# Exposants, réseaux de Levelt et relations de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers.

Eduardo Corel

22 juin 1999

# Table des matières

# Introduction

La notion d'exposants pour une équation ou un système différentiels linéaires caractérise l'ordre de croissance des solutions en un point singulier. L'objectif de cette thèse est d'obtenir un analogue de la relation de Fuchs (2) ci-dessous, pour un système différentiel d'ordre $n$

$$\frac{dX}{dz} \;=\; AX \tag{1}$$

méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, à singularités régulières.

Pour une équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}(z)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(z)y = 0$$

fuchsienne sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire à singularités régulières, la *relation de Fuchs* relie les exposants $e_1^s, \ldots, e_n^s$, à savoir les ordres maximaux de croissance de $n$ solutions indépendantes, en les points $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, par la formule

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \left( \sum_{i=1}^{n} e_i^s - \frac{n(n-1)}{2} \right) = -n(n-1). \tag{2}$$

Contrairement à d'autres problèmes d'évaluation d'invariants de systèmes, celui-ci ne peut se résoudre, même théoriquement, à l'aide du lemme du vecteur cyclique. Ce dernier permet de ramener tout système $dX/dz \;=\; AX$ au "système-compagnon" d'une équation différentielle *via* une transformation de jauge $A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}dP/dz$, correspondant au changement de fonction inconnue $X = PZ$. Mais il n'existe en général pas de vecteur cyclique dans la catégorie holomorphe, constituée des transformations qui ne modifient pas l'ordre de croissance des solutions.

Pour un système différentiel fixé, la bonne notion d'exposants en une singularité régulière $z = s$ a été définie par A. H. M. Levelt comme celle des ordres de croissance maximaux $e_1^s, \ldots, e_n^s$ d'un système fondamental de solutions du système (1) par rapport à une valuation convenable. Cette définition, qui sera rappelée au paragraphe 3.1.1, est de nature locale. Aussi nous placerons-nous au voisinage d'une singularité régulière, disons en $z = 0$.

Nous noterons $k = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine, et $R = \mathbb{C}\{z\}$ le sous-anneau des germes de fonctions holomorphes. Pour un anneau $S$, nous noterons $\mathrm{M}_n(S)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$, et $\mathrm{GL}_n(S)$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathrm{M}_n(S)$.

D'après des résultats classiques sur les systèmes sur $k$ à singularité régulière, il existe toujours un triplet $(\Omega, T, L)$ où

*i)* $\Omega \in \mathrm{M}_n(R)$,

*ii)* la matrice $T$ est diagonale et ses éléments diagonaux $T_i \in \mathbb{Z}$ vérifient $T_1 \geqslant \ldots \geqslant T_n$,

*iii)* la matrice $L \in M_n(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure, à éléments diagonaux $L_{ii}$ dans la bande $\{z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) \in [0,1[\}$,

tel que

$$\mathcal{Y} = \Omega(z) z^T z^L \tag{3}$$

soit une matrice fondamentale de solutions du système. Il faut remarquer que les matrices $\Omega$ ont un déterminant non identiquement nul, et induisent donc des transformations de jauge (méromorphes).

Supposons les exposants de Levelt ordonnés de telle sorte que la suite $(N_i)_{i=1,\dots,n}$ des parties entières de leurs parties réelles $\mathrm{Re}(e_i^0)$ soit décroissante. La définition de Levelt permet de choisir pour matrice $T$ la matrice $N$ des éléments $N_i$, et l'on a alors $N_i + L_{ii} = e_i^0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Cette écriture, connue sous le nom de *forme normale de Levelt* donne, à partir de la relation de Liouville $d(\det\mathcal{Y})/dz = (\mathrm{Tr}\,A)\det\mathcal{Y}$, et de l'égalité $(d\mathcal{Y}/dz)\mathcal{Y}^{-1} = A$, les équations

$$\mathrm{Tr}\,A = \frac{d}{dz}(\log \det\Omega) + \frac{\mathrm{Tr}\,N}{z} + \frac{\mathrm{Tr}\,L}{z} \tag{4}$$

$$A = \frac{d\Omega}{dz}\Omega^{-1} + \frac{1}{z}\Omega(N + z^N L z^{-N})\Omega^{-1}. \tag{5}$$

En prenant les résidus en 0, on déduit facilement de (4) la relation

$$\sum_{i=1}^n e_i^0 = \mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\,A - \mathrm{ord}_0 \det\Omega \tag{6}$$

où $\mathrm{ord}_0$ désigne l'ordre d'une fonction en $z = 0$. Ainsi l'ordre $\mathrm{ord}_0(\det\Omega)$ du déterminant de $\Omega$ en $z = 0$ mesure-t-il la différence entre la somme $\sum_{i=1}^n e_i^0$ des exposants et la somme des valeurs propres du résidu $A_{-1}$ de $A$. Comme $\Omega$ est une fonction holomorphe, on a $\mathrm{ord}_0\det\Omega \geqslant 0$, et c'est en appliquant le théorème des résidus sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ que Bolibrukh ([Bo3], prop. 1. 2. 3., p. 24) démontre l'inégalité

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \left( \sum_{i=1}^n e_i^s \right) \leqslant 0. \tag{7}$$

En remarquant que $N+z^N L z^{-N}$ est holomorphe en 0, on déduit de (5) que

$$\mathrm{ord}_0 \det\Omega + \mathrm{ord}_0 A + 1 \geqslant 0. \tag{8}$$

On voit ainsi que généraliser la relation de Fuchs revient à majorer la quantité $\mathrm{ord}_0\det\Omega$. Or, la démonstration de l'existence de formes normales de Levelt ne permet pas *a priori* de le faire.

La situation se simplifie considérablement dans le cas particulier où la matrice $A$ admet un pôle simple. Si la matrice $A$ s'écrit $A(z) = A_{-1}z^{-1} + A_0 + A_1 z + \dots$, Gantmacher montre qu'il existe une matrice fondamentale de solutions de la forme (3) où $\Omega(0)$ est *inversible*, et que nous appellerons *forme normale de Gantmacher.* Nous sommes dans la situation favorable où la matrice $\Omega$ admet un inverse holomorphe. On déduit de (5), que les nombres $N_i + L_{ii}$ sont alors égaux aux valeurs propres de la matrice $A_{-1}$. La définition de Levelt est compatible ici avec la construction de Gantmacher, en ce sens que les $N_i + L_{ii}$ de Gantmacher sont égaux aux exposants $e_i^0$. Mais on ne sait pas si l'on a mis en évidence la même matrice $\Omega$. Ici, cela ne pose pas de problème, puisque, pour toutes les formes normales, on a $\mathrm{ord}_0\det\Omega = 0$. C'est ainsi que, pour un système n'ayant que des pôles simples (y compris à l'infini), Bolibrukh démontre l'égalité

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \left( \sum_{i=1}^{n} e_i^s \right) = 0$$

(*cf.* [Bo3], prop. 1. 2. 3., p. 24). Les exposants sont alors définis algébriquement, et le polynôme $\det(A_{-1} - \lambda I)$ permet de les calculer. En revanche, si l'on n'a pas un pôle simple, il est nécessaire de comparer les jauges $\Omega$ pour obtenir une relation entre les exposants.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude des réseaux des $k$-espaces vectoriels à connexion qui constituent le cadre naturel pour cette étude. On introduit le langage des connexions ainsi que divers invariants sous l'action du groupe $\mathrm{GL}_n(R)$.

Nous interprétons ensuite les décompositions (3) dans le cadre algébrique introduit ci-dessus. Nous montrons que la notion d'exposants relève naturellement de la notion de réseau.

Un calcul simple montre que les exposants associés à un système *à pôle simple* (qui sont les valeurs propres du résidu) sont invariants sous $\mathrm{GL}_n(R)$, c'est-à-dire qu'ils sont bien définis, pour une connexion régulière, par rapport à un réseau stable. On montre de même que le nombre $-\mathrm{ord}_0 A - 1$ est un invariant de la connexion sous l'action $\mathrm{GL}_n(R)$. On appelle *rang de Poincaré* de la connexion pour le réseau considéré, le nombre $\sup(0, -\mathrm{ord}_0 A - 1)$. La trace du résidu de la matrice $A$ est elle aussi invariante, et les équations (6), (8) suggèrent qu'il doit en être de même pour $\mathrm{ord}_0\det\Omega$.

À un système qui n'est pas à pôle simple, une forme normale de Levelt permet d'associer un système à pôle simple de matrice

$$A_{[\Omega]} = \Omega^{-1}A\Omega - \Omega^{-1}\frac{d\Omega}{dz} = \frac{1}{z}(N + z^N L z^{-N}),$$

et donc des exposants. Nous montrons que toutes les formes normales de Levelt d'un système donné fournissent les mêmes exposants, car elles lui associent des systèmes à pôle simple équivalents sous $\mathrm{GL}_n(R)$, c'est-à-dire un réseau stable. Nous montrons enfin que les réseaux stables associés à deux systèmes équivalents sous $\mathrm{GL}_n(R)$ sont égaux.

Il en résulte que la notion d'exposants d'une connexion est définie par rapport à un réseau quelconque, tout simplement comme celle d'exposants du réseau stable associé. Ces résultats nous amènent à définir le *réseau de Levelt* auquel est consacré le chapitre 2 :

**Définition 2.1.** *Soient $(V, \nabla)$ un $k$-espace vectoriel muni d'une connexion régulière, et $M$ un réseau de $V$. On appelle* réseau de Levelt *associé à $M$, et l'on note $M_L$, le plus grand réseau stable de $V$ contenu dans $M$.*

Ce réseau est bien défini, et il "résume" toutes les formes normales de Levelt. En effet, pour toute base $(e)$ du réseau $M$, toute forme normale de Levelt du système associé à $(e)$ fournit une jauge $\Omega$ qui transforme la base $(e)$ en une base de $M_L$. Réciproquement, pour toute forme normale de Gantmacher $\mathcal{Y} = \Omega(z)z^T z^L$ dans une base $(e)$ de $M_L$, et toute jauge $W$ associant à une base de $M$ la base $(e)$ de $M_L$, la matrice fondamentale $(W(z)\Omega(z))z^T z^L$ est écrite en forme normale de Levelt. De plus, on obtient de cette manière toutes les formes normales de Levelt à partir des formes normales de Gantmacher sur $M_L$.

Le nombre $\mathrm{ord}_0 \det \Omega$ s'interprète alors comme un *indice* $[M : M_L]$ du réseau de Levelt dans le réseau de départ, et c'est l'indice minimal parmi ceux de tous les réseaux stables. La différence entre le résidu $\mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A$ de $A$ dans une base quelconque du réseau et la somme des exposants correspondants est donc la plus petite possible. Plus précisément, en utilisant les propriétés algébriques des notions introduites ci-dessus, nous établissons que les réseaux de Levelt vérifient la propriété suivante.

**Corollaire 2.6.** *Soient $(V, \nabla)$ un $k$-espace vectoriel à connexion régulière, $M$ un réseau de $V$, et $r$ le rang de Poincaré de $\nabla$ pour le réseau $M$. Soit $M_L$ le réseau de Levelt associé à $M$. L'indice du réseau de Levelt $M_L$ dans $M$ vérifie les inégalités*

$$r \leqslant [M : M_L] \leqslant \frac{n(n-1)}{2} r.$$

En appliquant le théorème des résidus, on déduit de (6) la généralisation de la relation de Fuchs que nous recherchions et qui conclut le chapitre 2.

On introduit à cette occasion la quantité

$$h(A) = \sum_{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sup(0, -\mathrm{ord}_a A\,dz - 1),$$

qui mesure de combien le système s'écarte du cas globalement à pôle simple, dit *fuchsien* dans [Bo3], et nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème 2.12 (Relation de Fuchs globale).** *Soit $dX/dz = AX$ un système différentiel à singularités régulières sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et soient $e_1^s, \dots, e_n^s$ les exposants de Levelt associés en les points $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors*

$$-\frac{n(n-1)}{2} h(A) \leqslant \sum_{s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sum_{i=1}^{n} e_i^s \leqslant -h(A)$$

L'inégalité de droite ci-dessus précise l'inégalité (7) de Bolibrukh. Si le système est fuchsien, on a $h(A) = 0$, et l'on retrouve *l'égalité* de Bolibrukh rappelée plus haut.

Le chapitre 3 est consacré à diverses comparaisons entre les résultats précédemment établis sur les exposants et les formes normales, ainsi qu'avec d'autres réseaux canoniques existant dans la littérature (réseau saturé de Gérard et Levelt, réseau de Deligne). Nous montrons en particulier le résultat suivant.

**Théorème 3.1.** *Les exposants de Levelt sont les valeurs propres du résidu de la connexion pour le réseau de Levelt associé.*

Ce théorème peut être vu comme une nouvelle définition, purement algébrique, des exposants de Levelt. Il permet de généraliser cette notion au cas formellement régulier, défini en remplaçant dans ce qui précède le corps $k$ par le corps $K = \mathbb{C}((z))$ des séries formelles méromorphes en 0, et de définir les exposants indépendamment de questions de convergence ou d'ordre de croissance.

Ce formalisme se prête bien également à l'étude des constructions tensorielles d'un espace vectoriel à connexion $(V, \nabla)$ donné, qui sont traitées dans le chapitre 4. Pour toute construction $C(V)$ de $V$, (obtenue par application finie des opérations de dualité, de quotient, et de produits, tensoriel, extérieur ou symétrique), il existe une connexion canonique $C(\nabla)$ induite par $\nabla$ sur $C(V)$, et si $\nabla$ est une connexion régulière, toute construction $C(\nabla)$ est encore régulière. On peut donc définir le réseau de Levelt de la construction $C(M)$, où $M$ est un réseau de $V$. Comme la stabilité est conservée par constructions, la propriété de maximalité du réseau de Levelt entraîne que

$$C(M)_L \supset C(M_L). \tag{9}$$

Pour le dual de l'espace à connexion $(V, \nabla)$ cela conduit à introduire le plus *petit* réseau stable $M^L$ *contenant* $M$ que nous appelons "co-réseau de

Levelt". Nous démontrons que le réseau de Levelt $(M^*)_L$ associé au réseau dual $M^*$ de $M$ est le dual $(M^L)^*$ du co-réseau $M^L$ de $M$.

Pour les autres constructions, la relation (9) permet même, en général, d'affiner la majoration obtenue par la proposition 2.6. Ainsi, pour la construction End(V) $= V \otimes V^*$ appliquée à la connexion $\nabla$ de rang de Poincaré $r$ sur le réseau $M$, nous obtenons l'inégalité

$$[\mathrm{End}(M) : \mathrm{End}(M)_L] \leqslant n^2(n-1)r.$$

Nous développons enfin en Appendice un algorithme qui applique les résultats relatifs au réseau saturé de Gérard et Levelt des chapitres 3 et 4, et nous obtenons des résultats numériques sur les exposants par l'exécution de cette procédure sur le logiciel MAPLE de calcul formel.

# Chapitre 1

# Réseaux des espaces vectoriels à connexion

Soit $K = \mathbb{C}((z))$ le corps des séries méromorphes formelles, muni de la dérivation $\theta = zd/dz$, soient $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ l'anneau de valuation de $K$ pour la valuation $z$-adique $v$, et $\Omega^1_{K|\mathbb{C}}$ le $K$-espace vectoriel des 1-formes différentielles sur $\mathbb{C}$. Soit $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$ muni d'une connexion, c'est-à-dire d'une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla : V \longrightarrow V \otimes_K \Omega^1_{K|\mathbb{C}}$$

vérifiant, pour tout $f \in K$ et tout $v \in V$, l'identité de Leibniz

$$\nabla(fv) = v \otimes df + f\nabla v.$$

Le $K$-dual de $\Omega^1_{K|\mathbb{C}}$ est le $K$-espace vectoriel $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ des $\mathbb{C}$-dérivations de $K$. Il est de dimension 1, et la valuation $v$ s'étend à $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ en posant $v(\partial) = v(f)$ pour tout élément $\partial = f\frac{d}{dz}$ de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$. Pour toute dérivation $\partial \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$, on note $\nabla_\partial$ la composée de $\nabla$ avec

$$\begin{array}{rcl} V \otimes_K \Omega^1_{K|\mathbb{C}} & \longrightarrow & V \\ v \otimes \omega & \longmapsto & \omega(\partial)v \end{array}$$

L'application $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla_\partial$ de $V$ dans $V$ s'appelle *dérivée covariante le long de la dérivation* $\partial$ et vérifie pour tout $f \in K$ et tout $v \in V$

$$\nabla_\partial(fv) = \partial(f)v + f\nabla_\partial(v).$$

On dit qu'un vecteur $v$ est *horizontal* pour la connexion $\nabla$ si $\nabla(v) = 0$.

Pour une base $(e)$ de $V$, on note $e_i$ le $i$-ème vecteur de $(e)$ et $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ l'écriture de $v \in V$ dans la base $(e)$. On a alors

$$\nabla_\partial(v) = \sum_{i=1}^n \partial(x_i)e_i + \sum_{i=1}^n x_i \nabla_\partial(e_i).$$

Soit $A = (A_{ij})$ la matrice, notée également $\mathrm{Mat}(\nabla_\partial, (e))$, définie par la formule

$$\nabla_\partial(e_j) = -\sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i \tag{1.1}$$

pour $j = 1, \ldots, n$. Si $v \in V$ est représenté dans la base $(e)$ par la matrice-colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le vecteur $\nabla_\partial(v)$ est représenté par la matrice-colonne $\partial X - AX$. Résoudre un système $\partial X = AX$ revient à chercher les vecteurs horizontaux pour une connexion associée.

Pour une autre base $(\varepsilon)$ de $V$ dans laquelle le vecteur $v$ a pour coordonnées $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$, le changement de base de matrice $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ de $(e)$ vers $(\varepsilon)$ donne lieu au changement de coordonnées $X = PY$. Le même vecteur $\nabla_\partial(v)$ est alors représenté dans $(\varepsilon)$ par $\partial Y - A_{[P]}Y$, où la matrice $A_{[P]}$ est donnée par la transformation dite *de jauge* :

$$A_{[P]} = P^{-1}AP - P^{-1}\partial(P). \tag{1.2}$$

**Définition 1.1.** *On appelle* réseau *de $V$ un $\mathcal{O}$-module $M$ engendré par une base de $V$. Si $(e)$ est une base de $V$, on note $\mathcal{R}(e)$ le réseau engendré par $(e)$.*

Nous rappelons la définition suivante (voir [G-L], p. 164).

**Définition 1.2.** *On dit que la connexion $\nabla$ est* régulière *s'il existe un réseau stable sous l'action de $\nabla_\theta$.*

**Lemme 1.1.** *Un réseau $\Lambda$ de $V$ est stable sous l'action de $\nabla_\theta$ si et seulement s'il existe une $\mathcal{O}$-base $(e)$ de $\Lambda$ telle que la matrice $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (e))$ soit à coefficients dans $\mathcal{O}$. Cette propriété est alors vraie pour toute base de $\Lambda$.*

*Démonstration* : Comme l'anneau $\mathcal{O}$ est stable par $\theta$, la propriété du lemme découle de la formule (1.1). Cette condition ne dépend pas de la $\mathcal{O}$-base de $\Lambda$ choisie. En effet, si $(\varepsilon)$ est une autre base de $V$, le réseau $\mathcal{R}(e)$ engendré par $(e)$ coïncide avec le réseau $\mathcal{R}(\varepsilon)$ si et seulement si la matrice de passage $P$ de $(e)$ à $(\varepsilon)$ est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. D'après (1.2), si $A \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$, on a bien $A_{[P]} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$.
$\diamondsuit$

## 1.1 Valuation associée à un réseau

Pour tout réseau $\Lambda$ de $V$ on définit une valuation $v_\Lambda$ sur l'espace vectoriel $V$, en posant pour tout $x \in V$

$$v_\Lambda(x) = \sup\{k \in \mathbb{Z},\ x \in z^k \Lambda\}.$$

Pour tout réseau $M$ de $V$ et plus généralement pour toute partie non vide $M$ d'un réseau, on pose

$$v_\Lambda(M) = \inf_{x \in M} v_\Lambda(x),$$

en convenant que $v_\Lambda(M) = \infty$ si $M = (0)$.

On établit facilement le lemme suivant (voir [G-L], p. 189 et suiv.).

**Lemme 1.2.** *Soit $\Lambda$ un réseau de $V$.*

1. *Pour tout $x \in V$, et toute $\mathcal{O}$-base $(e)$ de $\Lambda$, soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ l'écriture en coordonnées de $x$ dans $(e)$. On a alors*

$$v_\Lambda(x) = \min_{i=1,\dots,n} v(x_i).$$

2. *Pour tout réseau $M$ de $V$, et toute famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ de $V$ engendrant le réseau $M$ sur $\mathcal{O}$, on a*

$$v_\Lambda(M) = \min_{i=1,\dots,m} v_\Lambda(\varepsilon_i).$$

*La valuation $v_\Lambda(M)$ est égale à l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z^{-k}M \subset \Lambda$ et $z^{-k-1}M \not\subset \Lambda$.*

**Définition 1.3.** *Un réseau $M$ de $V$ est dit* $\Lambda$-centré *si $v_\Lambda(M) = 0$.*

**Lemme 1.3 (Propriétés de $v_\Lambda$).** *Pour tout $x, \tilde{x} \in V$ et tout $\alpha \in K$, on a*

*i)* $v_\Lambda(x) \geqslant 0$ *si et seulement si* $x \in \Lambda$.

*ii)* $v_\Lambda(\alpha x) = v(\alpha) + v_\Lambda(x)$

*iii)* $v_\Lambda(x + \tilde{x}) \geqslant \min(v_\Lambda(x), v_\Lambda(\tilde{x}))$.

*Pour tous réseaux $M$ et $\tilde{M}$ de $V$, on a*

*iv)* $v_\Lambda(M) \geqslant 0$ *si et seulement si* $M \subset \Lambda$

*v)* $v_\Lambda(\tilde{M}) \leqslant v_\Lambda(M)$ *si* $M \subset \tilde{M}$

*vi)* $v_\Lambda(M + \tilde{M}) = \min(v_\Lambda(M), v_\Lambda(\tilde{M}))$.

*Démonstration :*

*i) ii), iv)* et *v)* sont des conséquences directes de la définition de $v_\Lambda$.

*iii)* Le réseau $z^k\Lambda$ est stable pour l'addition. On a par conséquent

$$\begin{aligned}\min(v_\Lambda(x), v_\Lambda(\tilde{x})) &= \sup\{k \in \mathbb{Z}/\ x \in z^k\Lambda \text{ et } \tilde{x} \in z^k\Lambda\}\\ &\leqslant \sup\{k \in \mathbb{Z}\ /\ x+\tilde{x} \in z^k\Lambda\} = v_\Lambda(x+\tilde{x}).\end{aligned}$$

*vi)* Par *iii)*, on a $v_\Lambda(M+\tilde{M}) \geqslant \min(v_\Lambda(M), v_\Lambda(\tilde{M}))$. D'autre part, comme $M \subset M+\tilde{M}$ et $\tilde{M} \subset M+\tilde{M}$, on déduit de *v)* que

$$v_\Lambda(M+\tilde{M}) \leqslant \min(v_\Lambda(M), v_\Lambda(\tilde{M})).$$

$\diamondsuit$

## 1.2 L'indice projectif

La puissance extérieure maximale $\bigwedge^n V$ de $V$ est un $K$-espace vectoriel de dimension 1. Pour tout réseau $M$ de $V$, le $\mathcal{O}$-module $\bigwedge^n M$ est un réseau de $\bigwedge^n V$. Si $(\varepsilon)$ désigne une $\mathcal{O}$-base de $M$, le $\mathcal{O}$-module $\bigwedge^n M$, de rang 1, est engendré par $\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n$. En particulier, si $M$ est contenu dans $\tilde{M}$, on a $\bigwedge^n M \subset \bigwedge^n \tilde{M}$.

**Définition 1.4.** *Etant donnés deux réseaux $\Lambda$ et $M$ de $V$, on appelle* indice projectif de $M$ dans $\Lambda$ *l'entier*

$$[\Lambda : M] = v_{\bigwedge^n \Lambda}(\bigwedge^n M) - n v_\Lambda(M).$$

Pour le calcul de $[\Lambda : M]$, il suffit de se donner $\varphi \in \mathrm{Aut}_K(V)$ tel que $\varphi(\Lambda) = M$, et une base $(e)$ de $\Lambda$. On a alors

$$\begin{aligned} v_{\bigwedge^n \Lambda}(\bigwedge^n M) &= v(\det_{(e)}\varphi)\\ \text{et } v_\Lambda(M) &= \min_{i=1,\ldots,n} v_\Lambda(\varphi(e_i)).\end{aligned}$$

Avec les notations précédentes, on a alors le résultat suivant.

