

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I)
spécialité MATHÉMATIQUES

par
Cyrille OSPEL

Tressages et théories cohomologiques pour
les algèbres de Hopf. Application aux
invariants des 3-variétés.

Soutenue le Vendredi 29 Janvier 1999 devant la Commission d'Examen

MM.	Marc ROSSO	Directeur de Thèse
	Claude CIBILS	Invité
	Nathan HABEGGER	Rapporteur externe
	Max KAROUBI	Rapporteur externe
	Vladimir TOURAEV	Rapporteur interne

A mon père

Remerciements

Comment débiter autrement qu'en remerciant Marc Rosso. Je lui suis reconnaissant de l'intérêt et l'attention qu'il n'a cessé de porter à la direction de mon travail. Il a su me guider en me conseillant dans mes lectures et en m'encourageant à participer à de nombreux séminaires.

Je remercie les professeurs N. Habegger, M. Karoubi et V. Turaev qui ont bien voulu être rapporteurs de mon travail ainsi que C. Cibils qui a accepté de faire parti de mon jury.

Merci à Christian, Florian, Jens, Pierre, Vincent et à Hans-Werner Henn pour leurs discussions enrichissantes et stimulantes.

Merci à Alex (il m'a fait redécouvrir la géométrie), Franck, Gilles, Jean, Jean-Marie, JeanS, Michel, Nadine, (Sandrine+Richard)², Schlusi, Serge et Véro qui par leur bonne humeur quotidienne et les bons moments passés ensemble m'ont rendu ce travail plus agréable.

Enfin un grand merci à ma famille et à Catherine, qui m'ont constamment apporté leur soutien, leur confiance et leur amour.

Table des matières

Introduction	3
1 Rappels et notations	9
1.1 Structures cohomologiques	9
1.1.1 Catégorie simpliciale Δ et objets simpliciaux	9
1.1.2 Opérateurs (co)simpliciaux et normalisation de complexe (co)simplicial	11
1.1.3 Théorème d'Eilenberg-Zilber	12
1.1.4 Résolution Bar et homologie de Hochschild d'une algèbre	14
1.2 Structures algébriques	15
1.2.1 Algèbre de Hopf de rubans et quasi-algèbre de Hopf de rubans	16
1.2.2 Bimodule de Hopf	17
1.2.3 Algèbre tensorielle	19
1.2.4 Produit croisé et coproduit croisé	20
2 Groupes quantiques inhomogènes	23
2.1 Algèbre de Hopf inhomogène	23
2.1.1 Bicomplexe associé à un bimodule de Hopf	23
2.1.2 Extension de A -bimodules de Hopf	27
2.1.3 Détermination des algèbres de Hopf inhomogènes	31
2.2 Structures de bigèbres des algèbres de Hopf inhomogènes	35
2.2.1 Structures des algèbres de Hopf inhomogènes : cas où ϕ est nul	35
2.2.2 Structures des algèbres de Hopf inhomogènes : cas où ϕ est non nul	40
3 Produit tordu de complexes de Hochschild	47
3.1 Extension du théorème d'Eilenberg-Zilber	47
3.1.1 Produit tensoriel tordu d'algèbre et bimodules	48
3.1.2 Extension du théorème d'Eilenberg-Zilber	53
3.2 Produit tensoriel tordu de complexes de Hochschild	56
3.2.1 Résolution Bar de $A \otimes_{\sigma'} A$	56
3.2.2 Produit de l'algèbre des battages	60
3.2.3 Produit tensoriel tordu de complexes de Hochschild	65
3.3 Application	67
3.3.1 Produit tensoriel de l'homologie de Hochschild d'une algèbre	68
3.3.2 Identité générale de Hochschild-Serre	70

4	Cohomologie quasi-abélienne	77
4.1	Construction d'Eilenberg-Maclane pour les algèbres de Hopf	77
4.1.1	Structure d'algèbre différentielle σ -commutative graduée	77
4.1.2	Définition de la construction	81
4.1.3	Preuve du théorème 4.1	83
4.2	Normalisation du complexe $\mathcal{B}(A)$	87
4.3	Cohomologie multiplicative	89
4.3.1	Définition de la cohomologie multiplicative de $\mathcal{B}'(A)$	90
4.3.2	Normalisation du complexe $(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M), \mathcal{D})$	94
4.4	Application à l'algèbre d'un groupe	95
4.4.1	Cohomologie quasi-abélienne d'un groupe	95
4.4.2	Exemple explicite de 3-cocycles non triviaux du groupe diédral D_3 .	97
5	Invariants des 3-variétés	99
5.1	Invariant de Reshetikhin, Mattes et Polyak généralisé à un groupe non abélien	100
5.1.1	Invariant des entrelacs	100
5.1.2	Invariant des 3-variétés	104
5.2	Invariant d'Altschüler et Coste	113
5.2.1	Structure d'algèbre de Hopf tordue	113
5.2.2	Invariant dans le cas algèbre de Hopf	119
5.2.3	Invariant dans le cas quasi-algèbre de Hopf	121
	Annexe	127
	Bibliographie	145

Introduction

L'utilisation des battages a permis de donner une description de certains objets homologiques et algébriques. Ces permutations ont été introduites, au début des années 1950, par S. Eilenberg et S. MacLane, pour donner une description explicite de l'équivalence de complexes du théorème d'Eilenberg-Zilber. Les battages ont ensuite été utilisés, de manière implicite, par G. Hochschild et J-P. Serre pour construire une identité générale permettant de comparer l'homologie d'un sous-groupe et l'homologie du groupe.

Du côté algébrique, dans les années 1960, M. Sweedler décrit le coproduit de l'algèbre de Hopf tensorielle d'un espace vectoriel V , comme une somme sur des battages d'une représentation du groupe symétrique, associée au tressage qui échange deux termes de V . En 1995, M. Rosso a montré que le produit de l'algèbre cotensorielle d'un bimodule de Hopf peut être décrit comme une somme sur des battages d'une représentation du groupe des tresses, associée à un tressage défini par S.L. Woronowicz. Cette somme est appelée produit des battages quantiques. Plus généralement, pour tout tressage σ d'un espace vectoriel V , M. Rosso a défini un produit des battages quantiques φ_σ sur $T(V)$.

Dans cette thèse, je vais utiliser les battages pour décrire les structures de certaines algèbres de Hopf inhomogènes construites par P. Podleś et S.L. Woronowicz (chapitre 2), puis pour montrer que le produit des battages quantiques peut se factoriser par l'application des battages du théorème d'Eilenberg-Zilber (chapitre 3). Ceci permet alors de définir une théorie homologique, pour les algèbres de Hopf, généralisant la construction de l'homologie des groupes abéliens d'Eilenberg-MacLane (chapitre 4). Cette homologie sera ensuite utilisée pour décrire un invariant des 3-variétés défini par D. Altschuler et A. Coste (chapitre 5). Le premier chapitre contient des résultats classiques d'homologie simpliciale et de théorie des algèbres de Hopf, qui seront utilisés ultérieurement.

Les chapitres 3,4,5 sont indépendants du chapitre 2.

Groupes quantiques inhomogènes

Les espaces de Minkowski munis d'une action du groupe de Poincaré sont étudiés en théorie quantique des champs. Cette théorie ne tient pas compte des effets gravitationnels, il semble qu'un cadre adéquat pour les prendre en compte est l'ensemble des espaces quantiques. C'est-à-dire qu'au lieu de considérer des fonctions sur l'espace temps, on considère des éléments sur des algèbres non commutatives. En 1997, P. Podleś et S.L. Woronowicz ont introduit dans ce cadre les groupes de Poincaré quantiques. Pour étudier ces groupes, ils ont construit des algèbres de Hopf inhomogènes à partir d'un groupe quantique et de translations. Plus précisément, à une algèbre de Hopf H , une matrice Λ à coefficients dans

H , compatible avec le coproduit de H et une famille finie d'éléments (p_s) , ils ont associé une algèbre de Hopf où le produit d'un élément p_s par un élément $a \in H$ est donné par : $p_s \cdot a = \gamma + \varphi_s(a)$, où γ est un élément du H -module à gauche libre engendré par la famille (p_s) et pour tout s , φ_s est une application de H dans H . L'associativité et la compatibilité du produit avec le coproduit induisent des conditions sur les applications φ_s .

Le but du deuxième chapitre est de donner d'une part un cadre cohomologique naturel à la composante inhomogène et, d'autre part, une description explicite des structures de ces algèbres inhomogènes. Pour cela je définis à partir de la matrice Λ et des conditions imposées sur la famille (p_s) un H -bimodule de Hopf Γ . A ce bimodule de Hopf est alors associé le bicomplexe suivant $(\text{Hom}_H(\Gamma \otimes H^{\otimes i}, H^{\otimes j}), d_i^{(j)}, D_j^{(i)})_{i,j}$, où

$$D_j^{(i)} : \text{Hom}_H(\Gamma \otimes H^{\otimes i}, H^{\otimes j}) \rightarrow \text{Hom}_H(\Gamma \otimes H^{\otimes i}, H^{\otimes j+1})$$

est la différentielle ddéduite de la structure de H -bicomodule de Γ et de cogèbre de H , et où

$$d_i^{(j)} : \text{Hom}_H(\Gamma \otimes H^{\otimes i}, H^{\otimes j}) \rightarrow \text{Hom}_H(\Gamma \otimes H^{\otimes i+1}, H^{\otimes j})$$

est la différentielle du complexe de Hochschild du H -module $\text{Hom}_H(\Gamma, H^{\otimes j})$.

La famille d'applications φ_s s'interprète alors comme un élément φ de $\text{Hom}_H(\Gamma \otimes H, H)$. Les conditions sur les applications φ_s sont alors exactement celles disant que φ est un 2-cocycle du complexe total associé au bicomplexe. Dans le cas où $\varphi = 0$ on retrouve l'algèbre tensorielle $T_H(\Gamma)$ du H -bimodule de Hopf Γ .

Cette interprétation permet de voir que si on ajoute à φ l'image d'un élément de $\text{Hom}_H(\Gamma, \mathbb{C})$ par $D_0^{(1)} \circ d_0^{(0)}$ alors l'algèbre de Hopf inhomogène obtenue est isomorphe, en tant qu'algèbre de Hopf, à celle associée à φ .

Soient H une algèbre de Hopf et M un H -bimodule de Hopf. Afin de décrire la structure de produit de l'algèbre inhomogène associée à H, M , on munit l'espace $H \otimes T(M^L)$ d'une structure d'algèbre croisée utilisant la structure naturelle de A -module algèbre à droite de M^L . Pour étudier la structure de coproduit, je définis un tressage (morphisme qui vérifie l'équation des tresses) σ de M^L par

$$\sigma : \begin{array}{ccc} M^L \otimes M^L & \longrightarrow & M^L \otimes M^L \\ v \otimes v' & \longmapsto & \sum v'_{(0)} \otimes v \bullet v'_{(1)}. \end{array}$$

où \bullet est la structure naturelle de H -module à droite de M^L . Via ce tressage et les battages $T(M^L)$ est un H -comodule cogèbre à droite. L'espace $H \otimes T(M^L)$ est alors une cogèbre croisée. Avec ces structures, je montre que pour $\varphi = 0$

Théorème *L'espace $T_H(M)$ est isomorphe, en tant qu'algèbre de Hopf, à $H \otimes T(M^L)$.*

Ce théorème me permet ensuite de décrire les structures d'algèbres de Hopf inhomogènes pour $\varphi \neq 0$.

Produit tordu de complexe de Hochschild

Dans cette partie, je considère des algèbres munies d'un tressage inversible σ vérifiant des conditions de compatibilité avec le produit. Ces algèbres sont appelées algèbres tressées σ -commutatives. Soit A une telle algèbre. Le complexe de Hochschild $(C_n(A))_n$ de A est

alors une algèbre avec le produit des battages quantiques φ_σ associé à σ . Le but du troisième chapitre est de montrer qu'il existe une différentielle sur le produit tensoriel de $(C_n(A))_n$ par lui-même, telle que φ_σ est un morphisme de complexes.

Pour les algèbres tressées σ -commutatives on peut définir un produit tensoriel d'algèbres, tordu par σ , noté \otimes_σ . Les objets du théorème d'Eilenberg-Zilber, appliqué à la construction Bar de A , sont alors munis d'une structure de $A \otimes_\sigma A$ -bimodule, telle que les morphismes du théorème sont des morphismes de bimodules. En particulier l'application des battages de ce théorème est un morphisme de bimodules et de complexes. Alors en composant ce morphisme par des morphismes de complexes, je montre d'une part que le produit des battages quantiques de $T(A)$ peut se factoriser par l'application des battages, et d'autre part que pour M est une algèbre de produit μ munie d'une structure de A -bimodule et de règles de commutation avec A , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} (M \otimes M) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\mu \otimes \varphi_\sigma} & M \otimes A^{\otimes n} \\ \rho_n \downarrow & & \delta'_n \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=n-1} (M \otimes M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}) & \xrightarrow{\mu \otimes \varphi_\sigma} & M \otimes A^{\otimes n-1} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des différentielles. En particulier δ' est la différentielle du complexe de Hochschild de A à valeur dans M . La différentielle ρ permet alors de définir une différentielle tordue, pour le produit tensoriel d'un complexe de Hochschild par lui-même. On a alors le résultat

Théorème *Soit A une algèbre tressée σ -commutative. Avec la différentielle tordue et le produit induit par φ_σ , le complexe de Hochschild de A est une algèbre différentielle graduée.*

En considérant la version duale de ce théorème je montre ensuite une identité du type Hochschild-Serre pour les algèbres tressées σ -commutatives :

Théorème *Soient A une algèbre tressée σ -commutative de dimension finie et M un A -bimodule. Alors il existe une différentielle ρ_n telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n-1}, M) & \xrightarrow{\Phi} & \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, M)) \\ \kappa_n \downarrow & & \rho_n \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M) & \xrightarrow{\Phi} & \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, M)) \end{array}$$

où Φ est le transposé du produit des battages quantiques et κ_n la différentielle définissant la cohomologie de Hochschild.

En particulier l'algèbre d'un groupe munie du tressage de S.L. Woronowicz on retrouve l'identité générale d'Hochschild-Serre.

Cohomologie quasi-abélienne

L'homologie d'un groupe G est donnée par le complexe: $(C_n(G), \delta_n)_n$ où $C_n(G)$ est le groupe abélien libre généré par les éléments $[x_1, \dots, x_n]$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in G^{\times n}$, et la différentielle δ_n est donnée par

$$\delta_n[x_1, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_n] + \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, \dots, x_n] + (-1)^n [x_1, \dots, x_{n-1}]$$

Soit F un groupe libre. Un élément $[x_1, \dots, x_n]$ de $C_n(F)$ est appelé générique si chaque x_i est soit 1, soit un produit de générateurs de F , et si chaque générateur apparaît au plus une fois dans un des produits x_i . Ces éléments forment un sous-complexe de $(C_n(F), \delta_n)_n$ appelé sous-complexe générique. L'homologie $(H_n(F))_n$ du sous-complexe générique d'un groupe libre F a la propriété suivante :

$$H_n(F) = 0 \text{ pour } n \geq 2. \quad (\text{P})$$

Par contre, si on considère le sous-complexe générique d'un groupe abélien libre ce n'est plus le cas. Afin de construire une théorie homologique, pour les groupes abéliens, ayant la propriété (P), S. Eilenberg et S. MacLane ont associé à un groupe abélien un complexe, construit en itérant une construction. Cette construction associe à une algèbre différentielle graduée augmentée C une nouvelle algèbre différentielle graduée augmentée C^1 définie comme suit :

- en tant qu'espace vectoriel C^1 est l'espace tensoriel $T(C)$,
- la différentielle de C^1 est la somme de deux différentielles d et D .
- l'application d est donnée pour un élément $[w^1 | \dots | w^n]$ de C^1 , avec $w^i \in C_{l_i}$ ($1 \leq i \leq n$), par

$$d[w^1 | \dots | w^n] = \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_i} [w^1 | \dots | \partial(w^i) | \dots | w^n],$$

où ∂ est la différentielle de C et $\varepsilon_i = i + 1 + l_1 + \dots + l_i$.

- l'application D est celle du complexe de Hochschild de l'algèbre augmentée (C, φ, α) , à valeur dans \mathbb{K} le corps de base, où φ et α sont respectivement le produit et l'augmentation de C .
- Le produit φ^1 de C^1 est défini pour $[w^1 | \dots | w^n] \in C^1$ et $[\beta^1 | \dots | \beta^r] \in C^1$ par

$$\varphi^1([w^1 | \dots | w^n], [\beta^1 | \dots | \beta^r]) = \sum_{w \in S_{n,n+r}} (-1)^{|w|} [\gamma^1 | \dots | \gamma^{n+r}],$$

où $S_{n,n+r}$ est l'ensemble des $(n, n+r)$ -battages, $|w|$ la signature de la permutation w et $[\gamma^1 | \dots | \gamma^{n+r}]$ le battage des n lettres $[w^1 | \dots | w^n]$ avec les r lettres $[\beta^1 | \dots | \beta^r]$.

L'homologie associée au complexe, obtenu par itération, vérifie bien (P).

Toute algèbre de Hopf peut être munie d'une structure d'algèbre tressée σ -commutative où σ est le tressage défini par S.L. Woronowicz. Dans ce cas, la compatibilité du produit des

battages quantiques avec la différentielle de Hochschild, établie au chapitre précédent, m'a permis d'adapter la construction d'Eilenberg-MacLane au cadre des algèbres de Hopf. Pour A une algèbre de Hopf, l'espace vectoriel du complexe obtenu est le quotient de l'algèbre bitensorielle $T(T(A))$, par les éléments stables par l'action adjointe de A . La différentielle est la somme de deux différentielles, l'une déduite de celle du produit tensoriel tordu du complexe de Hochschild de A par lui-même, et l'autre de celle du complexe de Hochschild de $T(A)$, où $T(A)$ est une algèbre avec le produit des battages quantiques associé à σ . L'homologie de ce complexe, après normalisation, est appelée homologie quasi-abélienne. Si on considère l'homologie quasi-abélienne de l'algèbre d'un groupe abélien, on retrouve celle définie par le complexe issu de la première itération de la construction d'Eilenberg-MacLane. Dans le but d'étudier des invariants de 3-variétés, j'étudie dans la fin du chapitre 4 la cohomologie multiplicative associée à l'homologie quasi-abélienne d'une algèbre de Hopf commutative A . Pour cela, on considère l'ensemble des morphismes de l'algèbre bitensorielle $T(T(A))$, à valeur dans une algèbre commutative, inversibles pour le produit de convolution. En particulier les 3-cocycles quasi-abéliens d'un groupe G à valeur dans \mathbb{C}^* sont donnés par des couples d'applications (f, Ω) où $f : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $\Omega : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$, vérifiant pour $l, g, h, k \in G$

$$\begin{aligned} f(l^{-1}gl, l^{-1}hl, l^{-1}kl) &= f(g, h, k), & \Omega(l^{-1}gl, l^{-1}hl) &= \Omega(g, h), \\ f(h, k, l)f^{-1}(gh, k, l)f(g, hk, l)f^{-1}(g, h, kl)f(g, h, k) &= 1, \\ \Omega(h^{-1}gh, k)\Omega(g, h)f(g, h, k)f(h, k, k^{-1}h^{-1}ghk) &= \Omega(g, hk)f(h, h^{-1}gh, k), \\ \Omega(g, k)\Omega(h, k)f(g, k, k^{-1}hk) &= \Omega(gh, k)f(g, h, k)f(k, k^{-1}gk, k^{-1}hk). \end{aligned}$$

Pour montrer que la théorie homologique obtenue est non vide, je donne ensuite un exemple non trivial d'un 3-cocycle quasi-abélien du groupe diédral D_3 obtenu en utilisant le programme Maple.

Invariants des 3-variétés

En 1993, J. Mattes, M. Polyak, et N. Reshetikhin ont utilisé la cohomologie des groupes abéliens d'Eilenberg et MacLane pour construire des invariants des 3-variétés. A partir d'un 3-cocycle de la cohomologie d'un groupe abélien G , ils ont associé un poids à chaque diagramme planaire d'un entrelacs de rubans, coloré par G . En sommant les poids sur toutes les colorations possibles par G , ils ont construit un invariant des entrelacs de rubans. Cet invariant se prolonge ensuite à un invariant des 3-variétés.

On connaissait déjà une autre construction d'invariants associés à la théorie cohomologique des groupes. Ainsi, à un 3-cocycle normalisé w d'un groupe G quelconque à valeurs dans $U(1)$, R. Dijkraaf, V. Pasquier et P. Roche (1991) ont associé un double de Drinfeld tordu $D^w(G)$, qui est une quasi-algèbre de Hopf de rubans. Par ailleurs, à partir de la catégorie des représentations de dimension finie d'une quasi-algèbre de Hopf de rubans, D. Altschuler et A. Coste (1992) ont défini un foncteur qui, évalué sur un diagramme d'un entrelacs, définit un invariant des entrelacs de rubans. C'est une version non associative de l'invariant de Reshetikhin-Turaev associé à des catégories strictes rubanées. A $D^w(G)$, on peut alors associer un invariant des entrelacs qui peut s'étendre à un invariant des 3-variétés.

Or un 3-cocycle abélien est défini par un couple d'applications (w, Ω) où w est un 3-cocycle classique. Donc le couple (w, Ω) permet de construire ces deux invariants. Le but du chapitre

5 est de comparer, dans un cadre plus général, les deux invariants des 3-variétés obtenus. Pour cela, je commence par associer à un 3-cocycle de la cohomologie quasi-abélienne de l'algèbre d'un groupe un invariant des entrelacs de rubans, noté \tilde{Z} , qui généralise celui défini par J. Mattes, M. Polyak, N. Reshetikhin. Pour définir cet invariant, je colorie un diagramme planaire de l'entrelacs de rubans par un groupe G . Par construction, se donner une coloration d'un tel diagramme revient à se donner un morphisme de groupes du groupe fondamental de l'entrelacs dans G . Puis à un 3-cocycle quasi-abélien est associé un poids des diagrammes colorés. L'invariant \tilde{Z} s'écrit alors :

$$\tilde{Z}(L) = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(L), G)} \langle (D_L)_\rho \rangle$$

où $\langle (D_L)_\rho \rangle$ est le poids du diagramme D_L de l'entrelacs L , associé à la coloration définie par ρ .

En utilisant une décomposition du deuxième mouvement de Kirby par des diagrammes à point triple (construction due à O. Viro), je montre que pour prolonger \tilde{Z} aux 3-variétés, une condition suffisante est de considérer des colorations des diagrammes par des morphismes de groupes du groupe fondamental de la 3-variété dans G . L'invariant Z obtenu s'écrit :

$$Z(M_L) = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)} \langle (D_L)_\rho \rangle$$

où D_L est un diagramme d'un entrelacs définissant la 3-variété M_L par chirurgie.

Un 3-cocycle pour la cohomologie quasi-abélienne est défini par un couple d'applications (w, Ω) où w est un 3-cocycle classique. Donc le couple (w, Ω) permet de construire la quasi-algèbre de Hopf $D^w(G)$. La construction de R. Dijkraaf, V. Pasquier et P. Roche se réinterprète alors avec l'identité générale de Hochschild-Serre. Ceci permet de remarquer que $D^w(G)$, construit grâce à (w, Ω) , peut être vu soit comme une quasi-algèbre de Hopf, soit comme une algèbre de Hopf. Dans ce cas, cela permet de calculer l'invariant des entrelacs de rubans de N. Reshetikhin et V.G. Turaev, noté F_T , associé à une algèbre de Hopf de rubans.

Théorème *Si $D^w(G)$ est muni de sa structure d'algèbre de Hopf de rubans, F_T est donné pour tout entrelacs L à n brins par :*

$$F_T(L) = |G|^n |\text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)|,$$

où $|?|$ est le cardinal de l'ensemble ?.

La valeur de l'invariant des entrelacs F , obtenu lorsqu'on voit $D^w(G)$ comme une quasi-algèbre de Hopf est alors égale à F_T modulo des produits de valeur de w et de Ω sur des éléments fabriqués avec des éléments de G . En utilisant un parenthésage standard de la forme $? \otimes (? \otimes (\dots \otimes (? \otimes) \dots))$, je montre que les produits de valeur de w proviennent uniquement des changements de parenthésages nécessaires au calcul de F . Je prouve ainsi le théorème suivant

Théorème *Soient (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien normalisé, L un entrelacs à n brins. Alors*

$$F(L) = |G|^n Z(L)$$

où Z est l'invariant associé au 3-cocycle quasi-abélien (w^{-1}, Ω^{-1}) .

Chapitre 1

Rappels et notations

Dans toute cette thèse, \mathbb{K} désigne un corps. Les espaces vectoriels considérés seront des \mathbb{K} espaces vectoriels. Les algèbres considérées seront des \mathbb{K} algèbres associative et unitaire. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'espaces vectoriels, pour $n \geq 1$ et $1 \leq i \leq n$, on définit l'application linéaire $f_i : A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes i-1} \otimes B \otimes A^{\otimes n-i}$ par :

$$f_i(a^1 \otimes \cdots \otimes a^n) = a^1 \otimes \cdots \otimes a^{i-1} \otimes f(a^i) \otimes a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^n.$$

Par exemple, si Δ est le coproduit d'une cogèbre C , alors Δ_i ($1 \leq i \leq n$) est l'application linéaire de $C^{\otimes n}$ dans $C^{\otimes n+1}$ définie par l'application de Δ sur la $i^{\text{ème}}$ composante.

1.1 Structures cohomologiques

Dans cette partie, on donne les résultats de base de la théorie simpliciale, de façon à pouvoir énoncer le théorème de normalisation des complexes simpliciaux dans le cadre des espaces vectoriels et dans celui des groupes abéliens à loi multiplicative. Les objets et les opérateurs simpliciaux ont été introduits dans le cadre des groupes abéliens par Eilenberg et MacLane ([EML53]) sous le nom de FD opérateurs. On transporte facilement les preuves des résultats énoncés aux cadres des espaces vectoriels et des groupes abéliens à loi multiplicative.

On énonce ensuite le théorème d'Eilenberg-Zilber et on construit l'homologie de Hochschild d'une algèbre à partir de la résolution Bar de cette algèbre.

1.1.1 Catégorie simpliciale Δ et objets simpliciaux

Pour tout entier n , on note $[n]$ l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$ des entiers naturels compris entre 0 et n . Une application $f : [n] \rightarrow [m]$ est dite monotone si $f(i) \leq f(j)$ pour $0 \leq i \leq j \leq n$. On définit alors la catégorie Δ en prenant pour objets les ensembles $[n]$ pour $n \geq 0$ et pour morphismes les applications monotones.

L'application monotone $\varepsilon^i = \varepsilon_q^i : [q-1] \rightarrow [q]$ définie comme étant l'injection qui oublie i ($0 \leq i \leq q$), est appelée face.

L'application monotone $\eta^i = \eta_q^i : [q] \rightarrow [q+1]$ définie comme étant la surjection qui envoie i et $i+1$ sur i , est appelée dégénérescence.

Ces applications permettent de décomposer les applications monotones :

Théorème 1.1 *Pour toute application monotone $f : [n] \rightarrow [m]$ il existe une unique décomposition*

$$f = \varepsilon^{j_1} \dots \varepsilon^{j_t} \eta^{i_1} \dots \eta^{i_s}$$

avec $0 \leq i_1 < \dots < i_s < n$, $0 \leq j_t < \dots < j_1 \leq m$ et $m - t + s = n$.

On peut alors donner une présentation des morphismes de Δ par générateurs et relations.

Corollaire 1.1 *L'ensemble des morphismes de Δ est présenté par les générateurs ε^i , $0 \leq i \leq n$ et η^i , $0 \leq i \leq n$ avec les relations*

$$\begin{aligned} \varepsilon^i \varepsilon^j &= \varepsilon^j \varepsilon^{i-1} & j < i, \\ \eta^i \eta^j &= \eta^j \eta^{i+1} & j \leq i, \\ \eta^i \varepsilon^j &= \begin{cases} \varepsilon^j \eta^{i-1} & j < i, \\ \text{Id}_{[n]} & j = i, j = i + 1, \\ \varepsilon^{j-1} \eta^i & j > i + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On peut alors définir un objet simplicial d'une catégorie \mathcal{C} comme étant un foncteur contra-variant de Δ dans \mathcal{C} . C'est donc une famille (S_n) d'objets de \mathcal{C} munie de deux familles de morphismes de \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} d_i^n : S_n &\longrightarrow S_{n-1} & \forall n > 0, \forall i \in [0, \dots, n], \\ s_i^n : S_n &\longrightarrow S_{n+1} & \forall n \geq 0, \forall i \in [0, \dots, n]. \end{aligned}$$

telles que :

$$\begin{aligned} d_i^{n-1} \circ d_j^n &= d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n & i < j, \\ s_i^{n-1} \circ s_j^n &= s_{j+1}^{n-1} \circ s_i^n & i \leq j, \\ d_i^{n+1} \circ s_j^n &= \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n & i < j, \\ \text{Id}_{S_n} & i = j, i = j + 1, \\ s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n & i > j + 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les morphismes d_i^n et s_i^n sont respectivement appelés les opérateurs faces et dégénérescences.

Définition 1.1 *Soient S et T des complexes simpliciaux associés aux foncteurs de même nom. Une application simpliciale $\lambda : S \rightarrow T$ est une transformation naturelle du foncteur S vers le foncteur T . C'est-à-dire que λ est une suite de morphismes de degré 0 $\lambda_n : S_n \rightarrow T_n$ vérifiant $d_i \lambda_n = \lambda_{n-1} d_i$ et $s_i \lambda_n = \lambda_{n+1} s_i$ pour $0 \leq i \leq n$.*

Remarque : un objet pré-simplicial S de la catégorie \mathcal{C} est une famille (S_n) d'objets de \mathcal{C} et une famille de morphismes de \mathcal{C} :

$$d_i^n : S_n \longrightarrow S_{n-1} \quad \forall n > 0, \forall i \in [0, \dots, n],$$

vérifiant (1.1).

En particulier un objet simplicial est un objet pré-simplicial.

De la même manière on définit des objets (pré)-cosimpliciaux d'une catégorie \mathcal{C} par un foncteur de Δ dans \mathcal{C} . On a alors aussi une notion d'application cosimpliciale.

Soit \mathcal{C} la catégorie des \mathbb{K} espaces vectoriels. On peut alors associer à tout objet pré-simplicial de \mathcal{C} un complexe.

Définition 1.2 *Etant donné un objet pré-simplicial S de \mathcal{C} , on définit le complexe simplicial $K(S)$ qui lui est associé par :*

$$K(S)_n = S_n, \quad \delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n.$$

Par définition des d_i^n , on voit facilement que :

Lemme 1.1 *On a $\delta \circ \delta = 0$.*

Remarque : Si on considère un objet pré-cosimplicial (\tilde{S}, \tilde{d}_i) dans la catégorie \mathcal{C}_m des groupes abéliens avec une loi multiplicative, on lui associe de manière duale un complexe cosimplicial multiplicatif. La différentielle s'écrit alors $\tilde{\delta}_n = \prod_{i=0}^n (\tilde{d}_i^n)^{(-1)^i}$, où $(\tilde{d}_i^n)^{(-1)^i}(g) = (\tilde{d}_i^n(g))^{(-1)^i}$ pour tout $g \in \tilde{S}_n$. On a alors $\tilde{\delta} \circ \tilde{\delta} = 1$.

1.1.2 Opérateurs (co)simpliciaux et normalisation de complexe (co)simplicial

Opérateurs (co)simpliciaux

Soient n, m deux entiers naturels.

Définition 1.3 *Un opérateur (co)simplicial Γ de la catégorie \mathcal{C} est une famille de morphismes $\Gamma_S : S_n \rightarrow S_m$ définie pour tout complexe (co)simplicial S de \mathcal{C} qui est naturelle au sens où $\lambda_m \Gamma_S = \Gamma_T \lambda_n$ pour toute application (co)simpliciale $\lambda : S \rightarrow T$.*

La composition de deux opérateurs simpliciaux est un opérateur simplicial. En particulier les morphismes s_i et d_i ainsi que leurs compositions sont des opérateurs simpliciaux.

Soit $\beta : [n] \rightarrow [m]$ une application monotone. On définit un opérateur (co)simplicial β^* par $\beta_S^* = F(\beta)$ si le complexe (co)simplicial S est défini par le foncteur F . Cet opérateur est appelé opérateur (co)simplicial monotone. De façon analogue au théorème 1.1, on a :

Théorème 1.2 *Pour tout opérateur simplicial monotone β^* il existe une unique décomposition*

$$F(\beta) = s_{i_s} \dots s_{i_1} d_{j_t} \dots d_{j_1} : S_m \rightarrow S_n$$

avec $0 \leq i_1 < \dots < i_s < n$, $0 \leq j_t < \dots < j_1 \leq m$ et $m - t + s = n$.

Pour tout opérateur cosimplicial monotone β^ il existe une unique décomposition*

$$F(\beta) = d_{j_1} \dots d_{j_t} s_{i_1} \dots s_{i_s} : S_n \rightarrow S_m$$

avec $0 \leq i_1 < \dots < i_s < n$, $0 \leq j_t < \dots < j_1 \leq m$ et $m - t + s = n$.

On peut alors montrer

Corollaire 1.2 *Tout opérateur (co)simplicial $S_m \rightarrow S_n$ peut être décomposé de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients entiers d'opérateurs (co)simpliciaux monotones.*

En particulier, si l'opérateur (co)simplicial est de degré n , alors chaque opérateur simplicial monotone composant la décomposition est de degré n .

Remarque : Dans le cas d'un opérateur cosimplicial de la catégorie $\mathcal{C}m$, on montre que tout opérateur cosimplicial s'écrit de manière unique comme un produit de puissances entières d'opérateurs cosimpliciaux monotones.

Normalisation de complexe (co)simplicial

Soit S un complexe simplicial de la catégorie \mathcal{C} . Les propriétés de commutation des faces avec les dégénérescences permettent de définir un sous-complexe $D(S)$ de S engendré par les éléments dégénérés de S . C'est-à-dire que $D(S)_n$ est le sous-groupe de S_n engendré par les $s_i(c_n)$ ($0 \leq i \leq n$) et $c_n \in S_n$. Le quotient $S_N = S/D(S)$ est appelé le complexe normalisé de S .

Théorème 1.3 Soient S un complexe simplicial de \mathcal{C} et S_N le complexe normalisé. Il existe des applications de complexes $f : S \rightarrow S_N$, $g : S_N \rightarrow S$ et une homotopie de complexes ϕ de S tels que :

- (i) $fg = \text{Id}$, $\delta\phi + \phi\delta = gf - \text{Id}$,
- (ii) les applications ϕ et gf sont des opérateurs simpliciaux,
- (iii) $\phi g = 0$ et $f\phi = 0$.

De manière duale, pour S un complexe cosimplicial de la catégorie $\mathcal{C}m$, on pose $D(S)_n = \bigcap_{i=0}^n \ker(s_i)$. C'est un sous-complexe de S appelé complexe normalisé.

Théorème 1.4 Soient S un complexe cosimplicial de $\mathcal{C}m$ et $D(S)$ le complexe normalisé. Il existe des applications de complexes $f : S \rightarrow D(S)$, $g : D(S) \rightarrow S$ et une homotopie de complexes ϕ de S telles que :

- (i) $fg = \text{Id}$, $\delta\phi.\phi\delta = gf.\text{Id}^{-1}$, où $\text{Id}^{-1}(c_n) = c_n^{-1}$ pour $c_n \in S_n$,
- (ii) les applications ϕ et gf sont des opérateurs simpliciaux,
- (iii) $\phi g = 1$ et $f\phi = 1$.

1.1.3 Théorème d'Eilenberg-Zilber

Les objets (pré-)simpliciaux considérés sont des objets de la catégorie \mathcal{C} . Les résultats énoncés dans cette partie peuvent être retrouvés, par exemple, dans le livre de MacLane [ML95] et celui de Loday [Lod92].

Définition 1.4 Soient A et B des objets simpliciaux. On définit le produit cartésien, noté $A \times B$, de A par B par :

$$\begin{aligned} (A \times B)_n &= A_n \otimes B_n, \\ d_i^n : (A \times B)_n &\longrightarrow (A \times B)_{n-1} \\ &\quad a \otimes b \longmapsto d_i^n(a) \otimes d_i^n(b), \\ s_i^n : (A \times B)_n &\longrightarrow (A \times B)_{n+1} \\ &\quad a \otimes b \longmapsto s_i^n(a) \otimes s_i^n(b). \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *Si A, B sont des objets simpliciaux, alors $A \times B$ est un objet simplicial.*

Le complexe qui lui est associé est donné par :

$$\begin{aligned} \partial : (A \times B)_n &\longrightarrow (A \times B)_{n-1} \\ a \otimes b &\longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n(a) \otimes d_i^n(b). \end{aligned}$$

Remarque : Afin d'alléger les notations, le complexe associé à un objet simplicial sera noté de la même manière que l'objet. De plus, on omettra les exposants dans les opérateurs faces et dégénérescences.

Le produit tensoriel de deux complexes de \mathbb{K} espaces vectoriels (C, δ) et (C', δ') , noté $(C \otimes C', D)$, est défini par :

$$\begin{aligned} (C \otimes C')_n &= \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C'_q, \\ D_n &= \sum_{p+q=n} \delta_p \otimes \text{Id} + (-1)^p \text{Id} \otimes \delta'_q. \end{aligned}$$

Théorème 1.5 (Eilenberg-Zilber)

Soient A et B des objets simpliciaux. Il y a équivalence de complexes entre $A \times B$ et $A \otimes B$, c'est-à-dire qu'il existe deux familles (f_n) , (g_n) de morphismes pour lesquelles les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} (A \times B)_n & \xrightarrow{f_n} & (A \otimes B)_n & (A \otimes B)_n & \xrightarrow{g_n} & (A \times B)_n & \\ \partial_n \downarrow & & D_n \downarrow & D_n \downarrow & & \partial_n \downarrow & \\ (A \times B)_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & (A \otimes B)_{n-1} & (A \otimes B)_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & (A \times B)_{n-1} & \end{array}$$

et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \circ g_n$ et $g_n \circ f_n$ sont homotopes à Id .

Preuve : La famille de morphismes (f_n) est donnée par :

$$\begin{aligned} f_n : (A \times B)_n &\longrightarrow (A \otimes B)_n \\ a \otimes b &\longmapsto \sum_{i=0}^n d_{i+1} \circ \dots \circ d_n(a) \otimes (d_0)^i(b). \end{aligned}$$

La famille (f_n) est appelée l'application d'Alexander-Whitney.

La famille de morphismes (g_n) est donnée par :

$$g_n : (A \otimes B)_n \longrightarrow (A \times B)_n,$$

où pour $a \in A^{\otimes p}$ et $b \in A^{\otimes q}$ avec $p + q = n$:

$$g_n(a \otimes b) = \sum_{\nu \in S_{p,n}} (-1)^{|\nu|} s_{\nu(p+q)-1} \circ \dots \circ s_{\nu(p+1)-1}(a) \otimes s_{\nu(p)-1} \circ \dots \circ s_{\nu(1)-1}(b).$$

La famille (g_n) est appelée l'application des tressages. \square

1.1.4 Résolution Bar et homologie de Hochschild d'une algèbre

Soit A une algèbre.

Définition 1.5 La résolution $\text{Bar}(A, A)$ est l'objet simplicial défini par :

$$\text{Bar}_n(A, A) = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A.$$

Si on note $a[a^1 | \cdots | a^n]b$ les éléments de $\text{Bar}_n(A, A)$, les opérateurs sont donnés par :

$$\begin{aligned} d_0(a[a^1 | \cdots | a^n]b) &= aa^1[a^2 | \cdots | a^n]b, \\ d_i(a[a^1 | \cdots | a^n]b) &= a[a^1 | \cdots | a^i a^{i+1} | \cdots | a^n]b & \forall i \in [1, \dots, n-1], \\ d_n(a[a^1 | \cdots | a^n]b) &= a[a^1 | \cdots | a^{n-1}]a^n b, \\ s_i(a[a^1 | \cdots | a^n]b) &= a[a^1 | \cdots | a^i | 1_A | a^{i+1} | \cdots | a^n]b & \forall i \in [0, \dots, n]. \end{aligned}$$

L'espace $\text{Bar}_n(A, A)$ est un A -bimodule, la structure est donnée par l'action sur le premier et le dernier terme, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a.a'[a^1 | \cdots | a^n]b &= aa'[a^1 | \cdots | a^n]b, \\ a'[a^1 | \cdots | a^n]b.a &= a'[a^1 | \cdots | a^n]ba, \end{aligned}$$

pour $a \in A$ et $a'[a^1 | \cdots | a^n]b \in \text{Bar}_n(A, A)$.

A l'objet simplicial $\text{Bar}(A, A)$ est associé un complexe défini par :

$$\begin{aligned} \delta_n(a[a^1 | \cdots | a^n]b) &= aa^1[a^2 | \cdots | a^n]b + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a[a^1 | \cdots | a^i a^{i+1} | \cdots | a^n]b \\ &\quad + (-1)^n a[a^1 | \cdots | a^{n-1}]a^n b. \end{aligned}$$

Il est clair que les d_i sont des morphismes de A -bimodules, donc δ_n est un morphisme de A -bimodules.

On note \otimes_{A-A} le produit tensoriel de deux A -bimodules. Pour M et N des A -bimodules, il est défini par :

$$M \otimes_{A-A} N = (M \otimes N)/I,$$

où I est engendré par : $a.m \otimes n - m \otimes n.a$, $m.a \otimes n - m \otimes a.n$.

Remarque : Si $f : N^1 \rightarrow N^2$ est un morphisme de A -bimodules, on peut étendre f de manière naturelle à $M \otimes_{A-A} N^1$ par :

$$\text{Id} \otimes f : M \otimes_{A-A} N^1 \rightarrow M \otimes_{A-A} N^2.$$

Comme δ_n est un morphisme de A -bimodules, on peut poser :

Définition 1.6 Le complexe de Hochschild de l'algèbre A , à coefficients dans le A -bimodule M , est défini par :

$$C_n(A, M) = M \otimes_{A-A} \text{Bar}_n(A, A), \text{Id} \otimes \delta_n.$$

La différentielle est donnée pour $m \otimes a[a^1 | \cdots | a^n]b \in C_n(A, M)$ par :

$$\begin{aligned} \delta_n(m \otimes a[a^1 | \cdots | a^n]b) &= b.m.aa^1 \otimes 1_A[a^2 | \cdots | a^n]1_A \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i b.m.a \otimes 1_A[a^1 | \cdots | a^i a^{i+1} | \cdots | a^n]1_A \\ &\quad + (-1)^n a^n b.m.a \otimes 1_A[a^1 | \cdots | a^{n-1}]1_A. \end{aligned}$$

Lemme 1.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels :*

$$M \otimes_{A-A} \text{Bar}_n(A, A) \simeq M \otimes A^{\otimes n}.$$

Preuve : L'isomorphisme est donné par :

$$\begin{aligned} M \otimes_{A-A} \text{Bar}_n(A, A) &\longrightarrow M \otimes A^{\otimes n} \\ m \otimes a[a^1 | \cdots | a^n]b &\longmapsto b.m.a \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n, \\ M \otimes A^{\otimes n} &\longrightarrow M \otimes_{A-A} \text{Bar}_n(A, A) \\ m \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n &\longmapsto m \otimes 1_A[a^1 | \cdots | a^n]1_A. \end{aligned}$$

□

Via cet isomorphisme, le complexe de Hochschild de A à coefficients dans M peut être vu comme :

$$M \otimes A^{\otimes n},$$

la différentielle δ'_n étant donnée pour $m \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n \in M \otimes A^{\otimes n}$ par :

$$\begin{aligned} \delta'_n(m \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n) &= m.a^1 \otimes a^2 \otimes \cdots \otimes a^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^n \\ &\quad + (-1)^n a^n.m \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^{n-1}. \end{aligned}$$

Dualement on définit la cohomologie de Hochschild d'une algèbre A à valeurs dans un A -bimodule M .

Définition 1.7 *La cohomologie de Hochschild de A à valeurs dans M est l'homologie du complexe suivant :*

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, M) \xrightarrow{d_0} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M) \xrightarrow{d_n} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n+1}, M) \rightarrow \cdots,$$

avec, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_0(f)(a) &= a.f(1) - f(1).a, \\ d_n(f)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^{n+1}) &= a^1.f(a^2 \otimes \cdots \otimes a^{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^n).a^{n+1}. \end{aligned}$$

1.2 Structures algébriques

Après avoir introduit les notions d'algèbre de Hopf de rubans ([Dri87],[RT90]) et de quasi-algèbre de Hopf de rubans ([Dri90], [AC92]) qui nous serviront à construire des invariants de certaines 3-variétés, on énonce une caractérisation des A -bimodule de Hopf due à Woronowicz [Wor89].

On rappelle ensuite la construction du coproduit de l'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel ([Swe69]) et de l'algèbre tensorielle d'un bimodule de Hopf ([Nic78]). Puis nous énonçons la définition de Blattner, Cohen et Montgomery [BCM86] du produit croisé (respectivement du coproduit croisé) d'un A -module algèbre à droite (A -comodule cogèbre à droite).

1.2.1 Algèbre de Hopf de rubans et quasi-algèbre de Hopf de rubans

Pour tous V, W des \mathbb{K} espaces vectoriels, on définit l'application linéaire τ par :

$$\begin{aligned} \tau \quad V \otimes W &\rightarrow W \otimes V \\ v \otimes w &\mapsto w \otimes v. \end{aligned}$$

Remarque : L'application τ est souvent appelée flip.

Définition 1.8 Une algèbre de Hopf A est dite quasi-triangulaire s'il existe un élément inversible de $A \otimes A$ tel que pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} \tau\Delta(a) &= R\Delta(a)R^{-1}, \\ (\Delta \otimes \text{Id})(R) &= R_{13}R_{23}, \\ (\text{Id} \otimes \Delta)(R) &= R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

A toute algèbre de Hopf quasi-triangulaire on associe l'élément $u = \sum_i S(\beta_i)\alpha_i$ où $R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$. On a alors la définition

Définition 1.9 Une algèbre de Hopf A est dite de rubans si A est quasi-triangulaire et s'il existe un élément central $v \in A$ tel que

$$\begin{aligned} v^2 &= us(u), \quad s(v) = v, \quad \varepsilon(v) = 1, \\ \Delta(v) &= (R_{21}R_{12})^{-1}(v \otimes v). \end{aligned}$$

Définition 1.10 Une algèbre A est dite quasi-algèbre de Hopf s'il existe des morphismes d'algèbres $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ et $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{K}$, un antimorphisme d'algèbres $S : A \rightarrow A$ et des éléments inversibles $\phi \in A \otimes A \otimes A$, $p, q \in A$ tels que :

(i) Δ est quasi-coassociatif. C'est-à-dire que pour tout $a \in A$

$$(\text{Id} \otimes \Delta)\Delta(a) = \phi(\Delta \otimes \text{Id})\Delta(a)\phi^{-1},$$

(ii) ϕ vérifie

$$(\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \Delta)(\phi).(\Delta \otimes \text{Id} \otimes \text{Id})(\phi) = (1_A \otimes \phi).(\text{Id} \otimes \Delta \otimes \text{Id})(\phi).(\phi \otimes 1_A),$$

(iii) ε vérifie

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes \text{Id})\Delta &= \text{Id} = (\text{Id} \otimes \varepsilon)\Delta, \\ (\text{Id} \otimes \varepsilon \otimes \text{Id})(\phi) &= 1_A \otimes 1_A, \end{aligned}$$

(iv) pour tout $a \in A$

$$\sum S(a_{(1)})pa_{(2)} = \varepsilon(a)p, \quad \sum a_{(1)}qS(a_{(2)}) = \varepsilon(a)q,$$

(v) si $\phi = \sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i$ et $\phi^{-1} = \sum_i P_i \otimes Q_i \otimes R_i$ alors

$$\sum_i X_i S(Y_i) p Z_i = 1_A, \quad \sum_i S(p_i) p Q_i S(R_i) = 1_A.$$

De même que pour les algèbres de Hopf on peut définir une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire.

Définition 1.11 Une quasi-algèbre de Hopf A est dite quasi-triangulaire s'il existe un élément inversible $R \in A \otimes A$ tel que

$$\begin{aligned}\tau\Delta(a) &= R\Delta(a)R^{-1} && \forall a \in A, \\ (\Delta \otimes \text{Id})(R) &= \phi_{312}R_{13}\phi_{132}^{-1}R_{23}\phi, \\ (\text{Id} \otimes \Delta)(R) &= \phi_{231}^{-1}R_{13}\phi_{213}R_{12}\Phi^{-1}.\end{aligned}$$

A toute quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire on associe les éléments $\gamma \in A \otimes A$ et $u \in A$

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{i,j} (S \otimes S)(\tau\Delta(P_j)) \cdot (S(B_i)pC_i \otimes S(A_i)pD_i) \cdot \Delta(Q_jqS(R_j)), \\ u &= \sum_{l,j} S(Q_jqS(R_j)) S(\beta_l)p\alpha_l P_j,\end{aligned}$$

où $R = \sum_l \alpha_l \otimes \beta_l$, $\phi^{-1} = \sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j$ et

$$(\phi \otimes 1_A) \cdot (\Delta \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}) \cdot \phi^{-1} = \sum_i A_i \otimes B_i \otimes C_i \otimes D_i.$$

Définition 1.12 Une quasi-algèbre de Hopf A est dite de rubans si A est quasi-triangulaire et s'il existe un élément central $v \in A$ tel que

$$\begin{aligned}v^2 &= us(u), & s(v) &= v, & \varepsilon(v) &= 1, \\ \Delta(uv^{-1}) &= \gamma^{-1}((S \otimes S)(\gamma_{21}))(uv^{-1} \otimes uv^{-1})\end{aligned}$$

1.2.2 Bimodule de Hopf

Soit A une algèbre de Hopf.

