

## Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon garant, le professeur Vilmos Komornik de m'avoir accepté il y a environ trois ans dans l'équipe de recherche sur le contrôle et les EDP qu'il dirige ainsi que pour tous les précieux conseils qu'il m'a prodigués pendant ces années passées ensemble.

Je voudrais aussi exprimer toute ma reconnaissance aux professeurs Alain Haraux (Paris VI) et Enrique Zuazua (UCM, Madrid) pour les avis favorables qu'ils ont donnés après examen de mes travaux; leur reconnaissance me va droit au cœur. Je les remercie aussi d'avoir accepté de consacrer une partie de leur temps à la rédaction de rapports sur ces travaux et à la participation au jury.

Je remercie aussi de tout cœur les professeurs Bo Peng Rao (ULP, Strasbourg) et Marius Tucsnak (Nancy I) d'avoir accepté de dégager une partie de leur temps pour participer au Jury. J'en suis flatté et je leur exprime toute ma reconnaissance.

# Sommaire

- 1. Introduction et énoncés des principaux résultats**
  - Étude du cas où l'amortissement est linéaire
  - Étude du cas où l'amortissement est non linéaire
  - Lemmes fondamentaux
  
- 2. Démonstrations des théorèmes liés au cas d'amortissement linéaire**
  
- 3. Démonstrations des théorèmes liés au cas d'amortissement non linéaire**
  
- 4. Commentaires**
  
- 5. Liste des publications**
  
- 6. Références bibliographiques**

# 1. Introduction et énoncés des principaux résultats

L'étude de la décroissance de l'énergie de l'équation des ondes avec un amortissement localement distribué a fait l'objet de nombreux travaux dans le passé ainsi que ces dernières années. On remarque dans ces travaux deux courants d'idées:

- ceux qui ont trouvé une classe très large de feedbacks pouvant conduire à la décroissance de l'énergie; les travaux de Dafermos [6], Haraux [9], Slemrod [29], Bardos, Lebeau, Rauch [1], vont dans ce sens.

- le deuxième courant est constitué par ceux qui ont obtenu un taux de décroissance de l'énergie; c'est par exemple le cas de Zuazua [36,37], Nakao [24, 25], Tcheugoué [31, 32, 33].

Avant de poursuivre, introduisons quelques notations qui vont faciliter la compréhension de la suite du mémoire. On se donne un ouvert borné  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) de bord suffisamment régulier  $\Gamma = \partial\Omega$ . Plus précisément, on suppose que  $\Gamma$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^2$ . On désigne par  $\nu$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ . Pour  $x^0 \in \mathbf{R}^N$  fixé, on pose  $m(x) = x - x^0$ ,

$$R = \sup\{|m(x)|, x \in \Omega\}, \quad \Gamma_+ = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \quad \text{and} \quad \Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$$

( $u \cdot v = \sum_1^N u_i v_i$  pour tous  $u, v \in \mathbf{R}^N$ ). Soit  $a = a(x) \in L^r(\Omega)$ , ( $2 < r \leq +\infty$ ), une fonction positive vérifiant

$$(1.1) \quad \exists p > 0 : \int_{\omega} \frac{dx}{a^p} < \infty$$

ou

$$(1.2) \quad \exists a_0 > 0 : a(x) \geq a_0 \quad \text{p.p. dans } \omega$$

où  $\omega$  est un voisinage de  $\Gamma_+$ . Par voisinage de  $\Gamma_+$ , nous entendons par là, l'intersection de  $\Omega$  et d'un voisinage de  $\Gamma_+$ . Dans tout ce qui suit, on désigne par  $|a^{-1}|_p$  la quantité  $\left(\int_{\omega} \frac{dx}{a^p}\right)^{\frac{1}{p}}$  par  $|u|_r$  la norme de la fonction  $u \in L^r(\Omega)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ . Pour  $m \in \mathbf{N}$  et  $\{y^0, y^1\} \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$  ( $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ), on pose

$$F_m = (\|y^1\|_{H^m(\Omega)}^2 + \|y^0\|_{H^{m+1}(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les résultats que nous produisons ci-dessous sont les fruits de mon activité de recherche effectuée à l'IRMA après ma thèse de doctorat. Ils sont issus des articles [VII, VIII, IX, X] de la liste des publications donnée plus loin, et portent sur le cas

où l'amortissement est linéaire et le cas où l'amortissement est nonlinéaire. Pour des raisons de clarté, nous allons séparer ces deux cas dès maintenant.

### Étude du cas où l'amortissement est linéaire

On considère l'équation des ondes amortie

$$(1.3) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + ay' = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans cette sous-section et par la suite l'énergie  $E$  est donnée par

$$(1.4) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{|y'(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2\} dx, \quad \forall t \geq 0$$

et  $c$  désigne différentes constantes positives indépendantes des données initiales.

Revenons aux résultats antérieurs mentionnés plus haut. Dans [1], Bardos et *al.* montrent que si  $\Omega$  est de classe  $C^\infty$  ainsi que la fonction  $a$  et si de plus  $a$  vérifie (1.2) et  $\omega$  vérifie l'hypothèse d'optique géométrique: "il existe  $T > 0$  tel que tout rayon de géométrie optique rencontre la région  $\omega \times (0, T)$ ", alors il y a décroissance exponentielle de l'énergie. La technique qu'ils utilisent pour arriver à ce résultat est l'analyse microlocale; le résultat qu'ils obtiennent est très général en ce sens que la classe d'ouverts  $\omega$  vérifiant l'hypothèse d'optique géométrique contient l'ensemble des voisinages de  $\Gamma_+$ . Cependant leur méthode présente le défaut d'exiger trop de régularité sur l'ouvert  $\Omega$  et le coefficient d'amortissement  $a$ . Les résultats de Dafermos [6] et Haraux [9] montrent qu'il suffit que la mesure du support de  $a$  soit strictement positive pour que  $E$  décroisse vers zéro; toutefois, aucun des deux auteurs ne fournit d'estimation de décroissance. Pour sa part, Zuazua considère dans [36] l'équation des ondes semi-linéaire, c'est-à-dire que dans (1.3), il prend  $-\Delta y + f(y)$  au lieu de  $-\Delta y$ . Sous des hypothèses appropriées sur la nonlinéarité  $f$  et un argument de type compacité-unicité basé sur le théorème de continuation unique de Ruiz [28] ainsi qu'une propriété des semi-groupes, il démontre que si  $a \in L^\infty(\Omega)$  et  $a$  vérifie (1.2), alors on a la décroissance exponentielle de l'énergie  $E$ . Son taux de décroissance n'est pas explicite à cause de l'argument de compacité-unicité. Cependant la classe d'ouverts  $\omega$  qu'il utilise est plus large que les voisinages de  $\Gamma_+$ . A la suite du travail de Zuazua, Nakao montre dans [24] que,  $\omega$  étant un voisinage de  $\Gamma_+$ , si  $a \in C^{m-1}$  ( $m \in \mathbf{N}^*$ ) et  $a$  vérifie (1.1), et si les données initiales  $y^0$  et  $y^1$  sont respectivement dans  $H^{m+1}(\Omega)$  et  $H^m(\Omega)$  et satisfont à la condition de compatibilité d'ordre  $m$  associée à (1.3), (c'est-à-dire que l'on a

$$y^k \in H^{m+1-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad \text{et } y^{m+1} \in L^2(\Omega)$$

où les fonctions  $y^k$  sont données par

$$y^k = \Delta y^{k-2} - ay^{k-1}, \quad k \in \{2, 3, \dots, m+1\}$$

alors on a

$$(1.5) \quad E(t) \leq C(\|y^0\|_{H^{m+1}(\Omega)}, \|y^1\|_{H^m(\Omega)})t^{-\frac{2mp}{N}}, \quad \forall t > 0$$

où  $0 < p < 1$  et  $N < 2m$ .

Pour obtenir (1.5), Nakao utilise des inégalités différentielles, des résultats d'interpolation de Gagliardo et Nirenberg ainsi qu'un argument de type compacité-unicité; cette dernière technique fait que dans l'estimation (1.5), la constante  $C$  n'est pas explicite. Il est bon de noter que dans les résultats de Zuazua et Nakao mentionnés ci-dessus, la pièce maîtresse de la démonstration est l'argument de compacité-unicité. Notons aussi que le fait d'avoir des estimations non explicites rend l'application de ces résultats difficile voire impossible aux problèmes perturbés; d'où la nécessité de trouver une méthode directe conduisant à l'obtention d'estimations de décroissance explicites. C'est l'objet de notre travail; en effet, abandonnant la méthode de compacité-unicité, nous utilisons une méthode nouvelle qui nous semble plus simple et qui produit un résultat meilleur en ce sens qu'elle permet d'obtenir un taux de décroissance explicite. Cette méthode consiste à introduire un problème auxiliaire approprié dont la solution est utilisée comme multiplicateur. Cette méthode a été employée auparavant par Conrad et Rao (cf. [5]) dans l'étude de la stabilisation frontière de l'équation des ondes. Cette méthode constructive s'appliquerait sans peine aux problèmes perturbés (on peut s'en convaincre en l'appliquant à l'étude de la stabilisation locale de l'équation des ondes perturbée comme dans Lions [22, vol. 2], Tcheugoué [34]). Lorsque l'on a affaire à des problèmes perturbés, la méthode de compacité-unicité, très élégante dans sa présentation a le désavantage de faire que les constantes que l'on obtient dans les estimations dépendent de façon implicite des paramètres de perturbation rendant ainsi impossible le passage à la limite dans de telles estimations. Une méthode constructive se prête aussi plus facilement à une implémentation numérique.

Avant d'énoncer les résultats portant sur l'estimation de décroissance de l'énergie, nous tenons à rappeler le résultat de régularité suivant:

**THÉORÈME 1.0.** *Soit  $m$  un entier naturel. Soit  $\{y^0, y^1\} \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$  ( $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ) satisfaisant la condition de compatibilité d'ordre  $m$  associée à (1.3). Supposons que  $a \in \mathcal{C}^{m-1}(\bar{\Omega})$  ( $a \in L^\infty$  si  $m = 0$ ). Alors, la solution  $y$  de (1.3) vérifie*

$$y \in \bigcap_{k=0}^m \mathcal{C}^k([0, \infty); H^{m+1-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^{m+1}([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

De plus, il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\|y'(t)\|_{H^m(\Omega)} \leq cF_m, \quad \|y(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq cF_m, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

Les différents résultats de décroissance de l'énergie dans cette sous-section sont:

**THÉORÈME 1.1.** *Soit  $m$  un nombre entier supérieur ou égal à 1. Soit  $\{y^0, y^1\} \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$  vérifiant la condition de compatibilité d'ordre  $m$  associée à (1.3). Soit  $\omega$  un voisinage de  $\Gamma_+$ . Supposons que  $a \in C^{m-1}(\bar{\Omega})$  et satisfait (1.1) avec*

$$(1.19) \quad \begin{cases} 0 < p < \infty & \text{si } N \in \{1, 2, \dots, 2m\}, \\ N - 2m \leq mp & \text{si } N \geq 2m + 1. \end{cases}$$

Alors, pour  $1 \leq N < 2m$ , on a l'estimation

$$(1.7) \quad E(t) \leq K_0 \left( |a^{-1}|_p F_m^{\frac{N}{mp}} + E(0)^{\frac{N}{2mp}} \right)^{\frac{2mp}{N}} t^{-\frac{2mp}{N}}, \quad \forall t > 0$$

où  $K_0$  est une constante positive indépendante des données initiales. Pour  $N \geq 2m$ , l'énergie  $E$  vérifie

$$(1.8) \quad E(t) \leq K_1 \left( |a^{-1}|_p^2 F_m^{\frac{2N}{mp}} + E(0)^{\frac{N}{mp}} \right)^{\frac{mp}{N}} t^{-\frac{mp}{N}}, \quad \forall t > 0$$

où  $K_1$  est une constante positive indépendante des données initiales.