**Lemme 1.4.** *Soit $P = (P_{ij})$ la matrice de $\varphi$ dans $(e)$. En posant $v(P) = \min_{1\leqslant i,j\leqslant n} v(P_{ij})$, on a*

$$[\Lambda : M] = v(\det P) - n v(P).$$

**Remarque 1.1.** On appelle $[\Lambda : M]$ indice *projectif* car, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$[\Lambda : z^k M] = [\Lambda : M].$$

Pour simplifier la rédaction, nous dirons seulement "indice" lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

Comme $v_\Lambda(z^{-v_\Lambda(M)}M) = 0$, il existe dans toute classe d'homothétie de réseaux un réseau de valuation nulle dans $\Lambda$. On notera $\mathcal{N}_\Lambda(M) = z^{-v_\Lambda(M)}M$ le réseau "recentré" de $M$ par rapport à $\Lambda$.

**Notations 1.5.** *On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des réseaux de $V$, $\mathcal{L}_\theta$ celui des réseaux $\nabla_\theta$-stables et $\mathcal{L}^\Lambda$ l'ensemble des réseaux $\Lambda$-centrés.*

## 1.3 Diviseurs élémentaires dans un réseau

On peut d'après la remarque 1.1 calculer l'indice de tout réseau $M$ dans un réseau donné $\Lambda$ à partir de n'importe quel réseau homothétique à $M$. Par le théorème des diviseurs élémentaires dans l'anneau principal $\mathcal{O}$, on sait que si $M \subset \Lambda$, il existe une unique suite croissante d'entiers $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n$ et une base $(e)$ de $\Lambda$ telles que $(z^{k_1}e_1, \ldots, z^{k_n}e_n)$ soit une base de $M$.

Si $M$ est un réseau quelconque, on a $z^{-v_\Lambda(M)}M \subset \Lambda$, et $M$ admet donc toujours une base de la forme ci-dessus.

**Définition 1.6.** *Soient $\Lambda$ et $M$ deux réseaux de $V$.*

1. *On appelle (abusivement)* diviseurs élémentaires de $M$ dans $\Lambda$ *les nombres $k_1 = l_1 + v_\Lambda(M), \ldots, k_n = l_n + v_\Lambda(M)$ où $z^{l_1}, \ldots, z^{l_n}$ sont les diviseurs élémentaires au sens usuel de $z^{-v_\Lambda(M)}M$ dans $\Lambda$.*

2. *On appelle* base de Smith de $\Lambda$ pour $M$ *toute base $(e)$ de $\Lambda$ telle que $(z^{k_1}e_1, \ldots, z^{k_n}e_n)$ soit une base de $M$.*

3. *On appelle* multiplicité d'un diviseur élémentaire $k_i$ *le nombre $m(k_i)$ d'indices $j$ tels que $k_j = k_i$. On posera $m(l) = 0$ si $l$ n'est pas un diviseur élémentaire de $M$ dans $\Lambda$.*

Avec les notations ci-dessus, l'indice est donné par la formule

$$[\Lambda : M] = \sum_{i=1}^{n} (k_i - k_1). \tag{1.3}$$

Nous écrirons les diviseurs élémentaires sous la forme $k_{1,\Lambda}(M), \ldots, k_{n,\Lambda}(M)$ pour préciser si nécessaire les réseaux concernés, et on posera alors

$$\overline{k}_\Lambda(M) \ = \ (k_{1,\Lambda}(M), \ldots, k_{n,\Lambda}(M)).$$

**Remarque 1.2.** Par le lemme 1.2, il est clair que $k_{1,\Lambda}(M) = v_\Lambda(M)$. On en déduit que le réseau $M$ est inclus dans $\Lambda$ si et seulement si $k_1 \geqslant 0$, et l'on peut alors considérer le quotient $\Lambda/M$.

**Lemme 1.5.** *Soit $M$ un réseau de $V$ inclus dans $\Lambda$. Le $\mathcal{O}$-module de torsion $\Lambda/M$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension* finie*.*

*Démonstration* : C'est une conséquence de [Bou], $n°$ 7, §4, p. 258.
$\diamondsuit$

**Remarque 1.3.** On peut voir que si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de Smith de $\Lambda$ pour $M$, et $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n$ les diviseurs élémentaires de $M$ dans $\Lambda$, alors $(\overline{e_1}, z\overline{e_1}, \ldots, z^{k_1-1}\overline{e_1}, \overline{e_2}, z\overline{e_2}, \ldots, z^{k_2-1}\overline{e_2}, \ldots, z^{k_n-1}\overline{e_n})$ est une $\mathbb{C}$-base de $\Lambda/M$, où $\overline{e_k}$ désigne la classe de $e_k$ modulo $M$, pour tout $k = 1, \ldots, n$.

**Remarque 1.4.** Le réseau $M$ est $\Lambda$-centré si et seulement si $k_1 = 0$.

Nous ramènerons souvent un réseau à son représentant $\Lambda$-centré. Donnons quelques définitions et résultats propres à cette classe de réseaux.

**Lemme 1.6.** *Soit $M$ un réseau $\Lambda$-centré de $V$. L'indice projectif de $M$ dans $\Lambda$ vérifie*

$$[\Lambda : M] = \dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/M).$$

C'est une conséquence de la remarque 1.3. On peut alors établir que l'indice décroît sur $\mathcal{L}^{\Lambda}$.

**Lemme 1.7.** *Soient $M$ et $N$ deux réseaux de $V$ supposés $\Lambda$-centrés. Si $N \subset M$, on a*

$$[\Lambda : M] \leqslant [\Lambda : N].$$

*Démonstration* : Par l'isomorphisme canonique

$$\Lambda/M \simeq (\Lambda/N)/(M/N),$$

on a clairement

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/M) = \dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/N) - \dim_{\mathbb{C}}(M/N).$$

$\diamondsuit$

### 1.3.1 Rang d'un réseau

**Définition 1.7.** *On appelle* rang de $M$ dans $\Lambda$, *et on note $\mu_\Lambda(M)$, le nombre de diviseurs élémentaires nuls de $M$ dans $\Lambda$.*

**Proposition 1.1.** *Soit $M$ un réseau $\Lambda$-centré. Pour tout automorphisme $\varphi$ de $V$ tel que $\varphi(\Lambda) = M$, on a*

$$\mu_\Lambda(M) = \mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\overline{\varphi})$$

*où $\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(\overline{\varphi})$ désigne le rang de l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\overline{\varphi}$, induite par $\varphi$ sur $\Lambda/z\Lambda$.*

*Démonstration* : Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}_K(V)$ tel que $\varphi(\Lambda) = M$. Dans toute base $(e)$ de $\Lambda$, la matrice $P$ de $\varphi$ admet le développement $P = P_0 + P_1 z + \dots$, où les $P_i$ sont des matrices constantes. Le théorème des diviseurs élémentaires entraîne l'existence de deux matrices carrées $Q$ et $R$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, telles que $QPR = \mathrm{diag}(z^{k_{1,\Lambda}(M)}, \dots, z^{k_{n,\Lambda}(M)})$. Le nombre de diviseurs élémentaires nuls de $M$ dans $\Lambda$ est donc égal au rang de la matrice $P_0$. Si l'image de $\Lambda$ par un $K$-automorphisme $\varphi$ de $V$ est un réseau $\Lambda$-centré, on peut considérer $\varphi$ comme une application $\mathcal{O}$-linéaire de $\Lambda$ dans le sous-$\mathcal{O}$-module $M = \varphi(\Lambda)$ de $\Lambda$. Pour calculer le rang $\mu_\Lambda(M)$, il suffit alors de considérer le "terme constant" de cette application. Plus précisément, comme $z\Lambda$ est un réseau inclus dans $\Lambda$, on déduit du lemme 1.6 que le quotient $\Lambda/z\Lambda$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$, puisque ses diviseurs élémentaires sont $(1, \dots, 1)$. Comme on a l'inclusion

$$\varphi(z\Lambda) = z\varphi(\Lambda) = zM \subset z\Lambda$$

l'application $\varphi$ induit une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\overline{\varphi} : \Lambda/z\Lambda \longrightarrow \Lambda/z\Lambda$$

dont la matrice dans la base $\overline{(e)}$, image de $(e)$ dans $\Lambda/z\Lambda$, est précisément $P_0$.
$\diamondsuit$

**Corollaire 1.2.** *Soient $N \subset M$ deux réseaux $\Lambda$-centrés. Les rangs de $M$ et $N$ dans $\Lambda$ vérifient*

$$\mu_\Lambda(N) \leqslant \mu_\Lambda(M).$$

*Démonstration* : Soient $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}_K(V)$ tels que $\varphi(\Lambda) = M$ et $\psi(\Lambda) = N$. Comme $N = \psi(\Lambda) \subset \varphi(\Lambda) = M$, on en déduit que

$$\overline{\psi}(\Lambda) \subset \overline{\varphi}(\Lambda),$$

et on applique la proposition 1.1.
$\diamondsuit$

## 1.4 Calcul des diviseurs élémentaires et de leurs multiplicités

Nous utilisons ici le rang $\mu_\Lambda(M)$ pour déterminer les diviseurs élémentaires d'un réseau $M$ dans un réseau de référence $\Lambda$, ainsi que leur multiplicité. Soit $M$ un réseau $\Lambda$-centré. Pour tout entier $k$, les $\mathcal{O}$-modules $z^k\Lambda$ et $M \cap z^k\Lambda$ sont encore des réseaux, et la fonction

$$\begin{array}{rcl} \xi_M : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & \mu_{z^k\Lambda}(M \cap z^k\Lambda) \end{array}$$

est bien définie.

**Proposition 1.3.** *Pour tout réseau $\Lambda$-centré $M$, la fonction $\xi_M$ vérifie les propriétés suivantes :*

*i)* *$\xi_M$ est croissante et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

*ii)* *Si $\xi_M(k-1) < \xi_M(k)$, alors $k$ est un diviseur élémentaire de $M$ dans $\Lambda$.*

*iii)* *Avec les notations de la définition 1.6, si l'on note $m(\ell)$ la multiplicité d'un diviseur élémentaire $\ell$ on a*

$$\xi_M(k) = \sum_{\ell \leqslant k} m(\ell)$$

*Démonstration* : Soit $(e)$ une base de Smith de $\Lambda$ pour $M$. Il existe une base de $M$ représentée dans $(e)$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} I_{\mu_0} & & & 0 \\ & z^{k_1} I_{\mu_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{k_s} I_{\mu_s} \end{pmatrix}$$

où $k_i$ est un diviseur élémentaire de $M$ dans $\Lambda$, de multiplicité $\mu_i$, et $I_t$ désigne la matrice identité d'ordre $t$. Le réseau $M \cap z^k\Lambda$ est engendré par une base représentée dans $(e)$ par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} z^{\ell_0} I_{\mu_0} & & & 0 \\ & z^{\ell_1} I_{\mu_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{\ell_s} I_{\mu_s} \end{pmatrix}$$

où

$$\ell_i = \begin{cases} k \text{ si } k_i < k \\ k_i \text{ si } k_i \geqslant k, \end{cases}$$

ce qui donne bien le nombre $\xi_M(k)$ de diviseurs élémentaires nuls de $M \cap z^k\Lambda$ dans $z^k\Lambda$.

$\diamondsuit$

On déduit encore de la croissance de la fonction $\mu$ le lemme suivant.

**Lemme 1.8.** *Soient $M \subset N$ deux réseaux de $V$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\xi_M(k) \leqslant \xi_N(k).$$

### 1.4.1 Amplitude relative de deux réseaux

**Définition 1.8.** *On appelle* amplitude relative de deux réseaux $M$ et $\Lambda$ *la quantité* $a(\Lambda, M)$ *définie par*

$$a(\Lambda, M) = k_{n,\Lambda}(M) - k_{1,\Lambda}(M).$$

L'amplitude vérifie les propriétés suivantes.

**Lemme 1.9.** *Soient* $\Lambda$ *et* $M$ *deux réseaux de* $V$*.*

1. *L'amplitude relative est symétrique :* $a(\Lambda, M) = a(M, \Lambda)$.
2. $[\Lambda, M] + [M, \Lambda] = n\, a(\Lambda, M)$.
3. *Pour tout réseau* $N$ *de* $V$ *tel que* $N \subset M$ *et* $v_\Lambda(N) = v_\Lambda(M)$*, on a*

$$a(M, \Lambda) \leqslant a(N, \Lambda).$$

*Démonstration* : Soit $\overline{k}_\Lambda(M) = (k_1, \dots, k_n)$ la suite des diviseurs élémentaires de $M$ dans $\Lambda$. On a donc $\overline{k}_M(\Lambda) = (-k_n, \dots, -k_1)$, et l'on trouve alors

1. $a(M, \Lambda) = k_{n,M}(\Lambda) - k_{1,M}(\Lambda) = -k_1 + k_n = a(\Lambda, M)$.
2. $[\Lambda, M] + [M, \Lambda] = \sum_{i=1}^{n}(k_i - k_1) + \sum_{i=1}^{n}(-k_{n+1-i} + k_n) = \sum_{i=1}^{n}(k_n - k_1)$
   $= \; n\, a(\Lambda, M)$.
3. D'après la proposition 1.3, on a $\xi_N(k_{n,\Lambda}(N)) = n$. Le lemme 1.8 entraîne que $\xi_N(k_{n,\Lambda}(N)) \leqslant \xi_M(k_{n,\Lambda}(N))$, d'où $\xi_M(k_{n,\Lambda}(N)) = n$. Par conséquent, on a $k_{n,\Lambda}(M) \leqslant k_{n,\Lambda}(N)$.

   Comme $k_{1,\Lambda}(N) = v_\Lambda(N) = v_\Lambda(M) = k_{1,\Lambda}(M)$, on obtient l'inégalité $k_{n,\Lambda}(M) - k_{1,\Lambda}(M) \leqslant k_{n,\Lambda}(N) - k_{1,\Lambda}(N)$.

$\diamondsuit$

**Remarque 1.5.** L'amplitude relative est également une quantité projective au sens où l'on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a(\Lambda, z^k M) = a(\Lambda, M)$.

## 1.5 Invariants de $\nabla$ associés à un réseau

Se donner un réseau $\Lambda$ engendré par une base $(e)$ dans un $K$-espace vectoriel à connexion $(V, \nabla_\partial)$ revient à considérer la classe d'équivalence

$$\{\partial X = A_{[P]}X,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})\}$$

de systèmes différentiels modulo l'action de jauge (1.2) de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ sur la matrice $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\partial, (e))$. Les matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ et $A \in \mathrm{M}_n(K)$ admettent des développements en série sous la forme

$$P = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots$$

où $P_i \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pour tout $i$, et $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et

$$A = A_{-r} z^{-r} + \dots + A_{-1} z^{-1} + A_0 + \dots$$

où $r$ est un entier, $A_i \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pour tout $i \geqslant -r$, et $A_{-r} \neq 0$.

La matrice $A_{[P]}$ s'écrit alors, d'après (1.2)

$$A_{[P]} = (P_0^{-1} A_{-r} P_0) z^{-r} + \dots \tag{1.4}$$

En particulier, la valuation $r$ reste inchangée. Ainsi, à la différence de $\mathrm{GL}_n(K)$, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ conserve les quantités suivantes.

### 1.5.1 Le rang de Poincaré

Dans la théorie classique, on appelle rang de Poincaré d'un système singulier $dX/dz = AX$ le nombre $-v(A) - 1$. Nous en donnons la définition intrinsèque suivante, correspondant au système exprimé avec la dérivation $\theta$.

**Définition 1.9.** *On appelle* rang de Poincaré de la connexion $\nabla$ sur le réseau $\Lambda$ *l'entier*

$$r(\nabla, \Lambda) = \max(0, -v_\Lambda(\nabla_\theta(\Lambda))).$$

**Remarque 1.6.** Le réseau $\Lambda$ est stable sous l'action de $\nabla_\theta$ si et seulement si $r(\nabla, \Lambda) = 0$.

**Remarque 1.7.** Pour toute dérivation $\partial$, on a

$$r(\nabla, \Lambda) = \max(0, -v_\Lambda(\nabla_\partial(\Lambda)) + v(\partial) - 1).$$

### 1.5.2 La trace du résidu

On peut définir la trace du résidu de la contraction de la connexion $\nabla$ avec $d/dz$. En effet, soit $A = \mathrm{Mat}(\nabla_{\frac{d}{dz}}, (e))$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. En notant Tr la trace d'une matrice, et $\mathrm{Res}_0$ le résidu en $z = 0$ d'une fonction (à valeurs matricielles éventuellement), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\mathrm{Res}_0(A_{[P]}) &= \mathrm{Tr}\,\mathrm{Res}_0(P^{-1}AP) + \mathrm{Res}(P^{-1}\frac{dP}{dz}) \\ &= \mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\,(P^{-1}AP)) + 0 \\ &= \mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\,A \\ &= \mathrm{Tr}\,\mathrm{Res}_0 A \end{aligned}$$

car $P^{-1}dP/dz$ est sans pôle si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

L'application $\nabla_\theta$ induit sur l'espace vectoriel $\bigwedge^n V$ une connexion naturelle, notée $\bigwedge^n \nabla$, qui est régulière (voir à ce sujet le chapitre 4). Comme $\bigwedge^n V$ est de dimension 1, tout réseau de $\bigwedge^n V$ est stable par $\bigwedge^n \nabla$ (*cf.* [M]). L'application $\bigwedge^n \nabla_\theta$ induit donc sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\overline{\bigwedge^n \Lambda/z \bigwedge^n \Lambda}$, également de dimension 1, un endomorphisme $\overline{\bigwedge^n(\nabla_\theta)}$, c'est-à-dire la multiplication par un nombre complexe que nous noterons encore $\overline{\bigwedge^n(\nabla_\theta)}$. Nous pouvons alors poser la définition suivante.

**Définition 1.10.** *On appelle* trace du résidu de la connexion $\nabla$ sur le réseau $\Lambda$ *le nombre complexe*

$$\tau(\nabla, \Lambda) = \overline{\bigwedge^n(\nabla_\theta)}.$$

**Lemme 1.10.** *Si $M$ est un réseau $\Lambda$-centré, on a*

$$[\Lambda : M] = \tau(\nabla, \Lambda) - \tau(\nabla, M).$$

*Démonstration* : Soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ la matrice de passage d'une base $(e)$ de $\Lambda$ à une base $(\varepsilon)$ de $M$. Soient $A = \mathrm{Mat}(\nabla_{\frac{d}{dz}}, (e))$ et $B = \mathrm{Mat}(\nabla_{\frac{d}{dz}}, (\varepsilon))$. En réécrivant la formule de transformation de jauge (1.2) sous la forme $dP/dz = AP - PB$, on trouve $d(\det P)/dz = (\mathrm{Tr}\, A - \mathrm{Tr}\, B)\det P$. On prend alors les résidus des deux membres, et l'on obtient

$$\mathrm{Res}_0 \frac{\frac{d}{dz}\det P}{\det P} = [\Lambda : M] = \mathrm{Res}_0(\mathrm{Tr}\, A - \mathrm{Tr}\, B) = \tau(\nabla, \Lambda) - \tau(\nabla, M).$$

$\diamondsuit$

D'après la formule (1.4), l'action de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ transforme une matrice *à pôle simple* en une matrice à pôle simple dont le résidu est conjugué du précédent par $P(0)$.

**Définition 1.11.** *Soit $\Lambda$ un réseau $\nabla_\theta$-stable de $V$. On appelle* résidu de $\nabla$ sur le réseau $\Lambda$ *l'endomorphisme* $\mathrm{Res}_\Lambda \nabla$ *induit sur $\Lambda/z\Lambda$ par la connexion $\nabla_\theta$.*

Dans une base quotient $\overline{(e)}$ de $\Lambda/z\Lambda$, la matrice de $\mathrm{Res}_\Lambda \nabla$ est le résidu de la matrice de la connexion $\nabla_{\frac{d}{dz}}$ exprimée dans $(e)$.

**Lemme 1.11.** *Soit $\Lambda$ un réseau $\nabla_\theta$-stable de $V$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réseau $z^k\Lambda$ est $\nabla_\theta$-stable, et pour toute base $(e)$ de $\Lambda$ on a, en notant $(z^k e)$ la base de $z^k\Lambda$ homothétique de $(e)$,*

$$\mathrm{Mat}(\mathrm{Res}_{z^k\Lambda}\nabla, \overline{(z^k e)} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Res}_\Lambda \nabla, \overline{(e)}) - kI,$$

*où $I$ est la matrice identité d'ordre $n$.*

*Démonstration* : Soit $A$ la matrice de $\nabla_\theta$ dans la base $(e)$. La matrice de $\nabla_\theta$ dans la base $(z^k e)$ est égale à

$$A_{[z^k I]} = z^{-k} A z^k - z^{-k} \theta(z^k I) = A - kI.$$

$\diamondsuit$

### 1.5.3 Le rang polaire de la connexion

Pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, le terme "le plus polaire" de la matrice $A_{[P]}$ s'obtient en conjuguant le terme le plus polaire de la matrice $A$ par $P(0)$. Autrement dit, $(A_{[P]})_{-r} = P(0)^{-1} A_{-r} P(0)$, où $r$ désigne le rang de Poincaré du système (1). En particulier, le rang de $A_{-r}$ est invariant. Nous l'appellerons le *rang polaire de la connexion*. Sa définition intrinsèque est la suivante.

**Définition 1.12.** *Soit $\Lambda$ un réseau quelconque de $(V, \nabla)$ et soit $r = r(\nabla, \Lambda)$ le rang de Poincaré de $\nabla$ sur $\Lambda$. On appelle* rang polaire de la connexion $\nabla$ sur le réseau $\Lambda$ *l'entier $\eta(\nabla, \Lambda)$ défini par :*

$$\eta(\nabla, \Lambda) = \mathrm{rg}_{\mathbb{C}} \overline{z^r \nabla_\theta},$$

*où, $\overline{z^r \nabla_\theta}$ désigne, comme dans la proposition 1.1, l'application induite par $z^r \nabla_\theta$ sur le quotient $\Lambda / z\Lambda$.*

# Chapitre 2

# Le réseau de Levelt

Soit $(V, \nabla)$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie à connexion régulière, et $\Lambda$ un réseau quelconque, fixé, de $V$. Nous reprenons les notations de la page 14 concernant les ensembles de réseaux de $V$.

**Proposition 2.1.** *L'ensemble des réseaux stables par $\nabla_\theta$ et contenus dans $\Lambda$ admet un unique élément maximal pour l'inclusion.*

*Démonstration* :
$\Lambda$ étant un module de type fini sur l'anneau principal $\mathcal{O}$, il suffit de vérifier le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.
$\diamondsuit$

**Lemme 2.1.** *Soient $M$ et $\tilde{M}$ deux réseaux de $V$. Le réseau $M + \tilde{M}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si $M$ et $\tilde{M}$ sont $\nabla_\theta$-stables, il en est de même pour $M + \tilde{M}$.*
2. *$M + \tilde{M} = M$ si et seulement si $M \supset \tilde{M}$.*

On peut alors poser la définition suivante.

**Définition 2.1.** *On appelle* réseau de Levelt *associé à $\Lambda$, et l'on note $\Lambda_L$, le plus grand réseau de $V$ (pour l'inclusion) contenu dans $\Lambda$ et stable par $\nabla_\theta$.*

**Proposition 2.2.** *Soit $(V, \nabla)$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie à connexion régulière et $\Lambda$ un réseau. Le réseau de Levelt $\Lambda_L$ associé à $\Lambda$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$v_\Lambda(\Lambda_L) = 0$, autrement dit $\Lambda_L$ est $\Lambda$-centré.*
2. *Pour tout réseau $\nabla_\theta$-stable $M$, on a $[\Lambda : \Lambda_L] \leqslant [\Lambda : M]$. De plus, si $[\Lambda : \Lambda_L] = [\Lambda : M]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $M = z^k \Lambda_L$.*
3. *$\Lambda_L = \sum_{M \in \mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda} M$.*

Notons que le réseau de Levelt peut également être défini comme le seul réseau stable vérifiant à la fois 1 et 2. Pour démontrer la proposition 2.2, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.2.** *Soient $M$ et $\tilde{M}$ deux réseaux $\Lambda$-centrés.*

1. *Le réseau $M + \tilde{M}$ est $\Lambda$-centré.*
2. $[\Lambda : M + \tilde{M}] \leqslant \min([\Lambda : M], [\Lambda : \tilde{M}])$.
3. $[\Lambda : M + \tilde{M}] = [\Lambda : M]$ *si et seulement si* $M \supset \tilde{M}$.

