 14.2.1. — *Soient  $M$  et  $M'$  deux éléments de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible qui ne sont pas des pièces essentielles. Alors la différence  $M - M'$  est dans le noyau si et seulement si  $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M')$*

Démonstration : on a  $\chi_P(M \cup_\Sigma -N) = 1 = \chi_P(M' \cup_\Sigma -N)$  si  $N$  est irréductible et à bord incompressible puisque  $M$  et  $M'$  ne sont pas des pièces essentielles et que le recollement est irréductible (12.2.1). Maintenant si  $N$  est un tore solide et



si  $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M')$ , on a  $\chi_P(M \cup_\Sigma -N) = \chi_P(M' \cup_\Sigma -N)$  par définition de  $\mathcal{C}$ . La réciproque est évidente.  $\square$

DÉFINITION 14.2.2 : on dit qu'un caractère  $\chi$  est de type fini si le module  $E_\chi^1$  est de type fini sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{P}(\Sigma)$   $M_1, \dots, M_n$  tels que tout vecteur de  $E_\chi^1$  soit de la forme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i M_i$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  et  $\sigma_i \in \Gamma$ .

D'après les théorèmes des sections 12 et 13, on a le début d'une description du module  $E_{\chi_P}^1$  pour  $P = L(p, q)$ . On pose  $\chi_{L(p,q)} = \chi_{p/q}$ .

THÉORÈME 14.2.3. — *Le caractère  $\chi_{p/q}$  est de type fini*

Démonstration : les lenticulaires ne contiennent pas de tores essentiels donc on a que les obturations à considérer. D'après 13.4.4, les sous-ensembles  $\mathcal{C}(M)$  permis sont du type :

- l'ensemble vide,
- un seul élément  $\{r\}$ , que l'on peut ramener à  $\infty$  par action transitive de  $\Gamma$ ,
- $\{r_1, r_2\}$  avec  $\Delta(r_1, r_2) \leq 1$ , que l'on peut ramener à  $\{0, \infty\}$ ,
- $\{r_1, r_2, r_3\}$  avec  $\Delta(r_i, r_j) \leq 1$ , que l'on peut ramener par action de  $\Gamma$  à  $\{n, n+1, \infty\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ainsi une variété  $M$  de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  à bord incompressible a un ensemble  $\mathcal{C}(M)$  qui appartient à l'une des quatre orbites qui sont :  $\emptyset$ ,  $\Gamma\{\infty\}$ ,  $\Gamma\{0, \infty\}$  et  $\Gamma\{0, 1, \infty\}$ . Donc le module  $E_{\chi_{p/q}}^1$  est de type fini sur  $SL_2(\mathbb{Z})$ .  $\square$

REMARQUE : on verra dans la section 15 que l'ensemble vide et un ensemble  $\mathcal{C}(M)$  avec un seul élément vivent dans le module  $E_P^1$  et sont vraiment réalisés par des variétés.

Soit  $G$  un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$ . Par définition, l'espace des éléments co-invariants par  $G$  à coefficient dans  $E_P^1$  est :

$H_0(G, E_P^1) = E_P^1 / \text{Var}(E_P^1)$  où  $\text{Var}(E)$  est le sous-module engendré par les éléments de la forme  $\sigma.m - m$  où  $\sigma$  décrit  $G$  et  $m$  décrit  $E$ .

COROLLAIRE 14.2.4. — *L'espace vectoriel associé à  $\chi_{p/q}$  des éléments co-invariants par  $G$  est de dimension finie.*

## 15. Les générateurs d'un caractère premier

### 15.1. Introduction

Nous allons ici construire explicitement certains générateurs du module  $E_P^1$  pour toute variété première  $P$ .

DÉFINITION 15.1.1 : On dit qu'une variété  $M$  de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  est un centre pour un caractère  $\chi$  si pour tout  $N$  de  $\mathcal{P}(\Sigma)$ ,  $\chi(M \cup_\Sigma -N) = 1$ .

DÉFINITION 15.1.2 : soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$ . On dit que  $M$  est un générateur simple pour un caractère  $\chi$  s'il existe un unique tore solide  $H_r$  tel que  $\chi(M(r)) = 0$ .

15.2. *Le centre*

On allons donner un exemple de construction qui montre qu'une telle variété existe pour un caractère premier  $\chi_P$ .

La surface  $T_{1,1}$  désigne le tore de genre 1 avec un trou. On pose  $M = T_{1,1} \times S^1$ . C'est une variété à bord homéomorphe à  $\Sigma$  qui est incompressible. La surface  $\Sigma$  est identifiée à  $S^1 \times S^1$  de façon à ce que  $\partial T_{1,1}$  soit la première composante de  $\Sigma$  et la fibre de  $\partial M$  la seconde.

REMARQUE : dans ces conditions, la pente bordante vaut  $1/0$  et elle est d'indice 1.

LEMME 15.2.1. — *La variété  $M$  est irréductible.*

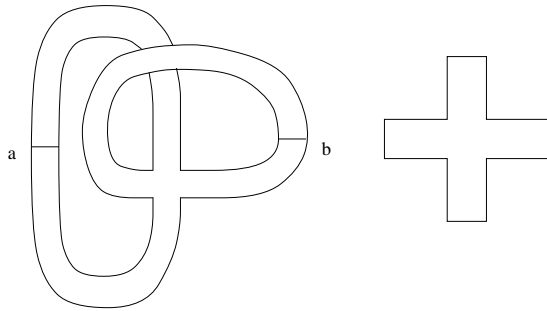
Démonstration : On pose  $DM = M \cup_{\Sigma} -M$ . D'après 12.2.1, ce recollement n'engendre pas de sphères essentielles.

La variété  $DM$  est homéomorphe à  $\Sigma_2 \times S^1$  où  $\Sigma_2$  désigne une surface fermée de genre 2. Donc c'est un fibré en cercles et d'après [Jac, p 96], la variété  $DM$  est irréductible.  $\square$

REMARQUE : le revêtement universel de  $DM$  est homéomorphe à  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}$  étant le demi-plan de Poincaré. C'est donc une 3-cellule. D'après [Lau, p 16], la propriété d'irréductibilité se transmet par descente, donc  $DM$  est irréductible.

LEMME 15.2.2. — *La variété  $M_0 = M \cup_{\Sigma} -H_{0/1}$  est homéomorphe à  $S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$ .*

Démonstration : le tore  $T_{1,1}$  est représenté comme dans la figure ci-dessous. La chirurgie engendre le long des arcs  $a$  et  $b$  deux sphères non séparantes et non homologues. D'après [Hem, 3.8], on a  $M_0 = S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# R$ . On a enlevé à  $T_{1,1}$  les arcs  $a$  et  $b$  (voir figure). Ainsi la variété  $R$  se réalise comme le recollement de deux tores solides et d'après 12.1.2, cela donne  $S^3$ .  $\square$



LEMME 15.2.3. — *La variété  $M_{p/q} = M \cup_{\Sigma} -H_{p/q}$  est irréductible pour  $p/q \neq 0$ .*

Démonstration : si  $p/q$  est non nul, alors la variété  $M_{p/q}$  s'identifie à un fibré de Seifert sur un tore avec au plus une fibre exceptionnelle. D'après [Jac, p 96], cette variété est irréductible.  $\square$

REMARQUE : la variété  $M_{p/q}$  est le tore  $S^1 \times S^1 \times S^1$  pour  $p/q = 1/0$  et un fibré singulier de Seifert sur un tore avec une fibre exceptionnelle sinon.

On a  $\pi_1(M_{p/q}) = \langle x, y, z; [x, z] = [y, z] = 1, [x, y]^p = z^{-q} \rangle$ .

Le premier nombre de Betti est noté  $b_1$ .

PROPOSITION 15.2.4. — *Pour toute variété première  $P$ , il existe un élément  $M$  de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  tel que pour tout  $N$  élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$ , on ait  $\chi_P(M \cup_{\Sigma} -N) = 1$ .*

Démonstration : si  $b_1(P) \geq 2$  alors l'homologie nous dit qu'il suffit de prendre une variété  $M$  qui n'est pas dans  $S(P)$  et telle que  $b_1(M) = 1$ . Maintenant si  $b_1(P) \leq 1$  et  $P \neq S^1 \times S^2$  alors en prenant  $M = T_{1,1} \times S^1$ , d'après 15.2.2 et 15.2.3 la variété  $M_{p/q}$  est irréductible avec  $b_1(M_{p/q}) \geq 2$ . Donc on en déduit que  $\chi_P(M_{p/q}) = 1$  et comme  $b_1(M) = 3$ , la variété n'est pas dans  $S(P)$ .

Enfin pour  $P = S^1 \times S^2$ , on prend pour  $M$ , l'espace du nœud associé au nœud de trèfle. D'après [Mos],  $\chi_{S^2 \times S^1}(M_{p/q}) = 1$ .  $\square$

REMARQUE : pour  $S^2 \times S^1$ , tout nœud non trivial de  $S^3$  convient également [Gab2].

### 15.3. Un invariant de Haken

Rappelons que le théorème de Haken affirme que le nombre de surfaces incompressibles disjointes et non parallèles dans une variété première est fini ([Hak1,Hak2]). Ceci reste encore vrai dans une variété non première d'après le théorème de décomposition de Kneser-Milnor. En particulier, le nombre de tores incompressibles séparants disjointes et non parallèles est fini. Ce nombre est mal défini comme invariant topologique. Nous dirons qu'une famille de tores est maximale si tout tore incompressible séparant est parallèle à un tore de la famille ou bien si l'intersection avec la famille est essentielle (c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être éliminée par une isotopie).

On définit l'entier  $Hk(P)$  qui est le cardinal minimum d'une famille maximale. La fonction  $Hk$  est également définie sur les variétés compactes à bord. Si la variété  $P$  n'est pas de Haken alors évidemment  $Hk(P)=0$ .