**THÉORÈME 1.2.** *Soit  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Supposons que  $a \in L_+^\infty(\Omega)$  vérifie (1.2) pour un certain  $a_0 > 0$ . Soit  $\omega$  un voisinage de  $\Gamma_+$ .*

*Alors, il existe une constante strictement positive  $\tau_0$ , indépendante des données initiales telle que*

$$(1.9) \quad E(t) \leq \left[ \exp\left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right) \right] E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

**REMARQUE 1.3.** Le théorème 1.1 généralise le 'theorem 1' de Nakao [24]. En effet, sous les mêmes hypothèses sur les données, Nakao démontre seulement (1.7). On remarque que la décroissance est d'autant plus rapide que les solutions sont plus régulières. Pour les grandes dimensions d'espace, la dégénérescence de  $a$  est limitée.

Dans les théorèmes 1.1 et 1.2, la fonction  $a$  est bornée. Cependant même si  $a$  n'est pas bornée, on a encore des estimations de décroissance de l'énergie; en effet, si  $a \in L^r(\Omega)$ ,  $2 < r \leq \infty$ , et si on pose

$$(1.10) \quad \mu_0 = \max \left\{ \frac{1}{2r-4}, \frac{1}{2p} \right\}, \quad \mu_1 = \max \left\{ \frac{N}{p}, \frac{N(3r-2)}{2r(r-2)} \right\}.$$

alors, on a le

THÉORÈME 1.4. Soit  $\{y^0, y^1\} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Soit  $\omega$  un voisinage de  $\Gamma_+$ . Supposons que  $a \in L^r(\Omega)$  avec

$$(1.11) \quad \begin{cases} r > 2 & \text{si } N \in \{1, 2\}, \\ r \geq \frac{3N + \sqrt{9N^2 - 16N}}{4} & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$$

et a vérifie (1.1) avec

$$(1.12) \quad \begin{cases} p > 0 & \text{si } N \in \{1, 2\}, \\ p \geq N - 2 & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Alors, pour  $N = 1$ , on a l'estimation

$$(1.13) \quad E(t) \leq T_0 t^{-\frac{1}{\mu_0}}, \quad \forall t > 0$$

avec

$$(1.14) \quad \begin{cases} T_0 = \left[ c \left( E(0)^{\mu_0} + |a^{-1}|_p F_1^{\frac{1}{p}} E(0)^{\frac{2\mu_0 p - 1}{2p}} + \right. \right. \\ \left. \left. + |a|_{r^{\frac{r}{r-2}}} F_1^{\frac{1}{r-2}} E(0)^{\frac{\mu_0(2r-4)-1}{2r-4}} \right) \left( \frac{\mu_0 + 1}{\mu_0} \right) \right]^{\frac{1}{\mu_0}}. \end{cases}$$

Pour  $N \geq 2$ , l'énergie  $E$  vérifie

$$(1.15) \quad E(t) \leq T_1 t^{-\frac{1}{\mu_1}}, \quad \forall t > 0$$

avec

$$(1.16) \quad \begin{cases} T_1 = \left[ c \left( E(0)^{\mu_1} + |a^{-1}|_p^2 F_1^{\frac{2N}{p}} E(0)^{\frac{\mu_1 p - N}{p}} + \right. \right. \\ \left. \left. + |a|_{r^{\frac{3r-2}{r-2}}} F_1^{\frac{N(3r-2)}{r^2-2r}} E(0)^{\frac{\mu_1(2r^2-4r)-N(3r-2)}{2r^2-4r}} \right) \left( \frac{\mu_1 + 1}{\mu_1} \right) \right]^{\frac{1}{\mu_1}}. \end{cases}$$

REMARQUE 1.5. Le théorème 1.4 est une généralisation du théorème 1.1 pour  $m = 1$ . Ce théorème montre en fait que l'on peut supprimer l'hypothèse de bornitude sur le coefficient d'amortissement  $a$  tout en gardant la même vitesse de décroissance pour l'énergie  $E$  pourvu que l'on prenne  $a$  dans  $L^r(\Omega)$  avec  $r$  suffisamment grand (par exemple pour  $N = 1$ , il suffit de choisir  $r \geq p + 2$ ). Remarquons que les théorèmes 1.1 et 1.4 semblent valables seulement pour les solutions fortes. On peut se demander si des résultats similaires peuvent être obtenus pour les solutions faibles c'est-à-dire pour

les solutions de (1.3) avec  $y^0 \in H_0^1(\Omega)$  et  $y^1 \in L^2(\Omega)$ . Nous reviendrons sur ce point dans la section 4 réservée aux commentaires. Pour le moment nous allons nous pencher sur le cas non linéaire.

### Étude du cas où l'amortissement est non linéaire

Maintenant, on considère l'équation des ondes avec un amortissement non linéaire:

$$(1.17) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + ag(y') = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction continue et croissante vérifiant  $g(0) = 0$ . La condition (1.2) assure que l'amortissement  $ag(y')$  est efficace dans l'ensemble  $\omega$ . Soit  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Le système (1.17) est alors bien posé dans l'espace  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ; en effet, il existe une unique solution faible de (1.17) avec

$$(1.18) \quad y \in \mathcal{C}([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

L'article de Dafermos [6] semble être le premier dans lequel est abordée l'étude du comportement asymptotique de l'énergie de l'équation des ondes avec un amortissement non linéaire localisé. Dans ce travail, l'auteur démontre que si la mesure du support de  $a$  est strictement positive et  $g$  est continuellement dérivable et strictement croissante, alors, pour toute solution faible de (1.17), l'énergie  $E$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini. Par la suite, dans [9], Haraux généralise le résultat de Dafermos aux fonctions  $g$  qui ont un graphe monotone sans être strictement croissante ni régulière. A la suite des travaux de Dafermos et Haraux vient celui de Slemrod [29] où l'auteur affaiblit considérablement les hypothèses de croissance sur  $g$ ; il prend  $g$  lipschitzienne et de graphe situé dans le premier et le troisième quadrant. Il montre alors que si la mesure du support de  $a$  est strictement positive, alors le couple  $(y, y')$  converge faiblement vers zéro dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Remarquons que dans ces travaux, il n'y a pas d'estimation de décroissance de l'énergie.

A la suite de ces travaux, vient celui de Zuazua [36] où il est question de l'estimation de l'énergie de l'équation des ondes semi-linéaire avec un amortissement linéaire. Dans la section 3.3 de cet article, l'auteur fait remarquer que les résultats qu'il a obtenus avec un amortissement linéaire localisé restent valables dans le cas d'un amortissement non linéaire localisé pourvu que la fonction  $g$  soit lipschitzienne et vérifie " $g(s)s \geq cs^2, \forall s \in \mathbf{R}$ ". Remarquons que le fait d'exiger que  $g$  soit lipschitzienne est une restriction très forte et elle exclut les fonctions de la forme  $|s|^{l-1}s, (l > 1)$ . L'auteur de



[36] l'a remarqué et a suggéré dans son article l'étude de l'estimation de la décroissance de l'énergie  $E$  pour des fonctions  $g$  plus générales. Après le travail de Zuazua vient celui de Nakao [25] où l'auteur considère l'équation des ondes avec un amortissement non linéaire localisé associé à une fonction  $g(x, s)$  se comportant comme

" $a(x)|s|^\tau s$  avec  $\tau > -1$ ". Sous des hypothèses appropriées sur  $g$ , l'auteur montre par une technique de type compacité-unicité qu'il y a décroissance exponentielle ou polynômiale selon que  $g$  est à croissance linéaire ou polynômiale. Les résultats de la section 3.3 de [36] et ceux de [25] sont établis pour  $\omega$ , voisinage de  $\Gamma_+$ .

Les résultats présentés ci-dessous ont été motivés par la lecture de [36] et ils ont été obtenus avant que nous venions à découvrir [25]. Ces résultats sont établis par une méthode directe comme dans le cas linéaire contrairement à ceux de [36] et [25] mentionnés précédemment. L'approche utilisée ici permet d'obtenir un taux de décroissance plus explicite de l'énergie. Les autres techniques utilisées ici sont: la méthode des multiplicateurs (voir par exemple [15, 22]), la méthode des inégalités intégrales due à Haraux et Komornik (cf. [7, 8, 15, 16]). L'approche constructive que nous utilisons ici nous semble plus simple que l'approche utilisée par Nakao dans [25].

Dans la suite, on suppose que la fonction  $g$  vérifie en outre

$$(1.19) \quad \begin{cases} \exists r \in [1, \infty), \exists c_1, c_2 > 0 : c_1|x|^r \leq |g(x)| \leq c_2|x|^{\frac{1}{r}} & \text{if } |x| \leq 1 \\ \exists k \in [0, 1], \exists s \in [1, \infty), \exists c_3, c_4 > 0 : c_3|x|^k \leq |g(x)| \leq c_4|x|^s & \text{if } |x| > 1. \end{cases}$$

Avant d'énoncer les résultats de décroissance de l'énergie, nous tenons à rappeler le résultat de régularité suivant.

**THÉOREME 1.6.** *Soit  $\{y^0, y^1\} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  et  $a \in L^\infty(\Omega)$ . On suppose que la fonction  $g$  est continue, croissante, vérifie (1.19) et qu'en outre  $g(v) \in L^2(\Omega)$ ,  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ . Alors la solution  $y$  de (1.17) satisfait à la condition:*

$$(1.20) \quad y \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap W^{2, \infty}(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

*De plus, si on pose*

$$(1.21) \quad F_1 = (\|y^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + |\Delta y^0|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

*il existe une constante positive  $c$  telle que*

$$(1.22) \quad |\nabla y'(t)|_2 \leq cF_1, \quad |\Delta y(t)|_2 \leq cF_1, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat; nous convions le lecteur intéressé à consulter Haraux [10] et Lions [21]. Les résultats principaux de cette sous-section sont:

THÉORÈME 1.7. Soit  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On suppose que  $a \in L_+^\infty(\Omega)$  satisfait à (1.2) pour une certaine constante  $a_0 > 0$ . Soit  $\omega$  un voisinage de  $\Gamma_+$ . On suppose que la fonction  $g$  est continue, croissante, vérifie (1.19) avec  $s = 1$  et  $k = 1$ . Alors on a l'existence de deux constantes positives  $\tau_0$  et  $K_0$  indépendantes de  $E(0)$  telles que

$$(1.23) \quad E(t) \leq \begin{cases} [\exp(1 - \frac{t}{\tau_0})] E(0), & \forall t \geq 0 \quad \text{si } r = 1, \\ K_0(1 + E(0))t^{-\frac{2}{r-1}}, & \forall t > 0 \quad \text{si } r > 1. \end{cases}$$

THÉORÈME 1.8. Soit  $\{y^0, y^1\} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . On suppose que  $a \in L_+^\infty(\Omega)$  satisfait à (1.2) pour une certaine constante  $a_0 > 0$ . Soit  $\omega$  un voisinage de  $\Gamma_+$ . On suppose que la fonction  $g$  est continue, croissante, vérifie (1.19) avec

$$(1.24) \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq 1, \\ s \geq 1 \\ (N-2)s \leq N \quad \text{et} \quad 2r \geq N - k(N-2) \\ 1 \leq s(r-1) \\ r \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } N \in \{1, 2\}, \\ \text{si } N \geq 3, \\ \text{si } N \geq 2, \\ \text{si } N = 1. \end{array}$$

Alors, pour  $N \geq 2$ , l'énergie  $E$  satisfait

$$(1.25) \quad E(t) \leq K_1 \left( F_1^{\frac{2(r-k)}{(r-1)}} + (1 + F_1)^{\frac{2}{r-1}} (1 + E(0)^{\frac{rs-1}{s(r-1)}}) \right) t^{-\frac{2}{r-1}}, \quad \forall t > 0$$

où  $K_1$  est une constante positive indépendante des données initiales.