Définition 1.13 Un A -bimodule de Hopf M est un A -bimodule muni de structures de A -comodule à gauche δ_L et à droite δ_R qui vérifient :

δ_R est un morphisme de A -bimodules,

δ_L est un morphisme de A -bimodules,

δ_L et δ_R commutent au sens suivant :

$$(\text{Id} \otimes \delta_R)\delta_L = (\delta_L \otimes \text{Id})\delta_R.$$

Cette notion a été utilisée par Woronowicz [Wor89] sous le nom de bimodule bicovariant. Si on considère l'espace de coinvariants à droite $M^R = \{v \in M \mid \delta_R(v) = v \otimes 1_A\}$, on peut donner une caractérisation de ces objets :

Théorème 1.6 (Woronowicz) Soient (M, δ_L, δ_R) un A -bimodule de Hopf et $(w_i)_{i \in I}$ une base de M^R . Alors

(i) pour tout $v \in M$ il existe une unique famille $(v_i)_{i \in I}$ d'éléments de A telle que :

$$m = \sum_{i \in I} v_i w_i.$$

(ii) il existe des formes linéaires $f_{i,j}$ ($i, j \in I$) sur A telles que :

$$\forall b \in A, \forall i \in I \quad w_i b = \sum_{j \in I} f_{i,j}(b_{(1)}) b_{(2)} w_j,$$

pour tous $i, j \in I$ et $a, b \in A$ elles satisfont à :

$$f_{i,j}(ab) = \sum_{l \in I} f_{i,l}(a) f_{l,j}(b), \quad (1.2)$$

$$f_{i,j}(1_A) = \delta_i(j). \quad (1.3)$$

(iii) il existe des éléments $\Lambda_{i,j}$ ($i, j \in I$) de A tels que :

$$\forall i \in I \quad \delta_L(w_i) = \sum_{j \in I} \Lambda_{i,j} \otimes w_j.$$

De plus, pour tous $i, j \in I$ et $a \in A$, ils satisfont à :

$$\Delta(\Lambda_{i,j}) = \sum_{l \in I} \Lambda_{i,l} \otimes \Lambda_{l,j}, \quad (1.4)$$

$$\varepsilon(\Lambda_{i,j}) = \delta_i(j), \quad (1.5)$$

$$\sum_{l \in I} \Lambda_{i,l} a_{(1)} f_{l,j}(a_{(2)}) = \sum_{l \in I} f_{i,l}(a_{(1)}) a_{(2)} \Lambda_{l,j}. \quad (1.6)$$

Inversement, soient M un A -module à gauche libre engendré par $(w_i)_{i \in I}$, $(f_{i,j})_{i,j \in I}$ une famille de formes linéaires sur A vérifiant (1.2) et (1.3), et $(\Lambda_{i,j})_{i,j \in I}$ une famille d'éléments de A vérifiant (1.4), (1.5) et (1.6). L'espace M peut être muni d'une structure de A -bimodule de Hopf. Soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A . La structure est donnée par :

$$\left(\sum_{i \in I} v_i w_i \right) b = \sum_{i,j \in I} v_i f_{i,j}(b_{(1)}) b_{(2)} w_j \quad \forall b \in A,$$

$$\delta_L \left(\sum_{i \in I} v_i w_i \right) = \sum_{i,j \in I} v_i \Lambda_{i,j} \otimes v_j w_j,$$

$$\delta_R \left(\sum_{i \in I} v_i w_i \right) = \sum_{i \in I} v_i \Lambda_{i,i} \otimes v_i w_i.$$

Remarque : La condition (i) revient à dire que $M \simeq A \otimes M^R$. La condition (ii) dit alors qu'il existe un antimorphisme d'algèbre $f : A \rightarrow \text{End}(M^R)$ tel que pour tout $w \in M^R$ et $a \in A$ on a $w.a = \sum a_{(2)} f(a_{(1)})(w)$. La condition (iii) signifie que M^R est un A -sous comodule à gauche. L'égalité (1.6) s'écrit alors

$$\sum w_{(-1)} a_{(1)} \otimes a_{(3)} f(a_{(2)})(w_{(0)}) = \sum a_{(2)} (f(a_{(1)})(w))_{(-1)} \otimes a_{(3)} (f(a_{(1)})(w))_{(0)}.$$

1.2.3 Algèbre tensorielle

Représentation du groupe des tresses et battages

On note Σ_n le groupe symétrique de $\{1, 2, \dots, n\}$, et pour tout $i \in [1, \dots, n]$ par s_i la transposition $(i, i+1)$. L'ensemble des (p, n) battages, noté $S_{p,n}$ est l'ensemble des permutations ν de Σ_n telles que :

$$\nu(1) < \dots < \nu(p) \quad \text{et} \quad \nu(p+1) < \dots < \nu(n).$$

Le groupe des tresses à n brins est noté B_n , et pour tout $i \in [1, \dots, n]$, ν_i est le i -ème générateur. Soit $\sigma : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ une application linéaire vérifiant l'équation des tresses :

$$(\text{Id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \sigma) = (\sigma \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{Id}).$$

On peut alors définir une représentation T_σ du groupe des tresses B_n dans $V^{\otimes n}$ par :

$$T_\sigma(\nu_i) = \sigma_i \quad \forall i \in [1, \dots, n-1].$$

En particulier, si $w \in \Sigma_n$ admet comme décomposition réduite $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ alors

$$T_\sigma(w) = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}.$$

Constructions tensorielles

Soit V un espace vectoriel. On désigne par $T(V)$ l'algèbre tensorielle :

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}.$$

On pose pour tout $n \geq 0$ $T(V)_n = V^{\otimes n}$.

L'algèbre $T(V)$ est une bigèbre ([Swe69]) avec pour tout $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $v \in T(V)_n$:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \alpha \otimes 1, \\ \Delta(v) &= 1 \otimes v + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{w \in S_{p,n}} T_\tau(w^{-1})(v) + v \otimes 1, \\ \varepsilon(\alpha) &= \alpha, \\ \varepsilon(v) &= 0, \end{aligned}$$

où pour $w \in S_{p,n}$, on voit $T_\tau(w^{-1})(v)$ dans $V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes n-p}$.

En fait, le coproduit est obtenu en posant :

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \alpha \otimes 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \\ \Delta(v) &= 1 \otimes v + v \otimes 1 \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

et on étend Δ à $T(V)$ en imposant que ce soit un morphisme d'algèbres.

Remarque : En posant $S(\alpha) = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $S(v) = -v$ pour $v \in V$, la bigèbre $T(V)$ devient une algèbre de Hopf.

En s'inspirant de cette construction, ([Nic78]) a défini une structure de bigèbre sur l'algèbre tensorielle d'un A -bimodule de Hopf M . Cette construction tensorielle est notée $T_A(M)$. Soient N_1 et N_2 des A -bimodules, on définit le A -bimodule $N_1 \otimes_A N_2$ par la suite exacte :

$$N_1 \otimes A \otimes N_2 \xrightarrow{\varphi_R \otimes \text{Id} - \text{Id} \otimes \varphi_L} N_1 \otimes N_2 \longrightarrow N_1 \otimes_A N_2 \longrightarrow 0$$

En tant qu'espace vectoriel on a alors :

$$T_A(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^{\otimes_A n},$$

où $M^{\otimes_A 0} = A$. On notera $\forall n \geq 0 \quad T_A(M)_n = M^{\otimes_A n}$. Cet espace est muni d'une structure d'algèbre avec pour tous $p, q > 1$, $a, b \in A$, $v = v^1 \otimes \cdots \otimes v^p \in T_A(M)_p$ et $v' \in T_A(M)_q$:

$$\begin{aligned} a.b &= ab, \\ a.v &= (av^1) \otimes \cdots \otimes v^p, \\ v.a &= v^1 \otimes \cdots \otimes (v^p a), \\ v.v' &= v \otimes v', \\ 1_{T_A(M)} &= 1_A. \end{aligned}$$

De même que pour l'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel, la structure de cogèbre est définie sur $T_A(M)_0$ et sur $T_A(M)_1$ par :

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} & \forall a \in A, \\ \Delta(v) &= \sum v_{(-1)} \otimes v_{(0)} + \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} & \forall v \in M, \\ \varepsilon(a) &= \varepsilon_A(a) & \forall a \in A, \\ \varepsilon(v) &= 0 & \forall v \in M, \end{aligned}$$

puis elle est étendue à tout $T_A(M)$ en demandant que Δ et ε soient des morphismes d'algèbres.

1.2.4 Produit croisé et coproduit croisé

Produit croisé

Soit M un A -module à droite muni d'une structure d'algèbre.

Définition 1.14 *On dit que M est un A -module algèbre à droite si le produit et l'unité sont des morphismes de A -modules à droite. C'est-à-dire, si pour tous $v, v' \in M$ et $a \in A$:*

$$\begin{aligned} (vv').a &= \sum (v.a_{(1)})(v'.a_{(2)}), \\ 1_M.a &= \varepsilon(a)1_M. \end{aligned}$$

Soit M un A -module algèbre à droite. La structure de module algèbre à droite de M permet de munir l'espace vectoriel $A \otimes M$ d'une structure d'algèbre ([Mon93]) définie pour tous $a, b \in A$ et $v, v' \in M$ par :

$$\begin{aligned} \varphi((a \otimes v) \otimes (b \otimes v')) &= \sum ab_{(1)} \otimes (v.b_{(2)})v', \\ \eta(1) &= 1_A \otimes 1_M. \end{aligned}$$

L'espace $A \otimes M$ muni de cette structure est noté $A \sharp M$.

Remarque : On définit de manière analogue le produit croisé $M \sharp A$ d'un A -module algèbre à gauche.

Coproduit croisé

Soient M un A -comodule à droite muni d'une structure de cogèbre et $v \in M$. Les éléments $(\Delta \otimes \text{Id})\delta_R(v)$ et $\delta_R\Delta(v)$ de $M \otimes M \otimes m \otimes A$ sont notés :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id})\delta_R(v) &= \sum v_{(0)(1)} \otimes v_{(0)(2)} \otimes v_{(1)}, \\ \delta_R\Delta(v) &= \sum v_{(1)(0)} \otimes v_{(2)(0)} \otimes v_{(1)(1)} v_{(2)(1)}. \end{aligned}$$

Définition 1.15 *On dit que M est un A -comodule cogèbre à droite si le coproduit et la counité sont des morphismes de comodules. C'est-à-dire, si pour tout $v \in M$:*

$$\begin{aligned} \sum v_{(1)(0)} \otimes v_{(2)(0)} \otimes v_{(1)(1)} v_{(2)(1)} &= \sum v_{(0)(1)} \otimes v_{(0)(2)} \otimes v_{(1)}, \\ \sum \varepsilon(v) 1_A &= \sum \varepsilon(v_{(0)}) v_{(1)}. \end{aligned}$$

Soit M un A -comodule cogèbre à droite. La structure de comodule cogèbre à droite de M permet de munir l'espace vectoriel $A \otimes M$ d'une structure de cogèbre ([Mon93]) définie pour tout $a \in A$ et $v \in M$ par :

$$\begin{aligned} \Delta(a \otimes v) &= \sum (a_{(1)} \otimes v_{(1)(0)}) \otimes (a_{(2)} v_{(1)(1)} \otimes v_{(2)}), \\ \varepsilon(a \otimes v) &= \varepsilon(a) \varepsilon(v). \end{aligned}$$

L'espace $A \otimes M$ muni de cette structure est noté $A \bowtie M$.

Remarque : On définit de la même manière le coproduit croisé $M \bowtie A$ d'un A -comodule cogèbre à gauche.

Chapitre 2

Groupes quantiques inhomogènes

Dans ([PW97]), Podleś et Woronowicz ont donné une construction de groupes quantiques inhomogènes à partir d'une algèbre de Hopf A et d'un A -bimodule de Hopf M . La composante inhomogène de ces groupes est déterminée par une famille d'applications. Afin de mieux comprendre cette construction, on construit un bicomplexe associé à A et à M . Après avoir relié la cohomologie de degré 1 du complexe total aux extensions scindées de bimodules de Hopf, on réécrit la construction des groupes quantiques inhomogènes dans le langage des algèbres de Hopf et des bimodules de Hopf. La composante inhomogène est alors un 2-cocycle du complexe total. De plus, les groupes quantiques inhomogènes ainsi obtenus ne dépendent que d'une certaine classe de 2-cocycles. Puis on explicite les structures de bigèbres de ces groupes quantiques inhomogènes en terme de produit croisé de module algèbre et de coproduit croisé de comodule cogèbre.

Ce chapitre est totalement indépendant du reste de la thèse.

2.1 Algèbre de Hopf inhomogène

Après avoir donné un cadre cohomologique, qui permet d'interpréter la composante inhomogène du produit en terme de 2-cocycle du complexe total du bimodule M , on montre que si on ajoute à la composante inhomogène un certain cobord, cela ne change pas la structure d'algèbre de Hopf inhomogène.

2.1.1 Bicomplexe associé à un bimodule de Hopf

Soient A une algèbre de Hopf, M un A -module à gauche. On va d'abord écrire un complexe de Hochschild qui utilise la structure d'algèbre de A et de A -bimodule de M . Ensuite on définit un complexe utilisant la structure de cogèbre de A et de A -bicomodule de M . C'est une construction duale à celle du complexe de Hochschild. Ces deux complexes nous permettent alors de définir un bicomplexe utilisant les structures d'algèbre de Hopf et de bimodule de Hopf.

Soit N un A -module à gauche. On définit $\text{Hom}_A(M, N)$ par l'ensemble des morphismes de A -modules à gauche de M dans N . Le corps \mathbb{K} est muni de la structure de A -bimodule triviale.

Cohomologie de A -bimodules

Afin de calculer la cohomologie de Hochschild (1.7) de A à valeur dans $\text{Hom}_A(M, A^{\otimes n})$ pour ($n \geq 0$ fixé), on munit l'espace vectoriel $A^{\otimes n}$ de la structure de A -bimodule diagonale. Alors $\text{Hom}_A(M, A^{\otimes n})$ est un A -bimodule défini pour $f \in \text{Hom}_A(M, A^{\otimes n})$, $a \in A$ et $v \in M$ par :

$$\begin{aligned}(a.f)(v) &= f(v.a), \\ (f.a)(v) &= f(v)a.\end{aligned}$$

Pour réécrire ce complexe en termes d'espaces vectoriels isomorphes

$$\text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes n}, A^{\otimes p}),$$

on munit l'espace $M \otimes A^{\otimes n}$ d'une structure de A -module à gauche par :

$$\begin{aligned}\varphi_L : \quad A \otimes M \otimes A^{\otimes p} &\longrightarrow M \otimes A^{\otimes p} \\ a \otimes v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p &\longmapsto a.v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p.\end{aligned}$$

On a immédiatement l'isomorphisme d'espace vectoriel ci-dessous :

Proposition 2.1

$$\forall n \geq 0, \forall p \geq 0, \quad \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes n}, A^{\otimes p}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, \text{Hom}_A(M, A^{\otimes p})).$$

L'isomorphisme est donné par :

$$\begin{aligned}\text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes n}, A^{\otimes p}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, \text{Hom}_A(M, A^{\otimes p})) \\ f &\longmapsto F\end{aligned}$$

$$\text{avec } F(a^1 \otimes \cdots \otimes a^n)(v) = f(v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n),$$

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, \text{Hom}_A(M, A^{\otimes p})) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes n}, A^{\otimes p}) \\ F &\longmapsto f\end{aligned}$$

$$\text{avec } f(v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n) = F(a^1 \otimes \cdots \otimes a^n)(v).$$

Soit $\mathcal{F}_{p,q} = \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes p}, A^{\otimes q})$. En transportant par cet isomorphisme le complexe de Hochschild associé à $\text{Hom}_A(M, A^{\otimes n})$, on obtient le complexe $(\mathcal{F}_{.,p}, d^{(p)})$ suivant :

$$\text{Hom}_A(M, A^{\otimes p}) \xrightarrow{d_0^{(p)}} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}^{(p)}} \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes n}, A^{\otimes p}) \xrightarrow{d_n^{(p)}} \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes n+1}, A^{\otimes p}) \longrightarrow \cdots,$$

avec pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}d_0^{(p)}(f)(v \otimes a) &= f(v.a) - f(v).a, \\ d_n^{(p)}(f)(v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^{n+1}) &= f(v.a^1 \otimes a^2 \otimes \cdots \otimes a^{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n).a^{n+1}.\end{aligned}$$

Cohomologie des A -bicomodules

Soit M un A -bimodule de Hopf.

Soit D_0 l'application définie par :

$$\begin{aligned} D_0 : \quad \text{Hom}_A(M, \mathbb{K}) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, A) \\ f &\longmapsto (Id \otimes f)\delta_L - (f \otimes Id)\delta_R. \end{aligned}$$

Comme M est un A -bimodule de Hopf, on a bien $D_0(f) \in \text{Hom}_A(M, A)$.

De manière plus générale on pose, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} D_n : \quad \text{Hom}_A(M, A^{\otimes n}) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, A^{\otimes n+1}) \\ f &\longmapsto (Id \otimes f)\delta_L + \sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta_i f + (-1)^{n+1} (f \otimes Id)\delta_R. \end{aligned}$$

La structure de A -bimodule de Hopf montre que ces morphismes sont bien définis. On peut maintenant préciser la cohomologie des bicomodules.

Proposition 2.2 *La suite*

$$\text{Hom}_A(M, \mathbb{K}) \xrightarrow{D_0} \text{Hom}_A(M, A) \cdots \text{Hom}_A(M, A^{\otimes n}) \xrightarrow{D_n} \text{Hom}_A(M, A^{\otimes n+1}) \xrightarrow{D_{n+1}} \dots$$

est un complexe.

Preuve : Pour montrer que $D \circ D = 0$, on a besoin du lemme suivant qui se montre par récurrence grâce à la coassociativité du coproduit.

Lemme 2.1 *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n+1}} (-1)^{i+j} \Delta_j^{(n+1)} \circ \Delta_i^{(n)} = 0.$$

□

Soit $p \geq 0$. Le A -module à gauche $M \otimes A^{\otimes p}$ est muni de la structure de A -bicomodule du produit tensoriel de A -bicomodules, qui est compatible au produit à gauche :

$$\begin{aligned} \delta_L : \quad M \otimes A^{\otimes p} &\longrightarrow A \otimes M \otimes A^{\otimes p} \\ v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p &\longmapsto \sum v_{(-1)} a_{(1)}^1 \cdots a_{(1)}^p \otimes v_{(0)} \otimes a_{(2)}^1 \otimes \cdots \otimes a_{(2)}^p, \\ \delta_R : \quad M \otimes A^{\otimes p} &\longrightarrow M \otimes A^{\otimes p} \otimes A \\ v \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p &\longmapsto \sum v_{(0)} \otimes a_{(1)}^1 \otimes \cdots \otimes a_{(1)}^p \otimes v_{(1)} a_{(2)}^1 \cdots a_{(2)}^p. \end{aligned}$$

Comme la construction du complexe nécessite uniquement une structure de A -module à gauche et de A -bicomodule, on peut appliquer la proposition précédente à $M \otimes A^{\otimes p}$; on obtient ainsi pour tout $p \geq 0$ un complexe $(\mathcal{F}_{p,\cdot}, D^{(p)})$.

Il est clair que pour tout $p \geq 0$, $(\mathcal{F}_{p,\cdot}, (-1)^p D^{(p)})$ est un complexe que l'on note encore $(\mathcal{F}_{p,\cdot}, D^{(p)})$.

Bicomplexe associé à un A -bimodule

A tout A -bimodule de Hopf on va associer un bicomplexe en combinant les complexes obtenus précédemment.

Proposition 2.3 $\mathcal{F}_{p,q}$ muni de $D^{(p)}$ et $d^{(q)}$ forme un bicomplexe.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 D_q^{(0)} & & D_q^{(1)} & & D_q^{(p)} & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Hom}_A(M, A^{\otimes q}) & \xrightarrow{d_0^{(q)}} & \text{Hom}_A(M \otimes A, A^{\otimes q}) & \xrightarrow{d_1^{(q)}} & \cdots & \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes p}, A^{\otimes q}) & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 D_1^{(0)} & & D_1^{(1)} & & D_1^{(p)} & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Hom}_A(M, A) & \xrightarrow{d_0^{(1)}} & \text{Hom}_A(M \otimes A, A) & \xrightarrow{d_1^{(1)}} & \cdots & \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes p}, A) & \cdots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 D_0^{(0)} & & D_0^{(1)} & & D_0^{(p)} & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Hom}_A(M, \mathbb{K}) & \xrightarrow{d_0^{(0)}} & \text{Hom}_A(M \otimes A, \mathbb{K}) & \xrightarrow{d_1^{(0)}} & \cdots & \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes p}, \mathbb{K}) & \cdots
 \end{array}$$

Preuve : Il faut montrer que pour $p \leq 0$ et $q \leq 0$ on a :

$$d_p^{(q+1)} \circ D_q^{(p)} + D_q^{(p+1)} \circ d_p^{(q)} = 0. \quad (2.1)$$

1. Si $p = 0$ et $q = 0$, l'égalité provient de la compatibilité des structures de A -bimodule de Hopf de M .
2. Si $p = 0$ et $q \leq 1$, (2.1) découle de la compatibilité des structures de A -bimodule de Hopf de M et de Δ_i morphisme de A -modules à droite.
3. Si $p \leq 1$ et $q = 0$, (2.1) se montre grâce à la compatibilité des structures de A -bimodule de Hopf de M et à $\text{Id}_M \otimes m_i$ morphisme de A -bicomodule où $m_i : A^{\otimes p+1} \rightarrow A^{\otimes p}$ est le produit de A de la $i^{\text{ème}}$ et $i + 1^{\text{ème}}$ composante.
4. Si $p \leq 1$ et $q \leq 1$, l'égalité provient de la compatibilité des structures de A -bimodule de Hopf de M , de Δ_i morphisme de A -modules à droite et de $\text{Id}_M \otimes m_i$ morphisme de A -bicomodules.

□

A ce bicomplexe on associe un complexe, appelé complexe total associé à M , on le note $(Tot., \theta.)$ avec :

$$Tot_n = \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes p}, A^{\otimes q}) \text{ et } \theta_n = \sum_{p+q=n} D_q^{(p)} + d_p^{(q)}.$$

2.1.2 Extension de A -bimodules de Hopf

On donne une interprétation des objets cohomologiques définis précédemment en termes d'extensions scindées de A -bimodules de Hopf.

Soient M un A -bimodule de Hopf tel que M^R est de dimension finie n et $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de M^R . Par le théorème 1.6 la structure de A -bimodule de Hopf M est entièrement donnée par des matrices $f \in M_n(A^*)$ et $\Lambda \in M_n(A)$ vérifiant (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6).

On note M' une extension scindée de M par A . On a alors la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} M' \xrightarrow{p_M} M \longrightarrow 0. \quad (2.2)$$

Dans ce cas $M' \simeq M \oplus A$ en tant que A -bimodule de Hopf.

Définition 2.1 Soient M' et M'' des extensions scindées de M par A . On dit que M' est une extension congruente à M'' s'il existe un morphisme β de M' dans M'' tel que

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & M' & \xrightarrow{p_M} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \text{Id}_A \downarrow & & \beta \downarrow & & \text{Id}_M \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & M'' & \xrightarrow{p_M} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par le petit lemme des cinq, le morphisme β est un isomorphisme. La relation de congruence est donc reflexive, symétrique et transitive.

Les coinvariants à droite d'une extension scindée de M par A sont entièrement déterminés. En effet

Lemme 2.2 $M'^R \simeq M^R \oplus \mathbb{K}1_A$.

Preuve : Par l'isomorphisme de A -bimodules de Hopf précédent on a $M'^R \simeq (M \oplus A)^R$. Soit $a \in (M \oplus A)^R$. On doit avoir $\sum a_{(1)}S(a_{(2)}) = aS(1_A)$. Donc $a = \varepsilon(a)1_A$.

D'où $(M \oplus A)^R = M^R \oplus \mathbb{K}1_A$. Le lemme est donc démontré. \square

D'après le théorème 1.6, M' est alors obtenu comme un A -module à gauche libre de base $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ où $e_{n+1} = 1_A$, tel que (e_i) est une base de l'espace vectoriel M'^R . Le morphisme i_A est donc le morphisme de A -modules à gauche donné pour tout $a \in A$ par

$$i_A(a) = ae_{n+1}.$$

Le morphisme p_M est le morphisme de A -modules à gauche défini sur les éléments de la base par :

$$\begin{aligned} p_M(e_i) &= w_i \quad \text{si } i \in [1, \dots, n], \\ p_M(e_{n+1}) &= 0. \end{aligned}$$

Il reste maintenant à déterminer le produit à droite et le coproduit à gauche de M' .

Structure de A -module à droite

Le produit à droite φ'_R de M' est donné par une matrice $f' \in M_{n+1}(A^*)$:

$$\varphi'_R(e_i \otimes a) = \sum_{j=1}^{n+1} f'_{i,j}(a_{(1)})a_{(2)}e_j.$$

Les morphismes de la suite exacte 2.2 doivent être des morphismes de A -bimodules. Or, par définition, ce sont des morphismes de A -modules à gauche. De plus, ce sont des morphismes de A -modules à droite si et seulement s'ils vérifient :

$$p_M \circ \varphi'_R(e_i) = \varphi_R(w_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

$$\varphi'_R(e_{n+1} \otimes a) = ae_{n+1}.$$

Ces conditions impliquent que f' est de la forme

$$f' = \begin{pmatrix} f & \eta \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\eta \in (A^*)^n$.

Pour que cette matrice définisse un A -module à droite, il faut que pour tous $a, b \in A$ et $i, j \in [1, \dots, n]$ on ait $f'_{i,j}(ab) = \sum_{l=1}^{n+1} f'_{i,l}(a)f_{l,j}(b)$ et $f'_{i,j}(1_A) = \delta_i(j)$. Ainsi on obtient la condition suivante :

$$\forall a, b \in A, \forall i \in [1, \dots, n], \quad \eta_i(a.b) = \sum_{l=1}^n f_{i,l}(a)\eta_l(b) + \eta_i(a)\varepsilon(b). \quad (2.3)$$

Il n'est pas nécessaire de demander $\eta_i(1_A) = 0$, car l'équation (2.3) pour $a = b = 1_A$ implique que $\eta_i(1_A) = 2\eta_i(1_A)$.

On va relier ces conditions à la cohomologie du complexe $(\mathcal{F}_{\cdot,0}, d^{(0)})$.

Se donner une famille $(\eta)_i$ revient à se donner un morphisme de $\text{Hom}_A(M \otimes A, \mathbb{K})$. En effet à $(\eta)_i$ on associe le morphisme α_η défini pour $i \in [1, \dots, n]$ et $a, b \in A$ par :

$$\alpha_\eta(bw_i \otimes a) = \varepsilon(b)\eta_i(a).$$

Inversement à un tel morphisme, on associe la famille $(\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de A^* défini pour tout $i \in [1, \dots, n]$ par $\eta_i(a) = \alpha(w_i \otimes a)$. Via cette identification, dire que η vérifie (2.3) signifie que α_η est un 1-cocycle pour le complexe $(\mathcal{F}_{\cdot,0}, d^{(0)})$ construit précédemment :

$$\text{Hom}_A(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Hom}_A(M \otimes A, \mathbb{K}) \longrightarrow \cdots \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes n}, \mathbb{K}) \longrightarrow \cdots$$

Proposition 2.4 *L'ensemble des classes de congruence des extensions scindées de bimodules de M par A est isomorphe à $H_1(\mathcal{F}_{\cdot,0}, d^{(0)})$.*

Si on note η un représentant d'un élément de $H_1(\mathcal{F}_{\cdot,0}, d^{(0)})$, la structure de module à droite de $M \oplus A$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_R(w_i \otimes a) &= \sum_l f_{i,l}(a_{(1)})a_{(2)}w_l + \eta_i(a_{(1)})a_{(2)}1_A & \forall a \in A, \forall i \in [1, \dots, n], \\ \varphi_R(1_A \otimes a) &= a1_A & \forall a \in A. \end{aligned}$$

Preuve : D'après la discussion précédant la proposition, il est clair qu'à une extension scindée on associe un représentant d'une classe de $H_1(\mathcal{F}_{.,0}, d^{(0)})$ et inversement. Il reste à montrer que deux représentants d'une même classe donnent deux extensions congruentes et réciproquement.

Soit $\theta \in \text{Hom}_A(M, \mathbb{K})$. On a $d_0^{(0)}(\theta)(w_i \otimes a) = \sum_{l=1}^n f_{i,l}(a)\theta(w_l) - \varepsilon(a)\theta(w_i)$.

Soit η un représentant d'une classe de $H_1(\mathcal{F}_{.,0}, d^{(0)})$. L'espace $M \oplus A$ est alors muni de deux structures de A -bimodule, l'une donnée par η et l'autre donnée par $\eta + d_0^{(0)}(\theta)$. On note $(M \oplus A)_\theta$ le A -bimodule avec la structure associée à $\eta + d_0^{(0)}(\theta)$ et $w_{n+1} = 1_A$.

Soit Ψ le morphisme de A -modules à gauche suivant :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad M \oplus A &\longrightarrow (M \oplus A)_\theta \\ w_i &\longmapsto w_i + \theta(w_i)w_{n+1} \quad \forall i \in [1, \dots, n] \\ w_{n+1} &\longmapsto w_{n+1}. \end{aligned}$$

Alors $\forall i \in [1, \dots, n+1]$, $\Psi(w_i.a) = \Psi(w_i).a$. L'application Ψ est donc un morphisme de A -bimodules. De plus il est clair que Ψ est inversible, d'inverse :

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \quad (M \oplus A)_\theta &\longrightarrow M \oplus A \\ w_i &\longmapsto w_i - \theta(w_i)w_{n+1} \quad \forall i \in [1, \dots, n] \\ w_{n+1} &\longmapsto w_{n+1}. \end{aligned}$$

On a donc montré que deux représentants d'une classe de $H_1(\mathcal{F}_{.,0}, d^{(0)})$ donnent deux extensions congruentes.

Inversement, soient M' et M'' deux extensions scindées congruentes de bimodules de M par A . On note η , respectivement η' les 1-cocycles définissant la structure de A -module à droite de M' , respectivement M'' . On pose $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une base de M'^R et $(e'_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une base de M''^R .

Comme M' et M'' sont congruentes il existe un isomorphisme de A -bimodules $\Psi : M' \simeq M''$, et un morphisme de A -modules à gauche $\theta : M \rightarrow A$ vérifiant

$$\begin{aligned} \Psi(e_i) &= e'_i + \theta(w_i)e'_{n+1} \quad 1 \leq i \leq n \\ \Psi(e_{n+1}) &= e'_{n+1} \end{aligned}$$

De plus on a pour $1 \leq i \leq n$ et $a \in A$ $\Psi(e_i.a) = \Psi(e_i).a$. Donc

$$\eta_i(a) - \eta'_i(a) = \sum_{l=1}^n f_{il}(a_{(1)})a_{(2)}\varepsilon(\theta(w_l)) - \varepsilon(\theta(w_i))\varepsilon(a).$$

D'où $\eta - \eta'$ est un cobord et donc ils définissent la même classe de $H_1(\mathcal{F}_{.,0}, d^{(0)})$. \square

Structure de A -comodule à gauche

On va déterminer la structure de A -comodule à gauche de M' . Elle est donnée par une matrice $\Lambda' \in M_{n+1}(A)$:

$$\delta'_L(e_i) = \sum_{l=1}^{n+1} \Lambda'_{i,l} \otimes e_l.$$

Les morphismes de la suite exacte 2.2 doivent être des morphismes de A -bicomodules. Il est clair que ce sont des morphismes de A -comodule à droite. Ce sont des morphismes de A -comodules à gauche si et seulement s'ils vérifient :

$$(\text{Id} \otimes p_M) \delta'_L(e_i) = \delta_L(w_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

$$\delta'_L(e_{n+1}) = 1_A \otimes e_{n+1}.$$

Ces conditions impliquent que Λ' est de la forme

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \xi \\ 0 & 1_A \end{pmatrix}$$

où $\xi \in A^n$.

De plus, pour que Λ' définisse une structure de comodule, il faut que pour tous

$$i, j \in [1, \dots, n+1], \Delta(\Lambda'_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n+1} \Lambda'_{i,l} \otimes \Lambda'_{l,j}$$

et que $\varepsilon(\Lambda'_{i,j}) = \delta_i(j)$, où $\delta_i(j) = 1$ si $i = j$ sinon $\delta_i(j) = 0$. C'est-à-dire :

$$\forall i \in [1, \dots, n], \quad \Delta(\xi_i) = \sum_{l=1}^n \Lambda_{i,l} \otimes \xi_l + \xi_i \otimes \gamma. \quad (2.4)$$

En appliquant $\varepsilon \otimes \text{Id}$ à l'équation (2.4), on obtient que $\forall i \in [1, \dots, n], \quad \varepsilon(\xi_i) = 0$. On va relier ces conditions à la cohomologie du complexe $(\mathcal{F}_{0,\dots}, D^{(0)})$.

Se donner $\xi \in A^n$ revient à prendre un morphisme de $\text{Hom}_A(M, A)$. En effet, à ξ on associe le morphisme de A -modules à gauche β_ξ défini par :

$$\forall i \in [1, \dots, n], \quad \beta_\xi(e_i) = \xi_i.$$

Inversement à $\beta \in \text{Hom}_A(M, A)$ on associe un élément de A^n $\xi = (\beta(e_i))_{i \in [1, \dots, n]}$. Via cette identification, dire que ξ vérifie (2.4) signifie que β_ξ est un 1-cocycle pour le complexe de bicomodule $(\mathcal{F}_{0,\dots}, D^{(0)})$:

$$\text{Hom}_A(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_A(M, A^{\otimes n}) \longrightarrow \dots$$

Proposition 2.5 *L'ensemble des classes de congruence des extensions scindées de modules à gauche et bicomodules de M par A est isomorphe à $H_1(\mathcal{F}_{0,\dots}, D^{(0)})$. Si on note ξ un représentant d'un élément de $H_1(\mathcal{F}_{0,\dots}, D^{(0)})$, la structure de A -comodule à gauche de $M \oplus A$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \delta_L(w_i) &= \sum_{l=1}^n \Lambda_{i,l} \otimes w_l + \xi(w_i) \otimes 1_A \quad \forall i \in [1, \dots, n], \\ \delta_L(1_A) &= 1_A \otimes 1_A. \end{aligned}$$

Preuve : La discussion précédant la proposition montre que l'on associe à toute extension un représentant d'une classe de $H_1(\mathcal{F}_{0,\dots}, D^{(0)})$ et inversement. Il reste alors à montrer que deux représentants d'une même classe donnent deux extensions congruentes et réciproquement. Ceci se prouve de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.4.

□

Structure de A -bimodule de Hopf

Pour que le A -bimodule et A -bicomodule M' soit un A -bimodule de Hopf, il faut que ces structures soit compatibles. Par construction δ_R et δ_L sont des morphismes de A -modules à gauche et on voit facilement que δ_R est un morphisme de A -modules à droite. Il reste donc à voir que δ_L est un morphisme de A -modules à droite, c'est-à-dire :

$$\forall i, j \in [1, \dots, n+1], \forall a \in A \quad \sum_{l=1}^{n+1} \Lambda'_{i,l} a_{(1)} f'_{l,j}(a_{(2)}) = \sum_{l=1}^{n+1} f'_{i,l}(a_{(1)}) a_{(2)} \Lambda'_{l,j}.$$

Comme les matrices f et Λ composant f' et Λ' vérifient (1.6), l'égalité précédente se réduit à :

$$\forall i \in [1, \dots, n], \forall a \in A, \quad \xi(e_i) \cdot a = \sum_{l=1}^n f_{i,l}(a_{(1)}) a_{(2)} \xi(e_l) - \sum_{l=1}^n \Lambda_{i,l} a_{(1)} \eta(e_l \otimes a_{(2)}) + \sum \eta(e_i \otimes a_{(1)}) a_{(2)}.$$

Avec les différentielles du bicomplexe associé à M , cette égalité devient $d_0^{(1)}(\xi) + D_0^{(1)}(\eta) = 0$. Cela revient encore à dire que (ξ, η) est un 1-cocycle du complexe total associé à M . Grâce aux propositions 2.4 et 2.5, on a alors le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Soit M un A -bimodule de Hopf, d'espace des coinvariants à droite de dimension finie n . L'ensemble des classes de congruence des extensions scindées de bimodules de Hopf de M par A est isomorphe à la première cohomologie du complexe total associé à M .*

2.1.3 Détermination des algèbres de Hopf inhomogènes

A partir d'une algèbre de Hopf A et d'un A -bimodule de Hopf M , Podleś et Woronowicz ont construit une algèbre dont le produit est rendu inhomogène par une famille d'applications, appelée composante inhomogène. Pour que cette algèbre soit une algèbre de Hopf, la famille d'applications doit vérifier une série d'égalités. En interprétant cette construction comme un quotient d'algèbre libre, on va montrer que la composante inhomogène s'interprète de manière naturelle dans le complexe total de M .

Construction

Soit M un A -bimodule de Hopf dont l'espace des coinvariants à droite est de dimension finie. Notons $(e_i)_{i \in I}$ une base de M^R . La structure de A -bimodule de Hopf est alors entièrement déterminée par la donnée d'une matrice $f \in M_n(A^*)$ et d'une matrice $\Lambda \in M_n(A)$ vérifiant (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6). Considérons le complexe total (Tot, θ) associé à M :

$$\text{Hom}_A(M, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}_A(M, A) \oplus \text{Hom}_A(M \otimes A, \mathbb{K}) \rightarrow \cdots \bigoplus_{i+j=n} \text{Hom}_A(M \otimes A^{\otimes i}, A^{\otimes j}) \rightarrow \cdots,$$

on va associer à un 2-cocycle de ce complexe une algèbre de Hopf inhomogène.

Dire que $\phi \in \text{Hom}_A(M \otimes A, A)$ est un 2-cocycle de (Tot, θ) signifie que ϕ vérifie pour tous

$a, b \in A$ et $i \in I$:

$$\phi(e_i \otimes ab) = \sum_{l \in I} f_{i,l}(a_{(1)})a_{(2)}\phi(e_l \otimes b) + \phi(e_i \otimes a)b, \quad (2.5)$$

$$\Delta(\phi(e_i \otimes a)) = \sum_{l \in I} \Lambda_{i,l}a_{(1)} \otimes \phi(e_l \otimes a_{(2)}) + \phi(e_i \otimes a_{(1)}) \otimes a_{(2)}. \quad (2.6)$$

En prenant $a = b = 1_A$ dans la première égalité, on obtient $\phi(e_i \otimes 1) = 0$. De la deuxième égalité on déduit que $\varepsilon(\phi(e_i \otimes a)) = 0$ (en appliquant $\varepsilon \circ (\varepsilon \otimes Id)$).

Ces égalités nous permettent de calculer l'antipode de $\phi(e_i \otimes a)$.

Lemme 2.3

$$\forall i \in I, \forall a \in A \quad S(\phi(e_i \otimes a)) = - \sum_{l \in I} S(a_{(1)})S(\Lambda_{i,l})\phi(e_l \otimes a_{(2)})S(a_{(3)})$$

Preuve : Comme $\varepsilon(\phi(e_i \otimes a)) = 0$ on a pour m le produit de A :

$$\sum m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta(\phi(e_i \otimes a_{(1)})) \otimes S(a_{(2)}) = 0.$$

En appliquant m à cette égalité on obtient :

$$\sum_{l \in I} S(a_{(1)})S(\Lambda_{i,l})\phi(e_l \otimes a_{(2)})S(a_{(3)}) + S(\phi(e_i \otimes a)) = 0.$$

□

Soit \mathcal{B}_0 l'algèbre libre engendrée par A et M^R où le produit de deux éléments de A est donné par le produit de A . Notons Δ_A le coproduit de A et ε_A la counité de A . On vérifie facilement le lemme suivant :

Lemme 2.4 Soient $\Delta : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_0$ et $\varepsilon : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{K}$ les morphismes d'algèbres définis par :

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \Delta_A(a) & \forall a \in A, \\ \varepsilon(a) &= \varepsilon_A(a) & \forall a \in A, \\ \Delta(e_i) &= \sum_{l \in I} \Lambda_{i,l} \otimes e_l + e_i \otimes 1 & \forall i \in I, \\ \varepsilon(e_i) &= 0 & \forall i \in I. \end{aligned}$$

Δ et ε munissent \mathcal{B}_0 d'une structure de bigèbre.

De plus \mathcal{B}_0 , est une algèbre de Hopf, l'antipode étant complètement déterminée par $S(e_i) = - \sum_{l \in I} S(\Lambda_{i,l})e_l$ pour tout $i \in I$.

Afin d'ajouter une composante inhomogène au produit d'un e_i par un élément de A , on construit un quotient de \mathcal{B}_0 . Soit $\langle r \rangle$ l'idéal à gauche de \mathcal{B}_0 engendré par les éléments :

$$r_{i,a} = e_i a - \sum_{l \in I} f_{i,l}(a_{(1)})a_{(2)}e_l - \phi(e_i \otimes a).$$

Lemme 2.5 L'idéal à gauche $\langle r \rangle$ est un idéal bilatère ainsi qu'un coidéal bilatère.

De plus $S(\langle r \rangle) \subset \langle r \rangle$.

Preuve : Le fait que $\langle r \rangle$ soit un idéal bilatère et un coidéal bilatère résulte respectivement de (2.5) et (2.6) satisfaites par ϕ .

Pour l'antipode on a pour tout $i \in I$ et $a \in A$:

$$\begin{aligned}
S(r_{i,a}) = & - \sum_{l \in I} S(a)S(\Lambda_{i,l})p_l + \sum_{l \in I} S(a_{(1)})S(\Lambda_{i,l})\phi(e_l \otimes a_{(2)})S(a_{(3)}) \\
& + \sum_{l,t \in I} f_{i,l}(a_{(1)})S(\Lambda_{l,t})e_t S(a_{(2)}) \\
& - \sum_{l \in I} S(a_{(1)})S(\Lambda_{i,l}) (e_l a_{(2)} - \phi(e_l \otimes a_{(2)})) S(a_{(3)}) \\
& + \sum_{l,t \in I} S(f_{i,l}(a_{(1)})a_{(2)}\Lambda_{l,t}) a_{(3)}e_t S(a_{(4)}) \\
& - \sum_{l \in I} S(a_{(1)})S(\Lambda_{i,l}) (e_l a_{(2)} - \phi(e_l \otimes a_{(2)})) S(a_{(3)}) \\
& + \sum_{l,t \in I} S(\Lambda_{i,l}a_{(1)}f_{l,t}(a_{(2)})) a_{(3)}e_t S(a_{(4)}) \\
& - \sum_{l \in I} S(a_{(1)})S(\Lambda_{i,l})r_{l,a_{(2)}}S(a_{(3)})
\end{aligned}$$

□

On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Le quotient $\mathcal{B}_0 / \langle r \rangle$ est une algèbre de Hopf. On le note \mathcal{B} et on l'appelle algèbre de Hopf inhomogène associée au couple (M, ϕ) .*

Remarque : L'algèbre de Hopf inhomogène \mathcal{B} est exactement celle construite par Podleś et Woronowicz.

Cas particulier $\phi = 0$

Dans ce cas, on a $\langle r \rangle$ qui est engendré par $e_i a = \sum_l f_{i,l}(a_{(1)})a_{(2)}e_l$, c'est-à-dire $e_i a = \varphi_R(e_i \otimes a)$ où φ_R est le produit à droite de M . D'où la proposition :

Proposition 2.7 *L'algèbre de Hopf \mathcal{B} est isomorphe à $T_A(M)$.*

Preuve : L'isomorphisme entre \mathcal{B} et $T_A(M)$ est donné par les morphismes d'algèbres Ψ et Ψ^{-1} définis par :

$$\begin{aligned}
\Psi : \quad \mathcal{B} & \longrightarrow T_A(M) \\
a & \longmapsto a \quad \forall a \in A, \\
e_i & \longmapsto e_i \quad \forall i \in I.
\end{aligned}$$

Comme tout élément de M s'écrit de manière unique comme $v = \sum_{i \in I} a_i e_i$, on peut définir le morphisme d'algèbres Ψ^{-1} par :

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1} : \quad T_A(M) & \longrightarrow \mathcal{B} \\
a & \longmapsto a \quad \forall a \in A, \\
v & \longmapsto v \quad \forall v \in M.
\end{aligned}$$

On a bien $\Psi\Psi^{-1} = \text{Id}$ et $\Psi^{-1}\Psi = \text{Id}$.

On vérifie facilement que ce sont des morphismes d'algèbres de Hopf.

□

Changement de composante inhomogène

On va montrer que si on ajoute à la composante inhomogène un certain cobord cela ne change pas la structure d'algèbre de Hopf.

Dans le bicomplexe associé à M , on a :

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \\ \text{Hom}_A(M, A) & \xrightarrow{d_0^{(1)}} & \text{Hom}_A(M \otimes A, A) & \cdots & \\ D_0^{(0)} \uparrow & & D_0^{(1)} \uparrow & & \\ \text{Hom}_A(M, \mathbb{K}) & \xrightarrow{d_0^{(0)}} & \text{Hom}_A(M \otimes A, \mathbb{K}) & \cdots & \end{array}$$

Soient $K = d_0^{(1)} \circ D_0^{(0)}(\text{Hom}_A(M, \mathbb{K}))$ et $Z = \{\phi \in \text{Hom}_A(M \otimes A, A) \mid \theta_2(\phi) = 0\}$.

Soit $\psi \in K$. Il existe donc $\rho \in \text{Hom}_A(M, \mathbb{K})$ tel que :

$$\psi = -D_0^{(1)} \circ d_0^{(0)}(\rho) = d_0^{(1)} \circ D_0^{(0)}(\rho).$$

Par construction ψ est un 2-cocycle pour (Tot, θ) , donc $K \subset Z$. On peut alors considérer le quotient Z/K .

Théorème 2.2 *Soit M un A -bimodule de Hopf, tel que M^R est de dimension finie. L'algèbre de Hopf inhomogène associée à (M, ϕ) ne dépend (à isomorphisme près) que de la classe d'équivalence de ϕ dans Z/K .*

Preuve : Soient $\phi \in Z$, $\theta \in K$, $\langle r \rangle$ l'idéal à gauche associé à ϕ et $\langle r' \rangle$ l'idéal à gauche associé à $\phi + \theta$. Pour prouver le théorème il faut montrer que :

$$\mathcal{B}_0 / \langle r \rangle \simeq \mathcal{B}_0 / \langle r' \rangle,$$

en tant qu'algèbre de Hopf. Par définition de θ , il existe $\rho \in \text{Hom}_A(M, \mathbb{K})$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \forall a \in A, \quad \theta(e_i \otimes a) = & \sum_{t, l \in I} f_{i, l}(a_{(1)}) a_{(2)} \Lambda_{l, t} \rho(e_t) - \sum_{l \in I} f_{i, l}(a_{(1)}) a_{(2)} \rho(e_l) \\ & + \rho(e_i) a - \sum_{l \in I} \Lambda_{i, l} a \rho(e_l). \end{aligned}$$

Soit $\Psi : \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_0$ le morphisme d'algèbres défini pour tout $i \in I$ et $a \in A$ par :

$$\begin{aligned} \Psi(e_i) &= e_i + \sum_{l \in I} \Lambda_{i, l} \rho(e_l) - \rho(e_i) 1_A, \\ \Psi(a) &= a. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que Ψ est un morphisme de cogèbres et donc de bigèbres. Or

$S \circ \Psi = \Psi \circ S$ donc Ψ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

De plus $\forall i \in I, \forall a \in A, \quad \Psi(r_{i, a}) = r'_{i, a}$. Donc $\Psi(\langle r \rangle) \subset \langle r' \rangle$. On peut alors étendre Ψ en un morphisme d'algèbres de Hopf de $\mathcal{B}_0 / \langle r \rangle$ dans $\mathcal{B}_0 / \langle r' \rangle$.

De même on construit un morphisme d'algèbres de Hopf Ψ^{-1} de $\mathcal{B}_0 / \langle r' \rangle$ dans $\mathcal{B}_0 / \langle r \rangle$ tel que pour tout $i \in I$ et $a \in A$:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(e_i) &= e_i - \sum_{i, l} \Lambda_{i, l} \rho(e_l) + \rho(e_i) 1_A, \\ \Psi^{-1}(a) &= a. \end{aligned}$$

On a bien $\Psi \circ \Psi^{-1} = \text{Id}$ et $\Psi^{-1} \circ \Psi = \text{Id}$. □

2.2 Structures de bigèbres des algèbres de Hopf inhomogènes

Afin de mieux comprendre la structure d'algèbre de Hopf inhomogène de \mathcal{B} , on étudie d'abord le cas de la composante inhomogène nulle. Dans ce cas, le produit de \mathcal{B} (respectivement le coproduit) s'interprète comme un produit croisé (respectivement un coproduit croisé) de l'espace $A \otimes T(M^L)$. On retrouve ainsi un isomorphisme d'algèbres obtenu par Lepowsky et Wilson. Pour étudier le cas de la composante inhomogène non nulle on s'inspire du cas précédent pour donner un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre les espaces \mathcal{B} et $A \otimes T(M^L)$.

2.2.1 Structures des algèbres de Hopf inhomogènes: cas où ϕ est nul

On montre dans ce cas que l'algèbre \mathcal{B} est isomorphe au produit croisé de A avec $T(M^L)$. Puis on montre que cet isomorphisme est un morphisme de cogèbres lorsqu'on munit $A \otimes T(M^L)$ de la structure de cogèbre du coproduit croisé de A par $T(V)$, le coproduit de $T(V)$ étant obtenu par un tressage de V .

Isomorphisme d'algèbres

Soit M un A -bimodule de Hopf. On note M^L les coinvariants à gauche de M . L'espace M^L est muni d'une structure de A -module à droite ([Swe69]) φ_R définie par l'action adjointe :

$$\forall v \in M^L, \forall a \in A, \quad \varphi_R(v \otimes a) = v \bullet a = \sum S(a_{(1)})va_{(2)}.$$

On va construire un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués entre $T_A(M)$ et $A \otimes T(M^L)$. Pour $n = 0$, on a l'isomorphisme naturel entre A et $A \otimes \mathbb{K}$.

Pour $n = 1$, on a l'isomorphisme suivant ([Swe69]) :

$$\begin{aligned} \Psi_1 : \quad M &\longrightarrow A \otimes M^L \\ &v \longmapsto \sum v_{(-2)} \otimes S(v_{(-1)})v_{(0)} \\ \Psi_1^{-1} : \quad A \otimes M^L &\longrightarrow M \\ &a \otimes v \longmapsto av. \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on a $M \otimes_A M \simeq M \otimes_A (A \otimes M^L) \simeq M \otimes M^L \simeq A \otimes M^L \otimes M^L$.

Plus généralement pour $n > 0$, on définit $\Psi_n : M^{\otimes_A n} \longrightarrow A \otimes (M^L)^{\otimes n}$ par :

$$\begin{aligned} \Psi_n(v^1 \otimes \cdots \otimes v^n) &= \\ &\sum v_{(-2)}^1 \cdots v_{(-n-1)}^n \otimes (S(v_{(-1)}^1)v_{(0)}^1) \bullet v_{(-2)}^2 \cdots v_{(-n)}^n \otimes \cdots \otimes S(v_{(-1)}^n)v_{(0)}^n, \\ \Psi_n^{-1}(a \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^n) &= (av^1) \otimes v^2 \otimes \cdots \otimes v^n. \end{aligned}$$

Avec la structure d'algèbre naturelle de $T(M^L)$ on a la proposition suivante :

Proposition 2.8

(i) L'algèbre $T(M^L)$ est munie d'une structure de A -module algèbre à droite avec :

$$\begin{aligned} \varphi_R(\alpha \otimes a) &= \alpha \bullet a = \epsilon(a)\alpha & \forall a \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \\ \varphi_R(v \otimes a) &= v \bullet a = v^1 \bullet a_{(1)} \otimes \cdots \otimes v^n \bullet a_{(n)} & \forall n > 1, \forall a \in A, \\ & & \forall v = v^1 \otimes \cdots \otimes v^n \in T(M^L)_n. \end{aligned}$$

Donc $A \sharp T(M^L)$ est une algèbre.

(ii) L'isomorphisme Ψ décrit plus haut est un isomorphisme d'algèbres.

Preuve : La première partie de la proposition est immédiate.

Il reste à montrer que Ψ est un morphisme d'algèbres. Soit $a, b \in A$. On a :

$$\begin{aligned}\Psi_0(a)\Psi_0(b) &= (a \# 1)(b \# 1) \\ &= ab_{(1)} \# (1 \bullet b_{(2)}) \\ &= ab \# 1 = \Psi_0(ab).\end{aligned}$$

Soient $n > 0$, $v \in T_A(M)_n$ et $a \in A$. On note $\Psi_n(v) = \sum v_A \# v_M$.