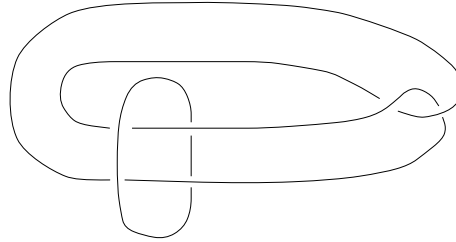
PROPOSITION 15.3.1. — *La fonction  $Hk$  est un caractère additif.*

Démonstration : supposons que la variété  $V$  soit de la forme  $V' \# V''$ . Soit  $S$  une sphère de décomposition et  $\Sigma$  une surface incompressible. L'intersection de  $S$  avec  $\Sigma$  est une famille de courbes  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ . Il existe un entier  $k$  tel que la courbe  $\gamma_k$

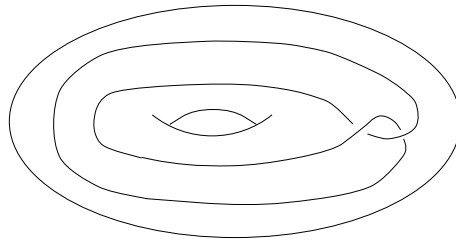
borde un disque de  $S$  et comme la surface  $\Sigma$  est incompressible, on peut éliminer la courbe  $\gamma_k$  par isotopie. Ainsi on se ramène par récurrence à une intersection vide. Donc un tore incompressible de  $V$  est isotope à un tore incompressible de  $V'$  ou à un tore incompressible de  $V''$ . Une famille  $F$  de tores incompressibles dans  $V$  est réunion d'une famille  $F'$  de tores de  $V'$  et d'une famille  $F''$  de tores de  $V''$ . Comme un tore incompressible de  $V'$  ne peut être parallèle à un tore incompressible de  $V''$ , la famille  $F$  est maximale si et seulement si  $F'$  et  $F''$  sont maximales. Si la famille  $F$  est maximale et de cardinal minimal, les cardinaux de  $F'$  et de  $F''$  le sont aussi.  $\square$

#### 15.4. La variété de Whitehead

Soit  $w$  l'entrelacs de Whitehead :



Le complémentaire dans  $S^3$  de cet entrelacs est le complémentaire d'un noeud  $k_1$  dans un tore solide  $D^2 \times S^1$  standard plongé dans  $\mathbb{R}^3$  :



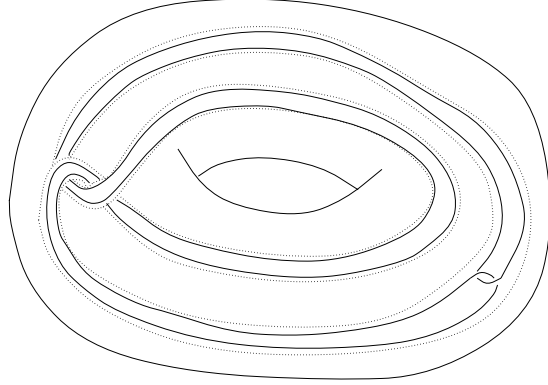
Nous appellerons cette variété  $W_1$ . Elle a la propriété d'être hyperbolique [Rat, p 450], elle est donc atoroidale. On appelle  $T$  le bord du tore solide et  $\Sigma$  la surface intérieure identifiée à  $S^1 \times S^1$ . Soit  $H_r$  un tore solide de bord  $\Sigma$ . On pose  $W_1(r) = W_1 \cup_{\Sigma} -H_r$ .

LEMME 15.4.1. — *La variété  $W_1(r)$  est à bord incompressible pour  $r \neq 1/0$ .*

Démonstration : ce noeud dans le tore solide a une classe d'homotopie nulle et la variété  $W_1$  est atoroidale. Le résultat est une conséquence du corollaire 2.5 de [Gab1].  $\square$

Le voisinage tubulaire du nœud  $k_1$  est identifié à  $D^2 \times S^1$ . Remplaçons le par  $W_1$ . On obtient  $k_2$  dans  $D^2 \times S^1$  de complémentaire  $W_2$ . En itérant cette construction, on obtient un nœud  $k_n$  dans  $D^2 \times S^1$  de complémentaire  $W_n$ .

La variété  $W_n$  s'obtient par des recollements successifs de variétés hyperboliques. Donc la sous variété caractéristique de  $W_n$  s'identifie à  $T_{n+1} \times [0, 1]$  où  $T_n$  désigne une réunion disjointe de  $n$  tores (ces tores sont ici canoniques à isotopie près). La figure représente la variété  $W_2$ .



REMARQUE : on a un système inductif de variétés dont la limite inductive est un espace contractile et qui n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  (Withehead).

PROPOSITION 15.4.2. — *La variété  $W_n$  vérifie  $Hk(W_n(r)) \geq n$  pour  $r \neq 1/0$ .*

Démonstration : on a  $W_n(r) = W_{n-1} \cup W_1(r)$ . Les tores de  $W_{n-1}$  sont canoniques donc  $Hk(W_n(r)) = Hk(W_{n-1}) + Hk(W_1(r)) \geq n$ .  $\square$

### 15.5. Construction d'un générateur simple

On rappelle que le voisinage tubulaire d'un nœud  $k$  d'une variété  $P$  est noté  $U(k)$  et on le suppose ouvert.

PROPOSITION 15.5.1. — *Pour toute variété première  $P$ , il existe un nœud  $k$  tel que la variété  $M = P - U(k)$  soit irréductible et à bord incompressible.*

Démonstration : il existe toujours un nœud  $k$  qui a un complémentaire irréductible sinon la variété est homéomorphe à  $S^3$  d'après le théorème de Bing (1958) ([Rolfl, p 251]). Si la variété  $P$  n'est pas un espace lenticulaire alors le complémentaire est par définition à bord incompressible. Maintenant pour un espace lenticulaire  $L(p, q)$  : il se réalise comme la réunion de deux tores solides  $H_{-q/p} \cup_{\Sigma} H_{1/0}$  et on remplace le tore  $H_{1/0}$  par la variété  $W_1$  définie précédemment ; d'après la proposition 15.4.1, le nœud obtenu convient.  $\square$

Soit  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble des variétés avec un nombre de Haken  $\leq n$ . Soit  $P$  un élément premier de  $\mathcal{E}_n$ .

PROPOSITION 15.5.2. — *Il existe une variété  $M$  irréductible, à bord incompressible telle que  $M(1/0) = P$  et  $M(r) \notin \mathcal{E}_n$  pour  $r \neq 1/0$  où  $r$  désigne le paramètre de la chirurgie de Dehn.*

Démonstration : soit  $k$  un noeud dans  $P$  qui vérifie les propriétés de la proposition 15.5.1. On pose  $N = P - U(k)$  et on fait de  $N$  une variété de bord  $T$  ( Cf 15.4). La paramétrisation du bord est telle que le méridien soit le premier vecteur de base de  $H_1(T)$  et l'âme du noeud le second.

On considère la variété  $N \cup_T -W_n$ . C'est une variété de bord  $\Sigma$ . D'après ce qui précède, toutes les chirurgies de Dehn sont irréductibles,  $M(1/0) = P$  et  $Hk(M(r)) \geq n + 1$  si  $r \neq 1/0$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{I} = \{P_1, \dots, P_n\}$  un ensemble fini de variétés premières. Soit  $\chi_{\mathcal{I}} = \chi_{P_1} \dots \chi_{P_n}$  le caractère associé à l'ensemble  $\mathcal{I}$ . On a alors

COROLLAIRE 15.5.3. — *Le caractère  $\chi_{\mathcal{I}}$  admet un générateur simple et un générateur équivalent au centre.*

REMARQUE : dans le cas où  $P$  est l'espace lenticulaire  $L(p, q)$  (différent de  $S^2 \times S^1$ ), les lemmes 7.1 et 7.2 de [Gor2] et une construction analogue à 15.4 et 15.5 donnent un générateur  $M$  dont l'ensemble caractéristique  $\mathcal{C}(M)$  ait pour cardinal 2 ou 3 (c'est le complémentaire d'un câble associé à un générateur simple).

## 16. L'espace vectoriel en genre 1, sa forme hermitienne

Rappelons que le module  $E_P^1$  est le quotient de  $\mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle$  par le noyau  $\mathcal{N}$  de la forme hermitienne  $B$  définie sur la base par  $B(M, N) = \chi(M \cup_{\Sigma} -N)$  (Cf 4.2 et 14.1).

On a déjà dit que  $E_P^1$  est linéairement engendré par les images des éléments de  $\mathcal{P}(\Sigma)$ .

### 16.1. Le sous-module des tores solides

On note  $h_r$  le représentant de  $H_r$  dans  $\mathcal{P}(\Sigma)$ ,  $r$  étant un élément de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ . On pose  $E_H = \bigoplus_{r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} \mathbb{C}h_r$ . L'ensemble des vecteurs  $h_r$  forme une seule orbite sous  $\Gamma$ .

THÉOREME 16.1.1. — *Le sous-module  $E_H$  s'injecte dans  $E_P^1$*

Démonstration : dans le cas contraire, on aurait une combinaison linéaire de la forme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i h_{r_i} = 0$  où les scalaires  $\lambda_i$  sont non tous nuls. Soit  $M_i$  un générateur simple pour la pente  $r_i$  (15.5.3).

Le produit hermitien de la combinaison linéaire avec les générateurs  $M_i$  nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Donc tous les scalaires  $\lambda_i$  sont nuls.  $\square$

### 16.2. Le sous-module des pièces essentielles

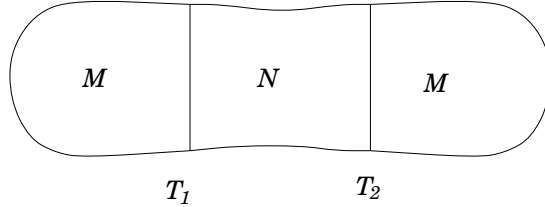
Soit  $E_S$  le sous-module de  $E_P^1$ , image de  $\mathbb{C}\langle S(P) \rangle$  (cf 12.2). Il est de type fini (12.2.3).

PROPOSITION 16.2.1. — *On a  $E_S \cap E_H = \{0\}$ . Une base  $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $E_S$  est donnée par les classes d'équivalence des éléments de  $S(P)$ , pour la relation  $\equiv$  telle que  $M \equiv M'$  si et seulement si pour tout  $N$  de  $S(P)$ ,  $B(M, N) = B(M', N)$ .*

Démonstration : l'existence des générateurs simples entraîne que  $\mathcal{N} \cap (\mathbb{C}\langle H \rangle \oplus \mathbb{C}\langle S \rangle) = \mathcal{N} \cap \mathbb{C}\langle H \rangle \oplus \mathcal{N} \cap \mathbb{C}\langle S \rangle$ .

A présent, considérons une combinaison linéaire finie  $\sum_i \lambda_i S_i$  où  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  et  $S_i \in S(P)$ , tels que si  $i \neq j$  alors on ait  $S_i \not\equiv S_j$ . Celle-ci n'est dans  $\mathcal{N}$  que si tous les  $\lambda_i$  sont nuls. En effet, on a  $\sum_i \lambda_i = 0$  en évaluant sur un centre. A chaque  $i$ , on associe une partie  $\varphi_i$  de  $S(P)$  formée d'éléments  $N$  de  $S(P)$  telle que  $B(S_i, N) = 0$ . Par hypothèse,  $i \neq j \Rightarrow \varphi_i \neq \varphi_j$ . D'où le résultat en considérant l'algèbre extérieure sur  $\mathbb{C}\langle S(P) \rangle$  et sa base canonique.  $\square$

REMARQUE : il se peut que pour  $M, N_1$  et  $N_2 \in S(P)$  avec  $N_1 \neq N_2$ , on ait  $M \cup_{T_1} N_1 = M \cup_{T_2} N_2 = P$ .



Il suffit de prendre  $N_1 = M \cup_{T_1} N$ ,  $N_2 = N \cup_{T_2} M$ . On a ce que l'on demande s'il n'y a pas d'homéomorphisme de  $N$  échangeant  $T_1$  et  $T_2$ .

### 16.3. Le sous-module des pièces génériques

Soit  $E_G$  le sous-module de  $E_P^1$  image du sous-espace de  $\mathbb{C}\langle \mathcal{V}(\Sigma) \rangle$  engendré par les éléments de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  qui ne sont pas dans  $S(P)$ , et qui sont à bord incompressible ( $E_G$  ne contient pas d'anses pleines).