*Démonstration* : Les réseaux $M$ et $\tilde{M}$ sont tous deux contenus dans $M+\tilde{M}$. D'après la proposition 1.3, *vi)* , on a

$$v_\Lambda(M + \tilde{M}) = \min(v_\Lambda(M), v_\Lambda(\tilde{M})) = 0,$$

ce qui démontre 1. Le lemme 1.7 entraîne que

$$[\Lambda : M + \tilde{M}] \leqslant [\Lambda : M] \text{ et } [\Lambda : M + \tilde{M}] \leqslant [\Lambda : \tilde{M}],$$

ce qui démontre 2.

Donnons-nous les $\mathcal{O}$-bases $(\varepsilon)$ de $M$, $(\varepsilon')$ de $M+\tilde{M}$, et $(e)$ de $\Lambda$. Notons $P_{(e)\to(f)}$ la matrice de passage d'une base $(e)$ à une base $(f)$. Supposons que

$$[\Lambda : M + \tilde{M}] = [\Lambda : M].$$

D'après le lemme 1.4, cela se traduit par

$$v(\det P_{(\varepsilon')\to(e)}) = v(\det P_{(\varepsilon)\to(e)}).$$

D'où $\det P_{(\varepsilon')\to(\varepsilon)} = \det P_{(\varepsilon')\to(e)}(\det P_{(\varepsilon)\to(e)})^{-1} \in \mathcal{O}^*$. Comme $M+\tilde{M} \supset M$ on a $P_{(\varepsilon')\to(\varepsilon)} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ c'est-à-dire $M + \tilde{M} = M$, d'où $M \supset \tilde{M}$. La réciproque est immédiate.
$\diamondsuit$

*Démonstration de la proposition 2.2* :

1. D'après la définition 2.1, on a $\Lambda_L \subset \Lambda$. La remarque 1.2 entraîne que $v_\Lambda(\Lambda_L) \geqslant 0$. D'autre part, si $v_\Lambda(\Lambda_L) = k > 0$, le réseau $z^{-k}\Lambda_L$ est encore stable et contient strictement $\Lambda_L$, ce qui contredit la définition de $\Lambda_L$.

2. Pour tout réseau $M$ stable sous $\nabla_\theta$, le réseau $z^{-v_\Lambda(M)}M + \Lambda_L$ est stable par $\nabla_\theta$ et $\Lambda$-centré, d'après le lemme 2.1. Or $z^{-v_\Lambda(M)}M + \Lambda_L$ contient $\Lambda_L$ donc, par définition, $z^{-v_\Lambda(M)}M+\Lambda_L = \Lambda_L$, d'où $M \subset \Lambda_L$. Le lemme 1.7 donne alors $[\Lambda : \Lambda_L] \leqslant [\Lambda : M]$. Par ailleurs, si l'on a $[\Lambda : M] = [\Lambda : \Lambda_L]$ alors on a $[\Lambda : M] = [\Lambda : \Lambda_L + z^{-v_\Lambda(M)}M]$ et, d'après le lemme 2.2, on déduit que $z^{-v_\Lambda(M)}M \supset \Lambda_L$, d'où l'égalité $z^{-v_\Lambda(M)}M = \Lambda_L$.

3. Il suffit de montrer que l'expression $\sum\limits_{M \in \mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda} M$ se réduit à une somme finie de modules. On sait que l'ensemble $\mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda$ est non vide par hypothèse. Fixons un réseau $M_0 \in \mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda$. Soit $M_1$ un réseau $\Lambda$-centré et $\nabla_\theta$-stable. D'après le lemme 2.2, on a $M_0 + M_1 \not\subseteq M_0$ si et seulement si $[\Lambda : M_0 + M_1] < [\Lambda : M_0]$. On montre ainsi facilement par récurrence l'existence d'un nombre fini de réseaux $M_1, \ldots, M_k \in \mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda$, tels que

$$\sum_{i=1}^{k} M_i = \sum_{i=1}^{k} M_i + M$$

pour tout $M \in \mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda$. Il est alors évident que le réseau ainsi défini est le plus grand réseau stable inclus dans $\Lambda$.

$\diamondsuit$

Remarquons que si $\Lambda$ est lui-même stable par $\nabla_\theta$, on a $\Lambda_L = \Lambda$.

**Remarque 2.1.** Il existe d'autres réseaux stables canoniques (comme ceux de Deligne ou de Gérard-Levelt). Leur construction obéit à une optique différente. Nous les comparerons avec le réseau de Levelt au chapitre 3.

## 2.1 Invariants du réseau $\Lambda$ associés à $\Lambda_L$

### 2.1.1 Les exposants

**Définition 2.2.** *On appelle* **exposants** de l'espace vectoriel à connexion régulière $(V, \nabla)$ relativement au réseau $\Lambda$, *les valeurs propres du résidu de la connexion pour le réseau de Levelt associé.*

Par définition, le réseau de Levelt de $\Lambda$ est stable par $\nabla_\theta$. Dans toute $\mathcal{O}$-base $(\varepsilon)$ de $\Lambda_L$, la matrice $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (\varepsilon))$ est à coefficients dans $\mathcal{O}$. Elle s'écrit par conséquent

$$A = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

Les exposants de $\nabla$ pour $\Lambda$ sont alors les *valeurs propres de la matrice* $A_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

**Remarque 2.2.** Dans les termes du chapitre 1, la trace du résidu $\tau(\nabla, \Lambda_L)$ est égale à la somme de ces exposants.

**Remarque 2.3.** En un point régulier, les exposants sont tous nuls.

### 2.1.2 Le rang de stabilité de $\Lambda$

Comme le réseau $\Lambda_L$ est canoniquement associé à $\Lambda$, on peut associer à $\Lambda$ les quantités introduites en 1.3 relatives au réseau de Levelt.

**Définition 2.3.** *Nous noterons $\mu(\Lambda)$ et appellerons* rang de stabilité de $\Lambda$*, le nombre de diviseurs élémentaires nuls, c'est-à-dire le* rang $\mu_\Lambda(\Lambda_L)$ *(au sens de 1.7) de $\Lambda_L$ dans $\Lambda$.*

**Proposition 2.3.** *Avec les notations précédentes, on a*

$$\mu(\Lambda) = \max_{M \in \mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda} \mu_\Lambda(M)$$

*Démonstration* : Soit $M$ un réseau $\nabla_\theta$-stable et $\Lambda$-centré. D'après la proposition 2.2, le réseau $M$ est contenu dans $\Lambda_L$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.2.
$\diamondsuit$

### 2.1.3 Le diamètre de stabilité de $\Lambda$

**Définition 2.4.** *Nous noterons $\delta(\Lambda)$ et appellerons* diamètre de stabilité de $\Lambda$*, l'amplitude relative $a(\Lambda, \Lambda_L)$ de $\Lambda$ et $\Lambda_L$ introduite à la définition 1.8.*

**Lemme 2.3.** *Avec les notations précédentes, on a*

$$\delta(\Lambda) = \min_{M \in \mathcal{L}_\theta \cap \mathcal{L}^\Lambda} a(\Lambda, M)$$

*Démonstration* : Si $M$ un réseau $\nabla_\theta$-stable et $\Lambda$-centré, il est contenu dans $\Lambda_L$. On conclut par le lemme 1.9.
$\diamondsuit$

**Remarque 2.4.** Ce lemme répond à une question de R. Schäfke. Le réseau de Levelt de $\Lambda$ n'est toutefois pas le seul réseau stable d'amplitude égale à $\delta(\Lambda)$ (*cf.* Appendice, Ex. 4, p. 74).

## 2.2 Relations entre invariants des réseaux et majorations

Le réseau de Levelt est d'après la proposition 2.2 le réseau stable le plus proche de celui de départ au sens de l'indice introduit dans 1.2. Nous déterminons ici une borne pour cet indice. On a tout d'abord le résultat suivant.

**Proposition 2.4.** *Soit $(V, \nabla)$ un $K$-espace vectoriel à connexion, $\Lambda$ un réseau fixé et $r = r(\nabla, \Lambda)$ le rang de Poincaré de la connexion relativement à $\Lambda$. Soit $\Lambda_L$ le réseau de Levelt associé. Les diviseurs élémentaires $0 = k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n$ de $\Lambda_L$ dans $\Lambda$ vérifient la double inégalité*

$$\max_{i=1,\ldots,n-1} (k_{i+1} - k_i) \leqslant r \leqslant k_n.$$

*Démonstration* : Si $r = 0$, on a $\Lambda_L = \Lambda$, et donc $k_1 = \ldots = k_n = 0$. Nous supposerons dans la suite que $r > 0$. Soit $(\varepsilon)$ une base de Smith de $\Lambda$ pour $\Lambda_L$. Nous noterons $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{Z}^n$ quelconque, $z^X$ la matrice

$$z^X = \begin{pmatrix} z^{x_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{x_n} \end{pmatrix}$$

et $(z^X\varepsilon)$ la famille $(z^{x_1}\varepsilon_1, \ldots, z^{x_n}\varepsilon_n)$. On notera $\mathrm{Tr}\, X = \sum_{i=1}^n x_i$.

Si l'on note $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (\varepsilon))$, la matrice de la connexion dans une base $(z^X\varepsilon)$ est

$$\mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (z^X\varepsilon)) = A_{[z^X]} = (A_{ij} z^{x_j - xi} - \delta_{i,j} x_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Le réseau de Levelt $\Lambda_L$ de $\Lambda$ est $\nabla_\theta$-stable, donc $A_{[z^{\overline{k}}]} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ pour la suite $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, ce que l'on peut traduire par

$$v(A_{ij}) - k_i + k_j \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant i,j \leqslant n. \tag{2.1}$$

Comme $r \geqslant -v(A_{ij})$ pour tout $i,j \leqslant n$, on en déduit l'inégalité

$$r \leqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (k_j - k_i) = k_n.$$

D'autre part, comme $[\Lambda : \Lambda_L] = \sum_{i=1}^n k_i$ est l'indice minimal d'un réseau stable dans $\Lambda$, pour tout $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que l'on ait $0 = t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ et $\sum_{i=1}^n t_i < \sum_{i=1}^n k_i$, le réseau engendré par $(z^T\varepsilon)$ *n'est pas* $\nabla_\theta$-stable. En termes de matrice de la connexion, cela veut dire que $A_{[z^T]} \notin \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$, pour $T = (t_1, \ldots, t_n)$. En particulier, cela entraîne l'existence d'un couple d'indices $(i_{(T)}, j_{(T)}) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tels que

$$v(A_{i_{(T)} j_{(T)}}) - t_{i_{(T)}} + t_{j_{(T)}} < 0. \tag{2.2}$$

Soit $\ell$ tel que $k_{\ell+1} \geqslant 1$. Montrons que $k_{\ell+1} - k_\ell \leqslant r$. On pose $t_i = k_i$ pour $i \leqslant \ell$ et $t_i = k_i - 1$ pour $i \geqslant \ell + 1$. Il existe alors un couple $(i,j)$ et $\varepsilon = -1, 0$ ou 1 tels que

$$0 > v(A_{ij}) - t_i + t_j = v(A_{ij}) - k_i + k_j + \varepsilon \geqslant \varepsilon.$$

On a donc $i \leqslant \ell \leqslant \ell + 1 \leqslant j$ et $v(A_{ij}) = k_i - k_j$. Puisque $v(A_{ij}) \geqslant -r$, on en déduit que

$$k_{\ell+1} - k_\ell \leqslant k_j - k_i \leqslant r.$$

Comme $r = -v(A)$, on a bien $r \geqslant \max_{i=1,\ldots,n-1} k_{i+1} - k_i$.

$\diamondsuit$

Avec les notations précédentes, on déduit de ce qui précède le résultat suivant.

**Corollaire 2.5.** *L'indice du réseau de Levelt vérifie les inégalités*

$$r \leqslant [\Lambda : \Lambda_L] \leqslant \frac{(n-\mu)(n-\mu+1)}{2} r$$

*où $r$ désigne le rang de Poincaré de $\nabla$ sur $\Lambda$, et $\mu$ le rang $\mu(\Lambda)$ de $\Lambda_L$ dans $\Lambda$.*

Lorsqu'il n'est pas possible de calculer $\mu(\Lambda)$, on a néanmoins l'encadrement suivant, plus large, obtenu en minorant $\mu(\Lambda)$ par 1.

**Corollaire 2.6.** *Avec les mêmes notations qu'au corollaire 2.5, on a*

$$r \leqslant [\Lambda : \Lambda_L] \leqslant \frac{n(n-1)}{2} r$$

D'autre part, le rang de stabilité $\mu(\Lambda)$ peut être majoré directement à partir de la matrice du système.

**Proposition 2.7.** *Soit $\Lambda$ un réseau* instable *de $(V, \nabla)$, de rang de Poincaré $r > 0$. Soit $\eta(\nabla, \Lambda)$ le rang polaire de $\nabla$ sur $\Lambda$. Le rang de stabilité $\mu(\Lambda)$ de $\Lambda$ vérifie la relation*

$$\mu(\Lambda) \leqslant n - \eta(\nabla, \Lambda).$$

*Démonstration* : Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 2.4, et notons $\mu = \mu(\Lambda)$. Soit $A_{-r} = (A_{ij}^{(-r)})$ la matrice la plus polaire du développement de $A$. D'après la formule (2.1), on a $v(A_{ij}) \geqslant k_i - k_j$. Comme $r > 0$, l'inégalité $k_i - k_j \geqslant 0$ entraîne que $A_{ij}^{(-r)} = 0$. Comme les $k_i$ sont rangés par ordre croissant, la matrice $A_{-r}$ est strictement triangulaire supérieure, et comme $k_1 = \ldots = k_\mu$, les $\mu$ premières colonnes de $A_{-r}$ sont nulles. Le rang de $A_{-r}$ est donc au plus égal à $n - \mu$.
$\diamondsuit$

**Corollaire 2.8.** *Avec les notations précédentes, supposons que le rang polaire vérifie $\eta(\nabla, \Lambda) = n - \mu(\Lambda)$. L'indice du réseau de Levelt $\Lambda_L$ de $\Lambda$ est alors maximal et vaut*

$$[\Lambda : \Lambda_L] = \frac{(n-\mu(\Lambda)+1)(n-\mu(\Lambda))}{2} r.$$

*La suite des diviseurs élémentaires de $\Lambda_L$ dans $\Lambda$ est dans ce cas*

$$\overline{k}_\Lambda(\Lambda_L) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\mu(\Lambda)\ \textit{fois}}, r, 2r, \ldots, (n-\mu(\Lambda))r).$$

*Démonstration* : La matrice $A_{-r}$ est triangulaire supérieure de diagonale nulle, et, en notant $\mu(\Lambda) = \mu$, ses $\mu$ premières colonnes sont également nulles. Si rg$A_{-r} = n - \mu$, la "sur-diagonale" $(A^{(-r)}_{i,i+1})_{i=\mu+1,\dots,n}$ ne peut alors contenir aucun zéro. Par conséquent, on a $k_{i+1} - k_i \geqslant r$ pour tout $i = \mu, \dots, n-1$. La proposition 2.4 entraîne alors l'égalité $k_{i+1} - k_i = r$ pour tout $i = \mu, \dots, n-1$.
$\diamondsuit$

On a également le résultat suivant, obtenu par la minoration $\mu(\Lambda) \geqslant 1$.

**Corollaire 2.9.** *Avec les mêmes notations, si* $\eta(\nabla, \Lambda) = n - 1$*, on a*

$$[\Lambda : \Lambda_L] = \frac{n(n-1)}{2} r.$$

*Les diviseurs élémentaires sont dans ce cas*

$$\overline{k}_\Lambda(\Lambda_L) = (0, r, 2r, \dots, (n-1)r).$$

Signalons encore le corollaire suivant.

**Corollaire 2.10.** *Avec les mêmes notations, si les diviseurs élémentaires d'un réseau* $M$ *dans* $\Lambda$ *vérifient* $\overline{k}_\Lambda(M) = (0, 0, \dots, 0, r)$*, alors on a*

$$M = \Lambda_L.$$

**Remarque 2.5.** Le corollaire 2.9 suggère de préciser les liens entre les matrices de diviseurs élémentaires et les transformations de "shearing" qui apparaissent dans les procédures de réduction à une forme normale (de type Fuchs ou Turrittin) dans les cas "nilpotents" où les lemmes de Hensel-Sibuya ne s'appliquent pas. Nous reverrons ces questions au chapitre 3.

**Remarque 2.6.** D'après le lemme 1.10, l'indice du réseau de Levelt vérifie également

$$[\Lambda : \Lambda_L] = \tau(\nabla, \Lambda) - \tau(\nabla, \Lambda_L).$$

On peut rapprocher cette égalité de la relation (6).

Avec ces résultats, on peut majorer *a priori* l'écart entre le système de départ et le système à pôle simple le plus proche. Ces majorations conduisent à des estimations sur la somme des exposants.

## 2.3 Inégalités de Fuchs

### 2.3.1 Relation locale

Le corollaire 2.6 fournit des informations sur les exposants à partir de la matrice du système différentiel donné.

**Proposition 2.11 (Relation de Fuchs locale).** *Soit $dX/dz = AX$ un système différentiel régulier, de rang de Poincaré $r$. Les exposants de Levelt $e_1, \ldots, e_n$ associés à ce système vérifient les inégalités*

$$\mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A - \frac{n(n-1)}{2} r \leqslant \sum_{i=1}^{n} e_i \leqslant \mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A - r.$$

*Démonstration* : Posons $V = K^n$ et $\Lambda = \mathcal{O}^n$. On associe à $\Lambda$ son réseau de Levelt $\Lambda_L$. Pour toute matrice $P$ dont les colonnes engendrent le réseau $\Lambda_L$, la matrice $A_{[P]}$ est à pôle simple. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} e_i &= \mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A_{[P]} \\ &= \mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, (P^{-1}AP - P^{-1}\frac{dP}{dz}) \\ &= \mathrm{Res}_0 \mathrm{Tr}\, A - v(\det P)\end{aligned}$$

Comme $v(\det P) = [\Lambda : \Lambda_L]$, d'après le lemme 1.4, on conclut à l'aide du corollaire 2.4.
$\diamondsuit$

**Remarque 2.7.** On peut également raffiner cet encadrement avec le rang de stabilité $\mu(\Lambda)$, mais les bornes ne sont peut-être pas directement calculables.

### 2.3.2 Relation globale

Dans ce paragraphe, nous prendrons pour corps $K$ le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(z)$, muni en tout point $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de l'application de valuation locale $\mathrm{ord}_a$. On note $\mathrm{ord}_a A = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{ord}_a A_{ij}$ l'ordre en $a$ d'une matrice $A$, et $\mathrm{Res}_{z=s} f$ le résidu d'une fonction $f(z)$ au point $z = s$.

**Définition 2.5.** *Si la matrice $A$ est à coefficients rationnels, on appelle* hauteur du système $dX/dz = AX$ *la somme des rangs de Poincaré du système, c'est-à-dire*

$$h(A) = \sum_{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sup(0, -\mathrm{ord}_a A\, dz - 1).$$

**Lemme 2.4.** *Pour toute matrice $A$ à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$, on a $h(A) = 0$ si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$ et $A_1, \ldots, A_p \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, tels que $A = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{z - a_i}$.*

*Démonstration* : D'après la définition de la hauteur, si $h(A) = 0$, la forme différentielle $A\, dz$ est au plus à pôles simples sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le résultat en découle directement (voir par exemple [Bo3], p.1).
$\diamondsuit$

**Théorème 2.12 (Relation de Fuchs globale).** *Soit $dX/dz = AX$ un système différentiel à singularités régulières sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Les exposants de Levelt $e_1^s, \dots, e_n^s$ associés à ce système en les points $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vérifient*

$$-\frac{n(n-1)}{2}h(A) \leqslant \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}\sum_{i=1}^{n} e_i^s \leqslant -h(A)$$

*Démonstration* : Nous appliquons la proposition 2.11 en tous les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en utilisant une coordonnée locale.

1) Si $s \neq \infty$, le changement de coordonnée $t = z - s$ transforme le système $dX/dz = AX$ en
$$\frac{dY}{dt} = B(t)Y \qquad (E_s)$$
où $B(t) = A(t+s)$. On a, d'après la proposition 2.11,
$$\mathrm{Res}_{t=0}\mathrm{Tr}\, B - \frac{n(n-1)}{2}r_s \leqslant \sum_{i=1}^{n} e_i^s \leqslant \mathrm{Res}_{t=0}\mathrm{Tr}\, B - r_s,$$
où
$$r_s = \max(0, -\mathrm{ord}_{t=0}B\, dz - 1) = \max(0, -\mathrm{ord}_{z=s}A\, dz - 1).$$
Comme $\mathrm{Res}_{t=0}\mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Res}_{t=s}\mathrm{Tr}\, A$, nous obtenons, pour la somme des exposants à distance finie,
$$\sum_{s\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}_{z=s}\mathrm{Tr}\, A - \frac{n(n-1)}{2}\sum_{s\in\mathbb{C}} r_s \leqslant \sum_{s\in\mathbb{C}}\sum_{i=1}^{n} e_i^s \leqslant \sum_{s\in\ C}\mathrm{Res}_{z=s}\mathrm{Tr}\, A - r_s.$$

2) Pour $s = \infty$, on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{z}$, qui transforme le système $dX/dz = AX$ en
$$\frac{dY}{dt} = CY \qquad (E_\infty)$$
où $C(t) = -\frac{1}{t^2}A(\frac{1}{t})$. La proposition 2.11 donne dans ce cas
$$\mathrm{Res}_{t=0}\mathrm{Tr}\, C - \frac{n(n-1)}{2}r_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{n} e_i^\infty \leqslant \mathrm{Res}_{t=0}\mathrm{Tr}\, C - r_\infty.$$
Ici, $r_\infty = \max(0, -\mathrm{ord}_{t=0}Cdt - 1)$.

On a, d'une part, $\mathrm{ord}_{t=0}Cdt = \mathrm{ord}_{z=\infty}A\, dz$, et de l'autre, par définition, $\mathrm{Res}_{t=0}C = \mathrm{Res}_{z=\infty}A$ (c'est-à-dire le résidu à l'infini de $A\, dz$). Il en résulte que
$$\mathrm{Res}_{z=\infty}\mathrm{Tr}\, A - \frac{n(n-1)}{2}r_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{n} e_i^\infty \leqslant \mathrm{Res}_{z=\infty}\mathrm{Tr}\, A - r_\infty,$$

d'où finalement les deux inégalités

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathrm{Res}_{z=s}\mathrm{Tr}\,A - \frac{n(n-1)}{2}\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} r_s \quad\leqslant\quad \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}\sum_{i=1}^{n} e_i^s$$

$$\text{et} \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}\sum_{i=1}^{n} e_i^s \quad\leqslant\quad \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathrm{Res}_{z=s}\mathrm{Tr}\,A - \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} r_s.$$

Comme $r_\infty = \max(0, -\mathrm{ord}_{z=\infty} A\,dz - 1)$, on a bien l'égalité

$$\sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} r_s = h(A).$$

Il suffit enfin d'appliquer le théorème des résidus pour obtenir la relation annoncée.
$\diamondsuit$

**Remarque 2.8.** Les bornes données par le théorème 2.12 sont optimales (*cf.* Appendice, Ex. 3 et 4).

# Chapitre 3

# Réseau de Levelt et autres constructions canoniques

Dans cette partie, nous montrons que notre définition des exposants d'un système différentiel régulier coïncide avec celle de Levelt dans [Le1]. Nous étudions ensuite le lien entre le réseau de Levelt défini au chapitre 2 et d'autres réseaux canoniques, les réseaux introduits par Deligne dans [De], et le réseau "saturé" de Gérard et Levelt (*cf.* [G-L], p.166) canoniquement associé à un réseau donné.

## 3.1 Compatibilité avec les exposants de Levelt

La définition des exposants introduite par Levelt est formulée dans le cadre analytique. Nous considérons donc ici le corps $k = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ des séries entières convergentes méromorphes en 0. Le corps $k$ est un sous-corps différentiel du corps $K = \mathbb{C}((z))$. L'étude classique des systèmes à singularité régulière, par exemple dans [G] ou [Wa], établit la "convergence" des objets introduits dans les chapitres 1 et 2, en particulier l'existence du réseau de Levelt obtenu en remplaçant l'anneau $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ par l'anneau $R = \mathbb{C}\{z\}$ des séries entières convergentes en $z = 0$, c'est-à-dire l'anneau de valuation dans $k$ correspondant à la restriction de la valuation $v$.