Avec cette notation on a :

$$\begin{aligned}\Psi_n(a) \cdot \Psi_n(v) &= (a \# 1)(\sum v_A \# v_M) \\ &= \sum (av_{A(1)}) \# (1 \bullet v_{A(2)}) \cdot v_M \\ &= \sum (av_A) \# v_M = \Psi_n(av).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_n(v)\Psi_n(a) &= \sum (v_A \# v_M)(a \# 1) \\ &= \sum v_A a_{(1)} \# v_M \bullet a_{(2)} = \Psi_n(va).\end{aligned}$$

Soient $p > 0$, $q > 0$, $v \in T_A(M)_p$ et $v' \in T_A(M)_q$. Notons $\Psi_p(v) = \sum v_A \# v_M$ et $\Psi_q(v') = \sum v'_A \# v'_M$. On a :

$$\begin{aligned}\Psi_p(v)\Psi_q(v') &= (\sum v_A \# v_M)(\sum v'_A \# v'_M) \\ &= \sum v_A v'_{A(1)} \# (v_M \bullet v'_{A(2)}) m'_M = \Psi_{p+q}(v \otimes v').\end{aligned}$$

□

Structure de cogèbres sur $T(V)$

Soient V un espace vectoriel et $\sigma : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ une application linéaire vérifiant l'équation des tresses. On étend σ à $T(V)$. Soit $\tilde{\sigma}$ l'application de $T(V) \otimes T(V)$, telle que $\tilde{\sigma}(V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}) \subset V^{\otimes q} \otimes V^{\otimes p}$, définie par

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w \in V^{\otimes n}, \quad &\tilde{\sigma}(\alpha \otimes w) = w \otimes \alpha, \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w \in V^{\otimes n}, \quad &\tilde{\sigma}(w \otimes \alpha) = \alpha \otimes w, \\ \forall p, q > 0, \forall w \in V^{\otimes p}, \forall w' \in V^{\otimes q} \\ &\tilde{\sigma}(w \otimes w') = (\sigma_p \dots \sigma_1)(\sigma_{p+1} \dots \sigma_2) \dots (\sigma_{p+q-1} \dots \sigma_q)(w \otimes w')\end{aligned}$$

Soit φ le produit de $T(V)$. On va munir $T(V)$ d'une structure de cogèbre en utilisant σ . Pour cela, on demande que ce coproduit soit un morphisme d'algèbre tordu par $\tilde{\sigma}$.

Proposition 2.9

(i) $T(V)$ est munie d'une structure de cogèbre définie par récurrence :

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad &\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1, \\ \forall v \in V, \quad &\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1, \\ \forall p, q > 0, \forall w \in V^{\otimes p}, \forall w' \in V^{\otimes q} \\ &\Delta(w \otimes w') = (\varphi \otimes \varphi)(Id_{T(V)} \otimes \tilde{\sigma} \otimes Id_{T(V)})(\Delta \otimes \Delta)(w \otimes w'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad &\varepsilon(\alpha) = \alpha, \\ \forall n > 0, \forall w \in V^{\otimes n}, \quad &\varepsilon(w) = 0.\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $n \geq 1$ et $v \in V^{\otimes n}$, on a :

$$\Delta(v) = 1 \otimes v + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{w \in S_{p,n}} T_\sigma(w^{-1})(v) + v \otimes 1.$$

où pour $w \in S_{p,n}$, on voit $T_\sigma(w^{-1})(v)$ dans $V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes n-p}$

Preuve : Pour la première partie, il est clair que ε est une counité. Il reste à voir que Δ est coassociative. On va le montrer par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est clair. Supposons le résultat vrai pour tout $p < n + 1$. Soient $w \in V^{\otimes n}$ et $v \in V$.

Lemme 2.6

$$\forall p \in [1, \dots, n-1], \forall \tau \in S_{p,n}, \quad (\text{Id} \otimes T_\sigma(\tau))\tilde{\sigma}(w \otimes v) = \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2(T_\sigma(\tau)(w) \otimes v).$$

Preuve : Soit $l \in [1, \dots, n-1]$. On a :

$$\begin{aligned} \sigma_{l+1}\sigma_1 \dots \sigma_n &= \sigma_1 \dots \sigma_{l-1}\sigma_{l+1}\sigma_l\sigma_{l+1} \dots \sigma_n \\ &= \sigma_1 \dots \sigma_{l-1}\sigma_l\sigma_{l+1}\sigma_l\sigma_{l+2} \dots \sigma_n \\ &= \sigma_1 \dots \sigma_n\sigma_l \end{aligned}$$

Le lemme s'en déduit en utilisant les définitions de $T_\sigma(\tau)$ et de $\tilde{\sigma}$. □

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id})\Delta(w \otimes v) &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)\tilde{\sigma}_2(\Delta \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\tilde{\sigma}_2(\Delta \otimes \Delta)(w \otimes v) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)\tilde{\sigma}_2(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\tilde{\sigma}_3((\Delta \otimes \text{Id})\Delta \otimes \Delta)(w \otimes v) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum w_{(1)} \otimes 1 \otimes w_{(2)} \otimes 1 \otimes w_{(3)} \otimes v) \\ &\quad + (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)\tilde{\sigma}_2(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\tilde{\sigma}_3(\sum w_{(1)} \otimes w_{(2)} \otimes w_{(3)} \otimes v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Id} \otimes \Delta)\Delta(w \otimes v) &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)\tilde{\sigma}_4(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \Delta \otimes \Delta)\tilde{\sigma}_2(\Delta \otimes \Delta)(w \otimes v) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)\tilde{\sigma}_4(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\tilde{\sigma}_2(\Delta \otimes (\text{Id} \otimes \Delta)\Delta)(w \otimes v) \\ &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum w_{(1)} \otimes 1 \otimes w_{(2)} \otimes 1 \otimes w_{(3)} \otimes v) \\ &\quad + (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)\tilde{\sigma}_4(\sum w_{(1)} \otimes 1 \otimes w_{(2)} \otimes w_{(3)} \otimes v \otimes 1) \\ &\quad + (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi)\tilde{\sigma}_4(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\tilde{\sigma}_2(\sum w_{(1)} \otimes w_{(2)} \otimes v \otimes 1 \otimes 1) \end{aligned}$$

Or par le lemme on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_2(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\tilde{\sigma}_3(\sum w_{(1)} \otimes w_{(2)} \otimes w_{(3)} \otimes v) &= \\ &= \tilde{\sigma}_4(\sum w_{(1)} \otimes 1 \otimes w_{(2)} \otimes w_{(3)} \otimes v \otimes 1) \\ &\quad + \tilde{\sigma}_4\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_3(\text{Id} \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 3})(\sum w_{(1)} \otimes w_{(2)} \otimes v \otimes 1 \otimes 1) \\ &= \tilde{\sigma}_4(\sum w_{(1)} \otimes 1 \otimes w_{(2)} \otimes w_{(3)} \otimes v \otimes 1) \\ &\quad + \tilde{\sigma}_4(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \Delta \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\tilde{\sigma}_2(\sum w_{(1)} \otimes w_{(2)} \otimes v \otimes 1 \otimes 1) \end{aligned}$$

D'où la coassociativité pour $n + 1$. Pour montrer la deuxième partie, on fait une récurrence sur n . Le cas $n = 2$ est immédiat.

Supposons l'égalité vraie jusqu'au rang n .

Soit $p \leq n$. Pour tout $\omega \in S_{p,n}$, on a soit $w(n) = n$ et dans ce cas la restriction de w à $\{1, \dots, n-1\}$ est dans $S_{p,n-1}$, soit $w(p) = n$; dans ce cas on a une action de ω sur $\{1, \dots, n\} \setminus p$ qui est dans $S_{p-1,n-1}$. Alors pour $v \in V^{\otimes n}$ et $v' \in V$ on a :

$$\begin{aligned}
\Delta(v \otimes v') &= (\varphi \otimes \varphi)(Id \otimes \tilde{\sigma} \otimes Id)\Delta(v) \otimes \Delta(v') \\
&= 1 \otimes vv' + v \otimes v' + vv' \otimes 1 + \sigma_1 \dots \sigma_n(v \otimes v') \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{w \in S_{p,n}} T_\sigma(w^{-1})(v) \otimes v' \\
&\quad + (\varphi \otimes \varphi)(Id \otimes \tilde{\sigma} \otimes Id) \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{w \in S_{p,n}} T_\sigma(w^{-1})(v) \otimes v' \otimes 1 \\
&= 1 \otimes vv' + v \otimes v' + vv' \otimes 1 + \sigma_1 \dots \sigma_n(v \otimes v') \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{w \in S_{p,n+1} \\ w(n+1)=n+1}} T_\sigma(w^{-1})(v \otimes v') \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{w \in S_{p+1,n+1} \\ w(p+1)=n+1}} T_\sigma(w^{-1})(v \otimes v')
\end{aligned}$$

Ceci nous montre que l'égalité est vraie pour $n+1$. □

Remarque : Si on prend $\sigma(v \otimes w) = w \otimes v$ pour $v, w \in T(V)$, on retrouve le coproduit habituel de $T(V)$.

Isomorphisme de cogèbres

Soit M un A -bimodule de Hopf. L'espace M^L est un sous-comodule à droite. On munit $T(M^L)$ d'une structure de comodule à droite par :

$$\delta_R(\alpha) = \alpha 1 \otimes 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$\delta_R(v^1 \otimes \dots \otimes v^n) = v_{(0)}^1 \otimes \dots \otimes v_{(0)}^n \otimes v_{(1)}^1 \dots v_{(1)}^n,$$

avec $n \geq 1$ et $v^i \in M^L$ ($i \in [1, \dots, n]$).

Remarque : En particulier pour $n \geq 1$, $w \in T(M^L)_n$ et $a \in A$, on a :

$$\delta_R(w \bullet a) = \sum w_{(0)} \bullet a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})w_{(1)}a_{(3)}. \quad (2.7)$$

Soit σ l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned}
\sigma : \quad M^L \otimes M^L &\longrightarrow M^L \otimes M^L \\
v \otimes v' &\longmapsto \sum v'_{(0)} \otimes v \bullet v'_{(1)}.
\end{aligned}$$

Cette application vérifie l'équation des tresses (car M est un A -bimodule de Hopf). On en déduit l'application $\tilde{\sigma}$ qui est donnée pour $p, q \geq 0$, $w \in T(M^L)_p$ et $w' \in T(M^L)_q$ par :

$$\tilde{\sigma}(w \otimes w') = \sum w'_{(0)} \otimes w \bullet w'_{(1)}.$$

Proposition 2.10

(i) L'espace $T(M^L)$ muni de la structure de coproduit induite par σ et du coproduit à droite δ_R est un comodule cogèbre à droite.

Donc $A \rtimes T(M^L)$ est une cogèbre.

(ii) L'isomorphisme d'algèbres Ψ entre $T_A(M)$ et $A \otimes T(M^L)$ est un isomorphisme de cogèbres :

$$T_A(M) \simeq A \rtimes T(M^L).$$

Preuve : Il est clair que ε est un morphisme de comodules à droite.

Il reste à vérifier que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} T(M^L) & \xrightarrow{\Delta} & T(M^L) \otimes T(M^L) \\ \delta_R \downarrow & & \delta_R \downarrow \\ T(M^L) \otimes A & \xrightarrow{\Delta \otimes Id} & T(M^L) \otimes T(M^L) \otimes A \end{array}$$

On va montrer par récurrence que ce diagramme commute pour tous les éléments de $T(V)$ de degré quelconque $n \geq 0$. Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est clair.

Supposons que le diagramme commute pour tout $p \leq n$. Soient $w \in T(M^L)_n$ et $v \in M^L$. En utilisant l'égalité (2.7) on a :

$$\delta_R \Delta(w \otimes v) = \sum (w_{(1)(0)} \otimes v_{(1)(0)}) \otimes (w_{(2)(0)} \bullet v_{(1)(1)} \otimes v_{(2)(0)}) \otimes w_{(1)(1)} w_{(2)(1)} v_{(1)(2)} v_{(2)(1)}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à w et à v on obtient :

$$\delta_R \Delta(w \otimes v) = \sum (w_{(0)(1)} \otimes v_{(0)(1)(0)}) \otimes (w_{(0)(2)} \bullet v_{(0)(1)(1)} \otimes v_{(0)(2)}) \otimes w_{(1)} v_{(1)}.$$

C'est-à-dire $\delta_R \Delta(w \otimes v) = (\Delta \otimes Id) \delta_R(w \otimes v)$.

Pour prouver la deuxième partie de la proposition, on raisonne sur Ψ^{-1} . On va montrer par une récurrence sur le degré n des éléments que Ψ^{-1} est un morphisme de cogèbres.

Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est clair.

On suppose que Ψ^{-1} restreint à $A \rtimes (T_A(M))_p$ ($p \leq n$) est un isomorphisme de cogèbres.

Soient $w \in T(M^L)_n$ et $v \in M^L$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta(a \rtimes (w \otimes v)) &= \sum a_{(1)} \rtimes (w_{(1)(0)} \otimes v_{(0)}) \otimes a_{(2)} w_{(1)(1)} v_{(1)} \rtimes w_{(2)} \bullet v_{(2)} \\ &+ \sum a_{(1)} \rtimes w_{(1)(0)} \otimes a_{(2)} w_{(1)(1)} \rtimes (w_{(2)} \otimes v). \end{aligned}$$

Or dans $T_A(M)$ on a $\forall w^1, w^2 \in M, \forall a \in A, w^1 a \otimes w^2 = w^1 \otimes a w^2$. Donc :

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1}) \Delta(a \rtimes (w \otimes v)) &= \sum (a_{(1)} w_{(1)(0)} \otimes v_{(0)}) \otimes a_{(2)} w_{(1)(1)} w_{(2)} v_{(1)} \\ &+ \sum a_{(1)} w_{(1)(0)} \otimes (a_{(2)} w_{(1)(1)} w_{(2)}) \otimes v. \end{aligned}$$

Notons pour $z \in T_A(M)$, $\Delta(z) = \sum z^{(1)} \otimes z^{(2)}$. Avec cette notation on a, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $1 \rtimes w$:

$$\sum w^{(1)} \otimes w^{(2)} = \sum w_{(1)(0)} \otimes w_{(1)(1)} w_{(2)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} (\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1})\Delta(a \bowtie (w \otimes v)) &= \sum (a_{(1)}w^{(1)} \otimes v_{(0)}) \otimes a_{(2)}w^{(2)}v_{(1)} \\ &\quad + \sum a_{(1)}w^{(1)} \otimes (a_{(2)}w^{(2)} \otimes v) \\ &= \Delta\Psi^{-1}(a \bowtie (w \otimes v)). \end{aligned}$$

□

On a ainsi le corollaire suivant:

Corollaire 2.1 *L'espace $A \otimes T(M^L)$ est une algèbre de Hopf avec la structure d'algèbre croisée de A -module algèbre droite et de cogèbre croisée de A -comodule cogèbre droite. Elle est isomorphe à l'algèbre de Hopf $T_A(M)$.*

Remarque : De manière analogue, on montre que $T(M^R) \otimes A$ est une algèbre de Hopf avec la structure d'algèbre croisée de A -module algèbre gauche et de cogèbre croisée de A -comodule cogèbre gauche. De plus elle est isomorphe à l'algèbre de Hopf $T_A(M)$.

Lepowsky et Wilson ([LW96]) avaient déjà obtenu un résultat analogue pour la structure d'algèbre :

Théorème 2.3 *Soient A une algèbre de Hopf et V un espace vectoriel. Considérons l'algèbre \mathcal{A} engendrée par A et V et l'action adjointe de A sur \mathcal{A} . C'est un A -module algèbre à gauche avec :*

$$\forall a \in A, \forall w \in \mathcal{A}, \quad \varphi_L(a \otimes w) = \sum a_{(1)}wS(a_{(2)}).$$

Alors :

- (i) *le A -sous-module $A.V$ de \mathcal{A} engendré par V est naturellement isomorphe au A -module à gauche libre sur V ,*
- (ii) *la sous-algèbre de \mathcal{A} engendrée par $A.V$ est naturellement isomorphe à l'algèbre tensorielle $T(A.V)$,*
- (iii) *en tant qu'espace vectoriel, \mathcal{A} est naturellement isomorphe au produit tensoriel $T(A.V) \otimes A$. L'espace $T(A.V)$ est un A -module sous-algèbre de \mathcal{A} . Avec cette structure l'algèbre \mathcal{A} est isomorphe au produit croisé $T(A.V) \otimes A$.*

On retrouve ce résultat en considérant le A -module à gauche $M^R = A.V$ et le A -module à droite, A -comodule à droite trivial et A -module à gauche diagonal $M = M^R \otimes A$. L'algèbre libre \mathcal{A} est alors isomorphe à $T_A(M)$. En restreignant la remarque du corollaire 2.1 à un isomorphisme d'algèbre, on trouve $T_A(M) \simeq T(M^R) \sharp A$. D'où l'isomorphisme du théorème.

2.2.2 Structures des algèbres de Hopf inhomogènes: cas où ϕ est non nul

Afin d'avoir une expression plus maniable de la structure de bigèbre de \mathcal{B} , on va établir un résultat, analogue au corollaire 2.1, pour le cas d'une composante inhomogène non nulle. Pour cela, on donne un isomorphisme entre \mathcal{B} et un espace tensoriel \mathcal{C} , puis on étudie la structure de bigèbre de \mathcal{C} .

Algèbre tensorielle inhomogène

Soit \mathcal{B} l'algèbre de Hopf inhomogène associée à un couple (M, ϕ) . Notons $(e_i)_{i \in I}$ $|I| = N$ ($N < +\infty$) une base de M^R , $f \in M_N(A^*)$ et $\Lambda \in M_N(A)$ les matrices donnant la structure de A -bimodule de Hopf.

Pour $n \geq 1$, on note I_n l'ensemble $I^{\times n}$ et $I_0 = \{0\}$. Soit $\mathcal{I} = \bigcup_{n \geq 0} I_n$.

Soit C le A -module à gauche libre de base $(P_K)_{K \in \mathcal{I}}$ avec $P_K = e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_n}$ pour $K = (k_1, \dots, k_n)$ et $P_0 = 1_A$.

On pose C_n le A -module libre de base $(P_K)_{K \in I_n}$ et $FC_n = \bigoplus_{p \leq n} C_p$.

On a $C = \bigoplus_{n \geq 0} C_n = \bigcup_{n \geq 0} FC_n$

Soient $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ le \mathbb{K} espace vectoriel de base $(P_K)_{K \in \mathcal{I}}$ et $\pi : C \otimes \mathcal{C}_{\mathbb{K}} \rightarrow C$ l'application linéaire définie pour $a \in A$ par :

$$\pi(aP_K \otimes P_L) = \begin{cases} aP_L & \text{si } K = 0, \\ aP_{K \times L} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour munir C d'une structure d'algèbre, on va définir par récurrence une famille $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ d'applications linéaires :

$$\begin{aligned} \lambda_1 : C_1 \otimes A &\longrightarrow FC_1 \\ ae_i \otimes b &\longmapsto \sum_{l \in I} af_{i,l}(b_{(1)})b_{(2)}e_l + a\phi(e_i \otimes b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_n : C_n \otimes A &\longrightarrow FC_n \\ a(P_K \otimes e_i) \otimes b &\longmapsto \sum_{l \in I} \pi(\lambda_{n-1}(aP_K \otimes f_{i,l}(b_{(1)})b_{(2)}) \otimes e_l) + \lambda_{n-1}(aP_K \otimes \phi(e_i \otimes b)), \end{aligned}$$

où $K \in I_{n-1}$.

Soit φ l'application linéaire de $C \otimes C$ dans C définie par :

$$\begin{aligned} \varphi(a \otimes b) &= ab && \forall a, b \in A, \\ \varphi(a \otimes bP_K) &= abP_K && \forall a, b \in A, \forall n \geq 1, \forall K \in I_n, \\ \varphi(aP_K \otimes b) &= \lambda_n(aP_K \otimes b) && \forall a, b \in A, \forall n \geq 1, \forall K \in I_n, \\ \varphi(aP_K \otimes bP_L) &= \pi(\lambda_n(aP_K \otimes b) \otimes P_L) && \forall a, b \in A, \forall n, p \geq 1, \forall K \in I_n, \forall L \in I_p. \end{aligned}$$

Théorème 2.4 *L'espace C muni de φ est une algèbre avec pour unité 1_A . De plus elle est isomorphe en tant qu'algèbre à \mathcal{B} .*

Preuve : Nous allons construire un isomorphisme Ψ entre \mathcal{B} et C qui envoie le produit φ de C sur le produit m de \mathcal{B} , c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} & \xrightarrow{\Psi \otimes \Psi} & C \otimes C \\ m \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\Psi} & C \end{array}$$

Le produit de \mathcal{B} étant associatif, on en déduit l'associativité de φ .

Pour montrer que 1_A est l'unité de φ , on utilise le fait que pour tous $i, j \in I$ on a $\phi(e_i \otimes 1_A) =$

0 et $f_{i,j}(1_A) = \delta_i(j)$. On voit alors que $\forall K \in I_n$, $\varphi(aP_K \otimes 1_A) = aP_K$. Les autres cas se montrent facilement.

Afin de construire l'isomorphisme, on définit $\tilde{p}_0 = 1_A$ et pour tout $n > 0$, $K \in I_n$ on note \tilde{p}_K l'élément de \mathcal{B} donné par : $\tilde{p}_K = e_{k_1} \cdots e_{k_n}$.

Par construction de \mathcal{B} , il est clair que $(\tilde{p}_K)_{K \in \mathcal{I}}$ engendre \mathcal{B} comme A -module à gauche. Soit Ψ le morphisme de A -modules à gauche défini pour tout $K \in \mathcal{I}$ par :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & C \\ \tilde{p}_K & \longmapsto & P_K. \end{array}$$

Ce morphisme est bien défini car $\forall i \in I, \forall a \in A$, $\Psi(r_{i,a}) = 0$.

Or, comme les $(P_K)_{K \in \mathcal{I}}$ forment une base du A -module libre à gauche C , ils sont linéairement indépendants; il en est donc de même pour les (\tilde{p}_K) . Ainsi ils forment une base du A -module à gauche \mathcal{B} . Le morphisme Ψ envoie alors une base sur une base, c'est donc un isomorphisme.

Il reste à vérifier que Ψ est compatible avec les structures de produits, c'est-à-dire que

$$\forall a, b \in A, \forall K, L \in \mathcal{I}, \quad \varphi(\Psi \otimes \Psi)(a \tilde{p}_K \otimes b \tilde{p}_L) = \Psi m(a \tilde{p}_K \otimes b \tilde{p}_L).$$

Pour $b = 1_A$ et tous $K, L \in \mathcal{I}$ c'est clair. Il en va de même pour le couple $(K = 0, L \in \mathcal{I})$ et tous $a, b \in A$. Pour le couple $(K \in I_n, L \in \mathcal{I})$ et tous $a, b \in A$, on fait une récurrence sur n . Si $n = 1$ on a pour tout $i \in I$:

$$\begin{aligned} \varphi(\Psi \otimes \Psi)(ae_i \otimes b \tilde{p}_L) &= \sum_l a f_{i,l}(b_{(1)}) b_{(2)} e_l \otimes P_L + a \phi(e_i \otimes b) P_L \\ &= \Psi m(ae_i \otimes b \tilde{p}_L) \end{aligned}$$

Supposons que le résultat est vrai pour n alors pour tout $K \in I_n$ et $i \in I$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\Psi \otimes \Psi)((a \tilde{p}_K e_i) \otimes b \tilde{p}_L) &= \sum_l \pi (\lambda_{n-1}(aP_K \otimes f_{i,l}(b_{(1)})b_{(2)}) \otimes (e_l \otimes P_L)) \\ &\quad + \pi (\lambda_{n-1}(aP_K \otimes \phi(e_i \otimes b)) \otimes P_L) \\ &= \sum_l \varphi(\Psi \otimes \Psi)(a \tilde{p}_K \otimes f_{i,l}(b_{(1)})b_{(2)} e_l \tilde{p}_L) \\ &\quad + \varphi(\Psi \otimes \Psi)(a \tilde{p}_K \otimes \phi(e_i \otimes b) \tilde{p}_L) \\ &= \sum_l \Psi m(a \tilde{p}_K \otimes f_{i,l}(b_{(1)})b_{(2)} e_l \tilde{p}_L) \\ &\quad + \Psi m(a \tilde{p}_K \otimes \phi(e_i \otimes b) \tilde{p}_L) \\ &= \Psi m(a \tilde{p}_K e_i \otimes b \tilde{p}_L) \end{aligned}$$

D'où la compatibilité de Ψ avec les produits. □

En transportant par Ψ la structure de cogèbre et l'antipode de \mathcal{B} sur C , on munit C d'une structure d'algèbre de Hopf. On a donc par construction

Corollaire 2.2 *Les algèbres de Hopf \mathcal{B} et C sont isomorphes.*

Remarque : La structure de cogèbre sur C est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta_C(aP_0) &= \sum a_{(1)}P_0 \otimes a_{(2)}P_0 & \forall a \in A, \\ \Delta_C(e_i) &= \sum_{l \in I} \Lambda_{i,l}P_0 \otimes e_l + e_i \otimes P_0 & \forall i \in I, \\ \Delta_C & \text{ morphisme d'algèbres,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_C(aP_0) &= \varepsilon(a) & \forall a \in A, \\ \varepsilon_C(e_i) &= 0 & \forall i \in I, \\ \varepsilon_C & \text{ morphisme d'algèbres.}\end{aligned}$$

Remarque : De manière intuitive l'algèbre de Hopf C peut être vue comme l'algèbre de Hopf tensorielle $T_A(\tilde{M})$, où \tilde{M} est le A -bimodule valant M comme A -module à gauche et ayant comme "produit à droite" $v.a = \varphi_R(v \otimes a) + \phi(v \otimes a)$. On a bien un A -bimodule car ϕ vérifie (2.5).

Structure de bigèbre croisée inhomogène

On va construire un isomorphisme d'espace vectoriel entre C et $A \otimes T(M^L)$. Ceci permettra de transporter la structure d'algèbre de Hopf à $A \otimes T(M^L)$ et ainsi de mieux les comprendre. Pour cela, on construit une filtration de $A \otimes T(M^L)$ et un isomorphisme de A -modules à gauche filtrés entre C et $A \otimes T(M^L)$.

On définit $F(A \otimes T(M^L))_0 = A \otimes T(M^L)_0$, $F(A \otimes T(M^L))_1 = A \otimes T(M^L)_1 \oplus A \otimes T(M^L)_0$

et $F((A \otimes T(M^L))_n) = A \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^n T(M^L)_i \right)$.

On a $F(A \otimes T(M^L))_0 \subset F(A \otimes T(M^L))_1 \subset \dots \subset F((A \otimes T(M^L))_n) \subset \dots$,

et $A \otimes T(M^L) = \bigcup_i F(A \otimes T(M^L))_i$.

Pour tout $n \geq 0$, on va construire des isomorphismes de A -modules à gauche

$\Gamma_n : FC_n \longrightarrow F(A \otimes T(M^L))_n$ tel que pour tout $l \leq n$, Γ_n restreint à FC_l est égal à Γ_l .

Pour $n = 0$, on définit $\Gamma_0 : FC_0 \rightarrow F(A \otimes T(M^L))_0$ par :

$$\begin{aligned}\Gamma_0(aP_0) &= a \otimes 1 & \forall a \in A, \\ \Gamma_0^{-1}(a \otimes 1) &= aP_0 & \forall a \in A.\end{aligned}$$

Il est clair que Γ_0 est un isomorphisme de A -module à gauche.

Pour $n = 1$, on définit $\Gamma_1 : FC_1 \rightarrow F(A \otimes T(M^L))_1$ par :

$$\begin{aligned}\Gamma_1(aP_0) &= \Gamma_0(aP_0) & \forall a \in A, \\ \Gamma_1(ae_i) &= \sum ae_{i(-2)} \otimes S(e_{i(-1)})e_{i(0)} & \forall i \in I, \forall a \in A, \\ \Gamma_1^{-1}(a \otimes 1) &= \Gamma_0^{-1}(a \otimes 1) & \forall a \in A, \\ \Gamma_1^{-1}(a \otimes v) &= \varphi(a \otimes v) & \forall v \in M^L, \forall a \in A.\end{aligned}$$

Remarque : Tout élément w de C_1 est de la forme $\sum a_i p_i$, donc $\forall w \in C_1$:

$$\Gamma_1(w) = \sum w_{(-2)} \otimes S(w_{(-1)})w_{(0)}.$$

Pour $n \geq 2$, on définit $\Gamma_n : FC_n \rightarrow F(A \otimes T(M^L))_n$ par :

$$\begin{aligned}\Gamma_n(w) &= \Gamma_{n-1}(w) & \forall w \in FC_{n-1}, \\ \Gamma_n^{-1}(w) &= \Gamma_{n-1}^{-1}(w) & \forall w \in F(A \otimes T(M^L))_{n-1}.\end{aligned}$$

On définit pour tout $a \in A$, $(K, i) \in I_n$ et $v^1 \otimes \cdots \otimes v^n \in T(M^L)_n$ Γ_n et Γ_n^{-1} par :

$$\begin{aligned}\Gamma_n(aP_K \otimes e_i) &= (\Gamma_{n-1} \otimes \text{Id})(\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\text{Id}^{\otimes n-1} \otimes \Gamma_1)(aP_K \otimes e_i), \\ \Gamma_n^{-1}(a \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^n) &= \varphi \circ (\Gamma_{n-1}^{-1} \otimes \text{Id})(a \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^n).\end{aligned}$$

Proposition 2.11 *Pour tout n , les applications Γ_n et Γ_n^{-1} sont des isomorphismes de A -modules à gauche entre FC_n et $F(A \otimes T(M^L))_n$.*

Preuve : Montrons que pour tout $n \geq 1$, l'application $\Gamma_n^{-1}\Gamma_n$ restreinte à C_n est l'identité. Pour $n = 1$, c'est clair. Supposons $n \geq 2$, on a :

$$\Gamma_n^{-1}\Gamma_n = \varphi(\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\text{Id}^{\otimes n-1} \otimes \Gamma_1).$$

Le morphisme $(\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})$ s'appliquant à des éléments de $C_{n-1} \otimes T(A \otimes M^L)_1$, on a pour tout $a \in A$, $(K, i) \in I_n$:

$$\begin{aligned}\Gamma_n^{-1}\Gamma_n(aP_K \otimes e_i) &= \varphi(\varphi \otimes \text{Id})(\text{Id}^{\otimes n-1} \otimes \Gamma_1)(aP_K \otimes e_i) \\ &= \varphi(\text{Id}^{\otimes n-1} \otimes \varphi)(\text{Id}^{\otimes n-1} \otimes \Gamma_1)(aP_K \otimes e_i) \\ &= \varphi(aP_K \otimes e_i) = \text{Id}.\end{aligned}$$

Donc $\Gamma_n^{-1}\Gamma_n = \text{Id}$.

Pour montrer que $\Gamma_n\Gamma_n^{-1} = \text{Id}$, on montre d'abord que pour $n \geq 2$, $w \in FC_{n-1}$ et $v \in M^L$:

$$(\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \Gamma_1)\varphi(w \otimes v) = w \otimes v.$$

Tout $v \in M^L$ s'écrit $v = \sum_t a_t e_t$. On a donc :

$$\begin{aligned}(\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \Gamma_1)\varphi(w \otimes v) &= \\ &= (\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \Gamma_1)(\sum_t \lambda_{n-1}(w \otimes a_t) \otimes e_t) \\ &= \sum_{t \in I} (\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\lambda_{n-1} \otimes \text{Id}^{\otimes 2})(w \otimes a_t \otimes e_{t(-2)} \otimes S(e_{t(-1)})e_{t(0)}) \\ &= \sum_{t \in I} (\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \varphi \otimes \text{Id})(w \otimes a_t \otimes e_{t(-2)} \otimes S(e_{t(-1)})e_{t(0)}) \\ &= (\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\sum_t w \otimes a_t e_{t(-2)} \otimes S(e_{t(-1)})e_{t(0)})\end{aligned}$$

Or $(\text{Id} \otimes \delta_L)\delta_L(v) = 1_A \otimes 1_A \otimes v$ donc :

$$\begin{aligned}(\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \Gamma_1)\varphi(w \otimes v) &= (\lambda_{n-1} \otimes \text{Id})(w \otimes 1_A \otimes v) \\ &= w \otimes v\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que $\Gamma_n\Gamma_n^{-1} = \text{Id}$. Pour $n = 1$, c'est clair. Supposons le résultat vrai pour n alors :

$$\begin{aligned}\Gamma_{n+1}\Gamma_{n+1}^{-1} &= (\Gamma_n \otimes \text{Id})(\lambda_n \otimes \text{Id})(\text{Id}^{\otimes n} \otimes \Gamma_1)\varphi(\Gamma_n^{-1} \otimes \text{Id}) \\ &= (\Gamma_n \otimes \text{Id})(\Gamma_n^{-1} \otimes \text{Id}) = \text{Id}\end{aligned}$$

De plus il est clair que Γ et Γ^{-1} sont des morphismes de A -modules à gauche. Ils forment donc un isomorphisme de A -modules à gauche. \square

Via cet isomorphisme, on munit $A \otimes T(M^L)$ d'une structure d'algèbre de Hopf.

Explicitons la structure d'algèbre de $A \otimes T(M^L)$ ainsi obtenue.

Proposition 2.12 *Pour tout $v, v' \in M^L$, $w, w' \in T(M^L)$ et $a, b \in A$, le produit de $A \otimes T(M^L)$ est donné par :*

$$\begin{aligned} (a \otimes 1).(b \otimes w) &= ab \otimes w, \\ (a \otimes v).(b \otimes v') &= \sum ab_{(1)} \otimes v \bullet b_{(2)} \otimes v' + a\phi(v \otimes b) \otimes v', \\ (a \otimes w).(1 \otimes w') &= a \otimes w \otimes w'. \end{aligned}$$

Preuve : La première égalité est évidente.

Posons $v = \sum_{i \in I} a_i e_i$ et $v' = \sum_{j \in J} b_j e_j$. On a alors :

$$\varphi(\Gamma^{-1} \otimes \Gamma^{-1})((a \otimes v) \otimes (b \otimes v')) = \sum_{i,j,l \in I} aa_i f_{i,l}(b_{(1)} b_{j(1)}) b_{(2)} b_{j(2)} e_l \otimes e_j + \sum_{j \in I} a\phi(v \otimes b b_j) e_j$$

On montre alors grâce à l'égalité (2.5) que :

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma^{-1} \otimes \Gamma^{-1})((a \otimes v) \otimes (b \otimes v')) &= \sum_{i,l,j \in I} aa_i f_{i,l}(b_{(1)} b_{j(1)}) b_{(2)} b_{j(2)} e_l \otimes e_j + \sum_{j \in I} a\phi(v \otimes b) b_j e_j \\ &\quad + \sum_{i,l,j \in I} aa_i f_{i,l}(b_{(1)}) b_{(2)} \phi(e_l \otimes b_j) e_j \\ &= \Gamma^{-1}((a \otimes v).(b \otimes v')). \end{aligned}$$

Par définition du produit de $A \otimes T(M^L)$, on a pour $w \in T(M^L)_n$ et $w' \in T(M^L)_p$ avec $n, p \geq 1$:

$$(a \otimes w).(1 \otimes w') = \Gamma \varphi(\Gamma^{-1}(a \otimes w) \otimes \Gamma^{-1}(1 \otimes w')).$$

Par définition de Γ^{-1} et de l'associativité du produit de C on a alors :

$$(a \otimes w).(1 \otimes w') = \Gamma \Gamma^{-1}(a \otimes (w \otimes w')) = a \otimes w \otimes w'.$$

D'où la proposition. □

Remarque : On a $(a \otimes v).(b \otimes v') = (a \sharp v).(b \sharp v') + \phi(v \otimes b) \otimes v'$.

On peut alors définir le produit de $A \otimes T(M^L)$ par récurrence. En effet on a pour $n, p \geq 1$, $a \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^n \in A \otimes T(M^L)_n$ et $b \otimes v'^1 \otimes \dots \otimes v'^p \in A \otimes T(M^L)_p$:

$$\begin{aligned} (a \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^n).(b \otimes v'^1 \otimes \dots \otimes v'^p) &= \\ &= (a \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^{n-1}).(1 \otimes v^n).(b \otimes v'^1).(1 \otimes v'^2 \otimes \dots \otimes v'^p) \\ &= \sum (a \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^{n-1}).(b_{(1)} \otimes v^n \bullet b_{(2)} \otimes v'^2 \otimes \dots \otimes v'^p) \\ &\quad + (a \otimes v^1 \otimes \dots \otimes v^{n-1}).(\phi(v^n \otimes b) \otimes v'^2 \otimes \dots \otimes v'^p) \end{aligned}$$

Le produit de $A \otimes T(V)$ est donc donné par le produit de $A \sharp T(V)$ auquel on a ajouté une composante inhomogène.

Explicitons la structure de coproduit de $A \otimes T(M^L)$.

Pour cela, il suffit de donner le coproduit sur $A \otimes \mathbb{K}$ et sur $A \otimes M^L$. En général pour $n \geq 2$ le coproduit est alors défini sur $A \otimes T(M^L)_n$ par récurrence :

$$\Delta(a \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^n) = \Delta(a \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^{n-1}) \cdot \Delta(1 \otimes v^n),$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta(a \otimes 1) = \sum (a_{(1)} \otimes 1) \otimes (a_{(2)} \otimes 1), \\ \Delta(a \otimes v) = \sum (a_{(1)} \otimes 1) \otimes (a_{(2)} \otimes v) + \sum (a_{(1)} \otimes v_{(0)}) \otimes (a_{(2)} v_{(1)} \otimes 1). \end{cases}$$

De même que le produit, on remarque que le coproduit est donné par celui de $A \rtimes T(V)$ auquel on a ajouté une composante inhomogène.

Chapitre 3

Produit tordu de complexes de Hochschild

Le but de ce chapitre est d'établir, sous certaines conditions sur les tressages et sur les algèbres, que muni du produit des battages quantiques, le produit tensoriel du complexe de Hochschild d'une algèbre est une algèbre tordue différentielle graduée. Dans la première partie, on établit une version tordue, par un tressage, du théorème d'Eilenberg-Zilber appliqué à la construction Bar. Pour cela, on munit les espaces du théorème d'Eilenberg-Zilber de structures d'algèbre et de bimodule tordues, de telle manière que les morphismes deviennent des morphismes de bimodules. Dans la partie suivante, on donne, grâce à la partie précédente, une factorisation du produit des battages qui permet de munir un produit tensoriel tordu de complexes de Hochschild d'une structure d'algèbre différentielle graduée. Dans la troisième partie, on applique les résultats précédents à des cas connus. En particulier, on donne une généralisation aux algèbres de Hopf de l'identité générale de Hochschild-Serre.

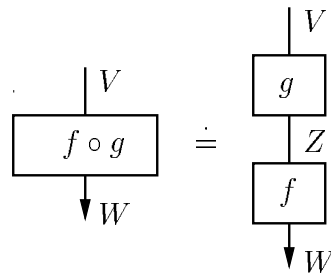
3.1 Extension du théorème d'Eilenberg-Zilber

On va, dans un premier temps, définir des produits tordus d'algèbres et de bimodules. Ensuite, on étudiera la compatibilité des différentielles et de l'application des tressages du théorème d'Eilenberg-Zilber, appliqué à l'objet simplicial $\text{Bar}(A, A)$, avec ces structures tordues.

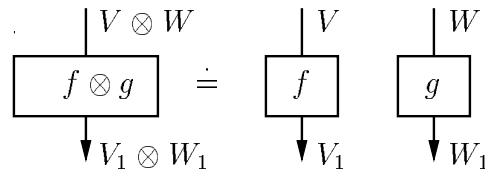
Dans le but de rendre plus claires les démonstrations des parties suivantes, on représente les applications linéaires $f : V^1 \otimes \dots \otimes V^n \rightarrow W^1 \otimes \dots \otimes W^p$ par des diagrammes du type :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \downarrow \\ V^1 \otimes \dots \otimes V^n \\ \boxed{f} \\ \downarrow \\ W^1 \otimes \dots \otimes W^p \end{array} & \doteq & \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ V^1 \dots \quad V^n \\ \boxed{f} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ W^1 \dots \quad W^p \end{array}
 \end{array}$$

Le symbole \doteq entre deux diagrammes signifie que les morphismes correspondants sont égaux. La composition $f \circ g$ des morphismes f, g est représentée par la concaténation des diagrammes correspondants :

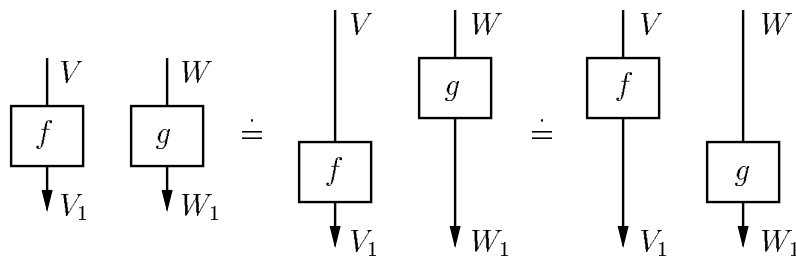


Le produit tensoriel $f \otimes g$ des morphismes f, g est représenté par la juxtaposition des diagrammes :



L'identité d'un espace vectoriel est représentée par : $\downarrow V$

Soient f, g des applications linéaires. L'égalité $f \otimes g = (f \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes g) = (\text{Id} \otimes g)(f \otimes \text{Id})$ est représentée par :



Ces égalités sont fondamentales dans les démonstrations à venir. Elles permettent d'étirer les diagrammes afin de se ramener à des parties de diagrammes connues.

Cette technique a été introduite par Reshetikhin et Turaev [RT90], [RT91], par Freyd et Yetter [FY89], [FY92] ainsi que par Kassel [Kas95].

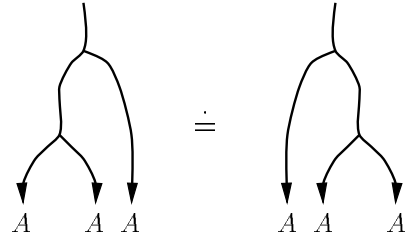
3.1.1 Produit tensoriel tordu d'algèbre et bimodules

Produit tensoriel tordu d'algèbre

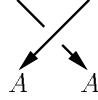
Soient $(A, m, 1_A)$ une algèbre et $\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ une application linéaire. On va chercher les conditions pour que $A \otimes A$ muni du produit $(m \otimes m) \circ \sigma_2$ soit une algèbre.

On représente le produit m par :

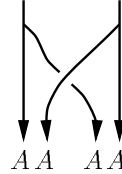
L'associativité du produit de A est représentée par :



L'application σ est représentée par :



Posons $m_\sigma = (m \otimes m) \circ \sigma_2$. Le diagramme de m_σ est :



On vérifie facilement le lemme suivant :

Lemme 3.1 *L'élément $1_A \otimes 1_A$ est l'unité de $A \otimes A$ pour le produit m_σ si et seulement si*

$$\sigma(a \otimes 1_A) = 1_A \otimes a, \tag{3.1}$$

$$\sigma(1_A \otimes a) = a \otimes 1_A. \tag{3.2}$$

Lemme 3.2 *Le produit m_σ est associatif si et seulement si σ satisfait aux conditions :*

$$\sigma_1 \circ (m \otimes \text{Id}) = (\text{Id} \otimes m) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2, \tag{3.3}$$

$$\sigma_1 \circ (\text{Id} \otimes m) = (m \otimes \text{Id}) \circ \sigma_2 \circ \sigma_1. \tag{3.4}$$

Preuve : Supposons que m_σ soit associatif. En écrivant l'associativité pour $1_A \otimes a \otimes 1_A \otimes b \otimes c \otimes 1_A$ (respectivement $1_A \otimes a \otimes b \otimes 1_A \otimes c \otimes 1_A$), on trouve les égalités (3.3) et (3.4). Inversement, supposons (3.3) et (3.4) vérifiées, alors

$$(\text{Id} \otimes m) \circ \sigma_1 \circ (\text{Id} \otimes m \otimes \text{Id}) \circ \sigma_3 = (m \otimes \text{Id}) \circ \sigma_2 \circ (\text{Id} \otimes m \otimes \text{Id}) \circ \sigma_1.$$

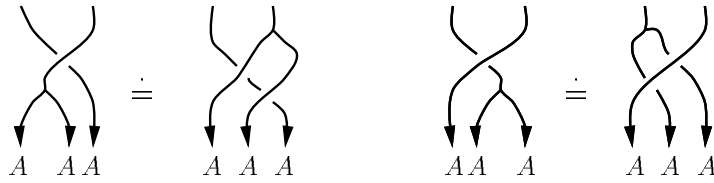
Donc

$$\begin{aligned} m_\sigma \circ (m_\sigma \otimes \text{Id}^{\otimes 2}) &= (m \otimes m) \circ (\text{Id} \otimes m \otimes \text{Id}) \circ \sigma_3 \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes m \otimes \text{Id}) \circ \sigma_2 \\ &= (m \otimes m) \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes m \otimes \text{Id}) \circ \sigma_2 \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes m \otimes \text{Id}^{\otimes 2}) \circ \sigma_4 \\ &= (m \otimes m) \circ \sigma_2 \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes m \otimes m) \circ \sigma_4 \\ &= m_\sigma \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes m_\sigma) \end{aligned}$$

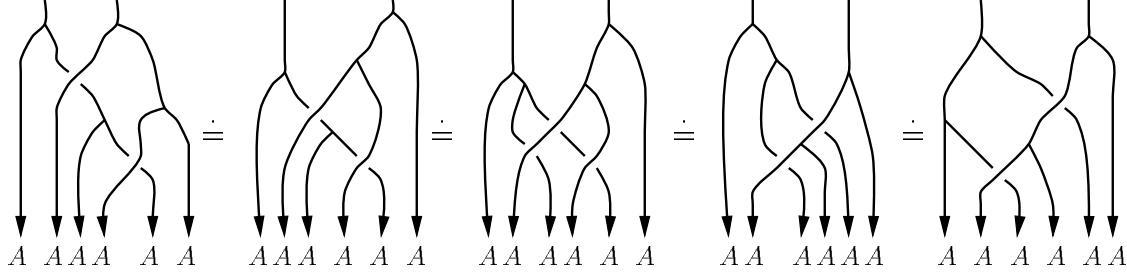
□

Remarque : Ces contraintes sont analogues avec celles définissant une catégorie tensorielle tressée, cf [JS93].

Par définition, les égalités (3.3) et (3.4) sont respectivement représentées par :

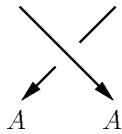


De manière graphique la réciproque du lemme 3.2 est alors :



L'espace $A \otimes A$ muni de la structure d'algèbre précédente est noté $A \otimes_{\sigma} A$.

Si l'application σ est inversible, son inverse σ^{-1} vérifie encore les égalités (3.3), (3.4), (3.1) et (3.2). On peut donc munir l'espace $A \otimes A$ d'une structure d'algèbre tordue par σ^{-1} . Pour alléger les notations, le produit de cette algèbre (respectivement l'algèbre) est noté $m_{\sigma'}$ (respectivement $A \otimes_{\sigma'} A$).



De manière graphique σ^{-1} est représentée par :

Les égalités $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{Id}$ et $\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{Id}$ sont représentées respectivement par :



De plus les égalités (3.3) et (3.4) pour σ^{-1} sont respectivement :



Bimodule sur $A \otimes_{\sigma} A$

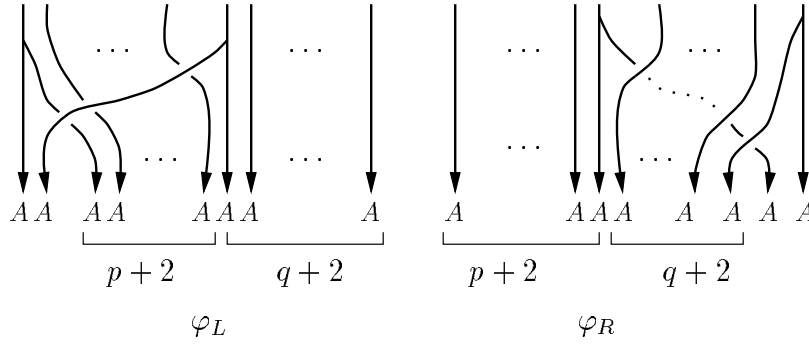
On munit les espaces du théorème d'Eilenberg-Zilber de structures de $A \otimes_{\sigma} A$ -bimodule. On a vu précédemment que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\text{Bar}_p(A, A)$ est un A -bimodule. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on va munir $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$ d'une structure de $A \otimes_{\sigma} A$ -bimodule via les morphismes :

$$\begin{aligned} \varphi_L & : A \otimes_{\sigma} A \otimes \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A) \longrightarrow \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A), \\ \varphi_R & : \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A) \otimes A \otimes_{\sigma} A \longrightarrow \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A), \end{aligned}$$

définis respectivement par :

$$\begin{aligned}\varphi_L &= (m \otimes \text{Id}^{\otimes p+1} \otimes m \otimes \text{Id}^{\otimes q+1}) \circ \sigma_{p+3} \dots \sigma_2, \\ \varphi_R &= (\text{Id}^{\otimes p+1} \otimes m \otimes \text{Id}^{\otimes q+1} \otimes m) \circ \sigma_{p+3} \dots \sigma_{p+q+4}.\end{aligned}$$

Les morphismes φ_L et φ_R sont représentés par :

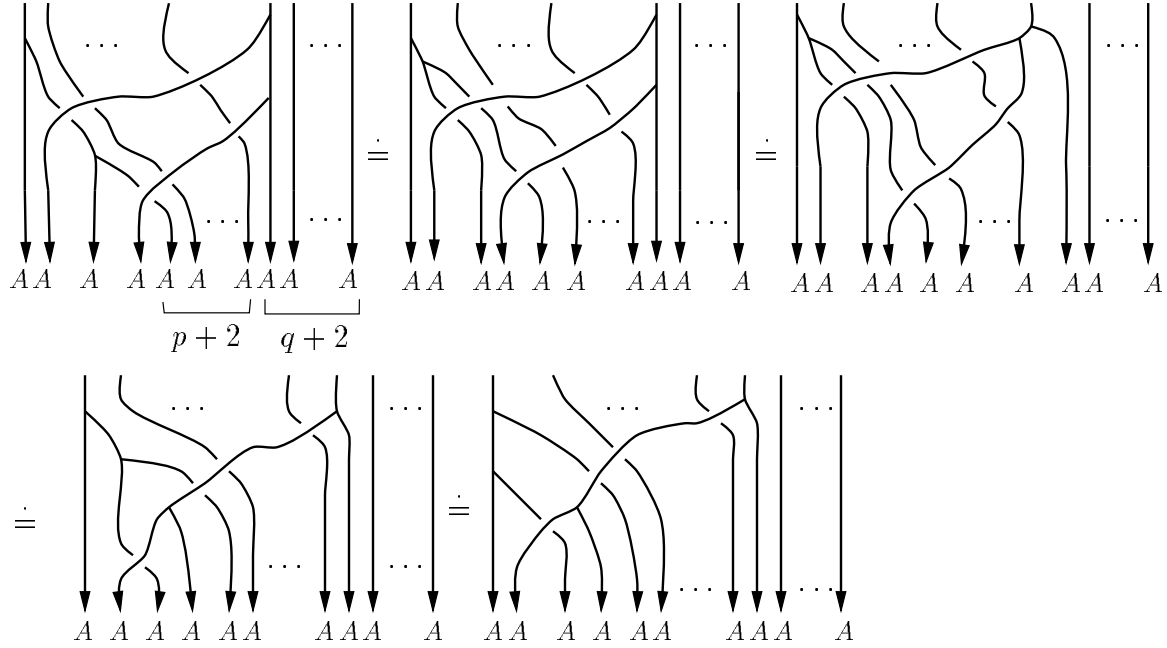


Lemme 3.3 *L'espace $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$ muni de φ_L, φ_R est un $A \otimes_\sigma A$ -bimodule.*

Preuve : Soient $\omega \in \text{Bar}_p(A, A), \omega' \in \text{Bar}_q(A, A)$. En utilisant (3.1) et (3.2), on voit facilement que :

$$\begin{aligned}\varphi_L(1_A \otimes 1_A \otimes \omega \otimes \omega') &= \omega \otimes \omega', \\ \varphi_R(\omega \otimes \omega' \otimes 1_A \otimes 1_A) &= \omega \otimes \omega'.\end{aligned}$$

Pour la structure de module à gauche, il faut voir que $\varphi_L \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \varphi_L) = \varphi_L \circ (m_\sigma \otimes \text{Id}^{\otimes p+q+4})$.
Or :

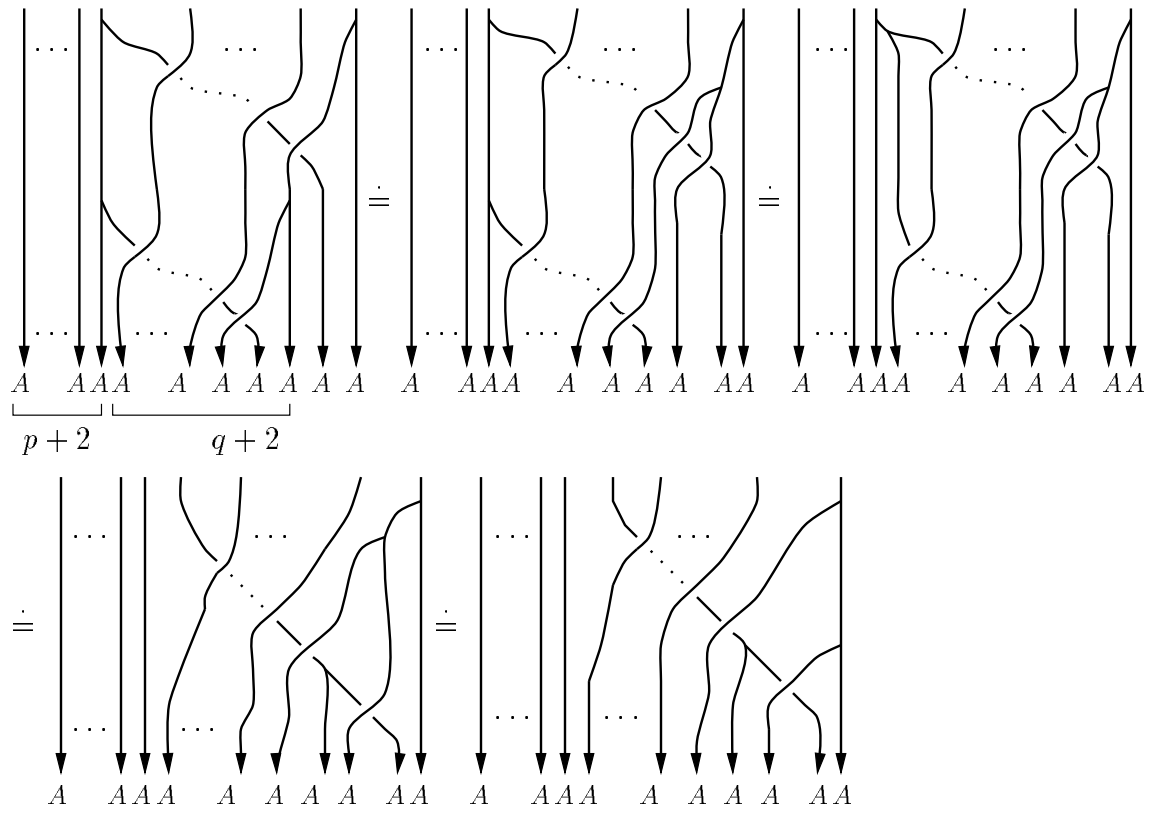


On a donc muni $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$ d'une structure de $A \otimes_\sigma A$ -module à gauche.