Le même argument qu'au 16.2 montre l'énoncé suivant :

PROPOSITION 16.3.1. — On a  $E_G \cap (E_S \oplus E_H) = \{0\}$  et il existe une base de  $E_G$  formée d'images de variétés de  $\mathcal{P}(\Sigma)$ .

Le lemme 14.2.1 nous dit que deux variétés  $M$  et  $M'$  ont même image dans  $E_G$  si  $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M')$ .

Cependant, sauf pour la classe des espaces lenticulaires, on ne sait pas s'il y a des collections de pentes de cardinal infini ou si le nombre d'orbites sous  $\Gamma$  est fini.

#### 16.4. La forme hermitienne sur $E_P^1$

Sur  $E_G \times E_G$ , la forme est facile à décrire :  $B(M, N) = 1$  pour toutes pièces génériques  $M$  et  $N$ . De même sur  $E_G \times E_S$ . Sur  $E_S \times E_S$ , c'est un problème particulier à chaque variété  $P$ .

Sur  $E_G \times E_H$ , c'est la définition des éléments de base de  $E_G$ .

Sur  $E_S \times E_H$ , il y a un problème. En utilisant le volume simplicial de Gromov, Boileau [Boil] a montré que si  $M \in \mathcal{S}(P)$  et si la variété  $M$  n'est pas contenue dans une boule, alors pour tout tore solide  $H$ , on a  $M \cup -P \neq P$ . Mais peut-on avoir  $M \cup -H = P \# Q$  ?

Enfin sur  $E_H \times E_H$ , la forme est facile à calculer : si  $P$  n'est pas un espace lenticulaire,  $B(H_r, H_s) = 1$  pour tout  $r, s$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ .

Maintenant si  $P = L(p, q)$ , on pose  $r = \frac{a}{b}$  et  $s = \frac{c}{d}$  avec  $(a, b) = (c, d) = 1$ . On choisit un couple d'entiers  $(u, v)$  tel que  $au - bv = 1$ .

Nous pouvons donc écrire :

$$\chi_{p/q}(H_r \cup H_s) = B(H_r, H_s) = 0 \text{ ou } 1 \text{ selon que}$$

$$\begin{cases} p = ad - bc \\ q \equiv cu - dv \pmod{p} \text{ ou } q^{-1} \equiv dv - cu \pmod{p} \end{cases}$$

ou non.

EXEMPLE :  $P = S^2 \times S^1$ .

Dans ce cas, on a tout de suite les différentes possibilités pour le module  $E_P^1$  grâce au théorème de Gordon et Luecke (9.4). On note  $c$  le centre,  $h_{p/q}$  le représentant de  $H_{p/q}$ ,  $d_r^1$  (resp  $d_{r_1, r_2}^2$  ou  $d_{r_1, r_2, r_3}^3$ ) le représentant d'une variété avec une pente planaire non séparante qui vaut  $r$  (resp.  $r_1$  et  $r_2$  ou  $r_1, r_2$  et  $r_3$ ). D'après le théorème 9.4, on a  $\Delta(r_i, r_j) \leq 1$ . On pose :

$$D_1 = \bigoplus_{r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} \mathbb{C}d_r^1,$$

$$D_2 = \bigoplus_{r_1 < r_2, \Delta(r_1, r_2) \leq 1} \mathbb{C}d_{r_1, r_2}^2,$$



$$D_3 = \bigoplus_{r_1 < r_2 < r_3, \Delta(r_i, r_j) \leq 1} \mathbb{C}d_{r_1, r_2, r_3}^3.$$

Ainsi on a quatre possibilités pour le module  $E_{S^2 \times S^1}$  (entre lesquelles on ne sait pas trancher) :

$$E_{S^2 \times S^1} = \mathbb{C}c \oplus E_H \oplus D_1$$

$$E_{S^2 \times S^1} = \mathbb{C}c \oplus E_H \oplus D_1 \oplus D_2$$

$$E_{S^2 \times S^1} = \mathbb{C}c \oplus E_H \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$$

$$E_{S^2 \times S^1} = \mathbb{C}c \oplus E_H \oplus D_1 \oplus D_3.$$

REMARQUE : on peut espérer que la finitude obtenue pour les espaces lenticulaires n'est qu'un cas particulier et que tous les caractères  $\chi_P$  donnent un  $\Gamma$ -module de type fini. Une construction possible de théorie rationnelle à partir de là serait de regarder l'espace vectoriel engendré par les  $G$ -orbites dans  $E^1(\Sigma)$  et de régulariser la forme hermitienne ci-dessus. Précisément, il faut donner un sens à la forme  $\langle m_1, m_2 \rangle_0 = \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma m_1, m_2 \rangle$  sur  $H_0(G, E_P^1)$ . C'est le lien avec le dernier chapitre, qui est par ailleurs largement indépendant ; le seul caractère que l'on verra est l'invariant  $\tau_3$  de [R-T].

## PARTIE 5 : CARACTÈRES G-INVARIANTS

### 17. La G-chirurgie

#### 17.1. Sous-groupes de Hecke

Le groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  opère transitivement sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

Dans ce travail, nous aurons à considérer quelques sous-groupes de  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Rappelons la définition de ces sous-groupes ainsi que leur notation usuelle [Miy] :

tout d'abord, le stabilisateur de  $1/0$

$$\Gamma'_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\Gamma_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les sous-groupes suivants seront qualifiés de sous-groupes de Hecke :

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma'_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv \pm 1 \pmod{N} \right\},$$

notons que  $-1$  est dans  $\Gamma_0(N)$  et  $\Gamma_1(N)$  et que ce n'est pas le cas pour  $\Gamma'_1(N)$  avec  $N > 2$ .

On note  $\Gamma'(N)$  le sous-groupe de congruence principal de niveau  $N$  dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  :

$$\Gamma'(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), a \equiv d \equiv \pm 1 \pmod{N}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

REMARQUE : les notations adoptées ici conflictent légèrement avec celle de Miyake [Miy]. Par exemple, le groupe  $\Gamma_1(N)$  dans Miyake est noté  $\Gamma'_1(N)$  et le groupe  $\Gamma(N)$  est noté  $\Gamma'(N)$ .

Les sous-groupes de Hecke sont d'indice fini dans  $\Gamma = \Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$  et on a

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \Gamma, \quad |SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(N)| = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

où le produit est pris sur les nombres premiers  $p$  qui divisent  $N$ .

Le nombre de pointes du groupe  $\Gamma_0(N)$  est  $\nu^\infty(\Gamma_0(N)) = \prod_{0 < d|N} \varphi(\text{pgcd}(d, N/d))$   
 ( $\varphi$  désigne l'indicateur d'Euler). Celui du groupe  $\Gamma'_1(N)$  vaut  $\nu^\infty(\Gamma'_1(N)) = \frac{1}{2} \prod_{0 < d|N} \varphi(d)\varphi(N/d)$  si  $N \geq 5$ , et ce nombre vaut 3 pour  $N = 4$

### 17.2. Action d'un groupe sur les paramètres de chirurgie

Soit  $V$  une variété fermée orientée et  $k$  un nœud de  $V$ . On pose  $M = V - U(k)$  et on en fait un élément de  $\mathcal{V}(\Sigma)$ .

Le premier problème est le choix de la base de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ . Elle n'est pas canonique. Le méridien  $\mu$  est défini au signe près et la longitude  $\lambda$  est définie à  $\mathbb{Z}\mu$  près. Le choix du méridien  $\mu$  revient au choix d'une orientation du nœud  $k$ .

On a vu que faire une chirurgie de pente  $\pm\alpha$  (courbe fermée simple essentielle de  $\Sigma$ ) revient à coller le tore plein  $H = D^2 \times S^1$  en envoyant  $e_1$  sur  $\alpha$  où  $\{e_1, e_2\}$  est une base de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ .

Si on a choisi une base  $\{\mu, \lambda\}$ ,  $\alpha$  est de la forme  $a\mu + c\lambda$  et le recollement  $\varphi$  est donné par un élément  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . On a  $M(\alpha) = M \cup_\Sigma -H_{a/c} = M \cup_\varphi -H$ .

Si on change  $\varphi$  en  $\varphi \circ \sigma$  où  $\sigma \in \Gamma^\infty$ , la pente  $a/c$  ne change pas et  $M(\alpha)$  non plus.

En revanche, si on change  $\varphi$  en  $\sigma \circ \varphi$ ,  $\sigma \in \Gamma^\infty$ , on fait une autre chirurgie, celle de paramètre  $a/c$  dans une autre base  $\{\mu', \lambda'\}$  où  $\mu' = \pm\mu$  et  $\lambda' = \pm\lambda + n\mu$ . Vu autrement, c'est la chirurgie de pente  $\pm\sigma(\alpha)$  où  $\sigma$  agit sur  $\Sigma$  repérée par la base  $\{\mu, \lambda\}$ .

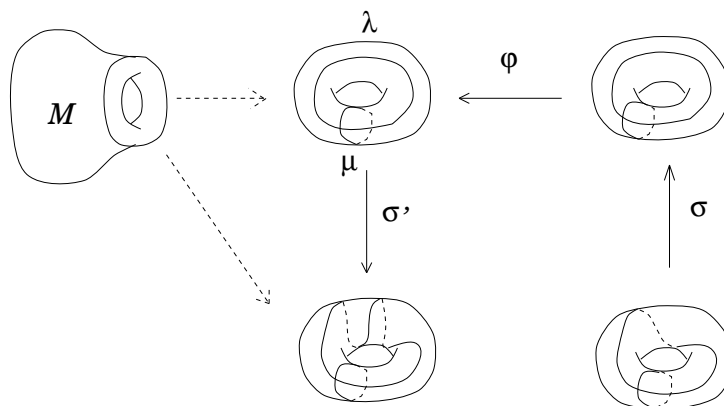


Schéma de la G-chirurgie

DÉFINITION 17.2.1 : soit  $G$  un sous-groupe de  $SL_2(\mathbb{Z})$  qui contient  $\Gamma^\infty$ . Une  $G$ -chirurgie sur une variété  $V$  le long du nœud  $k$  est une chirurgie qui peut être réalisée par un élément de  $G$  dans une base  $\{\mu, \lambda\}$  de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  ( $\mu$  est le méridien et  $\lambda$  la longitude et on a  $\langle \mu, \lambda \rangle = 1$ ).

Pour une  $G$ -chirurgie  $V(\alpha)$ , tout choix de base  $\{\mu', \lambda'\}$  et tout recollement du tore plein  $H$  donne un élément  $\varphi'$  de  $G$ . Seule la double classe  $\Gamma^\infty \varphi' \Gamma^\infty$  est bien définie par la pente  $\pm\alpha$ .

Comme on demande  $-1 \in G$ , on a la même notion avec la  $\overline{G}$ -chirurgie où  $\overline{G} \subset \mathbb{P}SL_2(\mathbb{Z})$  est l'image de  $G$  par la projection canonique.

Toute chirurgie est une  $\Gamma(1)$ -chirurgie.

Les orbites de  $\Gamma^\infty$  s'identifient à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Q} \cap [0, 1[$ .

Les  $\Gamma^\infty$ -chirurgies sont toutes triviales car elles ne peuvent être données que par la pente  $\mu$ .