### 3.1.1 Rappel de la définition des exposants de Levelt

Nous suivons principalement ici la présentation de Beauville dans [Be].

Considérons un système différentiel

$$\frac{dX}{dz} = AX \tag{3.1}$$

d'ordre $n$, holomorphe sur une couronne $D^* = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < \rho\}$, où $\rho > 0$ est un réel arbitraire, et admettant un point singulier régulier en $z = 0$.

Soient $p : \tilde{D^*} \longrightarrow D^*$ un revêtement universel de $D^*$ et $\log z$ une détermination du logarithme sur $D^*$. Pour toute matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on note

$$\log C$$

l'unique matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^{\log C} = C$ et telle que ses valeurs propres appartiennent à $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) \in [0, 2\pi[\}$. Une fonction holomorphe sur $\tilde{D^*}$ est dite *à croissance modérée* s'il existe un réel $\lambda$ tel que, pour toute section holomorphe locale $s$ de $p$, on ait $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} z^{-\lambda} f(s(z)) = 0$. On note $\mathcal{H}_{mod}(\tilde{D^*})$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\tilde{D^*}$ à croissance modérée, et l'on pose, pour $f \in \mathcal{H}_{mod}(\tilde{D^*})$,

$$\hat{v}(f) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \lambda < k,\ \forall s \text{ section de } p,\ \lim_{z \longrightarrow 0} z^{-\lambda} f(s(z)) = 0\}.$$

Comme le système (3.1) est à singularité régulière en $z = 0$, l'espace $\mathcal{X}$ des solutions de (3.1) est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $(\mathcal{H}_{mod}(\tilde{D^*}))^n$. On étend la valuation $\hat{v}$ à l'espace $\mathcal{X}$ en posant

$$\begin{array}{rcl} \hat{v} : \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ y = (f_i)_{i=1,\dots,n} & \longmapsto & \hat{v}(y) = \min\limits_{i=1,\dots,n} \hat{v}(f_i) \end{array}$$

Les ensembles $\mathcal{X}_k = \{y \in \mathcal{X} |\ \hat{v}(y) \geqslant k\}$ forment une filtration décroissante de $\mathcal{X}$. Considérons la suite des entiers $N_1 \geqslant \ldots \geqslant N_n$, obtenue en répétant $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}_i/\mathcal{X}_{i+1})$ fois l'entier $i$ quand $i$ parcourt $\mathbb{Z}$. Il existe une base $(y)$ de $\mathcal{X}$ telle que $\hat{v}(y_i) = N_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et telle que la matrice $G$ de la monodromie du système exprimée dans $(y)$ soit triangulaire supérieure (*cf.* [Be], p.7). On pose $L = \frac{1}{2i\pi} \log G$.

**Définition 3.1.** *Avec les notations précédentes, on appelle* exposants de Levelt du système (3.1) *les nombres* $N_1 + L_{11}, \dots, N_n + L_{nn}$.

On vérifie que cette définition ne dépend pas de la base $(y)$ choisie.

La suite $N_1, \dots, N_n$ représente les *maxima successifs* de l'application $\hat{v}$ ([Le1], p. 375). En particulier, si l'on note $\mathcal{Y}_i$ la $i$-ème colonne d'une matrice fondamentale $\mathcal{Y}$ de solutions de (3.1), et si $\hat{v}(\mathcal{Y}_1) \geqslant \ldots \geqslant \hat{v}(\mathcal{Y}_n)$, alors $\hat{v}(\mathcal{Y}_i) \leqslant N_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ (*cf.* [Be], p. 7). Nous notons $N$ la matrice diagonale $\mathrm{diag}(N_1, \dots, N_n)$.

Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant.

**Théorème 3.1.** *Les exposants de Levelt du système (3.1) sont égaux aux exposants, au sens de la définition 2.2, relatifs au réseau canonique $\mathcal{O}^n$, de la connexion $\nabla$ définie par (3.1) dans la base canonique de $K^n$.*

### 3.1.2 Démonstration du théorème 3.1

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des triplets $(\Omega, T, L)$, que nous appellerons *triplets GLB* dans la suite (pour Gantmacher-Levelt-Bolibrukh), où

> $\Omega$ est une matrice $n \times n$ non singulière, holomorphe sur le disque $D = D^* \cup \{0\}$,
>
> $T = \mathrm{diag}(T_1, \ldots, T_n)$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$,
>
> $L$ est une matrice constante dont les valeurs propres appartiennent au sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \in [0, 1[\}$ de $\mathbb{C}$.

En notant $\mathcal{F}$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\tilde{D^*}$, on associe à tout triplet $(\Omega, T, L)$ le produit $\Omega z^T z^L$ dans l'anneau $M_n(\mathcal{F})$ des matrices d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathcal{F}$, où l'on note $z^L = e^{L \log z}$.

On appelle *matrice fondamentale de solutions de (3.1)* (relativement à $\mathcal{F}$) tout élément $\mathcal{Y} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{F})$ tel que $d\mathcal{Y}/dz = A\mathcal{Y}$. On dit qu'une matrice fondamentale $\mathcal{Y}$ admet une *factorisation GLB* s'il existe un triplet GLB $(\Omega, T, L)$ tel que $\mathcal{Y} = \Omega z^T z^L$.

Définissons les ensembles $\mathcal{M}^{\mathrm{faible}}$, composé des triplets GLB tels que $z^T L z^{-T}$ soit holomorphe, et $\mathcal{M}^{\mathrm{fort}}$, composé des triplets GLB pour lesquels $T_1 \geqslant \ldots \geqslant T_n$ et $L$ est triangulaire supérieure, ainsi que leurs sous-ensembles respectifs $\mathcal{M}_0^{\mathrm{faible}}$ et $\mathcal{M}_0^{\mathrm{fort}}$ pour lesquels on impose de plus que $\Omega(0)$ soit une matrice *inversible*. Remarquons que $\mathcal{M}^{\mathrm{fort}} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{faible}}$ et que $\mathcal{M}_0^{\mathrm{fort}} \subset \mathcal{M}_0^{\mathrm{faible}}$.

Nous rappelons, et rassemblons dans la proposition suivante, trois résultats essentiels concernant les "formes normales" et la matrice $N$ des parties entières des exposants (définie plus haut).

**Proposition 3.2.** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

*i)* *Il existe $(\Omega, T, L) \in \mathcal{M}^{fort}$, où $T = N$, tel que $\Omega z^T z^L$ soit une matrice fondamentale de solutions du système (3.1) (cf. [Bo3], p. 16).*

*ii)* *Si la matrice $A$ admet en $z = 0$ au plus un pôle simple (c'est-à-dire $ord_0 A \geqslant -1$), alors il existe $(\Omega, T, L) \in \mathcal{M}_0^{fort}$, tel que $\Omega z^T z^L$ soit une matrice fondamentale de solutions du système (3.1). De plus, les nombres $T_i + L_{ii}$ sont les valeurs propres de la matrice résidu de $A$ (cf. [G], ch. XIV, §10, th.2, p. 157).*

*iii)* *Si $(\Omega, T, L) \in \mathcal{M}^{faible}$ est tel que $\mathcal{Y} = \Omega z^T z^L$ soit une matrice fondamentale de solutions du système (3.1), on a $\hat{v}(\mathcal{Y}_i) \geqslant T_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ (cf. [Bo3], Cor. 1.2.1, p. 21).*

L'application "développement de Taylor" permet de considérer $A$ comme une matrice à coefficients dans le corps $K = \mathbb{C}((z))$, complété formel du corps $k = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$, et le système (3.1) comme une connexion régulière

$\nabla$ sur $K^n$. Le réseau de Levelt $(\mathcal{O}^n)_L$ associé à $\nabla$ et au réseau canonique $\mathcal{O}^n$ de $K^n$ est en fait défini sur l'anneau de valuation $R$ de $k$, c'est-à-dire $(\mathcal{O}^n)_L = (R^n)_L \otimes_k K$, où $(R^n)_L$ est le réseau de Levelt associé à $R^n$ (voir [Ma], prop 1.2). Il existe donc une matrice $W$ holomorphe et inversible dans $M_n(k)$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $k^n$ à une base du réseau de Levelt $(\mathcal{O}^n)_L$, et telle que le système

$$\frac{dZ}{dz} = BZ, \tag{3.2}$$

de matrice $B = W^{-1}AW - W^{-1}\frac{d}{dz}W$ soit à pôle simple. D'après la proposition 3.2, il existe une matrice fondamentale $\mathcal{Y} = \Omega z^N z^L$ de (3.1) où $(\Omega, N, L) \in \mathcal{M}^{\text{fort}}$, et une matrice fondamentale $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\Omega} z^{\tilde{N}} z^{\tilde{L}}$ de (3.2) où $(\tilde{\Omega}, \tilde{N}, \tilde{L}) \in \mathcal{M}_0^{\text{fort}}$. Alors les $N_i + L_{ii}$ sont les exposants de Levelt ([Bo3], p. 16), et d'après la prop. 3.2 (ii), les $\tilde{N}_i + \tilde{L}_{ii}$ sont les exposants de la définition 2.2.

Comme $\tilde{\mathcal{Y}} = W\tilde{\mathcal{Z}}$ est également une matrice fondamentale de (3.1), il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $W\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Y}C$. On en déduit que

$$W\tilde{\Omega} z^{\tilde{N}} z^{\tilde{L}} = \Omega z^N z^L C = \Omega z^N C z^{C^{-1}LC}.$$

Dans ces conditions, $e^{2i\pi L}$ est la matrice de monodromie de $\mathcal{Y}$, et $e^{2i\pi \tilde{L}}$ celle de $\tilde{\mathcal{Z}}$, donc de $W\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Y}C$. On a ainsi $\tilde{L} = C^{-1}LC$, et $W\tilde{\Omega} z^{\tilde{N}} = \Omega z^N C$. En prenant la valuation des déterminants de ces matrices, on obtient la relation

$$v(\det W) + v(\det\tilde{\Omega}) + \mathrm{Tr}\,\tilde{N} = v(\det\Omega) + \mathrm{Tr}\,N. \tag{3.3}$$

La matrice $\tilde{\Omega}$ est inversible dans $M_n(R)$, d'où $v(\det\tilde{\Omega}) = 0$, et $\mathrm{Tr}\,\tilde{N} - \mathrm{Tr}\,N = v(\det\Omega) - v(\det W)$. Comme $(\Omega, N, L) \in \mathcal{M}^{\text{fort}}$, la matrice $\Omega$ fait passer dans $k^n$ de la base canonique à une base d'un réseau *stable* $\mathcal{N}$ de $k^n$ inclus dans le réseau canonique $R^n$. La maximalité du réseau de Levelt entraîne que $[R^n : \mathcal{N}] = v(\det\Omega) \geqslant v(\det W)$, d'où l'on déduit que $\mathrm{Tr}\,\tilde{N} \geqslant \mathrm{Tr}\,N$.

D'autre part, comme $(\tilde{\Omega}, \tilde{N}, \tilde{L}) \in \mathcal{M}_0^{\text{fort}}$, on a $(W\tilde{\Omega}, \tilde{N}, \tilde{L}) \in \mathcal{M}^{\text{fort}}$. D'après la proposition 3.2 (iii), les colonnes $\tilde{\mathcal{Y}}_i$ de $\tilde{\mathcal{Y}}$ vérifient $\hat{v}(\tilde{\mathcal{Y}}_i) \geqslant \tilde{N}_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Soit alors $\sigma$ une permutation qui réordonne les $\hat{v}(\tilde{\mathcal{Y}}_i)$ par ordre décroissant, de sorte que $\hat{v}(\tilde{\mathcal{Y}}_i) \leqslant N_{\sigma^{-1}(i)}$. En sommant terme à terme, on obtient l'inégalité $\sum_{i=1}^n N_{\sigma^{-1}(i)} \geqslant \sum_{i=1}^n N_i$. On en déduit que $\mathrm{Tr}\,\tilde{N} = \mathrm{Tr}\,N$. Les deux suites étant décroissantes, on a $\tilde{N}_i = N_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Par conséquent, le réseau $\mathcal{N}$ donné par $\Omega$ est *égal* au réseau $(\mathcal{O}^n)_L$ de Levelt, donc $z^N C z^{-N} = \Omega^{-1} W \tilde{\Omega} \in \mathrm{GL}_n(R)$. On montre alors que l'action de la matrice $C$ sur $L$ permute les valeurs propres de $L$ correspondant à des éléments *égaux* de $N$, d'où l'égalité,

$$N_i + L_{ii} = \tilde{N}_i + \tilde{L}_{ii} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

qui achève la preuve du théorème 3.1.

## 3.2 Formes normales et réseaux stables

L'existence, pour un système donné $dX/dz = AX$, d'une solution fondamentale admettant une factorisation GLB admet une interprétation intéressante en termes de réseaux.

On se donne dans ce paragraphe un $K$-espace vectoriel à connexion régulière $(V, \nabla)$, une base $(e)$ de $V$, le réseau $\Lambda$ engendré par $(e)$, le réseau de Levelt $\Lambda_L$ de $\Lambda$ et une base $(\varepsilon)$ de $\Lambda_L$. Soit $W$ la matrice de passage de $(e)$ à $(\varepsilon)$. Notons $A$ la matrice de $\nabla_{\frac{d}{dz}}$ dans $(e)$ (à pôle d'ordre $r+1$), et $B = A_{[W]}$ la matrice de $\nabla_{\frac{d}{dz}}$ dans $(\varepsilon)$ (à pôle simple).

Rappelons que les valeurs propres $e_1, \dots, e_n$ du résidu $B_{-1}$ de la matrice $B$ sont les exposants de $\nabla$ pour les réseaux $\Lambda$ *et* $\Lambda_L$. Soit $N$ la matrice diagonale des parties entières $N_i$ des parties réelles des exposants. Le théorème de Gantmacher (proposition 3.2, ii)) associe à $B$ un triplet $(\Omega, N, L) \in \mathcal{M}_0^{\text{fort}}$. Comme $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, la matrice $\Omega$ fait passer de la base $(\varepsilon)$ à une base $(\alpha)$ de $\Lambda_L$ où la matrice de la connexion $\nabla_{\frac{d}{dz}}$ est $z^{-1}(N + z^N L z^{-N})$. En particulier, son développement en série n'a qu'un nombre *fini* de termes.

L'existence d'une factorisation comme celle de la proposition 3.2, i), que nous appellerons *forme normale de Levelt* se déduit alors du théorème de Gantmacher et de l'existence du réseau de Levelt, puisque le triplet $(W\Omega, N, L)$ est dans $\mathcal{M}^{\text{fort}}$. Mais toute question sur l'unicité de ces formes normales requiert une analyse plus approfondie des factorisations données par le théorème de Gantmacher, et que nous appellerons *formes normales de Gantmacher.*

Pour cela, rappelons quelques résultats sur les réseaux stables.

**Proposition 3.3 (Birkhoff).** *Soit $M$ un réseau stable. Si l'endomorphisme* $\mathrm{Res}_M \nabla$ *n'a pas de valeurs propres distinctes qui soient congrues modulo $\mathbb{Z}$, il existe une base $(u)$ de $M$ dans laquelle la matrice de la connexion $\nabla_\theta$ est constante.*

Supposons donnés le réseau $M$ et une telle base $(u)$. Soit $L$ la matrice constante $\mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (u))$. Alors, sous ces hypothèses, on a le lemme suivant.

**Lemme 3.1.** *Avec les notations précédentes, soit $(f)$ une base de $M$. La matrice* $\mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (f))$ *est constante si et seulement si la matrice de passage $P$ de $(u)$ à $(f)$ est constante.*

*Démonstration* : Soit $\tilde{L}$ la matrice $\mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (f))$, supposée constante. La matrice $P = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots$ vérifie d'après (1.2) l'égalité

$$z\frac{dP}{dz} = LP - P\tilde{L}.$$

Cette relation équivaut au système infini d'équations

$$0 = LP_0 - P_0\tilde{L} \tag{3.4}$$

$$kP_k = LP_k - P_k\tilde{L} \text{ pour } k \geqslant 1. \tag{3.5}$$

De (3.4), on déduit que $\tilde{L} = P_0^{-1} L P_0$. La relation (3.5) s'écrit alors pour tout $k \geqslant 1$

$$P_k P_0^{-1} L = (L - kI) P_k P_0^{-1}.$$

Par hypothèse, les matrices $L$ et $L-kI$ n'ont pas de valeur propre commune. L'unique solution de l'équation $XL = (L-kI)X$ est alors $X = 0$ (*cf.* [G], ch. 8, §3). On en conclut que $P_k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.
$\diamondsuit$

L'intérêt de réduire le système (1) à un système constant

$$dY/dz = z^{-1} LY$$

tient à la facilité d'intégrer cette deuxième équation, dont une matrice fondamentale est $z^L = e^{L \log z}$ pour une détermination $\log z$ du logarithme. L'énoncé de Birkhoff ([Bi], p. 451) permet ainsi de montrer que la monodromie des systèmes à pôle simple dont le résidu $A_{-1}$ est "non-résonant" vaut $e^{2i\pi A_{-1}}$. C'est en corrigeant l'erreur de Birkhoff, qui croyait ce résultat valable pour tout réseau stable, sans hypothèse sur le résidu, que Gantmacher a introduit pour la première fois en 1947 les exposants (sans toutefois les nommer ainsi). Le résultat suivant date des années 60.

**Proposition 3.4 (Deligne).** *Pour toute section $\sigma$ de la projection canonique $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, il existe un unique réseau stable $\Lambda_\sigma$ tel que $\mathrm{Res}_{\Lambda_\sigma} \nabla$ ait ses valeurs propres dans l'image de $\sigma$.*

Ces réseaux canoniques $\Lambda_\sigma$, appelés habituellement *réseaux de Deligne*, (cf. [De], 5.3, p. 94, [Sa2], II, 1e, p. 68, voir aussi [Ka], §12, et [M]), satisfont au critère de la proposition 3.3. Dans la théorie analytique des exposants, il est d'usage de normaliser les valeurs propres du logarithme de la monodromie, et de les choisir de partie imaginaire dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Ce choix revient à considérer la section $\sigma_0$ telle que $\mathrm{im}\sigma_0 \subset [0,1[$. On note $\Lambda_0$ le réseau de Deligne associé à la section $\sigma_0$. On déduit du lemme 3.1 le résultat suivant.

**Lemme 3.2.** *Toutes les bases de $\Lambda_0$ dans lesquelles la connexion $\nabla_\theta$ est représentée par une matrice constante engendrent sur $\mathbb{C}$ un même sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel $F$ de $\Lambda_0$, de dimension $n$.*

Cet espace vectoriel permet d'une part de rendre compte de la nature des exposants en termes de réseaux, d'autre part de caractériser les réseaux stables de $V$.

### 3.2.1 Les exposants comme valuations sur $V$ et les formes normales de Gantmacher

Nous reprenons les notations précédentes. En particulier, si dans une base $(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de $V$ la matrice de la connexion $\nabla_\theta$ est constante, on a posé

$$F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}\omega_i.$$

Sur un réseau stable de $V$, les exposants fournis tant par la théorie de Levelt que par le théorème de Gantmacher s'interprètent en termes de valuations. Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant.

**Proposition 3.5.** *Les exposants de Levelt de la connexion $\nabla$ pour un réseau $\Lambda$ sont les maxima successifs du sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel $F$ de $V$ pour la valuation $v_{\Lambda_L}$ de $V$ définie par le réseau de Levelt de $\Lambda$.*

La preuve de la proposition 3.5 repose sur les lemmes 3.3 et 3.4 suivants.

Soit $(u)$ une base de $F$ et $L = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (u))$. Soit $H$ le corps engendré sur $K$ par les coefficients de la matrice $z^L$. Le corps $H$ est un corps différentiel indépendant de la base $(u)$, et constitue une extension de Picard-Vessiot de $K$ pour la connexion $\nabla$. On étend de façon unique la connexion à l'espace $V_H = V \otimes_K H$ en posant $\nabla_H = \nabla \otimes 1 + id_{V_H} \otimes d$, où $d$ désigne la différentielle étendue à $H$. On considère le $H$-automorphisme

$$\Phi : V_H \longrightarrow V_H$$

défini par la matrice $z^L$ dans la base $(u \otimes 1)$ de $V_H$. Par définition, une colonne de la matrice $z^L$ vérifie le système différentiel $dY/dz = z^{-1}LY$. Le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel $X = \Phi(F)$ de $V_H$ est égal à l'espace $(V_H)^{\nabla_H}$ des vecteurs de $V_H$ horizontaux pour la connexion $\nabla_H$. Nous considérerons $V$ et $F$ comme les sous-espaces $V \otimes_K 1$ et $F \otimes_{\mathbb{C}} 1$ de $V_H$.

Soit $(e)$ une base de $V$ sur $K$ et $(y)$ une base de $X$ sur $\mathbb{C}$ (composée de vecteurs horizontaux). Soit $dY/dz = AY$ le système associé à $\nabla$ par la donnée de $(e)$. L'expression de $(y_i \otimes 1)_{i=1,\dots,n}$ dans la base $(e_i \otimes 1)_{i=1,\dots,n}$ de $V \otimes_K H$ est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $H$, appelée *matrice fondamentale* de solutions du système $dY/dz = AY$ associée à la base $(y)$ de $X$. Cette définition n'est autre que celle employée au paragraphe 3.1.2, mais exprimée sur l'extension de Picard-Vessiot $H$ de $K$ (et non plus sur l'anneau $\mathcal{F}$).

Nous donnons maintenant une caractérisation des exposants qui ne nécessite plus que la définition de la valuation sur $K$ (et non plus sur $H$ ou $\mathcal{H}_{mod}(\tilde{D}^*)$).

**Lemme 3.3.** *Soit $\Lambda$ un réseau $\nabla_\theta$-stable de $V$ engendré par une base $(e)$. Soit $(y)$ une base de vecteurs horizontaux de $V_H$ pour la connexion $\nabla_H$. Supposons qu'il existe un triplet $(\Omega, N, L) \in \mathcal{M}_0^{faible}$, tel que la matrice fondamentale de solutions $\mathcal{Y}$ associée à $(y)$ dans $(e)$ s'écrive $\mathcal{Y} = \Omega z^N z^L$. Alors les éléments $N_i$ de la matrice $N$ vérifient*

$$N_i = v_\Lambda(\Phi^{-1}(y_i)) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

*Démonstration* : Les vecteurs $\Phi^{-1}(y_i)$ forment une base de $F$ dans laquelle la connexion $\nabla_\theta$ a, par définition, pour matrice $L$. On déduit de la factorisation GLB que les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(e)$ sont données par la matrice

$$\begin{pmatrix} \Omega_{1i} z^{N_i} \\ \vdots \\ \Omega_{ni} z^{N_i} \end{pmatrix}.$$

Or $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ est la matrice de passage de la base $(e)$ à une base $(\varepsilon)$ du même réseau, dans laquelle les vecteurs $\Phi^{-1}(y_i)$ ont pour coordonnées $(\delta_{i,j} z^{N_i})_{1 \leqslant j \leqslant n}$. On a donc $v_\Lambda(\Phi^{-1}(y_i)) = N_i$.
$\diamondsuit$

**Corollaire 3.6.** *Si une matrice fondamentale $\mathcal{Y}$ admet une factorisation GLB dans $\mathcal{M}_0^{faible}$, celle-ci est unique.*

*Démonstration* : Pour définir une matrice fondamentale, il faut fixer une base $(e)$ de $V$ et une base $(y)$ de $X$. La matrice $L$ qui apparaît dans la factorisation GLB de $\mathcal{Y}$ est alors $L = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, \Phi^{-1}(y))$. La matrice $\Omega$ est la matrice de passage de $(e)$ à $(\Phi^{-1}(y))$, et la matrice $N$ est unique d'après le lemme 3.3.
$\diamondsuit$

On peut alors parler de de *la* forme normale de Gantmacher d'une matrice fondamentale, puisque $\mathcal{M}_0^{\text{fort}} \subset \mathcal{M}_0^{\text{faible}}$.