Pour  $N = 1$ , on a les estimations de décroissance

$$(1.26) \quad E(t) \leq \begin{cases} [\exp(\rho - \frac{t}{\tau_1})] E(0), & \forall t \geq 0 \quad \text{if } r = 1, \\ K_2 \left( 1 + F_1^{\frac{2(1-k)}{(r-1)}} + F_1^{\frac{2(s-1)}{s(r-1)}} \right) \left( 1 + E(0)^{\frac{rs-1}{s(r-1)}} \right) t^{-\frac{2}{r-1}}, & \forall t > 0 \quad \text{if } r > 1 \end{cases}$$

où  $\tau_1$  et  $K_2$  sont des constantes positives indépendantes des données initiales et  $\rho$  est une constante positive dépendant de  $F_1$  et  $E(0)$  de manière explicite.

REMARQUE 1.9. L'hypothèse de la quatrième ligne de (1.24) semble artificielle et inhabituelle; cependant une hypothèse de ce type a déjà été employée dans la littérature (cf. [14], p. 164). Une telle hypothèse est très utile pour mener à bien les calculs conduisant à une estimation assez précise de la décroissance de l'énergie (voir la seconde ligne de (3.49) ci-dessous).

## Lemmes fondamentaux

Pour démontrer les théorèmes 1.1, 1.2, 1.4, 1.7 et 1.8, on aura besoin des lemmes suivants

LEMME 1.10. (Gagliardo-Nirenberg) *Soit  $1 \leq q \leq s \leq \infty$ ,  $1 \leq r \leq s$ ,  $0 \leq k < m < \infty$ , ( $k$  et  $m$  sont des entiers positifs) et  $\delta \in ]0, 1[$ . Soit  $v \in W^{m,q}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ . Supposons que*

$$(1.27) \quad k - \frac{N}{s} \leq \delta \left( m - \frac{N}{q} \right) - \frac{N(1-\delta)}{r}.$$

*Alors,  $v \in W^{k,s}(\Omega)$  et il existe une constante positive  $C$  telle que*

$$(1.28) \quad \|v\|_{W^{k,s}(\Omega)} \leq C \|v\|_{W^{m,q}(\Omega)}^\delta |v|_r^{1-\delta}.$$

LEMME 1.11. *Soit  $E : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  une fonction décroissante localement absolument continue telle qu'ils existent des constantes positives  $\beta$  et  $A$  satisfaisant*

$$(1.29) \quad \int_S^\infty E(t)^{\beta+1} dt \leq AE(S), \quad \forall S \geq 0.$$

*Alors, on a*

$$(1.30) \quad E(t) \leq \begin{cases} [\exp(1 - \frac{t}{A})] E(0), & \forall t \geq 0 \quad \text{si } \beta = 0, \\ (A(1 + \frac{1}{\beta}))^{\frac{1}{\beta}} t^{-\frac{1}{\beta}}, & \forall t > 0 \quad \text{si } \beta > 0. \end{cases}$$

Ce lemme réduit la démonstration de chacun des théorèmes 1.1, 1.2, 1.4, 1.7 et 1.8 à la démonstration d'estimations du type (1.30). On peut trouver sa preuve dans [15, 16, 17] ou dans [7, 8].

Dès maintenant, on désigne par  $S$  et  $T$  deux nombres réels tels que  $0 \leq S < T < \infty$ . On écrit  $E$  au lieu de  $E(t)$ .

LEMME 1.12. *Soit  $\mu \geq 0$ ,  $q \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  and  $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . On a les*

$$(1.31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} y' \{2q \cdot \nabla y + \alpha y\} dx E^{\mu} \right]_S^T + \\ & + \int_{\Omega \times ]S, T[} (\operatorname{div}(q) - \alpha) \{|y'|^2 - |\nabla y|^2\} E^{\mu} dx dt - \\ & - \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' \{2q \cdot \nabla y + \alpha y\} dx dt + \\ & + 2 \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu} \nabla y \cdot \nabla q_k \frac{\partial y}{\partial x_k} dx dt + \\ & + \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') \{2q \cdot \nabla y + \alpha y\} E^{\mu} dx dt = \\ & = \int_{\Gamma \times ]S, T[} E^{\mu} (q \cdot \nu) \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

$$(1.32) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} y' \xi y dx E^{\mu} \right]_S^T - \int_{\Omega \times ]S, T[} \xi \{|y'|^2 - |\nabla y|^2\} E^{\mu} dx dt - \\ & - \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' y \xi dx dt + \int_{\Omega \times ]S, T[} y \nabla y \cdot \nabla \xi E^{\mu} dx dt + \\ & + \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') \xi y E^{\mu} dx dt = 0. \end{aligned} \right.$$

La preuve de ce lemme repose sur la technique standard des multiplicateurs, le lecteur intéressé est convié à consulter [22] ou [15].

## 2. Démonstrations des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4

Dans cette section, on aura besoin des notations supplémentaires

$$(2.1) \quad \omega_1 = \{x \in \omega; a(x) \leq 1\}, \quad \omega_2 = \{x \in \omega; a(x) > 1\}.$$

Les démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.4 seront plus aisées si l'on commence par démontrer les lemmes supplémentaires:

LEMME 2.1. *Sous les hypothèses du théorème 1.1, on a pour  $N < 2m$ ,*

$$(2.2) \quad \int_{\omega} |y'|^2 dx \leq |E'| + c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_m^{\frac{N}{m(p+1)}} E^{\frac{2m-N}{2m(p+1)}} |E'|_{\frac{p}{p+1}}$$

et pour  $N \geq 2m$ ,

$$(2.3) \quad \int_{\omega} |y'|^2 dx \leq |E'| + c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_m^{\frac{N}{m(p+1)}} E^{\frac{mp-(N-2m)}{2m(p+1)}} |E'|_{\frac{p}{2p+2}}.$$

LEMME 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 1.4, on a pour  $N = 1$ ,*

$$(2.4) \quad \begin{cases} \int_{\omega} |y'|^2 dx \leq |E'| + c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_1^{\frac{1}{(p+1)}} E^{\frac{1}{2(p+1)}} |E'|_{\frac{p}{p+1}} \\ \int_{\Omega} a^2 |y'|^2 dx \leq c|a|_r^{\frac{r}{r-1}} F_1^{\frac{1}{r-1}} E^{\frac{1}{2r-2}} |E'|_{\frac{r-2}{r-1}} \end{cases}$$

et pour  $N \geq 2$ ,

$$(2.5) \quad \begin{cases} \int_{\omega} |y'|^2 dx \leq |E'| + c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_1^{\frac{N}{(p+1)}} E^{\frac{p-(N-2)}{2(p+1)}} |E'|_{\frac{p}{2p+2}} \\ \int_{\Omega} a^2 |y'|^2 dx \leq c|a|_r^{\frac{3r-2}{2r-2}} F_1^{\frac{N(3r-2)}{2r(r-1)}} |E'|_{\frac{r-2}{2r-2}} E^{\frac{2r^2-3Nr+2N}{4r(r-1)}}. \end{cases}$$

*Preuve du Lemme 2.1.* Il est clair que pour tout  $N \geq 1$ , on a

$$(2.6) \quad \int_{\omega_2} |y'|^2 dx \leq |E'|.$$

D'autre part, pour  $1 \leq N < 2m$ , on a par l'inégalité de Hölder,

$$(2.7) \quad \begin{cases} \int_{\omega_1} |y'|^2 dx \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} \left( \int_{\omega_1} a |y'|^{2+\frac{2}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \leq \\ \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} |y'|_{\infty}^{\frac{2}{p+1}} |E'|_{\frac{p}{p+1}}. \end{cases}$$

Dans (2.7), nous avons aussi utilisé le fait que  $H^m(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$  pour  $1 \leq N < 2m$ . Utilisant maintenant le théorème 1.0 et l'inégalité d'interpolation (donnée par le lemme 1.10)

$$(2.8) \quad |\varphi|_\infty \leq c|\varphi|_2^{\frac{2m-N}{2m}} \|\varphi\|_{H^m(\Omega)}^{\frac{N}{2m}}, \quad \forall \varphi \in H^m(\Omega)$$

dans (2.7), on obtient

$$(2.9) \quad \int_{\omega_1} |y'|^2 dx \leq c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_m^{\frac{N}{m(p+1)}} E^{\frac{2m-N}{2m(p+1)}} |E'|_p^{\frac{p}{p+1}}.$$

Combinant (2.6) et (2.9), on trouve (2.2). Démontrons (2.3) maintenant. Il reste à estimer la quantité  $\int_{\omega_1} |y'|^2 dx$ . On a par une double application de l'inégalité de Hölder,

$$(2.10) \quad \begin{cases} \int_{\omega_1} |y'|^2 dx \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} \left( \int_{\omega_1} a|y'|^{2+\frac{2}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \leq \\ \leq |a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} |y'|_{\frac{2p+4}{p}}^{\frac{p+2}{p+1}} |E'|_{\frac{2p+2}{p}}^{\frac{p}{p+1}}. \end{cases}$$

La justesse de la seconde ligne de (2.10) vient du théorème 1.0, du théorème d'injection de Sobolev et de l'hypothèse sur  $p$ . Maintenant, utilisant dans (2.10), le théorème 1.0 et l'inégalité d'interpolation

$$(2.11) \quad |\varphi|_{\frac{2p+4}{p}} \leq c|\varphi|_2^{\frac{mp-(N-2m)}{m(p+2)}} \|\varphi\|_{H^m(\Omega)}^{\frac{N}{m(p+2)}}, \quad \forall \varphi \in H^m(\Omega)$$

on trouve

$$(2.12) \quad \int_{\omega_1} |y'|^2 dx \leq c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_m^{\frac{N}{m(p+1)}} E^{\frac{mp-(N-2m)}{2m(p+1)}} |E'|_{\frac{2p+2}{p}}^{\frac{p}{p+1}}.$$

La combinaison de (2.6) et (2.12) donne l'inégalité voulue.  $\diamond$

*Preuve du lemme 2.2.* La première inégalité de (2.4) ainsi que celle de (2.5) sont déjà démontrées; elles correspondent aux deux inégalités du Lemme 2.1 lorsque  $m = 1$ . Il ne nous reste plus qu'à démontrer la seconde inégalité de (2.4) et celle de (2.5). Pour  $N = 1$ , on a par l'inégalité de Hölder,

$$(2.13) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} a^2 |y'|^2 dx \leq |a|_r^{\frac{r}{r-1}} \left( \int_{\Omega} a|y'|^{\frac{2r-2}{r-2}} dx \right)^{\frac{r-2}{r-1}} \leq \\ \leq |a|_r^{\frac{r}{r-1}} |y'|_\infty^{\frac{2}{r-1}} |E'|_{\frac{r-2}{r-1}}^{\frac{r-2}{r-1}}. \end{cases}$$