Pour la structure de module à droite, il faut voir que :

$$\varphi_R \circ (\varphi_R \otimes \text{Id}^{\otimes 2}) = \varphi_R \circ (\text{Id}^{\otimes p+q+4} \otimes m_\sigma).$$

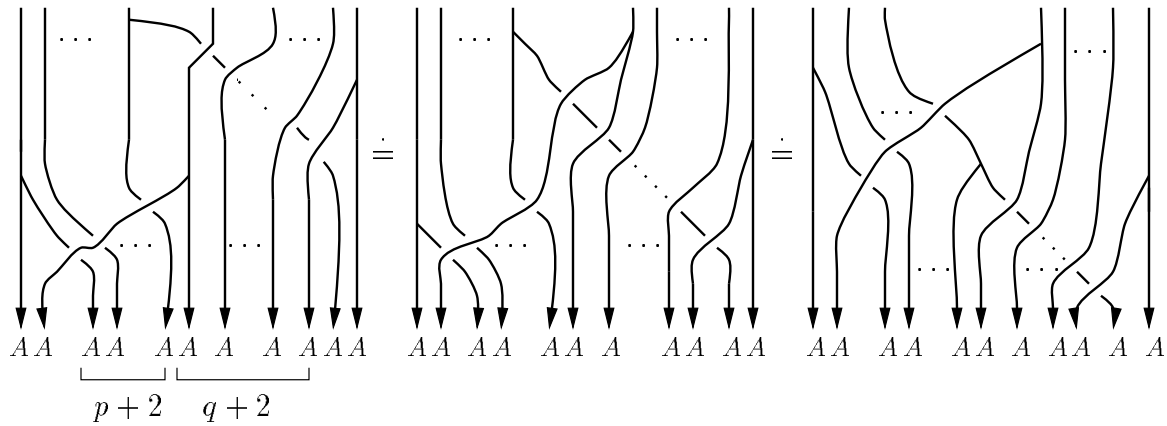
Or :



Il reste à vérifier que les structures de module à droite et de module à gauche sont compatibles. C'est-à-dire que :

$$\varphi_R \circ (\varphi_L \otimes \text{Id}^{\otimes 2}) = \varphi_L \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \varphi_R).$$

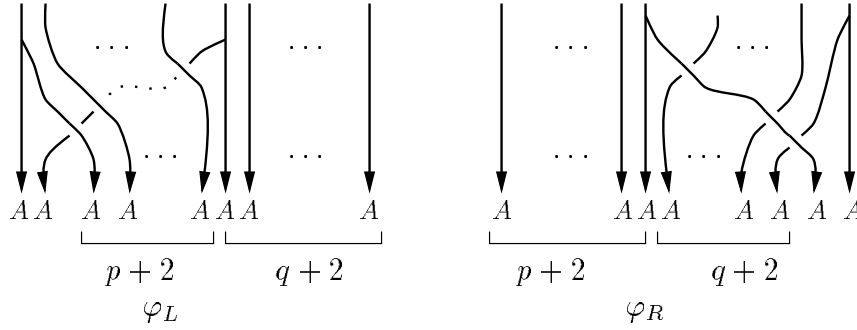
Pour cela, on a :



On a donc montré que $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$ est un $A \otimes_{\sigma} A$ -bimodule. □

De même que pour la structure d'algèbre de $A \otimes A$, l'espace $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$ ($p \geq 0, q \geq 0$) est muni d'une structure de $A \otimes_{\sigma^{-1}} A$ -bimodule en considérant σ^{-1} à la place de σ .

Les structures de produit à gauche et de produit à droite sont respectivement représentées par :



Remarque : Par définition du produit cartésien de $\text{Bar}(A, A)$ par lui-même, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $(\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_n$ est un $A \otimes_\sigma A$ -bimodule avec les mêmes structures φ_L et φ_R .

3.1.2 Extension du théorème d'Eilenberg-Zilber

On montre dans cette partie que les différentielles et l'application des tressages du théorème d'Eilenberg-Zilber, appliqué à l'objet simplicial $\text{Bar}(A, A)$, sont des diagrammes de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules.

Proposition 3.1 *L'application des tressages g du théorème d'Eilenberg-Zilber est une famille de morphismes de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules.*

Preuve : Par définition, pour tous $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = n$, $\omega \in \text{Bar}_p(A, A)$, $\omega' \in \text{Bar}_q(A, A)$, on a :

$$g_n(\omega \otimes \omega') = \sum_{\nu \in S_{p,n}} (-1)^{|\nu|} s_{\nu(p+q)-1} \circ \dots \circ s_{\nu(p+1)-1}(\omega) \otimes s_{\nu(p)-1} \circ \dots \circ s_{\nu(1)-1}(\omega').$$

Pour montrer que g_n est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules, il suffit de voir que, pour tous i, j vérifiant $0 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq q$, les applications $\text{Id}^{\otimes p+2} \otimes s_j$ et $s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}$ sont des morphismes de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules.

Par définition, il est clair que $\text{Id}^{\otimes p+2} \otimes s_j$ est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -modules à gauche et que $s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}$ est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -modules à droite.

Comme l'action à gauche et $s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}$ n'agissent pas sur le terme de gauche de $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$, on peut se restreindre au cas $q = 0$. Soient $a[a^1 | \dots | a^p]a' \in \text{Bar}_p(A, A)$, $b[]b' \in \text{Bar}_0(A, A)$ et $\alpha \otimes \beta \in A \otimes_\sigma A$. On a :

$$\begin{aligned} & (\alpha \otimes \beta) \cdot (s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2})(a[a^1 | \dots | a^p]a' \otimes b[]b') \\ &= (\alpha \otimes \beta) \cdot (a[a^1 | \dots | a^i | 1_A | \dots | a^p]a' \otimes b[]b') \\ &= (m \otimes \text{Id}^{\otimes p+2} \otimes m \otimes \text{Id}^{\otimes q+1}) \sigma_{p+4} \dots \sigma_2(\alpha \otimes \beta \otimes a[a^1 | \dots | a^i | 1_A | \dots | a^p]a' \otimes b[]b') \end{aligned}$$

Comme σ vérifie (3.1), on a :

$$\begin{aligned} & \sigma_{p+4} \dots \sigma_2(\alpha \otimes \beta \otimes a[a^1 | \dots | a^i | 1_A | \dots | a^p]a' \otimes b[]b) \\ &= (s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2})(\sigma_{p+3} \dots \sigma_2)(\alpha \otimes \beta \otimes a[a^1 | \dots | a^p]a' \otimes b[]b). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & (\alpha \otimes \beta).((s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2})(a[a^1 | \cdots | a^p]a' \otimes b[]b')) \\ &= (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2})((\alpha \otimes \beta).(a[a^1 | \cdots | a^p]a' \otimes b[]b')). \end{aligned}$$

Donc $s_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}$ est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -modules à gauche.

De la même manière, on voit que si σ vérifie (3.2), alors $\text{Id}^{\otimes p+2} \otimes s_j$ est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -modules à droite.

Donc g_n est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules. \square

Il faut encore étudier les différentielles ∂ et D . Celles-ci sont définies pour $\omega \otimes \omega' \in \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$ par :

$$D_{p+q}(\omega \otimes \omega') = \sum_{i=0}^p (-1)^i d_i(\omega) \otimes \omega' + \sum_{i=0}^q (-1)^{p+i} \omega \otimes d_i(\omega'),$$

et pour $\omega \otimes \omega' \in \text{Bar}_n(A, A) \otimes \text{Bar}_n(A, A)$ par :

$$\partial_n(\omega \otimes \omega') = \sum_{i=0}^n (-1)^i (d_i \otimes \text{Id}^{\otimes n+2}) \circ (\text{Id}^{\otimes n+2} \otimes d_i)(\omega \otimes \omega').$$

Ainsi, si les $d_i \otimes \text{Id}$ et $\text{Id} \otimes d_i$ sont des morphismes de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules, alors D et ∂ le sont aussi.

Proposition 3.2 *Les morphismes $d_i \otimes \text{Id}$ et $\text{Id} \otimes d_i$ sont des morphismes de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules.*

Preuve : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et p, q tel que $p + q = n$. Soient $0 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq q$.

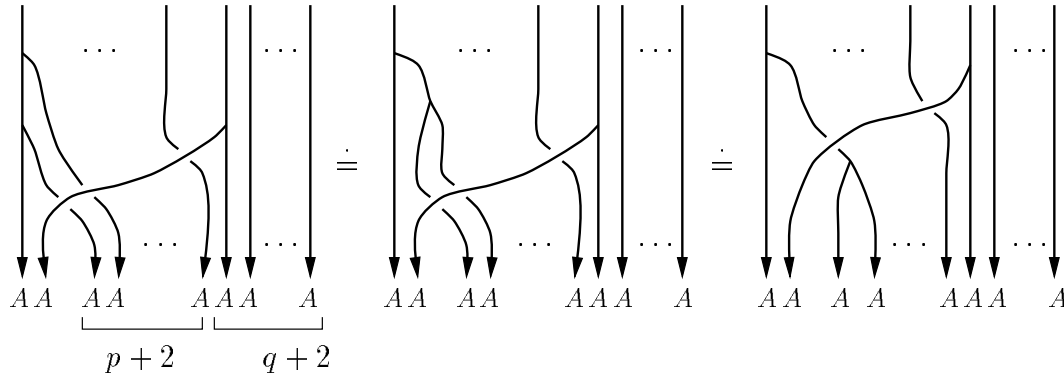
1^{er} CAS : $d_i \otimes \text{Id}$.

Il est clair que $d_i \otimes \text{Id}$ est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -modules à droite.

L'application $d_0 \otimes \text{Id}$ est un morphisme de $A \otimes_\sigma A$ -modules à gauche si et seulement si

$$(d_0 \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}) \circ \varphi_L = \varphi_L \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes d_0 \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}).$$

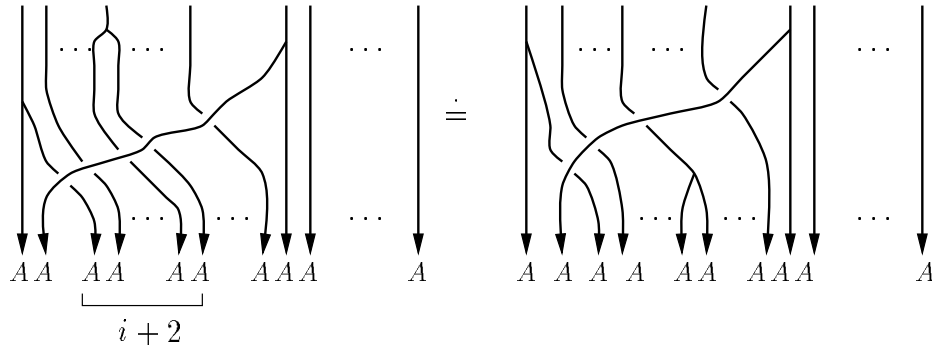
Or :



Pour $1 \leq i \leq p$, on doit avoir :

$$(d_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}) \circ \varphi_L = \varphi_L \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes d_i \otimes \text{Id}^{\otimes q+2}).$$

Or :



Les morphismes $d_i \otimes \text{Id}$ sont donc des morphismes de $A \otimes_{\sigma} A$ -bimodules.

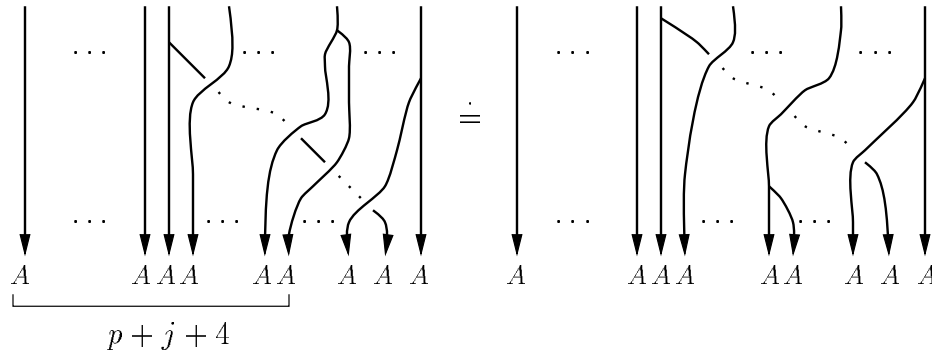
2^{ème} CAS : $\text{Id} \otimes d_j$.

Il est clair que $\text{Id} \otimes d_j$ est un morphisme de $A \otimes_{\sigma} A$ -modules à gauche.

Pour $0 \leq j \leq q-1$, on veut montrer que :

$$(\text{Id}^{p+2} \otimes d_j) \circ \varphi_R = \varphi_R \circ (\text{Id}^{\otimes p+2} \otimes d_j \otimes \text{Id}^{\otimes 2}).$$

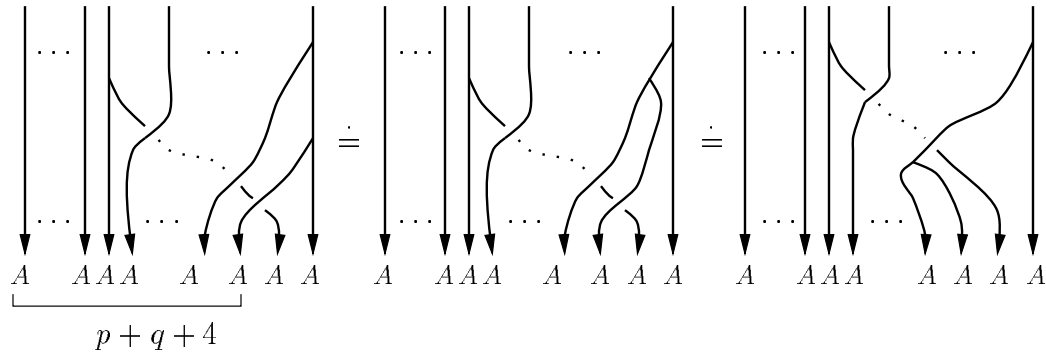
Or :



De plus, pour $j = q$, on doit vérifier que :

$$(\text{Id}^{p+2} \otimes d_q) \circ \varphi_R = \varphi_R \circ (\text{Id}^{\otimes p+2} \otimes d_q \otimes \text{Id}^{\otimes 2}).$$

Or :



Les morphismes $\text{Id} \otimes d_j$ sont donc des morphismes de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules.
La proposition est donc démontrée. \square

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Les différentielles et l'application des tressages du théorème d'Eilenberg-Zilber, appliqué à l'objet simplicial $\text{Bar}(A, A)$, sont des morphismes de $A \otimes_\sigma A$ -bimodules.*

Soit M un $A \otimes_\sigma A$ -bimodule. En notant $\tilde{\otimes}$ le produit tensoriel $\otimes_{A \otimes_\sigma A - A \otimes_\sigma A}$, on déduit du théorème précédent le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 *Si A est une algèbre et $\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ une application linéaire vérifiant (3.3), (3.4), (3.1) et (3.2), alors le diagramme suivant commute pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes g} & M \tilde{\otimes} (\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_n \\ \text{Id} \otimes D_n \downarrow & & \text{Id} \otimes \partial_n \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=n-1} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes g} & M \tilde{\otimes} (\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_{n-1} \end{array}$$

Remarque : Si σ est inversible, on peut considérer dans le corollaire les structures induites par σ^{-1} à la place de celles induites par σ .

3.2 Produit tensoriel tordu de complexes de Hochschild

Le but de cette partie est d'établir une factorisation du produit des battages quantiques par l'application des tressages $\text{Id} \otimes g$. On montre alors que le produit des battages munit, sous certaines conditions sur le tressage et l'algèbre, le complexe de Hochschild d'une algèbre, d'une structure tordue d'algèbre différentielle graduée. Afin d'obtenir ces résultats, on compose, à gauche et à droite, le morphisme $\text{Id} \otimes g$ par des morphismes de complexes. Dans cette partie, on suppose que σ vérifie (3.3), (3.4), (3.1) et (3.2) et qu'il est inversible d'inverse σ^{-1} . L'espace $A \otimes A$ (respectivement $(\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_n$) est muni de la structure d'algèbre (respectivement $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule) induite par σ^{-1} . L'espace $\text{Bar}_n(A \otimes A, A \otimes A)$ est muni de la structure de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule de la résolution Bar .

3.2.1 Résolution Bar de $A \otimes_{\sigma'} A$

On veut construire un morphisme de complexes

$$\bigoplus_{p+q=n} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) \longrightarrow M \tilde{\otimes} \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A).$$

Pour cela on définit un morphisme de complexes entre $\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A)$ et $\text{Bar}(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A)$ qui est compatible avec les structures de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule de ces espaces.

Supposons que σ vérifie l'équation des tresses $\sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Soit T_σ la représentation du groupe des tresses B_n dans $A^{\otimes n}$ associée à σ .

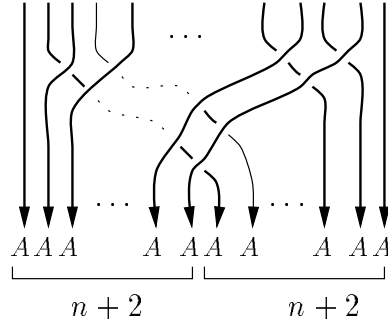
Pour $1 \leq q < p \leq n$, on note $\nu_{p,q}$ la permutation définie par $\nu_{p,q} = \nu_q \dots \nu_{p-1}$ avec ν_i la permutation qui échange $(i, i+1)$. On note $T_{p,q} = T_\sigma(\nu_{p,q})$. On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application linéaire

$$\psi_n : (\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_n \longrightarrow \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A),$$

par $\psi_n(\omega \otimes \omega') = \sigma_{2n+2} \circ T_{2n+2,2n} \circ T_{2n+1,2(n-1)} \circ \dots \circ T_{n+4,4} \circ T_{n+3,2}(\omega \otimes \omega')$.

On a donc $\psi_n = \sigma_{2n+2} \circ (\sigma_{2n} \sigma_{2n+1}) \circ \dots \circ (\sigma_4 \dots \sigma_{n+3}) \circ (\sigma_2 \dots \sigma_{n+2})$.

Le morphisme ψ_n est représenté par :



Remarque : En particulier lorsque σ est le flip qui envoie $a \otimes b$ sur $b \otimes a$, on a :

$$\psi_n(a[a^1 \mid \dots \mid a^n]a' \otimes b[b^1 \mid \dots \mid b^n]b') = a \otimes b[a^1 \otimes b^1 \mid \dots \mid a^n \otimes b^n]a' \otimes b'.$$

On note δ^{\otimes} la différentielle du complexe $\text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A)$.

Proposition 3.3 Pour tout n , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_n & \xrightarrow{\psi_n} & \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \delta^{\otimes} \\ (\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_{n-1} & \xrightarrow{\psi_{n-1}} & \text{Bar}_{n-1}(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \end{array}$$

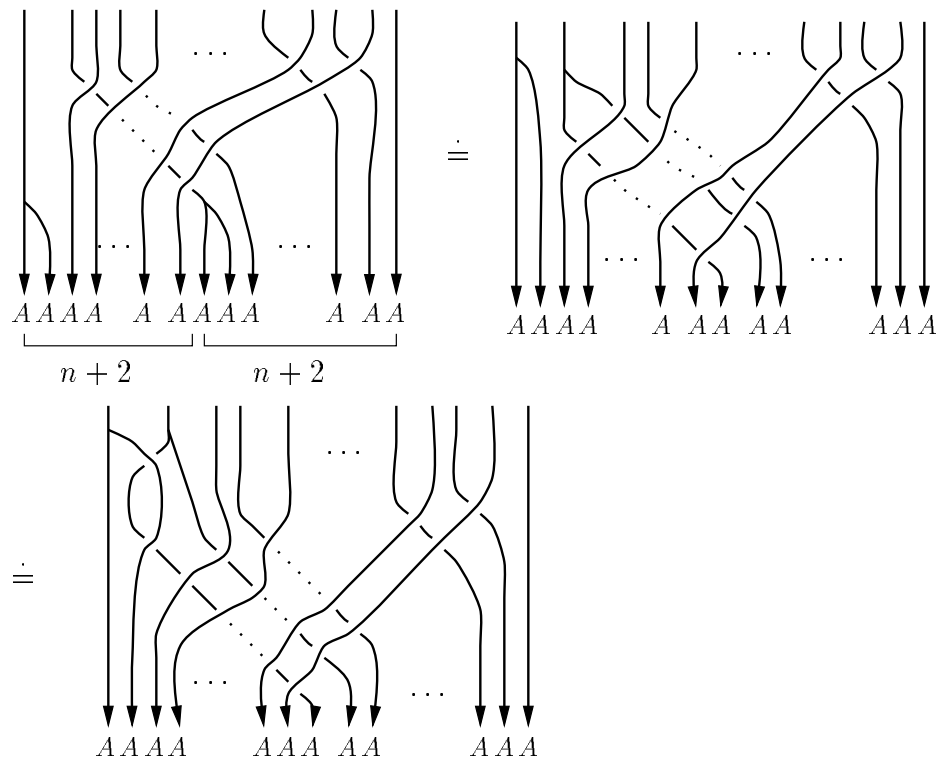
Preuve : Les différentielles proviennent de la structure d'objet simplicial. Pour démontrer la proposition, il suffit donc de montrer que pour tous $n, i \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq i \leq n$, on a :

$$\psi_{n-1} \circ (d_i^n \otimes d_i^n) = (\text{Id}^{\otimes 2i} \otimes m_{\sigma'} \otimes \text{Id}^{\otimes 2n-2i}) \circ \psi_n.$$

Pour d_0^n , on doit vérifier que :

$$\psi_{n-1} \circ (d_0^n \otimes d_0^n) = (m_{\sigma'} \otimes \text{Id}^{\otimes 2n}) \circ \psi_n.$$

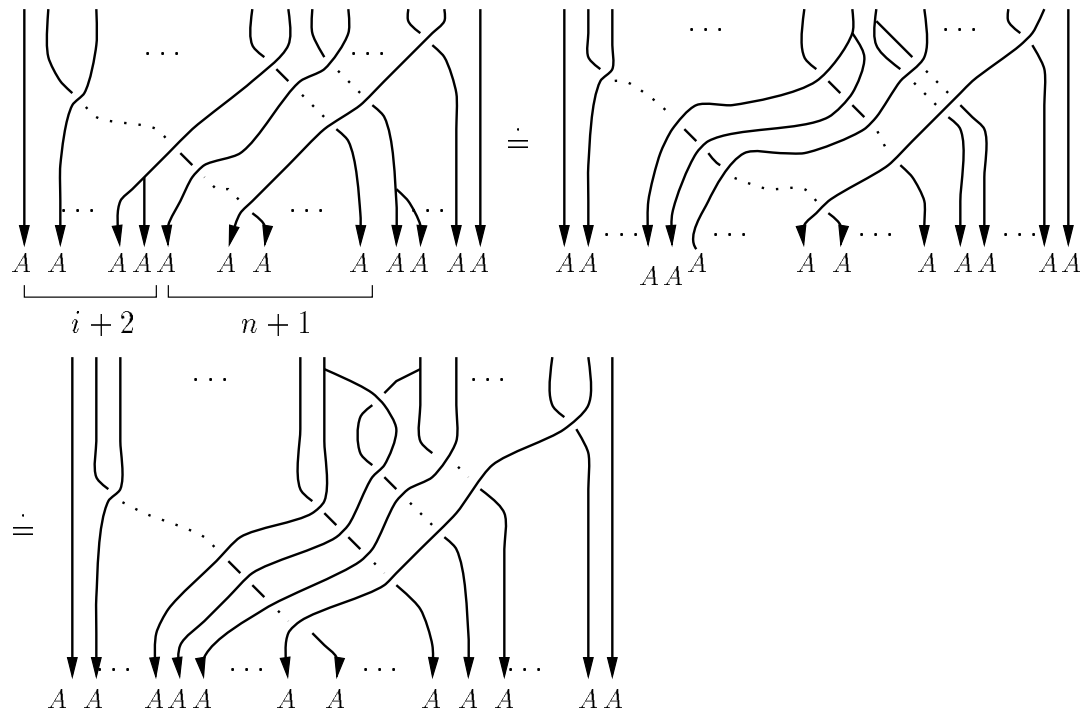
Or :



Pour le cas $1 \leq i \leq n - 1$, on doit montrer que

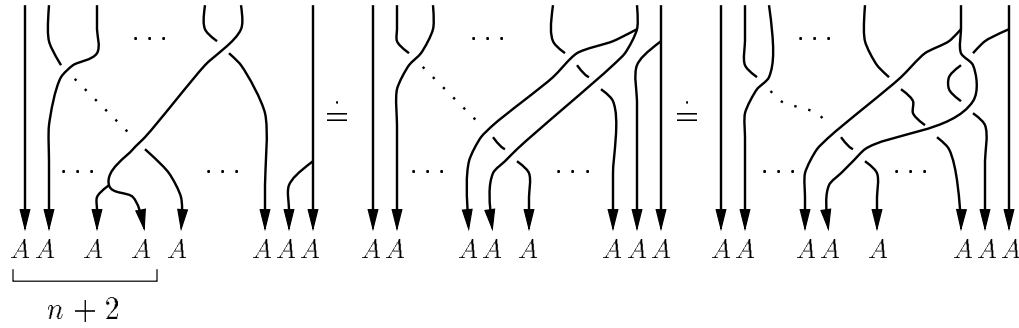
$$\psi_{n-1} \circ (d_i^n \otimes d_i^n) = (\text{Id}^{\otimes 2i} \otimes m_{\sigma'} \otimes \text{Id}^{\otimes 2n-2i}) \circ \psi_n.$$

Or :



Pour $i = n$, on doit avoir $\psi_{n-1} \circ (d_n^n \otimes d_n^n) = (\text{Id}^{\otimes 2n} \otimes m_{\sigma'}) \circ \psi_n$.

Or :



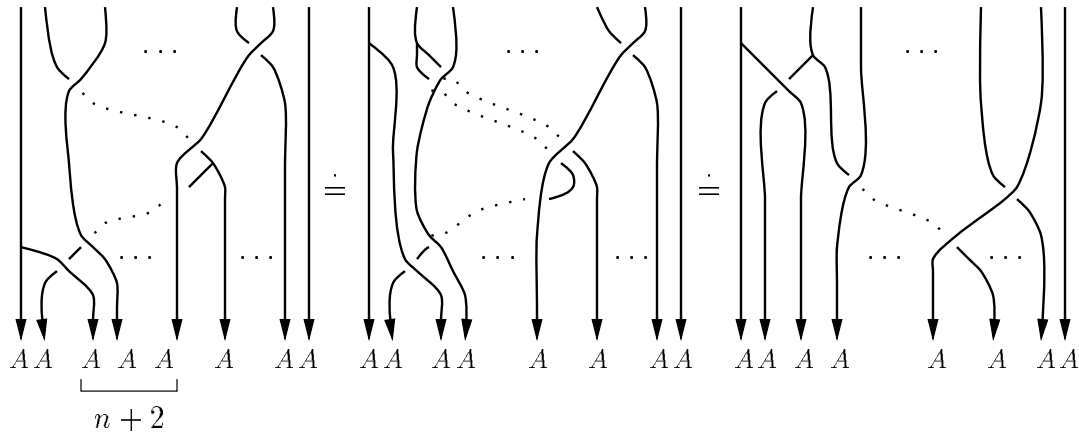
□

Proposition 3.4 *Le morphisme ψ_n est un morphisme de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodules.*

Preuve : Pour que ψ_n soit un morphisme de $A \otimes_{\sigma'} A$ -modules à gauche, on doit avoir :

$$\psi_n \circ \varphi_L = \varphi_L \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \psi_n).$$

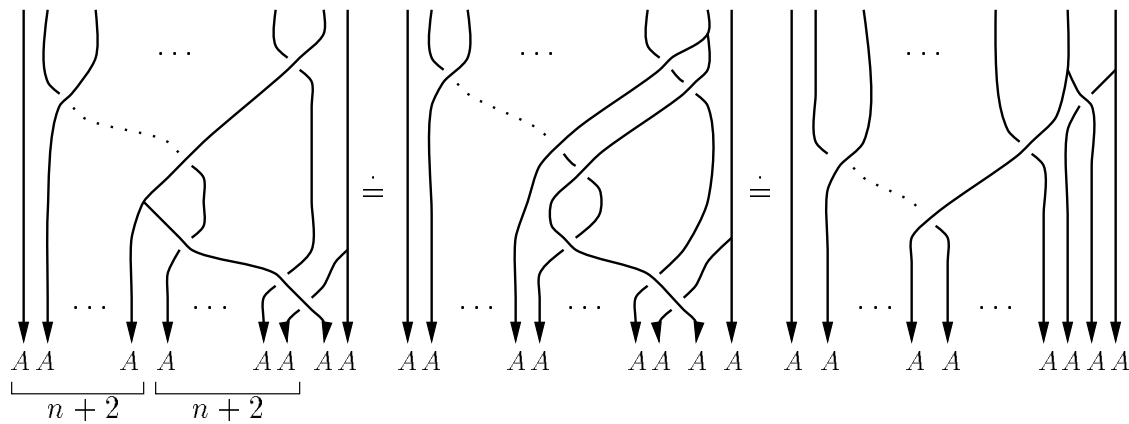
Or :



Pour que ψ_n soit un morphisme de $A \otimes_{\sigma'} A$ -modules à droite, on doit avoir :

$$\psi_n \circ \varphi_R = \varphi_R \circ (\psi_n \otimes \text{Id}^{\otimes 2}).$$

Or :



La proposition est donc démontrée. \square

Définition 3.1 Soient A une algèbre et $\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ une application linéaire inversible vérifiant l'équation des tresses et les équations (3.3), (3.4), (3.1) et (3.2). Une telle algèbre est appelée algèbre σ -tressée.

Soit M un $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule. On déduit des deux propositions précédentes le théorème :

Théorème 3.2 Si A est une algèbre σ -tressée, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_n & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \psi_n} & M \tilde{\otimes} \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \\ \text{Id} \otimes \partial_n \downarrow & & \text{Id} \otimes \delta_n^\otimes \downarrow \\ M \tilde{\otimes} (\text{Bar}(A, A) \times \text{Bar}(A, A))_{n-1} & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \psi_{n-1}} & M \tilde{\otimes} \text{Bar}_{n-1}(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \end{array}$$

On note encore $\tilde{\otimes}$ le produit tensoriel $\otimes_{A \otimes_{\sigma'} A - A \otimes_{\sigma'} A}$. En composant avec l'application des tressages g , on obtient, grâce aux théorèmes précédents :

Corollaire 3.2 Si A est une algèbre σ -tressée, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes (\psi \circ g)} & M \tilde{\otimes} \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \\ \text{Id} \otimes D_n \downarrow & & \text{Id} \otimes \delta_n^\otimes \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=n-1} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes (\psi \circ g)} & M \tilde{\otimes} \text{Bar}_{n-1}(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \end{array}$$

3.2.2 Produit de l'algèbre des battages

Dans cette partie on étend à droite et à gauche le diagramme du corollaire précédent par des morphismes de complexes. On établit ainsi une factorisation du produit des battages quantiques. On rappelle que ce produit est défini pour V un espace vectoriel muni d'une application linéaire $\sigma : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ vérifiant l'équation des tresses. Alors l'espace tensoriel $T(V)$ est une algèbre avec le produit des battages quantiques φ_σ défini pour $v^1 \otimes \cdots \otimes v^p \in T(V)$ et $w^1 \otimes \cdots \otimes w^q \in T(V)$ par :

$$\varphi_\sigma(v^1 \otimes \cdots \otimes v^p \otimes w^1 \otimes \cdots \otimes w^q) = \sum_{\nu \in S_{p,p+q}} (-1)^{|\nu|} T_\sigma(\nu)(v^1 \otimes \cdots \otimes v^p \otimes w^1 \otimes \cdots \otimes w^q).$$

Remarque : M. Rosso a prouvé que cette somme sans le signe est associative (Cf [Ros98]). Comme le signe d'une permutation est un morphisme de groupe, on en déduit que φ_σ est encore associatif.

Soient A une algèbre σ -tressée et M un $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule.

Structure de complexe de $\bigoplus_{p+q=n} M \otimes A^p \otimes A^q$

On va étendre le diagramme précédent à gauche, grâce à un isomorphisme entre $M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A))$ et $M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$.

Soient $a[a^1 | \dots | a^p]a' \in \text{Bar}_p(A, A)$, et $b[b^1 | \dots | b^q]b' \in \text{Bar}_q(A, A)$. Si on pose :

$$\begin{aligned} & \sigma_{p+q+1} \dots \sigma_{p+2} \sigma_1 \dots \sigma_{p+1} (a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes a' \otimes b \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) \\ &= \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \dots \otimes w_i^p \otimes \tau_i^1 \otimes \dots \otimes \tau_i^q \otimes \tau_i, \end{aligned}$$

alors, par définition de la structure de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule de $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$, on a :

$$a[a^1 | \dots | a^p]a' \otimes b[b^1 | \dots | b^q]b' = \sum_i (a \otimes w_i) \cdot (1[w_i^1 | \dots | w_i^p]1 \otimes 1[\tau_i^1 | \dots | \tau_i^q]1) \cdot (\tau_i \otimes b').$$

On a ainsi l'isomorphisme d'espaces vectoriels Ω défini par :

$$\Omega : M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) \longrightarrow M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q},$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha \otimes a[a^1 | \dots | a^n]a' \otimes b[b^1 | \dots | b^n]b') \\ = \sum_i (\tau_i \otimes b') \cdot \alpha \cdot (a \otimes w_i) \otimes w_i^1 \otimes \dots \otimes w_i^p \otimes \tau_i^1 \otimes \dots \otimes \tau_i^q. \end{aligned}$$

L'inverse est donné par l'inclusion de $A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$ dans $\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$.

En transportant la différentielle de $\bigoplus_{p+q=n} M \otimes \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)$ par l'isomorphisme Ω , on munit $\bigoplus_{p+q=n} M \otimes A^p \otimes A^q$ d'une différentielle ρ , qui en fait un complexe.

Par construction le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\Omega^{-1}} & \bigoplus_{p+q=n} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) \\ \rho_n \downarrow & & \text{Id} \otimes D_n \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=n-1} M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\Omega^{-1}} & \bigoplus_{p+q=n-1} M \tilde{\otimes} (\text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A)) \end{array}$$

La différentielle ρ est donnée par : $\rho_n = \sum_{p+q=n} \rho_{p,q}$ où

$$\rho_{p,q} : M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} \longrightarrow [M \otimes A^{\otimes p-1} \otimes A^{\otimes q}] \oplus [M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q-1}],$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_{p,q}(\alpha \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) &= \\ &= \alpha \cdot (a^1 \otimes 1_A) \otimes a^2 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q \\ &+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q \\ &+ (-1)^p \sum_i (\tau_i \otimes 1_A) \cdot \alpha \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^{p-1} \otimes \tau_i^1 \otimes \dots \otimes \tau_i^q \\ &+ (-1)^p \sum_i \alpha \cdot (1_A \otimes w_i) \otimes w_i^1 \otimes \dots \otimes w_i^p \otimes b^2 \otimes \dots \otimes b^q \\ &+ \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+p} \alpha \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^i b^{i+1} \otimes \dots \otimes b^q \\ &+ (-1)^{p+q} (1_A \otimes b^q) \cdot \alpha \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^{q-1}, \end{aligned}$$

où on a noté :

$$\begin{aligned}\sigma_q \dots \sigma_1(a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) &= \sum_i \tau_i^1 \otimes \dots \otimes \tau_i^q \otimes \tau_i, \\ \sigma_1 \dots \sigma_p(a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1) &= \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \dots \otimes w_i^p.\end{aligned}$$

Factorisation du produit des battages

On a l'isomorphisme d'espaces vectoriels induit par la construction Bar :

$$\Gamma : M \tilde{\otimes} \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \simeq M \otimes (A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n}.$$

Il est facile de vérifier la proposition suivante :

Proposition 3.5 *L'isomorphisme précédent est un isomorphisme de complexes, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} M \tilde{\otimes} \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) & \xrightarrow{\Gamma_n} & M \otimes (A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n} \\ \text{Id} \otimes \delta_n^{\otimes} \downarrow & & \delta_n^{\prime \otimes} \downarrow \\ M \tilde{\otimes} \text{Bar}_{n-1}(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) & \xrightarrow{\Gamma_n} & M \otimes (A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n-1} \end{array}$$

Si on pose $\Theta = \Gamma \circ (\text{Id} \otimes \psi) \circ (\text{Id} \otimes g) \circ \Omega^{-1}$, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3 *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\Theta} & M \otimes (A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n} \\ \rho_n \downarrow & & \delta_n^{\prime \otimes} \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=n-1} M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\Theta} & M \otimes (A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n-1} \end{array}$$

On note $m^{\otimes n}$ le produit de A tensorisé n fois.

Pour $p + q = n$, et $\nu \in S_{p,n}$, on pose :

$$g_\nu = s_{\nu(n)-1} \dots s_{\nu(p+1)-1} \otimes s_{\nu(p)-1} \dots s_{\nu(1)-1}.$$

Alors $g = \sum_{\nu \in S_{p,n}} (-1)^{|\nu|} g_\nu$.

Par définition, s_i place l'élément 1_A à la $(i+2)$ ème position. Soit s'_i le morphisme de $A^{\otimes p}$ dans $A^{\otimes p+1}$ qui place 1_A à la $(i+1)$ ème position, on a alors $s_i = \text{Id} \otimes s'_i \otimes \text{Id}$. Par abus de notation s'_i est noté s_i . On peut voir de la même manière g_ν comme un morphisme de $A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$ dans $A^{\otimes n} \otimes A^{\otimes n}$. De plus, pour $w, w' \in A^{\otimes n}$, on a :

$$\psi_n(1_A[w]1_A \otimes 1_A[w']1_A) = 1_A \otimes 1_A[\psi_{n-2}(w \otimes w')]1_A \otimes 1_A.$$

Donc, dans ce cas, ψ_n peut être vu comme un morphisme $A^{\otimes 2n}$ dans lui-même.

Avec ces conventions, on peut écrire le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 2$, $0 \leq p \leq n$, et $\nu \in S_{p,n}$ on a :*

$$T_\sigma(\nu) = m^{\otimes n} \circ \psi_n \circ g_\nu. \quad (3.5)$$

Preuve : Pour n fixé, si $p = 0$ ou $p = n$, on voit facilement que l'égalité est vérifiée.

On va prouver par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $1 \leq p \leq n - 1$ et $\nu \in S_{p,n}$, l'égalité (3.5) est vérifiée.

Pour $n = 2$ et $p = 1$, $S_{1,2}$ a deux éléments : Id et ν_1 . Dans le cas Id, pour $a, b \in A$, on a :

$$\begin{aligned} m^{\otimes n} \circ \psi \circ g_{\text{Id}}(a \otimes b) &= (m^{\otimes n} \circ \psi)((a \otimes 1_A) \otimes (1_A \otimes b)) \\ &= a \otimes b = T_\sigma(\text{Id})(a \otimes b) \end{aligned}$$

Pour ν_1 :

$$\begin{aligned} m^{\otimes n} \circ \psi \circ g_{\nu_1}(a \otimes b) &= m^{\otimes n} \circ \psi((1_A \otimes a) \otimes (b \otimes 1_A)) \\ &= \sigma(a \otimes b) =_{\nu_1} (a \otimes b) \end{aligned}$$

Le théorème est donc vrai pour $n = 2$.

On suppose qu'il est vrai pour $n - 1$. Montrons par récurrence qu'il est vrai pour n .

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n - 1$, $p + q = n$ et $\nu \in S_{p,n}$. Il y a deux cas : $\nu(1) = 1$, ou $\nu(p+1) = 1$.

Supposons que $\nu(1) = 1$. Définissons alors $\nu' \in S_{p-1, n-1}$ par $\nu'(i) = \nu(i+1) - 1$.

On a alors pour $a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q \in A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$:

$$T_\sigma(\nu)(a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) = a^1 \otimes T_\sigma(\nu')((a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q)).$$

De plus :

$$\begin{aligned} g_\nu((a^1 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q)) &= s_{\nu(n)-1} \dots s_{\nu(p+1)-1}(a^1 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes s_{\nu(p)-1} \dots s_{\nu(2)-1}(1_A \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) \\ &= a^1 \otimes s_{\nu(n)-2} \dots s_{\nu(p+1)-2}(a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes 1_A \otimes s_{\nu(p)-2} \dots s_{\nu(2)-2}(b^1 \otimes \dots \otimes b^q) \\ &= a^1 \otimes s_{\nu'(n-1)-1} \dots s_{\nu'(p)-1}(a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes 1_A \otimes s_{\nu'(p-1)-1} \dots s_{\nu'(1)-1}(b^1 \otimes \dots \otimes b^q) \end{aligned}$$

Donc par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} m^{\otimes n} \circ \psi \circ g_\nu((a^1 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q)) &= a^1 \otimes (m^{\otimes n-1} \circ \psi \circ g_{\nu'}((a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q))) \\ &= a^1 \otimes T_\sigma(\nu')((a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q)) \end{aligned}$$

Dans le cas où $\nu(p+1) = 1$, on définit $\nu' \in S_{p, n-1}$ par

$$\begin{cases} \nu'(i) = \nu(i) - 1 & 1 \leq i \leq p, \\ \nu'(i) = \nu(i+1) - 1 & p+1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Pour $(a^1 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q) \in A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$, on pose :

$$\sigma_1 \dots \sigma_p(a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1) = \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \dots \otimes w_i^p.$$

Avec cette notation, on a :

$$T_\sigma(\nu)((a^1 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q)) = \sum_i w_i \otimes T_\sigma(\nu')((w_i^1 \otimes \dots \otimes w_i^p) \otimes (b^2 \otimes \dots \otimes b^q)).$$

De plus :

$$\begin{aligned} & g_\nu((a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) \\ &= 1_A \otimes s_{\nu(n)-2} \cdots s_{\nu(p+2)-2}(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes b^1 \otimes s_{\nu(p)-2} \cdots s_{\nu(1)-2}(b^2 \otimes \cdots \otimes b^q) \\ &= 1_A \otimes s_{\nu'(n-1)-1} \cdots s_{\nu'(p+1)-1}(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes b^1 \otimes s_{\nu'(p)-1} \cdots s_{\nu'(1)-1}(b^2 \otimes \cdots \otimes b^q) \end{aligned}$$

D'où, par (3.1) et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & m^{\otimes n} \circ \psi \circ g_\nu((a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) \\ &= \sum_i w_i \otimes (m^{\otimes n-1} \circ \psi g_{\nu'}((w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p) \otimes (b^2 \otimes \cdots \otimes b^q))) \\ &= \sum_i w_i \otimes T_\sigma(\nu')((w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p) \otimes (b^2 \otimes \cdots \otimes b^q)) \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré par récurrence. \square

Soit $\alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q \in M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$, on a :

$$\Omega^{-1}(\alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) = \alpha \otimes 1_A[a^1 \mid \cdots \mid a^p]1_A \otimes 1_A[b^1 \mid \cdots \mid b^q]1_A.$$

De plus, par définition de ψ et de g , l'image de $1_A[a^1 \mid \cdots \mid a^p]1_A \otimes 1_A[b^1 \mid \cdots \mid b^q]1_A$ par $\psi \circ g$ est de la forme $\sum_i (1_A \otimes 1_A)[c_i^1 \otimes d_i^1 \mid \cdots \mid c_i^{p+q} \otimes d_i^{p+q}](1_A \otimes 1_A)$.
L'image par Θ de $\alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q$ est donc de la forme :

$$\sum_i \alpha \otimes (c_i^1 \otimes d_i^1) \otimes \cdots \otimes (c_i^{p+q} \otimes d_i^{p+q}).$$

Le morphisme Θ est donc l'identité sur M ; il existe alors un morphisme

$$\Theta'_n : \bigoplus_{p+q=n} A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} \rightarrow (A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n},$$

tel que : $\Theta = \text{Id} \otimes \Theta'$.

Corollaire 3.4 *Si on note φ_σ le produit de l'algèbre de battages, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :*

$$m^{\otimes n} \circ \Theta'_n = \varphi_\sigma.$$

Preuve : Le produit φ_σ est défini par :

$$\varphi_\sigma(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) = \sum_{\nu \in S_{p,p+q}} (-1)^{|\nu|} T_\sigma(\nu)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q).$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, le corollaire est évident.

Le cas $n \geq 2$ résulte du théorème précédent. \square

3.2.3 Produit tensoriel tordu de complexes de Hochschild

On va montrer qu'en tordant la différentielle du carré tensoriel d'un complexes de Hochschild d'une algèbre tressée σ -commutative, i.e. commutative pour ce tressage, le produit des battages quantiques munit ce complexe d'une structure d'algèbre différentielle graduée.

Soient M un A -bimodule, $\sigma_M : A \otimes M \rightarrow M \otimes A$ et $\sigma'_M : M \otimes A \rightarrow A \otimes M$ des morphismes d'espaces vectoriels. On note φ_L et φ_R les produits à gauche et à droite de M .

Définissons les morphismes d'espaces vectoriels $\varphi'_L : (A \otimes_{\sigma'} A) \otimes M \otimes M \rightarrow M \otimes M$ et $\varphi'_R : M \otimes M \otimes (A \otimes_{\sigma'} A) \rightarrow M \otimes M$ par :

$$\begin{aligned}\varphi'_L &= (\varphi_L \otimes \varphi_L)(\text{Id} \otimes \sigma_M \otimes \text{Id}), \\ \varphi'_R &= (\varphi_R \otimes \varphi_R)(\text{Id} \otimes \sigma'_M \otimes \text{Id}).\end{aligned}$$

Déterminons les conditions sur σ_M et σ'_M pour que $M \otimes M$ soit un $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule. Pour cela il faut que :

$$\varphi'_L \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \varphi'_L) = \varphi'_L \circ (m_{\sigma'} \otimes \text{Id}^{\otimes 2}).$$

Or, ceci est équivalent à l'égalité :

$$(\text{Id} \otimes \varphi_L)(\sigma_M)_1(\text{Id} \otimes \varphi_L \otimes \varphi_L)(\sigma_M)_3 = (\varphi_L \otimes \varphi_L)(\sigma_M)_2(\text{Id} \otimes m \otimes \text{Id}^{\otimes 2})\sigma_1^{-1}. \quad (3.6)$$

On doit aussi avoir pour $v \in M$:

$$\sigma_M(1_A \otimes v) = v \otimes 1_A. \quad (3.7)$$

Pour la structure de module à droite, il faut que :

$$\varphi'_R \circ (\varphi'_R \otimes \text{Id}^{\otimes 2}) = \varphi'_R \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes m_{\sigma'}).$$

Or ceci est équivalent à l'égalité :

$$(\varphi_R \otimes \text{Id})(\sigma'_M)_2(\varphi_R \otimes \varphi_R \otimes \text{Id})(\sigma'_M)_2 = (\varphi_R \otimes \varphi_R)(\sigma'_M)_2(\text{Id}^{\otimes 2} \otimes m \otimes \text{Id})\sigma_4^{-1}. \quad (3.8)$$

On doit aussi avoir pour $v \in M$:

$$\sigma'_M(v \otimes 1_A) = 1_A \otimes v. \quad (3.9)$$

Pour la structure de bimodule, il faut que :

$$\varphi'_R \circ (\varphi'_L \otimes \text{Id}^{\otimes 2}) = \varphi'_L \circ (\text{Id}^{\otimes 2} \otimes \varphi'_R).$$

Or ceci est équivalent à :

$$(\varphi_R \otimes \text{Id})(\sigma'_M)_2(\text{Id} \otimes \varphi_L \otimes \text{Id})(\sigma_M)_1 = (\text{Id} \otimes \varphi_L)(\sigma_M)_1(\text{Id} \otimes \varphi_R \otimes \text{Id})(\sigma'_M)_3. \quad (3.10)$$

On a donc montré le lemme :

Lemme 3.4 *Soient A une algèbre σ -tressée, M un A -bimodule muni de morphisme $\sigma_M : A \otimes M \rightarrow M \otimes A$ et $\sigma'_M : M \otimes A \rightarrow A \otimes M$ vérifiant (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10). Alors $M \otimes M$ muni de φ'_L et de φ'_R est un $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule.*

Exemple : Soit A une algèbre σ -tressée. Le A -bimodule A trivial muni des morphismes $\sigma_A = \sigma^{-1}$ et $\sigma'_A = \sigma^{-1}$ vérifie clairement les relations (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10).