**Définition 3.2.** *On appellera* forme normale de Gantmacher *d'une matrice fondamentale $\mathcal{Y}$, l'unique écriture, s'il en existe, donnée par le théorème de Gantmacher (proposition 3.2, ii)), et* forme normale faible de Gantmacher*, l'unique factorisation GLB de $\mathcal{Y}$, s'il en existe, dans $\mathcal{M}_0^{faible}$.*

Nous allons maintenant chercher quelles bases de $X$ admettent une forme normale faible de Gantmacher. Toute autre base $(\tilde{y})$ de $X$ est donnée dans $e \otimes 1$ par $\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}C$, où $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Supposons donnée la forme normale faible de Gantmacher $\mathcal{Y} = W z^N z^L$ de la base $(y)$. On a alors, pour la base $(\tilde{y})$,

$$\tilde{\mathcal{Y}} = W z^N z^L C = W z^N C z^{C^{-1} L C}.$$

Or $z^{C^{-1}LC}$ est la matrice de $\Phi$ dans la base $(\tilde{y})$. Ainsi, $(\Phi^{-1}(\tilde{y}_1), \ldots, \Phi^{-1}(\tilde{y}_n))$ a pour matrice de coordonnées $W z^N C$ dans $(e)$. D'après le lemme 3.3, pour avoir l'écriture de Gantmacher éventuelle de $\tilde{\mathcal{Y}}$, il faut connaître les valuations $v_\Lambda(\Phi^{-1}(\tilde{y}_i))$, qui se calculent dans n'importe quelle base de $\Lambda$. En reprenant l'argument utilisé dans le lemme 3.3, dans une certaine base $(\varepsilon)$

du même réseau $\Lambda$, la famille $(\Phi^{-1}(\tilde{y}_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ a pour coordonnées

$$z^N C = \begin{pmatrix} C_{11}z^{N_1} & \dots & C_{1n}z^{N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1}z^{N_n} & \dots & C_{nn}z^{N_n} \end{pmatrix}$$

Or, comme $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que l'on ait $C_{\sigma(i)i} \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On en déduit que

$$v_\Lambda(\Phi^{-1}(\tilde{y}_i)) \leqslant N_{\sigma(i)}. \tag{3.6}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. On conclut de cette dernière inégalité que les nombres $N_1, \dots, N_n$ représentent les *maxima successifs de la valuation $v_\Lambda$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $F$ de $V$*. On établit alors le lemme suivant.

**Lemme 3.4.** *Soit $\Lambda$ un réseau stable de $V$. Une base $(y)$ de $X$ admet une écriture en forme normale faible de Gantmacher sur une base de $\Lambda$ si et seulement si $\Phi(y)$ réalise les maxima successifs de la valuation $v_\Lambda$ sur l'espace $F$.*

*Démonstration* : Dans ce cas, l'inégalité (3.6) est une égalité. Il existe donc une matrice $\Omega$ holomorphe telle que si $N_\sigma$ désigne la matrice obtenue à partir de $N$ en permutant les éléments par $\sigma$, on ait

$$Wz^N C = \Omega z^{N_\sigma}.$$

La matrice fondamentale $Z$ s'écrivant alors

$$Z = Wz^N C z^{C^{-1}LC} = \Omega z^{N_\sigma} z^{C^{-1}LC}$$

on a

$$\begin{aligned} \det\Omega &= \det W z^{\mathrm{Tr}\,N} \det C z^{-\mathrm{Tr}\,N_\sigma} \\ &= \det W \det C, \end{aligned}$$

qui est inversible.

D'autre part, comme $z^{N_\sigma} C^{-1} = \Omega^{-1} z^N$, on a

$$z^{N_\sigma} C^{-1} LC z^{N_\sigma} = Wz^N L z^{-N} \Omega$$

qui est holomorphe. Il s'agit donc bien d'une forme normale faible de Gantmacher.

La réciproque découle du lemme 3.3.

$\diamondsuit$

Ce type de bases a déjà été considéré par A. A. Bolibrukh qui appelle *base faiblement adaptée* l'expression “en coordonnées”, dans une base d'un réseau $\Lambda$, d'une base $(y)$ de $X$ qui admet une écriture en forme normale faible de Gantmacher dans une base du réseau de Levelt de $\Lambda$ (*cf.* [Bo3], p.16, *Def.* 1.1.7).

*Démonstration de la proposition 3.5* : Les exposants de Levelt associés à un réseau $\Lambda$ instable sont, d'après le théorème 3.1, les exposants de Gantmacher associés au réseau stable $\Lambda_L$. On déduit alors le résultat de 3.5 du lemme 3.4.
$\diamondsuit$

### 3.2.2 Caractérisation des réseaux stables

**Définition 3.3.** *Soient $(V, \nabla)$ un $K$-espace vectoriel à connexion régulière, $(u)$ une base de $V$ et $T$ un élément de $\mathbb{Z}^n$. On dit que $(u)$ est* alignée avec *$T$ si la matrice $z^T \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (u)) z^{-T}$ est à coefficients dans $\mathcal{O}$.*

**Proposition 3.7.** *Soit $M$ un réseau de $V$, et $T$ le $n$-uplet des diviseurs élémentaires de $M$ dans le réseau de Deligne $\Lambda_0$.*

*Le réseau $M$ est stable si et seulement s'il existe une base de Smith $(u)$ de $\Lambda_0$ pour $M$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *$(u)$ est une base de $F$ (autrement dit, la matrice de $\nabla_\theta$ dans $(u)$ est constante).*
2. *$(u)$ est alignée avec $-T$.*

Pour montrer ce résultat, on établit les deux lemmes suivants.

**Lemme 3.5.** *Soit $M$ un réseau stable. Il existe une base $(\varepsilon)$ de $M$ et un $n$-uplet d'entiers $T = (t_1, \dots, t_n)$, tels que $(z^T \varepsilon)$ soit une $\mathbb{C}$-base de $F$. On peut de plus imposer que $t_1 \geqslant \dots \geqslant t_n$.*

*Démonstration* : C'est une conséquence directe du théorème de Gantmacher. En reprenant les notations de l'introduction du chapitre 3, il suffit de choisir comme base $(\varepsilon)$ la base $(\alpha)$ donnée par la forme normale de Gantmacher, et pour $n$-uplet $(N_1, \dots, N_n)$. En effet, la matrice de la connexion $\nabla_\theta$ dans $(z^{N_1}\alpha_1, \dots, z^{N_n}\alpha_n)$ est constante, égale à $(N + z^N L z^{-N})_{[z^N]} = L$, et comme le triplet $(\Omega, N, L)$ est dans $\mathcal{M}_0^{\mathrm{fort}}$, la matrice $L$ a ses valeurs propres dans $\mathrm{im}\sigma_0$.
$\diamondsuit$

Pour tout réseau stable $M$, le réseau canonique $\Lambda_0$ admet donc une base de Smith pour $M$ qui est une $\mathbb{C}$-base de l'espace $F$. Réciproquement, on a le critère suivant.

**Lemme 3.6.** *Soit $(u)$ une $K$-base de $V$, et $T$ un $n$-uplet d'entiers. Le réseau $\mathcal{R}(z^{-T}u)$ engendré par la base $(z^{-T}u)$ est $\nabla_\theta$-stable si et seulement si la matrice $z^T \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (u)) z^{-T}$ est à coefficients dans $\mathcal{O}$.*

*Démonstration* : D'après l'hypothèse, la connexion $\nabla_\theta$ admet la matrice $L$ dans la base $(u)$ et la matrice $L_{[z^{-T}]} = z^T L z^{-T} + T$, dans la base $(z^{-T}u)$. Cela démontre l'équivalence annoncée.

La seconde assertion est immédiate si l'on remarque que $\Phi^{-1}(y)$ est donnée dans une certaine base du réseau $\mathcal{R}(z^{-T}u)$ par $z^T$.

$\diamondsuit$

**Remarque 3.1.** Dans les conditions du lemme 3.6, $(y) = \Phi(u)$ est une base faiblement adaptée pour $\mathcal{R}(z^{-T}u)$.

*Démonstration de la proposition 3.7* : Il suffit de rapprocher les lemmes 3.5 et 3.6 pour établir le résultat attendu.

$\diamondsuit$

**Corollaire 3.8.** *Les diviseurs élémentaires d'un réseau stable $M$ dans le réseau de Deligne $\Lambda_0$ sont les* opposés des parties entières des parties réelles des exposants *de $\nabla$ pour le réseau $M$.*

Soit $M$ un réseau stable. Nous comparons les diviseurs élémentaires relatifs des réseaux $\Lambda$, $\Lambda_L$, $\Lambda_0$ et $M$. On introduit les notations suivantes. Soient

$K = (k_1, \dots, k_n)$ les diviseurs élémentaires de $\Lambda_L$ dans $\Lambda$, et $(e)$ une base de Smith de $\Lambda$ pour $\Lambda_L$, de sorte que $(z^K e)$ est une base de $\Lambda_L$;

$S = (s_1, \dots, s_n)$ les diviseurs élémentaires de $M$ dans $\Lambda$, et $(f)$ une base de Smith de $\Lambda$ pour $M$ : la famille $(z^S f)$ est une base de $M$;

$-N = (-N_1, \dots, -N_n)$ les diviseurs élémentaires de $\Lambda_L$ dans $\Lambda_0$, une base de Smith $(\alpha)$ de $\Lambda_0$ pour $\Lambda_L$; la famille $(z^{-N}\alpha)$ est une base de $\Lambda_L$;

$-T = (-T_1, \dots, -T_n)$ les diviseurs élémentaires de $M$ dans $\Lambda_0$, et une base de Smith $(\varepsilon)$ de $\Lambda_0$ pour $\Lambda_L$, de sorte que $(z^{-N}\varepsilon)$ soit une base de $\Lambda_L$.

On résumera symboliquement la situation par le schéma suivant, étant entendu qu'il ne s'agit pas d'un diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_L & \Lambda \arrow[l, "z^K"'] \arrow[d, "z^S"] \\
\Lambda_0 \arrow[u, "z^{-N}"] \arrow[r, "z^{-T}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Rappelons que, dans la situation présentée ci-dessus, le $n$-uplet $N$ représente les parties entières des parties réelles des exposants de $\nabla$ pour le réseau $\Lambda$ et $T$ représente l'analogue pour le réseau $M$.

**Lemme 3.7.** *Avec les notations précédentes, on a*

$$\operatorname{Tr} K + \operatorname{Tr} N = \operatorname{Tr} T + \operatorname{Tr} S.$$

*Démonstration* : Il existe trois matrices $P, Q, R \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ telles que l'on ait

$$z^K P z^N Q z^{-T} R z^{-S} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}).$$

On chosit en effet pour $P$ la matrice de passage de $(z^K e)$ à $(z^{-N}\alpha)$, pour $Q$ celle de $(\alpha)$ à $(\varepsilon)$ et pour $R$ celle de $(z^{-T}\varepsilon)$ à $(z^S f)$.

La matrice $z^K P z^N Q z^{-T} R z^{-S}$ résultante garde alors $\Lambda$ invariant, donc on a

$$v(\det(z^K P z^N Q z^{-T} R z^{-S})) = \operatorname{Tr} K + \operatorname{Tr} N - \operatorname{Tr} T - \operatorname{Tr} S = 0.$$

$\diamondsuit$

**Lemme 3.8.** *Avec les notations précédentes, supposons que le réseau stable $M$ soit inclus dans $\Lambda$. On a alors*

1. $T_i \leqslant N_i$
2. $k_i \leqslant s_i$.

*Démonstration* : On a par hypothèse $M \subset \Lambda_L$. Toute matrice de passage d'une base de $\Lambda_L$ à une base de $M$ est donc holomorphe. Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ (par exemple la matrice de passage de $(e)$ à $(f)$ dans $\Lambda$) telle que $z^{-K} P z^S \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$, et une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (correspondant à un changement de base de $F$, d'après la proposition 3.7) telle que $z^N C z^{-T}$ soit à coefficients dans $\mathcal{O}$. Il existe une permutation $\tau$ telle que l'on ait $v(P_{\tau(i),i}) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Comme $(z^{-K} P z^S)_{ij} = P_{ij} z^{S_j - K_i}$, on obtient l'inégalité 2. On procède de même avec $z^N C z^{-T}$ puisque l'on a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. On termine la preuve à l'aide du lemme suivant.

**Lemme 3.9.** *Soient $P_1 \leqslant \ldots \leqslant P_n$ et $Q_1 \leqslant \ldots \leqslant Q_n$ deux suites croissantes. Supposons qu'il existe une permutation $\sigma$ telle que l'on ait $P_i \leqslant Q_{\sigma(i)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a alors*

$$P_i \leqslant Q_i$$

*pour $i = 1, \ldots, n$.*

Les suites $(k_i)$ et $(s_i)$ sont en effet croissantes par définition. Les suites $(N_i)$ et $(T_i)$ sont décroissantes, mais il suffit de les remplacer par $(-N_i)$ et $(-T_i)$ pour montrer 1 du lemme 3.8.
$\diamondsuit$
*Démonstration du lemme 3.9* : On pose $\Im_t = \{1, \ldots, t\}$ pour tout entier $t$ tel que $1 \leqslant t \leqslant n$. Deux cas sont possibles.

$\sigma(\Im_t) \subset \Im_t$. On a alors $\sigma(t) \leqslant t$, d'où $P_t \leqslant Q_{\sigma(t)} \leqslant Q_t$.

$\sigma(\Im_t) \not\subset \Im_t$. Il existe alors $l \leqslant t$ tel que $\sigma(l) > t$. Comme $\sigma$ est une bijection, cela entraîne qu'il existe $m > t$ tel que $\sigma(m) \leqslant t$. On a alors $P_t \leqslant P_m \leqslant Q_{\sigma(m)} \leqslant Q_t$.

$\diamondsuit$

Signalons le corollaire suivant qui nous servira par la suite.

**Corollaire 3.9.** *Avec les notations précédentes, pour tout réseau stable $M$ on a*

1. $T_i \leqslant N_i - s_1$
2. $k_i \leqslant s_i - s_1$.

*Démonstration* : Le réseau "recentré" $\mathcal{N}_\Lambda(M) = z^{-s_1} M \subset \Lambda$ a pour diviseurs élémentaires $(s_i - s_1)_{i=1}^n$ dans $\Lambda$ et $(-T_i - s_1)_{i=1}^n$ dans $\Lambda_0$. On applique alors le lemme 3.8.
$\diamondsuit$

## 3.3 Réseau de Levelt et réseau saturé de Gérard-Levelt

Dans [G-L], Gérard et Levelt associent à tout réseau, et de façon canonique, un réseau stable. Celui-ci fournit d'après le paragraphe 2.2 un ensemble d'exposants qui *a priori* ne sont pas ceux qu'on attend, c'est-à-dire ceux de Levelt. Cependant, ce réseau a l'avantage de se prêter à un traitement algorithmique, ce qui permet d'"approcher" les exposants de manière effective comme on le verra dans l'Appendice.

On reprend les notations du chapitre 1. Soit $\Lambda$ un réseau de $V$, et soit $\vartheta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ une dérivation de $K$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle *$k$-ième saturé de $\Lambda$ pour la dérivation $\vartheta$* le réseau

$$\mathcal{F}^k_\vartheta(\Lambda) = \Lambda + \nabla_\vartheta(\Lambda) + \ldots + \nabla^k_\vartheta(\Lambda). \tag{3.7}$$

Le résultat que nous utiliserons ici est le suivant.

**Théorème 3.10 (Gérard-Levelt).** *Si la connexion $\nabla$ est régulière, alors pour tout réseau $\Lambda$ de $V$,le $(n-1)$-ième saturé $\mathcal{F}^{n-1}_\theta(\Lambda)$ de $\Lambda$ est $\nabla_\theta$-stable. On le notera $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ et on l'appellera* saturé de Gérard-Levelt *de $\Lambda$ (pour $\nabla_\theta$).*

**Remarque 3.2.** Pour toute dérivation $\vartheta$ telle que $v(\vartheta) = 1$, on a

$$\mathcal{F}^k_\vartheta(\Lambda) = \mathcal{F}^k_\theta(\Lambda)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, si le réseau $\mathcal{F}^k_\vartheta(\Lambda)$ est $\nabla_\theta$-stable, il est également $\nabla_\vartheta$-stable. Ce résultat (voir [G-L], p. 166, Remarque 2.1) nous sera utile dans l'Appendice.

La comparaison de ce réseau $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ avec le réseau $\Lambda_L$ n'est pas aisée. En effet, on a d'une part $\Lambda \subset \mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$, c'est-à-dire seulement

$$\mathcal{N}_\Lambda(\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)) \subset \Lambda_L,$$

ce qui nécessite de déterminer $v_\Lambda(\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda))$. D'autre part, il faut déterminer les diviseurs élémentaires de $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ dans $\Lambda$. Dans une base $(e)$ de $\Lambda$, le réseau $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ est engendré par les colonnes de la matrice de format $n \times n^2$ donnée par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\nabla, (e)) = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A) = (I\ \mathcal{A}\ \mathcal{A}_2\ \ldots \mathcal{A}_{n-1}), \tag{3.8}$$

où $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (e))$ et où l'on a posé pour tout $k \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= I \quad \text{et} && (3.9)\\ \mathcal{A}_{k+1} &= \theta\mathcal{A}_k + A\mathcal{A}_k. && (3.10) \end{aligned}$$

Ni la valuation, ni les diviseurs élémentaires ne sont faciles à déterminer *a priori*. On a cependant le résultat suivant.

**Proposition 3.11.** *Si $V$ est de dimension 2, alors pour tout réseau $\Lambda$ de $V$, le saturé de Gérard-Levelt de $\Lambda$ est homothétique au réseau de Levelt de $\Lambda$. Si $r = r(\nabla, \Lambda)$ est le rang de Poincaré sur $\Lambda$, on a*

$$\Lambda_L = z^r\mathcal{F}^1(\Lambda) = z^r(\Lambda + \nabla_\theta(\Lambda)).$$

*Démonstration* : L'assertion étant triviale si $r = 0$, nous supposerons que $r > 0$. Soit $(e)$ une base quelconque de $\Lambda$. Le réseau $\mathcal{F}^1(\Lambda)$ est engendré par $e_1$, $e_2$, $\nabla_\theta(e_1)$ et $\nabla_\theta(e_2)$. Le rang de Poincaré $r$ vérifie

$$r = \min(-v_\Lambda(\nabla_\theta(e_1)), -v_\Lambda(\nabla_\theta(e_2))),$$

et l'un des deux vecteurs $\nabla_\theta(e_1)$ ou $\nabla_\theta(e_2)$ a donc pour valuation $-r$, d'où $v_\Lambda(\mathcal{F}^1(\Lambda)) = -r$.

On pose $M = z^r\mathcal{F}^1(\Lambda)$. Les diviseurs élémentaires de $M$ dans $\Lambda$ vérifient $k_{1,\Lambda}(M) = 0$ et $k_{2,\Lambda}(M) = l \geqslant r$, d'après le lemme 3.8. Prenons une base de Smith $(e_1, e_2)$ de $\Lambda$ pour $M$. On peut affirmer que $e_1$ et $z^l e_2$ engendrent sur $\mathcal{O}$ le même réseau que $z^r e_1$, $z^r e_2$, $z^r\nabla_\theta(e_1)$ et $z^r\nabla_\theta(e_2)$. Ainsi, il existe $a, b \in \mathcal{O}$ tels que $z^r e_2 = ae_1 + bz^l e_2$. Comme $(e_1, e_2)$ est une $K$-base de $V$, on a $a = 0$ et $bz^l = z^r$. Comme $v(b) \geqslant 0$, on en déduit que $l \leqslant r$, d'où $l = r$. Le réseau $M$ est alors stable et a le même indice dans $\Lambda$ que le réseau de Levelt. On déduit de la proposition 2.2 que $M = \Lambda_L$.
$\diamondsuit$

La méthode de démonstration de la proposition 3.11 suggère l'énoncé suivant, que nous démontrerons dans le chapitre 4, après avoir établi quelques résultats sur la connexion duale.

**Proposition 3.12.** *Supposons que le rang polaire $\eta(\nabla, \Lambda)$ de la connexion $\nabla$ vérifie $\eta(\nabla, \Lambda) = n - 1$. On a alors*

$$\Lambda_L = z^{(n-1)r}\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda).$$

On peut sous les conditions de cet énoncé, (et donc sans restrictions si $n = 2$), calculer de manière effective les exposants. Nous décrirons l'algorithme correspondant dans l'Appendice, et nous donnerons quelques exemples.

# Chapitre 4

# Réseau de Levelt dans les constructions tensorielles

Les constructions tensorielles d'un espace vectoriel à connexion $(V, \nabla)$ s'obtiennent par une succession finie d'opérations de dualité, de quotient, et de produits, tensoriel, extérieur ou symétrique. Toute construction $C(V)$ de $(V, \nabla)$ est naturellement munie d'une connexion $C(\nabla)$ induite par $\nabla$ sur $C(V)$, et si $(V, \nabla)$ est régulière, toute construction est régulière (*cf.* [M]). On peut, grâce à la définition 2.1, considérer le réseau de Levelt de toute construction $C(M)$, où $M$ est un réseau de $V$, et l'on a $C(M)_L \supset C(M_L)$.

## 4.1 Le dual

Etant donné un espace vectoriel à connexion $(V, \nabla)$, la connexion $\nabla^*$ induite par $\nabla$ sur le $K$-dual $V^*$ de $V$ est définie pour toute $\partial \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(K)$ par la relation, pour tout $f \in V^*$, et tout $v \in V$

$$(\nabla^*_\partial(f))(v) = \partial(f(v)) - f(\nabla_\partial(v)). \tag{4.1}$$

Rappelons le lemme suivant.

**Lemme 4.1.** *Soit $M$ un réseau de $V$ engendré sur $\mathcal{O}$ par la base $(e)$ et soit $(e^*)$ la base duale de $(e)$. On a alors*

$$Hom_K(M, \mathcal{O}) = Hom_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O}) = \mathcal{R}(e^*).$$

*On note ce réseau $M^*$ et on l'appelle* réseau dual *de $M$.*

En appliquant la relation (4.1) aux vecteurs $e_i$ d'une base de $V$ et $e_j^*$ de la base duale, on voit aisément que si la connexion $\nabla$ s'exprime dans $(e)$ comme le système différentiel $dX/dz = AX$, alors la connexion duale s'exprime dans $(e^*)$ par le système

$$\frac{dX}{dz} = -{}^tAX. \tag{4.2}$$

De là, on déduit que le rang de Poincaré du dual $M^*$ vérifie

$$r(\nabla^*, M^*) = r(\nabla, M).$$

De plus, il résulte du lemme (4.1) que pour deux réseaux $\Lambda$ et $M$ de $V$, la relation $M \subset \Lambda$ entraîne que $M^* \supset \Lambda^*$. On est donc amené à poser la définition suivante, qui a un sens en vertu de la proposition 2.1.

**Définition 4.1.** *Soit $\Lambda$ un réseau de $V$. On appelle* co-réseau de Levelt *associé à $\Lambda$, et l'on note $\Lambda^L$, le plus* petit *réseau stable* contenant $\Lambda$*.*

Il s'agit de la notion duale de la définition 2.1. On a le résultat suivant.

**Proposition 4.1.** *Soit $\Lambda$ un réseau de $V$. Soient $(k_1, \dots, k_n)$ les diviseurs élémentaires du réseau de Levelt $\Lambda_L$ dans $\Lambda$ et $(k_1^*, \dots, k_n^*)$ ceux du réseau de Levelt $(\Lambda^*)_L$ dans $\Lambda^*$. On a alors*

1. $(\Lambda^*)_L = (\Lambda^L)^*$.
2. $k_i + k_{n+1-i}^* \leqslant k_n$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$*. En particulier* $k_n^* = k_n$*.*

La preuve de la relation 1 de la proposition 4.1 repose sur le lemme suivant.

**Lemme 4.2.** *Pour deux réseaux $M$ et $\tilde{M}$ de $V$, on a*

$$(M + \tilde{M})^* = M^* \cap \tilde{M}^*.$$

*Démonstration* : Soit $f \in V^*$. On a $f(M + \tilde{M}) = f(M) + f(\tilde{M})$.

Supposons $f \in M^* \cap \tilde{M}^*$. On a alors $f(M) \subset \mathcal{O}$ et $f(\tilde{M}) \subset \mathcal{O}$, d'où l'on déduit que $f(M + \tilde{M}) \subset \mathcal{O}$, c'est-à-dire que $f \in (M + \tilde{M})^*$.

Si $f \in (M + \tilde{M})^*$, alors $f(M + \tilde{M}) \subset \mathcal{O}$. Or on a $f(M) \subset f(M + \tilde{M})$, d'où $f \in M^*$. Des relations analogues vérifiées par $\tilde{M}$, on obtient que $f \in M^* \cap \tilde{M}^*$.

$\diamondsuit$

*Démonstration de la proposition 4.1* : 1. On vérifie à l'aide du lemme 4.2 que $\Lambda^L = \bigcap_{\Lambda \subset M \in \mathcal{L}_\theta} M$, et l'on raisonne comme pour la démonstration de la proposition 2.2.