Utilisant dans (2.13) les inégalités du théorème 1.0 et l'inégalité d'interpolation

$$(2.14) \quad |\varphi|_\infty \leq c|\varphi|_2^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

on trouve

$$(2.15) \quad \int_{\Omega} a^2 |y'|^2 dx \leq c|a|_r^{\frac{r}{r-1}} F_1^{\frac{1}{r-1}} |E'|_r^{\frac{r-2}{r-1}} E^{\frac{1}{2(r-1)}}$$

ce qui établit la seconde inégalité de (2.4). Démontrons la seconde inégalité de (2.5) maintenant. On a par une double application de l'inégalité de Hölder,

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a^2 |y'|^2 dx \leq |a|_r^{\frac{r}{r-1}} \left( \int_{\Omega} a |y'|^{\frac{2r-2}{r-2}} dx \right)^{\frac{r-2}{r-1}} \leq \\ \leq |a|_r^{\frac{r}{r-1}} |E'|_r^{\frac{r-2}{2r-2}} |a|_r^{\frac{r-2}{2r-2}} |y'|_{\frac{2r^2}{(r-1)(r-2)}}^{\frac{r-1}{r-1}} \leq \\ \leq |a|_r^{\frac{3r-2}{2r-2}} |E'|_r^{\frac{r-2}{2r-2}} |y'|_{\frac{2r^2}{(r-1)(r-2)}}^{\frac{r-1}{r-1}}. \end{array} \right.$$

Utilisant dans (2.16), le théorème 1.0 et l'inégalité d'interpolation

$$(2.17) \quad |\varphi|_{\frac{2r^2}{(r-1)(r-2)}} \leq c|\varphi|_2^{\frac{2r^2-3Nr+2N}{2r^2}} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{N(3r-2)}{2r^2}}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

on obtient

$$(2.18) \quad \int_{\Omega} a^2 |y'|^2 dx \leq |a|_r^{\frac{3r-2}{2r-2}} F_1^{\frac{N(3r-2)}{2r(r-1)}} |E'|_r^{\frac{r-2}{2r-2}} E^{\frac{2r^2-3Nr+2N}{4r(r-1)}},$$

ce qui prouve la deuxième inégalité de (2.5) et achève en même temps la preuve du lemme 2.2.  $\diamond$

*Démonstration du théorème 1.1.* Elle va se faire en plusieurs étapes.

*Étape 1.* Appliquant (1.31) avec  $\alpha = N - 1$ ,  $q(x) = m(x)$ ,  $g(s) = s$ , observant que  $\text{div}(m) = N$  et utilisant (1.4), on trouve

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E^{\mu+1} dt = - \int_{\Omega} y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx E^{\mu} \Big]_S^T + \\ + \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx dt - \\ - \int_{\Omega \times ]S, T[} a y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} E^{\mu} dx dt + \\ + \int_{\Gamma \times ]S, T[} E^{\mu} (m \cdot \nu) \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Puisque l'énergie est décroissante, l'application du résultat de Komornik [7] donne

$$(2.20) \quad \left| - \int_{\Omega} y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx \ E^{\mu} \right]_S^T \leq 4RE(0)^{\mu} E(S)$$

et

$$(2.21) \quad \left| \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx dt \right| \leq 2\mu RE(0)^{\mu} E(S).$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_{\Omega \times ]S, T[} ay' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} E^{\mu} dx dt \right| \leq c \int_S^T E^{\mu+\frac{1}{2}} |E'|^{\frac{1}{2}} dt$$

et l'usage de l'inégalité de Young montre que

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{\Omega \times ]S, T[} ay' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} E^{\mu} dx dt \right| \leq cE(0)^{\mu} E(S) + \\ + \int_S^T E^{\mu+1} dt. \end{array} \right.$$

Combinant (2.20)-(2.22) et reportant le résultat obtenu dans (2.19), on obtient

$$(2.23) \quad \int_S^T E^{\mu+1} dt \leq cE(0)^{\mu} E(S) + R \int_{\Gamma_+ \times ]S, T[} E^{\mu} \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

A ce niveau, on constate, grâce au lemme 1.11, qu'il suffit d'obtenir une estimation judicieuse du dernier terme du membre de droite de (2.23) en fonction de  $E(S)$  et  $\int_S^T E^{\mu+1} dt$  pour achever la démonstration du théorème 1.1.

*Étape 2.* Soit  $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$  tel que

$$(2.24) \quad h = \nu \quad \text{sur } \Gamma_+, \quad h \cdot \nu \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad h = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \hat{\omega}$$

où  $\hat{\omega}$  est un autre voisinage de  $\Gamma_+$  strictement inclus dans  $\omega$ . (Pour la construction champ de vecteur  $h$ , on peut consulter Lions [22, vol. 1] Chap. 1, Remarque 3.2.)



Choisissons maintenant  $\alpha = 0$ ,  $q = h$  et  $g(s) = s$  dans (1.31). D'après Zuazua [36], on sait qu'il existe une constante positive  $c_0$  dépendant uniquement de  $\omega$  telle que

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} R \int_{\Gamma_{+\times}]S, T[} E^\mu \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq R \int_{\Gamma_{\times}]S, T[} E^\mu (h \cdot \nu) \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq \\ \leq c_0 \int_{\hat{\omega}_{\times}]S, T[} \{|y'|^2 + |\nabla y|^2\} E^\mu dx dt + \\ + 2R \int_{\Omega} y' h \cdot \nabla y dx E^\mu \Big]_S^T - \\ - 2\mu R \int_{\Omega_{\times}]S, T[} E^{\mu-1} E' y' h \cdot \nabla y dx dt + \\ + 2R \int_{\Omega_{\times}]S, T[} ay' h \cdot \nabla y E^\mu dx dt. \end{array} \right.$$

Des calculs simples utilisant l'inégalité de Young montrent que

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| -2R \int_{\Omega} y' h \cdot \nabla y dx E^\mu \Big]_S^T \right| + \\ + \left| 2\mu R \int_{\Omega_{\times}]S, T[} E^{\mu-1} E' y' h \cdot \nabla y dx dt \right| \leq \\ \leq c E(0)^\mu E(S) \end{array} \right.$$

Utilisant l'inégalité de Hölder dans le dernier terme du membre de droite de (2.25), on trouve

$$(2.27) \quad \left| 2R \int_{\Omega_{\times}]S, T[} ay' h \cdot \nabla y E^\mu dx dt \right| \leq c \int_S^T E^{\mu+\frac{1}{2}} |E'|^{\frac{1}{2}} dt.$$

On déduit alors facilement de (2.27) que

$$(2.28) \quad \left| 2R \int_{\Omega_{\times}]S, T[} ay' h \cdot \nabla y E^\mu dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_S^T E^{\mu+1} dt + c E(0)^\mu E(S).$$

Combinant (2.26), (2.27), (2.28) et reportant le résultat obtenu dans (2.23), on obtient

$$(2.29) \quad \int_S^T E^{\mu+1} dt \leq c E(0)^\mu E(S) + c \int_{\hat{\omega}_{\times}]S, T[} \{|y'|^2 + |\nabla y|^2\} E^\mu dx dt.$$

*Étape 3.* Introduisons la fonction  $\eta$ , (construite par Zuazua dans [22, vol. 1], Chap. 7), qui satisfait

$$(2.30). \quad \eta \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta = 1 \quad \text{dans} \quad \hat{\omega}, \quad \eta = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \omega.$$

Appliquant (1.32) avec  $\xi = \eta^2$ , on trouve

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |\nabla y|^2 E^\mu dx dt = - \int_{\Omega} y' \eta^2 y dx E^\mu \Big]_S^T + \\ + \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |y'|^2 E^\mu dx dt + \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' y \eta^2 dx dt - \\ - 2 \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta y \nabla y \cdot \nabla \eta E^\mu dx dt - \int_{\Omega \times ]S, T[} a y' \eta^2 y E^\mu dx dt. \end{array} \right.$$

Des calculs simples utilisant l'inégalité de Young montrent que

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| - \int_{\Omega} y' \eta^2 y dx E^\mu \Big]_S^T + \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' y \eta^2 dx dt \right| \leq \\ \leq c E(0)^\mu E(S) \end{array} \right.$$

et

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| 2 \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta y \nabla y \cdot \nabla \eta E^\mu dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |\nabla y|^2 E^\mu dx dt + \\ + 2c |\nabla \eta|_\infty^2 \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^\mu dx dt. \end{array} \right.$$

D'autre part,  $\hat{c}$  désignant la constante dans (2.29), on a

$$(2.34) \quad \left| 2\hat{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} a y' \eta^2 y E^\mu dx dt \right| \leq c E(0)^\mu E(S) + \frac{1}{2} \int_S^T E^{\mu+1} dt$$

Reportant (2.32)-(2.34) dans (2.31), on trouve

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |\nabla y|^2 E^\mu dx dt \leq c E(0)^\mu E(S) + \frac{1}{2} \int_S^T E^{\mu+1} dt + \\ + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^\mu dx dt + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 E^\mu dx dt. \end{array} \right.$$

Combinant (2.29) et (2.35), on obtient

$$(2.36) \quad \begin{cases} \int_S^T E^{\mu+1} dt \leq cE(0)^\mu E(S) + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^\mu dx dt + \\ c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 E^\mu dx dt. \end{cases}$$

Maintenant nous allons utiliser un multiplicateur approprié pour absorber le second terme du membre de droite de (2.36). Pour ce faire, introduisons  $z(t) \in H_0^1(\Omega)$  solution de

$$(2.37) \quad \begin{cases} -\Delta z = \chi(\omega)y \text{ dans } \Omega \\ z = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

où  $\chi(\omega)$  est la fonction caractéristique de  $\omega$ . On vérifie sans peine que  $z' = \frac{dz}{dt}$  satisfait

$$(2.38) \quad \begin{cases} -\Delta z' = \chi(\omega)y' \text{ dans } \Omega \\ z' = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Quelques calculs élémentaires montrent que

$$(2.39) \quad \begin{cases} \int_\Omega |\nabla z|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \int_\omega |y|^2 dx, & \int_\Omega |\nabla z'|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \int_\omega |y'|^2 dx \\ \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla y dx = \int_\omega |y|^2 dx \end{cases}$$

où  $\lambda_1^2$  est la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta$  avec la condition aux limites de Dirichlet. Maintenant, multiplions la première équation de (1.3) par  $zE^\mu$ , intégrons par parties sur  $\Omega \times ]S, T[$  et utilisons la seconde ligne de (2.39); il vient

$$(2.40) \quad \begin{cases} \left[ \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^\mu dx dt = - \int_\Omega y' z dx E^\mu \right]_S^T + \\ + \int_{\Omega \times ]S, T[} E^\mu y' z' dx dt + \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' z dx dt - \\ - \int_{\Omega \times ]S, T[} a y' z E^\mu dx dt. \end{cases}$$

Quelques calculs simples donnent alors

$$(2.41) \quad \left| - \int_\Omega y' z dx E^\mu \right]_S^T + \mu \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\mu-1} E' y' z dx dt \left| \leq cE(0)^\mu E(S).$$