LEMME 17.2.2. — *Etant donnée une base  $\{\mu, \lambda\}$  de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  où  $\Sigma = \partial U(k)$ , alors la pente  $a/c$  donne une  $G$ -chirurgie si et seulement si  $a/c \in G \cdot \infty$ .*

DÉFINITION 17.2.3 : on dit que les variétés  $V$  et  $V'$  sont  $G$ -équivalentes si  $V$  et  $V'$  se déduisent l'une de l'autre par une suite de  $G$ -chirurgies.

Les sous-groupes considérés par Hecke, ceux du type  $\Gamma_0(N)$  vérifient les hypothèses demandées. Les sous-groupes  $\Gamma_1(N)$  conviennent également.

EXEMPLE : si  $(a, c)$  est un couple d'entiers premiers entre eux et si l'entier  $N$  divise  $c$ , alors l'espace lenticulaire  $L(a, c)$  est  $\Gamma_0(N)$ -équivalent à  $S^3$ , puisque  $L(a, c) = H_{0/1} \cup_\Sigma -H_{a/c}$ .

Nous allons maintenant montrer que la notion de  $G$ -chirurgie où  $G$  est un sous-groupe d'indice fini de Hecke est non triviale, autrement dit qu'il existe des variétés qui ne sont pas  $G$ -équivalentes à  $S^3$ . On supposera désormais que  $G$  est un sous-groupe d'indice fini du type Hecke, c'est-à-dire égal à  $\Gamma_0(N)$  avec  $N > 1$ .

Tous les produits tensoriels considérés sont effectués au dessus de  $\mathbb{Z}$ . Soient  $F, E, B$  et  $\Lambda$  des groupes abéliens où  $F$  et  $E$  sont libres et tels que la suite

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} E \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

soit exacte. Alors on a

$$F \otimes \Lambda \xrightarrow{i \otimes 1} E \otimes \Lambda \longrightarrow B \otimes \Lambda \longrightarrow 0.$$

Par définition  $\text{Tor}(B, \Lambda) = \ker(i \otimes 1)$ .

Dans ces conditions, le théorème des coefficients universels nous dit que  $H_n(V, \Lambda) = H_n(V, \mathbb{Z}) \otimes \Lambda \oplus \text{Tor}(H_{n-1}, \Lambda)$ .

PROPOSITION 17.2.4. — Soient  $V$  et  $V'$  deux éléments de  $\mathcal{V}$  qui sont  $\Gamma_0(N)$ -équivalents. Alors  $H_1(V, \mathbb{Z}/N) = H_1(V', \mathbb{Z}/N)$ .

Démonstration : on suppose que  $V$  se décompose sous la forme  $M \cup_{\Sigma} -H_{1/0}$  et que la pente bordante de  $M$  vaut  $x/y$  avec  $x$  et  $y$  premiers entre eux. D'après la proposition 11.2, on sait que  $H_1(M, \mathbb{Z}) = H \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$  et  $H_1(V, \mathbb{Z}) = H \times \mathbb{Z}/u\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/ynv\mathbb{Z}$ , en posant  $u = \text{pgcd}(m, n)$  et  $v = \text{ppcm}(m, n)$ . La chirurgie de matrice  $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $\Gamma_0(N)$  remplace  $H_{1/0}$  par  $H_{a/c}$ ; la variété  $V' = M(a/c)$  ainsi obtenue s'exprime aussi  $M' \cup_{\Sigma} -H_{1/0}$  où  $M'$  ne diffère de  $M$  que par le paramétrage de son bord : la pente bordante de  $M'$  vaut  $x'/y'$  avec  $x' = dx - by$  et  $y' = -cx + ay$ .

Donc  $H_1(V', \mathbb{Z}) = H \times \mathbb{Z}/u\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/y'nv\mathbb{Z}$ .

Avec les coefficients dans  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , on obtient  $H_1(V, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = H_1(V', \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ , en effet  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\text{pgcd}(l, N)\mathbb{Z}$  et  $\text{pgcd}(vny, N) = \text{pgcd}(vny', N)$ .  $\square$

On pose  $t_N(V) = \text{ordre}(H_1(V, \mathbb{Z}/N))$ .

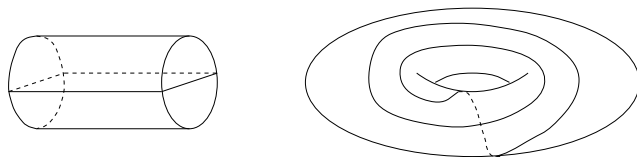
COROLLAIRE 17.2.5. — Le caractère  $2^{t_N(V)}$  est  $\Gamma_0(N)$ -invariant.

REMARQUE : le groupe  $H^1(V, \mathbb{Z}/N)$  est  $\Gamma_0(N)$ -invariant. Cela se montre de la même façon.

Soit  $H = D^2 \times S^1$  plongé dans  $\mathbb{R}^3$ .

LEMME 17.2.6. — La pente  $1/2$  borde une bande de Mœbius plongée dans  $H$ .

Démonstration : on considère le cylindre  $D^2 \times [0, 1]$  et on identifie  $D^2 \times 0$  à  $D^2 \times 1$  par un demi-twist. Le rectangle devient une bande de Mœbius de pente  $1/2$  (figure ci-dessous).



Ce lemme nous donne une interprétation géométrique pour le groupe  $\Gamma_0(2)$ . En effet, on peut déduire que la propriété de contenir une surface fermée plongée non-orientable est  $\Gamma_0(2)$ -invariante.

PROPOSITION 17.2.7. — Les variétés  $\Gamma_0(2)$ -équivalentes à  $S^3$  ne contiennent pas de surface non orientable. Par exemple, la variété  $S^2 \times S^1$  n'est pas  $\Gamma_0(2)$ -équivalente à  $S^3$ .

Démonstration : soit  $V$  une variété contenant une surface fermée non orientable  $S$ ; soient  $k$  un nœud de  $V$  et  $V'$  le résultat d'une  $\Gamma_0(2)$ -chirurgie le long du nœud

$k$ . Rendons  $k$  transverse à  $S$  et éliminons deux par deux les intersections de  $k$  et de  $S$ . Si on arrive à  $k \cap S = \emptyset$ , la surface  $S$  est dans  $V'$ . Sinon, on a un point d'intersection entre  $k$  et  $S$ , et le lemme 17.2.6 permet d'obtenir une surface  $S'$  dans  $V'$  qui est réunion de  $S$  époincée et d'une bande de Moëbius.  $\square$

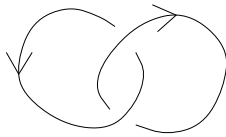
REMARQUE : cela résulte aussi de la proposition 17.2.4. En effet, un élément de  $\mathcal{V}$  contient une surface non orientable si et seulement si  $H_1(V, \mathbb{Z}/2) \neq 0$ .  $\square$

Cette observation pour le groupe  $\Gamma_0(2)$  va être étendue au groupe  $\Gamma_0(4)$  afin d'étudier l'invariant  $\tau_3$ .

### 17.3. Présentation par chirurgie de Dehn d'une variété

Ce rappel est nécessaire pour la présentation des invariants quantiques, en particulier  $\tau_3$ . Le théorème de Lickorich dit que toute variété de dimension 3 compacte est le résultat d'une chirurgie le long d'un entrelacs avec des composantes qui sont parallélisées (with a framing). On peut même se limiter à un entrelacs qui a des composantes non nouées et des coefficients qui valent -1, 0 ou 1.

Rappelons la construction : soit  $\mathcal{L}$  un entrelacs de  $S^3$  où chaque composante est munie d'un coefficient rationnel. Soit  $(K, p/q)$  une composante de  $\mathcal{L}$ . Le rationnel  $p/q$  représente une classe d'isotopie d'une courbe  $\gamma$  non orientée sur  $\partial U(K)$  telle que  $p = \text{lk}(\gamma, K)$  et  $[\gamma] = q[K]$  dans  $H_1(\partial U(K))$ . On fait une obturation de Dehn pour la pente  $p/q$ .



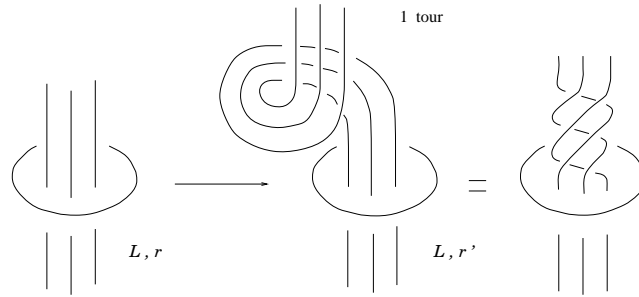
Le nombre d'enlacement est +1.

Quand les coefficients sont entiers, on dit que la chirurgie est entière. On peut toujours s'y ramener.

La présentation par chirurgie d'une variété n'est pas unique et nous allons mettre en relation les différentes présentations à l'aide des trois transformations suivantes :

(i) On change l'entrelacs  $\mathcal{L}$  en un entrelacs  $\mathcal{L}'$  isotope et on garde les mêmes coefficients.

(ii) Changer l'entrelacs  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{L}'$  par un twist :



Soit  $L$  une composante non nouée de coefficient  $r$  sur laquelle s'effectue le twist. Soit  $L_i$  une composante de l'entrelacs munie du coefficient  $r_i$ . Les nouveaux coefficients sont :

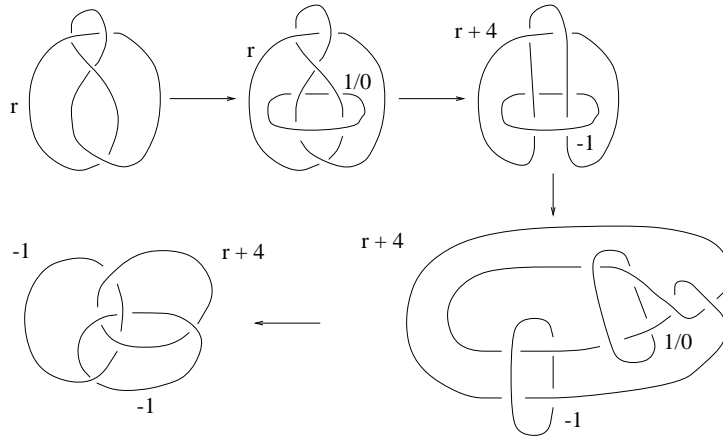
$$\begin{cases} r' = \frac{1}{\frac{1}{r} + \tau} \\ r'_i = r_i + \tau lk(L_i, L)^2, L_i \neq L \end{cases}$$

(iii) Ajouter ou enlever une composante avec le coefficient  $1/0$ .

THÉORÈME ([Rol2]) 17.3.1. — Deux entrelacs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  munis de coloriage rationnels donnent la même variété si et seulement si ils sont reliés par les transformations (i), (ii) et (iii).

Ce résultat s'appuie sur le théorème de Kirby.

Exemple : une chirurgie de Dehn sur le noeud de huit.