Si M est une algèbre de produit μ , considérons :

$$\mu \otimes m^{\otimes n} : M \otimes M \otimes (A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n} \longrightarrow M \otimes A^{\otimes n},$$

et cherchons à quelles conditions $\mu \otimes m^{\otimes n}$ est un morphisme de complexes. Il faut et il suffit que :

$$\delta'_n \circ \mu \otimes m^{\otimes n} = \mu \otimes m^{\otimes n-1} \circ \delta'_n{}^{\otimes}.$$

Or, pour $\alpha \otimes \beta \otimes (a^1 \otimes b^1) \otimes \cdots \otimes (a^n \otimes b^n) \in M \otimes M \otimes (A \otimes A)^{\otimes n}$, on a :

$$\begin{aligned} & \mu \otimes m^{\otimes n-1} \circ \delta'_n{}^{\otimes}(\alpha \otimes \beta \otimes (a^1 \otimes b^1) \otimes \cdots \otimes (a^n \otimes b^n)) = \\ & = \mu((\alpha \otimes \beta), (a^1 \otimes b^1)) \otimes (a^2 b^2) \otimes \cdots \otimes (a^n b^n) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (\alpha \beta) \otimes (a^1 b^1) \otimes \cdots \otimes m(m_{\sigma'}((a^i \otimes b^i) \otimes (a^{i+1} \otimes b^{i+1}))) \otimes \cdots \otimes (a^n b^n) \\ & \quad + (-1)^n \mu((a^n \otimes b^n), (\alpha \otimes \beta)) \otimes (a^1 b^1) \otimes \cdots \otimes (a^{n-1} b^{n-1}), \\ \delta'_n \circ \mu \otimes m^{\otimes n} & = (\alpha \beta), (a^1 b^1) \otimes a^2 b^2 \otimes \cdots \otimes a^n b^n \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \alpha \beta \otimes a^1 b^1 \otimes \cdots \otimes (a^i b^i), (a^{i+1} b^{i+1}) \otimes \cdots \otimes a^n b^n \\ & \quad + (-1)^n (a^n b^n), (\alpha \beta) \otimes a^1 b^1 \otimes \cdots \otimes a^{n-1} b^{n-1}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire qu'il faut que pour $a, b, c, d \in A$ et $\alpha, \beta \in M$:

$$\begin{aligned} m((a \otimes b), (c \otimes d)) &= m(ac \otimes bd), \\ \mu((a \otimes b), (\alpha \otimes \beta)) &= (ab), (\alpha \beta), \\ \mu((\alpha \otimes \beta), (a \otimes b)) &= (\alpha \beta), (ab). \end{aligned}$$

Ceci équivaut à :

$$m \circ \sigma^{-1} = m, \quad (3.11)$$

$$\mu \circ \varphi'_L = \varphi_L \circ (m \otimes \mu), \quad (3.12)$$

$$\mu \circ \varphi'_R = \varphi_R \circ (\mu \otimes m). \quad (3.13)$$

Remarque : Une algèbre σ -tressée qui vérifie en plus (3.11) est dite algèbre tressée σ -commutative.

Des théorèmes précédents, on déduit le théorème :

Théorème 3.4 Soient A une algèbre tressée σ -commutative, M une algèbre munie d'une structure de A -bimodule et de morphisme $\sigma_M : A \otimes M \rightarrow M \otimes A$ et $\sigma'_M : M \otimes A \rightarrow A \otimes M$ vérifiant (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.12) et (3.13). Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} (M \otimes M) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\mu \otimes \varphi_{\sigma}} & M \otimes A^{\otimes n} \\ \rho_n \downarrow & & \delta'_n \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=n-1} (M \otimes M \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}) & \xrightarrow{\mu \otimes \varphi_{\sigma}} & M \otimes A^{\otimes n-1} \end{array}$$

Si σ_M est inversible, on a alors pour tous p, q un isomorphisme Π :

$$\Pi : (M \otimes A^{\otimes p}) \otimes (M \otimes A^{\otimes q}) \longrightarrow (M \otimes M) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q},$$

où $\Pi = (\sigma_M)_{p+1} \dots (\sigma_M)_2$.

Via cet isomorphisme on transporte la différentielle ρ de $\bigoplus_{p+q=,} (M \otimes M) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$ en une différentielle Δ sur le complexe $\bigoplus_{p+q=,} (M \otimes A^{\otimes p}) \otimes (M \otimes A^{\otimes q})$. On définit le produit tensoriel tordu du complexe de Hochschild par :

Définition 3.2 Soient A une algèbre tressée σ -commutative, M un A -bimodule, $\sigma_M : A \otimes M \rightarrow M \otimes A$ un morphisme bijectif tel que σ_M vérifie (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.12) et (3.13) (en posant $\sigma'_M = \sigma_M^{-1}$). On définit le produit tensoriel tressé tordu du complexe de Hochschild de A à coefficient dans M par le complexe suivant :

$$\left(\bigoplus_{p+q=,} (M \otimes A^{\otimes p}) \otimes (M \otimes A^{\otimes q}), \Delta, \right).$$

Alors, en définissant le produit des battages quantiques de $M \otimes T(A)$ par $\Pi \circ (\mu \otimes \varphi_\sigma)$, on a le corollaire :

Corollaire 3.5 Avec le produit tensoriel tordu de complexes, et le produit donné par le produit des battages quantiques de $M \otimes T(A)$, le complexe de Hochschild $(M \otimes A^{\otimes}, \delta')$ est une algèbre différentielle graduée.

Preuve : Par construction le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} [(M \otimes A^{\otimes p}) \otimes_\sigma (M \otimes A^{\otimes q})]_n & \xrightarrow{\Pi \circ (\mu \otimes \varphi_\sigma)} & M \otimes A^{\otimes n} \\ \Delta_n \downarrow & & \delta'_n \downarrow \\ [(M \otimes A^{\otimes p}) \otimes_\sigma (M \otimes A^{\otimes q})]_{n-1} & \xrightarrow{\Pi \circ (\mu \otimes \varphi_\sigma)} & M \otimes A^{\otimes n-1} \end{array}$$

D'où le corollaire. □

3.3 Application

On donne des exemples d'applications du corollaire précédent. On l'applique d'abord pour définir le produit tensoriel de l'homologie de Hochschild d'une algèbre tressée σ -commutative. En particulier pour le tressage donné par le flip τ , on retrouve l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative. On montre ensuite une identité du type Hochschild-Serre pour les algèbres tressées σ -commutatives.

3.3.1 Produit tensoriel de l'homologie de Hochschild d'une algèbre

Soit A une algèbre tressée σ -commutative.

On considère $M = A$. Dans ce cas la structure de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule de $A \otimes A$ est celle donnée par la structure d'algèbre. Les conditions (3.12) et (3.13) sont clairement vérifiées; on peut donc écrire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} (A \otimes A) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{m \otimes \varphi_{\sigma}} & A \otimes A^{\otimes n} \\ \rho_n \downarrow & & \delta'_n \downarrow \\ \bigoplus_{p+q=n-1} (A \otimes A) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{m \otimes \varphi_{\sigma}} & A \otimes A^{\otimes n-1} \end{array}$$

La différentielle ρ est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho_{p,q}((\alpha \otimes \beta) \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) = & \\ = (\alpha \otimes \beta) \cdot (a^1 \otimes 1_A) \otimes a^2 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q & \\ + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i (\alpha \otimes \beta) \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q & \\ (-1)^p \sum_i (\tau_i \cdot \alpha \otimes \beta) \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p-1} \otimes \tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^q & \\ + (-1)^p \sum_i (\alpha \otimes \beta \cdot w_i) \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p \otimes b^2 \otimes \cdots \otimes b^q & \\ + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+p} (\alpha \otimes \beta) \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^i b^{i+1} \otimes \cdots \otimes b^q & \\ + (-1)^{p+q} (1_A \otimes b^q) \cdot (\alpha \otimes \beta) \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q-1}, & \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_q \dots \sigma_1 (a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) &= \sum_i \tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^q \otimes \tau_i, \\ \sigma_1 \dots \sigma_p (a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1) &= \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p. \end{aligned}$$

Or comme σ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a pour tout p l'isomorphisme :

$$\sigma_1 \dots \sigma_p : A^{\otimes p} \otimes A \longrightarrow A \otimes A^{\otimes p}.$$

En utilisant les représentations en diagrammes des $p + q + 2$ morphismes composant $\rho_{p,q}$ et la représentation de l'isomorphisme $\sigma_1 \dots \sigma_p$ on montre que via cet isomorphisme, la différentielle ρ devient :

$$\begin{aligned} \rho_{p,q}((\alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (\beta \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) = & \\ = (\alpha \cdot a^1 \otimes a^2 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (\beta \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) & \\ + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i (\alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (\beta \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) & \\ + (-1)^p \sum_i (\tau_i \cdot \alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p-1}) \otimes (\tau_i^1 \otimes \tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^q) & \\ + (-1)^p (\alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (\beta \cdot b^1 \otimes b^2 \otimes \cdots \otimes b^q) & \\ + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+p} (\alpha \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (\beta \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^i b^{i+1} \otimes \cdots \otimes b^q) & \\ + (-1)^{p+q} \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p \otimes w_i^1 \cdot \beta \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q-1}, & \end{aligned}$$

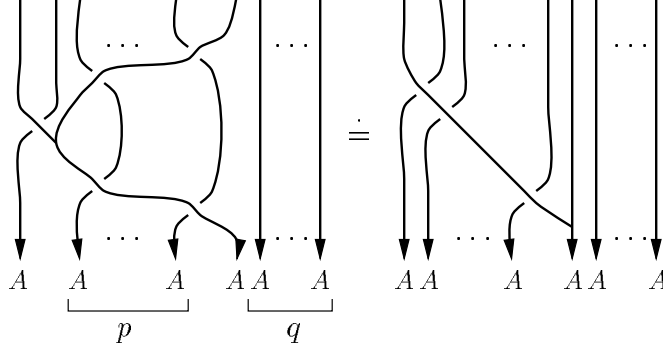
avec

$$\begin{aligned} \sigma_{q+1} \dots \sigma_1 (a^p \otimes \beta \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) &= \sum_i \tau'_i \otimes \tau_i^1 \otimes \dots \otimes \tau_i^q \otimes \tau_i, \\ \sigma_{p+1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} (b^q \otimes \alpha \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^p) &= \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \dots \otimes w_i^p \otimes w'_i. \end{aligned}$$

Preuve : Par exemple, le dernier terme de $\rho_{p,q}$ est défini par le morphisme

$$\begin{aligned} A \otimes (A \otimes A) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q-1} &\longrightarrow (A \otimes A) \otimes A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q-1} \\ b^q \otimes (\alpha \otimes \beta) \otimes W \otimes W' &\longmapsto (\text{Id} \otimes m) \sigma_1^{-1} (b^q \otimes \alpha \otimes \beta) \otimes W \otimes W'. \end{aligned}$$

Alors, le morphisme obtenu via l'isomorphisme précédent est représenté par :



C'est le morphisme

$$\begin{aligned} A \otimes A \otimes A^{\otimes p} \otimes A \otimes A^{\otimes q-1} &\longrightarrow A \otimes A^{\otimes p} \otimes A \otimes A^{\otimes q-1} \\ b^q \otimes (\alpha \otimes W) \otimes (\beta \otimes W') &\longmapsto \sum_i w_i \otimes W_i \otimes w'_i \otimes \beta \otimes W', \end{aligned}$$

où $\sigma_{p+1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} (b^q \otimes \alpha \otimes W) = \sum_i w_i \otimes W_i \otimes w'_i$. □

En définissant le produit tensoriel du complexe $(\mathcal{H}(A, A), \delta')$ par lui-même, par :

$$((A \otimes A^{\otimes}) \otimes_{\sigma} (A \otimes A^{\otimes}))_n = \bigoplus_{p+q=n} (A \otimes A^{\otimes p}) \otimes (A \otimes A^{\otimes q}),$$

avec la différentielle ρ .

On a le théorème suivant :

Théorème 3.5 *Soit A une algèbre tressée σ -commutative. Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} ((A \otimes A^{\otimes}) \otimes_{\sigma} (A \otimes A^{\otimes}))_n & \xrightarrow{\varphi'_\sigma} & A \otimes A^{\otimes n} \\ \rho \downarrow & & \delta'_n \downarrow \\ ((A \otimes A^{\otimes}) \otimes_{\sigma} (A \otimes A^{\otimes}))_{n-1} & \xrightarrow{\varphi'_\sigma} & A \otimes A^{\otimes n-1} \end{array}$$

où φ'_σ est le composé $(\text{Id} \otimes \sigma_1 \dots \sigma_p \otimes \text{Id}^{\otimes q}) \circ m \otimes \varphi_\sigma$.

Remarque : Dans le cas où $\sigma = \tau$, on retrouve le résultat classique (voir par exemple [Lod92],chap 4)

Corollaire 3.6 *Soit A une algèbre commutative. Le produit des battages induit sur l'homologie d'Hochschild de A , à coefficient dans A , une structure d'algèbre commutative graduée.*

3.3.2 Identité générale de Hochschild-Serre

Dans ([HJPOR84]) Habegger, Jones, Pino Ortiz et Ratcliffe réinterprètent le morphisme de l'identité générale de Hochschild et Serre ([HS53]) en terme de battages. En fait, ce morphisme est le dual du produit de battages. Grâce à cette observation, on va montrer une identité du type Hochschild-Serre pour les algèbres tressées σ -commutatives. En utilisant un tressage défini par Woronowicz [Wor91], on munit toute algèbre de Hopf d'une structure naturelle d'algèbre tressée σ -commutative. On étend ainsi l'identité générale d'Hochschild et Serre aux algèbres de Hopf. En particulier pour l'algèbre d'un groupe, on obtient exactement l'identité initiale.

Soient A une algèbre et M un A -bimodule. On note κ la différentielle définissant la cohomologie de Hochschild 1.7. On a alors l'identité du type Hochschild-Serre suivante

Théorème 3.6 *Soient A une algèbre tressée σ -commutative de dimension finie et M un A -bimodule. Alors il existe une différentielle ρ_n telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n-1}, M) & \xrightarrow{\Phi} & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, M)) \\ \kappa_n \downarrow & & \downarrow \rho_n \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M) & \xrightarrow{\Phi} & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, M)) \end{array}$$

où Φ est le transposé du produit des battages quantiques.

Preuve du théorème 3.6

La preuve est la preuve duale du théorème 3.4. On va donc montrer le théorème en mettant côte à côte des diagrammes commutatifs.

Soient V et W des $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodules. On note $\mathrm{Hom}_{\otimes}(V, W)$ l'espace des morphismes de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodules.

Notons κ_n^{\otimes} la différentielle définissant la cohomologie de Hochschild de $A \otimes_{\sigma'} A$ à valeurs dans M où M est muni de la structure de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule suivante :

$$\begin{aligned} (a \otimes b).n &= ab.n & \forall a \otimes b \in A \otimes A, \forall n \in M, \\ n.(a \otimes b) &= n.ab & \forall a \otimes b \in A \otimes A, \forall n \in M. \end{aligned}$$

Lemme 3.5 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}((A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n-1}, M) & \xrightarrow{{}^t(\psi \circ g) \circ \Gamma_{n-1}} & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}_{\otimes}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M) \\ \kappa_n^{\otimes} \downarrow & & \downarrow {}^t D_n \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}((A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n}, M) & \xrightarrow{{}^t(\psi \circ g) \circ \Gamma_n} & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\otimes}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M) \end{array}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Γ_n est l'isomorphisme d'espace vectoriel déduit de la structure de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodule de $\text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A)$

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}((A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n}, M) \simeq \text{Hom}_{\tilde{\otimes}}(\text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A), M).$$

Preuve : D'après le corollaire 3.2, le diagramme commutatif suivant est composé de morphismes de $A \otimes_{\sigma'} A$ -bimodules :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A) & \xrightarrow{\psi \circ g} & \text{Bar}_n(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \\ \downarrow D_n & & \downarrow \delta_n^{\otimes} \\ \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Bar}_p(A, A) \otimes \text{Bar}_q(A, A) & \xrightarrow{\psi \circ g} & \text{Bar}_{n-1}(A \otimes_{\sigma'} A, A \otimes_{\sigma'} A) \end{array}$$

Par définition de la cohomologie de Hochschild (1.7) et en dualisant le diagramme ci-dessus, on obtient le diagramme du lemme. \square

On note λ_n la transposée de $m^{\otimes n}$.

Lemme 3.6 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n-1}, M) & \xrightarrow{\lambda_{n-1}} & \text{Hom}_{\mathbb{K}}((A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n-1}, M) \\ \downarrow \kappa_n & & \downarrow \kappa_n^{\otimes} \\ \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M) & \xrightarrow{\lambda_n} & \text{Hom}_{\mathbb{K}}((A \otimes_{\sigma'} A)^{\otimes n}, M) \end{array}$$

Preuve : Pour $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n-1}, M)$ et $w = (a^1 \otimes b^1) \otimes \cdots \otimes (a^n \otimes b^n) \in (A \otimes A)^{\otimes n}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_n \circ \kappa_n(f)(w) &= a^1 b^1 . f(a^2 b^2 \otimes \cdots \otimes a^n b^n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a^1 b^1 \otimes \cdots \otimes a^i b^i a^{i+1} b^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^n b^n) \\ &+ (-1)^n f(a^1 b^1 \otimes \cdots \otimes a^{b-1} b^{n-1}) . a^n b^n. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \kappa_n^{\otimes} \circ \lambda_{n-1}(w) &= a^1 b^1 . f(a^2 b^2 \otimes \cdots \otimes a^n b^n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a^1 b^1 \otimes \cdots \otimes m \circ m_{\sigma'}(a^i \otimes b^i \otimes a^{i+1} \otimes b^{i+1}) \otimes \cdots \otimes a^n b^n) \\ &+ (-1)^n f(a^1 b^1 \otimes \cdots \otimes a^{b-1} b^{n-1}) . a^n b^n. \end{aligned}$$

Or $m \circ m_{\sigma'}(a^i \otimes b^i \otimes a^{i+1} \otimes b^{i+1}) = a^i b^i a^{i+1} b^{i+1}$, car A est σ -commutatif.

Le lemme est donc démontré. \square

En composant les diagrammes des deux lemmes précédents, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n-1}, M) & \xrightarrow{t(\psi \circ g) \circ \Gamma \circ \lambda} & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}_{\tilde{\otimes}}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M) \\
\downarrow \kappa_n & & \downarrow {}^t D_n \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M) & \xrightarrow{t(\psi \circ g) \circ \Gamma \circ \lambda} & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\tilde{\otimes}}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M)
\end{array} \tag{3.14}$$

En dualisant la construction de l'isomorphisme Ω (voir partie 3.2.2), on construit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathrm{Hom}_{\tilde{\otimes}}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}, M)$; par abus on le note aussi Ω .

Pour $(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) \in A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\otimes}}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M)$, Ω est donné par :

$$\Omega(f)((a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) = f(1_A[a^1 \mid \cdots \mid a^p]1_A \otimes 1_A[b^1 \mid \cdots \mid b^q]1_A).$$

Réciproquement, pour $a[a^1 \mid \cdots \mid a^p]a' \otimes b[b^1 \mid \cdots \mid b^q]b' \in \mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A)$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}, M)$, Ω^{-1} est donné par :

$$\Omega^{-1}(f)(a[a^1 \mid \cdots \mid a^p]a' \otimes b[b^1 \mid \cdots \mid b^q]b') = \sum_i a w_i \cdot f((w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p) \otimes (\tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^q)) \cdot \tau_i b',$$

où

$$\begin{aligned} & \sigma_{p+q+1} \cdots \sigma_{p+2} \sigma_1 \cdots \sigma_{p+1} (a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes a' \otimes b \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) \\ & = \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p \otimes \tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^q \otimes \tau_i. \end{aligned}$$

De plus, si A est de dimension finie, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels Λ , entre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}, M)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, M))$.

On a le lemme :

Lemme 3.7 *Il existe une différentielle ρ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}_{\tilde{\otimes}}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M) & \xrightarrow{\Lambda \Omega} & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, M)) \\
\downarrow {}^t D_n & & \downarrow \rho_n \\
\bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\tilde{\otimes}}(\mathrm{Bar}_p(A, A) \otimes \mathrm{Bar}_q(A, A), M) & \xrightarrow{\Lambda \Omega} & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, M))
\end{array}$$

Preuve : Via Ω , on transporte la différentielle ${}^t D$, à :

$$\bigoplus_{p+q=,} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes p}, M).$$

On note encore ${}^t D$, la différentielle obtenue par extension; elle est de la forme :

$${}^t D_n = \sum_{p+q=n} {}^t D_{p,q},$$

où, pour $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q}, M)$ avec $p + q = n - 1$, ${}^t D_{p,q}$ est donnée par :

$${}^t D_{p,q}(f) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p+1} \otimes A^{\otimes q}, M) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q+1}, M).$$

Pour $(a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p+1}) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p+1} \otimes A^{\otimes q}, M)$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t D_{p,q}(f)((a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p+1}) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) &= \\ &= a^1 \cdot f((a^2 \otimes \cdots \otimes a^{p+1}) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^i f((a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^{p+1}) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) \\ &\quad + (-1)^{p+1} \sum_i f((a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (\tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^q)) \cdot \tau_i, \end{aligned}$$

avec $\sigma_q \dots \sigma_1(a^{p+1} \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) = \sum_i \tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^q \otimes \tau_i$.

Pour $(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q+1}) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q+1}, M)$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t D_{p,q}(f)((a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q+1})) &= \\ &= (-1)^p \sum_i w_i \cdot f((w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p) \otimes (b^2 \otimes \cdots \otimes b^{q+1})) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^{i+p} f((a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^i b^{i+1} \otimes \cdots \otimes b^{q+1})) \\ &\quad + (-1)^{p+q+1} f((a^1 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \cdots \otimes b^q)) \cdot b^{q+1}, \end{aligned}$$

avec $\sigma_1 \dots \sigma_p(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1) = \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^p$.

Via θ , on transporte la différentielle ${}^t D$ en une différentielle ρ , de

$$\bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, M)).$$

Par définition de ${}^t D$, ρ est de la forme :

$$\rho_n = \sum_{p+q=n} \rho_{p,q},$$

où pour $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, M))$:

$$\rho_{p,q}(f) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p+1}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, M)) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q+1}, M)).$$

Pour $a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p+1} \in A^{\otimes p+1}$ et $b^1 \otimes \cdots \otimes b^q \in A^{\otimes q}$, on a :

$$\begin{aligned} \rho_{p,q}(f)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p+1})(b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) &= \\ &= (-1)^q \sum_i w_i \cdot f(a^2 \otimes \cdots \otimes a^{p+1})(w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^{i+q} f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^{p+1})(b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) \\ &\quad + (-1)^{p+q+1} f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p)(b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) \cdot a^{p+1}, \end{aligned}$$

avec $\sigma_1 \dots \sigma_q(b^1 \otimes \cdots \otimes b^q \otimes a^1) = \sum_i w_i \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^q$.

Pour $a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \in A^{\otimes p}$ et $b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q+1} \in A^{\otimes q+1}$, on a :

$$\begin{aligned} \rho_{p,q}(f)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p)(b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q+1}) &= \\ &= b^1 \cdot f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p)(b^2 \otimes \cdots \otimes b^{q+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^i f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p)(b^1 \otimes \cdots \otimes b^i b^{i+1} \otimes \cdots \otimes b^{q+1}) \\ &\quad + (-1)^{q+1} \sum_i f(\tau_i^1 \otimes \cdots \otimes \tau_i^p)(b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) \cdot \tau_i, \end{aligned}$$

avec $\sigma_p \dots \sigma_1(b^{q+1} \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^p) = \sum_i \tau_i^1 \otimes \dots \otimes \tau_i^p \otimes \tau_i$.

□

Montrons maintenant que le morphisme $\Phi = \Theta \circ \Omega \circ {}^t(\psi \circ g) \circ \Gamma \circ \lambda$ est le transposé du produit des battages quantiques. Alors, en composant le diagramme (3.14) et celui du lemme 3.7, on aura montré le théorème.

Soient $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M)$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q = n$.

Comme dans la preuve du théorème 3.4, pour $\omega = a^1 \otimes \dots \otimes a^p \in A^{\otimes p}$ et $\omega' = b^1 \otimes \dots \otimes b^q \in A^{\otimes q}$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(\omega')(\omega) &= \Omega \circ {}^t(\psi \circ g) \circ \Gamma \circ \lambda(f)(a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) \\ &= {}^t(\psi \circ g) \circ \Gamma \circ \lambda(f)(1_A[a^1 \mid \dots \mid a^p]1_A \otimes 1_A[b^1 \mid \dots \mid b^q]1_A) \\ &= \Gamma \circ \lambda(f)(\psi \circ g(1_A[a^1 \mid \dots \mid a^p]1_A \otimes 1_A[b^1 \otimes \dots \otimes b^q]1_A)) \\ &= \lambda(f)(\psi \circ g(a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q)) \\ &= f(m^{\otimes n} \circ \psi \circ g(a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q)) \\ &= \sum_{\nu \in S_{p,n}} (-1)^{|\nu|} f \circ T_\sigma(\nu)(a^1 \otimes \dots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \dots \otimes b^q) \end{aligned}$$

Le morphisme Φ est donc le transposé du produit des battages quantiques.

Application au tressage de Woronowicz

En appliquant le théorème 3.6 à l'algèbre d'un groupe, on va retrouver, de manière non calculatoire, l'identité générale d'Hochschild-Serre.

Soit A une algèbre de Hopf de dimension finie. Son antipode est alors inversible. On note $\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ le tressage défini par Woronowicz ([Wor91]). Pour tous $a, b \in A$ il est donné par :

$$\sigma(a \otimes b) = \sum b_{(1)} \otimes \text{ad}_{b_{(2)}} a,$$

où $\text{ad}_a b = \sum S(a_{(1)}) b a_{(2)}$.

On note $\text{ad}_a^{-1} b = \sum a_{(2)} b S^{-1}(a_{(1)})$. Avec cette notation, l'inverse de σ est donné par :

$$\sigma^{-1}(a \otimes b) = \sum \text{ad}_{a_{(2)}}^{-1} b \otimes a_{(1)}.$$

Il est facile de vérifier que σ est une solution de l'équation des tresses et des équations (3.3), (3.4), (3.1), (3.2) et (3.11). L'algèbre A est donc une algèbre tressée σ -commutative.

La structure d'algèbre obtenue sur $A \otimes A$ est donnée par :

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = \sum a \cdot \text{ad}_{b_{(2)}}^{-1} c \otimes b_{(1)} \cdot d.$$

Soit H une sous-algèbre de A stable par l'action adjointe. En appliquant le théorème 3.6, on a :

Corollaire 3.7 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n-1}, M) & \xrightarrow{\Phi} & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{\otimes p}, M)) \\
 \downarrow \kappa_n & & \downarrow \rho_n \\
 \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, M) & \xrightarrow{\Phi} & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{\otimes p}, M))
 \end{array}$$

Preuve : Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{\otimes p}, M))$.

Pour $a^1 \otimes \cdots \otimes a^{q+1} \in A^{\otimes q+1}$ et $h^1 \otimes \cdots \otimes h^p \in H^{\otimes p}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \rho_{q,p}(f)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^{q+1})(h^1 \otimes \cdots \otimes h^p) &= \\
 &= \sum (-1)^p a^1_{(1)} \cdot f(a^2 \otimes \cdots \otimes a^{q+1})(\mathrm{ad}_{a^1_{(2)}} h^1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{ad}_{a^1_{(p+1)}} h^p) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^{i+p} f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^{q+1})(h^1 \otimes \cdots \otimes h^p) \\
 &\quad + (-1)^{p+q+1} f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^q)(h^1 \otimes \cdots \otimes h^p) \cdot a^{q+1}.
 \end{aligned}$$

Pour $a^1 \otimes \cdots \otimes a^q \in A^{\otimes q}$ et $h^1 \otimes \cdots \otimes h^{p+1} \in A^{\otimes p+1}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \rho_{q,p}(f)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^q)(h^1 \otimes \cdots \otimes h^{p+1}) &= \\
 &= h^1 \cdot f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^q)(h^2 \otimes \cdots \otimes h^{p+1}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^i f(a^1 \otimes \cdots \otimes a^q)(h^1 \otimes \cdots \otimes h^i h^{i+1} \otimes \cdots \otimes h^{p+1}) \\
 &\quad + (-1)^{p+1} \sum f(a^1_{(1)} \otimes \cdots \otimes a^q_{(1)})(h^1 \otimes \cdots \otimes h^p) \cdot \mathrm{ad}_{a^1_{(2)} \cdots a^q_{(2)}} h^{p+1}.
 \end{aligned}$$

De plus, comme H est stable par l'action adjointe, pour tout $p+q=n$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes q}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{\otimes p}, M))$ et $a^1 \otimes \cdots \otimes a^q \in A^{\otimes q}$:

- i) les formules ci-dessus montrent que le morphisme $\rho_n(f)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^q)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{\otimes p}, M)$,
- ii) le morphisme $\Phi(f)(a^1 \otimes \cdots \otimes a^q)$ peut se restreindre à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H^{\otimes p}, M)$.

D'où le corollaire. □

Remarque : Soient G un groupe, H un sous-groupe normal et M un G -module. L'espace $\mathbb{K}[M]$ est muni d'une structure de bimodule sur l'algèbre du groupe G avec le produit à gauche donné par la structure de G -module de M et le produit à droite trivial. En appliquant le théorème précédent à l'algèbre du groupe G , à la sous-algèbre engendrée par H et à M muni de la structure de bimodule précédente, on obtient l'identité générale d'Hochschild-Serre énoncée dans ([HS53]).

Chapitre 4

Cohomologie quasi-abélienne

Pour établir une théorie homologique adaptée aux groupes abéliens, Eilenberg et MacLane ([EML50] et [EML53]) ont défini, en itérant une construction, un complexe. Dans cette théorie, les 3-cycles sont entièrement déterminés par l'homologie de la première itération. En utilisant la structure naturelle d'algèbre tressée σ -commutative des algèbres de Hopf, induite par le tressage de Woronowicz, on adapte la construction d'Eilenberg-MacLane aux algèbres de Hopf. De cette manière, le quotient de l'espace bitensoriel $T(T(A))$ par les éléments stables par l'action adjointe est un complexe noté $\mathcal{B}(A)$. On aura ainsi entièrement déterminé les 3-cycles, qui pourront alors être utilisés, dans le chapitre suivant, pour déterminer des invariants des 3-variétés.

Dans la deuxième partie, grâce aux structures de complexes simpliciaux sous-jacentes à la construction de $\mathcal{B}(A)$, on normalise ce complexe. On note $\mathcal{B}_N(A)$ le complexe obtenu.

Si on applique cette construction à l'algèbre d'un groupe abélien, on retrouve la construction d'Eilenberg et MacLane. Munit du tressage σ défini par Woronowicz, l'algèbre d'un groupe est σ -commutative, on peut dire qu'elle est quasi-abélienne. On appelle alors l'homologie du complexe $\mathcal{B}(A)$ l'homologie quasi-abélienne.

Dans la dernière partie, on donne une version multiplicative de la cohomologie associée à l'homologie quasi-abélienne. Puis on donne un exemple non trivial d'un 3-cocycle de cette cohomologie pour le groupe diédral d'ordre 3.

4.1 Construction d'Eilenberg-MacLane pour les algèbres de Hopf

Le but de cette partie est d'adapter la première itération de la construction d'Eilenberg et MacLane aux algèbres de Hopf. Pour cela, on utilise la structure d'algèbre différentielle graduée σ -commutative, induite par le produit des battages quantiques, qui a été introduite dans le chapitre précédent. On définit alors un espace vectoriel gradué \mathcal{B} , puis on le munit d'une différentielle.

4.1.1 Structure d'algèbre différentielle σ -commutative graduée

On décompose la différentielle du produit tensoriel tordu de complexe en somme de deux différentielles.

Soient A une algèbre de Hopf, d'antipode inversible, et σ le tressage défini par Woronowicz. On a déjà vu que A est alors une algèbre tressée σ -commutative. On étend σ à des éléments de $A^{\otimes n} \otimes A$. Soit $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes b \in A^{\otimes n} \otimes A$. On pose :

$$\begin{aligned} \sigma((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes b) &= \sigma_1 \dots \sigma_n((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes b) \\ &= \sum b_{(1)} \otimes ad_{b_{(2)}} a_1 \otimes \cdots \otimes ad_{b_{(n+1)}} a_n. \end{aligned}$$

Posons $w = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$; on écrira l'action adjointe diagonale de A sur $A^{\otimes n}$ par

$$ad_b w = \sum ad_{b_{(1)}} a_1 \otimes \cdots \otimes ad_{b_{(n)}} a_n.$$

Remarque : Pour $a, b \in A$ et $w \in A^{\otimes n}$, on a : $ad_a ad_b w = ad_{ba} w$.

L'espace \mathbb{K} est muni de sa structure d'algèbre triviale. La counité ε de A permet de munir \mathbb{K} d'une structure de A -bimodule. Pour tout $a \in A$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, définissons les applications linéaires $\sigma_{\mathbb{K}} : A \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \otimes A$ et $\sigma'_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \otimes A \rightarrow A \otimes \mathbb{K}$ par :

$$\sigma_{\mathbb{K}}(a \otimes \alpha) = \alpha \otimes a \quad \sigma'_{\mathbb{K}}(\alpha \otimes a) = a \otimes \alpha.$$

Comme $(\varepsilon \otimes \varepsilon)\sigma = \varepsilon \otimes \varepsilon$, les applications $\sigma_{\mathbb{K}}$ et $\sigma'_{\mathbb{K}}$ vérifient alors les équations (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.12) et (3.13). On peut donc appliquer le corollaire 3.5. En utilisant l'isomorphisme $\mathbb{K} \otimes A \simeq A$, on a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\varphi_{\sigma}} & A^{\otimes n} \\ \rho_n \downarrow & & \downarrow d_n \\ \bigoplus_{p+q=n-1} A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\varphi_{\sigma}} & A^{\otimes n-1} \end{array} \quad (4.1)$$

où φ_{σ} est le produit des battages associé à σ .

La différentielle d est la différentielle de l'homologie d'Hochschild de A à coefficient dans \mathbb{K} . Elle est donnée pour tout $n \geq 1$ par :

$$\begin{aligned} d_n : \quad A^{\otimes n} &\longrightarrow A^{\otimes n-1} \\ a^1 \otimes \cdots \otimes a^n &\longmapsto \varepsilon(a^1) a^2 \otimes \cdots \otimes a^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^n \\ &\quad + (-1)^n \varepsilon(a^n) a^1 \otimes \cdots \otimes a^{n-1}. \end{aligned}$$

La différentielle ρ est donnée pour tout $n \geq 1$ par :

$$\rho_n = \sum_{p+q=n} \rho_{p,q},$$

avec

$$\rho_{p,q} : A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} \longrightarrow [A^{\otimes p-1} \otimes A^{\otimes q}] \oplus [A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q-1}],$$

où

$$\begin{aligned}
\rho_{p,q}(a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q) &= \\
&= \varepsilon(a^1) a^2 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i a^1 \otimes \cdots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q \\
&\quad + (-1)^p \varepsilon(a^p) a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p-1} \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^q \\
&\quad + (-1)^p \text{ad}_{b^1(1)} a^1 \otimes \cdots \otimes \text{ad}_{b^1(p)} a^p \otimes b^2 \otimes \cdots \otimes b^q \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+p} a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^i b^{i+1} \otimes \cdots \otimes b^q \\
&\quad + (-1)^{p+q} \varepsilon(b^q) a^1 \otimes \cdots \otimes a^p \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q-1}.
\end{aligned}$$

Afin de réécrire cette différentielle comme somme de deux différentielles, on introduit la notation : pour tout r -uplet $(l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{N}^r$ ($r \geq 1$) et $i \in [1, \dots, r]$ tels que $l_i \geq 1$, on note $W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W'$ l'élément de $A^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_r}$, où $W \in A^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_{i-1}}$, $W' \in A^{\otimes l_{i+1}} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_r}$ et $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \in A^{\otimes l_i}$.

Définition 4.1 Pour tout $l_i > 0$, $0 \leq l \leq l_i$ on note δ_l^i l'application définie par

$$\delta_l^i : A^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_r} \longrightarrow A^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_i - l} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_r},$$

et :

$$\begin{aligned}
\delta_0^i(W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W') &= \varepsilon(a_{1(1)}) \text{ad}_{a_{1(2)}} W \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W' \\
&= \text{ad}_{a_1} W \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W', \\
\delta_j^i(W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W') &= W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W' \quad 1 \leq j \leq l_i - 1, \\
\delta_{l_i}^i(W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W') &= \varepsilon(a_{l_i}) W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i - 1} \otimes W'.
\end{aligned}$$

On pose alors pour tout $l_i > 0$:

$$d_{l_i}^{[i]} : A^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_r} \longrightarrow A^{\otimes l_1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_i - 1} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes l_r}$$

définie par :

$$d_{l_i}^{[i]}(W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W') = \sum_{j=0}^{l_i} (-1)^j \delta_j^i(W \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_i} \otimes W').$$

Remarque :

i) Si $l_i = 0$ on pose $d_0^{[i]} = 0$.

ii) Si $i = 1$, on a

$$\begin{aligned}
d_{l_1}^{[1]}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_1} \otimes W') &= \varepsilon(a_1) a_2 \otimes \cdots \otimes a_{l_1} \otimes W' \\
&\quad + \sum_{p=1}^{l_1-1} (-1)^p a_1 \otimes \cdots \otimes a_p a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_{l_1} \otimes W' \\
&\quad + (-1)^{l_1} \varepsilon(a_{l_1}) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{l_1-1} \otimes W'.
\end{aligned}$$

Les applications $d^{[i]}$ sont de degré -1 . On a la proposition :

Proposition 4.1

i) Pour tout $1 \leq i \leq r$, $(A^{\otimes l_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes l_r}, d^{[i]})$ est un complexe pré-simplicial.
En particulier pour $i \in [1, \dots, r]$, on a $d^{[i]}d^{[i]} = 0$.

ii) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a $d^{[i]}d^{[j]} = d^{[j]}d^{[i]}$.

Preuve : Pour la première partie de la proposition, il faut montrer que pour $0 \leq j < l \leq l_i$:

$$\delta_j^i \delta_l^i = \delta_{l-1}^i \delta_j^i.$$

Si $j = 0$ et $l = 1$, cela se déduit de $\sigma_1(\text{Id} \otimes m) = (m \otimes \text{Id})\sigma_2\sigma_1$.

Si $j = 0$ et $l > 1$, c'est clair.

Pour $1 \leq j \leq l_i - 2$ et $j < l$, l'égalité se déduit de l'associativité de m .

Les cas $j = l_i - 1$ et $l = l_i$ sont obtenus grâce à $\sigma_1(m \otimes \text{Id}) = (\text{Id} \otimes m)\sigma_1\sigma_2$.

La deuxième partie du lemme se ramène alors à montrer que pour $i < j$

$$d^{[i]}d^{[j]} = d^{[j]}d^{[i]}.$$

Avec la structure pré-simpliciale, cela revient à montrer que $\delta_i^j \delta_p^j = \delta_p^j \delta_i^j$.

Les égalités :

$$\left. \begin{array}{l} \delta_0^j \delta_0^i = \delta_0^i \delta_0^j \\ \delta_0^j \delta_{l_i}^i = \delta_{l_i}^i \delta_0^j \\ \delta_{l_j}^j \delta_{l_i}^i = \delta_{l_i}^i \delta_{l_j}^j \end{array} \right\} \text{ se déduisent de l'équation des tresses vérifiée par } \sigma.$$

Pour $l \in [1, \dots, l_i - 1]$, l'égalité $\delta_0^j \delta_l^i = \delta_l^i \delta_0^j$ est obtenue en utilisant

$$\sigma_1(m \otimes \text{Id}) = (\text{Id} \otimes m)\sigma_1\sigma_2.$$

Pour $p \in [1, \dots, l_j - 1]$, l'égalité $\delta_p^j \delta_{l_i}^i = \delta_{l_i}^i \delta_p^j$ se déduit de $\sigma_1(\text{Id} \otimes m) = (m \otimes \text{Id})\sigma_2\sigma_1$.

Les cas :

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq p \leq l_j \quad \delta_p^j \delta_0^i = \delta_0^i \delta_p^j \\ 1 \leq p \leq l_j, 1 \leq l \leq l_i - 1 \quad \delta_p^j \delta_l^i = \delta_l^i \delta_p^j \end{array} \right\} \text{ sont immédiats.} \quad \square$$

Les morphismes $\rho_{p,q}$ définissant ρ s'écrivent alors :

$$\rho_{p,q} = d_p^{[1]} + (-1)^p d_q^{[2]}.$$

De plus, pour tout n , on a l'égalité de différentielle $d_n = d_n^{[1]}$. Le diagramme (4.1) devient alors :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=n} A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & A^{\otimes n} \\ \downarrow \sum_{p+q=n} d_p^{[1]} + (-1)^p d_q^{[2]} & & \downarrow d_n^{[1]} \\ \bigoplus_{p+q=n-1} A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & A^{\otimes n-1} \end{array} \quad (4.2)$$

4.1.2 Définition de la construction

La commutativité de ce diagramme permet d'adapter au cas des algèbres de Hopf la première étape de la construction d'Eilenberg-MacLane ([EML50], [EML53]). On munit l'espace bitensoriel de deux différentielles. L'une, notée D , utilisant la structure d'algèbre de A et l'autre, notée D' , utilisant la structure d'algèbre de $T(A)$ donnée par le produit des battages quantiques. On montre alors que la somme $D + D'$ est une différentielle de l'espace des coinvariants, par l'action adjointe de A , de $\mathcal{B}'(A)$.

Soit $\mathcal{B}'(A) = T(T(A))$ l'espace vectoriel bitensoriel de A . Cet espace est gradué par :

- (i) les éléments de degré 0 sont $\alpha = [\alpha]$ où $\alpha \in \mathbb{K}$,
- (ii) les éléments de degré $n > 0$ sont les combinaisons linéaires de $[w^1 | \dots | w^r]$ tel que $l_1 + \dots + l_r + r - 1 = n$ où pour tout $i \in [1, \dots, r]$ $w^i \in A^{\otimes l_i}$.

Dans la suite, si $w \in A^{\otimes l}$ alors, on notera $|w| = l$.

Soit $W = [w^1 | \dots | w^r] \in \mathcal{B}'(A)$. Pour tout $i \in [1, \dots, r]$, on pose $\varepsilon_i(W) = |w^1| + \dots + |w^i| + i$. Quand il n'y a pas ambiguïté on écrira plus simplement ε_i .

Soit $D : \mathcal{B}'(A) \rightarrow \mathcal{B}'(A)$ l'application linéaire de degré -1 définie par :

$$D([w^1 | \dots | w^r]) = \sum_{i=1}^r (-1)^{\varepsilon_i - 1} d^{[i]}([w^1 | \dots | w^r]).$$

Remarque : Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ on a $D([\alpha]) = 0$. En utilisant la proposition 4.1, on obtient alors la proposition :

Proposition 4.2 *L'espace bitensoriel $\mathcal{B}'(A)$ muni de D est un complexe. C'est-à-dire $D \circ D = 0$.*

Pour définir la différentielle D' , on munit l'algèbre $T(A)$ d'une augmentation $\eta : T(A) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\eta(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } |w| \geq 1, \\ w & \text{si } |w| = 0. \end{cases}$$

On note alors $\theta_i : \mathcal{B}'(A) \rightarrow \mathcal{B}'(A)$ les applications linéaires de degré -1 définies pour les éléments de degré non nul par :

$$\begin{aligned} \theta_0([w^1 | \dots | w^r]) &= \begin{cases} \eta(w^1) & r = 1, \\ \eta(w^1)[w^2 | \dots | w^r] & r > 1, \end{cases} \\ \theta_i([w^1 | \dots | w^r]) &= [w^1 | \dots | w^{i-1} | \varphi_\sigma(w^i \otimes w^{i+1}) | \dots | w^r] \quad r > 1, 1 \leq i \leq r-1, \\ \theta_r([w^1 | \dots | w^r]) &= \begin{cases} \eta(w^1) & r = 1, \\ \eta(w^r)[w^1 | \dots | w^{r-1}] & r > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 4.3 *Soit $D' : \mathcal{B}'(A) \rightarrow \mathcal{B}'(A)$ l'application linéaire de degré -1 définie*

i) pour les éléments de degré non nul par :

$$D'([w^1 | \dots | w^r]) = \sum_{i=0}^r (-1)^{\varepsilon_i} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]),$$

ii) pour les éléments $\alpha \in \mathbb{K}$ de degré 0 on pose $D'([\alpha]) = 0$.

Le couple $(\mathcal{B}(A), D')$ est un complexe pré-simplicial.

Preuve : Par définition de D' , il suffit de montrer que les applications $\gamma_i = (-1)^{\varepsilon_i - i} \theta_i$ ont une structure pré-simpliciale, c'est-à-dire qu'elles vérifient pour $i < j$, $\gamma_i \gamma_j = \gamma_{j-1} \gamma_i$. Cela revient à voir que pour $[w^1 | \dots | w^r] \in \mathcal{B}'(A)$

$$\theta_i \theta_j ([w^1 | \dots | w^r]) = \theta_{j-1} \theta_i ([w^1 | \dots | w^r]).$$

Par définition de l'augmentation η , on montre facilement les cas $\theta_0 \theta_j$ et $\theta_i \theta_r$.

Les cas restants $1 \leq i \leq r-2$, $i < j \leq r-1$ se vérifient grâce à l'associativité de φ_σ . \square

On définit alors l'application linéaire \mathcal{D} de degré -1 par la somme des différentielles D et D' .

Remarque : Si on considère l'algèbre d'un groupe abélien, on retrouve alors la différentielle de la première itération de la construction d'Eilenberg MacLane [EML50].

Grâce aux propositions 4.1 et 4.3, on a

$$\mathcal{D} \circ \mathcal{D} = D \circ D' + D' \circ D.$$

Contrairement au cas des groupes abéliens, \mathcal{D} ne vérifie pas $\mathcal{D} \circ \mathcal{D} = 0$. En effet pour $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \circ \mathcal{D} &= D([a \otimes b]) - \sum D([b_{(1)} \otimes ad_{b_{(2)}} a]) + D'([ad_b a | 1]) - D'(\varepsilon(b)[a | 1]) \\ &= \varepsilon(a)[b] - [ab] + \varepsilon(b)[a] - [ad_b a] + [ab] - \varepsilon(a)[b] \\ &= \varepsilon(b)[a] - [ad_b a] \end{aligned}$$

Afin de voir \mathcal{D} comme une différentielle, on va quotienter $\mathcal{B}'(A)$.

Soit I le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}'(A)$ engendré par :

$$\{ad_a W - \varepsilon(a)W \mid a \in A, W \in \mathcal{B}'(A)\},$$

où $ad_a[w^1 | \dots | w^r] = \sum [ad_{a_{(1)}} w^1 | \dots | ad_{a_{(r)}} w^r]$.

On pose $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}'(A)/I$; c'est l'espace des coinvariants de $\mathcal{B}'(A)$ pour l'action adjointe de A .

Proposition 4.4 *L'application \mathcal{D} passe au quotient par I . C'est-à-dire que pour tout $c \in A$ et $W \in \mathcal{B}'(A)$, on a :*

$$\mathcal{D}(ad_c W) = ad_c \mathcal{D}(W).$$

Preuve : Pour montrer que \mathcal{D} commute à l'action adjointe, on va montrer que D et D' commutent à celle-ci. Pour cela, on a besoin du lemme suivant, qui se montre facilement

Lemme 4.1 *Le tressage σ commute à l'action adjointe. C'est-à-dire pour tous $a, b, c \in A$*

$$\sum \sigma(ad_{c_{(1)}} a \otimes ad_{c_{(2)}} b) = ad_c(\sigma(a \otimes b)).$$

Montrons que $D(ad_c W) = ad_c D(W)$ pour tout $c \in A$ et $W \in \mathcal{B}'(A)$.

Si W est de degré 0, c'est clair. Supposons que $W = [w^1 | \dots | w^r]$ de degré supérieur ou égal à 1; on va voir que pour tout $i \in [1, \dots, r]$ et $j \in [0, \dots, |w^i|]$:

$$\delta_j^i(ad_c[w^1 | \dots | w^r]) = ad_c \delta_j^i([w^1 | \dots | w^r]).$$

On déduit du lemme (4.1) que δ_0^i est invariant.

Comme $\sum ad_{c(1)} a_j \cdot ad_{c(2)} a_{j+1} = ad_c(a_j \cdot a_{j+1})$, δ_j^i est invariant pour $1 \leq j \leq l_i - 1$.

De plus, l'invariance de l'application δ_i^i est immédiate. Ainsi les morphismes $d^{[i]}$ sont invariants. On a donc D invariant par l'action adjointe.

Il reste à voir que $D'(ad_c W) = ad_c D'(W)$ pour tout $c \in A$ et $W \in \mathcal{B}'(A)$.

Si W est de degré 0, c'est clair. Supposons que $W = [w^1 | \dots | w^r]$ est de degré supérieur ou égal à 1 on a $\eta(ad_c w^1) = \eta(w^1)$, donc θ_0 et θ_r sont invariants.

D'après le lemme (4.1), ad_c commute avec σ ; on a alors pour ν un battage

$$\sum T_\sigma(\nu)(ad_{c(1)} w^l \otimes ad_{c(2)} w_{l+1}) = ad_c T_\sigma(\nu)(w^l \otimes w^{l+1}).$$

D'où l'invariance de θ_j pour $1 \leq j \leq r - 1$ et l'invariance de D' . \square

On note encore \mathcal{D} , D , D' , δ_j^i , θ_i et $d^{[i]}$ les applications obtenues sur $\mathcal{B}(A)$ par passage au quotient. Les applications D et D' sont encore de carrés nuls. On a alors le théorème

Théorème 4.1 *L'espace vectoriel $\mathcal{B}(A)$ muni de \mathcal{D} est un complexe.*

Remarque : Dans la théorie d'Eilenberg et MacLane, les autres étapes de la construction sont obtenues par itération. Plus précisément, la première étape consiste à associer au complexe de Hochschild, définissant l'homologie d'un groupe, muni d'un produit compatible à la différentielle (le produit des battages défini par le flip qui échange deux termes), un nouveau complexe muni d'un produit compatible à la différentielle de ce complexe. Les étapes suivantes consistent à appliquer cette construction au complexe obtenu au cran précédent. Dans notre cas, il faudrait munir le complexe $\mathcal{B}(A)$ d'une structure d'algèbre tressée commutative, où le produit serait donné par le produit des battages quantiques, défini par un tressage de $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(A)$ induit par le tressage de Woronowicz σ . Le fait que $\sigma^2 \neq \text{Id}$ ne permet pas, en l'état actuel, d'adapter la construction de la seconde itération d'Eilenberg et MacLane.