Désignant par  $\tilde{c}$  la constante dans (2.36) et utilisant les inégalités de Hölder et Young, on trouve

$$(2.42) \quad \tilde{c} \left| \int_{\Omega \times ]S, T[} ay' z E^\mu dx dt \right| \leq cE(0)^\mu E(S) + \frac{1}{4} \int_S^T E^{\mu+1} dt$$

et

$$(2.43) \quad \tilde{c} \left| \int_{\Omega \times ]S, T[} E^\mu y' z' dx dt \right| \leq \frac{1}{4} \int_S^T E^{\mu+1} dt + c \int_{\omega \times ]S, T[} E^\mu |y'|^2 dx dt.$$

Reportant (2.41)-(2.43) dans (2.40), on obtient

$$(2.44) \quad \begin{cases} \tilde{c} \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^\mu dx dt \leq cE(0)^\mu E(S) + \frac{1}{2} \int_S^T E^{\mu+1} dt + \\ + c \int_{\omega \times ]S, T[} E^\mu |y'|^2 dx dt. \end{cases}$$

La combinaison de (2.36) et (2.44) donne

$$(2.45) \quad \int_S^T E^{\mu+1} dt \leq cE(0)^\mu E(S) + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 E^\mu dx dt.$$

Pour achever la preuve du théorème 1.1, il reste à absorber le dernier terme du membre de droite de (2.45). Les preuves de (1.7) et (1.8) sont distinctes; en effet, on utilise des valeurs différentes de l'exposant  $\mu$  dans les deux cas. Commençons par démontrer (1.7). Pour ce faire, on choisit  $\mu = \frac{N}{2mp}$ . Grâce à ce choix de  $\mu$  et à (2.2), on a

$$(2.46) \quad \begin{cases} c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 E^{\frac{N}{2mp}} dx dt \leq cE(0)^{\frac{N}{2mp}} E(S) + \\ + \frac{1}{p+1} \int_S^T E^{\frac{N}{2mp}+1} dt + c|a^{-1}|_p F_m^{\frac{N}{mp}} E(S). \end{cases}$$

Reportant (2.46) dans (2.45), on trouve

$$(2.47) \quad \int_S^T E^{\frac{N}{2mp}+1} dt \leq c \left( |a^{-1}|_p F_m^{\frac{N}{mp}} + E(0)^{\frac{N}{2mp}} \right) E(S)$$

de sorte que prenant la limite quand  $T$  tend vers l'infini et appliquant le lemme 1.11, on obtient (1.7). Démontrons à présent (1.8). A cette fin, on choisit  $\mu = \frac{N}{mp}$  et on utilise (2.3). Il s'en suit que

$$(2.48) \quad \begin{cases} c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 E^{\frac{N}{mp}} dx dt \leq cE(0)^{\frac{N}{mp}} E(S) + \\ + \frac{p+2}{2p+2} \int_S^T E^{\frac{N}{mp}+1} dt + c|a^{-1}|_p^2 F_m^{\frac{2N}{mp}} E(S). \end{cases}$$

Combinant (2.45) et (2.48) et faisant tendre  $T$  vers l'infini dans le résultat obtenu, on trouve

$$(2.49) \quad \int_S^\infty E^{\frac{N}{m_p}+1} dt \leq c \left( |a^{-1}|_p^2 F_m^{\frac{2N}{m_p}} + E(0)^{\frac{N}{m_p}} \right) E(S).$$

Appliquant finalement le lemme 1.11, on obtient l'estimation désirée et ceci termine la démonstration du théorème 1.1.  $\diamond$

La preuve du théorème 1.2 est dans une grande mesure similaire à celui du théorème 1.1; nous en donnons juste une esquisse.

*Esquisse de la démonstration du Théorème 1.2.* Prenant  $\mu = 0$  et procédant comme dans la preuve du théorème 1.1, on aboutit à l'inégalité

$$(2.50) \quad \int_S^T E dt \leq cE(S) + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 dx dt.$$

Grâce à (1.2), on vérifie facilement que

$$(2.51) \quad \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 dx dt \leq cE(S).$$

Reportant (2.51) dans (2.50) et faisant tendre  $T$  vers l'infini dans l'inégalité obtenue, on trouve

$$(2.52) \quad \int_S^\infty E dt \leq cE(S).$$

Finalement, l'application du lemme 1.11 donne (1.9).  $\diamond$

*Démonstration du Théorème 1.4.* On suit les mêmes étapes que dans la preuve du théorème 1.1 et on est alors conduit à

$$(2.53) \quad \begin{cases} 2 \int_S^T E^{\mu+1} dt \leq cE(0)^\mu E(S) + c \int_S^T E^{\mu+\frac{1}{2}} |ay'|_2 dt + \\ + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^\mu dx dt + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 E^\mu dx dt. \end{cases}$$

Maintenant, il reste à absorber les trois derniers termes du membre de droite de (2.53) pour terminer la démonstration du théorème. Remarquons qu'à l'aide du lemme 2.2,

on peut sans peine absorber le deuxième et le dernier terme; nous nous occuperons de ces termes plus loin. Commençons par absorber le troisième terme. Pour ce faire, on procède comme dans la preuve du théorème 1.1; on utilise le multiplicateur  $zE^\mu$  où  $z$  est la fonction donnée par (2.37). On est ainsi conduit après un certain nombre de calculs à

$$(2.54) \quad \begin{cases} \tilde{c} \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^\mu dx dt \leq cE(0)^\mu E(S) + \int_S^T E^{\mu+1} dt + \\ + c \int_S^T E^{\mu+\frac{1}{2}} |ay'|_2 dt + c \int_{\omega \times ]S, T[} E^\mu |y'|^2 dx dt. \end{cases}$$

où  $\tilde{c}$  désigne la constante  $c$  dans (2.53). La combinaison de (2.53) et (2.54) donne

$$(2.55) \quad \begin{cases} \int_S^T E^{\mu+1} dt \leq cE(0)^\mu E(S) + c \int_S^T E^{\mu+\frac{1}{2}} |ay'|_2 dt + \\ + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y'|^2 E^\mu dx dt. \end{cases}$$

La démonstration du théorème 1.4 sera terminée si l'on majore judicieusement le second et le troisième termes de (2.55) par une fonction de  $E(S)$  et du premier membre de (2.55). Nous procédons tout de suite à la démonstration de (1.13) et de (1.15). Commençons par démontrer (1.13). Pour cela, on choisit  $\mu = \mu_0$ . Grâce à ce choix de  $\mu$  et à (2.4), l'utilisation de l'inégalité de Young donne pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $\beta > 0$

$$(2.56) \quad \begin{cases} c \int_S^T \left\{ E^{\mu_0+\frac{1}{2}} |ay'|_2 + \int_{\omega} |y'|^2 E^{\mu_0} dx \right\} dt \leq \\ \leq c|a|_r^{\frac{r}{2r-2}} F_1^{\frac{1}{2r-2}} \int_S^T E^{\mu_0+\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{4r-4}} |E'|_{\frac{r-2}{2r-2}} dt + \\ + c \int_S^T E^{\mu_0} |E'| dt + c|a^{-1}|_p^{\frac{p}{p+1}} F_1^{\frac{1}{p+1}} \int_S^T E^{\mu_0} E^{\frac{1}{2(p+1)}} |E'|_{\frac{p}{p+1}} dt \leq \\ \leq \frac{\beta r}{2r-2} \int_S^T E^{\mu_0+1} dt + c|a|_r^{\frac{r}{r-2}} F_1^{\frac{1}{r-2}} E(0)^{\frac{\mu_0(2r-4)-1}{2r-4}} E(S) + \\ + cE(0)^{\mu_0} E(S) + \frac{\varepsilon}{p+1} \int_S^T E^{\mu_0+1} dt + \\ + c|a^{-1}|_p F_1^{\frac{1}{p}} E(0)^{\frac{2\mu_0 p-1}{2p}} E(S). \end{cases}$$

Pour obtenir la quatrième ligne de (2.56), on utilise la relation

$$E^{\mu_0+\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{4r-4}} = E^{\frac{(\mu_0+1)r}{2r-2}} E^{\frac{\mu_0(2r-4)-1}{4r-4}}.$$

Pour obtenir les deux dernières lignes de (2.56), on utilise une relation similaire. La même technique est aussi utilisée dans la suite.

Puisque le choix de  $\varepsilon$  et  $\beta$  est arbitraire, la combinaison de (2.56) and (2.55), donne

$$(2.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_S^T E^{\mu_0+1} dt \leq c \left( E(0)^{\mu_0} + |a^{-1}|_p F_1^{\frac{1}{p}} E(0)^{\frac{2\mu_0 p - 1}{2p}} \right) E(S) + \\ + c |a|_{r^{\frac{r}{r-2}}} F_1^{\frac{1}{r-2}} E(0)^{\frac{\mu_0(2r-4)-1}{2r-4}} E(S). \end{array} \right.$$

Prenant alors la limite lorsque  $T$  tend vers l'infini et appliquant le lemme 1.11, on obtient (1.13). Démontrons à présent (1.15). Choissant  $\mu = \mu_1$  et utilisant (2.5), il s'en suit que pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $\beta > 0$

$$(2.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \int_S^T \left\{ E^{\mu_1 + \frac{1}{2}} |ay'|_2 + \int_{\omega} |y'|^2 E^{\mu_1} dx \right\} dt \leq c E(0)^{\mu_1} E(S) + \\ + \frac{\varepsilon(p+2)}{2p+2} \int_S^T E^{\mu_1+1} dt + c |a^{-1}|_p^2 F_1^{\frac{2N}{p}} E(0)^{\frac{p\mu_1 - N}{p}} E(S) + \\ + \frac{\beta(3r-2)}{4r-4} \int_S^T E^{\mu_1+1} dt + \\ + c |a|_{r^{\frac{3r-2}{r-2}}} F_1^{\frac{N(3r-2)}{r^2-2r}} E(0)^{\frac{2\mu_1 r(r-2) - N(3r-2)}{2r^2-4r}} E(S). \end{array} \right.$$

Combinant (2.55) et (2.58), utilisant le fait que  $\varepsilon > 0$  et  $\beta > 0$  sont choisis arbitrairement, et faisant tendre  $T$  vers l'infini dans le résultat obtenu, on trouve

$$(2.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_S^{\infty} E^{\mu_1+1} dt \leq c \left( E(0)^{\mu_0} + |a^{-1}|_p^2 F_1^{\frac{2N}{p}} E(0)^{\frac{p\mu_1 - N}{p}} \right) E(S) + \\ + c |a|_{r^{\frac{3r-2}{r-2}}} F_1^{\frac{N(3r-2)}{r^2-2r}} E(0)^{\frac{2\mu_1 r(r-2) - N(3r-2)}{2r^2-4r}} E(S). \end{array} \right.$$

L'application du lemme 1.11 donne l'estimation désirée et ceci achève la démonstration du théorème 1.4.  $\diamond$

### 3. Démonstrations des théorèmes 1.7 et 1.8

Dans cette section, on aura besoin des notations supplémentaires

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega; |y'(x, t)| \leq 1\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega; |y'(x, t)| > 1\}.$$

Le lemme suivant simplifiera les démonstrations des théorèmes 1.7 et 1.8:

LEMME 3.1. (i). On a les inégalités

$$(3.1) \quad \int_{\Omega_1} a|y'|^2 dx \leq cE^{\frac{1}{2}}|E'|^{\frac{1}{r+1}}, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0$$

$$(3.2) \quad \left( \int_{\Omega_1} a^2 g(y')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c|E'|^{\frac{1}{r+1}}, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

$$(3.3) \quad \int_{\Omega_2} a|g(y')||\varphi| dx \leq c \left( \int_{\Omega_2} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |E'|^{\frac{s}{s+1}}, \quad \text{p.p tout } t \geq 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