2. Le réseau $\Lambda^L$ est stable, et par hypothèse, ses diviseurs élémentaires relatifs à $\Lambda$ sont $(-k_n^*, \dots, -k_1^*)$. Sa valuation dans $\Lambda$ est donc donnée par $v_\Lambda(\Lambda^L) = -k_n^* = -k_n$. Par la maximalité de $\Lambda_L$, on obtient l'inclusion

$$\mathcal{N}_\Lambda(\Lambda^L) = z^{k_n} \Lambda^L \subset \Lambda_L. \tag{4.3}$$

Notons $(\varepsilon)$ une base de Smith de $\Lambda$ pour $\Lambda_L$ et $(z^K \varepsilon)$ la base de $\Lambda_L$ correspondante. On rappelle la notation $\overline{k}_\Lambda = (k_{1,\Lambda}, \dots, k_{n,\Lambda})$. Il existe une matrice

$P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ telle que la matrice $z^{-\overline{k}_\Lambda(\Lambda_L)} P z^{k_n I - \overline{k}_\Lambda(\Lambda^L)} = (P_{ij} z^{k_n - k_j^* - k_i})$ fasse passer de la base $z^K(\varepsilon)$ de $\Lambda_L$ à une base de $\Lambda^L$. L'inclusion (4.3) entraîne que $z^{-\overline{k}_\Lambda(\Lambda_L)} P z^{k_n I - \overline{k}_\Lambda(\Lambda^L)} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$. On en déduit que l'on a $v(P_{ij}) \geqslant k_i + k_j^* - k_n$. Comme $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $v(P_{i,\sigma(i)}) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Par conséquent, on a $k_i + k^*_{\sigma(i)} \leqslant k_n$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Réécrivons cette inégalité sous la forme $k_i \leqslant k_n - k^*_{\sigma(i)}$.

La suite $(k_n - k^*_{n+1-i})_{i=1}^n$ est croissante, et la suite $(k_n - k^*_{\sigma(i)})_{i=1}^n$ en est l'image par une permutation. On déduit du lemme 3.9 que l'on a

$$k_i \leqslant k_n - k^*_{n+1-i}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

La dernière égalité en résulte car $k_1 = k_1^* = 0$, puisque $\Lambda_L$ et $(\Lambda^*)_L$ sont des réseaux de Levelt.
$\diamondsuit$

**Remarque 4.1.** Comme $\Lambda \subset \mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$, le réseau saturé $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ contient par définition le co-réseau de Levelt $\Lambda^L$ de $\Lambda$.

**Corollaire 4.2.** *Supposons que le rang polaire de $\nabla$ vérifie $\eta(\nabla, \Lambda) = n-1$. Le réseau de Levelt dual $(\Lambda^*)_L$ a pour diviseurs élémentaires*

$$\overline{k}_{\Lambda^*}((\Lambda^*)_L) = (0, r, \ldots, (n-1)r).$$

*Démonstration* : Le résultat découle du corollaire 2.9 puisque d'après (4.2), on a $\eta(\nabla^*, \Lambda^*) = \eta(\nabla, \Lambda) = n-1$ .
$\diamondsuit$

**Remarque 4.2.** Dans les conditions du corollaire précédent, le co-réseau de Levelt de $\Lambda$ est homothétique au réseau de Levelt de $\Lambda$.

**Proposition 3.11.** *Supposons que le rang polaire $\eta(\nabla, \Lambda)$ de la connexion $\nabla$ vérifie $\eta(\nabla, \Lambda) = n-1$. On a alors*

$$\Lambda_L = z^{(n-1)r} \mathcal{F}^{n-1}(\Lambda).$$

*Démonstration* : Comme pour la proposition 3.11, nous supposerons que l'on a $r > 0$. On procède en deux étapes.

1. On montre que $v_\Lambda(\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)) = (n-1)r$.

   Soit $(e)$ une base de $\Lambda$, et $A = \mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (e))$ qui admet le développement
$$A = A_{-r} z^{-r} + \ldots + A_{-1} \frac{1}{z} + A_0 + \ldots$$
   D'après les équations (3.9) et (3.10), les termes "les plus polaires" de la matrice élargie $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A)$ proviennent de colonnes de la matrice

$(A_{-r})^{n-1}$. Comme la matrice $A_{-r}$ est nilpotente mais que son rang vaut $\mathrm{rg} A_{-r} = \eta(\nabla, \Lambda) = n-1$, la matrice $(A_{-r})^{n-1}$ est non nulle. Ainsi, il existe un vecteur dans $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ dont la valuation par rapport à $\Lambda$ est exactement $-(n-1)r$.

2. Le réseau $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ est stable. Comme il contient $\Lambda$, d'après la définition 4.1, on a $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda) \supset \Lambda^L$.

   La situation ci-dessus est décrite par le schéma de gauche, avec les conventions du paragraphe 3.2.2, et le schéma de droite en est la version "dualisée".

$$\begin{tikzcd} \Lambda^L \arrow[r, "z^{K^*}"] & \Lambda \\ & \mathcal{F}^{n-1}(\Lambda) \arrow[u, "z^T"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\Lambda^*)_L & \Lambda^* \arrow[l, "z^{K^*}"'] \arrow[d, "z^T"] \\ & (\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda))^* \end{tikzcd}$$

D'aprèsle lemme 3.8, on a pour tout $i = 1, \dots, n$

$$k_i^* \leqslant t_i. \tag{4.4}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. Or le corollaire 4.2 entraîne que $k_i^* = (i-1)r$ d'où

$$(i-1)r \leqslant t_i. \tag{4.5}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de Smith de $\Lambda$ pour $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$. Avec les notations du schéma ci-dessus, le réseau $\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ est engendré par les deux familles

$$(z^{-t_n} e_1, \dots, z^{-t_1} e_n),$$

et

$$(e_1, \dots, e_n, \nabla_\theta(e_1), \dots, \nabla_\theta(e_n), \dots, \nabla_\theta^{n-1}(e_n)).$$

La famille $(z^{(n-1)r-t_n} e_1, \dots, z^{(n-1)r-t_1} e_n)$ est une base de Smith de $\Lambda$ pour le réseau $\Lambda$-centré $\mathcal{N}_\Lambda(\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)) = z^{(n-1)r}\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$, qui a donc pour diviseurs élémentaires $((n-1)r - t_n, \dots, (n-1)r - t_1)$. D'après le lemme 3.8, on a $k_i \leqslant (n-1)r - t_{n+1-i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Par le corollaire 2.9, on a $k_i = (i-1)r$ pour tout $i = 1, \dots, n$, d'où l'on déduit

$$t_{n+1-i} \leqslant (n-i)r \tag{4.6}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

En rapprochant les relations (4.5) et (4.6), on obtient que $t_i = k_i = k_i^*$ pour tout $i = 1, \dots, n$. L'indice de $z^{(n-1)r}\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$ dans $\Lambda$ est alors égal à celui de $\Lambda_L$ dans $\Lambda$, et l'on déduit de la proposition 2.2 que $\Lambda_L = z^{(n-1)r}\mathcal{F}^{n-1}(\Lambda)$.

♢

## 4.2 Puissances tensorielles d'ordre 2

### 4.2.1 Le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$

Soient $(V_1, \nabla_1)$ et $(V_2, \nabla_2)$ deux espaces vectoriels à connexion régulière, de dimensions respectives $n_1$ et $n_2$, et deux réseaux $\Lambda_i$ dans $V_i$ pour $i = 1, 2$. On note $r_i = r(\nabla_i, \Lambda_i)$ les rangs de Poincaré respectifs, et $\nu_i = [\Lambda_i : (\Lambda_i)_L]$ les indices des réseaux de Levelt associés. La connexion canonique associée, définie par

$$\nabla_1 \otimes \nabla_2(v_1 \otimes v_2) = \nabla_1(v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes \nabla_2(v_2) \tag{4.7}$$

est régulière. Le $\mathcal{O}$-module $\Lambda_1 \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_2$ est un réseau de l'espace $V_1 \otimes V_2$, et d'après la formule (4.7), le rang de Poincaré du produit tensoriel vérifie

$$r(\nabla_1 \otimes \nabla_2, \Lambda_1 \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_2) = \max(r(\nabla_1, \Lambda_1), r(\nabla_2, \Lambda_2)).$$

**Proposition 4.2.** *L'indice $\nu_1 \otimes \nu_2$ du réseau de Levelt $(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)_L$ associé au réseau $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ de $V_1 \otimes V_2$ vérifie*

$$\max(r_1, r_2) \leqslant \nu_1 \otimes \nu_2 = [\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 : (\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)_L] \leqslant \frac{n_1 n_2}{2}((n_1-1)r_1 + (n_2-1)r_2).$$

*Démonstration* : Nous posons pour $i = 1, 2$ les notations suivantes :

$(e^i_m)_{1 \leqslant m \leqslant n_i}$ base de Smith de $\Lambda_i$ pour $(\Lambda_i)_L$.

$(k^i_m)_{1 \leqslant m \leqslant n_i}$ les diviseurs élémentaires de $(\Lambda_i)_L$ dans $\Lambda_i$.

$\nu_i = [\Lambda_i : (\Lambda_i)_L]$

Le produit tensoriel $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ est engendré sur $\mathcal{O}$ par la base $(e^1_l \otimes e^2_m)^{1 \leqslant m \leqslant n_2}_{1 \leqslant l \leqslant n_1}$ dans $V_1 \otimes V_2$. Cette base est une base de Smith de $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ pour le réseau $(\Lambda_1)_L \otimes (\Lambda_2)_L$, dont les diviseurs élémentaires sont $(k^1_l + k^2_m)^{1 \leqslant m \leqslant n_2}_{1 \leqslant l \leqslant n_1}$. En particulier, $v_{\Lambda_1\otimes\Lambda_2}((\Lambda_1)_L \otimes (\Lambda_2)_L) = k_1^1 + k_1^2 = 0$. La maximalité du réseau de Levelt entraîne que

$$\begin{aligned}\nu_1 \otimes \nu_2 \leqslant [\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 : (\Lambda_1)_L \otimes (\Lambda_2)_L] &= \sum_{l=1}^{n_1}\sum_{m=1}^{n_2}(k_l + k_m) \\ &= \sum_{l=1}^{n_1}(n_2 k_l + \nu_2) \\ &= n_2\nu_1 + n_1\nu_2.\end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 2.6, on a $\nu_i \leqslant \frac{n_i(n_i-1)}{2} r_i$, d'où

$$\nu_1 \otimes \nu_2 \leqslant \frac{n_1 n_2}{2}((n_1-1)r_1 + (n_2-1)r_2).$$

♢

### 4.2.2 Puissances tensorielles d'ordre 2 d'un même espace

Dans cette partie, on suppose donnés un réseau $\Lambda$ dans le $K$-espace vectoriel à connexion $(V, \nabla)$, le rang de Poincaré $r = r(\nabla, \Lambda)$ de $\nabla$ sur $\Lambda$, le réseau de Levelt $\Lambda_L$ de $\Lambda$, une base de Smith $(e)$ de $\Lambda$ pour $\Lambda_L$, ainsi que les diviseurs élémentaires $(k_1, \ldots, k_n)$ de $\Lambda_L$ dans $\Lambda$. On posera $\nu = [\Lambda : \Lambda_L]$ et on rappelle que, d'après le corollaire 2.6, on a $\nu \leqslant \frac{n(n-1)}{2} r$.

#### Le carré tensoriel $V^{\otimes 2}$

**Proposition 4.3.** *L'indice $\nu^{\otimes 2}$ du réseau de Levelt $(\Lambda^{\otimes 2})_L$ dans $\Lambda^{\otimes 2}$ vérifie*

$$r \leqslant \nu^{\otimes 2} = [\Lambda^{\otimes 2} : (\Lambda^{\otimes 2})_L] \leqslant n^2(n-1)r.$$

*Démonstration* : On applique la proposition 4.2 au cas $V_1 = V_2 = V$.
♢

**Remarque 4.3.** Comme $\dim_K V^{\otimes 2} = n^2$, une application directe du corollaire 2.6 aurait donné seulement $\nu^{\otimes 2} \leqslant \frac{n^2(n^2-1)}{2} r$.

#### Le carré symétrique $S^2 V$

**Proposition 4.4.** *L'indice $S^2\nu$ du réseau de Levelt $(S^2\Lambda)_L$ dans $S^2\Lambda$ vérifie*

$$S^2\nu = [S^2\Lambda : (S^2\Lambda)_L] \leqslant \frac{(n+1)n(n-1)}{2} r.$$

*Démonstration* : Le carré symétrique $S^2\Lambda$ admet $(e_ie_j)_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ comme base sur $\mathcal{O}$. Cette base donne les diviseurs élémentaires de $S^2(\Lambda_L)$ dans $S^2\Lambda$, qui sont $(k_i+k_j)_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. On a également $v_{S^2\Lambda}(S^2(\Lambda_L)) = 0$. On déduit alors de la proposition 2.2 que $S^2\nu \leqslant [S^2\Lambda : S^2(\Lambda_L)] = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(k_i+k_j)$. Par symétrie, on a l'égalité $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(k_i+k_j) = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(k_i+k_j)$. En sommant ces deux membres, on obtient

$$2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(k_i+k_j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(k_i+k_j) + \sum_{1\leqslant i=j\leqslant n}(k_i+k_j) = 2n\nu + 2\nu.$$

On en déduit que $[S^2\Lambda : S^2(\Lambda_L)] = (n+1)\nu$, d'où

$$S^2\nu \leqslant \frac{(n+1)n(n-1)}{2}r.$$

$\diamondsuit$

**Remarque 4.4.** Comme $\dim_K S^2V = \frac{n(n+1)}{2}$, le corollaire 2.6 donnerait seulement la majoration $S^2\nu \leqslant \frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{8}r$.

**Le carré extérieur $\bigwedge^2 V$**

**Proposition 4.5.** *L'indice $\bigwedge^2\nu$ du réseau de Levelt $(\bigwedge^2\Lambda)_L$ dans $\bigwedge^2\Lambda$ vérifie*

$$\bigwedge^2\nu = [\bigwedge^2\Lambda : (\bigwedge^2\Lambda)_L] \leqslant \frac{n(n-1)^2}{2}r.$$

*Démonstration* : La puissance extérieure $\bigwedge^2\Lambda$ admet $(e_i\wedge e_j)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ comme base sur $\mathcal{O}$. Les diviseurs élémentaires de $\bigwedge^2(\Lambda_L)$ dans $\bigwedge^2\Lambda$ sont donnés par la suite $(k_i+k_j)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$. Ici, on a seulement $v_{\bigwedge^2\Lambda}(\bigwedge^2(\Lambda_L)) = k_1+k_2 \geqslant 0$, mais on a néanmoins $\bigwedge^2(\Lambda_L) \subset \bigwedge^2\Lambda$. Par la proposition 2.2, on montre que l'on a

$$\bigwedge^2\nu \leqslant [\bigwedge^2\Lambda : \bigwedge^2(\Lambda_L)] = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(k_i+k_j).$$

Or $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(k_i+k_j) + \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(k_i+k_j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(k_i+k_j)$. Par conséquent, on a $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(k_i+k_j) = 2n\nu - (n+1)\nu = (n-1)\nu$. On en déduit alors que $[\bigwedge^2\Lambda : \bigwedge^2(\Lambda_L)] = (n-1)\nu$, d'où

$$\bigwedge^2\nu \leqslant \frac{n(n-1)^2}{2}r.$$

$\diamondsuit$

**Remarque 4.5.** Comme $\dim_K \bigwedge^2 V = \frac{n(n-1)}{2}$, le corollaire 2.6 donne la majoration $\bigwedge^2 \nu \leqslant \frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{8} r$. Notons que pour $n = 2$, cette majoration donne $\bigwedge^2 \nu = 0$, ce qui améliore celle de la proposition 4.5. De fait, $\bigwedge^2 V$ est la puissance extérieure maximale de $V$, de dimension 1, et, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.5.2, tous les réseaux d'un $K$-espace vectoriel à connexion régulière $(V, \nabla)$ de dimension 1 sont stables.

**L'espace** $\mathrm{End}(V)$

Comme $\mathrm{End}(V) = V \otimes V^*$, nous conservons dans ce paragraphe les notations de la partie 4.1 relatives au dual de $\Lambda$ et nous poserons en outre $\nu^* = [\Lambda^* : (\Lambda^*)_L]$.

**Proposition 4.6.** *L'indice* $\mathrm{End}(\nu)$ *du réseau de Levelt* $(\mathrm{End}(\Lambda))_L$ *dans* $\mathrm{End}(\Lambda)$ *vérifie*

$$\mathrm{End}(\nu) = [\mathrm{End}(\Lambda) : (\mathrm{End}(\Lambda))_L] \leqslant n^2(n-1)r.$$

*Démonstration* : Le module $\mathrm{End}(\Lambda)$ admet la famille $(e_i \otimes e_j^*)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ comme $\mathcal{O}$-base. Les diviseurs élémentaires de $\mathrm{End}(\Lambda_L)$ dans $\mathrm{End}(\Lambda)$ sont donc donnés par $(k_i + k_j^*)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$, et l'on a $v_{\mathrm{End}(\Lambda)}(\mathrm{End}(\Lambda_L)) = k_1 + k_1^* = 0$. La proposition 2.2 donne $\mathrm{End}(\nu) \leqslant [\mathrm{End}(\Lambda) : \mathrm{End}(\Lambda_L)] = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (k_i + k_j^*) = n(\nu + \nu^*)$. Or, d'après la proposition 4.1, on a $\nu + \nu^* \leqslant n k_n$, et, d'après la proposition 2.4, on a $k_n \leqslant (n-1)r$, d'où l'on déduit que

$$\mathrm{End}(\nu) \leqslant n^2(n-1)r.$$

$\diamondsuit$

**Remarque 4.6.** Comme $\dim_K \mathrm{End}(V) = n^2$, le corollaire 2.6 aurait seulement donné la majoration $\mathrm{End}(\nu) \leqslant \frac{n^2(n^2-1)}{2} r$.

## 4.3 Puissances d'ordre supérieur.

Nous conservons ici les notations précédentes. Soit $\ell > 0$ un entier. Les résultats qui suivent sont les généralisations à l'ordre $\ell$ des résultats donnés en dimension 2.

### 4.3.1 Le produit tensoriel $V_1 \otimes \ldots \otimes V_\ell$

Soient $(V_1, \nabla_1), \ldots, (V_\ell, \nabla_\ell)$ $\ell$ espaces vectoriels à connexion régulière, de dimensions respectives $n_1, \ldots n_\ell$, et $\ell$ réseaux $\Lambda_i$ dans $V_i$ pour $i = 1, \ldots, \ell$. On note $r_i = r(\nabla_i, \Lambda_i)$ les rangs de Poincaré respectifs, et $\nu_i = [\Lambda_i : (\Lambda_i)_L]$

les indices des réseaux de Levelt associés. La connexion canonique associée, définie par

$$\begin{aligned}\nabla_1 \otimes \ldots \otimes \nabla_\ell(v_1 \otimes \ldots \otimes v_\ell) &= \nabla_1(v_1) \otimes \ldots \otimes v_\ell \\ &+ v_1 \otimes \nabla_2(v_2) \otimes \ldots \otimes v_\ell + \ldots \\ &\ldots + v_1 \otimes \ldots \otimes \nabla_\ell(v_\ell)\end{aligned}$$

est régulière. Le $\mathcal{O}$-module $\Lambda_1 \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_\ell$ est un réseau de l'espace produit $V_1 \otimes \ldots \otimes V_\ell$, et d'après la formule précédente, le rang de Poincaré du produit tensoriel vérifie

$$r(\nabla_1 \otimes \ldots \otimes \nabla_\ell, \Lambda_1 \otimes_{\mathcal{O}} \ldots \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_\ell) = \max(r(\nabla_1, \Lambda_1), \ldots, r(\nabla_\ell, \Lambda_\ell)).$$

**Proposition 4.7.** *L'indice $\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_\ell$ du réseau de Levelt $(\Lambda_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda_\ell)_L$ dans le réseau $\Lambda_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda_\ell$ de $V_1 \otimes \ldots \otimes V_\ell$ vérifie*

$$\max(r_1, \ldots r_\ell) \leqslant \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_\ell \leqslant \frac{n_1 n_2 \ldots n_\ell}{2} \sum_{i=1}^{\ell} (n_i - 1) r_i.$$

*Démonstration* : Nous introduisons pour $i = 1, \ldots, \ell$ les notations suivantes :

$(e^i_m)_{1 \leqslant m \leqslant n_i}$ base de Smith de $\Lambda_i$ pour $(\Lambda_i)_L$.

$(k^i_m)_{1 \leqslant m \leqslant n_i}$ les diviseurs élémentaires de $(\Lambda_i)_L$ dans $\Lambda_i$.

$\nu_i = [\Lambda_i : (\Lambda_i)_L]$

Le réseau $\Lambda_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda_\ell$ est engendré sur $\mathcal{O}$ par la base $(e^1_{m_1} \otimes \ldots \otimes e^i_{m_i})^{1 \leqslant i \leqslant \ell}_{1 \leqslant m_i \leqslant n_i}$ dans $V_1 \otimes \ldots \otimes V_\ell$. Cette base est une base de Smith de $\Lambda_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda_\ell$ pour $(\Lambda_1)_L \otimes \ldots \otimes (\Lambda_\ell)_L$, dont les diviseurs élémentaires sont donnés par la suite $(k^1_{m_1} + \ldots + k^\ell_{m_\ell})^{1 \leqslant i \leqslant \ell}_{1 \leqslant m_i \leqslant n_i}$. En particulier,

$$v_{\Lambda_1 \otimes \ldots \otimes \Lambda_\ell}((\Lambda_1)_L \otimes \ldots \otimes (\Lambda_\ell)_L) = k^1_1 + \ldots + k^\ell_1 = 0.$$

La maximalité du réseau de Levelt entraîne que

$$\begin{aligned}\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_\ell \leqslant &= \sum_{m_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{m_\ell=1}^{n_\ell} (k_{m_1} + \ldots k_{m_\ell}) \\ &= \sum_{m_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{m_{\ell-1}=1}^{n_{\ell-1}} (n_\ell k_\ell + \nu_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j \neq i} n_j) \nu_i.\end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 2.6, on a $\nu_i \leqslant \frac{n_i(n_i-1)}{2} r_i$, d'où

$$\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_\ell \leqslant \frac{n_1 \ldots n_\ell}{2} \sum_{i=1}^{\ell} (n_i - 1) r_i.$$

$\diamondsuit$

### 4.3.2 Puissances d'un même espace

On obtient une formule commune aux espaces $V^{\otimes \ell}$, $S^\ell V$ et $\bigwedge^\ell V$.

**Proposition 4.8.** *Si $\Pi^\ell V$ désigne l'un des espaces $V^{\otimes \ell}$, $S^\ell V$ ou $\bigwedge^\ell V$, l'indice $\Pi^\ell \nu$ du réseau de Levelt $(\Pi^\ell \Lambda)_L$ dans $\Pi^\ell \Lambda$ vérifie*

$$\Pi^\ell \nu = [\Pi^\ell \Lambda : (\Pi^\ell \Lambda)_L] \leqslant \frac{\ell}{2} \dim_K(\Pi^\ell V)(n-1)r.$$

Les trois lemmes suivants donnent le résultat cherché pour chacune des puissances tensorielles concernées.

**Lemme 4.3.** $\nu^{\otimes \ell} = [\Lambda^{\otimes \ell} : (\Lambda^{\otimes \ell})_L] \leqslant \frac{\ell}{2} n^\ell (n-1)r$.

*Démonstration* : On applique la proposition 4.7 avec $V_1 = \ldots = V_\ell = V$.
$\diamondsuit$

**Lemme 4.4.** $S^\ell \nu = [S^\ell \Lambda : (S^\ell \Lambda)_L] \leqslant \frac{1}{2} \binom{n+\ell-1}{n} n(n-1)r.$

*Démonstration* : La famille $(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_\ell})_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\ell \leqslant n}$ forme une base de Smith de $S^\ell \Lambda$ pour $(S^\ell \Lambda)_L$.

Nous démontrons le lemme plus général suivant.

**Lemme 4.5.** *Pour tout $\ell, n \in \mathbb{N}^*$, et toute suite $(t_1, \ldots, t_n)$, on a*

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\ell \leqslant n} (t_{i_1} + \ldots + t_{i_\ell}) = \binom{n-1+\ell}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i \right). \tag{4.8}$$

*Démonstration* : L'application

$$\begin{array}{rcl} \chi_\ell^n : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t_1, \ldots, t_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\ell \leqslant n} (t_{i_1} + \ldots + t_{i_\ell}) \end{array}$$

est multilinéaire, et elle est clairement invariante par le groupe symétrique $S_n$. Il existe donc un nombre $T_\ell^n$ tel que $\chi_\ell^n(t_1, \ldots, t_n) = T_\ell^n (\sum_{i=1}^n t_i)$.