La construction du complexe $\mathcal{B}(A)$ permet tout de même de définir entièrement les 3-cycles d'une possible homologie construite par itération. En effet les itérations suivantes, si elles existent, ne modifient pas les 3-cycles (la $p^{\text{ème}}$ itération modifie les q -cycles avec $q \geq p + 2$).

4.1.3 Preuve du théorème 4.1

Il faut voir que $D \circ D' + D' \circ D = 0$. Pour prouver cela, on va d'abord simplifier cette somme par une série de lemmes. On se ramène ainsi à une égalité qui découle de la commutativité du diagramme 4.2.

Soit $W = [w^1 | \dots | w^r]$. On pose $\varepsilon_i = \varepsilon_i(W)$.

Pour un élément du type $[w]$, c'est clair. On suppose donc $r > 1$. On a :

$$\begin{aligned} DD'([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_0([w^1 | \dots | w^r]) + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{\varepsilon_r + \varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_r([w^1 | \dots | w^r]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{i+1 \leq j \leq r-1} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]). \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} D'D([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{j=1}^r (-1)^{\varepsilon_{j-1}} \theta_0 d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) + \sum_{j=1}^r (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_r - 1} \theta_r d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) \\ &\quad + \sum_{j=2}^r \sum_{1 \leq i \leq j-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_i} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{j \leq i \leq r-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_i - 1} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]). \end{aligned}$$

Lemme 4.2 *On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r (-1)^{\varepsilon_{j-1}} \theta_0 d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{\varepsilon_j} d^{[j]} \theta_0([w^1 | \dots | w^r]), \\ \sum_{j=1}^r (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_r - 1} \theta_r d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{\varepsilon_r - 1 + \varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_r([w^1 | \dots | w^r]). \end{aligned}$$

Preuve : Si $|w^1| \geq 2$ la première égalité est claire, car les deux membres de l'égalité sont nuls.

Si $|w^1| = 1$, on a $d^{[1]}([w^1 | \dots | w^r]) = 0$, d'où l'égalité.

On vérifie facilement le cas $|w^1| = 0$.

Pour la deuxième égalité, si $|w^r| \geq 2$, les deux membres de l'égalité sont nuls.

Si $|w^r| = 1$, le membre de droite est nul, le membre de gauche vaut

$$\theta_r(ad_{w^r}[w^1 | \dots | w^{r-1}|1] - \varepsilon(w^r)[w^1 | \dots | w^{r-1}|1]) = 0 \text{ car on est dans } \mathcal{B}(A).$$

Le cas $|w^r| = 0$ se calcule facilement. □

On a donc :

$$\begin{aligned}
(D \circ D' + D' \circ D)([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-2} \sum_{i+1 \leq j \leq r-1} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]) \\
&+ \sum_{j=2}^r \sum_{1 \leq i \leq j-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_i} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) \\
&+ \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{j \leq i \leq r-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_i - 1} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]).
\end{aligned}$$

Lemme 4.3 Pour $2 \leq i \leq r-1$ et $1 \leq j < i$, on a $d^{[j]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]) = \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r])$.
Pour $1 \leq i \leq r-2$ et $i < j \leq r-1$, on a $d^{[j]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]) = \theta_i d^{[j+1]}([w^1 | \dots | w^r])$.

Preuve : La première égalité se montre facilement.

Grâce au lemme 4.1, on voit que l'action adjointe commute à φ_σ . Ceci montre la deuxième égalité. \square

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{j-1}} d^{[j]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{i=2}^{r-1} \sum_{1 \leq j < i} (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{j-1}} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{|w^i| - 1} d^{[i]} \theta_i.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r-1} \sum_{j \leq i \leq r-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_i - 1} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{j=1}^{r-2} \sum_{j+1 \leq i \leq r-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_i - 1} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{|w^i|} \theta_i d^{[i]}([w^1 | \dots | w^r]),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^r \sum_{1 \leq i \leq j-1} (-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_i} \theta_i d^{[j]}([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{j=2}^{r-1} \sum_{1 \leq i \leq j-1} (-1)^{\varepsilon_j + \varepsilon_i} \theta_i d^{[j+1]}([w^1 | \dots | w^r]) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i d^{[i+1]}([w^1 | \dots | w^r]).
\end{aligned}$$

D'où, en utilisant le lemme précédent, $DD' + D'D$ devient :

$$\begin{aligned}
(DD' + D'D)([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{|w^i|} \theta_i d^{[i]}([w^1 | \dots | w^r]) + \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i d^{[i+1]}([w^1 | \dots | w^r]) \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{|w^i| - 1} d^{[i]} \theta_i([w^1 | \dots | w^r]).
\end{aligned}$$

Lemme 4.4 *Pour tout $i \in [1, \dots, r-1]$, on a :*

$$d^{[i]}\theta_i([w^1 | \dots | w^r]) = \theta_i d^{[i]}([w^1 | \dots | w^r]) + (-1)^{|w^i|} \theta_i d^{[i+1]}([w^1 | \dots | w^r]).$$

Preuve : Il suffit de prouver le lemme pour $r = 4$ et $i = 2$, les autres cas se montrant de la même manière. Les cas où $|w^2| = 0$ ou $|w^3| = 0$ sont évidents. On peut donc supposer $|w^2| = p > 0$ et $|w^3| = q > 0$. Comme toutes les applications sont linéaires, il suffit de montrer le lemme pour $w^2 = a^1 \otimes \dots \otimes a^p$ et $w^3 = b^1 \otimes \dots \otimes b^q$. C'est-à-dire que :

$$d^{[2]}\theta_2([w|w^2|w^3|w']) = \theta_2 d^{[2]}([w|w^2|w^3|w']) + (-1)^p \theta_2 d^{[3]}([w|w^2|w^3|w']).$$

Par définition de θ_2 et de φ_σ , on a grâce à la décomposition de $S_{p,p+q}$ en réunion des permutations qui envoient 1 sur 1 et de celles qui envoient p+1 sur 1 :

$$\begin{aligned} \theta_2([w|w^2|w^3|w']) &= [w|\varphi_\sigma(w^2 \otimes w^3)|w'] \\ &= \sum_{\nu \in S_{p-1,q}} (-1)^{|\nu|} [w|a^1 \otimes c_\nu^1 \otimes \dots \otimes c_\nu^{p+q-1}|w'] \\ &\quad + \sum_{\nu \in S_{p,q-1}} (-1)^{|\nu|+p} [w|b_{(1)}^1 \otimes d_\nu^1 \otimes \dots \otimes d_\nu^{p+q-1}|w'], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \sum c_\nu^1 \otimes \dots \otimes c_\nu^{p+q-1} &= T_\sigma(\nu)((a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^1 \otimes \dots \otimes b^q)) \\ \sum d_\nu^1 \otimes \dots \otimes d_\nu^{p+q-1} &= T_\sigma(\nu)(ad_{b_{(2)}^1}(a^1 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes (b^2 \otimes \dots \otimes b^q)). \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \theta_2([w|w^2|w^3|w']) &= [w|a^1 \otimes \varphi_\sigma((a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes w^3)|w'] \\ &\quad (-1)^p [w|b_{(1)}^1 \otimes \varphi_\sigma(ad_{b_{(2)}^1}(w^2) \otimes (b^2 \otimes \dots \otimes b^q))|w']. \end{aligned}$$

Donc, par définition de $d^{[2]}$, on a :

$$\begin{aligned} d^{[2]}\theta_2([w|w^2|w^3|w']) &= [ad_{a^1} w|\varphi_\sigma((a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes w^3)|w'] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+q-1} (-1)^i \delta_i^2 [w|a^1 \otimes \varphi_\sigma((a^2 \otimes \dots \otimes a^p) \otimes w^3)|w'] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+q-1} (-1)^{p+q+|\nu|} \varepsilon(c_\nu^{p+q-1}) [w|a^1 \otimes c_\nu^1 \otimes \dots \otimes c_\nu^{p+q-2}|w'] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+q-1} (-1)^p [ad_{b_{(1)}^1} w|\varphi_\sigma(ad_{b_{(2)}^1} w^2 \otimes (b^2 \otimes \dots \otimes b^q))|w'] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+q-1} (-1)^{i+p} \delta_i^2 [w|b_{(1)}^1 \otimes \varphi_\sigma(ad_{b_{(2)}^1}(w^2) \otimes (b^2 \otimes \dots \otimes b^q))|w'] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+q-1} (-1)^{q+|\nu|} \varepsilon(d_\nu^{p+q-1}) [w|b_{(1)}^1 \otimes d_\nu^1 \otimes \dots \otimes d_\nu^{p+q-2}|w']. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
(d^{[2]} + (-1)^p d^{[3]})([w|w^2|w^3|w']) &= [ad_{a^1}w|a^2 \otimes \cdots \otimes a^p|w^3|w'] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \delta_i^2 [w|w^2|w^3|w'] \\
&\quad + (-1)^p \varepsilon(a^p) [w|a^1 \otimes \cdots \otimes a^{p-1}|w^3|w'] \\
&\quad + (-1)^p \sum [ad_{b^1_{(1)}}w|ad_{b^1_{(2)}}w^2|b^2 \otimes \cdots \otimes b^q|w'] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+p} \delta_i^3 [w|w^2|w^3|w'] \\
&\quad + (-1)^{p+q} \varepsilon(b^q) [w|w^2|b^1 \otimes \cdots \otimes b^{q-1}|w'].
\end{aligned}$$

Après composition avec θ_2 , on voit que $\theta_2(d^{[2]} + (-1)^p d^{[3]})([w|w^2|w^3|w'])$ et $d^{[2]}\theta_2([w|w^2|w^3|w'])$ ont en commun les termes :

$$\begin{aligned}
&[ad_{a^1}w|\varphi_\sigma((a^2 \otimes \cdots \otimes a^p) \otimes w^3)|w'], \\
&\sum (-1)^p [ad_{b^1_{(1)}}w|\varphi_\sigma(ad_{b^1_{(2)}}w^2 \otimes (b^2 \otimes \cdots \otimes b^q))|w'].
\end{aligned}$$

Les termes restants de $\theta_2(d^{[2]} + (-1)^p d^{[3]})([w|w^2|w^3|w'])$ et de $d^{[2]}\theta_2([w|w^2|w^3|w'])$ sont égaux. En effet le diagramme commutatif 4.2 signifie que :

$$d^{[1]}\theta_1([w^2|w^3]) = \theta_1 d^{[1]}([w^2|w^3]) + (-1)^p \theta_1 d^{[2]}([w^2|w^3]).$$

De même que précédemment, on montre que les termes contenant $\varepsilon(a^1)$ (respectivement $\varepsilon(b^1)$) se simplifient. En tensorisant les termes restants, à gauche par w et à droite par w' , on trouve l'égalité souhaitée. Le lemme est donc démontré. \square

On en déduit que $DD' + D'D = 0$. Le théorème est donc démontré.

4.2 Normalisation du complexe $\mathcal{B}(A)$

De même que pour la construction d'Eilenberg et MacLane, on va montrer que l'on peut normaliser le complexe $(\mathcal{B}(A), \mathcal{D})$. Pour cela, on utilise le théorème 1.3 de la normalisation de la théorie de l'homologie simpliciale sur le complexe $(\mathcal{B}(A), D')$. Puis on montre que le quasi-isomorphisme obtenu est compatible à la différentielle D .

Soit N le sous-espace de $\mathcal{B}(A)$ engendré par les éléments dégénérés, c'est-à-dire les éléments $[w^1|\dots|w^r]$ où au moins un w^i vaut 1.

Lemme 4.5 *Le sous-espace N est stable par \mathcal{D} .*

Preuve : Comme $d^{[i]}([w^1|\dots|w^{i-1}|1|\dots|w^r]) = 0$, on a $D(N) \subset N$.

De plus 1 est l'élément neutre du produit φ_σ , donc pour tout $i \in [1, \dots, r]$ on a $D'([w^1|\dots|w^{i-1}|1|\dots|w^r]) \in N$.

La différentielle \mathcal{D} laisse donc le sous-espace N stable. \square

On note $\mathcal{B}_N(A)$ le complexe obtenu par quotient de $\mathcal{B}(A)$ par N . Les applications obtenues par passage au quotient de D , D' et \mathcal{D} sont encore notées D , D' et \mathcal{D} .

Remarque : En particulier les applications $\delta_j^{[i]}$ induisent par passage au quotient des morphismes de $\mathcal{B}_N(A)$.

Théorème 4.2 *Soient $H(\mathcal{B}(A))$ l'homologie du complexe $(\mathcal{B}(A), \mathcal{D})$ et $H(\mathcal{B}_N(A))$ celle de $(\mathcal{B}_N(A), \mathcal{D})$. Les espaces vectoriels suivants sont isomorphes :*

$$H(\mathcal{B}(A)) \simeq H(\mathcal{B}_N(A)).$$

Preuve : L'objet pré-simplicial $(\mathcal{B}(A), D')$ peut être muni d'une structure simpliciale. Les faces sont données par $\gamma_i = (-1)^{\varepsilon_i - i} \theta_i$. Pour $i \in [0, \dots, r]$, les dégénérescences sont données par

$$s_i([w^1 | \dots | w^r]) = (-1)^{\varepsilon_i - i} [w^1 | \dots | w^i | 1 | w^{i+1} | \dots | w^r].$$

Il est facile de vérifier qu'avec γ_i et s_i , $\mathcal{B}(A)$ est un objet simplicial.

De plus les éléments de N de degré n sont les images des éléments de degré $n - 1$ de $\mathcal{B}(A)$ par les dégénérescences.

Le théorème 1.3 se réécrit alors :

Théorème 4.3 *Pour les complexes $(\mathcal{B}(A), D')$ et $(\mathcal{B}_N(A), D')$, il existe des morphismes de complexes $f : \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathcal{B}_N(A)$ et $g : \mathcal{B}_N(A) \rightarrow \mathcal{B}(A)$ et une homotopie ϕ de $\mathcal{B}(A)$ telle que :*

$$fg = \text{Id} \quad D' \phi + \phi D' = gf - \text{Id}.$$

Les morphismes $(gf)_n$ et ϕ_n sont des opérateurs simpliciaux. Comme ϕ est de degré 1, les opérateurs simpliciaux monotones de la décomposition de ϕ (Corrolaire 1.2) sont aussi de degré 1. Chacun de ces opérateurs simpliciaux monotones se décompose de manière unique en une forme canonique

$$s_{i_r} \dots s_{i_1} \gamma_{j_t} \dots \gamma_{j_1}.$$

De plus, comme elles sont de degré 1, chacune de ces décompositions canoniques contient un nombre impair d'applications (car on a $n - t + r = n + 1$).

De la même manière, comme gf est de degré 0, chaque décomposition canonique des opérateurs simpliciaux monotones composant gf contient un nombre pair d'applications. De plus

Lemme 4.6 *Pour tout $i \in [0, \dots, r]$, on a : $D \circ \gamma_i([w^1 | \dots | w^r]) = -\gamma_i \circ D([w^1 | \dots | w^r])$
 $D \circ s_i([w^1 | \dots | w^r]) = -s_i \circ D([w^1 | \dots | w^r])$*

Preuve : Les cas $D \circ \gamma_0$ et $D \circ s_i$ sont immédiats. Le cas $D \circ \gamma_r$ découle de

$$ad_a[w^1 | \dots | w^{r-1} | 1] - \varepsilon(a)[w^1 | \dots | w^{r-1} | 1] = 0 \text{ pour tout } a \in A.$$

Le cas $D \circ \gamma_i$ ($1 \leq i \leq r - 1$) se montre grâce au lemme (4.4). □

Comme il y a un nombre impair d'applications dans la décomposition des opérateurs simpliciaux monotones de ϕ_n , on a, d'après le lemme, $D\phi + \phi D = 0$. Donc $\mathcal{D}\phi + \phi\mathcal{D} = gf - \text{Id}$. Le même raisonnement pour gf montre que $D \circ gf = gf \circ D$.

Par définition, f est la projection du complexe $\mathcal{B}(A)$ dans $\mathcal{B}_N(A)$; donc en particulier $D \circ f = f \circ D$.

Comme $g = gfg$, on a $D \circ g = gf \circ D \circ g = g \circ D \circ fg = g \circ D$.

D'où f et g sont des morphismes de complexes pour D et pour D' et donc pour \mathcal{D} .

Les morphismes f , g et ϕ sont donc compatibles avec la structure de complexe induite par la différentielle \mathcal{D} . Le morphisme ϕ est alors une homotopie du complexe $(\mathcal{B}(A), \mathcal{D})$ entre les morphismes gf et Id .

Donc les homologies $H(\mathcal{B}(A))$ et $H(\mathcal{B}_N(A))$ sont isomorphes. \square

Définition 4.2

Soit A une algèbre de Hopf d'antipode inversible, munie du tressage de Woronowicz. L'homologie quasi-abélienne de A est l'homologie associée au complexe $(\mathcal{B}_N(A), \mathcal{D})$.

La différentielle de l'homologie quasi-abélienne de A se réécrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}([w^1 | \dots | w^r]) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{\varepsilon_{i-1}} d^{[i]}([w^1 | \dots | w^r]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{\varepsilon_i} [w^1 | \dots | w^{i-1} | \varphi_\sigma(w^i \otimes w^{i+1}) | \dots | w^r]. \end{aligned}$$

4.3 Cohomologie multiplicative

Dans cette section, on donne une version multiplicative de la cohomologie associée à l'homologie précédente. Pour cela, on définit tout d'abord un analogue multiplicatif au complexe $(\mathcal{B}(A), \mathcal{D})$, puis à l'homologie quasi-abélienne.

Rappelons que si C est une cogèbre cocommutative et M une algèbre commutative. L'ensemble $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, M)$ est muni d'un produit de convolution $*$ par :

$$f * g = m_M(f \otimes g) \Delta_C.$$

Ce produit a un élément neutre : $1_M \varepsilon_C$.

Suivant Sweedler [Swe68], on note $\text{Reg}(C, M)$ le groupe abélien des morphismes inversibles pour le produit de convolution de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, M)$.

On a un foncteur contravariant $\text{Reg}(\cdot, M)$ des cogèbres cocommutatives dans les groupes abéliens. En effet on vérifie facilement que si $\beta : C \rightarrow D$ est un morphisme de cogèbres, alors $\tilde{\beta} = \text{Reg}(\beta)$ définit un morphisme de $\text{Reg}(D, M)$ dans $\text{Reg}(C, M)$ par $\tilde{\beta}(g) = g \circ \beta$. L'inverse de $\tilde{\beta}(g)$ est $\tilde{\beta}(g^{-1})$ où g^{-1} est l'inverse de g pour $*$.

4.3.1 Définition de la cohomologie multiplicative de $\mathcal{B}'(A)$

On va montrer que si A est une algèbre de Hopf cocommutative, le sous-groupe des applications stables par l'action adjointe de $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$ est un complexe. La différentielle est une version multiplicative de la différentielle de la cohomologie associée au complexe $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$.

On suppose dans la suite que A est une algèbre de Hopf cocommutative.

On munit $\mathcal{B}'(A)$ de la structure de cogèbre donnée par le produit tensoriel de cogèbres. Cette structure de cogèbre respecte la graduation. C'est-à-dire que le coproduit d'un élément de degré n est un produit tensoriel d'éléments de degrés n .

Comme le foncteur $\text{Reg}(\cdot, M)$ vérifie :

$$\text{Reg}(C \oplus D, M) = \text{Reg}(C, M) \oplus \text{Reg}(D, M),$$

le groupe $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$ est gradué de manière naturelle par la graduation induite par celle de $\mathcal{B}'(A)$. On note $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)_n$ les éléments de degré n . On utilise les notations de la définition de $d^{[i]}$ pour définir un analogue à D .

Comme A est cocommutative, les applications δ_j^i sont des morphismes de cogèbres. Soient $\tilde{\delta}_j^i$ leurs images par le foncteur $\text{Reg}(\cdot, M)$, ce sont des applications de degré 1 de $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$ dans lui-même.

On définit les applications $\tilde{d}^{[i]}$ de $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$ dans lui-même, pour des éléments de degré supérieur ou égal à 1 par :

$$\begin{aligned} \text{si } |w^i| > 0 : \tilde{d}^{[i]}(f)[w^1 | \dots | w^r] &= \tilde{\delta}_0^i f * (\tilde{\delta}_1^i f)^{-1} * \dots * (\tilde{\delta}_{|w^i|}^i f)^{(-1)^{|w^i|}} [w^1 | \dots | w^r] \\ &= \tilde{\delta}_0^i f * (\tilde{\delta}_1^i f^{-1}) * \dots * (\tilde{\delta}_{|w^i|}^i f^{(-1)^{|w^i|}}) [w^1 | \dots | w^r], \\ \text{si } |w^i| = 0 : \tilde{d}^{[i]}(f)[w^1 | \dots | w^r] &= 1_M \varepsilon([w^1 | \dots | w^r]). \end{aligned}$$

avec $i \in [1, \dots, r]$.

Comme A est cocommutative et M commutative, on a $\tilde{d}^{[i]}(f * g) = \tilde{d}^{[i]}(f) * \tilde{d}^{[i]}(g)$ et donc $\tilde{d}^{[i]}(f)^{-1} = \tilde{d}^{[i]}(f^{-1})$.

De même que dans la partie 4.1.2, on peut alors définir pour $n \in \mathbb{N}$

$\tilde{D} : \text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)_n \rightarrow \text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)_{n+1}$ par :

$$\tilde{D}(f)([w^1 | \dots | w^r]) = \tilde{d}^{[1]} f * \tilde{d}^{[2]}(f^{(-1)^{\varepsilon_1}}) * \dots * \tilde{d}^{[r]}(f^{(-1)^{\varepsilon_{r-1}}})([w^1 | \dots | w^r]).$$

Remarque : L'application \tilde{D} vérifie $\tilde{D}(f * g) = \tilde{D}(f) * \tilde{D}(g)$.

Proposition 4.5

i) Pour tous i, j , on a

$$\begin{aligned} \tilde{d}^{[i]} \tilde{d}^{[i]}(f) &= 1_M \varepsilon, \\ \tilde{d}^{[i]} \tilde{d}^{[j]} &= \tilde{d}^{[j]} \tilde{d}^{[i]}. \end{aligned}$$

ii) L'application \tilde{D} est une différentielle de $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$. C'est-à-dire $\tilde{D} \circ \tilde{D}(f) = 1_M \varepsilon$ pour tout $f \in \text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$.

Preuve : Afin d'établir la première partie, on rappelle que dans la proposition 4.1 on a montré que si $j < l$, alors

$$\delta_j^i \delta_l^i = \delta_{l-1}^i \delta_j^i.$$

Donc $\tilde{\delta}_i^i \tilde{\delta}_j^i = \tilde{\delta}_j^i \tilde{\delta}_{l-1}^i$ pour $j < l$. En particulier $\tilde{d}^{[l]} \tilde{d}^{[l]}(f) = 1_M \varepsilon$.

De même, on a vu dans la preuve de cette proposition que $\delta_i^i \delta_p^j = \delta_p^j \delta_i^i$. On en déduit que $\tilde{\delta}_i^i \tilde{\delta}_p^j = \tilde{\delta}_p^j \tilde{\delta}_i^i$. Et donc $\tilde{d}^{[l]} \tilde{d}^{[j]} = \tilde{d}^{[j]} \tilde{d}^{[l]}$.

Pour la deuxième partie, de même que dans la preuve de la proposition 4.2, on voit que pour un élément de la forme $[w^1] \dots [w^r]$ le morphisme $\tilde{D} \circ \tilde{D}(f)$ est égal à :

$$\underset{i=2}{\overset{r}{\ast}} \underset{j=1}{\overset{i-1}{\ast}} \tilde{d}^{[j]} \tilde{d}^{[i]}(f^{(-1)^{\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{j-1}}}) \underset{i=1}{\overset{r-1}{\ast}} \underset{j=i+1}{\overset{r}{\ast}} \tilde{d}^{[j]} \tilde{d}^{[i]}(f^{(-1)^{\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{j-1} - 1}}) \underset{i=1}{\overset{r}{\ast}} \tilde{d}^{[i]} \tilde{d}^{[i]}(f^{(-1)^{\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i-1}}}).$$

En utilisant alors la première partie, on obtient alors $\tilde{D} \circ \tilde{D}(f) = 1_M \varepsilon$. \square

On va définir un analogue à D' .

Pour tous $p, q \geq 1$, et $\nu \in S_{p,p+q}$, $T_\sigma(\nu) : A^{\otimes p} \otimes A^{\otimes q} \rightarrow A^{\otimes q} \otimes A^{\otimes p}$ est un morphisme de cogèbres (car A est cocommutative). On peut donc définir les applications de degré 1

$$\tilde{\theta}_i : \text{Reg}_n(\mathcal{B}'(A), M) \rightarrow \text{Reg}_{n+1}(\mathcal{B}'(A), M),$$

par

$$\tilde{\theta}_i(f)([w^1] \dots [w^i | w^{i+1}] \dots [w^r]) = \underset{\nu \in S_{p,p+q}}{\ast} f^{(-1)^{|\nu|}}([w^1] \dots [T_\sigma(\nu)(w^i | w^{i+1})] \dots [w^r]),$$

où $1 \leq i \leq r-1$, $|w^i| = p$, $|w^{i+1}| = q$. Les cas $i = 0$ et $i = r$ sont définis par :

$$\tilde{\theta}_0(f)([w^1] \dots [w^r]) = \begin{cases} \varepsilon([w^1] \dots [w^r]) 1_M & \text{si } r \geq 1 \text{ et } |w^1| > 0, \\ w^1 f([w^2] \dots [w^r]) & \text{si } r > 1 \text{ et } |w^1| = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_r(f)([w^1] \dots [w^r]) = \begin{cases} \varepsilon([w^1] \dots [w^r]) 1_M & \text{si } r \geq 1 \text{ et } |w^r| > 0, \\ w^r f([w^1] \dots [w^{r-1}]) & \text{si } r > 1 \text{ et } |w^r| = 0. \end{cases}$$

On a $\tilde{\theta}_i(f * g) = \tilde{\theta}_i(f) * \tilde{\theta}_i(g)$ et $\tilde{\theta}_i(f)^{-1} = \tilde{\theta}_i(f^{-1})$.

On pose alors

$\tilde{D}' : \text{Reg}_n(\mathcal{B}'(A), M) \rightarrow \text{Reg}_{n+1}(\mathcal{B}'(A), M)$ définie par :

$$\tilde{D}'(f)([w^1] \dots [w^r]) = \tilde{\theta}_0 f * \tilde{\theta}_1 f^{(-1)^{\varepsilon_1}} * \dots * \tilde{\theta}_{r-1} f^{(-1)^{\varepsilon_{r-1}}} * \tilde{\theta}_r f^{(-1)^{\varepsilon_r}}([w^1] \dots [w^r]).$$

Remarque : Comme A est cocommutative et M commutative $\tilde{D}'(f * g) = \tilde{D}'(f) * \tilde{D}'(g)$.

Proposition 4.6 *Le couple $(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M), \tilde{D}')$ est un complexe pré-cosimplicial multiplicatif.*

Preuve : Il faut montrer que pour $j < i$, on a $\tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_j = \tilde{\theta}_j \tilde{\theta}_{i-1}$.

Les cas $\tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_r \tilde{\theta}_j$ se déduisent de la définition de $\tilde{\theta}_0$ et $\tilde{\theta}_r$.

Il reste à voir les cas $\tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_j$ avec $1 \leq j < i \leq r-1$.

Si $j < i - 1$, c'est clair.

Si $j = i - 1$, on a pour $|w^{i-1}| = p$, $|w^i| = q$, $|w^{i+1}| = r$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_{i-1}(f)([w^1 | \dots | w^r]) &= \\ & \quad \underset{\tau \in S_{q,q+r}}{\ast} \quad \underset{\nu \in S_{p,p+q+r}}{\ast} \quad f^{(-1)^{|\nu|+|\tau|}} T_\sigma^{[i-1]}(\nu) T_\sigma^{[i]}(\tau) ([w^1 | \dots | w^{i-1} | w^i | w^{i+1} | \dots | w^r]) \\ \tilde{\theta}_{i-1} \tilde{\theta}_{i-1}(f)([w^1 | \dots | w^r]) &= \\ & \quad \underset{\tau \in S_{p,p+q}}{\ast} \quad \underset{\nu \in S_{p+q,p+q+r}}{\ast} \quad f^{(-1)^{|\nu|+|\tau|}} T_\sigma^{[i-1]}(\nu) T_\sigma^{[i-1]}(\tau) ([w^1 | \dots | w^{i-1} | w^i | w^{i+1} | \dots | w^r]) \end{aligned}$$

Comme A est cocommutative et M est commutative, l'égalité entre les deux termes se démontre de la même manière que l'associativité du produit des tressages. \square

Posons $\tilde{D}f = \tilde{D}f \ast \tilde{D}'f$. De même que dans le chapitre 4.1.2 l'application \tilde{D} n'est pas une différentielle. Pour remédier à cela, nous allons restreindre \tilde{D} .

Lemme 4.7 *Soit \tilde{I} le sous-groupe de $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$ défini par*

$$\tilde{I} = \{ f \in \text{Reg}(\mathcal{B}'_n(A), M) \text{ telle que } ((f \circ \text{ad}_a) \ast f^{-1})(W) = \varepsilon(a)\varepsilon(W)1_M \quad \forall a \in A, \forall W \in \mathcal{B}'(A) \}.$$

On a $\tilde{D}(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$.

Preuve : Comme $\Delta(\text{ad}_a(W)) = \sum \text{ad}_{a_{(1)}} W_{(1)} \otimes \text{ad}_{a_{(2)}} W_{(2)}$, l'ensemble \tilde{I} est un sous-groupe de $\text{Reg}(\mathcal{B}'(A), M)$.

Pour montrer $\tilde{D}(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$, on établit que $\tilde{D}(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$ et $\tilde{D}'(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$. Dans la preuve de la proposition 4.4, on a vu que pour tout $i \in [1, \dots, r]$ et $j \in [0, \dots, |w^i|]$:

$$\delta_j^i(\text{ad}_a[w^1 | \dots | w^r]) = \text{ad}_a \delta_j^i([w^1 | \dots | w^r]).$$

Donc $\tilde{\delta}_j^i(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$, c'est-à-dire $\tilde{D}(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$.

Or, on a aussi vu dans cette preuve que si ν est un battage :

$$\sum T_\sigma(\nu)(\text{ad}_{c_{(1)}} w^l \otimes \text{ad}_{c_{(2)}} w_{l+1}) = \text{ad}_c T_\sigma(\nu)(w^l \otimes w^{l+1}).$$

Donc $\tilde{\theta}_i(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$, c'est-à-dire $\tilde{D}'(\tilde{I}) \subset \tilde{I}$ \square

Notons $\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$ ce sous-groupe.

Théorème 4.4 *Le groupe $\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$ est muni d'une structure de complexe avec \tilde{D} . C'est-à-dire pour tout $f \in \text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$*

$$\tilde{D} \circ \tilde{D}(f) = 1_M \varepsilon.$$

Preuve : D'après les propriétés de \tilde{D} et \tilde{D}' et les propositions 4.5 et 4.6, on a

$$\begin{aligned} \tilde{D} \circ \tilde{D}(f) &= \tilde{D} \circ \tilde{D}(f) \ast \tilde{D} \circ \tilde{D}'(f) \ast \tilde{D}' \circ \tilde{D}(f) \ast \tilde{D}' \circ \tilde{D}'(f) \\ &= \tilde{D} \circ \tilde{D}'(f) \ast \tilde{D}' \circ \tilde{D}(f). \end{aligned}$$

Il faut donc montrer que

$$\tilde{D} \circ \tilde{D}'(f) \ast \tilde{D}' \circ \tilde{D}(f) = 1_M \varepsilon \quad (4.3)$$

Pour cela, de même que dans la preuve du théorème 4.1, on se ramène par une série de lemmes à une égalité qui découle de la commutativité du diagramme 4.2. On a l'équivalent des lemmes 4.2 et 4.3 :

Lemme 4.8 *On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \bigstar_{j=1}^{r-1} \tilde{\theta}_0 \tilde{d}^{[j]} f^{(-1)^{\varepsilon_j}} ([w^1 | \dots | w^r]) &= \bigstar_{j=1}^r \tilde{d}^{[j]} \tilde{\theta}_0 f^{(-1)^{\varepsilon_{j-1}}} ([w^1 | \dots | w^r]), \\ \bigstar_{j=1}^{r-1} \tilde{\theta}_r \tilde{d}^{[j]} f^{(-1)^{\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_{r-1}}} ([w^1 | \dots | w^r]) &= \bigstar_{j=1}^r \tilde{d}^{[j]} \tilde{\theta}_r f^{(-1)^{\varepsilon_{r-1} + \varepsilon_{j-1}}} ([w^1 | \dots | w^r]). \end{aligned}$$

Preuve : La première égalité se montre de la même manière que celle du lemme 4.2. La deuxième égalité découle de la propriété des applications de $\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$

$$\forall f \in \text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M), \forall a \in A, \forall W \in \mathcal{B}'(A) \quad (f \circ ad_a * f^{-1})(W) = \varepsilon(a)\varepsilon(W)1_M.$$

□

Lemme 4.9 *Pour $2 \leq i \leq r-1$ et $1 \leq j < i$, on a :*

$$\tilde{\theta}_i \tilde{d}^{[j]} f([w^1 | \dots | w^r]) = \tilde{d}^{[j]} \tilde{\theta}_i f([w^1 | \dots | w^r]).$$

Pour $1 \leq i \leq r-2$ et $i < j \leq r-1$, on a :

$$\tilde{\theta}_i \tilde{d}^{[j]} f([w^1 | \dots | w^r]) = \tilde{d}^{[j+1]} \tilde{\theta}_i f([w^1 | \dots | w^r]).$$

Preuve : La première égalité est évidente.

Pour la deuxième égalité, le cas $|w^j| = 0$ découle de $(\varepsilon \otimes \varepsilon)\sigma = (\varepsilon \otimes \varepsilon)$. Les autres cas découlent du lemme 4.1. □

En décomposant $\tilde{D} \circ \tilde{D}' * \tilde{D}' \circ \tilde{D}$ de la même manière que dans la section 4.1.3, on a, grâce aux lemmes précédents, sur un élément de la forme $[w^1 | \dots | w^r]$:

$$\tilde{D}\tilde{D}'(f) * \tilde{D}'\tilde{D}(f) = \bigstar_{i=1}^{r-1} \tilde{\theta}_i \tilde{d}^{[i]} f^{(-1)^{|w^i|-1}} * \bigstar_{i=1}^{r-1} \tilde{d}^{[i]} \tilde{\theta}_i f^{(-1)^{|w^i|}} * \bigstar_{i=1}^{r-1} \tilde{d}^{[i+1]} \tilde{\theta}_i f.$$

L'égalité 4.3 est alors une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.10 *On a l'égalité suivante :*

$$\tilde{\theta}_2 \tilde{d}^{[2]}(f)([w^1 | w^2 | w^3 | w^4]) = \tilde{d}^{[2]} \tilde{\theta}_2(f) * \tilde{d}^{[3]} \tilde{\theta}_2(f^{(-1)^{|w^2|}})([w^1 | w^2 | w^3 | w^4]).$$

Preuve : On pose $|w^1| = m$, $|w^2| = p$, $|w^3| = q$ et $|w^4| = n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_2 \tilde{d}^{[2]}(f)([w^1 | w^2 | w^3 | w^4]) &= \\ & \bigstar_{\nu \in S_{p,p+q}} \bigstar_{i=0}^{p+q} f^{(-1)^{|\nu|+i}} \delta_i^2 T_\sigma^{[2]}(\nu)([w^1 | w^2 | w^3 | w^4]), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{d}^{[2]}\tilde{\theta}_2(f) * \tilde{d}^{[3]}\tilde{\varphi}_2(f^{(-1)^{|p|}})[w^1|w^2|w^3|w^4] = \\ \begin{array}{c} * \\ i=0 \end{array} \begin{array}{c} * \\ \nu \in S_{p-1, p+q-1} \end{array} \begin{array}{c} * \\ \nu \in S_{p-1, p+q-1} \end{array} f^{(-1)^{|\nu|+i}} T_\sigma^{[2]}(\nu) \delta_i^2 \\ * \begin{array}{c} * \\ j=0 \end{array} \begin{array}{c} * \\ \tau \in S_{p, p+q-1} \end{array} f^{(-1)^{|\tau|+j}} T_\sigma^{[2]}(\tau) \delta_j^3 ([w^1|w^2|w^3|w^4]). \end{aligned}$$

Comme A est cocommutative et M commutative, le même raisonnement que pour la preuve du lemme 4.4 permet de montrer le lemme. \square

D'où le théorème. \square

4.3.2 Normalisation du complexe $(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M), \tilde{\mathcal{D}})$

On va définir la normalisation du complexe $\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$, en dualisant la normalisation du complexe $(\mathcal{B}(A), \mathcal{D})$.

Les dégénérescences s_i (sans le signe) définies dans la section 4.2 sont des morphismes de cogèbres. Soient \tilde{s}'_i leurs images par le foncteur $\text{Reg}(\cdot, M)$. Ces morphismes peuvent se restreindre à $\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$. On note $\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M)$ le sous-groupe de $\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$ défini par :

$$\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M) = \bigcap \ker \tilde{s}'_i.$$

C'est l'ensemble des applications f de $\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$ vérifiant

$$f([w^1 | \dots | w^r]) = \varepsilon(w^1 | \dots | w^r) 1_M, \quad \text{si il existe } i \in [1, ..r] \text{ tel que } |w^i| = 0.$$

De même que dans la section 4.2, la différentielle $\tilde{\mathcal{D}}$ se restreint à $\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M)$.

Théorème 4.5 *Soient $H(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M))$ l'homologie du complexe $(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M), \tilde{\mathcal{D}})$ et $H(\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M))$ celle de $(\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M), \tilde{\mathcal{D}})$. Les sous-groupes suivants sont isomorphes :*

$$H(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)) \simeq H(\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M)).$$

Preuve : De la même manière que dans la preuve du théorème 4.2, l'objet pré-cosimplicial $(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M), \tilde{\mathcal{D}}')$ peut être muni d'une structure cosimpliciale. Les faces sont données par $\tilde{\gamma}_i(f) = \tilde{\theta}_i(f^{-1 \varepsilon_i - i})$. Les dégénérescences sont données par $\tilde{s}_i(f) = \tilde{s}'_i(f^{-1 \varepsilon_i - i})$.

Le théorème 1.4 s'écrit alors :

Théorème 4.6 *Pour les complexes $(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M), \tilde{\mathcal{D}}')$ et $(\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M), \tilde{\mathcal{D}}')$, il existe des morphismes de complexes $\tilde{f} : \text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M) \rightarrow \text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M)$ et $\tilde{g} : \text{Reg}_N(\mathcal{B}'(A), M) \rightarrow \text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$ et une homotopie $\tilde{\phi}$ de $(\text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M))$ tels que :*

$$\tilde{f}\tilde{g} = \text{Id} \quad \tilde{\mathcal{D}}'\tilde{\phi}(\theta) * \tilde{\phi}\tilde{\mathcal{D}}'(\theta) = \tilde{g}\tilde{f}(\theta) * \theta^{-1},$$

pour tout $\theta \in \text{Reg}_I(\mathcal{B}'(A), M)$.

Les applications $\tilde{g}\tilde{f}$ et $\tilde{\phi}$ sont des opérateurs cosimpliciaux. Ils s'écrivent de manière unique comme produit d'opérateurs cosimpliciaux monotones. Les opérateurs cosimpliciaux monotones intervenant dans l'écriture de $\tilde{\phi}$, respectivement de $\tilde{g}\tilde{f}$ se décomposent chacun en un nombre impair (respectivement pair) d'applications $\tilde{\gamma}_i$ et \tilde{s}_i . On termine alors la preuve de ce théorème de la même manière que pour celle du théorème 4.2. \square

4.4 Application à l'algèbre d'un groupe

On définit une cohomologie quasi-abélienne d'un groupe G qui est isomorphe à la cohomologie quasi-abélienne de l'algèbre de G . Puis on montre, grâce au programme Maple, qu'il existe des 3-cocycles quasi-abéliens non triviaux du groupe diédral D_3 .

4.4.1 Cohomologie quasi-abélienne d'un groupe

Après avoir défini la cohomologie quasi-abélienne d'un groupe à partir de la cohomologie quasi-abélienne de son algèbre, on étudie les cocycles de la cohomologie à valeur dans \mathbb{K} .

Soient G un groupe, $\mathbb{K}[G]$ l'algèbre de Hopf cocommutative du groupe et M une algèbre commutative. On note M^r le groupe abélien des éléments inversibles pour le produit de M . On appelle éléments homogènes de $\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G])$ des éléments du type $[w^1 | \dots | w^r]$ avec, pour tout $i \in [1, \dots, r]$, $w^i = g_1^{l_1} \otimes \dots \otimes g_i^{l_i}$ avec $l_i > 0$. Soit $\mathcal{B}'(G)$ l'ensemble des éléments homogènes. Cet ensemble est un groupe avec la structure produit de groupe. La graduation de $\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G])$ induit une graduation sur $\mathcal{B}'(G)$.

Soit $C(\mathcal{B}'(G), M^r)$ l'ensemble des applications de $\mathcal{B}'(G)$ dans M^r vérifiant

$$f(ad_g([w^1 | \dots | w^r]) = f([w^1 | \dots | w^r]),$$

pour tout $g \in G$ et $[w^1 | \dots | w^r] \in \mathcal{B}'(G)$.

Théorème 4.7 *Il existe sur $C(\mathcal{B}'(G), M^r)$ une différentielle ? telle que les complexes $(C(\mathcal{B}'(G), M^r), ?)$ et $(\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G]), M), \tilde{D})$ sont isomorphes.*

Preuve : Par construction les éléments f de $\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G]), M)$ sont entièrement définis par leurs valeurs sur les éléments homogènes. De plus comme $\Delta(g) = g \otimes g$, on a pour tout $[w^1 | \dots | w^r] \in \mathcal{B}'(G)$

$$f^{-1}([w^1 | \dots | w^r]) = (f([w^1 | \dots | w^r]))^{-1},$$

et donc $f([w^1 | \dots | w^r]) \in M^r$. La restriction de $\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G])$ à $\mathcal{B}'(G)$ induit alors un isomorphisme entre $\text{Reg}_N(\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G]), M)$ et $C(\mathcal{B}'(G), M^r)$.

Soient $f \in \text{Reg}_N(\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G]), M)$ et $[w^1 | \dots | w^r] \in \mathcal{B}'(G)$. On définit le morphisme de groupes $\Psi : \text{Reg}_N(\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G]), M) \rightarrow C(\mathcal{B}'(G), M^r)$ par :

$$\Psi(f)([w^1 | \dots | w^r]) = f([w^1 | \dots | w^r]).$$

Inversement pour $f \in C(\mathcal{B}'(G), M^r)$, il suffit de définir $\Psi^{-1}(f)$ sur les éléments de $\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G])$ du type $[w^1 | \dots | w^r]$ avec pour tout $i \in [1, \dots, r]$ $w^i = g_1^{l_1} \otimes \dots \otimes g_i^{l_i}$ avec $l_i \geq 0$. En effet ces éléments forment une base de $\mathcal{B}'(\mathbb{K}[G])$. Pour un élément $[w^1 | \dots | w^r]$ de cette base on pose :

$$\Psi^{-1}(f)([w^1 | \dots | w^r]) = \begin{cases} f([w^1 | \dots | w^r]) & \text{si pour tout } i \in [1, \dots, r] \ l_i > 0, \\ 1_M & \text{s'il existe } i \in [1, \dots, r] \ \text{tel que } l_i = 0. \end{cases}$$

Il faut encore vérifier que $\Psi^{-1}(f)$ est inversible. On définit $(\Psi^{-1}(f))^{-1}$ sur les éléments de la base par : $(\Psi^{-1}(f))^{-1}([w^1 | \dots | w^r]) = (\Psi^{-1}(f)([w^1 | \dots | w^r]))^{-1}$. Cette définition est valide car f est à valeur dans M^r . On montre facilement qu'avec ces définitions

$$\Psi^{-1}(f) * (\Psi^{-1}(f))^{-1} = 1_{M^r}.$$

La structure de complexe de $C(\mathcal{B}'(G), M^r)$ est obtenue en transportant la différentielle \tilde{D} par Ψ . \square

On applique cette structure au cas $M = \mathbb{K}$ muni de la structure de bimodule triviale. On a alors $M^r = \mathbb{K}^*$.

Les 1-cocycles sont les applications f de G dans \mathbb{K}^* vérifiant pour $g, h \in G$

$$f(h^{-1}gh) = f(g), \quad f(h)f^{-1}(gh)f(g) = 1.$$

Les 2-cocycles sont les applications f de $G \times G$ dans \mathbb{K}^* vérifiant pour $g, h, k, a, b \in G$

$$\begin{aligned} f(k^{-1}gk, k^{-1}hk) &= f(g, h), & f(h, k)f^{-1}(gh, k)f(g, hk)f^{-1}(g, h) &= 1, \\ f(a, b) &= f(b, b^{-1}ab). \end{aligned}$$

En utilisant la première égalité, la dernière égalité se réduit à $f(a, b) = f(b, a)$.

Les 3-cocycles sont les couples (f, Ω) avec $f : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ et $\Omega : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ vérifiant pour $l, g, h, k \in G$

$$\begin{aligned} f(l^{-1}gl, l^{-1}hl, l^{-1}kl) &= f(g, h, k), & \Omega(l^{-1}gl, l^{-1}hl) &= \Omega(g, h), \\ f(h, k, l)f^{-1}(gh, k, l)f(g, hk, l)f^{-1}(g, h, kl)f(g, h, k) &= 1, \\ \Omega(h^{-1}gh, k)\Omega^{-1}(g, hk)\Omega(g, h)f(g, h, k)f^{-1}(h, h^{-1}gh, k)f(h, k, k^{-1}h^{-1}ghk) &= 1, \\ \Omega(g, k)\Omega^{-1}(gh, k)\Omega(h, k)f^{-1}(g, h, k)f(g, k, k^{-1}hk)f^{-1}(k, k^{-1}gk, k^{-1}hk) &= 1. \end{aligned}$$

Proposition 4.7 Soient $f : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ et $\Omega : G \times G \rightarrow \mathbb{K}^*$ vérifiant pour $l, g, h, k \in G$:

$$f(l^{-1}gl, l^{-1}hl, l^{-1}kl) = f(g, h, k), \quad (4.4)$$

$$f(h, k, l)f^{-1}(gh, k, l)f(g, hk, l)f^{-1}(g, h, kl)f(g, h, k) = 1, \quad (4.5)$$

$$\Omega(h^{-1}gh, k)\Omega^{-1}(g, hk)\Omega(g, h)f(g, h, k)f^{-1}(h, h^{-1}gh, k)f(h, k, k^{-1}h^{-1}ghk) = 1, \quad (4.6)$$

$$\Omega(g, h)\Omega^{-1}(gh, k)\Omega(h, k)f^{-1}(g, h, k)f(g, k, k^{-1}hk)f^{-1}(k, k^{-1}gk, k^{-1}hk) = 1. \quad (4.7)$$

alors (f, Ω) est un 3-cocycle. C'est-à-dire $\Omega(l^{-1}gl, l^{-1}hl) = \Omega(g, h)$.

Preuve : Grâce à (4.6) et (4.7), on a :

$$\begin{aligned} \Omega(l^{-1}gl, l^{-1}hl) &= \Omega(g, h)f(l^{-1}gl, l^{-1}, hl)f^{-1}(l^{-1}, g, hl)f(l^{-1}, hl, l^{-1}h^{-1}ghl) \\ &\quad f^{-1}(h, h^{-1}gh, l)f(h, l, l^{-1}h^{-1}ghl) \\ &\quad f^{-1}(h^{-1}, gh, l)f(h^{-1}, l, l^{-1}ghl)f^{-1}(l, l^{-1}h^{-1}l, l^{-1}ghl) \\ &\quad f(g, l, l^{-1}hl)f^{-1}(l, l^{-1}gl, l^{-1}hl) \\ &\quad f^{-1}(l^{-1}, gl, l^{-1})f^{-1}(g, l, l^{-1}) \\ &\quad f(h, h^{-1}, l)f^{-1}(h, l, l^{-1}h^{-1}l)f(l, l^{-1}hl, l^{-1}h^{-1}l) \\ &\quad f(l, l^{-1}gl, l^{-1})f^{-1}(l, l^{-1}, g). \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (4.5), le produit de f se simplifie en :

$$\Omega(l^{-1}gl, l^{-1}hl) = \Omega(g, h)f^{-1}(l^{-1}hl, l^{-1}h^{-1}l, l^{-1}ghl)f(h, h^{-1}, gh).$$

Donc d'après (4.4) l'égalité voulue. \square

4.4.2 Exemple explicite de 3-cocycles non triviaux du groupe diédral D_3

On montre l'existence de 3-cocycles non triviaux pour le groupe diédral D_3 .

Soit D_3 le groupe diédral d'ordre 3. On a $D_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ avec a d'ordre 3, b d'ordre 2 et $ba = a^2b$.

Un 3-cocycle de la cohomologie quasi-abélienne de D_3 à valeur dans \mathbb{C}^* est un couple de fonction (f, Ω) avec $f : D_3 \times D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $\Omega : D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ vérifiant (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7).

Trouver un 3-cocycle de la cohomologie quasi-abélienne de D_3 à valeur dans \mathbb{C}^* revient alors à résoudre dans \mathbb{C}^* un système d'équation dont les inconnues sont les $f(g, h, k), \Omega(g, h)$ avec $g, h, k \in D_3$ (il y a $2 * 6^4 + 2 * 6^3$ équations et $6^3 + 6^2$ inconnues).

En fait, on va exhiber des 3-cocycles qui vérifient de plus une condition de normalisation $f(e, g, h) = f(g, e, h) = f(g, h, e) = \Omega(e, g) = \Omega(g, e) = 1$.

Proposition 4.8 *Il existe, pour le groupe diédral D_3 , des 3-cocycles quasi-abéliens normalisés non triviaux (qui ne sont pas des cobords).*

Preuve : L'existence de tels 3-cocycle non triviaux est obtenue en résolvant le système d'équation obtenu par le programme Maple.

Pour cela, on commence par rechercher toutes les applications f possibles. Cela revient à résoudre le système d'équation obtenu par les équations de normalisation et par les conditions (4.4), (4.5) (feuille de calcul *diedral.mws*). Les 4 types de solutions (feuille de calcul *solution3u.mws*) ainsi trouvées sont :

1^{er} cas les f trouvées ne contiennent pas des racines 3^{ème} de l'unité. Elles dépendent de 4 constantes $x, s, t, m \in \mathbb{C}^*$. Soit f_1 une telle solution. Alors f_2 définie par

$$\begin{aligned} f_2(a^i b, a^j b, a^k b) &= -f_1(a^i b, a^j b, a^k b) & \forall i, j, k \in \{0, 1, 2\}, \\ f_2 &= f_1 & \text{sinon,} \end{aligned}$$

est encore une solution. On appelle f_1 une solution du type 1.1.? et f_2 une solution du type 1.2.?.

2^{ème} cas les f trouvées contiennent des racines 3^{ème} de l'unité. Elles dépendent de 4 constantes $x, s, t, m \in \mathbb{C}^*$. Soit f_1 une telle solution. Alors f_2 définie par

$$\begin{aligned} f_2(a^i b, a^j b, a^k b) &= -f_1(a^i b, a^j b, a^k b) & \forall i, j, k \in \{0, 1, 2\}, \\ f_2 &= f_1 & \text{sinon,} \end{aligned}$$

est encore une solution. On appelle f_1 une solution du type 2.1.? et f_2 une solution du type 2.2.?.