(ii). Sous les hypothèses du théorème 1.7, on a

$$(3.4) \quad \int_{\Omega_2} a|y'|^2 dx \leq c|E'| \quad \text{pour presque tout } t \geq 0$$

$$(3.5) \quad \left( \int_{\Omega_2} a^2 g(y')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c|E'|^{\frac{1}{2}}, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

(iii). On suppose que les hypothèses du théorème 1.8 sont satisfaites. Alors, pour  $N \geq 2$ , on a

$$(3.6) \quad \int_{\Omega_2} a|y'|^2 dx \leq cF_1^{\frac{2(r-k)}{r+1}}|E'|^{\frac{2}{r+1}}, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0$$

et pour  $N = 1$ ,

$$(3.7) \quad \int_{\Omega_2} a|y'|^2 dx \leq cF_1^{1-k}|E'|, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

Maintenant, on pose  $\gamma_s = \|\nabla y\|_{L^\infty(0,\infty;L^{2s}(\Omega))}^{\frac{s}{s+1}}$ . On a pour  $N \geq 2$

$$(3.8) \quad \int_{\Omega_2} a|g(y')||\nabla y| dx \leq c\gamma_s E^{\frac{1}{2(s+1)}}|E'|^{\frac{s}{s+1}}, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

D'autre part, si  $N = 1$  et on pose  $\mu_s = F_1^{\frac{s-1}{s+1}}$ , alors, on a



$$(3.9) \quad \int_{\Omega_2} a|g(y')||\nabla y|dx \leq c\mu_s E^{\frac{1}{s+1}} |E'|^{\frac{s}{s+1}}, \quad \text{pour presque tout } t \geq 0.$$

*Remarque 3.1.* D'après (1.24) et le théorème d'injection de Sobolev, on a pour presque tout  $t \geq 0$

$$(3.10) \quad |\nabla y(t)|_{2s} \leq c\|y(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq cF_1$$

de sorte que  $\gamma_s$  est une quantité finie.

*Preuve du Lemme 3.1.* On a par (1.19) et l'inégalité de Hölder,

$$(3.11) \quad \int_{\Omega_1} a|y'|^2 dx \leq c|E|^{\frac{1}{2}} |E'|^{\frac{1}{r+1}}$$

et ceci établit (3.1). Les preuves de (3.2)-(3.5) découlent immédiatement de (1.19) et de l'inégalité de Hölder. Démontrons à présent (3.6). Soit  $\tau \in (0, 1)$ . D'après (1.19), on a

$$(3.12) \quad \int_{\Omega_2} a|y'|^2 dx \leq c \int_{\Omega_2} a|y'|^{2-\tau(k+1)} (y'g(y'))^\tau dx \leq c|y'|^{\frac{2-\tau(k+1)}{1-\tau}} |E'|^\tau.$$

Choisissant  $\tau = \frac{2}{r+1}$  dans (3.12) et utilisant le théorème d'injection de Sobolev, on trouve

$$(3.13) \quad \int_{\Omega_2} a|y'|^2 dx \leq c|\nabla y'|_2^{\frac{2(r-k)}{r+1}} |E'|^{\frac{2}{r+1}} \leq cF_1^{\frac{2(r-k)}{r+1}} |E'|^{\frac{2}{r+1}}$$

et (3.6) est démontrée. La preuve de (3.7) est plus simple; en effet, puisque pour  $N = 1$ ,  $H_0^1(\Omega)$  s'injecte dans  $L^\infty(\Omega)$ , on a

$$(3.14) \quad \begin{cases} \int_{\Omega_2} a|y'|^2 dx \leq c|y'|_\infty^{1-k} |E'| \leq \\ \leq cF_1^{1-k} |E'|. \end{cases}$$

Montrons qu'on a (3.8). Par l'inégalité de Hölder, on a pour presque tout  $t \geq 0$

$$(3.15) \quad \int_{\Omega_2} a|g(y')||\nabla y|dx \leq c|ag(y')|_{1+s-1} |\nabla y|_{s+1}.$$

D'autre part, on a l'inégalité d'interpolation

$$(3.16) \quad |\nabla y|_{s+1} \leq |\nabla y|_2^{\frac{1}{s+1}} |\nabla y|_{2s}^{\frac{s}{s+1}}.$$

Par conséquent, reportant (3.16) dans (3.15) et utilisant (1.19) ainsi que les définitions de  $E$ ,  $E'$  et  $\gamma_s$ , on obtient l'inégalité voulue. La preuve de (3.9) découle de l'estimation

$$(3.17) \quad \int_{\Omega_2} a|g(y')||\nabla y| dx \leq c\mu_s |ag(y')|_{1+s^{-1}} E^{\frac{1}{s+1}}, \quad \text{p.p tout } t \geq 0$$

et du théorème d'injection de Sobolev.  $\diamond$

*Démonstration du théorème 1.7.* Les étapes que l'on suit pour démontrer ce théorème sont les mêmes que celles de la démonstration du théorème 1.1. Nous les reprenons ici pour la commodité du lecteur.

*Étape 1.* Appliquant (1.31) avec  $\alpha = N - 1$ ,  $q(x) = m(x)$ ,  $\mu = \frac{r-1}{2}$ , remarquant que  $\text{div}(m) = N$  et utilisant (1.4), on trouve

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt = - \int_{\Omega} y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx E^{\frac{r-1}{2}} \Big|_S^T + \\ + \frac{r-1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx dt - \\ - \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} E^{\frac{r-1}{2}} dx dt + \\ + \int_{\Gamma \times ]S, T[} E^{\frac{r-1}{2}} (m \cdot \nu) \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Puisque l'énergie est décroissante, l'application du résultat de Komornik [12] montre que

$$(3.19) \quad \left| - \int_{\Omega} y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx E^{\frac{r-1}{2}} \Big|_S^T \right| \leq 4RE(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S)$$

et

$$(3.20) \quad \left| \frac{r-1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} dx dt \right| \leq (r-1)RE(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S).$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_{\Omega_2 \times ]S, T[} ag(y') \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} \left( \int_{\Omega_2} a^2 g(y')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

et

$$\left| \int_{\Omega_1 \times ]S, T[} ag(y') \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} \left( \int_{\Omega_1} a^2 g(y')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Par conséquent, utilisant (3.2) et (3.4) on trouve

$$(3.21) \quad \left| \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') \{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\} E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} (|E'|^{\frac{1}{r+1}} + |E'|^{\frac{1}{2}}) dt.$$

Utilisant à présent l'inégalité de Young, on obtient pour presque tout  $t \geq 0$

$$(3.22) \quad cE^{\frac{r}{2}} |E'|^{\frac{1}{r+1}} \leq \frac{r}{r+1} E + c|E'|, \quad cE^{\frac{r}{2}} |E'|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{r+1} E + cE(0)^{\frac{r-1}{2}} |E'|.$$

Reportant (3.22) dans (3.21) et combinant (3.18)-(3.21), on trouve

$$(3.23) \quad \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}})E(S) + c \int_{\Gamma_+ \times ]S, T[} E^{\frac{r-1}{2}} \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

A ce niveau, on remarque grâce au lemme 1.11, qu'il suffit d'obtenir une estimation judicieuse du dernier terme du membre de droite de (3.23) en fonction de  $E(S)$  et  $\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt$  pour achever la preuve du théorème 1.7.

*Étape 2.* Soit  $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$  telle que

$$(3.24) \quad h = \nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_+, \quad h \cdot \nu \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad h = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \hat{\omega}$$

où  $\hat{\omega}$  est un autre voisinage de  $\Gamma_+$  strictement inclus dans  $\omega$ .

Choisissons  $\alpha = 0$ ,  $q = h$  et  $\mu = \frac{r-1}{2}$  dans (1.31). D'après Zuazua [36], on sait qu'il existe une constante positive  $c_0$  dépendant uniquement de  $\omega$  telle que

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{c} \int_{\Gamma_+ \times ]S, T[} E^{\frac{r-1}{2}} \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq \bar{c} \int_{\Gamma \times ]S, T[} E^{\frac{r-1}{2}} (h \cdot \nu) \left( \frac{\partial y}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq \\ \leq c_0 \int_{\hat{\omega} \times ]S, T[} \{|y'|^2 + |\nabla y|^2\} E^{\frac{r-1}{2}} dx dt + 2\bar{c} \int_S^T y' h \cdot \nabla y dx E^{\frac{r-1}{2}} \Big]_S^T - \\ - (r-1)\bar{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' h \cdot \nabla y dx dt + 2\bar{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') h \cdot \nabla y E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \end{array} \right.$$

où  $\bar{c}$  est la constante dans (3.23).

Des calculs simples utilisant l'inégalité de Young montrent que

$$(3.26) \quad \left| 2\bar{c} \int_{\Omega} y' h \cdot \nabla y dx \left[ E^{\frac{r-1}{2}} \right]_S^T \right| \leq c E(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S)$$

et

$$(3.27) \quad \left| (r-1)\bar{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' h \cdot \nabla y dx dt \right| \leq c E(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S).$$

Utilisant l'inégalité de Hölder, (3.2) et (3.4) dans le dernier terme du membre de droite de (3.25), on trouve

$$(3.28) \quad \left| 2\bar{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') h \cdot \nabla y E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} (|E'|^{\frac{1}{r+1}} + |E'|^{\frac{1}{2}}) dt.$$

Il découle alors de (3.11) que

$$(3.29) \quad \left| 2\bar{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') h \cdot \nabla y E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq \frac{2r+1}{2r+2} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt + c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S).$$

Combinant (3.25), (3.26), (3.29) et reportant le résultat obtenu dans (3.23), on trouve

$$(3.30) \quad \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + c \int_{\hat{\omega} \times ]S, T[} \{|y'|^2 + |\nabla y|^2\} E^{\frac{r-1}{2}} dx dt.$$

L'utilisation de (3.1) et (3.4) dans (3.30) donne

$$(3.31) \quad \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + c \int_{\hat{\omega} \times ]S, T[} |\nabla y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt.$$

Grâce au lemme 1.11, il reste à se débarrasser du second terme du membre de droite de (3.31) pour terminer la preuve du théorème 1.7.