En particulier, en prenant $t_1 = \ldots = t_n = 1$, on trouve

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_\ell \leqslant n} (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\ell \text{ fois}}) = \ell \dim_K(S^\ell V) = T_\ell^n \, n,$$

d'où

$$T_\ell^n = \frac{\ell}{n} \binom{n+\ell-1}{n-1} = \binom{n+\ell-1}{n}.$$

$\diamondsuit$

Le résultat du lemme 4.4 en découle alors directement.

$\diamondsuit$

Pour la puissance extérieure $\bigwedge^\ell V$, on supposera que $\ell \leqslant n$.

**Lemme 4.6.** $\bigwedge^\ell \nu = [\bigwedge^\ell \Lambda : (\bigwedge^\ell \Lambda)_L] \leqslant \frac{1}{2}\binom{n-1}{\ell-1} n(n-1)r.$

*Démonstration* : On reprend la méthode précédente avec la base de Smith de $\bigwedge^\ell \Lambda$ pour $(\bigwedge^\ell \Lambda)_L$ donnée par $(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_\ell})_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant n}$.

**Lemme 4.7.** *Pour tout $\ell \leqslant n \in \mathbb{N}^*$, et pour toute suite $(t_1, \ldots, t_n)$, on a*

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant n} (t_{i_1} + \ldots + t_{i_\ell}) = \binom{n-1}{\ell-1} \left( \sum_{i=1}^n t_i \right). \tag{4.9}$$

*Démonstration* : On applique ici le même raisonnement qu'au lemme 4.5. On trouve qu'il existe $S_\ell^n$ tel que $\sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant n} (t_{i_1} + \ldots + t_{i_\ell}) = S_\ell^n (\sum_{i=1}^n t_i)$. On en déduit que

$$\ell \, \dim_K(\bigwedge^n V) = S_\ell^n \, n,$$

c'est-à-dire

$$S_\ell^n = \binom{n-1}{\ell-1}.$$

$\diamondsuit$

Le lemme 4.6 est alors immédiat.

$\diamondsuit$

*Démonstration de la proposition 4.8* :

1. On a $\dim_K V^{\otimes \ell} = n^\ell$, par conséquent le lemme 4.3 donne

$$\nu^{\otimes \ell} \leqslant \frac{\ell}{2} n^\ell (n-1) r \leqslant \frac{\ell}{2} \dim_K V^{\otimes \ell} (n-1) r.$$

2. Comme $\dim_K S^\ell V = \binom{n-1+\ell}{n-1}$, on a, par le lemme 4.4,

$$\begin{aligned} S^\ell \nu \leqslant \frac{1}{2} \binom{n+\ell-1}{n} n(n-1)r &= \frac{1}{2}\frac{\ell}{n} \binom{n+\ell-1}{n-1} n(n-1)r \\ &= \frac{\ell}{2} \dim_K S^\ell V (n-1) r. \end{aligned}$$

3. Comme $\dim_K \bigwedge^\ell V = \binom{n}{\ell}$, le lemme 4.6 donne enfin la formule :

$$\bigwedge^{\ell} \nu \leqslant \frac{1}{2}\binom{n-1}{\ell-1} n(n-1)r = \frac{1}{2}\frac{\ell}{n}\binom{n}{\ell} n(n-1)r = \frac{\ell}{2}\dim_K \bigwedge^{\ell} V(n-1)r.$$

$\diamondsuit$

**Remarque 4.7.** Le corollaire 2.6 donnerait la majoration plus faible

$$\Pi^\ell \nu \leqslant \frac{1}{2}\dim_K \Pi^\ell V(\dim_K \Pi^\ell V - 1)r.$$

# Appendice

Nous donnons dans cette partie un algorithme qui permet, pour un système donné, d'approcher, voire de calculer explicitement les exposants. Nous décrivons également son exécution dans le système de calcul formel Maple, et nous illustrons la théorie précédente à l'aide de quelques exemples.

Le principe général de cet algorithme est de déterminer une $\mathcal{O}$-base du réseau saturé de Gérard et Levelt décrit au paragraphe 3.3 afin d'obtenir l'expression de la connexion sur un réseau stable canonique contenu dans le réseau de Levelt.

À la donnée d'un système différentiel

$$\frac{dX}{dz} = AX \tag{5.1}$$

on associe un ensemble de $n$ vecteurs-colonne engendrant le même réseau que les $n^2$ colonnes de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(fA)$ (voir paragraphe 3.3, relation (3.8)), pour un élément $f \in K$ bien choisi.

Le procédé qui permet cette réduction s'appelle *mise sous forme normale d'Hermite* de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(fA)$. Nous rappelons sa définition au paragraphe suivant. Les conditions sous lesquelles la réduction à la forme normale d'Hermite est effectivement réalisable par l'ordinateur déterminent le type de systèmes différentiels auquel on peut appliquer l'algorithme décrit au paragraphe 5.2.

## 5.1 Forme normale d'Hermite

Soit $E$ un anneau euclidien. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers. On note $\mathrm{M}_{n\times m}(E)$ l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes à coefficients dans $E$. On suppose que $n \leqslant m$.

**Théorème 5.1 (Forme normale d'Hermite).** *Soit $M = (M_{ij})$ un élément de $\mathrm{M}_{n\times m}(E)$. Il existe une matrice $U \in \mathrm{GL}_m(E)$ telle que la matrice*

*MU ait la forme suivante*

$$MU = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & m_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Comme $U \in \mathrm{GL}_m(E)$, les $n$ dernières colonnes de la matrice $MU$ engendrent le même $E$-module que les $m$ colonnes de $M$.

Ce théorème s'applique en particulier pour un anneau de polynômes tel que $\mathbb{C}[z]$ (voir [Co], p. 69, et [Ro], ch. VI). On peut supposer de plus que les polynômes $m_{ii}$ sont unitaires pour tout $i = 1, \dots, n$ et que l'on a $d^\circ m_{ii} > d^\circ m_{ij}$ pour tout $j > i$.

## 5.2 Description théorique de l'algorithme

Nous reprenons les notations et résultats du paragraphe 2.3.2. On considère un système différentiel $dX/dz = AX$ dont la matrice est à coefficients dans le corps $K = \mathbb{C}(z)$, et n'ayant que des singularités régulières sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On pose $V = K^n$ et on considère la connexion $\nabla$ telle $\nabla_{\frac{d}{dz}}$ soit représentée par la matrice $A$ dans la base canonique de $V$.

Pour tout pôle $z = a_i$ de la matrice $A$, l'anneau $R_i = \mathbb{C}[z]_{(z-a_i)}$, localisé de $\mathbb{C}[z]$ en l'idéal principal $(z - a_i)$, est le sous-anneau de valuation de $K$ pour la valuation $(z - a_i)$-adique $v_i$. À son tour, le corps $K$ peut-être vu comme un sous-corps du corps $\mathbb{C}((z - a_i))$ des séries formelles en $(z - a_i)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose $\Lambda_i = (R_i)^n$.

Le théorème de Gérard et Levelt 3.10 nous assure que

$$\nabla_{(z-a_i)\frac{d}{dz}}(\mathcal{F}^{n-1}_{(z-a_i)\frac{d}{dz}}(\Lambda_i)) \subset \mathcal{F}^{n-1}_{(z-a_i)\frac{d}{dz}}(\Lambda_i).$$

Le réseau $\mathcal{F}^{n-1}_{(z-a_i)\frac{d}{dz}}(\Lambda_i)$ n'est autre que le *saturé de Gérard-Levelt du réseau $\Lambda_i$ pour la variable $t_i = z - a_i$.*

Ce procédé peut être mené simultanément en toutes les singularités du système à distance finie. Soit $S = \{a_1, \dots, a_p\}$ l'ensemble des pôles dans $\mathbb{C}$ de la matrice $A$. Posons $f = (z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_p)$.

**Proposition 5.2.** *Soit $\vartheta$ la dérivation de $K$ définie par $\vartheta = fd/dz$.*

1. *Le réseau $\mathcal{F}^{n-1}_{\vartheta}(\Lambda_i)$ est $\nabla_{(z-a_i)\frac{d}{dz}}$-stable pour tout $i = 1, \dots, p$.*

2. *Il existe une $K$-base $(e)$ de $V$ telle que le réseau $\mathcal{F}^{n-1}_{\vartheta}(\Lambda_i)$ soit engendré sur $R_i$ par la base $(e)$ pour tout $i = 1, \dots, p$.*

*Démonstration* : On a $v_i(f) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, p$. Par conséquent, la dérivation $\vartheta = (z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_p)d/dz = fd/dz$ vérifie pour tout $i = 1, \dots, p$

$$v_i(\vartheta) = 1.$$

D'après la remarque 3.2, le réseau $\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda_i)$ est confondu avec $\mathcal{F}^{n-1}_{(z-a_i)\frac{d}{dz}}(\Lambda_i)$. Il est donc $\nabla_\vartheta$-stable et $\nabla_{(z-a_i)\frac{d}{dz}}$-stable, ce qui démontre 1.

D'après 3.3, le réseau $\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda_i)$ est, pour tout $i = 1, \dots, p$, engendré dans la base canonique de $K^n$ par les colonnes de la matrice

$$\mathcal{M}_\mathcal{F}(fA) = (I\ \mathcal{A}\ \mathcal{A}_2\ \dots \mathcal{A}_{n-1}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= I \text{ et pour tout } k \geqslant 0 \\ \mathcal{A}_{k+1} &= \vartheta\mathcal{A}_k + (fA)\mathcal{A}_k. \end{aligned}$$

Les vecteurs-colonne de la matrice $\mathcal{M}_\mathcal{F}(fA)$ sont indépendants de $i$, ce qui démontre 2.
$\diamondsuit$

L'étape suivante consiste à déterminer la base $(e)$ de la proposition 5.2. Pour ce faire, nous cherchons à appliquer la réduction à la forme normale d'Hermite. La matrice $\mathcal{M}_\mathcal{F}(fA)$ est à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$. Soit $q \in \mathbb{C}[z]$ tel que la matrice $M = q\mathcal{M}_\mathcal{F}(fA)$ soit polynomiale, et de valuation nulle. D'après le théorème 5.1, il existe une matrice $U \in \mathrm{GL}_{n^2}(\mathbb{C}[z])$ telle que la matrice $MU$ soit de la forme (5.2). Notons $\tilde{M}$ la matrice triangulaire supérieure formée des $n$ dernières colonnes de $MU$. On a

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le bloc formé des $n$ premières colonnes de $M$ est $qI$, donc de rang $n$ sur $K$. Par le théorème 5.1, la matrice $\tilde{M}$ est aussi de rang $n$ sur $K$.

**Proposition 5.3.** *Si le système (5.1) n'a que des singularités régulières sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, le système*

$$\frac{dX}{dz} = A_{[\tilde{M}]}X \tag{5.3}$$

*est à pôles simples sur $\mathbb{C}$, et ces pôles sont des points de $S = \{a_1, \dots, a_p\}$.*

*Démonstration* : La matrice $\tilde{M}$ est en fait la matrice de passage de la base canonique de $V$ vers la $K$-base $(e)$ de $V$ de la proposition 5.2. Cette base engendre sur $R_i$ le réseau $\Lambda_i$ pour tout $i = 1, \dots, p$, puisque la matrice $U$

est un élément de $\mathrm{GL}_n(R_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Par conséquent, la jauge donnée par la matrice $\tilde{M}$ transforme la matrice $A$ en une matrice $A_{[\tilde{M}]}$ *à pôle simple* en $z = a_i$ pour $i = 1, \ldots, p$.

Notons $H(s)$ l'évaluation en un point $z = s \in \mathbb{C}$ d'une matrice quelconque $H \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{C}[z])$. Si $s \notin S$, on a $q(s) \neq 0$ et la matrice $M(s)$ est une matrice de $\mathrm{M}_{n\times n^2}(\mathbb{C})$ de rang $n$ sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème 5.1, la matrice $U(s)$ est de rang $n^2$ sur $\mathbb{C}$. Par conséquent, la matrice $\tilde{M}(s)$ est également de rang $n$ sur $\mathbb{C}$. Le polynôme $m_{11}m_{22}\ldots m_{nn}$ n'admet donc pas de zéros hors de $S$. Ainsi, $A_{[\tilde{M}]}$ n'introduit pas de singularités apparentes supplémentaires à distance finie.
$\diamondsuit$

## 5.3 Procédure Maple

Le programme effectivement écrit est donné ci-après, et nous y joignons quelques exemples qui montrent comment cette procédure permet d'approcher les exposants.

L'algorithme prend comme donnée "en entrée" la matrice $A(z)$ du système (5.1). Il donne "en sortie" les éléments suivants.

1. La matrice de la connexion à l'infini, obtenue après le changement de variable $t = \frac{1}{z}$, ainsi que son résidu. On les notera respectivement $\tilde{A}(t)$ et $R^\infty$.

2. Les singularités de la matrice $A$, la dérivation $\vartheta = fd/dz$ et la matrice $fA$ à laquelle on applique la procédure de saturation.

3. Le dénominateur commun $q$ utilisé pour "ramener" $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(fA)$ dans $\mathrm{M}_{n\times n^2}(\mathbb{C}[z])$, ainsi que la matrice $M$ polynomiale.

4. La matrice $\tilde{M}$ qui donne la base des réseaux saturés $\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda_i)$ en toutes les singularités à distance finie.

5. Les facteurs invariants de la matrice $\tilde{M}$ dans les anneaux locaux $R_i$ (c'est-à-dire les diviseurs élémentaires du réseau $\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda_i)$ dans $(\Lambda_i)$), pour tout $i = 1, \ldots, n$.

6. La matrice $A_{[\tilde{M}]}$ dans cette nouvelle base.

7. La matrice à l'infini dans la nouvelle base.

8. Les résidus en toutes les singularités (y compris l'infini) et leurs valeurs propres.

9. Si possible, les exposants.

Il est intéressant de noter que ce programme permet également de déterminer la nature des points singuliers du système. En effet, si la matrice $A_{[\tilde{M}]}$ a un rang de Poincaré non nul en une singularité à distance finie, celle-ci est nécessairement un point singulier *irrégulier*. Pour décider de la nature de la singularité à l'infini, il faut appliquer la procédure décrite à la matrice $\tilde{A}(t)$.

```
reddiff:=proc(A)
local n,sg,X,T,t,a,b,q,i,j,k,l,o,p,M,N,R,w,c;
global u,sing,f,S;
  with(linalg):
  readlib(singular):
  readlib(residue);
n:=rowdim(A(z));
C:=map(simplify,map(convert,
          evalm((-1/(z^2))*A(1/z)),parfrac,z)):
   print(`La connexion nabla_d/dz a l'infini a pour matrice`,
            map(sort,map(convert,evalm(map(simplify,C)),parfrac,z)));
Ainf:=evalm(map(residue,C,z=0));
   print(`son residu est`,Ainf);
   print(`les valeurs propres du residu sont`,eigenvals(Ainf));
B:=map(simplify,A(z)):
sg:=convert(map(singular,B,z),set):
sing:={seq(op(2,op(1,op(p,sg))),p=1..nops(sg))};
   print(`singularites a distance finie `,sing);
X:=expand(product(z-sing[r],r=1..nops(sing))):
   print(`La derivation consideree est tau=`,X,`d/dz`);
     T:=array(1..n):
     t:=array(1..n,1..n):
     b:=array(1..n,1..n):
     q:=array(1..n,1..n):
     T[1]:=array(1..n,1..n,identity);
     q:=map(simplify,evalm(X*B));
 print(`matrice de nabla_tau=fA=`,map(convert,q,parfrac,z));
   for l from 2 to n do
     T[l]:=array(1..n,1..n):
     b:=map(simplify,evalm(X*map(diff,T[l-1],z))):
     t:=map(simplify,T[l-1]);
     T[l]:=map(simplify,evalm(b+multiply(q,t)))
    od;
M:=array(1..n,1..n^2):
    for k from 1 to n do
    for i from 1 to n do
    for j from 1 to n do
```

```
       M[i,(k-1)*n+j]:=T[k][i,j]
    od:od:od:
M:=map(simplify,M):
c:=convert(map(denom,M),set):
   print(`denominateurs de M(fA)`,c);
f:=lcm(op(1..nops(c),c)):
   if type(f,'constant') then f:=1 fi:
  print(`un denominateur commun est`,f);
        N:=array(1..n,1..n^2):
        N:=map(simplify,evalm(f*M)):
        R:=array(1..n,1..n^2):
        R:=transpose(hermite(transpose(N),z)):
        S:=array(1..n,1..n):
     for i from 1 to n do
     for j from 1 to n do
        S[i,j]:=R[i,j]
     od:od:
S:=map(factor,map(simplify,evalm(S))):
   print(`une base du reseau sature et normalise est`,S):
K:=evalm(smith(S,z));
H:=map(unapply,K,z);
H:=H(1/z);
   print(`les diviseurs elementaires de ce reseau sont donnes par `,K);
u:=array(1..n,1..n):
u:=map(simplify,multiply(inverse(S),
         evalm(multiply(B,S)-map(diff,S,z)))):
u:=map(sort,map(convert,u,parfrac,z)):
   print(`matrice de nabla_d/dz dans cette base`,u);
S:=map(unapply,S,z);
s:=map(simplify,map(convert,evalm(S(1/z)),parfrac,z)):
v:=map(simplify,multiply(inverse(s),evalm(multiply(C,s)-map(diff,s,z)))):
print(`La connexion nabla_d/dz a l'infini a pour matrice`,map(sort,
          map(convert,evalm(map(simplify,v)), parfrac,z)));
    print(`les diviseurs elementaires a l'infini de
                           ce reseau sont donnes par `,H);
Binf:=evalm(map(residue,v,z=0));
     for a in sing do
       for j from 1 to n do
        k[a][j]:=series(K[j,j],z=a):
        m[j]:=subs(z=x+a,k[a][j]):
        m[j]:=map(simplify,convert(m[j],polynom)):
       od;
    print(`les diviseurs elementaires du reseau sature et normalise
                en `,a,`sont `);
```

```
       for j from 1 to n do
        print(ldegree(m[j],x))
       od:
      w[a]:=map(residue,u,z=a):
        print(`residu en`,a,w[a]):
        print(`valeurs propres`,eigenvals(w[a])):
     od:
     for l from 1 to n do
        k[l]:=series(H[l,l],z=0):
        m[l]:=subs(z=1/x,k[l]):
        m[l]:=convert(m[l],polynom)
     od:
    print(`les diviseurs elementaires du reseau sature et
                normalise a l'infini sont `);
       for l from 1 to n do
        print(-degree(m[l],x))
       od:
print(`residu a l'infini`,Binf):
print(`valeurs propres`,eigenvals(Binf)):
end;
```

## 5.4 Exemples de réduction et de calcul d'exposants

Nous considérons les systèmes différentiels $dX/dz = A_{(i)}X$ suivants. Pour chacun, nous donnons les résultats de la procédure `reddiff` et nous les interprétons à la lumière des résultats précédents. Nous emploierons les notations suivantes.

> $\overline{k}$ pour les diviseurs élémentaires du réseau de Levelt dans le réseau de départ,
>
> $\Sigma$ pour la somme des exposants,
>
> $\tau$ pour la trace du résidu du système original,
>
> $\nu$ pour l'indice du réseau de Levelt dans le réseau de départ,
>
> $\lambda$ pour le $n$-uplet des valeurs propres du résidu qui sera toujours précisé.

On identifiera les objets concernés en notant en exposant le point singulier.

### Exemple 1

$$A_{(1)}(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z} & \dfrac{1}{z^{400}} \\ 0 & \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

On obtient en sortie les éléments annoncés plus haut. En particulier :

1. La matrice à l'infini $\tilde{A}(t)$ est

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{t} & -t^{398} \\ 0 & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix}$$

   et son résidu $R^\infty$ vaut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Les singularités du système sont $S = \{0, \infty\}$, la dérivation est $\vartheta = zd/dz$, et la matrice élargie vaut

$$M_{\mathcal{F}}(zA_{(1)}) = \begin{pmatrix} z & 0 & 1 & \dfrac{1}{z^{399}} \\ 0 & z & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Une base du réseau $\mathcal{M}^0 = \mathcal{N}_{\Lambda^0}(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^0))$ est donnée par la matrice $\tilde{M}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{399} \end{bmatrix}.$$

5. Les facteurs invariants de $\tilde{M}$ sont $1, z^{399}$.

6. La matrice $(A_{(1)})_{[\tilde{M}]}$ est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{z} & \dfrac{1}{z} \\ 0 & -\dfrac{398}{z} \end{pmatrix}.$$

Le rang de Poincaré en $z = 0$ vaut $r^0 = 399$, mais la singularité est régulière.

La dimension du système est $n = 2$. On en déduit (*cf.* proposition 3.11) que le réseau saturé de Gérard-Levelt $\mathcal{M}^0$ est le réseau de Levelt du système en $z = 0$. On vérifie que l'on a bien $k_1^0 = 0$ et $k_2^0 = 399 = r^0$.

$$\boxed{\text{Les exposants en } z = 0 \text{ sont } e_1^0 = 1, e_2^0 = -398.}$$

Le système admet un pôle simple à l'infini. Les exposants à l'infini sont donc les valeurs propres du résidu.

$$\text{Les exposants à l'infini sont } e_1^\infty = -1, e_2^\infty = -1.$$

La hauteur du système est $h(A_1) = r^0 + r^\infty = 399$.
La somme des exposants vaut $\Sigma = \sum_{s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sum_{i=1}^2 e_i^s = -399 = -h(A_{(1)})$.

## Exemple 2

$$A_{(2)}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{z^2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{z-1} +$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{z-\frac{1}{2}}.$$

Ce système constitue le premier contre-exemple donné par A. A. Bolibrukh au problème de Riemann-Hilbert "fort" (voir [Bo3], II, p. 70, (4.1)). L'algorithme $\texttt{reddiff}(A_{(2)})$ donne les informations suivantes.

1. La matrice à l'infini $\tilde{A}(t)$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-2} & \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} & -\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} & \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} \end{bmatrix},$$

   et son résidu $R^\infty$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'infini n'est pas une singularité du système.

2. Les singularités du système sont $S = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$, la dérivation est $\vartheta = (z^4 - \frac{1}{2}z^3 - z^2 + \frac{1}{2}z)d/dz$.

4. Le dénominateur commun est $q = 4z$. Une base du réseau
$$\mathcal{M}^s = \mathcal{N}_{\Lambda^s}(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^s))$$
pour tout $s \in S \cap \mathbb{C}$ est donnée par la matrice $\tilde{M}$ :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

5. Les facteurs invariants de $\tilde{M}$ sont $1, z, z$.

6. La matrice $(A_{(2)})_{[\tilde{M}]}$ est
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2z-1} & \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z-1} \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{2z-1} & -\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2z-1} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{2z-1} & -\frac{2}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2z-1} \end{bmatrix}.$$

On constate que l'on a obtenu un système fuchsien sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

7. La matrice $(\tilde{A})_{[\tilde{M}]}(t)$ à l'infini est
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-2} & -\frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-2} \\ 0 & \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} & -\frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} & \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{6}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} \end{bmatrix}$$

La procédure de réduction a provoqué l'apparition d'une singularité apparente à l'infini.

En $z = 1, -1, 1/2$, la procédure ne modifie rien. Le rang de Poincaré était et reste $r^s = 0$, et le résidu est $R^s = 0$ pour $s = 1, -1, 1/2$.

Les exposants pour $s = 1, -1, 1/2$ sont donc $e_1^s = e_2^s = e_3^s = 0$.

En $z = 0$, le rang de Poincaré pour $A$ en $z = 0$ vaut $r^0 = 1$, mais la singularité est régulière.

Le résidu $R^0$ vaut
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Les exposants $e_i^0$ en $z = 0$ sont nécessairement des entiers, puisque seule leur partie entière varie suivant les réseaux stables considérés, et l'on déduit du lemme 3.8 que

a. $\overline{k}^0 = (0, \ell, 1)$ où $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, et

b. $e_i^0 \geqslant -2$ pour $i = 1, 2, 3$.

La somme des exposants vaut

$$\Sigma = \sum_{s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \sum_{i=1}^{3} e_i^s = \sum_{i=1}^{3} e_i^0 = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Res}_0 A - \mathrm{Tr}\,\overline{k}^0 = 0 - \ell - 1.$$

Si $\ell = 1$, alors le réseau $\mathcal{M}^0$ est égal au réseau de Levelt et l'on a $e_1^0 = 0$, $e_2^0 = 0$ et $e_3^0 = -2$.