Ensuite on cherche les applications Ω telles que (f, Ω) est un 3-cocycle normalisé avec une des solutions précédentes. Cela revient à résoudre, pour les f trouvées précédemment, les équations (4.6) et (4.7) (feuille de calcul *script.mws*). Les 6 types de solutions (feuille de calcul *solution 3qa.mws*) ainsi trouvées sont :

1^{er} cas les Ω correspondent aux f du type 1.1.?. Elles dépendent des constantes $s, t \in \mathbb{C}^*$.

Soit Ω_1 une telle solution. Alors Ω_2 définie par

$$\begin{aligned} \Omega_2(a^i b, a^j b) &= -\Omega_1(a^i b, a^j b) & \forall i, j \in \{0, 1, 2\}, \\ \Omega_2 &= \Omega_1 & \text{sinon,} \end{aligned}$$

est encore une solution. On appelle Ω_1 une solution du type 1.1.1 et Ω_2 une solution du type 1.1.2.

2^{ème} cas les Ω correspondent aux f du type 1.2.?. Elles dépendent des constantes $s, t \in \mathbb{C}^*$. Ces solutions sont appelées solutions 1.2.1.

3^{ème} cas les Ω correspondent aux f du type 2.1.?. Elles dépendent des constantes $s, t \in \mathbb{C}^*$. Soit Ω_1 une telle solution. Alors Ω_2 définie par

$$\begin{aligned} \Omega_2(a^i b, a^j b) &= -\Omega_1(a^i b, a^j b) & \forall i, j \in \{0, 1, 2\}, \\ \Omega_2 &= \Omega_1 & \text{sinon,} \end{aligned}$$

est encore une solution. On appelle Ω_1 une solution du type 2.1.1 et Ω_2 une solution du type 2.1.2. Ces solutions sont appelées solutions 2.2.1.

4^{ème} cas les Ω correspondent aux f du type 2.2.?. Elles dépendent des constantes $s, t \in \mathbb{C}^*$.

En fait, de même que pour les solutions ?1.1 et ?1.2, on peut vérifier (feuille de calcul *soluce.mws*) qu'il y a 2 autres types de solutions.

5^{ème} cas soit Ω_1 une solution du type 1.2.1. Alors Ω_2 définie par

$$\begin{aligned} \Omega_2(a^i b, a^j b) &= -\Omega_1(a^i b, a^j b) & \forall i, j \in \{0, 1, 2\}, \\ \Omega_2 &= \Omega_1 & \text{sinon,} \end{aligned}$$

est encore une solution. On appelle Ω_2 une solution du type 1.2.2.

6^{ème} cas soit Ω_1 une solution du type 2.2.1. Alors Ω_2 définie par

$$\begin{aligned} \Omega_2(a^i b, a^j b) &= -\Omega_1(a^i b, a^j b) & \forall i, j \in \{0, 1, 2\}, \\ \Omega_2 &= \Omega_1 & \text{sinon,} \end{aligned}$$

est encore une solution. On appelle Ω_2 une solution du type 2.2.2.

Par la suite, on recherche si les solutions trouvées sont des cobords (feuille de calcul *cobord.mws*). C'est-à-dire pour (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien de D_3 , s'il existe une application $\eta : D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que pour $g, h, k \in D_3$:

$$\begin{aligned} w(g, h, k) &= \eta(h, k)\eta^{-1}(gh, k)\eta(g, hk)\eta^{-1}(g, h), \\ \Omega(g, h) &= \eta(g, h)\eta(h, h^{-1}gh). \end{aligned}$$

Les calculs effectués permettent de dire que les solutions du type 1.1.1 sont des cobords et que les solutions du type 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 et 2.2.2 ne sont pas des cobords. Pour les solutions du type 1.1.2, 1.2.1 et 1.2.2, on ne peut pas conclure.

On donne en annexe les feuilles de calcul Maple ainsi que les valeurs des solutions f et Ω sur les éléments de D_3 . □

Remarque : La complexité des solutions trouvées ne semble pas permettre de donner une écriture simple de ces fonctions.

Chapitre 5

Invariants des 3-variétés

A partir d'un 3-cocycle abélien normalisé au sens d'Eilenberg-MacLane (Cf [EML50]) d'un groupe abélien G , Reshetikhin, Mattes et Polyak (Cf [MPR93]) ont associé à chaque entrelacs coloré par G , un poids. En sommant les poids sur toutes les colorations possibles par G , ils ont construit un invariant des entrelacs. Cet invariant se prolonge ensuite à un invariant des 3-variétés.

Par ailleurs, à un 3-cocycle normalisé d'un groupe à valeurs dans $U(1)$, Dijkraaf, Pasquier et Roche (Cf [DPR90]) ont associé un double de Drinfeld tordu, qui est une quasi-algèbre de Hopf. A partir de la catégorie des représentations de dimension finie d'une quasi-algèbre de Hopf de rubans, Altschüler et Coste (Cf [AC92]) ont défini un invariant des entrelacs, qui est une version non associative de l'invariant de Reshetikhin et Turaev (Cf [RT90]) associé à des catégories strictes de rubans. L'invariant obtenu grâce au double de Drinfeld tordu, peut s'étendre à un invariant des 3-variétés.

Or un 3-cocycle abélien définissant implicitement un 3-cocycle, il permet donc de construire ces deux invariants pour chaque groupe abélien. On va comparer les deux invariants obtenus, dans une situation plus générale.

Tout d'abord, grâce aux 3-cocycles quasi-abéliens, on va généraliser la construction de l'invariant des entrelacs de Reshetikhin, Mattes et Polyak, à un groupe non abélien.

Un 3-cocycle (w, Ω) pour la cohomologie quasi-abélienne définit implicitement un 3-cocycle classique w . A partir de (w, Ω) , on pourra donc refaire la construction de Dijkraaf, Pasquier et Roche. Après avoir compris cette construction au moyen de l'identité générale d'Hochschild-Serre (Cf [HS53]), on remarquera que le double de Drinfeld tordu construit grâce à (w, Ω) peut être vu soit comme une quasi-algèbre de Hopf, soit comme une algèbre de Hopf. Ceci permettra de calculer explicitement l'invariant d'Altschüler et Coste associé à (w, Ω) . On pourra ainsi montrer, qu'à l'inverse du 3-cocycle (w, Ω) près, cet invariant est le même que celui obtenu par la généralisation de la construction de Reshetikhin, Mattes et Polyak.


Si on admet la construction de 3-cocycle quasi-abélien d'un groupe, ce chapitre peut être lu indépendamment des autres.


5.1 Invariant de Reshetikhin, Mattes et Polyak généralisé à un groupe non abélien

A partir d'un 3-cocycle quasi-abélien, on généralise la construction de Reshetikhin, Mattes et Polyak (Cf [MPR93]) à un groupe G fini, qui n'est pas forcément abélien. On construit d'abord un invariant des entrelacs, qui généralise en tout point la construction de Reshetikhin, Mattes et Polyak. Ensuite on étudie les conditions pour que cet invariant s'étende à un invariant des 3-variétés. On définit ainsi un invariant des 3-variétés Z .

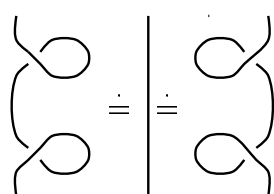
Terminologie

Tous les groupes considérés seront finis.

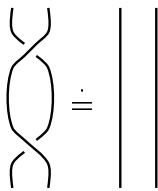
On dira qu'un croisement est positif (respectivement négatif) s'il est isotope à .

(respectivement à .

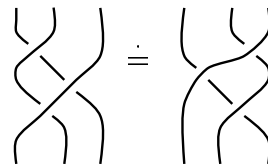
Quand on considèrera un entrelacs, cela signifie que l'on prend un entrelacs de rubans de S^3 orienté. On note D_L un diagramme planaire représentant L . Deux diagrammes de L diffèrent par des mouvements de Reidemeister.



1^{er} mouvement



2^{ème} mouvement



3^{ème} mouvement

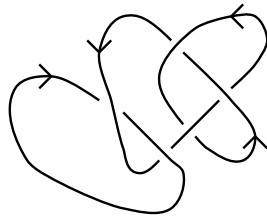
où les brins prennent toutes les orientations possibles.

On rappelle qu'un entrelacs de rubans est un entrelacs de S^3 équipé d'un champ de vecteurs normaux non-singuliers. Le framing d'un entrelacs L est alors une classe d'homotopie des champs de vecteurs normaux non-singuliers de L . Equiper un entrelacs L d'un framing revient à associer à chaque brin de L un entier (voir par exemple [Lic97])

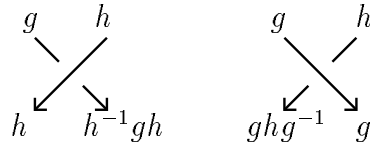
5.1.1 Invariant des entrelacs

Après avoir coloré les diagrammes d'un entrelacs par des éléments d'un groupe G , on associe à un 3-cocycle quasi-abélien de G , le poids d'un diagramme. On montre ensuite que la somme des poids sur toutes les colorations possibles d'un diagramme est un invariant des entrelacs.

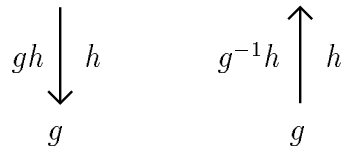
Soit D_L un diagramme d'un entrelacs L , chaque brin est décomposé en composantes par les croisements qui coupent le brin. Par exemple, le diagramme à deux brins ci-dessous a un brin à une composante et l'autre à 4 composantes.



On colorie chaque composante par un élément de G , en imposant la règle ci-dessous.



Les composantes connexes du complémentaire de la projection dans le plan de l'entrelacs sont coloriées par les éléments du groupe de la manière suivante : on colorie la composante connexe extérieure du diagramme (celle qui entoure D_L) par l'identité du groupe, puis on colorie de la droite vers la gauche par la règle suivante :



Proposition 5.1 *Soient D_L le diagramme d'un entrelacs L et G un groupe fini. Se donner un coloriage de D_L par G revient à se donner un morphisme de groupe du groupe fondamental de L (noté $\Pi_1(L)$) à valeurs dans G .*

Preuve : Le groupe fondamental d'un entrelacs de rubans L est par définition le groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs dans S^3 . Une présentation de ce groupe a été donnée par Wirtinger (voir par exemple [Lic97], [Rol90]). Si D_L est un diagramme de L , cette présentation est obtenue en prenant pour générateurs les composantes de chaque brin du diagramme et pour relations les égalités obtenues en imposant des conditions sur les croisements des diagrammes, qui sont exactement celles décrites plus haut.

Lemme 5.1 *Si on considère un autre diagramme D'_L de L , la présentation obtenue est isomorphe à la précédente.*

Preuve : Si D'_L est obtenu à partir de D_L par un mouvement de Reidemeister, il est clair que les présentations obtenues sont isomorphes. Comme deux diagrammes de L diffèrent par une suite finie de mouvements de Reidemeister, on a montré le lemme. \square

Il est donc clair qu'une coloration de D_L est un morphisme de groupes du $\Pi_1(L)$ dans G . Inversement, on se donne un morphisme de groupes du $\Pi_1(L)$ dans G , obtenue par un diagramme D_L . Soit D'_L un diagramme obtenu à partir de D_L par un mouvement de Reidemeister. Il existe un unique coloriage de D'_L par des éléments de G tel que la coloration de D_L et de D'_L soit la même pour la partie du diagramme inchangée. Ainsi, si D_L est un diagramme de L , à tout morphisme de groupes du $\Pi_1(L)$ dans G , on associe une unique coloration de D_L .

On a donc montré la proposition. \square

Soit (w, Ω) un 3-cocycle de cohomologie quasi-abélienne de G à valeurs dans \mathbb{C} . C'est-à-dire $w : \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $\Omega : \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}^*$ vérifiant pour tous $x, g, h, k \in G$:

$$w(x^{-1}gx \otimes x^{-1}hx \otimes x^{-1}kx) = w(g \otimes h \otimes k), \tag{5.1}$$

$$\Omega(x^{-1}gx \otimes x^{-1}hx) = \Omega(g \otimes h), \tag{5.2}$$

$$w(g \otimes h \otimes k)w^{-1}(gh \otimes k \otimes t)w(g \otimes hk \otimes t)w^{-1}(g \otimes h \otimes kt)w(h \otimes k \otimes t) = 1, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} w(g \otimes h \otimes k)\Omega(gh \otimes k)w(k \otimes k^{-1}gk \otimes k^{-1}hk) = \\ = \Omega(g \otimes k)w(g \otimes k \otimes k^{-1}hk)\Omega(h \otimes k), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \Omega(g \otimes hk)w(h \otimes h^{-1}gh \otimes k) = \\ = \Omega(g \otimes h)w(g \otimes h \otimes k)\Omega(h^{-1}gh \otimes k)w(h \otimes k \otimes (hk)^{-1}ghk). \end{aligned} \tag{5.5}$$

A un diagramme coloré et un 3-cocycle (w, Ω) , on associe un poids $\langle \rangle$. Pour cela, on définit une application linéaire $B : \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}^*$ par :

$$B(g \otimes h \otimes k) = w(g \otimes h \otimes k)\Omega(g \otimes h)w^{-1}(h \otimes h^{-1}gh \otimes k).$$

Le poids de chaque croisement est défini par :

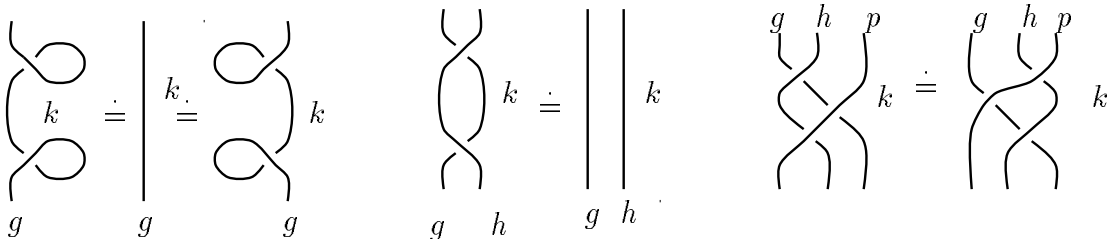
$$\langle \begin{array}{c} g \quad h \\ \swarrow \quad \searrow \\ h \quad h^{-1}gh \end{array} k \rangle \longrightarrow B(g \otimes h \otimes k), \quad \begin{array}{c} g \quad h \\ \swarrow \quad \searrow \\ ghg^{-1} \quad g \end{array} k \longrightarrow B^{-1}(ghg^{-1} \otimes g \otimes k).$$

Le poids d'un diagramme coloré sera par définition le produit des poids de ses croisements.

Remarque :

- i) Nous verrons plus tard que cette définition du poids a été suggérée par les relations de compatibilité induites pas les mouvements de Reidemeister ainsi que la compatibilité des croisements avec des points triples.
- ii) Si on demande l'invariance des poids par le deuxième mouvement de Reidemeister, il suffit alors de définir le poids pour le croisement positif; celui du croisement négatif découle de l'invariance demandée.

Afin de définir un invariant des entrelacs, on étudie l'action des mouvements de Reidemeister sur ces poids. Les mouvements de Reidemeister pour les diagrammes colorés sont donnés par :



1^{er} mouvement

2^{ème} mouvement

3^{ème} mouvement

où les brins prennent toutes les orientations possibles.

Lemme 5.2 *Le poids d'un diagramme est invariant par les mouvements de Reidemeister des diagrammes colorés.*

Preuve : L'invariance par les premiers et les deuxièmes mouvements est due au fait que $B(g \otimes h \otimes k)$ est inversible pour tous $g, h, k \in G$. Par exemple, pour des flèches descendantes, les égalités correspondant aux diagrammes de ces mouvements sont respectivement

$$\begin{aligned} B^{-1}(g \otimes g \otimes k)B(g \otimes g \otimes k) &= 1, \\ B(g \otimes h \otimes k)B^{-1}(g \otimes h \otimes k) &= 1. \end{aligned}$$

Pour les troisièmes mouvements, il suffit de vérifier que les poids sont invariants pour le diagramme avec les flèches descendantes, les autres s'obtenant comme composition des mouvements précédents. L'égalité correspondant à ce mouvement est

$$\begin{aligned} B(g \otimes h \otimes pk)B(h^{-1}gh \otimes p \otimes k)B(h \otimes p \otimes p^{-1}h^{-1}ghpk) &= \\ = B(h \otimes p \otimes k)B(g \otimes p \otimes p^{-1}hpk)B(p^{-1}gp \otimes p^{-1}hp \otimes k). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Afin de la vérifier, on commence par montrer en utilisant les égalités de 3-cocycle quasi-abélien de (w, Ω) que pour tous $g, h, k, p \in G$:

$$w(g, h, kp)B(gh, k, p) = B(h, k, p)B(g, k, k^{-1}hkp)w(k^{-1}gk, k^{-1}hk, p).$$

Puis on montre 5.6 grâce à cette égalité et à la stabilité par l'action adjointe de Ω . \square

Via l'identification de $\text{Hom}(\Pi_1(L), G)$ avec une coloration d'un diagramme de L par des éléments de G , on note $(D_L)_\rho$ une coloration de D_L par le morphisme $\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(L), G)$. On pose alors $\tilde{Z}(L)$ la somme du poids de $(D_L)_\rho$ sur toutes les colorations ρ possibles de l'entrelacs D_L . C'est-à-dire :

$$\tilde{Z}(L) = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(L), G)} \langle (D_L)_\rho \rangle .$$

Proposition 5.2 *La somme \tilde{Z} est un invariant des entrelacs de rubans.*

Preuve : Soient L un entrelacs, et D_L un diagramme de L . Il faut montrer que \tilde{Z} ne dépend pas du choix du diagramme. Notons D'_L une représentation de L obtenue à partir de D_L par un mouvement de Reidemeister. Si ρ est une coloration de D_L , on sait alors qu'il y a une unique façon de colorer D'_L par ρ .

Or, d'après le lemme précédent, on a pour ρ une coloration de D_L $\langle (D_L)_\rho \rangle = \langle (D'_L)_\rho \rangle$.

Donc

$$\tilde{Z}(L) = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(L), G)} \langle (D_L)_\rho \rangle = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(L), G)} \langle (D'_L)_\rho \rangle .$$

La somme \tilde{Z} ne dépend donc pas du choix du diagramme. D'où la proposition. \square

Remarque :

- i) Si on choisit de munir chaque croisement d'un poids (c'est-à-dire d'une application de $B : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}$), les deux premiers mouvements de Reidemeister nous imposent que $B(g, h, k)$ est un élément inversible de \mathbb{C} pour tous $g, h, k \in G$. Nous verrons dans la suite qu'en fait B est nécessairement de la forme $f(g, h, k)\chi(g, h)f(h, h^{-1}gh, k)$ où $f : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$ et $\chi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$.
- ii) Cet invariant généralise la construction de Reshetikhin, Mattes et Polyak au sens où, si on considère l'algèbre de Hopf d'un groupe abélien G , l'invariant obtenu est le même que celui qu'ils ont construit [MPR93].

5.1.2 Invariant des 3-variétés

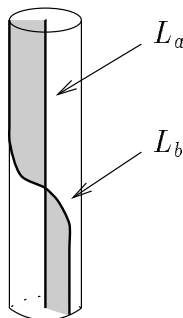
Après avoir rappelé quelques notions sur les 3-variétés obtenues par chirurgie le long d'un entrelacs de S^3 , on montre qu'en restreignant la somme \tilde{Z} à des morphismes du groupe fondamental de la 3-variété, à valeurs dans un groupe G , on obtient un invariant des 3-variétés.

Chirurgie le long d'un entrelacs

Toutes les 3-variétés considérées dans la suite sont des 3-variétés fermées connexes orientées.

Toute 3-variété (fermée connexe orientée) peut être obtenue par une chirurgie sur un entrelacs de rubans non orienté de S^3 (Cf [Tur94]). Plus précisément, à tout entrelacs de rubans non orienté à n brins de S^3 , on associe un voisinage tubulaire plein, composé de n tores U_1, \dots, U_n de telle manière qu'un des bords des brins de rubans est sur les âmes des tores et l'autre bord des brins de rubans est sur les bords des tores. Ces tores sont vus dans S^3 qui est le bord de la boule B^4 de dimension 4. On colle alors des 2-anses $B^2 \times B^2$ sur B^4 le long du voisinage tubulaire en identifiant pour tout $p \in [1, \dots, n]$ U_p avec $\partial B^2 \times B^2$. On obtient ainsi une variété de dimension 4. La variété associée à l'entrelacs est le bord de cette 4-variété.

Soient L un entrelacs et M_L la variété qui lui est associée. On note L_a le bord de L situé sur l'âme des tores et L_b le bord de L situé sur le bord du voisinage tubulaire.



La construction de M_L permet d'obtenir le groupe fondamental de M_L , comme un quotient du groupe fondamental de L . Par définition $\Pi_1(L)$ est le groupe fondamental du complémentaire de L_a dans S^3 . Le collage des 2-anses sur B^4 le long des voisinages tubulaires,

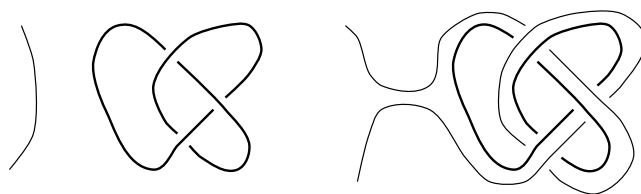
implique que le groupe fondamental de M_L est $\Pi_1(L)$ quotienté par les classes, dans $\Pi_1(L)$, de L_b (Cf [PS97]).

Kirby a montré (Cf [PS97]), que deux entrelacs de rubans de S^3 produisent la même 3-variété si et seulement s'ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par une suite finie de mouvements, appelés depuis mouvements de Kirby.

Le premier mouvement de Kirby consiste à ajouter ou à enlever un brin, non entrelacé avec les autres brins, de framing ± 1 .

Le second mouvement consiste à changer un brin par l'opération suivante : on coupe le brin puis on pousse une extrémité le long d'un autre brin pour la recoller sur l'extrémité restante.

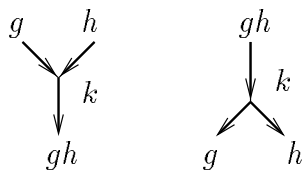
Au niveau des diagrammes planaires ce mouvement se dessine :



Décomposition du deuxième mouvement de Kirby

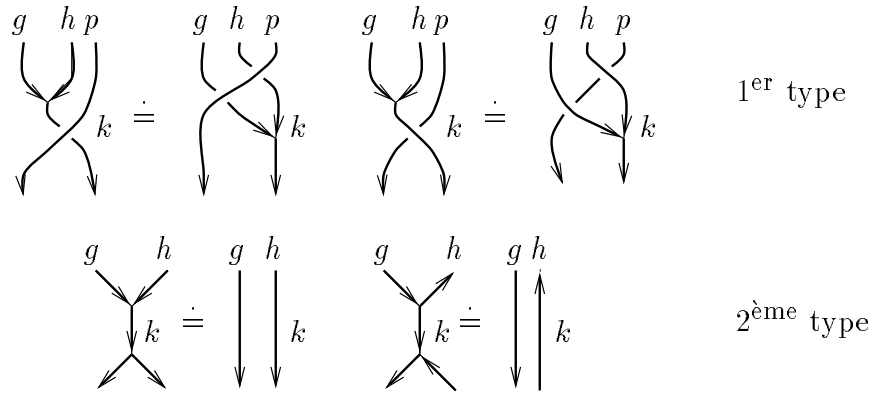
Pour que l'application qui à M_L associe $\tilde{Z}(L)$ soit un invariant des 3-variétés, il faut que \tilde{Z} soit stable par les mouvements de Kirby et qu'il ne dépende pas de l'orientation choisie sur l'entrelacs.

De même que dans (Cf [MPR93]), afin d'étudier l'action du deuxième mouvement de Kirby sur \tilde{Z} , on décompose ce mouvement, au niveau des diagrammes planaires, grâce à des diagrammes à point triple :



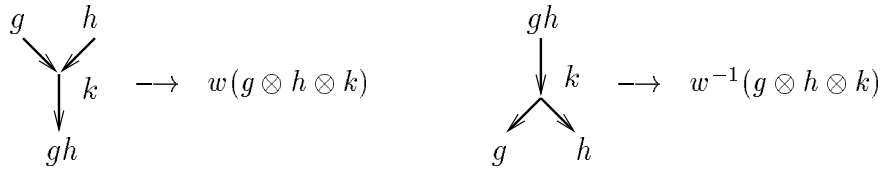
Un tel diagramme a par définition trois composantes. Le coloriage se fait de la manière suivante : en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, on fait le produit des couleurs des composantes qui vont vers le point triple et de l'inverse des couleurs des composantes qui partent du point triple; ce produit doit être égal à l'identité du groupe.

Afin de décomposer le deuxième mouvement de Kirby, on demande que ces diagrammes soient compatibles avec les croisements au sens suivant :



L'utilisation du premier et du deuxième mouvements de Reidemeister nous permet d'obtenir les diagrammes du premier type avec toutes les directions de brins possibles.

A un 3-cocycle quasi-abélien (w, Ω) on associe les poids des diagrammes à point triple :



Remarque : Si on demande que les poids soient compatibles aux mouvements précédents il suffit alors de définir le poids pour un des points triples; le poids du second se déduit de la compatibilité avec les diagrammes du second type.

Lemme 5.3 *Le poids d'un diagramme est invariant par les mouvements de compatibilité précédents.*

Preuve : L'invariance par les mouvements du second type se déduit de l'inversibilité de $w(g, h, k)$ pour tous $g, h, k \in G$.

Les égalités des diagrammes du premier type se traduisent par :

$$\begin{aligned}
 w(g \otimes p \otimes qk)B(gp \otimes q \otimes k) &= \\
 &= B(p \otimes q \otimes k)B(g \otimes q \otimes q^{-1}pqk)w(q^{-1}gq \otimes q^{-1}pq \otimes k), \\
 w(g \otimes p \otimes qk)B^{-1}(gpqp^{-1}g^{-1} \otimes gp \otimes k) &= \\
 &= B^{-1}(pqp^{-1} \otimes p \otimes k)B^{-1}(gpqp^{-1}g^{-1} \otimes g \otimes pk)w(g \otimes p \otimes k).
 \end{aligned}$$

Ces égalités se montrent en utilisant (5.3) et (5.4) pour la première et (5.3) et (5.5) pour la deuxième. \square

Remarque : Inversement, si le poids du diagramme à point triple est donné par une application $f : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ et le poids d'un croisement par une application $B : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}$, les conditions dues aux mouvements de Reidemeister et de compatibilité des points triples avec les croisements entraînent que $f(g, h, k)$ et $B(g, h, k)$ sont inversibles pour tous $g, h, k \in G$ et que

$$\begin{aligned}
 & f(g \otimes h \otimes k)B(ghg^{-1} \otimes g \otimes k)f^{-1}(ghg^{-1} \otimes g \otimes k) = \\
 & = f(g \otimes h \otimes pk)B(ghg^{-1} \otimes g \otimes pk)f^{-1}(ghg^{-1} \otimes g \otimes pk), \\
 & f^{-1}(g \otimes h \otimes pk)B(g \otimes h \otimes pk)f(h \otimes h^{-1}gh \otimes pk) = \\
 & = f^{-1}(p^{-1}gp \otimes p^{-1}hp \otimes k)B(p^{-1}gp \otimes p^{-1}hp \otimes k)f(p^{-1}hp \otimes p^{-1}h^{-1}ghp \otimes k).
 \end{aligned}$$

La première égalité permet de dire que pour tous $g, h, k \in G$

$$F(g \otimes h \otimes k)B(ghg^{-1} \otimes g \otimes k)F^{-1}(ghg^{-1} \otimes g \otimes k)$$

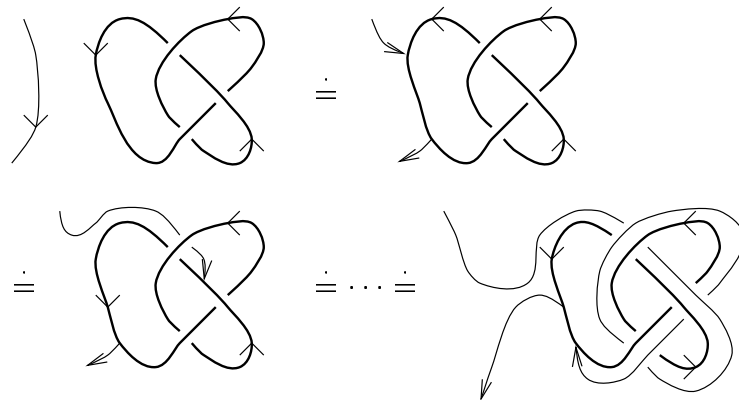
est indépendant de k . Notons $\chi(g, h)$ sa valeur en g, h . L'application B est alors de la forme

$$B(g, h, k) = f(g, h, k)\chi(g, h)f^{-1}(h, h^{-1}gh, k).$$

La deuxième égalité nous montre de plus que χ est stable par l'action adjointe.

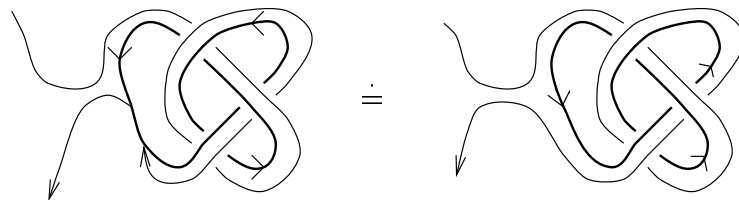
Ceci nous a conduit à définir les poids associés à un 3-cocycle (w, Ω) de la cohomologie quasi-abélienne, en prenant $f = w$ et $\chi = \Omega$.

Grâce à ces diagrammes, on peut donner une décomposition du deuxième mouvement de Kirby. Par exemple :

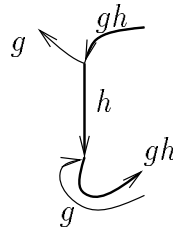


Dans toute la suite on choisira toujours de pousser le brin à contresens de l'orientation de l'autre brin.

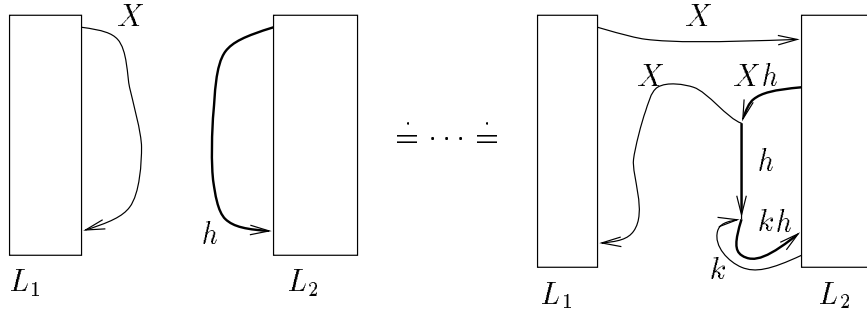
Afin de décomposer totalement le deuxième mouvement de Kirby, il faut encore effectuer l'étape suivante :



On appellera cela l'étape de séparation. Pour pouvoir faire cette étape, les couleurs du diagramme doivent être compatibles, c'est-à-dire être du type :



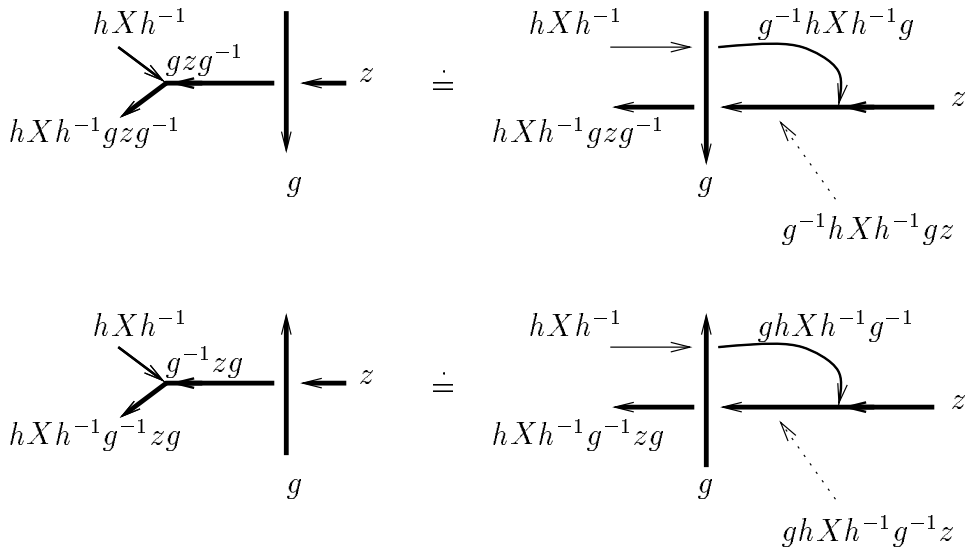
Si on note L_1 le brin qui est poussé à contresens le long de L_2 il faut étudier un diagramme du type



Pour savoir si on peut séparer les brins, il faut donc connaître la couleur k de la composante du brin L_1 qui arrive au point triple. Afin de différencier le brin L_1 du brin L_2 lors des croisements dans le tressage, on note formellement X la couleur de L_1 à l'entrée du tressage. On peut ainsi supposer que la coloration de L_2 ne fait pas intervenir la couleur X . On va étudier les changements de couleurs de L_1 .

Lemme 5.4 *La couleur k de la composante de L_1 à l'étape de séparation est un conjugué de X par un élément τ de G qui est un produit de couleurs intervenant dans L_2 .*

Preuve : Les croisements qui changent la coloration de L_1 sont ceux où L_1 est poussé sous une composante de L_2 (on dit que L_1 est coupé). Il y a alors deux types de croisements possibles : L_1 est poussé soit sous une composante de L_2 déjà doublée par L_1 (une telle composante est appelée composante doublée), soit sous une composante non doublée. Dans ce dernier cas on peut avoir :



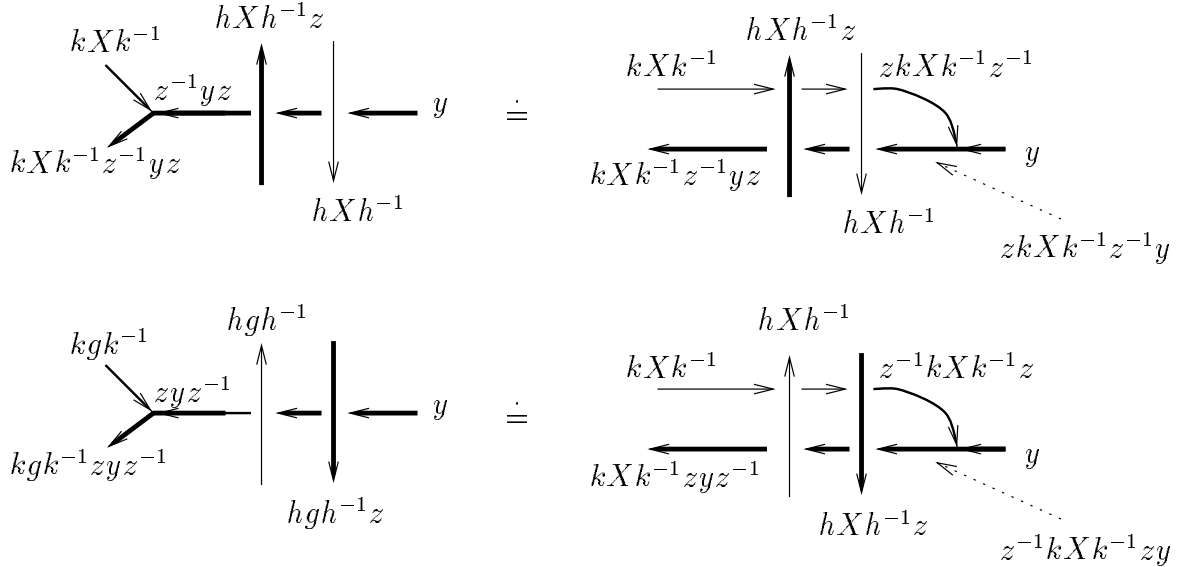
où les composantes de L_1 sont en traits fins et celles de L_2 en traits épais.

La couleur de L_1 change donc par une conjugaison par une couleur intervenant dans L_2 . Si L_1 est coupé par une composante de couleur g et si X est conjuguée par h avant le croisement, il est conjugué après le croisement par gh si le croisement est positif ou par $g^{-1}h$ si le croisement est négatif.

Si L_2 a été doublé, d'après le cas précédent et le cas suivant, on voit que les couleurs des brins sont du type :

$$\begin{aligned} \longrightarrow & hXh^{-1} \\ \longleftarrow & hXh^{-1}g \end{aligned}$$

Dans le cas où L_1 est poussé sous une composante doublée, on peut avoir :



On voit que tous les changements de couleurs de L_1 se font par une conjugaison par une couleur intervenant dans L_2 . Plus précisément, l'élément qui se rajoute dans la conjugaison de X est la couleur initiale (avant le doublage) de la composante de L_2 , avec la même convention de signe que pour le cas non doublé.

Le lemme est donc démontré. □

Invariant des 3-variétés associé à un 3-cocycle quasi-abélien

Le groupe fondamental d'une 3-variété étant un quotient du groupe fondamental d'un entrelacs, à chaque élément de $\text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)$, on peut associer une coloration d'un diagramme de l'entrelacs.

Proposition 5.3 *Soient L un entrelacs orienté, D_L un diagramme planaire de L et M_L la variété qui lui est associée par chirurgie. La somme*

$$Z(L) = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)} \langle (D_L)_\rho \rangle$$

ne dépend pas du choix de D_L et est invariante par le deuxième mouvement de Kirby. En particulier on peut effectuer l'étape de séparation.

Remarque : La somme $Z(L)$ est encore un invariant des entrelacs.

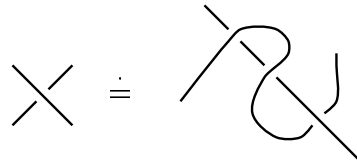
Preuve : Il est clair que $Z(L)$ ne dépend pas du choix du diagramme. On va démontrer la deuxième partie de la proposition pour une coloration d'un diagramme D_L , de l'entrelacs L , par des éléments de $\Pi_1(M_L)$. Il en sera alors de même pour une coloration issue d'un $\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)$.

La preuve se fait en deux étapes. On va d'abord montrer qu'avec une coloration par des éléments de $\Pi_1(M_L)$, on peut décomposer totalement le deuxième mouvement de Kirby par les diagrammes à point triple du premier et du deuxième type. Puis on montre que $Z(L)$ est invariant par le deuxième mouvement de Kirby.

Soient L_1 et L_2 deux brins distincts de D_L . En gardant les notations du lemme précédent, il faut montrer que l'élément τ qui conjugue X est l'identité de $\Pi_1(M_L)$. Pour cela, si U_2 est le voisinage tubulaire de L_2 servant à la construction de M_L , $L_{2,a}$ le bord de L_2 situé sur l'âme de U_2 et $L_{2,b}$ le bord de L_2 situé sur le bord de U_2 , on va montrer que τ est dans la classe de $L_{2,b}$ dans $\Pi_1(L)$.

Pour calculer la classe de $L_{2,b}$, on se fixe un point base, puis on parcourt le brin $L_{2,b}$ dans le sens de l'entrelacs. Par définition, la classe sera le produit, dans l'ordre de rencontre, des couleurs des composantes C_i telles que $L_{2,b}$ effectue un tour autour des C_i dans le sens positif, ou de l'inverse des couleurs si $L_{2,b}$ tourne autour dans le sens négatif.

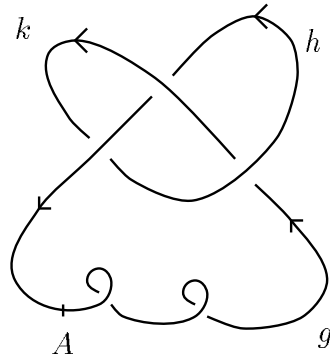
Au niveau de la représentation plane on fixe comme convention que le brin fait un tour autour d'une composante si et seulement si dans la représentation plane il est coupé par cette composante. En effet, à isotopie et mouvement de Reidemeister près, on a :



Remarque : On aurait aussi pu prendre comme convention que le brin fait un tour autour d'une composante si et seulement si dans la représentation plane il coupe cette composante.

Donc, calculer la classe revient à multiplier, dans l'ordre de rencontre, les couleurs (respectivement les inverses) des composantes qui ont coupé le brin parcouru, en un croisement positif (respectivement négatif).

Par exemple, pour le noeud ci-dessous en partant de A , on fait 2 fois le tour de g en sens négatif, puis on fait le tour de h en sens positif, puis de g en sens positif, et pour terminer de k en sens positif; la classe est donc $g^{-2}h g k$.



Or on a vu dans la preuve du lemme (5.4) que pour déterminer l'élément τ de $\Pi_1(L)$ qui conjugue la couleur de la composante de L_1 on fait exactement ces opérations. Donc τ est dans la classe de $L_{2,b}$ de $\Pi_1(L)$, c'est-à-dire que $\tau = e$ dans $\Pi_1(M_L)$, où e est l'identité de $\Pi_1(M_L)$. On peut donc totalement décomposer le deuxième mouvement de Kirby grâce aux diagrammes à point triple.

Il reste à voir que $Z(L)$ est invariant par ce mouvement. Soient L' l'entrelacs obtenu à partir de L par ce mouvement. Comme $Z(L')$ ne dépend pas du choix du diagramme, on peut prendre comme diagramme de L' celui obtenu, à partir du diagramme D_L , après la décomposition du deuxième mouvement de Kirby par des points triples. Dans ce cas on passe de D_L à $D_{L'}$ par une suite finie de mouvements avec point triple.

Si D'_L est obtenu à partir de D_L par un mouvement avec point triple, il y a une unique façon de colorer D'_L à partir de la coloration de D_L . On a vu que pour cette coloration $\langle D_L \rangle = \langle D'_L \rangle$ (lemme 5.3). Donc, à toute coloration ρ de D_L on associe une unique coloration ρ' de $D_{L'}$; de plus, pour cette coloration, on a $\langle (D_L)_\rho \rangle = \langle (D_{L'})_{\rho'} \rangle$. D'où $Z(L) = Z(L')$. \square

Afin de montrer que $Z(L)$ est indépendant du choix de l'orientation de L , on demande au croisement de vérifier les égalités de normalisations suivantes valables pour toutes les orientations possibles :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 g & g & 1_G & 1_G & g & g & 1_G & 1_G & g \\
 \left| \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \diagup \\ k \end{array} \right. & \doteq & \left| \begin{array}{c} k \\ \diagup \\ \diagdown \\ k \end{array} \right. & \doteq & \left| \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \diagup \\ k \end{array} \right. & \doteq & \left| \begin{array}{c} k \\ \diagup \\ \diagdown \\ k \end{array} \right. & \doteq & \left| \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \diagup \\ k \end{array} \right.
 \end{array}$$

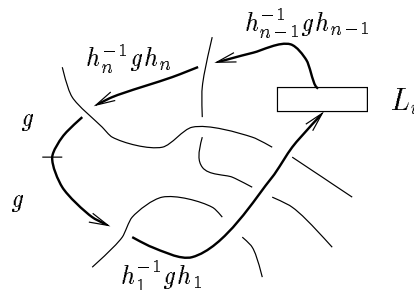
où 1_G est l'unité de G .

Le poids B doit donc vérifier $B(1_G \otimes g \otimes k) = B(g \otimes 1_G \otimes k) = 1$ pour tous $g, k \in G$.

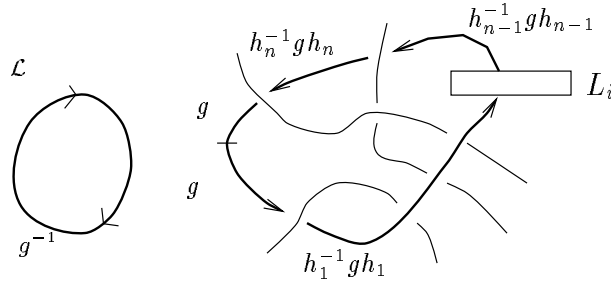
Dans le cas d'un poids provenant d'un 3-cocycle (w, Ω) si on impose à w d'être normalisé, c'est-à-dire que $w(g_1, g_2, g_3) = 1$ dès qu'un des g_i vaut 1_G . Alors par les relations de 3-cocycle quasi-abélien, on a $\Omega(g_1, g_2) = 1$ dès que un des g_i vaut 1_G . D'où, par définition de B l'égalité des poids souhaitée.

Lemme 5.5 *Soient M une 3-variété et L un entrelacs qui permet d'obtenir M . La somme $Z(L)$ ne dépend pas du choix de l'orientation de L .*

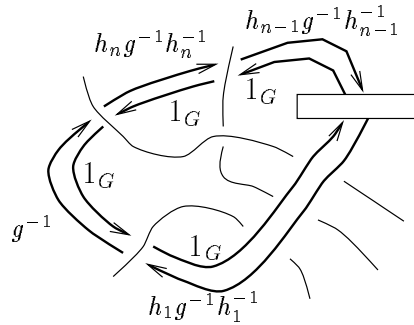
Preuve : On choisit une orientation de L . Soit ρ un coloriage d'un diagramme D_L de L . On étudie le changement d'orientation d'un des brins de L et donc de D_L . Soit L_i un brin de L . On note L' l'entrelacs obtenu en changeant l'orientation de L_i . Le brin L_i est de la forme



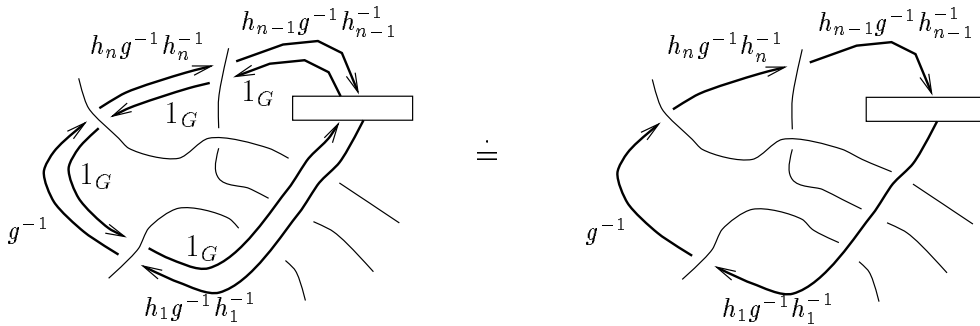
Soit $(D_{\mathcal{L}})_\rho$ un diagramme de couleur g^{-1} d'un brin non entrelacé sans framing de sens opposé à celui de L_i . Notons $(D_{\mathcal{L} \sqcup L})_\rho$ le diagramme coloré obtenu par juxtaposition de $D_{\mathcal{L}}$ et de L , tel que $D_{\mathcal{L}}$ soit situé à coté du brin L_i . Il est clair que $\langle (D_{\mathcal{L} \sqcup L})_\rho \rangle = \langle (D_L)_\rho \rangle$.



Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour le deuxième mouvement de Kirby, on obtient après avoir poussé $D_{\mathcal{L}}$ le long de L_i :



Après avoir poussé $D_{\mathcal{L}}$ le long de L_i , on remarque que L_i est coloré par 1_G . Et donc, par hypothèse de normalisation des croisements, on a :



On obtient ainsi un diagramme de L' ; notons le $D_{L'}$. Il est clair que de cette manière on associe à une coloration ρ de D_L une unique coloration ρ' de $D_{L'}$. On a donc une bijection entre les colorations de L et celles de L' . De plus, comme les étapes précédentes préservent le poids des entrelacs, on a

$$\langle (D_L)_\rho \rangle = \langle (D_{\mathcal{L} \sqcup L})_\rho \rangle = \langle (D_{L'})_{\rho'} \rangle .$$

Via la bijection précédente, on a :

$$\sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)} \langle (D_L)_\rho \rangle = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)} \langle (D_{L'})_{\rho'} \rangle = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_{L'}), G)} \langle (D_{L'})_\rho \rangle .$$

Le lemme est donc démontré. □

Théorème 5.1 *Soit (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien normalisé (au sens précédent). L'invariant Z induit par le poids associé à ce 3-cocycle est un invariant des 3-variétés. Si M est une 3-variété obtenue par chirurgie le long d'un entrelacs L , on note $Z(M) = Z(L)$.*

Preuve : Il faut voir que Z est stable par le premier mouvement de Kirby.

Soit L un entrelacs. On va montrer que $Z(L)$ est invariant si on ajoute un brin \mathcal{L} , de framing ± 1 , non entrelacé avec L . Notons $L \sqcup \mathcal{L}$ l'entrelacs ainsi obtenu.

Par définition de \mathcal{L} la seule coloration possible de $D_{\mathcal{L}}$ par G est 1_G . D'où, comme D_L et $D_{\mathcal{L}}$ ne sont pas entrelacés :

$$\sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_{L \sqcup \mathcal{L}}), G)} \langle (L \sqcup \mathcal{L})_{\rho} \rangle = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)} \langle L_{\rho} \rangle \langle \mathcal{L}_{1_G} \rangle = \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)} \langle L_{\rho} \rangle .$$

On fait de même pour montrer que Z est invariant si on enlève un brin non entrelacé de framing ± 1 .

Donc $Z(M)$ ne dépend pas du choix de l'entrelacs permettant d'obtenir M par chirurgie. D'où le théorème. \square

Remarque : Dans le cas G abélien, \tilde{Z} est un invariant des 3-variétés, car l'élément qui conjugue se simplifie automatiquement, et on peut tout de suite séparer les brins. Pour avoir la stabilité par rapport au premier mouvement de Kirby, il faut ajouter un coefficient devant \tilde{Z} (Cf [MPR93]).

5.2 Invariant d'Altschüler et Coste

Dans [Roc91] et [DPR90], Dijkgraaf, Pasquier et Roche ont défini à partir d'un 3-cocycle normalisé w , une structure tordue sur le double d'un groupe. Ils obtiennent ainsi une quasi-algèbre de Hopf, notée $D^w(g)$. On va voir que cette construction peut être expliquée avec l'identité générale d'Hochschild-Serre. Grâce à cela, on montre que si (w, Ω) est un 3-cocycle quasi-abélien normalisé, $D^w(G)$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf, ou d'une structure de quasi-algèbre de Hopf. A partir de ce 3-cocycle, on peut donc construire l'invariant d'Altschüler et Coste [AC92] associé à une quasi-algèbre de Hopf, ainsi que l'invariant de Reshetikhin et Turaev [RT90] associé à une algèbre de Hopf. Après avoir démontré que l'invariant construit à partir de l'algèbre de Hopf est trivial, on montre que l'invariant obtenu avec la quasi-algèbre de Hopf peut être retrouvé à partir de l'invariant Z .