*Étape 3.* Introduisons la fonction  $\eta$  vérifiant

$$(3.32). \quad \eta \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta = 1 \quad \text{dans } \hat{\omega}, \quad \eta = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \omega.$$

Appliquant (1.32) avec  $\xi = \eta^2$ , (nous choisissons  $\xi = \eta^2$  au lieu de  $\xi = \eta$  comme dans [24, 25] ou [36, 37] pour rendre nos calculs plus faciles à comprendre) on trouve

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |\nabla y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt = - \int_{\Omega} y' \eta^2 y dx \left[ E^{\frac{r-1}{2}} \right]_S^T + \\ + \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |y'|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt + \frac{r-1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' y \eta^2 dx dt - \\ - 2 \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta y \nabla y \cdot \nabla \eta E^{\frac{r-1}{2}} dx dt - \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') \eta^2 y E^{\frac{r-1}{2}} dx dt. \end{array} \right.$$

Utilisant l'inégalité de Young, on vérifie sans peine que

$$(3.34) \quad \left| - \int_{\Omega} y' \eta^2 y dx E^{\frac{r-1}{2}} \right]_S^T + \frac{r-1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' \eta^2 dx dt \Big| \leq c E(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S)$$

et

$$(3.35) \quad \begin{cases} \left| 2 \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta y \nabla y \cdot \nabla \eta E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |\nabla y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt + \\ + 2c |\nabla \eta|_{\infty}^2 \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt. \end{cases}$$

D'autre part,  $\hat{c}$  désignant la constante dans (3.31), on a par (3.1), (3.2), (3.4) et (3.5)

$$(3.36) \quad 2\hat{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |y'|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + \frac{r}{2(r+1)} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt$$

et

$$(3.37) \quad \left| 2\hat{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') \eta^2 y E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + \frac{r+1}{2(r+1)} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt$$

Reportant (3.34)-(3.37) dans (3.33), on trouve

$$(3.38) \quad \begin{cases} \hat{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} \eta^2 |\nabla y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + \frac{2r+1}{2(r+1)} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt + \\ + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt. \end{cases}$$

Combinant (3.31) et (3.38), on obtient

$$(3.39) \quad \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + c \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt.$$

Pour éliminer le second terme du membre de droite de (3.39), on utilise la fonction  $z$  donnée par (2.37)-(2.39). Multiplions la première équation de (1.17) par  $z E^{\frac{r-1}{2}}$ , intégrons par parties sur  $\Omega \times ]S, T[$  et utilisons la deuxième inégalité de (2.39); on trouve alors

$$(3.40) \quad \begin{cases} \int_{\omega \times ]S, T[} |y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt = - \int_{\Omega} y' z dx E^{\frac{r-1}{2}} \Big]_S^T + \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-1}{2}} y' z' dx dt + \\ + \frac{r-1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' z dx dt - \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') z E^{\frac{r-1}{2}} dx dt. \end{cases}$$

Quelques calculs élémentaires donnent

$$(3.41) \quad \left| - \int_{\Omega} y' z dx E^{\frac{r-1}{2}} \right]_S^T + \frac{r-1}{2} \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-3}{2}} E' y' z dx dt \Big| \leq c E(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S).$$

Désignant par  $\tilde{c}$  la constante dans (3.39) et utilisant les inégalités de Hölder et Young ainsi que les relations (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) et (2.39), on obtient

$$(3.42) \quad \left\{ \begin{aligned} & \tilde{c} \left| \int_{\Omega \times ]S, T[} ag(y') z E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq \tilde{c} \left| \int_{\Omega_1 \times ]S, T[} ag(y') z E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| + \\ & + \tilde{c} \left| \int_{\Omega_2 \times ]S, T[} ag(y') z E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq c \int_S^T |E'|^{\frac{1}{r+1}} E^{\frac{r}{2}} dt + c \int_S^T |E'|^{\frac{1}{2}} E^{\frac{r}{2}} dt \leq \\ & \leq \frac{\beta^{\frac{r+1}{r}} r}{r+1} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt + c \int_S^T |E'| dt + \frac{1}{2} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt + \quad (\forall \beta > 0) \\ & + c \int_S^T |E'| E^{\frac{r-1}{2}} dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + \\ & + \frac{r+1}{2(r+1)} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt, \quad (\text{en prenant } \beta = (\frac{r+1}{4r})^{\frac{r}{r+1}}) \end{aligned} \right.$$

et

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{aligned} & \tilde{c} \left| \int_{\Omega \times ]S, T[} E^{\frac{r-1}{2}} y' z' dx dt \right| \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} \left( \int_{\Omega} a |y'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} \left( E^{\frac{1}{4}} |E'|^{\frac{1}{2(r+1)}} + |E'|^{\frac{1}{2}} \right) dt \leq \\ & \leq c \int_S^T E^{\frac{2r+1}{4}} |E'|^{\frac{1}{2(r+1)}} dt + c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} |E'|^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ & \leq \frac{2r+1}{2(r+1)} \varepsilon^{\frac{2r+2}{2r+1}} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt + c E(S) + \\ & + \frac{1}{4} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt + c E(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S) \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + \quad (\forall \varepsilon > 0) \\ & + \frac{2r+1}{4(r+1)} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt, \quad (\text{en prenant } \varepsilon = (\frac{r}{4r+2})^{\frac{2r+1}{2r+2}}). \end{aligned} \right.$$

Reportant (3.41)-(3.43) dans (3.40), on obtient

$$(3.44) \quad \tilde{c} \int_{\Omega \times ]S, T[} a |y|^2 E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}}) E(S) + \frac{4r+3}{4(r+1)} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt.$$

la combinaison de (3.39) et (3.44) donne

$$(3.45) \quad \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}})E(S).$$

Prenant alors la limite quand  $T$  tend vers l'infini et appliquant le lemme 1.11, on obtient (1.23); ce qui achève la démonstration du théorème 1.7.  $\diamond$

La démonstration du théorème 1.8 étant dans une grande mesure similaire à celle du théorème 1.7, nous en donnons juste une esquisse.

*Esquisse de la démonstration du Théorème 1.8.* Comme dans la démonstration du théorème 1.7, on a

$$(3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq cE(0)^{\frac{r-1}{2}} E(S) + \\ + \int_{\Omega \times ]S, T[} a|g(y')||2m \cdot \nabla y + (N-1)y|E^{\frac{r-1}{2}} dx dt + \\ + R \int_{\Gamma_+ \times ]S, T[} E^{\frac{r-1}{2}} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$(3.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{\Omega_1 \times ]S, T[} ag(y')\{2m \cdot \nabla y + (N-1)y\}E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \right| \leq \\ \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} |E'|^{\frac{1}{r+1}} dt, \quad (\text{par (3.2)}). \end{array} \right.$$

Esquissons à présent la preuve de (1.25). Utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$(3.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_{\Omega_2 \times ]S, T[} |ag(y')m \cdot \nabla y|E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \leq \\ \leq c\gamma_s \int_S^T E^{\frac{(r-1)(s+1)+1}{2(s+1)}} |E'|^{\frac{s}{s+1}} dt, \quad (\text{par (3.8)}) \\ (N-1) \int_{\Omega_2 \times ]S, T[} |ag(y')y|E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \leq c \int_S^T E^{\frac{r}{2}} |E'|^{\frac{s}{s+1}} dt, \quad (\text{par (3.3)}). \end{array} \right.$$

Utilisant l'inégalité de Young, on obtient pour presque tout  $t \geq 0$

$$(3.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} cE^{\frac{r}{2}} |E'|^{\frac{1}{r+1}} \leq \frac{r}{r+1} E + c|E'|, \quad cE^{\frac{r}{2}} |E'|^{\frac{s}{s+1}} \leq \frac{1}{r+1} E + cE(0)^{\frac{r-1}{2s}} |E'| \\ c\gamma_s E^{\frac{(r-1)(s+1)+1}{2(s+1)}} |E'|^{\frac{s}{s+1}} \leq \frac{1}{s+1} E^{\frac{r+1}{2}} + c\gamma_s^{1+s-1} E(0)^{\frac{s(r-1)-1}{2s}} |E'|. \end{array} \right.$$

Reportant (3.49) dans (3.48) et (3.47), et combinant (3.47), (3.48) et (3.46), on trouve

$$(3.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + \gamma_s^{1+s^{-1}} E(0)^{\frac{s(r-1)-1}{2s}} + E(0)^{\frac{s(r-1)}{2s}})E(S) + \\ + c \int_{\Gamma_{+\times}]S,T[} E^{\frac{r-1}{2}} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

A ce niveau, on procède comme dans la preuve du théorème 1.7 et finalement, on aboutit à

$$(3.51) \quad \int_S^\infty E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + F_1^{r-k} \gamma_s^{1+s^{-1}} E(0)^{\frac{s(r-1)-1}{2s}} + E(0)^{\frac{s(r-1)}{2s}})E(S), \quad \forall S \geq 0.$$

Utilisant (3.7) et appliquant le lemme 1.11, on trouve (1.25).

Démontrons (1.26) maintenant. On a (3.46), (3.47) et

$$(3.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_{\Omega_{2 \times}]S,T[} |ag(y')m \cdot \nabla y| E^{\frac{r-1}{2}} dx dt \leq \\ \leq c\mu_s \int_S^T E^{\frac{(r-1)(s+1)+2}{2(s+1)}} |E'|_{\frac{s}{s+1}} dt, \quad (\text{par (3.9)}). \end{array} \right.$$

L'utilisation de l'inégalité de Young donne pour tout  $t \geq 0$

$$(3.53) \quad c\mu_s E^{\frac{(r-1)(s+1)+2}{2(s+1)}} |E'|_{\frac{s}{s+1}} \leq \frac{1}{s+1} E^{\frac{r+1}{2}} + c\mu_s^{1+s^{-1}} E(0)^{\frac{(r-1)}{2}} |E'|.$$

Reportant (3.53) dans (3.52) et la première inégalité de (3.49) dans (3.47), et combinant (3.47), (3.52) et (3.46), on obtient

$$(3.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + E(0)^{\frac{r-1}{2}} + \mu_s^{1+s^{-1}} E(0)^{\frac{r-1}{2}})E(S) + \\ + c \int_{\Gamma_{+\times}]S,T[} E^{\frac{r-1}{2}} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

A ce niveau, on procède comme dans la preuve du théorème 1.7 et finalement, on aboutit à

$$(3.55) \quad \int_S^\infty E^{\frac{r+1}{2}} dt \leq c(1 + (1 + F_1^{1-k} + \mu_s^{1+s^{-1}})E(0)^{\frac{r-1}{2}} + E(0)^{\frac{s(r-1)}{2s}})E(S), \quad \forall S \geq 0.$$

Pour  $r > 1$ , on utilise la définition de  $\mu_s$  et on applique le lemme 1.11, ce qui donne la deuxième inégalité de (1.26). Quand  $r = 1$ , l'utilisation des techniques de [3] et [17] montre que

$$(3.56) \quad E(t) \leq c \exp(\delta) \exp(-\lambda t), \quad \forall t \geq 0$$

où  $c$  et  $\lambda$  sont des constantes positives indépendantes de  $F_1$  et  $E(0)$  et

$$\delta = c(1 + F_1^{1-k} + F_1^{1-s^{-1}} + E(0)^{\frac{s-1}{2s}})(1 + \ln(E(0))). \quad \diamond$$



## 4. Commentaires

Dans les résultats liés au cas d'amortissement linéaire, les estimations obtenues lorsque  $1/a \in L^p(\omega)$ , ( $p < \infty$ ), font intervenir des normes plus fortes de sorte que les résultats de décroissance de la solution de (1.3) semblent n'être valables que pour des données initiales très régulières. Pour des données initiales  $\{y^0, y^1\}$  prises dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , les seuls résultats de décroissance à notre connaissance sont obtenus en prenant  $a$  dans  $L_+^\infty(\Omega)$  et  $1/a$  dans  $L_+^\infty(\omega)$ . Une question naturelle est donc de savoir si en prenant la fonction  $a$  comme dans le théorème 1.4 et les données initiales dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , on peut obtenir une estimation de la décroissance vers zéro de la solution  $y$  de (1.3). Nous avons le résultat partiel suivant:

**THÉORÈME 4.1.** *Soit  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Soit  $\omega$  un voisinage de  $\Gamma_+$ . Supposons que  $a \in L^r(\Omega)$  avec*

$$(4.1) \quad \begin{cases} r > 2 & \text{si } N \in \{1, 2\}, \\ r \geq \frac{3N + \sqrt{9N^2 - 16N}}{4} & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$$

et  $a$  vérifie (1.1) avec

$$(4.2) \quad \begin{cases} p > 0 & \text{si } N \in \{1, 2\}, \\ p \geq N - 2 & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Si on pose  $G(t) = \|y'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |y(t)|_2^2$ , alors, pour  $N = 1$ , on a l'estimation

$$(4.3) \quad G(t) \leq L_0 t^{-\frac{1}{\mu_0}}, \quad \forall t > 0$$

avec

$$(4.4) \quad L_0 = \left[ c \left( 1 + |a^{-1}|_p + |a|_{\frac{r}{r-2}} \right) E(0)^{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 + 1}{\mu_0} \right) \right]^{\frac{1}{\mu_0}}.$$