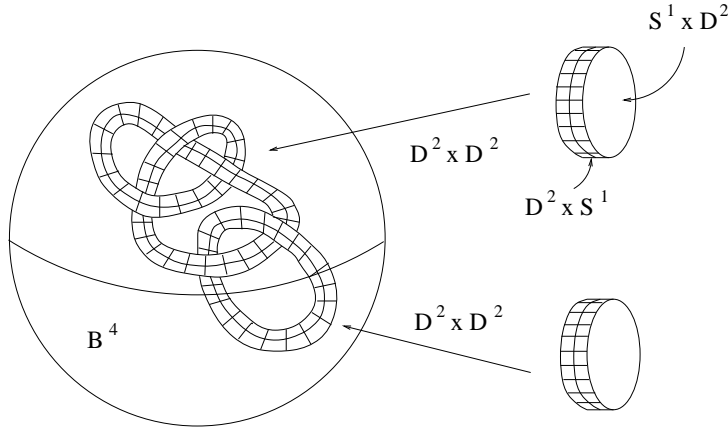


#### 17.4. Les formes de relèvement de l'enlacement

On parle de chirurgie entière lorsque l'entrelacs  $\mathcal{L} = L_1 \cup \dots \cup L_n$  de  $S^3$  est parallélisé, c'est-à-dire que les voisinages tubulaires  $U(L_i)$  sont munis

d'isomorphisme avec  $D^2 \times S^1$  ou que l'on s'est donné des nombres entiers  $r_i$  mesurant la parallélisation choisie pour  $U(L_i)$  par rapport à celle qui est non enlacée avec  $L_i$  dans  $S^3$ .

Quand la variété  $V$  de dimension 3 est réalisée comme le résultat d'une chirurgie entière sur l'entrelacs  $\mathcal{L}$ , on peut la voir naturellement comme le bord d'une variété  $W$  de dimension 4 : cette variété est la réunion de  $B^4$  avec des anses  $D^2 \times D^2$ , une pour chaque  $i$  entre 1 et  $n$ , attachées en identifiant  $U(L_i) \subset S^3$  à  $D^2 \times S^1$  [K-M]. Alors chaque  $L_i$  permet de choisir une surface  $S_i$  dans  $W$  : la surface  $S_i$  est réunion de  $\{0\} \times D^2$  et d'une surface de Seifert de  $L_i$  dans  $S^3$ . Ces  $n$  surfaces forment une base du groupe abélien libre  $H = H_2(W, \mathbb{Z})$ .



Le nombre algébrique d'intersection définit une application bilinéaire symétrique  $A : H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ .

REMARQUE : même si  $H_2(W, V, \mathbb{Z})$  est libre de rang  $n$ , il ne faut pas confondre  $A$  avec la forme non dégénérée déduite du cup-produit  $H_2(W) \times H_2(W, V) \rightarrow \mathbb{Z}$ . En général, la forme  $A$  est dégénérée, son noyau s'identifie à  $H_2(V, \mathbb{Z})$ , et même si  $H_2(V, \mathbb{Z}) = 0$  (le cas d'une  $\mathbb{Q}$ -sphère), la forme  $A$  n'est inversible que si  $H_1(V, \mathbb{Z}) = 0$ .

Par dualité de Poincaré, le groupe  $H_2(W, V, \mathbb{Z})$  s'identifie à  $H^2(W, \mathbb{Z})$  qui est canoniquement isomorphe à  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$  d'après le théorème des coefficients universels.

Notons  $s_A$  l'application de  $H$  dans  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$  associée à  $A$  ; on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_2(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(W, \mathbb{Z}) \xrightarrow{s_A} H_2(W, V, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_1(M) \longrightarrow H_1(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

qui s'identifie à un morceau de la suite longue du couple  $(W, V)$ .

REMARQUE : soient  $s : H \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \text{Hom}(H, \mathbb{Q})$  l'extension de  $s_A$ ,  $E$  l'intersection de  $\text{Im}(s)$  avec  $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})$  ; le sous groupe fini  $T = \text{Tors}(H_1(V, \mathbb{Z}))$  de  $H_1(V, \mathbb{Z})$



s'identifie à  $E/\text{Im}(s_A)$ , la forme d'enlacement  $l : T \times T \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  sur les éléments d'ordre fini de  $H_1(V, \mathbb{Z})$  est définie par :

$$l(x + \text{Im}(s_A), y + \text{Im}(s_A)) = \langle x, s^{-1}(y) \rangle,$$

où  $x, y \in E$ ,  $s^{-1}(y) \in H \otimes \mathbb{Q}$  (cf [Tur2]). L'application  $l$  est bien définie, bilinéaire, symétrique non dégénérée (donc unimodulaire, c'est-à-dire inversible, par le théorème de structure des groupes abéliens finis).

En considérant l'extension de  $A$  aux coefficients réels, on définit sa signature  $\sigma = n_+ - n_-$  et son rang  $\rho$  qui est le co-rang de  $H_2(V, \mathbb{Z})$  dans  $H$ .

### 17.5. L'invariant $\tau_3$

A présent considérons  $F = H_2(W, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; c'est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur le corps à 2 éléments. La réduction modulo 2 de  $A$  définit une forme bilinéaire symétrique  $a : F \times F \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . La réduction mod 4 de l'application quadratique  $x \mapsto A(x, x)$  définit une forme quadratique  $q : F \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  associée à  $a$  (cf [Br]).

Plus précisément, on plonge  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  en envoyant 1 sur  $1/2$  et de même  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  en envoyant 1 sur  $1/4$ ; ainsi l'homomorphisme injectif de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  s'écrit  $j(x) = 2x$ . Dire que  $q$  est une forme quadratique associée à  $a$  signifie que  $q$  est bien définie de  $F$  dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  (c'est-à-dire que pour tout  $u, v$  de  $H$ ,  $A(u + 2v, u + 2v) \equiv A(u, u) \pmod{4}$ ) et que l'on a :

$$\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

$$\forall x, y \in F, q(x + y) = q(x) + q(y) + 2a(x, y) \text{ dans } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pour toute fonction  $\varphi$  de  $F$  dans  $(\frac{1}{4}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , on peut définir l'invariant de Brown-Monksy comme étant le nombre complexe :

$$\beta(\varphi) = \sum_{x \in F} e^{2\pi i \varphi(x)}$$

On a  $\beta(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \beta(\varphi_1)\beta(\varphi_2)$  et  $\beta(-\varphi) = \overline{\beta(\varphi)}$ . De plus,  $\beta(0) = 2^n$  et si l'application  $\varphi$  est linéaire et non nulle, on a  $\beta(\varphi) = 0$ .

REMARQUE : comme  $x \mapsto a(x, x)$  est une forme linéaire sur  $F$  nulle sur  $\ker(a) = \ker(s_a)$ , il existe dans  $F$  un vecteur  $\bar{w}$  (comme Wu) tel que pour tout  $x \in F$ ,  $a(x, x) = a(x, \bar{w})$ . Si la forme  $a$  est non dégénérée, c'est-à-dire si  $A$  est non dégénérée et que le discriminant  $\text{disc}(A)$  est impair, le vecteur  $\bar{w}$  est unique. Dans tous les cas, si le vecteur  $w$  relève  $\bar{w}$  de  $F$  à  $H$ ,  $A(w, w)$  modulo 8 n'est fonction que de  $\bar{w}$ . En effet, si dans  $H$   $w' - w = 2u$ , alors  $A(w, w') = A(w, w) + 4A(u, u) + 4A(w, u)$ ; d'autre part,  $A(u, u) - A(w, u)$  est un

nombre pair, donc  $A(u, u) + A(w, u)$  aussi. D'après Brown [Br, p381-382], on voit que pour toute forme quadratique  $\varphi : F \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  associée à  $a$  :

$$\beta^2(\varphi) = 2^n \sum_{\bar{w}} e^{2\pi i \varphi(\bar{w})}$$

La somme porte sur les vecteurs  $\bar{w}$  de  $F$  tels que pour tout  $x$  de  $F$ , on ait  $a(x, x) = a(x, \bar{w})$ . Notons que pour tout  $x$  de  $F$ ,  $2\varphi(x) = a(x, x)$ .

Si  $a$  est non dégénérée,  $s_a$  est bijective,  $s_A$  est injective; le nombre  $\beta(\varphi)2^{-n/2} = \varepsilon(\varphi)$  est une racine huitième de l'unité. Lorsque  $A$  est unimodulaire, c'est-à-dire que  $s_A$  bijective, alors  $\varepsilon(\varphi) = e^{\frac{-i\pi}{4}\sigma}$  (Brown).

REMARQUE : Van der Blij avait démontré dans ce dernier cas, que pour un vecteur  $w$  qui relève  $\bar{w}$ , on a  $A(w, w) \equiv \sigma \pmod{8}$  [VdB].

Selon Kirby et Melvin [K-M], la formule suivante :

$$\tau_3(V) = 2^{-n/2} \beta(q) e^{-\frac{\pi i \sigma}{4}}$$

définit un invariant topologique de  $V^3$  (et même un invariant homotopique). Kirby et Melvin [K-M] ont également montré le résultat suivant :

THÉORÈME 17.5.1. — *i)  $\tau_3(V) = 0$  si et seulement si  $V$  contient une surface plongée fermée de caractéristique d'Euler impaire.*

*ii) Si  $\tau_3(V) \neq 0$ , le module  $|\tau_3(V)|$  vaut  $2^{t_2^*(V)/2}$  où  $t_2^*(V)$  est le cardinal de  $H^1(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H_2(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \ker(a)$*

*iii) Si  $\tau_3(V) \neq 0$ ,  $\tau_3/|\tau_3| = \varepsilon_3(V)$  est une racine huitième de 1.*

Il est expliqué dans [K-M] comment calculer  $\varepsilon_3$  : pour cela on modifie la donnée de chirurgie  $(\mathcal{L}, r)$  de façon à rendre  $a : F \times F \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  diagonale dans la base  $S_1, \dots, S_n$  et on compte le nombre de vecteurs de base où  $q : F \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  prend les valeurs 0, 1/4, 1/2, -1/4. Ces nombres sont  $n_0, n_1, n_2$ , et  $n_3$ .

THÉORÈME 17.5.2[K-M]. — *Quels que soient les choix ci-dessus,*

*i)  $\tau_3(V) = 0 \Leftrightarrow n_2 \neq 0$ ,*

*ii)  $\varepsilon_3(V) = e^{\frac{\pi i}{4}(n_1 - n_3 - \sigma)}$ .*

REMARQUES : 1) ajouter à  $\mathcal{L}$  des composantes non nouées, non enlacées avec les autres, de coefficient  $\pm 1$  permet de rendre  $a$  diagonalisable; ensuite on fait des sommes connexes de bandes afin de la diagonaliser.

Pour la classification des formes bilinéaires symétriques sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , voir [M-H]. Stablement, dans l'anneau de Witt, le seul invariant est le rang modulo 2. De façon générale,  $a$  est équivalente, à une somme directe de  $\langle 0 \rangle$ , de  $\langle 1 \rangle$  et de métabolique

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (a priori, on trouve deux sortes de métaboliques :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ), mais  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est équivalent sur  $\mathbb{Z}$  à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Pour voir qu'en ajoutant des éléments  $\langle 1 \rangle$  et  $\langle -1 \rangle$  à  $A$ , on rend  $A$  diagonalisable, il suffit de remarquer l'équivalence de  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle -1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle$ .