Si $\ell = 0$, on a $\Sigma = -1$. On a alors $e_i^0 = -1 - \sum_{j \neq i} e_j^0 \leqslant 3$, d'après *b*.

$$\boxed{\text{Les exposants en } z = 0 \text{ vérifient } -2 \leqslant e_i^0 \leqslant 3.}$$

## Exemple 3

$$A_{(3)}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{z^2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(z-1)^2} +$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2}.$$

La procédure `reddiff` donne les informations suivantes sur $A_{(3)}$.

1. La matrice à l'infini $\tilde{A}(t)$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 - \dfrac{1}{(t+1)^2} - \dfrac{4}{(t-2)^2} & -\dfrac{1}{(t-1)^2} - \dfrac{4}{(t-2)^2} \\ 0 & -\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(t+1)^2} + \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(t-2)^2} & -1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(t-1)^2} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(t+1)^2} - \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(t-2)^2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(t+1)^2} + \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(t-2)^2} & \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(t-1)^2} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(t+1)^2} - \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(t-2)^2} \end{bmatrix},$$

et son résidu $R^\infty$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Les singularités du système sont $S = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, \infty\}$, la dérivation est $\vartheta = (z^4 - \frac{1}{2}z^3 - z^2 + \frac{1}{2}z)d/dz$.
3. Un dénominateur commun des coefficients de la matrice saturée $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A_{(3)})$ est $16z^8 - 16z^7 - 28z^6 + 32z^5 + 8z^4 - 16z^3 + 4z^2$
4. Une base du réseau $\mathcal{M}^s = \mathcal{N}_{\Lambda^s}(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^s))$ pour tout $s \in S \cap \mathbb{C}$ est donnée par la matrice $\tilde{M}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (2z-1)(z-1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}z^2(2z-1)(z+1)(z-1)(4z^2-3) & \frac{1}{4}z^2(2z-1)^2(z+1)^2(z-1)^2 \end{bmatrix}$$

5. Les facteurs invariants de $\tilde{M}$ sont 1, $\frac{1}{2}z(2z-1)(z+1)(z-1)$, $\frac{1}{4}z^2(2z-1)^2(z+1)^2(z-1)^2$.
6. La matrice $(A_{(3)})_{[\tilde{M}]}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & -4z^4 - 7z^3 - \frac{3}{2}z^2 - 3z + \frac{5}{2} & z^5 + \frac{5}{4}z^4 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{3}{4}z^2 \\ 0 & -4z+4 & z^2 - \frac{3}{2}z - \frac{5}{2} \\ 0 & -16 & 4z-4 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{3}{z+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & \frac{3}{z} - \frac{5}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{2}{2z-1} + \frac{7}{2}\frac{1}{z-1} & \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{2z-1} \\ 0 & -\frac{38}{z} + \frac{45}{z-1} + \frac{1}{z+1} & -\frac{6}{z} - \frac{13}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{4}{2z-1} \end{bmatrix}.$$

On constate que le système a un rang de Poincaré très grand ($r^\infty = 6$) au point à l'infini. Il nous importe peu de déterminer la matrice $(\tilde{A})_{[\tilde{M}]}(t)$ puisque le pôle y était simple avant réduction.

On a en revanche obtenu des pôles simples en toutes les singularités à distance finie. Il s'agissait donc bien de singularités régulières.

En $z = 0$, le résidu $R^0$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -38 & -6 \end{bmatrix}$$

et ses valeurs propres sont $0, -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Le rang polaire $\eta^0$ de $A_{(3)}$ (c'est-à-dire le rang de la matrice la plus polaire en $z=0$) vérifie $\eta^0=2$. Le réseau $\mathcal{M}^0$ est alors, d'après la proposition 3.11, égal au réseau de Levelt. Les diviseurs élémentaires du réseau $\mathcal{M}^0$ en $z=0$ sont en effet $\overline{k}^0=(0,1,2)=(0,r^0,2r^0)$.

$$\boxed{\text{Les exposants en } z=0 \text{ valent } e_1^0=0,\ e_2^0=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\ e_3^0=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}.}$$

La somme des exposants vaut $e_1^0+e_2^0+e_3^0=-3$. Les valeurs propres de $\mathrm{Res}_0(A_{(3)})$ sont 0, $-1$, 1. On a bien

$$e_1^0+e_2^0+e_3^0=\mathrm{Tr}\,\mathrm{Res}_0(A_{(3)})-\mathrm{Tr}\,\overline{k}^0.$$

Le triplet des parties entières décrit au paragraphe 3.2.2 vaut alors

$$N^0=(0,0,-1).$$

En $z=-1$, le résidu $R^{-1}$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

On vérifie que $\eta^{-1}=2$. On fait le même raisonnement que pour $z=0$.

$$\boxed{\text{Les exposants en } z=-1 \text{ valent } e_1^{-1}=0,\ e_2^{-1}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2},\ e_3^{-1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}.}$$

Le triplet des parties entières est

$$N^{-1}=(0,-1,-1).$$

En $z=1$, le résidu $R^1$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 45 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}.$$

Comme $\eta^1 = 2$, on obtient encore les exposants.

$$\boxed{\text{Les exposants en } z=1 \text{ valent } e_1^1 = 0,\ e_2^1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10},\ e_3^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}.}$$

Le triplet des parties entières est

$$N^1 = (0, 0, -1).$$

En $z = \frac{1}{2}$, le résidu $R^{\frac{1}{2}}$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

On a encore $\eta^{\frac{1}{2}} = 2$.

$$\boxed{\text{Les exposants en } z=1 \text{ valent } e_1^{\frac{1}{2}} = 0,\ e_2^{\frac{1}{2}} = -1,\ e_3^{\frac{1}{2}} = -2.}$$

Le triplet des parties entières est

$$N^{\frac{1}{2}} = (0, -1, -2).$$

La hauteur du système vaut $h(A_{(3)}) = 4$. La somme de tous les exposants en toutes les singularités vaut

$$\Sigma = \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^{3} e_i^s = -12 = -\frac{n(n-1)}{2} h(A_{(3)}),$$

avec $n = 3$. La borne inférieure de l'encadrement du théorème 2.12 est donc atteinte.

## Exemple 4

Dans cet exemple, nous allons également exploiter les propriétés du co-réseau de Levelt. On considère le système de matrice

$$A_{(4)}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{z^2} & -\frac{1}{z} + \frac{1}{2(z-1)^2} & -\frac{1}{2(z-1)^2} \\ 0 & -\frac{2}{z} + \frac{1}{2(z-1)^2} & \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z-1)^2} \end{pmatrix},$$

ainsi que le système dual dont la matrice est

$$A^*_{(4)}(z) = -{}^t A_{(4)}(z).$$

La procédure `reddiff` donne sur $A_{(4)}$ et sur $A^*_{(4)}$ les informations suivantes, notées comme précédemment, avec un "*" pour celles concernant $A^*_{(4)}$.

1. La matrice à l'infini $\tilde{A}(t)$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{2}{z} - \dfrac{1}{2(z-1)^2} & \dfrac{1}{2(z-1)^2} \\ 0 & \dfrac{2}{z} - \dfrac{1}{2(z-1)^2} & -\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2(z-1)^2} \end{bmatrix},$$

   et son résidu $R^\infty$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Le point à l'infini est un pôle simple pour le système donné par $A_{(4)}$ et, par construction, pour le système dual, l'expression de la connexion duale à l'infini est $\tilde{A}^*(t) = -{}^t\tilde{A}(t)$.

Les exposants à l'infini valent

$$e_1^\infty = 0,\ e_2^\infty = -1,\ e_3^\infty = 1$$

et

$$e_1^{\infty,*} = 0,\ e_2^{\infty,*} = 1,\ e_3^{\infty,*} = -1.$$

2. Les singularités de chacun des deux systèmes sont $S = \{0, 1, \infty\}$, et on utilise la dérivation $\vartheta = z(z-1)d/dz$.

3. $q = 2z(z-1)$ est un dénominateur commun aux coefficients de la matrice saturée $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A_{(4)})$ ainsi qu'à ceux de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A^*_{(4)})$.

4. Une base des réseaux $\mathcal{M}^s = \mathcal{N}_{\Lambda^s}(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^s))$ pour $s = 0, 1$, est donnée par la matrice $\tilde{M}$ :

$$\begin{bmatrix} z(z-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & z-1 \end{bmatrix}$$

   Une base des réseaux $\mathcal{M}^{s,*} = \mathcal{N}_{(\Lambda^s)^*}(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}((\Lambda^s)^*))$ pour $s = 0, 1$, est donnée par la matrice $\tilde{M}^*$ :

$$\begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & -z & z(z-1) \end{bmatrix}$$

5. Les facteurs invariants de $\tilde{M}$ sont 1, $z-1$, $z(z-1)$, et ceux de $\tilde{M}^*$ sont 1, $z(z-1)$, $z(z-1)$.

6. La matrice $(A)_{[\tilde{M}]}$ est

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z}-1 & -\frac{1}{z} & -\frac{1}{2(z-1)} \\ \frac{1}{z} & 0 & \frac{1}{z}-\frac{1}{(z-1)} \end{bmatrix}.$$

La matrice $(A^*)_{[\tilde{M}^*]}$ est

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{z-1} & -\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{z} & -\frac{2}{z}+2-\frac{1}{2(z-1)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(z-1)} \end{bmatrix}.$$

En $z=0$, les résidus respectifs des matrices ci-dessus sont

$$R^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^{0,*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Leurs valeurs propres respectives sont

$\lambda^0 = (-1,-1,1)$
et $\lambda^{0,*} = (0,0,-2)$.

Les diviseurs élémentaires de $\mathcal{M}^0$ dans $\Lambda^0$ valent $(0,0,1)$. Comme il ne peut pas y avoir de réseau plus grand strictement contenu dans $\Lambda^0$ (*cf.* corollaire 2.10, p. 28), on en déduit que

$$\mathcal{M}^0 = (\Lambda^0)_L.$$

$$\boxed{\text{Les exposants de } A_{(4)} \text{ en } z=0 \text{ valent } e_1^0=-1,\ e_2^0=-1,\ e_3^0=1.}$$

En $z = 1$, les résidus sont

$$R^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad R^{1,*} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Leurs valeurs propres respectives sont

$\lambda^1 = (-1, -1, 0)$
et $\lambda^{1,*} = (-1, -1, 0)$.

Les diviseurs élémentaires de $\mathcal{M}^1$ dans $\Lambda^1$ valent $(0, 1, 1)$ et sont égaux à ceux de $\mathcal{M}^{1,*}$ dans $\Lambda^{1,*}$. On peut tout de suite remarquer que l'un des deux réseaux n'est *pas* le réseau de Levelt correspondant puisque ces deux suites de diviseurs élémentaires ne vérifient pas la condition 2 de la proposition 4.1.

La hauteur des systèmes est $h(A_{(4)}) = h(A^*_{(4)}) = 2$.

Dans la remarque 4.1, nous avons vu que le co-réseau de Levelt vérifie

$$(\Lambda^1)^L \subset \mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^1).$$

Le dénominateur commun valant $q = z(z-1)$, il est clair, d'après les explications du paragraphe 5.2, que les diviseurs élémentaires du réseau $\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}((\Lambda^1))$ dans $\Lambda^1$ sont $(-1, 0, 0)$. Avec l'argument déjà vu, comme il n'existe pas de réseau stable plus petit contenant $\Lambda^1$, on en déduit que l'on a

$$(\Lambda^1)^L = \mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^1).$$

Les mêmes relations sont valables ici avec le réseau dual $(\Lambda^1)^*$, comme le montrent les calculs effectués sur la matrice $A^*_{(4)}$, d'où

$$((\Lambda^1)^*)^L = \mathcal{F}_\vartheta^{n-1}((\Lambda^1)^*).$$

Par dualité, on obtient l'égalité

$$(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}((\Lambda^1)^*))^* = (((\Lambda^1)^*)^L)^* = (\Lambda^1)_L.$$

La connexion est donc représentée dans une base du réseau de Levelt $(\Lambda^1)_L$ par la matrice $(-{}^t(A^*)_{[\tilde{M}^*]})_{[z(z-1)I]} = -{}^t(A^*)_{[\tilde{M}^*]} - I$, d'où l'on déduit les exposants.

Remarquons enfin que l'amplitude $a(\Lambda^1, \mathcal{M}^1) = 1 = a(\Lambda^1, (\Lambda^1)_L)$ mais que $\mathcal{M}^1) \neq (\Lambda^1)_L$ (*cf.* Remarque 2.4).

$$\boxed{\text{Les exposants de } A_{(4)} \text{ en } z = 1 \text{ valent } e^1_1 = 0,\ e^1_2 = 0,\ e^1_3 = -1.}$$

On peut en dire de même pour le dual.

$$\boxed{\text{Les exposants de } A^*_{(4)} \text{ en } z=1 \text{ valent } e_1^{1,*}=0,\ e_2^{1,*}=0,\ e_3^{1,*}=-1.}$$

Remarquons que $(\Lambda^1)_L$ et $(\Lambda^1)^L$ sont nécessairement homothétiques puisqu'ils ont même indice dans $\Lambda^1$.

La somme des exposants en toutes les singularités pour le système $A_{(4)}$ vaut

$$\Sigma = \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^{3} e_i^s = -2 = -h(A_{(4)}),$$

ce qui montre que la borne supérieure du théorème 2.12 est aussi atteinte. Ce résultat correspond à la situation où le rang de stabilité du réseau $\mu(\Lambda^2) = 2$ est maximal (*cf.* corollaire 2.5).

Pour le système dual $(A_{(4)})^*$, on dispose des faits suivants :

*a.* $\Sigma = \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^{4} e_i^s = \Sigma^0 + \Sigma^1 + \Sigma^\infty = \Sigma^0 - 1 + 0.$

*b.* $\Sigma^0 = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Res}_0 A_{(4)} - \mathrm{Tr}\,\overline{k}^0 = 0 - \mathrm{Tr}\,\overline{k}^0.$

*c.* $1 \leqslant \mathrm{Tr}\,\overline{k}^0 \leqslant 2$, par la minimalité de l'indice du réseau de Levelt.

*d.* $e_i^0 \geqslant -2$ pour $i = 1, 2, 3$ (lemme 3.8 appliqué à $\lambda^{0,*}$).

Des relations $a$, $b$ et $c$, on déduit que $-3 \leqslant \Sigma^0 \leqslant -2$. Par $d$, on obtient l'encadrement suivant.

$$\boxed{\text{Les exposants de } A^*_{(4)} \text{ en } z=0 \text{ vérifient } -2 \leqslant e_i^{0,*} \leqslant 2, \text{ pour } i=1,2,3.}$$

## Exemple 5

Dans ce dernier exemple, on considère le système de matrice

$$A_{(5)}(z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{z} & \dfrac{1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z} & \dfrac{1}{z^2} \\ 0 & \dfrac{1}{z^8} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi que le système dual de matrice $A^*_{(()}(z) = -{}^tA_{(5)}(z)$. La procédure **reddiff** donne sur $A_{(5)}$ et sur $A^*_{(5)}$ les informations suivantes, notées comme à l'exemple précédent.

1. La matrice à l'infini $\tilde{A}(t)$ est

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{t} & -\dfrac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{t} & -1 \\ 0 & -t^6 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et son résidu $R^\infty$ vaut

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le point à l'infini est un pôle simple, donc une singularité régulière pour $A_{(5)}$ et $A^*_{(5)}$.

Les exposants à l'infini valent

$$e_1^\infty = -1,\ e_2^\infty = 0,\ e_3^\infty = 0, \text{ et } e_4^\infty = 1$$

et

$$e_1^{\infty,*} = 1,\ e_2^{\infty,*} = 0,\ e_3^{\infty,*} = 0, \text{ et } e_4^{\infty,*} = -1$$

2. Les singularités des deux systèmes sont $S = \{0, \infty\}$, la dérivation est $\vartheta = zd/dz$.

3. Un dénominateur commun des coefficients de la matrice saturée $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A)$ est $z^8$. Il vaut également pour $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(A^*)$

4. Une base du réseau $\mathcal{M}^0 = \mathcal{N}_{\Lambda^0}(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^0))$ est donnée par la matrice $\tilde{M}$ :

$$\begin{bmatrix} z^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

Une base du réseau $\mathcal{M}^{2,*} = \mathcal{N}_{(\Lambda^2)^*}(\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}((\Lambda^2)^*))$ est donnée par la matrice $\tilde{M}^*$ :

$$\begin{bmatrix} z^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^7 \end{bmatrix}$$

5. Les facteurs invariants de $\tilde{M}$ sont 1, $z$, $z^8$, $z^8$, et ceux de $\tilde{M}^*$ sont 1, $z^7$, $z^8$, $z^8$.

6. La matrice $(A)_{[\tilde{M}]}$ est

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{9}{z} & \dfrac{1}{z} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{8}{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z} & \dfrac{1}{z} \\ 0 & \dfrac{1}{z} & 0 & -\dfrac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

La matrice $(A^*)_{[\tilde{M}^*]}$ est

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{7}{z} & 0 & 0 & 0 \\ -z^7 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z} \\ 0 & 0 & -\dfrac{9}{z} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{z} & -\dfrac{7}{z} \end{bmatrix}.$$

En $z = 0$, les résidus sont

$$R^0 = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad R^{0,*} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Leurs valeurs propres sont respectivement

$\lambda^0 = (-9, -8, -1, 1)$
et $\lambda^{0,*} = (-7, -7, 0, -9)$.

La hauteur des systèmes est $h(A_{(5)}) = h(A^*_{(5)}) = 7$.

En reprenant un raisonnement vu à l'exemple précédent, comme le dénominateur commun vaut $q = z^8$, les diviseurs élémentaires du réseau

$$\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}(\Lambda^0) = z^{-8}\mathcal{M}^0$$

dans $\Lambda^0$ sont $(-8,-7,0,0)$, et ceux du réseau

$$\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}((\Lambda^0)^*) = z^{-8}\mathcal{M}^{0,*}$$

dans $(\Lambda^0)^*$ sont $(-8,-1,0,0)$. Comme les réseaux sont réflexifs, en dualisant on obtient du lemme 3.8 les inégalités :

*a.* $\overline{k}^0 \leqslant (0,0,1,8)$

*a* ∗ . et $\overline{k}^{0,*} \leqslant (0,0,7,8)$

où la relation $\leqslant$ s'entend terme à terme.

D'après la proposition 2.4, on ne peut pas avoir $\overline{k}^0 = (0,0,0,8)$, puisque l'on aurait alors $k_4^0 - k_3^0 = 8 > r^0 = 7$. Par conséquent, on a $\overline{k}^0 = (0,0,1,8)$ et on a établi que

$$(\Lambda^0)_L = (\mathcal{F}_\vartheta^{n-1}((\Lambda^0)^*))^*.$$

La connexion est donc représentée dans une base du réseau de Levelt $(\Lambda^0)_L$ par la matrice $(-{}^t(A^*)_{[\tilde{M}^*]})_{[(z^8 I]} = -{}^t(A^*)_{[\tilde{M}^*]} - 8I$, d'où l'on déduit les exposants.

$$\boxed{\text{Les exposants de } A_{(5)} \text{ en } z=0 \text{ valent } e_1^0=-8,\ e_2^0=-1,\ e_3^0=-1,\ e_4^0=1.}$$

Pour le dual, la relation $a*$ prouve que le rang de stabilité $\mu^*$ vérifie $\mu^* \geqslant 2$ (*cf.* prop. 2.3). On en déduit que l'on a

*b.* $7 = r^0 \leqslant \nu^* \leqslant \frac{(4-2)(4-2+1)}{2} r^0 = 21$ (*cf.* corollaire 2.5).

La somme de tous les exposants vaut

*c.* $\Sigma^* = \Sigma^{0,*} + \Sigma^{\infty,*} = \Sigma^{0,*}$, (voir $\lambda^{\infty,*}$).

De $b$ et $c$, on déduit que

$$-21 \leqslant \Sigma^* \leqslant -7.$$

D'autre part, la somme $\Sigma^{0,*}$ vérifie

*d.* $\Sigma^{0,*} = \operatorname{Tr}\operatorname{Res}_0 A_{(5)} - \operatorname{Tr}\overline{k}^{0,*} = -\operatorname{Tr}\overline{k}^{0,*} = -\nu^*$.

Or on a $(0,0,1,8) \leqslant \overline{k}^{0,*} \leqslant (0,0,7,8)$. On a alors $-15 \leqslant \Sigma^* \leqslant -9$. De la valeur de $\lambda^{0,*}$, on déduit que $e_i^{0,*} \geqslant -9$, d'où l'encadrement suivant.

$$\boxed{\text{Les exposants de } A_{(5)}^* \text{ en } z=0 \text{ vérifient } -9 \leqslant e_i^{0,*} \leqslant 9.}$$

# Bibliographie


[A-B] D. V. Anosov, A. A. Bolibrukh, *The Riemann-Hilbert problem*, Aspects of Math., E22, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994.

[B-V] D. G. Babbitt, V. S. Varadarajan, Formal reduction theory of meromorphic differential equations : a group theoretic view, *Pacif. J. Math.*, **109**, 1983, pp. 1–80.

[B-J-L] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, A General Theory of Invariants for Meromorphic Differential Equations, Part I : Formal Invariants, *Funkcialaj Ekvacioj*, vol. 22, 1979, pp. 197–221.

[Be] A. Beauville, Le problème de Riemann-Hilbert, d'après (A. A. Bolibrukh), Sém. Bourbaki, Astérisque, vol. 216, S. M. F., 1993, pp. 103–119.

[B-L] D. Bertrand, G. Laumon, *Appendice à* Exposants, vecteurs cycliques et majorations de mutiplicités, *C.R. conf. franco-japonaise*, Strasbourg, Preprint IRMA, 1985.

[Bi] G. D. Birkhoff, Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Soc.*, Oct. 1909, Vol. 10, pp. 436–470.

[Bo1] A. A. Bolibrukh, The Riemann-Hilbert problem, *Russian Math. Surveys*, **45** (1990), pp. 1–58.

[Bo2] A. A. Bolibrukh, Construction of a Fuchsian Equation from a Monodromy Representation, *Math. Notes of Ac. Sci. of USSR*, **48:5** (1990), pp. 1090–1099.

[Bo3] A. A. Bolibrukh, The 21$^{st}$ Hilbert problem for Linear Fuchsian Systems, *Proc. Steklov Inst. of Math.*, Vol 206 (5), Amer. Math. Soc., 1995.

[Bou] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, ch. 5–7, Masson, 1985.

[Co] H. Cohen *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, GTM 138, Springer-Verlag (1991).

[Cor] E. Corel, Inégalités de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série I, 1999, pp. 983–986.

[Dek] W. J. M. Dekkers, The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *Équations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe*, Lect. Notes in Math., Vol. 712, Springer-Verlag, 1979, pp. 33–43.

[De] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.

[G] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices*, Vol.2 (Questions spéciales et applications), Dunod, Paris, 1966.

[G-L] R. Gérard et A. H. M. Levelt, Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles linéaires, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, **23,1** (1973), pp. 157–195.

[Ka] N. Katz, Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turrittin, *Publ. Math. IHES*, **39**, 1970, pp. 176–232.

[Le1] A. H. M. Levelt, Hypergeometric functions, II, *Nederl. Akad. Wetensch.*, Proc. Ser. A, **64** (1961), pp. 373–385.

[Le2] A. H. M. Levelt, Jordan decomposition for a class of singular differential operators , *Arkiv för matematik*, **13** (1975), pp. 1–27.

[Le3] A. H. M. Levelt, Stabilizing differential operators. A method for computing invariants at irregular singularities, Comput. Math. Appl., Academic Press, London, 1991.

[Ma] B. Malgrange, Connexions méromorphes, II : le réseau canonique, *Invent. Math.* **124** (1996), pp. 367–387.

[M] Y. Manin, Moduli fuchsiani, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **19** (1) Serie III, 1965, pp. 113–126.

[Po] E. G. C. Poole, *Introduction to the theory of linear differential equations*, Dover, New-York, 1960.

[Ro] F. Roch, *Calcul formel et parallélisme : forme normale d'Hermite, méthodes de calcul et parallélisation*, Th. doct., (Math. Appl.), Inst. Polytechnique de Grenoble, 1993.

[Sa1] C. Sabbah, Introduction to the algebraic theory of linear systems of differential equations, *in* Éléments de la théorie des systèmes différentiels, *$\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, Les travaux du CIMPA, Coll. Travaux en cours, Hermann, 1993, pp. 1–80.

[Sa2] C. Sabbah, Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius. Une introduction, *Preprint*, Univ. Paris 6, (1998).

[Wa] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1965.

# Index