Pour  $N \geq 2$ , on a l'estimation

$$(4.5) \quad G(t) \leq L_1 t^{-\frac{1}{\mu_1}}, \quad \forall t > 0$$

avec

$$(4.6) \quad L_1 = \left[ c \left( 1 + |a^{-1}|_p^2 + |a|_{\frac{3r-2}{r-2}} \right) E(0)^{\mu_1} \left( \frac{\mu_1 + 1}{\mu_1} \right) \right]^{\frac{1}{\mu_1}}.$$

Pour démontrer ce théorème, on considère la fonction  $u$  donnée par

$$(4.7) \quad u(x, t) = \int_0^t y(x, s) ds + \varphi$$

où  $\varphi$  vérifie

$$(4.8) \quad \begin{cases} -\Delta\varphi = -ay^0 - y^1 & \text{dans } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Puisque  $ay^0 + y^1 \in L^2(\Omega)$  et  $\Omega$  est de classe  $C^2$ , on sait que  $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . D'autre part, on vérifie que  $u$  est solution du système

$$(4.9) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + au' = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(0) = \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ u'(0) = y^0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On applique alors le théorème 1.4 à  $u$  et on utilise le fait que  $u' = y$  et  $y' = \Delta u - ay$  pour obtenir (4.3) et (4.5).

*Un modèle de plaques.* D'après les résultats de Zuazua [35], la méthode utilisée ci-dessus permet d'obtenir un taux de décroissance précis pour le système

$$(4.10) \quad \begin{cases} y'' + \Delta^2 y + ag(y') = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ y = \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in H_0^2(\Omega) \\ y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

avec  $a$  et  $g$  comme dans les sections précédentes. Plus précisément, si l'énergie de (4.10) est donnée par

$$(4.11) \quad E_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{|y'(x, t)|^2 + |\Delta y(x, t)|^2\} dx, \quad \forall t \geq 0$$

alors, appliquant la méthode employée dans les sections 2 et 3, on obtient le résultat suivant:

THÉORÈME 4.2. *On suppose que  $a \in L_+^\infty(\Omega)$  vérifie (1.2). Soit  $\omega$  un voisinage de  $\Gamma_+$ . On suppose que  $g$  vérifie (1.19) avec*

$$(4.12) \quad \begin{cases} k = 1, \\ s \geq 1 & \text{si } N \in \{1, 2\}, \\ (N-2)s \leq N+2 & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

*Alors, l'énergie  $E_1$  satisfait*

$$(4.13) \quad E_1(t) \leq \begin{cases} [\exp(\rho_1 - \frac{t}{\tau_2})] E_1(0), & \forall t \geq 0 & \text{si } r = 1, \\ K_3(1 + E(0)^{\frac{rs-1}{s(r-1)}})t^{-\frac{2}{r-1}}, & \forall t > 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

*où  $\tau_2$  et  $K_3$  sont des constantes positives indépendantes de  $E_1(0)$  et  $\rho_1$  est une constante positive dépendant de  $E_1(0)$  d'une manière précise.*

Nous tenons à préciser que pour se débarrasser des termes d'ordre inférieur gênants dans la situation présente, on utilise le problème auxiliaire

$$(4.14) \quad \begin{cases} \Delta^2 z = ay \text{ dans } \Omega \\ z = \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

*L'équation des ondes avec potentiel.* Considérons l'équation des ondes avec potentiel du type

$$(4.15) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + py + ag(y') = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \text{ dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où  $p \in L^m(\Omega)$ ,  $p \geq 0$  p.p dans  $\Omega$  et

$$(4.16) \quad \begin{cases} m = 2 \text{ si } N = 1 \\ m > N \text{ si } N \geq 2. \end{cases}$$

Pourvu que  $|p|_m$  soit suffisamment petite, des résultats analogues aux théorèmes 1.1, 1.2, 1.4, 1.7 et 1.8 peuvent être obtenus en utilisant la méthode ci-dessus.

*L'équation des ondes généralisée.* Dans cette sous-section, on utilise la convention de sommation sur les indices répétés et  $\partial_i$  désigne  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ . Considérons l'équation des ondes généralisée

$$(4.17) \quad \begin{cases} y'' - \partial_i(a_{ij}\partial_j y) + ag(y') = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où les coefficients  $a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$  satisfont

$$(4.18) \quad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \\ \exists m_0 > 0 : a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0\xi_i\xi_i, \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbf{R}^N, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

D'après Komornik [13], Lagnese [18] et Tcheugoué [30], on peut utiliser la méthode ci-dessus pour obtenir un taux de décroissance explicite pour l'énergie de (4.17) sous la condition restrictive

$$(4.19) \quad \left( a_{ij}(x) - 2m_k(x) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x) \right) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbf{R}^N, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

## 5. Liste des publications

- [I] Tcheugoué Tébou L.R., Sur la stabilisation de l'équation des ondes en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 585-588, 1994.
- [II] Tcheugoué Tébou L.R., On the stabilization of the wave and linear elasticity equations in 2-D, PanAmer. Math. J. 6(1996), 41-55.
- [III] Tcheugoué Tébou L.R., Saint Jean Paulin J., Contrôlabilité exacte interne dans des domaines perforés avec une condition aux limites de Fourier sur le bord des trous, Asymptotic Analysis 14(1997), 193-221.
- [IV] Tcheugoué Tébou L.R., Contrôle distribué de l'équation des ondes dans des domaines minces, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 31(1997), 871-890.
- [V] Tcheugoué Tébou L.R., Internal stabilization and exact controllability in thin cellular structures, Ricerche di Mat., Vol. XLV, (2)(1996), 457-490.
- [VI] Tcheugoué Tébou L.R., Contrôlabilité exacte interne des vibrations d'un corps mince, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I, p. 745-748, 1996.
- [VII] Tcheugoué Tébou L.R., On the decay estimates for the wave equation with a local degenerate or nondegenerate dissipation, Portugal. Math. 55(1998), 293-306.
- [VIII] Tcheugoué Tébou L.R., Estimations d'énergie pour l'équation des ondes avec un amortissement nonlinéaire localisé, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p. 1175-1179, 1997.
- [IX] Tcheugoué Tébou L.R., Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping. Journal of Differential Equations, 145(1998), 502-524.
- [X] Tcheugoué Tébou L.R., Well-posedness and energy decay estimates for the damped wave equation with  $L^r$  localizing coefficient. Commun. in P.D.E., 23(1998), 1839-1855.
- [XI] Tcheugoué Tébou L.R., Sur quelques résultats d'observabilité liés à l'équation des ondes perturbée. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 277-281, 1998.

## 6. Références bibliographiques

- [1] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization from the boundary, *SIAM J. Control and Opt.* 30(1992), 1024-1065.
- [2] H. Brezis , *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications* , Masson, Paris, 1983.
- [3] A. Carpio, Sharp estimates of the energy for the solutions of some dissipative second order evolution equations, *Potential Analysis* 1(1992), 265-289.
- [4] G. Chen, S.A. Fulling, F.J. Narcowich, S. Sun, Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping, *SIAM J. Appl. Math.* 51(1991), 266-301.
- [5] F. Conrad, B. Rao, Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, *Asymptotic Anal.* 7(1993), 159-177.
- [6] C.M. Dafermos, Asymptotic behavior of solutions of evolution equations, in "Non-linear evolution equations"(M.G. Crandall ed.), 103-123, Academic Press, New-York, 1978.
- [7] A. Haraux, Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs nonlinéaires, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978), No. 78010.
- [8] A. Haraux, Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978), No. 78011.
- [9] A. Haraux, Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations, *J. Differential Equations*, 59(1985), 145-154.
- [10] A. Haraux, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains, *Mathematical Reports*, edited by J. Dieudonné. Hardwood academic publishers (1987).
- [11] A. Haraux, Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps, *Portugal. Math.* 46(1989), 245-258.
- [12] V. Komornik, Contrôlabilité exacte en un temps minimal, *C. R. Acad. Paris, Sér I*, 304(1987), 223-225.
- [13] V. Komornik, Exact controllability in short time for the wave equation, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlinéaire* 6(1989), 153-164.
- [14] V. Komornik, On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation, *Chin. Ann. Math.*, 14B:2(1993), 153-164.

- [15] V. Komornik, Exact controllability and stabilization. The multiplier method, RAM, Masson & John Wiley, Paris, 1994.
- [16] V. Komornik, Decay estimates for the wave equation with internal damping, International Series of Num. Math. Birkhäuser Verlag Basel, 118(1994), 253-266.
- [17] S. Kouémou Patcheu, Stabilisation interne de certains systèmes distribués, Thèse, U.L.P, Strasbourg 1995.
- [18] J. Lagnese, Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, *S.I.A.M J. Control and Opt.*, 21 (1983), 968-984.
- [19] I. Lasiecka, D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, *Differential Integral Equations*, 6(1993), 507-533.
- [20] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. vol. 1 Dunod, Paris, 1968.
- [21] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauthier-villars, Paris, 1969.
- [22] J.L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués, vol. 1 et 2, RMA, Masson, Paris, 1988.
- [23] Nakao, M.- Energy decay for the wave equation with a degenerate dissipative term, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, A100(1985), 19-27.
- [24] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation, *Israel J. Math.* 95(1996), 25-42.
- [25] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, *Math. Ann.* 305(1996), 403-417.
- [26] A. Pazy, Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [27] B. Rao, Stabilisation d'une équation de plaque par contrôle frontière dynamique, C. R. Acad. Paris, Série I, 321(1995), 1449-1454.
- [28] A. Ruiz, Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential, *J. Math. Pures. Appl.*, 71(1992), 455-467.
- [29] M. Slemrod, Weak asymptotic decay via a "Relaxed invariance principle" for a wave equation with nonlinear, nonmonotone damping, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* 113(1989) no 1-2, 87-97
- [30] L.R. Tcheugoué Tébou, On the stabilization of the wave and linear elasticity equations in 2-D, *PanAmer. Math. J.* 6(1996), 41-55.

- [31] L.R. Tcheugoué Tébou, Estimations d'énergie pour l'équation des ondes avec un amortissement nonlinéaire localisé, *C. R. Acad. Paris, Série I*, 325(1997), 1175-1179.
- [32] L.R. Tcheugoué Tébou, On the decay estimates for the wave equation with a local degenerate or nondegenerate dissipation, *Portugal. Math.*, 55(1998), 293-306.
- [33] L.R. Tcheugoué Tébou, Well-posedness and energy decay estimates for the damped wave equation with  $L^r$  localizing coefficient, *Comm. in P.D.E.*, 23(1998), 1839-1855.
- [34] L.R. Tcheugoué Tébou, Sur quelques résultats d'observabilité liés à l'équation des ondes perturbée. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I, p. 277-281, 1998.
- [35] E. Zuazua, Exact controllability of distributed systems for arbitrarily small time, in "Proceedings of the 26<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles", 1987.
- [36] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Commun. in P.D.E.*, 15(1990), 205-235.
- [37] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains, *J. Math. Pures. Appl.*, 70(1991), 513-529.