2) Nous dirons qu'un élément  $w$  est caractéristique s'il se projette dans  $F = H_2(W, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  sur un vecteur  $\bar{w}$  de  $W$ , c'est-à-dire si pour tout  $x$  de  $F$ , on a  $a(x, x) = a(\bar{w}, x)$ . Lorsque  $a$  est diagonalisée, l'élément  $w = \sum_i \lambda_i S_i$  est caractéristique si et seulement si  $q(S_i) = \pm 1/4$  entraîne  $\lambda_i$  impair. Alors si  $n_2 = 0$ ,  $A(w, w) = \sum_i \lambda_i^2 A(S_i, S_i) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j A(S_i, S_j)$  est congru modulo 4 à  $n_1 - n_3$ . En effet, si  $i \neq j$ ,  $A(S_i, S_j)$  est pair, et pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ , si  $q(S_i) = \pm 1/4$ , on a  $\lambda_i^2 \equiv 1 \pmod{8}$  et enfin si  $q(S_i) = 0$ ,  $\lambda_i^2 A(S_i, S_i)$  est divisible par 4.

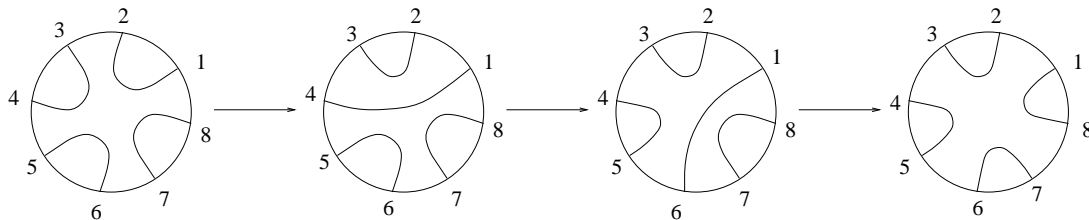
Le nombre  $A(w, w)$  modulo 8 est l'invariant  $\mu$  de la structure spin de  $V$  associée à  $W$  [K-M, Tur2].

On n'a pas toujours  $A(w, w) \equiv n_1 - n_3 \pmod{8}$ , même si  $a$  est non dégénérée. Ainsi dans [K-M], on démontre que si  $V$  est une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -sphère d'homologie, alors  $n_1 - n_3 \equiv A(w, w) \pmod{8}$  équivaut à  $t(V) \equiv \pm 1 \pmod{8}$  où  $t(V)$  est l'ordre de  $H_1(V, \mathbb{Z})$ .

### 17.6. La condition $n_2 \neq 0$

LEMME 17.6.1. — *Dans le tore plein  $D^2 \times S^1$  de bord  $\Sigma$ , la courbe de pente  $a/c$  avec  $(a, c) = 1$  et  $c \equiv 0 \pmod{4}$  borde une surface non orientable avec une caractéristique d'Euler-Poincaré impaire.*

Démonstration : la figure ci-dessous, nous montre les coupes pour le paramètre de  $S^1$  constant, d'une surface possédant un champ de directions transverses au bord avec  $c/2 - 1$  points selles.  $\square$



PROPOSITION 17.6.2. — *La condition  $\tau_3(V) = 0$  est invariante par  $\Gamma_0(4)$ -chirurgie.*

Démonstration : si dans une variété  $V$ , il y a une surface  $S$  fermée de caractéristique impaire (c'est-à-dire que la surface  $S$  se réalise comme la connexe d'une surface orientable avec un nombre impair de bandes de Möbius), alors après chirurgie de Dehn de pente  $a/c$ , il y en a une aussi. En effet, on rend  $k$  transverse à  $S$  et on élimine les points d'intersection en attachant des anses  $[0, 1] \times S^1$ . A la fin, il reste 0 ou 1 point d'intersection. Si c'est 0, le résultat est évident et si c'est 1, on remplace le disque de  $S$  par la surface du lemme précédent.  $\square$

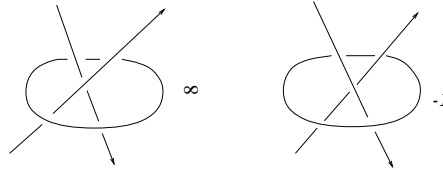
17.7. La phase de  $\tau_3$

Soit  $\mathcal{L} = L_1 \cup L_2 \dots \cup L_n$  un entrelacs parallélisé de  $S^3$  présentant  $V$ , comme en 17.3 et 17.4. On note  $r_1, \dots, r_n$  les entiers (ou  $\infty$ ) attachés aux composantes et on suppose que la forme  $q$  dans la base  $S_1, \dots, S_n$  associée est diagonalisée, avec  $n_2 = 0$ .

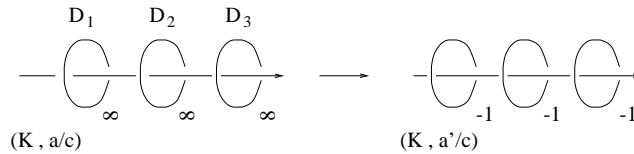
Soit  $K$  un nœud dans  $S^3$  disjoint de  $\mathcal{L}$  sur lequel on veut effectuer une chirurgie de pente  $a/c$ , avec  $c$  multiple de 4 et  $(a, c) = 1$ .

Nous allons suivre la méthode de Rolfsen [Rol2, p 382-383] qui permet de transformer  $(K, r)$  en une bonne donnée de chirurgie entière qui nous permettra de conclure.

1) Tout d'abord, on dénoue le nœud  $K$ . Pour cela, on entoure les croisements trivialisants d'un cercle  $(C_k, \infty)$  et on effectue un twist de coefficient  $\pm 1$ . Le coefficient du nœud ne change pas et ceux des cercles  $C_k$  ont le coefficient  $\pm 1$ . Nous appelons encore le nouveau nœud  $K$ .



2) On entoure le nœud  $K$  de  $m$  petits cercles  $(D_l, \infty)$ , pour avoir  $a/c - m = a'/c$  où l'entier  $m$  est tel que  $a' < c/2$ . En faisant un twist de coefficient  $\pm 1$  sur chaque cercle, on obtient le coefficient  $a'/c$  sur le nœud  $K$  avec  $0 < a' < c/2$ .



3) Le nœud  $K$  est une composante non nouée. A l'aide de quatre tours le long de  $K$  (mouvement ii)), on diminue la valeur absolue du dénominateur  $c$  de  $a'/c$ .

En effet le coefficient  $r'$  est changé en  $r'' = \frac{1}{c/a' - 4\varepsilon} = \frac{a'}{c - 4\varepsilon a'}$ , où  $\varepsilon$  est le signe de  $a'$ .

Si  $0 < a' < c'/4$ , on a  $0 < c' - 4a' < c'$ .

Si  $0 < c'/4 < a' < c'/2$ , on a  $|c' - 4a'| = 4a' - c' < c'$ .

Si  $-c'/4 < a' < 0$ , on a  $0 < c'4a' < c'$ .

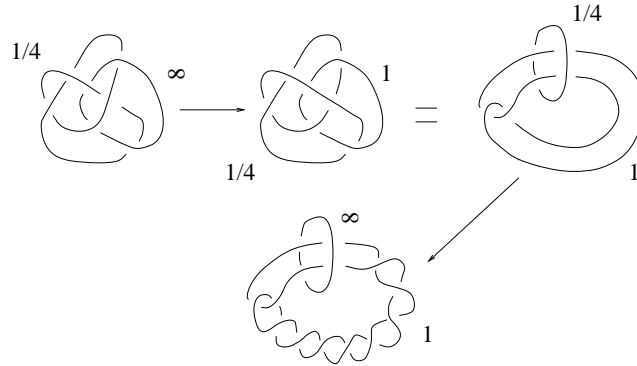
Si  $-c'/2 < a' < -c'/4 < 0$ , on a  $|c' + 4a'| = -c' - 4a' < c'$ .

En itérant 2) et 3), on arrive au coefficient  $\infty$  pour le nœud  $K$  et ce nœud disparaît.

On a ainsi remplacé  $K$  par deux systèmes de courbes parallélisées  $(C'_k, s_k)$ ,  $(D'_k, t_k)$  que les torsions suivant  $K$  ont enlacées entre elles et avec les composantes  $L'_i$  venant des  $L_i$ . Comme le nombre de twists effectués est un multiple de 4, tous les enlacements ajoutés valent 0 mod 2.

Sur la diagonale, c'est-à-dire pour les entiers  $r_i, s_k$  et  $t_l$ , on a une congruence des anciens coefficients avec les nouveaux, car à chaque étape 3, le nouveau coefficient d'une courbe diffère de l'ancien par  $4\varepsilon \text{lk}^2(\text{courbe}, K)$ . Donc la phase de  $\tau_3$  ne change pas.

THÉORÈME 17.7.1. — *Si les variétés  $V$  et  $V'$  sont  $\Gamma_0(4)$ -équivalentes, alors  $\tau_3(V) = \tau_3(V')$ .*



### 17.8. Les autres invariants quantiques

Les invariants  $\tau_r$  de Reshetikhin et Turaev s'annulent pour certains espaces lenticulaires et cela donne un guide pour proposer un groupe  $G$  qui les laisse invariants par  $G$ -chirurgie.

Conjecture : les invariants quantiques ont un niveau, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $N$  tel que l'invariant ne change pas par  $\Gamma_0(N)$ -chirurgie.

## 18. L'invariant de Walker

### 18.1. Introduction

En 1985, Casson a construit un invariant topologique des sphères d'homologie entière [Mar]. Cet invariant compte d'une certaine façon les classes de conjugaison des représentations du groupe fondamental dans  $SU(2)$ . En 1988, cet invariant a été étendu aux sphères d'homologie rationnelle par Walker [Wal]. On peut consulter [Les2] pour une étude complète et [Les1] pour un algorithme de calcul à partir d'une présentation par chirurgie. Nous allons d'abord rappeler la définition de l'invariant de Walker, puis nous en déduisons quelques propriétés qui peuvent contraindre les chirurgies de Dehn.

### 18.2. Définition, rappels

La surface  $\Sigma$  est identifiée à  $S^1 \times S^1$ . Les notations sont les mêmes que précédemment. Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$  avec  $b_1(M) = 1$ , donc un cercle d'homologie rationnel.

On appelle élément primitif de  $H_1(\Sigma)$ , un élément représenté par une courbe fermée simple de  $\Sigma$ .

Le polynôme d'Alexander normalisé de  $M$  est noté  $\Delta(M)$ , la somme de Dedekind est notée  $s(q, p)$  où  $p \in \mathbb{Z}^*$  et  $q \in \mathbb{Z}$  et elle est définie par  $s(q, p) = \sum_{i=1}^{|p|} ((i/p))((qi/p))$

$$\text{où } ((x)) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ x - E(x) - 1/2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$E$  désignant la partie entière de  $x$ . Enfin  $\varepsilon$  désigne la fonction signe avec  $\varepsilon(0) = 0$ .

On note  $M_\gamma$  la variété obtenue après chirurgie de Dehn suivant la courbe  $\gamma$ .

Soit  $\nu$  une longitude entière, c'est à dire un générateur du noyau de  $i_* : H_1(\Sigma) \hookrightarrow H_1(M)$ . Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux courbes telles que  $\langle \gamma, \nu \rangle \langle \gamma', \nu \rangle$  soit non nul, et enfin  $x$  et  $y$  deux éléments de  $H_1(\Sigma)$  tels que  $\langle x, y \rangle = 1$  et  $\nu = \delta y$  ( $\delta \in \mathbb{Z}$ ). On pose

$$\tau(\gamma, \gamma', \nu) = -\varepsilon(\langle y, \gamma \rangle) s(\langle x, \gamma \rangle, \langle y, \gamma \rangle) + \varepsilon(\langle y, \gamma' \rangle) s(\langle x, \gamma' \rangle, \langle y, \gamma' \rangle) + \frac{(\delta^2 - 1) \langle \gamma, \gamma' \rangle}{12 \langle \gamma, \nu \rangle \langle \gamma', \nu \rangle}.$$

Dans ces conditions on a :

**THÉORÈME 18.2.1.** — *Il existe une unique fonction  $\lambda$  de l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $\mathbb{Q}$ -sphères orientées dans  $\mathbb{Q}$  telle que :*

- $\lambda(S^3) = 0$
- $\lambda(M_{\gamma'}) = \lambda(M_\gamma) + \tau(\gamma, \gamma', \nu) + \frac{\langle \gamma, \gamma' \rangle}{\langle \gamma, \nu \rangle \langle \gamma', \nu \rangle} \Delta''(M)(1)$

- $\lambda(V_1 \# V_2) = \lambda(V_1) + \lambda(V_2)$  où  $V_1$  et  $V_2$  sont des  $\mathbb{Q}$ -sphères.

REMARQUES :

1) La propriété d'additivité pour la somme connexe est une conséquence de la formule de chirurgie.

2) Le polynôme d'Alexander d'un tore solide est 1. Comme l'espace lenticulaire  $L(p, q) = H_{1/0} \cup_{\Sigma} -H_{q/p}$ , on a  $\lambda(L(p, q)) = -s(q, p)$ .

### 18.3. Applications

D'après le lemme homologique (13.2), si la variété  $P$  est une sphère d'homologie rationnelle, les obturations qui reproduisent  $P$  ou  $-P$  (c'est-à-dire s'il existe un nœud  $k$  de  $P$  telle que l'obturation fasse apparaître  $P$  ou  $-P$  en facteur) sont aussi des  $\mathbb{Q}$ -sphères.

Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{P}(\Sigma)$ . Ici  $\mu$  désigne le méridien et  $\lambda$  le parallèle ( $\langle \mu, \lambda \rangle = 1$ ). La pente bordante est notée  $\nu$ ; on pose  $\nu = x\mu + y\lambda$  avec  $y > 0$ . La pente de chirurgie est notée  $\alpha$ ; on pose  $\alpha = a\mu + b\lambda$ .

Pour appliquer la formule de chirurgie de Walker, on choisit la base  $\{X, Y\}$  :

$X = -v\mu - u\lambda$  avec  $ux - vy = 1$  et  $Y = \nu$ , ainsi  $\langle X, Y \rangle = 1$ .

Les choix faits donnent  $\langle X, \mu \rangle = u$ ,  $\langle Y, \mu \rangle = -y$ ,  $\langle X, \alpha \rangle = au - cv$ ,  $\langle Y, \alpha \rangle = cx - ay$ .

On obtient  $\tau(\mu, \alpha; \nu) = \varepsilon(cx - ay)s(au - cv, cx - ay) - \varepsilon(-y)s(u, -y) \left( \frac{|cx - ay|}{y} \right)$  est l'ordre de  $H_1(V'', \mathbb{Z})$ .

Le rationnel  $\tau(\mu, \alpha; \nu) = \tau = s(u, y) + \varepsilon(cx - ay)s(au - cv, |cx - ay|)$  se calcule par la formule du cocycle de Rademacher pour  $\Phi$  :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ alors } \Phi(A) = \begin{cases} b/d \text{ si } c = 0 \\ \frac{a+d}{c} - 12\varepsilon(c)s(d, |c|) \text{ sinon.} \end{cases}$$

On pose  $c_A = c$ .

On a alors :

$$\Phi(BA) - \Phi(B) - \Phi(A) = -3\varepsilon(c_B A c_A c_B), \text{ [R-G, p 51].}$$

Ici  $A = \begin{pmatrix} x & v \\ y & u \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$  (on choisit  $(b, d)$  pour que  $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ , donc  $ad + bc = 1$ ).

Ainsi compte tenu des notations choisies, on a

$$\Phi(A) = \frac{x+u}{y} - 12s(u, y),$$

$$\Phi(B) = \frac{-a-d}{c} + 12s(a, c),$$

$$\Phi(BA) = \frac{au - cv + xd + by}{ay - cu} + 12\varepsilon(cx - ay)s(au - cv, |cx - ay|).$$

$$\text{Donc } 12\tau = \Phi(BA) - \Phi(A) - \frac{au - cv + xd + by}{ay - cx} + \frac{x+u}{y}$$

$$= \frac{-a-d}{c} + 12s(a, c) - \frac{au - cv + xd + by}{ay - cx} + \frac{x+u}{y} + 3\varepsilon(ay - cx).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } & \frac{a+d}{c} + \frac{au - cv + xd + by}{ay - cx} - \frac{x+u}{y} \\ &= \frac{ay(ay - cx) + dy(ay - cx) + cy(au - cv + xd + by) - c(x+u)(ay - cx)}{cy(ay - cx)} \\ &= \frac{1}{cy(ay - cx)} \left[ y^2(a^2 + ad + bc) + c^2x^2 - c^2yv + c^2ux \right] \\ &= \frac{1}{cy(ay - cx)} \left[ (ay - cx)^2 + y^2 + c^2 \right]. \end{aligned}$$

Posons  $\varepsilon = \varepsilon(ay - cx)$ ,  $|ay - cx| = zy$ ,  $z > 0$  et  $c = xy$  (lemme 13.2). Nous obtenons alors :

$$12\tau = -\varepsilon \left( \frac{x^2 + 1 + z^2}{yzx} \right) + 12s(a, c) + 3\varepsilon.$$

On en déduit donc d'après la formule de chirurgie :

PROPOSITION 18.3.1. — *Le rationnel  $\lambda(M(\alpha))$  est donné par :*

$$\lambda(M(\alpha)) - \lambda(M(\mu)) = \tau + \frac{\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \nu \rangle \langle \mu, \nu \rangle} \left[ \Delta''(1) + \frac{\delta^2 - 1}{12} \right].$$

REMARQUE : ces calculs sont plutôt décevants pour le problème du nœud absorbant.





## Appendice 2 : homologie d'un recollement

### 19. L'homologie d'un recollement d'indice 1

Nous allons calculer l'homologie singulière d'une variété de dimension 3 obtenue par un recollement.

Soit  $\Sigma$  une surface fermée connexe orientable de genre  $g$ . Sa forme d'intersection est notée  $\langle \ , \ \rangle$ . Soient  $M$  et  $M'$  deux éléments de  $\mathcal{V}(\Sigma)$ .

On suppose que le noyau de l'application induite par le plongement de  $\Sigma$  dans  $M$  (resp.  $M'$ ) est engendré par des courbes fermées simples connexes. C'est par exemple le cas d'un recollement qui est un scindement de Heegaard.

On pose  $b_1(M) = \dim H_1(M, \mathbb{Q})$ . D'après le théorème de Thom [Spa], on a :

$H_1(M, \mathbb{Z}) = \text{Tors}(M) \oplus \mathbb{Z}^{b_1(M)-g} \oplus \mathbb{Z}^g$  et de même pour la variété  $M'$ . La notation  $\mathbb{Z}^g$  désigne l'homologie de  $M$  et de  $M'$  engendrée par le bord et  $\text{Tors}$  la partie finie du groupe d'homologie.

On choisit une base  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$  de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  telle que  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  soient les classes d'homologie des courbes génératrices du noyau de l'application induite  $i_* : \Sigma_g \rightarrow M$  et  $\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$  (symbole de Kronecker). Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  les classes d'homologie des courbes qui engendrent le noyau de  $i'_* : \Sigma_g \rightarrow M'$ .

On pose  $\gamma_i = \sum_{j=1}^g c_{ij}\alpha_j + d_{ij}\beta_j$  et on a  $\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle = -d_{ii}$ . Soit  $d_1, \dots, d_g$  ( $d_i$  divise  $d_{i+1}$ ) les facteurs invariants de la matrice  $(d_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$  ([Bour, Alg, chap 7]). Il y a un choix des éléments  $\beta_i$  rendant la matrice  $(d_{ij})$  diagonale positive et les entiers  $d_i$  sont les coefficients de cette diagonale.

**PROPOSITION 19.1.** — *Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés de bord  $\Sigma$ . On suppose que le noyau de l'application induite par le plongement de  $\Sigma$  dans  $M$  et  $M'$  est engendré par des courbes fermées simples connexes. Alors on a*

$$H_1(M \cup_{\Sigma} -M', \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \oplus \text{Tors}(M) \oplus \text{Tors}(M') \oplus \mathbb{Z}^{b_1(M)+b_1(M')-2g}.$$

*Démonstration :* Tout d'abord les parties  $\text{Tors}(M) \oplus \mathbb{Z}^{b_1(M)-g}$  et  $\text{Tors}(M') \oplus \mathbb{Z}^{b_1(M')-g}$  sont indépendantes du bord. Pour identifier, le sous-groupe engendré par  $\Sigma$ , on utilise la suite de Mayer-Vietoris :

$$\dots \longrightarrow H_1(M) \oplus H_1(M') \xrightarrow{\psi_*} H_1(M \cup_{\Sigma} -M') \xrightarrow{\Delta} H_0(\Sigma) \longrightarrow \dots$$

où  $\psi_* = p_* - p'_*$  avec  $p : M \rightarrow M \cup_{\Sigma} -M'$  et  $p' : M' \rightarrow M \cup_{\Sigma} -M'$ . Comme la surface  $\Sigma$  est séparante et connexe, l'application  $\Delta$  est nulle. Par exactitude, l'application  $\psi_*$  est surjective et donc  $H_1(M \cup_{\Sigma} -M') = (H_1(M) \oplus H_1(M')) / \ker \psi_*$ .

On a  $H_1(M) = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}\beta_i \oplus \mathbb{Z}^{b_1(M)-g} \oplus \text{Tors}(M)$  et  $H_1(M') = \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}\delta_i \oplus \mathbb{Z}^{b_1(M')-g} \oplus \text{Tors}(M')$  où les entiers  $\delta_i$  vérifient pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\langle \gamma_i, \delta_j \rangle = \delta_{ij}$ .

Posons  $\delta_i = \sum_{j=1}^g a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^n b_{ij}\beta_j$ . D'après la suite de Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow H_1(\Sigma) \xrightarrow{i_* \oplus i'_*} H_1(M) \oplus H_1(M') \xrightarrow{\psi_*} \cdots$$

le noyau  $\ker(\psi_*)$  est engendré par les classes  $(\beta_i, i'_*(\alpha_i))$  et les classes  $(0, i'_*(\alpha_i))$ . Le quotient de  $\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}\beta_i \oplus \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}\delta_i$  par  $\ker(\psi_*)$  s'identifie au quotient  $\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}\beta_i$  par le réseau engendré par les classes  $i'_*(\alpha_i)$ .

Pour déterminer ce réseau, on exprime les classes  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  en fonction des classes  $\gamma$  et  $\delta$  : soit  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  un élément de  $Sp(2g, \mathbb{Z})$ ,

$$\text{alors comme } \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^tD & -{}^tC \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix} \text{ donc pour tout } i, \alpha_i = \sum_{j=1}^g d_j^i \delta_j - b_j^i \gamma_j.$$

D'où le résultat.  $\square$

En particulier, lorsque la surface  $\Sigma$  est de genre 1,

**COROLLAIRE 19.2.** — *On suppose que la courbe bordante de  $M$  est connexe. En posant  $d = \langle cb(M), cb(M') \rangle$ , on obtient  $H_1(M \cup_{\Sigma} -M', \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \text{Tors}(M) \oplus \text{Tors}(M') \oplus \mathbb{Z}^{b_1(M)+b_1(M')-2}$ .*

Le résultat complet en genre 1 avec un indice quelconque se trouve en section 11.

## BIBLIOGRAPHIE

- [**BMS**] BAUMSLAG G., MORGAN J. and SHALEN P. — *Generalized triangle groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. soc., t. **102**, 1987, p. 25–31.
- [**Ber**] BERGE J. — *The knots in  $D^2 \times S^1$  with non Dehn surgeries yielding  $D^2 \times S^1$* , Topology and its application, t. **38**, 1991, p. 1–19.
- [**BHMV**] BLANCHET C., HABEGGER N., MASBAUM G., VOGEL P. — *Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket*, Topology, t. **31**, 1992, p. 685–699.
- [**Boil**] BOILEAU M. — *communication personnelle*. — , 1997.
- [**Boi-O**] BOILEAU M., OTAL H. — *Scindements de Heegaard et groupe des homéotopies des petites variétés de Seifert*, Invent. Math, t. **106**, 1991, p. 85–107.
- [**Boi-Z**] BOILEAU M., ZIESCHANG H. — *Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds*, Invent. Math, t. **76**, 1984, p. 455–468.
- [**Bour**] BOURBAKI N. — *Algèbre chapitre 4 à 7*. — Masson, 1981.
- [**Boy-Z**] BOYER S. and ZHANG X. — *Exceptional surgery on knots*, J. of A.M.S, t. **31**, 1994, p. 193–203.
- [**Br**] BROWN E. — *Generalisation of the Kervaire invariant*, Ann. of Math., t. **25**, 1972, p. 368–383.
- [**B-Z**] BURDE and ZIESCHANG. — *Knots*. — de Gruyter, Studies in Mathematics, 1985.
- [**C-P**] CLIFFORD and PRESTON. — *The algebraic theory of semi-group, II*. — AMS Providence, 1967.
- [**CGLS**] CULLER, GORDON , LUECKE, SHALEN. — *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math., t. **2**, 1987, p. 237–300.
- [**Do-M**] DOMERGUE M. et MATHIEU Y. — *Nœuds qui ne sont pas déterminés par leur complément dans les 3-variétés à bord.*, Bull. Soc. Math. France, t. **119**, 1991, p. 327–341.
- [**Fl-O**] FLOYD and OERTEL. — *Incompressible surfaces via branched surfaces*, Topology, t. **23**, 1984, p. 117–125.

- [**Fun**] FUNAR Louis. — *2+1-D Topological Quantum Field Theory and 2-D Conformal Field Theory*, Comm. Math. Phys., t. **171**, 1995, p. 405–458.
- [**Gab1**] GABAÏ David. — *Foliations and the topology of 3-manifolds II*, J. Diff. Geom., t. **26**, 1987, p. 461–478.
- [**Gab2**] GABAÏ David. — *Foliations and the topology of 3-manifolds III*, J. Diff. Geom., t. **26**, 1987, p. 479–536.
- [**Gab3**] GABAÏ David. — *Surgery on knots in solid tori*, Topology, t. **28**, 1989, p. 1–6.
- [**Gor1**] GORDON C. — *Dehn surgery on knots*, Proceeding ICM Kyoto, 1990, p. 631–642.
- [**Gor2**] GORDON C. — *Dehn surgery and satellite knots*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **275**, 1983, p. 687–708.
- [**Go-L1**] MC GORDON C. and LUECKE J. — *Knots are determined by their complements*, Journal of AMS, t. **2**, 1989, p. 371–415.
- [**Go-L2**] MC GORDON C. and LUECKE J. — *Reductible manifolds and Dehn surgery*, Topology, t. **35**, 1996, p. 385–409.
- [**Go-L3**] MC GORDON C. and LUECKE J. — *Only integral Dehn surgeries can yield reducible manifolds.*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., t. **102**, 1987, p. 97–101.
- [**Gra**] GRAMAIN André. — *Rapport sur la théorie classique des nœuds (2ème partie)*, Séminaire Bourbaki, t. **732**, 1990.
- [**Gros1**] GROSS J. — *A unique decomposition theorem for 3-manifolds with connected boundary*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **142**, 1969, p. 191–199.
- [**Gros2**] GROSS J. — *The decomposition of 3-manifolds with several boundary components*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **147**, 1970, p. 561–572.
- [**Hak1**] HAKEN Wolfgang. — *Theorie der normalflächen*, Acta Math., t. **105**, 1961, p. 245–375.
- [**Hak2**] HAKEN Wolfgang. — *Some result on surfaces in 3-manifolds.*, Studies in modern topology, t. **5**, 1968, p. 39–98.
- [**Hat**] HATCHER A.. — *On the boundary curves of incompressible surfaces*, Pacific J. Math., t. **99**, 1982, p. 373–377.
- [**Heil**] HEIL, Wolfgang. — *Elementary surgery on Seifert fiber spaces*, Yokohama Math. J., t. **22**, 1974, p. 135–139.
- [**Hem**] HEMPEL John. — *3-manifolds*. — Princeton University Press, 1976.

- [**Jac**] JACO William. — *Lectures on three manifold topology*. — AMS, 1977.
- [**Joh1**] JOHANNSON Klaus. — *Équivalences d'homotopie des variétés de dimension 3*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. **281**, 1975, p. 1009–1010.
- [**Joh2**] JOHANNSON Klaus. — *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries*. — Springer-Verlag, 1979.
- [**J-S**] JACO W. and SHALEN P.. — *Seifert Fibered Spaces in 3-manifolds*. — Mem. Amer. Math. Soc., 1980.
- [**KRT**] KASSEL C., ROSSO M., TURAEV V. — *Quantum groups and knot invariants*. — SMF, 5, 1997.
- [**Kaw**] KAWAUCHI. — *A survey of knots theory*. — Birkhäuser, 1996.
- [**K-M**] KIRBY R. and MELVIN P. — *The 3-manifolds invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for  $sl(2, \mathbb{C})$* , Invent. Math, t. **105**, 1991, p. 473–545.
- [**Lau**] LAUDENBACH François. — *Topologie de la dimension trois : homotopie, isotopie*. — SMF, Astérisque 12, 1974.
- [**Les1**] LESCOP Christine. — *Un algorithme pour calculer l'invariant de Walker*, Bull. Soc. Math. France, t. **118**, 1990, p. 363–376.
- [**Les2**] LESCOP Christine. — *Global surgery formula for the Casson-Walker invariant*. — Princeton university press, 1996.
- [**Mar**] MARIN A. — *un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension 3 (d'après Casson)*, Séminaire Bourbaki, t. **693**, 1988.
- [**Mat**] MATHIEU Yves. — *Closed 3-manifolds unchanged by Dehn surgery*, J. of Knots theory and its ramifications, t. **1**, 1992, p. 279–296.
- [**Mil**] MILNOR John. — *A unique factorization theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math., t. **84**, 1961, p. 1–7.
- [**M-H**] MILNOR and HUSEMOLLER. — *Symetric bilinear form*. — Springer-Verlag, 1973.
- [**Miy**] MIYAKE Toshitsune. — *Modular Forms*. — Springer-Verlag, 1989.
- [**Mor**] MORIMOTO K. — *Genus one fibred knots in lens space*, J. Math. Soc. Japan, t. **41**, 1989, p. 81–96.
- [**Mos**] MOSER Louise. — *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math., t. **38**, 1971, p. 737–745.
- [**Orl**] ORLIK P. — *Seifert Manifolds*. — Berlin, Springer verlag, 1972.

- [**Pa1**] PAPAKYRIAKOPOULOS C. — *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math., t. **66**, 1957, p. 1–26.
- [**Pa2**] PAPAKYRIAKOPOULOS C. — *On solid tori*, Proc. London Math. Soc., t. **7**, 1957, p. 281–299.
- [**Ra-G**] RADEMACHER and GROSSWALD. — *Dedekind sums*. — The carus mathematical monographs, 1972.
- [**Rat**] RATCLIFE J. — *Hyperbolic manifolds*. — Springer-Verlag, 1989.
- [**R-T**] RESHETIKHIN N. and TURAEV V.G. — *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math, t. **103**, 1991, p. 547–597.
- [**Rol1**] ROLFSEN Dale. — *Knots and links*. — Publish or Perish, 1976.
- [**Rol2**] ROLFSEN Dale. — *Rational surgery calculus : extension of Kirby's theorem*, Pacific journal of mathematics, t. **110**, 1984, p. 377–386.
- [**Spa**] SPANIER E. — *Algebraic topology*. — Springer-Verlag, 1993.
- [**Sft**] SEIFERT H. — *Topologie dreidimensionalen gefaserner Raume*, Acta Math, t. **60**, 1933, p. 147–238.
- [**Tur1**] TURAEV V. — *Quantum invariants of 3-manifolds II*. — preprint, IRMA, 1993.
- [**Tur2**] TURAEV V. — *Cohomogy rings, linking forms and invariants of spin structures of three-dimensional manifolds*, Math. USSR Sbornik, t. **48**, 1984, p. 68–86.
- [**Th1**] THURSTON W. — *The geometry and topology of 3-manifolds*. — Princeton University (preprint), 1978.
- [**Th2**] THURSTON W. — *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **6**, 1982, p. 357–381.
- [**VdB**] VAN DER BLIJ F. — *An invariant of quadratic form mod 8*, Indag. Math., t. **21**, 1959, p. 291–293.
- [**Vog**] VOGEL P. — *Les invariants récents des variétés de dimension 3*, Séminaire Bourbaki, t. **799**, 1995.
- [**Wald1**] WALDHAUSEN F. — *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math., t. **87**, 1968, p. 272–280.
- [**Wald2**] WALDHAUSEN F. — *Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, Topology, t. **6**, 1967, p. 505–517.
- [**Wald3**] WALDHAUSEN F. — *Eine Klasse von 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten I*, Invent. Math., t. **3**, 1967, p. 308–333.

[**Wal**] WALKER K. — *An extension of Casson's invariant.* — Princeton university press, 1992.

[**Wit**] WITTEN E. — *Quantum field theory and the Jones polynomials*, Comm. Math. Phys, t. **121**, 1989, p. 351–399.