5.2.1 Structure d'algèbre de Hopf tordue

Soient θ, γ des applications ensemblistes de $G \times G \times G$ dans \mathbb{C}^* . On veut modifier la structure de bigèbre du double de Drinfeld $D(G)$ par :

$$\delta_g \otimes x . \delta_h \otimes y = \delta_g (x h x^{-1}) \delta_g \otimes x y \theta(g, x, y),$$

$$\Delta(\delta_g \otimes x) = \sum_{pq=g} \delta_p \otimes x \otimes \delta_q \otimes x \gamma(x, p, q),$$

avec $x, y \in G$, et $(\delta_g)_{g \in G}$ la base duale de $\mathbb{C}[G]^*$, avec $\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Le produit ainsi défini est associatif si et seulement si :

$$\theta(g, x, y)\theta(g, xy, z) = \theta(g, x, yz)\theta(x^{-1}gx, y, z). \quad (5.7)$$

Le coproduit est coassociatif si et seulement si :

$$\gamma(x, p, q)\gamma(x, pq, r) = \gamma(x, q, r)\gamma(x, p, qr). \quad (5.8)$$

Pour que $D(G)$ soit une algèbre unitaire et une cogèbre counitaire, il faut que γ et θ soient normalisées. Cette structure forme une bigèbre si et seulement si :

$$\gamma(xy, p, q)\theta(pq, x, y) = \gamma(x, p, q)\gamma(y, x^{-1}px, x^{-1}qx)\theta(p, x, y)\theta(q, x, y). \quad (5.9)$$

Double complexe et structure d'algèbre de Hopf tordue

Le morphisme de Hochschild-Serre (section 3.3.2) est un morphisme entre un complexe et un complexe total. Après avoir réécrit le bicomplexe associé à ce complexe total de manière multiplicative, nous allons interpréter les conditions (5.7), (5.8) et (5.9) en termes de cocycle de ce bicomplexe.

Soit G un groupe. On pose $C^p(G, \mathbb{C}) = \text{Reg}(C[G]^{\otimes p}, \mathbb{C})$, alors $C^p(G, \mathbb{C})$ est un groupe abélien pour le produit de convolution.

On peut donc définir pour tous $p, q \in \mathbb{N}$:

$$C^p(G, C^q(G, \mathbb{C})) = \text{Reg}(C[G]^{\otimes p}, C[C^q(G, \mathbb{C})]).$$

La différentielle verticale du bicomplexe multiplicatif est donnée pour tout $q \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} D_p^{(q)} : C^p(G, C^q(G, \mathbb{C})) &\longrightarrow C^{p+1}(G, C^q(G, \mathbb{C})) \\ f &\longmapsto D_p^{(q)}(f) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_p^{(q)}(f)(g_1 \otimes \dots \otimes g_{p+1})(h_1 \otimes \dots \otimes h_q) &= \\ &= f^{(-1)^q}(g_2 \otimes \dots \otimes g_{p+1})(g_1^{-1}h_1g_1 \otimes \dots \otimes g_1^{-1}h_qg_1) \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^p f^{(-1)^{i+q}}(g_1 \otimes \dots \otimes g_i g_{i+1} \otimes \dots \otimes g_{p+1})(h_1 \otimes \dots \otimes h_q) \\ &\quad \cdot f^{(-1)^{p+q+1}}(g_1 \otimes \dots \otimes g_p)(h_1 \otimes \dots \otimes h_q), \end{aligned}$$

où la notation $f^{-1}(g_1 \otimes \dots \otimes g_p)(h_1 \otimes \dots \otimes h_q)$ signifie l'inverse dans \mathbb{C} de $f(g_1 \otimes \dots \otimes g_p)(h_1 \otimes \dots \otimes h_q)$; cet inverse existe car $f \in \text{Reg}(G, \mathbb{C})$.

La différentielle horizontale du bicomplexe multiplicatif est donnée pour tout $p \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} d_q^{(p)} : C^p(G, C^q(G, \mathbb{C})) &\longrightarrow C^p(G, C^{q+1}(G, \mathbb{C})) \\ f &\longmapsto d_q^{(p)}(f) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 d_q^{(p)}(f)(g_1 \otimes \dots \otimes g_p)(h_1 \otimes \dots \otimes h_{q+1}) &= \\
 &= f(g_1 \otimes \dots \otimes g_p)(h_2 \otimes \dots \otimes h_{q+1}) \\
 &\cdot \prod_{i=1}^q f^{(-1)^i}(g_1 \otimes \dots \otimes g_q)(h_1 \otimes \dots \otimes h_i h_{i+1} \otimes \dots \otimes h_{q+1}) \\
 &\cdot f^{(-1)^{q+1}}(g_1 \otimes \dots \otimes g_p)(h_1 \otimes \dots \otimes h_q).
 \end{aligned}$$

Le bicomplexe $C \cdot (G, C \cdot (G, \mathbb{C}))$ s'écrit alors :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & & & & & \\
 C^4(G, \mathbb{C}) & \dots & & & & & \\
 \uparrow D_3^{(0)} & & & \vdots & & & \\
 C^3(G, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} & C^3(G, C^1(G, \mathbb{C})) & \dots & & & \\
 \uparrow D_2^{(0)} & & \uparrow D_2^{(1)} & & \vdots & & \\
 C^2(G, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d_0^{(2)}} & C^2(G, C^1(G, \mathbb{C})) & \xrightarrow{d_1^{(2)}} & C^2(G, C^2(G, \mathbb{C})) & \dots & \\
 \uparrow D_1^{(0)} & & \uparrow D_1^{(1)} & & \uparrow D_1^{(2)} & & \vdots \\
 C^1(G, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d_0^{(1)}} & C^1(G, C^1(G, \mathbb{C})) & \xrightarrow{d_1^{(1)}} & C^1(G, C^2(G, \mathbb{C})) & \xrightarrow{d_2^{(1)}} & C^1(G, C^3(G, \mathbb{C})) \\
 \uparrow D_0^{(0)} & & \uparrow D_0^{(1)} & & \uparrow D_0^{(2)} & & \uparrow D_0^{(3)} \\
 \mathbb{C}^* & \xrightarrow{d_0^{(0)}} & C^1(G, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d_1^{(0)}} & C^2(G, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d_2^{(0)}} & C^3(G, \mathbb{C})
 \end{array}$$

L'application θ peut être vue comme un élément de $C^2(G, C^1(G, \mathbb{C}))$ par $\theta(x \otimes y)(g) = \theta(g, x, y)$ pour tous $x, y, g \in G$. Dans ce cas, la condition (5.7) revient à dire que θ est 2-cocycle pour $D_1^{(1)}$.

L'application γ peut être vue comme un élément de $C^1(G, C^2(G, \mathbb{C}))$ par $\gamma(x)(g \otimes h) = \gamma(x, g, h)$ pour tous $g, h, x \in G$. Dans ce cas, la condition (5.8) revient à dire que γ est 2-cocycle pour $d_1^{(1)}$.

Dans ce cadre la condition (5.9) devient $d_1^{(2)}(\theta) = D_1^{(2)}(\gamma)$.

D'où le lemme :

Lemme 5.6 *L'espace $D(G)$ muni des structures de produit et de coproduit tordues est une algèbre de Hopf si et seulement si $(1, \gamma, \theta, 1)$ est un 3-cocycle normalisé pour le complexe total $\text{Tot}(G, G; \mathbb{C})$ associé au bicomplexe $C \cdot (G, C \cdot (G, \mathbb{C}))$.*

Preuve : On a déjà vu que $D(G)$ est une bigèbre. L'antipode est donnée par

$$S(\delta_g \otimes x) = \delta_{x^{-1}g^{-1}x} \otimes x^{-1} \theta^{-1}(g^{-1}, x, x^{-1}) \gamma(x, g, g^{-1}).$$

□

On peut généraliser le lemme. Soient $w \in C^3(G, \mathbb{C})$ et e l'unité de G . On pose :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \sum_{p,q,r} w^{-1}(p \otimes q \otimes r) \delta_p \otimes e \otimes \delta_q \otimes e \otimes \delta_r \otimes e, \\
 p &= \sum_{g \in G} \delta_g \otimes e \quad q = \sum_{g \in G} w(g \otimes g^{-1} \otimes g) \delta_g \otimes e.
 \end{aligned}$$

Proposition 5.4 *L'espace $D(G)$ muni des structures de produit, de coproduit tordues, de l'associateur ϕ et des constantes p, q est une quasi-algèbre de Hopf si et seulement si $(w, \gamma, \theta, 1)$ est un 3-cocycle normalisé pour le complexe total.*

Preuve : Comme pour le lemme, on montre que $D(G)$ est une algèbre et que le coproduit est un morphisme d'algèbres.

Les égalités

$$\begin{aligned} (\text{Id} \otimes \Delta) \Delta(\delta_g \otimes x) &= \phi(\Delta \otimes \text{Id}) \Delta(\delta_g \otimes x) \phi^{-1}, \\ (\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \Delta)(\phi)(\Delta \otimes \text{Id} \otimes \text{Id})(\phi) &= (1 \otimes \phi)(\text{Id} \otimes \Delta \otimes \text{Id})(\phi)(\phi \otimes 1) \end{aligned}$$

découlent respectivement de $d_2^{(1)}(\gamma) = D_0^{(3)}(w)$ et de $d_3^{(0)}(w) = 1$.

En prenant comme antipode celle du lemme 5.6, on vérifie immédiatement que $D(G)$ est une quasi-algèbre avec ϕ , p et q . \square

Identité générale d'Hochschild-Serre et quasi-algèbre de Hopf

On va donner une interprétation de la construction de la quasi-algèbre de Hopf $D^w(G)$, en terme d'identité générale d'Hochschild-Serre.

Le morphisme de Hochschild-Serre φ appliqué à $C^\cdot(G, \mathbb{C})$ s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varphi_n &: C^n(G, \mathbb{C}) &\longrightarrow & Tot^n(G, G; \mathbb{C}) \\ &f &\longmapsto & (f_0, \dots, f_n) \end{aligned}$$

où $f_i \in C^i(G, C^j(G, \mathbb{C}))$ pour $i + j = n$ et

$$f_i = \prod_{\sigma \in S_{j,n}} (f \circ T_\sigma)^{(-1)^{|\sigma|}} \Big|_{\mathbb{C}[G]^{\otimes j} \otimes \mathbb{C}[G]^{\otimes i}}.$$

Remarque :

- i) On écrit $f(a^1 \otimes \dots \otimes a^i)(h^1 \otimes \dots \otimes h^j) = f(h^1 \otimes \dots \otimes h^j \otimes a^1 \otimes \dots \otimes a^i)$
- ii) $f_0 = f|_{\mathbb{C}[G]^{\otimes n}}$
 $f_n = f$

L'identité générale de Hochschild-Serre s'écrit alors :

Théorème 5.2 *L'application φ est un morphisme de complexe. C'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} C^n(G, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d_n^{(0)}} & C^{n+1}(G, \mathbb{C}) \\ \varphi_n \downarrow & & \varphi_{n+1} \downarrow \\ Tot_n(G, G; \mathbb{C}) & \xrightarrow{(d*D)_n} & Tot_{n+1}(G, G; \mathbb{C}) \end{array}$$

où $d * D(f) = d(f) * D(f)$.

L'image (w, w_1, w_2, w) d'un 3-cocycle w normalisé des groupes par ce morphisme est donc un 3-cocycle normalisé pour le complexe total. Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n(G, \mathbb{C})$ on a $d_0^{(p)}(f) \equiv 1$, cela est équivalent de dire que $(w, w_1, w_2, 1)$ est un 3-cocycle normalisé du complexe total. D'après la proposition 5.4, l'espace $D(G)$ est alors une quasi-algèbre de Hopf avec le produit donné par $\theta(g, x, y) = w_2(x \otimes y)(g)$ et le coproduit par $\gamma(x, g, h) = w_1(x)(g, h)$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}\theta(g, x, y) &= \theta_g(x \otimes y) = w(g \otimes x \otimes y)w^{-1}(x \otimes x^{-1}gx \otimes y)w(x \otimes y \otimes y^{-1}x^{-1}gxy), \\ \gamma(x, g, h) &= \gamma_x(g \otimes h) = w(g \otimes h \otimes x)w^{-1}(g \otimes x \otimes x^{-1}hx)w(x \otimes x^{-1}gx \otimes x^{-1}hx).\end{aligned}$$

C'est exactement la quasi-algèbre de Hopf $D^w(G)$ définie par Roche [Roc91]. Elle est définie par

en tant qu'espace vectoriel, $D^w(G) = \mathcal{F}(G) \otimes \mathbb{C}[G]$ où $\mathcal{F}(G)$ est le dual de $C[G]$.

La structure d'algèbre est donnée sur les générateurs par :

$$(\delta_g \otimes x) \cdot (\delta_h \otimes y) = \delta_g(xhx^{-1})\delta_g \otimes xy\theta_g(x \otimes y).$$

La structure de cogèbre est donnée par :

$$\Delta(\delta_g \otimes x) = \sum_{pq=g} (\delta_p \otimes x) \otimes (\delta_q \otimes x)\gamma_x(p \otimes q).$$

L'antipode est donnée par :

$$S(\delta_g \otimes x) = \delta_{x^{-1}g^{-1}x} \otimes x^{-1}\theta_{g^{-1}}^{-1}(x \otimes x^{-1})\gamma_x^{-1}(g \otimes g^{-1}).$$

C'est une quasi-algèbre de Hopf avec :

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{g,h,k} w^{-1}(g \otimes h \otimes k)(\delta_g \otimes e) \otimes (\delta_h \otimes e) \otimes (\delta_k \otimes e), \\ \phi^{-1} &= \sum_{g,h,k} w(g \otimes h \otimes k)(\delta_g \otimes e) \otimes (\delta_h \otimes e) \otimes (\delta_k \otimes e), \\ \alpha &= 1 \quad \beta = \sum_g w(g \otimes g^{-1} \otimes g)\delta_g \otimes e.\end{aligned}$$

La R-matrice et son inverse sont données par :

$$R = \sum_{p,q} (\delta_p \otimes e) \otimes (\delta_q \otimes p), \quad R^{-1} = \sum_{p,q} (\delta_p \otimes e) \otimes (\delta_q \otimes p^{-1})\theta_{pqp^{-1}}^{-1}(p \otimes p^{-1}).$$

De plus $D^w(G)$ est de rubans par :

$$\begin{aligned}u &= \sum_g w^{-2}(g \otimes g^{-1} \otimes g)\delta_g \otimes g^{-1}, \\ v &= \sum_g w^{-1}(g \otimes g^{-1} \otimes g)\delta_g \otimes g^{-1}.\end{aligned}$$

Grâce à l'antipode, on peut calculer l'action de $\mathbb{C}[G]$ sur le dual de $D^w(G)$:

$$\delta_g \otimes x \cdot \Psi_{h,y} = \Psi_{g^{-1},xy} \delta_h(x^{-1}g^{-1}x)\theta_{x^{-1}g^{-1}x}(x^{-1}, xy)\theta_{g^{-1}}^{-1}(x, x^{-1})\gamma_x^{-1}(g, g^{-1})$$

où $(\Psi_{g,x})_{g,x \in G \times G}$ est la base duale de $(\delta_g \otimes x)_{g,x \in G \times G}$.

En particulier, si γ est une application de G dans \mathbb{C} , on a :

$$\sum_p \gamma(p)(\delta_p \otimes e) \cdot \Psi_{h,y} = \gamma(h^{-1})\Psi_{h,y}.$$

3-cocycle quasi-abélien et algèbre de Hopf

On montre que l'algèbre $D^w(G)$, munie du coproduit habituel, construite à partir d'un 3-cocycle quasi-abélien, peut être vue soit comme une algèbre de Hopf, soit comme une quasi-algèbre de Hopf.

Soit (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien normalisé. On peut voir Ω dans $C^1(G, C^1(G, \mathbb{C}))$; on pose alors :

$$\begin{aligned}\theta_g(x \otimes y) &= D_1^{(1)}(\Omega)(x \otimes y)(g) = \Omega^{-1}(x^{-1}gx \otimes y)\Omega(g \otimes xy)\Omega^{-1}(g \otimes x), \\ \gamma_x(g \otimes h) &= d_1^{(1)}(\Omega)(x)(g \otimes h) = \Omega(h \otimes x)\Omega^{-1}(gh \otimes x)\Omega(g \otimes x).\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de 3-cocycle de (w, Ω) , on retrouve les applications définies à partir du 3-cocycle w :

$$\begin{aligned}\theta_g(x \otimes y) &= w(g \otimes x \otimes y)w^{-1}(x \otimes x^{-1}gx \otimes y)w(x \otimes y \otimes y^{-1}x^{-1}gxy), \\ \gamma_x(g \otimes h) &= w(g \otimes h \otimes x)w^{-1}(g \otimes x \otimes x^{-1}hx)w(x \otimes x^{-1}gx \otimes x^{-1}hx).\end{aligned}$$

Remarque : Les structures de $D^w(G)$ (sauf β et l'associateur ϕ) sont alors entièrement déterminées par Ω . L'associateur ϕ et β sont déterminés par w .

Dans ce cas, l'action de $\mathbb{C}[G]$ sur le dual de $D^w(G)$ s'écrit :

$$\delta_{g \otimes x}.\Psi_{h,y} = \Psi_{g^{-1},xy}\delta_h(x^{-1}g^{-1}x)\Omega^{-1}(g^{-1} \otimes xy)\Omega(x^{-1}g^{-1}x \otimes y)\Omega^{-1}(g \otimes x).$$

On va voir que $D^w(G)$ peut être aussi vue comme une algèbre de Hopf.

Lemme 5.7 Soient $p \in \mathbb{N}$ et $w \in C^p(G, \mathbb{C})$ stable par conjugaison. On a :

$$D_0^{(p)}(w) \equiv 1.$$

Preuve : Comme w est stable par conjugaison, on a pour des éléments de G :

$$\begin{aligned}D_0^{(p)}(w)(h)(g^1 \otimes \dots \otimes g^p) &= w^{(-1)^p}(h^{-1}g_1h \otimes \dots \otimes h^{-1}g_ph)w^{(-1)^{p+1}}(g_1 \otimes \dots \otimes g_p) \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Proposition 5.5 Soit (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien normalisé. L'algèbre $D^w(G)$ est une algèbre de Hopf de rubans avec la structure de cogèbre et l'antipode de $D^w(G)$ et

$$\begin{aligned}R &= \sum_{p,q} (\delta_p \otimes e) \otimes (\delta_q \otimes p)\Omega(q \otimes p) & R^{-1} &= \sum_{p,q} (\delta_p \otimes e) \otimes (\delta_q \otimes p^{-1})\Omega(q \otimes p^{-1}), \\ u = v &= \sum_p \delta_p \otimes p^{-1}\Omega(p \otimes p^{-1}).\end{aligned}$$

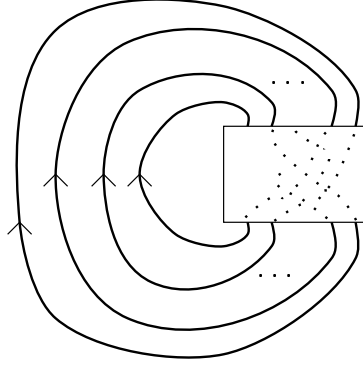
Preuve : Pour que $D^w(G)$ soit une algèbre de Hopf, il faut et il suffit que $(1, \gamma, \theta, 1)$ soit un 3-cocycle normalisé pour le complexe total (lemme 5.6). Or, par l'identité générale de Hochschild-Serre, $(w, \gamma, \theta, 1)$ est un 3-cocycle pour le complexe total. Par le lemme précédent ceci entraîne que $(1, \gamma, \theta, 1)$ est un 3-cocycle du complexe total. D'où la structure d'algèbre de Hopf.

On vérifie ensuite facilement qu'avec les structures de la proposition, $D^w(G)$ est une algèbre de Hopf de rubans. □

5.2.2 Invariant dans le cas algèbre de Hopf

Si on voit $D^w(G)$ comme une algèbre de Hopf de rubans, on peut appliquer le foncteur F_T défini par Reshetikhin et Turaev [RT90], restreint à la représentation régulière gauche de $D^w(G)$ sur lui-même. On montre alors que l'invariant obtenu est trivial.

Tout entrelacs admet pour diagramme planaire la fermeture d'une tresse (Cf [Tur94]):



où la boîte est une tresse. Cette tresse est appelée tressage de l'entrelacs. Dans la suite, quand on parlera d'un diagramme d'un entrelacs, on prendra le diagramme obtenu par la fermeture d'une tresse. Pour calculer la valeur du foncteur F_T sur les entrelacs, on a donc uniquement besoin des valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_T\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \\
 (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto \tau(R_{21} \cdot ((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y))) \\
 = (\delta_{ghg^{-1}} \otimes gy) \otimes (\delta_g \otimes x) \Omega^{-1}(h \otimes y) \Omega(ghg^{-1} \otimes gy),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_T\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) \\
 (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto \tau(R_{21}^{-1} \cdot ((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y))) \\
 = (\delta_h \otimes y) \otimes (\delta_{h^{-1}gh} \otimes h^{-1}x) \Omega^{-1}(g \otimes x) \Omega(h^{-1}gh \otimes h^{-1}x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_T\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right) \\
 1 \mapsto \sum_{g,x} \Psi_{g,x} \otimes u^{-1}v(\delta_g \otimes x) = \sum_{g,x} \Psi_{g,x} \otimes (\delta_g \otimes x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_T\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array}\right) \\
 \Psi_{g,x} \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto \Psi_{g,x}(\delta_h \otimes y) = \delta_g(h) \delta_x(y).
 \end{aligned}$$

Lorsqu'on applique le foncteur F_T , on munit la $i^{\text{ème}}$ sortie du tressage d'une couleur $\delta_{g_i} \otimes x_i$, puis à chaque croisement on change les couleurs selon la règle :

$$\begin{array}{ccc}
 \delta_{h^{-1}gh} \otimes h^{-1}x & & \delta_{ghg^{-1}} \otimes gx \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 \delta_g \otimes x & \delta_h \otimes y & \delta_g \otimes x & \delta_h \otimes y
 \end{array}$$

A l'entrée du tressage, la $i^{\text{ème}}$ entrée a une couleur de la forme $\delta_{H_i g r_i H_i^{-1}} \otimes H_i x_{r_i}$ pour certains éléments $H_i \in G$ et où $i \mapsto r_i$ est l'inverse de la permutation associée à la tresse. Le

foncteur F_T appliqué à la fermeture de la tresse donne donc des conditions sur les couleurs : $g_i = H_i g_{r_i} H_i^{-1}$ et $x_i = H_i x_{r_i}$.

La valeur de F_T sur un entrelacs L dont le tressage a p entrées s'écrit donc comme une somme, sur $2p$ éléments de G vérifiant certaines conditions, de produit de valeur de Ω sur des éléments fabriqués avec ces $2p$ couleurs. On note $\delta(g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p)$ les conditions sur les couleurs et $\chi_\Omega(g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p)$ le produit de Ω . C'est-à-dire

$$F_T(L) = \sum_{\substack{g_1, \dots, g_p \in G \\ x_1, \dots, x_p \in G}} \delta(g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p) \chi_\Omega(g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p).$$

Lemme 5.8 *Soit L un entrelacs dont la tresse contient p entrées. Alors*

$$F_T(L) = \sum_{\substack{g_1, \dots, g_p \in G \\ x_1, \dots, x_p \in G}} \delta(g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p).$$

Preuve : Chaque croisement fournit le produit en Ω :

$$\begin{array}{ccc} & \delta_{h^{-1}gh} h^{-1}x & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \delta_{g \otimes x} & & \delta_{h \otimes y} \end{array} \quad \Omega^{-1}(g \otimes x) \Omega(h^{-1}gh \otimes h^{-1}x)$$

$$\begin{array}{ccc} \delta_{ghg^{-1}} \otimes gx & & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \delta_{g \otimes x} & & \delta_{h \otimes y} \end{array} \quad \Omega^{-1}(h \otimes y) \Omega(ghg^{-1} \otimes gy)$$

Par convention, on choisit d'associer ces produits en Ω à la composante qui est coupée du croisement.

En suivant chaque brin de l'entrelacs, on va montrer que le produit en Ω qui en découle vaut 1. On choisit un brin de l'entrelacs et on part d'une de ces sorties du tressage (sa couleur est notée $\delta_{g \otimes x}$). Si le brin de la tresse n'est pas coupé avant l'entrée du tressage, il n'apparaît pas de Ω . En suivant la boucle du brin de l'entrelacs, on arrive sur la fermeture du tressage puis sur une nouvelle sortie. On recommence alors le raisonnement.

On suppose maintenant que le brin de la tresse est au moins coupé une fois avant la sortie du tressage. Au premier croisement qui le coupe, on comptabilise un $\Omega^{-1}(g \otimes x)$ et un $\Omega(HgH^{-1} \otimes Hx)$. Si le brin est de nouveau coupé, il apparaît alors un $\Omega^{-1}(HgH^{-1} \otimes Hx)$ et un $\Omega(KHgH^{-1}K^{-1} \otimes KHx)$. On peut alors simplifier $\Omega(HgH^{-1} \otimes Hx) \Omega^{-1}(HgH^{-1} \otimes Hx)$; il ne reste donc plus que $\Omega^{-1}(g \otimes x) \Omega(KHgH^{-1}K^{-1} \otimes KHx)$. En recommençant le même raisonnement, on voit que le produit en Ω obtenu à l'entrée du tressage est un produit d'éléments de la forme $\Omega^{-1}(g \otimes x) \Omega(HgH^{-1} \otimes Hx)$. On a alors deux possibilités : soit les conditions sur les couleurs imposent $HgH^{-1} = g$ et $Hx = x$ (c'est le cas si en remontant la $i^{\text{ème}}$ sortie on arrive sur la $i^{\text{ème}}$ entrée), on a alors la simplification du produit en Ω . Soit on obtient des conditions $HgH^{-1} = g'$ et $Hx = x'$ avec $g \neq g'$ et $x \neq x'$, qui entraînent

au prochain croisement rencontré une simplification du même type que précédemment de termes en Ω .

En recommençant le raisonnement précédent, on montre que le produit en Ω obtenu pour le brin de l'entrelacs considéré vaut 1. D'où le lemme. \square

Par construction de conditions sur les éléments de la somme de F_T , et par construction du groupe fondamental d'un entrelacs et d'une 3-variété qui lui est associée, on voit que les relations sur les g_i sont celles permettant de définir le groupe fondamental de l'entrelacs (présentation de Wirtinger), et les relations sur les x_i sont celles permettant de définir le groupe fondamental de la variété (démonstration du lemme 5.3).

D'où la proposition :

Proposition 5.6 *Si $D^w(G)$ est munie de sa structure d'algèbre de Hopf de rubans, l'invariant de Turaev qui lui est associé, est donné pour tout entrelacs L à n brins par :*

$$F_T(L) = |G|^n |\text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)|.$$

Preuve : Le coefficient $|G|^n$ provient des conditions sur les x_i . En effet, si un brin de l'entrelacs fait p fois le tour du tressage (notons x_1, \dots, x_p les p couleurs des sorties de ce brin numérotées dans leur ordre d'apparition de la gauche vers la droite), les conditions obtenues sur les x_i s'écrivent alors

$$\delta_{x_1}(H_1 x_2) \dots \delta_{x_p}(H_p x_1).$$

Ces conditions sont équivalentes à

$$\delta_{1_G}(H_1 \dots H_p) \delta_{x_2}(H_2 \dots H_p x_1) \dots \delta_{x_p}(H_p x_1).$$

De plus

$$\sum_{x_1, \dots, x_p \in G} \delta_{x_2}(H_2 \dots H_p x_1) \dots \delta_{x_p}(H_p x_1) = |G|.$$

Donc, comme les conditions précédentes sont les seules conditions de la somme $F_T(L)$ faisant intervenir les x_1, \dots, x_p , chaque brin de l'entrelacs fait apparaître un $|G|$. Les conditions restantes sont celles définissant les morphismes de $\text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)$. D'où la proposition. \square

5.2.3 Invariant dans le cas quasi-algèbre de Hopf

Si on voit $D^w(G)$ comme une quasi-algèbre de Hopf, on peut appliquer l'invariant d'Altschüler et Coste [AC92], restreint à la représentation naturelle de $D^w(G)$ sur lui-même. On montre que l'invariant ainsi obtenu est égal (à l'inverse du 3-cocycle quasi-abélien près) à l'invariant Z .

De même que pour le cas algèbre de Hopf, on a uniquement besoin des valeurs suivantes de F :

$$F\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto \tau(R.((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y))) \\ = (\delta_{ghg^{-1}} \otimes gy) \otimes (\delta_g \otimes x) \Omega^{-1}(h \otimes y) \Omega(ghg^{-1} \otimes gy) \Omega^{-1}(ghg^{-1} \otimes g),$$

$$F\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto \tau(R_{21}^{-1}.((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y))) \\ = \delta_h \otimes y \otimes (\delta_{h^{-1}gh} \otimes h^{-1}x) \Omega^{-1}(g \otimes x) \Omega(h^{-1}gh \otimes h^{-1}x) \Omega(g \otimes h),$$

$$F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right) 1 \mapsto \sum_{g,x} \Psi_{g,x} \otimes u^{-1}vS(\beta)(\delta_g \otimes x) = \sum_{g,x} \Psi_{g,x} \otimes (\delta_g \otimes x),$$

$$F\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array}\right) \Psi_{g,x} \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto \Psi_{g,x}(\delta_h \otimes y) = \delta_g(h) \delta_x(y),$$

$$F\left(\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \end{array}\right) ((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y)) \otimes (\delta_k \otimes z) \mapsto \phi.((\delta_g \otimes x) \otimes ((\delta_h \otimes y) \otimes (\delta_k \otimes z))) \\ = w^{-1}(g \otimes h \otimes k) (\delta_g \otimes x) \otimes ((\delta_h \otimes y) \otimes (\delta_k \otimes z)).$$

Par la formule donnant l'action de $\mathbb{C}[G]$ sur $\mathcal{F}(G)$, on peut calculer la valeur de l'associateur pour tous les sens des flèches. Par exemple :

$$F\left(\begin{array}{c} \downarrow \uparrow \downarrow \end{array}\right) : (\delta_g \otimes x \otimes \Psi_{h,y}) \otimes (\delta_k \otimes z) \mapsto w^{-1}(g \otimes h^{-1} \otimes k) (\delta_g \otimes x) \otimes (\Psi_{h,y} \otimes \delta_k \otimes z).$$

Remarque : On a les égalités suivantes entre F et F_T :

$$F\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) ((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y)) = F_T\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) ((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y)) \Omega^{-1}(ghg^{-1} \otimes g), \\ F\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) ((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y)) = F_T\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) ((\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y)) \Omega(g \otimes h), \\ F\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right) (1) = F_T\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right) (1), \\ F\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array}\right) (\Psi_{g,x} \otimes (\delta_h \otimes y)) = F_T\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array}\right) (\Psi_{g,x} \otimes (\delta_h \otimes y)).$$

De même que dans la section précédente, quand on calcule F sur un entrelacs L dont le tressage a n brins on obtient une somme, sur $2n$ éléments de G vérifiant certaines conditions, de produit de valeurs de w et de Ω sur des éléments fabriqués avec ces couleurs. On note $\delta(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n)$ les conditions imposées sur les $2n$ couleurs $(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \in G^{\times 2n}$, $\chi_w(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n)$ (respectivement $\chi_\Omega(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n)$) les produits de valeurs de w (respectivement de valeur Ω) sur des éléments fabriqués avec ces couleurs. La valeur de F sur l'entrelacs L est alors :

$$F(L) = \sum_{\substack{g_1, \dots, g_n \in G \\ x_1, \dots, x_n \in G}} \delta(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \chi_w(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \chi_\Omega(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n).$$

Les conditions sur les éléments de la somme sont exactement celles obtenues dans le cas du foncteur F_T . Elles permettent donc de colorer tous les diagrammes planaires de L par des morphismes de $\text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)$. On peut ainsi associer à une famille de $2n$ éléments $(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \in G^{\times 2n}$, vérifiant les conditions $\delta(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n)$, le poids $\langle (D_L)_{(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n)} \rangle$ du diagramme D_L de L .

Proposition 5.7 *Soient $g_1, \dots, g_n \in G$ et $x_1, \dots, x_n \in G$.*

$$\begin{aligned} \delta(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \chi_w(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \chi_\Omega(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) = \\ = \delta(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \langle (D_L)_{(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n)} \rangle_{w^{-1}, \Omega^{-1}} \end{aligned}$$

où $\langle L(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n) \rangle_{w^{-1}, \Omega^{-1}}$ est le poids associé au 3-cocycle (w^{-1}, Ω^{-1}) , de D_L coloré par les g_i et x_i .

Preuve : Se donner des éléments $g_1, \dots, g_n \in G$ et $x_1, \dots, x_n \in G$ revient à se fixer une couleur de sortie pour chaque brin du tressage: $\delta_{g_i} \otimes x_i$ avec le parenthésage

$$\Psi_{g_1, x_1} \otimes (\Psi_{g_2, x_2} \otimes (\dots \otimes (\Psi_{g_n, x_n} \otimes \delta_{g_n} \otimes x_n) \otimes \dots) \otimes \delta_{g_2} \otimes x_2) \otimes \delta_{g_1} \otimes x_1. \quad (5.10)$$

Pour évaluer F sur les croisements du tressage, il faut changer à chaque croisement le parenthésage. En effet, supposons que le croisement s'effectue entre $\delta_{g_i} \otimes x_i$ et $\delta_{g_{i+1}} \otimes x_{i+1}$, le parenthésage à la sortie du croisement doit être de la forme

$$\dots \otimes (\delta_{g_i} \otimes x_i \otimes \delta_{g_{i+1}} \otimes x_{i+1}) \otimes \dots.$$

Le parenthésage à l'entrée du croisement est de la même forme. Afin d'effectuer ces changements de parenthésage, on peut toujours choisir de passer par le parenthésage, appelé dans la suite le parenthésage standard :

$$\Psi_{g_1, x_1} \otimes (\Psi_{g_2, x_2} \otimes (\dots \otimes (\Psi_{g_n, x_n} \otimes (\delta_{g_n} \otimes x_n \otimes (\dots \otimes (\delta_{g_2} \otimes x_2 \otimes \delta_{g_1} \otimes x_1) \dots)) \dots).$$

On prend alors comme convention qu'un croisement part d'un croisement standard et arrive à un parenthésage standard. Cette convention entraîne que la valeur du foncteur F est multipliée par un produit de w . Plus exactement, pour effectuer un croisement entre les brins i et $i+1$, on part d'un parenthésage

$$\Psi_{g_1, x_1} \otimes (\Psi_{g_2, x_2} \otimes (\dots \otimes (\delta_{g_{r_i}} \otimes x_{r_i} \otimes (\delta_{g_{r_{i+1}}} \otimes x_{r_{i+1}} \otimes (\dots \otimes (\delta_{g_2} \otimes x_2 \otimes \delta_{g_1} \otimes x_1) \dots)) \dots).$$

Il faut ensuite passer à

$$\Psi_{g_1, x_1} \otimes (\Psi_{g_2, x_2} \otimes (\dots \otimes ((\delta_{g_{r_i}} \otimes x_{r_i} \otimes \delta_{g_{r_{i+1}}} \otimes x_{r_{i+1}}) \otimes (\dots \otimes (\delta_{g_2} \otimes x_2 \otimes \delta_{g_1} \otimes x_1) \dots)) \dots).$$

Pour cela il apparaît un $w(g_{r_i} \otimes g_{r_{i+1}} \otimes g_{r_{i+2}} \dots g_{r_n})$. Après le croisement, on a soit

$$\Psi_{g_1, x_1} \otimes (\Psi_{g_2, x_2} \otimes (\dots \otimes ((\delta_{g_{r_i} g_{r_{i+1}} g_{r_i}^{-1}} \otimes g_{r_i} x_{r_{i+1}} \otimes \delta_{g_{r_i}} \otimes x_{r_i}) \otimes (\dots \otimes (\delta_{g_2} \otimes x_2 \otimes \delta_{g_1} \otimes x_1) \dots)),$$

si le croisement est positif, soit

$$\Psi_{g_1, x_1} \otimes (\Psi_{g_2, x_2} \otimes (\dots \otimes ((\delta_{g_{r_{i+1}}} \otimes x_{r_{i+1}} \otimes \delta_{g_{r_{i+1}} g_{r_i} g_{r_{i+1}}^{-1}} \otimes g_{r_{i+1}}^{-1} x_{r_i}) \otimes (\dots \otimes (\delta_{g_2} \otimes x_2 \otimes \delta_{g_1} \otimes x_1) \dots)),$$

si le croisement est négatif.

Il faut ensuite passer à un parenthésage standard. Il apparaît alors dans le premier cas

$$w^{-1}(g_{r_i}g_{r_{i+1}}g_{r_i}^{-1} \otimes g_{r_i} \otimes g_{r_{i+2}} \cdots g_{r_n})$$

et dans le deuxième cas

$$w^{-1}(g_{r_{i+1}} \otimes g_{r_{i+1}}^{-1}g_{r_i}g_{r_{i+1}} \otimes g_{r_{i+2}} \cdots g_{r_n}).$$

Pour évaluer F sur les changements de parenthésage d'un croisement, on a donc besoin de connaître les brins qui sont situés à droite du croisement. Pour cela, de la même manière que pour l'invariant de Reshetikhin, Mattes et Polyak, on colorie les composantes connexes du complémentaire de l'entrelacs de la droite vers la gauche, en donnant la couleur 1_G à la composante connexe la plus à droite et en ne tenant compte que de la première variable g de $\delta_g \otimes x$. De cette manière la couleur attribuée à une composante connexe est le produit des couleurs des brins à sa droite.

La valeur d'un croisement par le foncteur F est alors donnée par :

$$F\left(\begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} k\right) \\ (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto (\delta_{ghg^{-1}} \otimes gy) \otimes (\delta_g \otimes x) \Omega(ghg^{-1} \otimes gy) \Omega^{-1}(h \otimes y) \Omega^{-1}(ghg^{-1} \otimes g) \\ w(g \otimes h \otimes k) w^{-1}(ghg^{-1} \otimes g \otimes k),$$

$$F\left(\begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} k\right) \\ (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto (\delta_h \otimes y) \otimes (\delta_{h^{-1}gh} \otimes h^{-1}x) \Omega^{-1}(g \otimes x) \Omega(h^{-1}gh \otimes h^{-1}x) \Omega(g \otimes h) \\ w(g \otimes h \otimes k) w^{-1}(h \otimes h^{-1}gh \otimes k).$$

Avant de pouvoir évaluer F sur ces croisements, il faut encore passer du parenthésage (5.10) à un parenthésage standard; pour cela, il apparaît un produit de w dépendant des couleurs des brins sortant du tressage; notons ce produit $\phi(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_n)$.

De même, pour pouvoir appliquer F sur la fermeture du tressage, il faut passer d'un parenthésage standard à un parenthésage du type (5.10)

$$\Psi_{h_1, y_1} \otimes (\Psi_{h_2, y_2} \otimes (\cdots \otimes (\Psi_{h_n, y_n} \otimes \delta_{h_n} \otimes y_n) \otimes \cdots) \otimes \delta_{h_2} \otimes y_2) \otimes \delta_{h_1} \otimes y_1.$$

Cela revient à multiplier par $\phi^{-1}(h_1, \dots, h_n, y_1, \dots, y_n)$. Or, lorsque qu'on applique la fermeture du tressage, on obtient pour tout i les égalités $g_i = h_i$, $x_i = y_i$. D'où les ϕ se simplifient.

La valeur de F sur l'entrelacs coloré L est donc uniquement déterminée par la valeur des croisements du tressage. De plus, d'après l'étude du cas algèbre de Hopf, deux des trois termes en Ω provenant de chaque croisement s'annulent entre eux. La valeur d'un croisement se ramène donc à :

$$F\left(\begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} k\right) \\ (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto (\delta_{ghg^{-1}} \otimes gy) \otimes (\delta_g \otimes x) \Omega^{-1}(ghg^{-1} \otimes g) \\ w(g \otimes h \otimes k) w^{-1}(ghg^{-1} \otimes g \otimes k),$$

$$F\left(\begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} k\right) \\ (\delta_g \otimes x) \otimes (\delta_h \otimes y) \mapsto (\delta_h \otimes y) \otimes (\delta_{h^{-1}gh} \otimes h^{-1}x) \Omega(g \otimes h) \\ w(g \otimes h \otimes k) w^{-1}(h \otimes h^{-1}gh \otimes k).$$

Or le poids d'un entrelacs associé au 3-cocycle quasi-abélien (w^{-1}, Ω^{-1}) est donné par le produit des poids des croisements. Ces poids valent :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 ghg^{-1} & g & \\
 \swarrow & \searrow & \\
 g & h & k \\
 \swarrow & \searrow & \\
 g & h & k
 \end{array}
 \longrightarrow B(ghg^{-1} \otimes g \otimes k) = w^{-1}(ghg^{-1} \otimes g \otimes k)\Omega^{-1}(ghg^{-1} \otimes g)w(g \otimes h \otimes k), \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 g & h & \\
 \swarrow & \searrow & \\
 g & h & k \\
 \swarrow & \searrow & \\
 g & h & k
 \end{array}
 \longrightarrow B^{-1}(g \otimes h \otimes k) = w(g \otimes h \otimes k)\Omega(g \otimes h)w^{-1}(h \otimes h^{-1}gh \otimes k).
 \end{array}$$

La proposition est donc démontrée. □

D'où le théorème :

Théorème 5.3 *Soient (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien normalisé, L un entrelacs à n brins. Alors*

$$F(L) = |G|^n Z(L)$$

où Z est l'invariant de la première partie associé au 3-cocycle quasi-abélien (w^{-1}, Ω^{-1}) .

Preuve : D'après la proposition précédente, on a pour un entrelacs dont le tressage contient p entrées

$$F(L) = \sum_{\substack{g_1, \dots, g_p \in G \\ x_1, \dots, x_p \in G}} \delta(g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p) \langle (D_L)(g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p) \rangle_{w^{-1}, \Omega^{-1}}.$$

Le poids de L est composé de produits de w et Ω ne faisant pas intervenir de x_i . On peut appliquer le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 5.6 pour montrer que

$$F(L) = |G|^n \sum_{\rho \in \text{Hom}(\Pi_1(M_L), G)} \langle L_\rho \rangle_{w^{-1}, \Omega^{-1}} = |G|^n Z^{\text{inv}}(L).$$

□

L'invariant des 3-variétés associé à F est donné par ([AC92]) :

$$F(M) = |G|^{-n} F(L)$$

où M est une 3-variété qui peut être obtenue par chirurgie le long de l'entrelacs L à n brins. On a donc montré le corollaire :

Corollaire 5.1 *Soit (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien normalisé.*

L'invariant des 3-variétés F associé à la quasi-algèbre de Hopf $D^w(G)$ est égal à l'invariant des 3-variétés Z associé au 3-cocycle quasi-abélien normalisé (w^{-1}, Ω^{-1}) .

Annexe

On donne ici les valeurs des 3-cocycles quasi-abélien de D_3 ainsi que les feuilles de calcul Maple ayant servi à prouver l'existence d'un 3-cocycle quasi-abélien non trivial de D_3 . Les calculs ont été effectués par XMaple V sur cartan.u-strasbg.fr (Hewlett-Packard, modèle 9000/735).

Solutions 1.1.1, 1.1.2, 1.2.1 et 1.2.2

Soient $\epsilon = \pm 1$ et $\gamma = \pm$. Si $\epsilon = 1$, on obtient les solutions de type 1.1.1 ($\gamma = 1$) et 1.1.2 ($\gamma = -1$); si $\epsilon = -1$, on a les solutions de type 1.2.1 ($\gamma = 1$) et 1.2.2 ($\gamma = -1$).

La fonction $\Omega : D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par :

$$\begin{array}{l}
 \Omega(a, a) = 1 \\
 \Omega(a^2, a^2) = 1 \\
 \Omega(a, ab) = st \\
 \Omega(a^2b, a) = (st)^{-1} \\
 \Omega(a^2, ab) = st \\
 \Omega(a^2b, a^2) = (st)^{-1} \\
 \Omega(b, a^2b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
 \Omega(ab, a^2b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
 \Omega(a^2b, a^2b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \Omega(a, a^2) = 1 \\
 \Omega(a, b) = st \\
 \Omega(ab, a) = (st)^{-1} \\
 \Omega(a^2, b) = st \\
 \Omega(ab, a^2) = (st)^{-1} \\
 \Omega(b, b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
 \Omega(ab, b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
 \Omega(a^2b, b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}}
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{l}
 \Omega(a^2, a) = 1 \\
 \Omega(b, a) = (st)^{-1} \\
 \Omega(a, a^2b) = st \\
 \Omega(b, a^2) = (st)^{-1} \\
 \Omega(a^2, a^2b) = st \\
 \Omega(b, ab) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
 \Omega(ab, ab) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
 \Omega(a^2b, ab) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}}
 \end{array}$$

La fonction $f : D_3 \times D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par :

$$\begin{array}{l}
 f(a, a, a) = 1 \\
 f(a^2, a, a) = x
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 f(a, a, a^2) = x^{-1} \\
 f(a^2, a, a^2) = 1
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{l}
 f(a, a^2, a) = 1 \\
 f(a^2, a^2, a) = x^{-1}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 f(a, a^2, a^2) = x \\
 f(a^2, a^2, a^2) = 1
 \end{array}
 \right.$$

$f(a, a, b) = t$	$f(a, b, a) = 1$	$f(b, a, a) = s$
$f(a, a, ab) = t$	$f(a, ab, a) = 1$	$f(ab, a, a) = s$
$f(a, a, a^2b) = t$	$f(a, a^2b, a) = 1$	$f(a^2b, a, a) = s$
$f(a, a^2, b) = t^2x$	$f(a, b, a^2) = 1$	$f(b, a, a^2) = s^2x^{-1}$
$f(a, a^2, ab) = t^2x$	$f(a, ab, a^2) = 1$	$f(ab, a, a^2) = s^2x^{-1}$
$f(a, a^2, a^2b) = t^2x$	$f(a, a^2b, a^2) = 1$	$f(a^2b, a, a^2) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a, b) = t^2x$	$f(a^2, b, a) = 1$	$f(b, a^2, a) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a, ab) = t^2x$	$f(a^2, ab, a) = 1$	$f(ab, a^2, a) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a, a^2b) = t^2x$	$f(a^2, a^2b, a) = 1$	$f(a^2b, a^2, a) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a^2, b) = t$	$f(a^2, b, a^2) = 1$	$f(b, a^2, a^2) = s$
$f(a^2, a^2, ab) = t$	$f(a^2, ab, a^2) = 1$	$f(ab, a^2, a^2) = s$
$f(a^2, a^2, a^2b) = t$	$f(a^2, a^2b, a^2) = 1$	$f(a^2b, a^2, a^2) = s$
$f(a, b, b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(b, a, b) = st$	$f(b, b, a) = txms^{-1}$
$f(a, b, ab) = m$	$f(b, a, ab) = st$	$f(b, ab, a) = (smt)^{-1}$
$f(a, b, a^2b) = t^{-1}$	$f(b, a, a^2b) = st$	$f(b, a^2b, a) = s^{-1}$
$f(a, ab, b) = t^{-1}$	$f(ab, a, b) = st$	$f(ab, b, a) = s^{-1}$
$f(a, ab, ab) = (xmt^2)^{-1}$	$f(ab, a, ab) = st$	$f(ab, ab, a) = txms^{-1}$
$f(a, ab, a^2b) = m$	$f(ab, a, a^2b) = st$	$f(ab, a^2b, a) = (smt)^{-1}$
$f(a, a^2b, b) = m$	$f(a^2b, a, b) = st$	$f(a^2b, b, a) = (smt)^{-1}$
$f(a, a^2b, ab) = t^{-1}$	$f(a^2b, a, ab) = st$	$f(a^2b, ab, a) = s^{-1}$
$f(a, a^2b, a^2b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(a^2b, a, a^2b) = st$	$f(a^2b, a^2b, a) = txms^{-1}$
$f(a^2, b, b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(b, a^2, b) = st$	$f(b, b, a^2) = txms^{-1}$
$f(a^2, b, ab) = t^{-1}$	$f(b, a^2, ab) = st$	$f(b, ab, a^2) = s^{-1}$
$f(a^2, b, a^2b) = m$	$f(b, a^2, a^2b) = st$	$f(b, a^2b, a^2) = (smt)^{-1}$
$f(a^2, ab, b) = m$	$f(ab, a^2, b) = st$	$f(ab, b, a^2) = (smt)^{-1}$
$f(a^2, ab, ab) = (xmt^2)^{-1}$	$f(ab, a^2, ab) = st$	$f(ab, ab, a^2) = txms^{-1}$
$f(a^2, ab, a^2b) = t^{-1}$	$f(ab, a^2, a^2b) = st$	$f(ab, a^2b, a^2) = s^{-1}$
$f(a^2, a^2b, b) = t^{-1}$	$f(a^2b, a^2, b) = st$	$f(a^2b, b, a^2) = s^{-1}$
$f(a^2, a^2b, ab) = m$	$f(a^2b, a^2, ab) = st$	$f(a^2b, ab, a^2) = (smt)^{-1}$
$f(a^2, a^2b, a^2b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(a^2b, a^2, a^2b) = st$	$f(a^2b, a^2b, a^2) = txms^{-1}$

$$\begin{array}{l}
f(b, b, b) = \epsilon \\
f(b, ab, b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(b, a^2b, b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(ab, b, b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(ab, ab, b) = \epsilon txms^{-1} \\
f(ab, a^2b, b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(a^2b, b, b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(a^2b, ab, b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(a^2b, a^2b, b) = \epsilon txms^{-1}
\end{array}
\left|
\begin{array}{l}
f(b, b, ab) = \epsilon txms^{-1} \\
f(b, ab, ab) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(b, a^2b, ab) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(ab, b, ab) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(ab, ab, ab) = \epsilon \\
f(ab, a^2b, ab) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(a^2b, b, ab) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(a^2b, ab, ab) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(a^2b, a^2b, ab) = \epsilon txms^{-1}
\end{array}
\right|
\begin{array}{l}
f(b, b, a^2b) = \epsilon txms^{-1} \\
f(b, ab, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(b, a^2b, a^2b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(ab, b, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(ab, ab, a^2b) = \epsilon txms^{-1} \\
f(ab, a^2b, a^2b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(a^2b, b, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(a^2b, ab, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} \\
f(a^2b, a^2b, a^2b) = \epsilon
\end{array}$$

Solutions 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1 et 2.2.2

Soient $\epsilon = \pm 1$ et $\gamma = \pm$. Si $\varepsilon = 1$, on obtient les solutions de type 2.1.1 ($\gamma = 1$) et 2.1.2 ($\gamma = -1$); si $\varepsilon = -1$, on a les solutions de type 2.2.1 ($\gamma = 1$) et 2.2.2 ($\gamma = -1$).

La fonction $\Omega : D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par :

$$\begin{array}{l}
\Omega(a, a) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a^2, a^2) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a, ab) = ste^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a^2b, a) = (st)^{-1}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a^2, ab) = ste^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a^2b, a^2) = (st)^{-1}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(b, a^2b) = \gamma e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
\Omega(ab, a^2b) = \gamma e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
\Omega(a^2b, a^2b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}}
\end{array}
\left|
\begin{array}{l}
\Omega(a, a^2) = e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
\Omega(a, b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(ab, a) = (st)^{-1}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a^2, b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(ab, a^2) = (st)^{-1}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(b, b) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
\Omega(ab, b) = \gamma e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
\Omega(a^2b, b) = \gamma e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}}
\end{array}
\right|
\begin{array}{l}
\Omega(a^2, a) = e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
\Omega(b, a) = (st)^{-1}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a, a^2b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(b, a^2) = (st)^{-1}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(a^2, a^2b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}} \\
\Omega(b, ab) = \gamma e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
\Omega(ab, ab) = \gamma e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}} \\
\Omega(a^2b, ab) = \gamma e^{\frac{i\pi}{3}} e^{\frac{(1-\epsilon)i\pi}{4}}
\end{array}$$

La fonction $f : D_3 \times D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par :

$$\begin{array}{l}
f(a, a, a) = 1 \\
f(a^2, a, a) = x
\end{array}
\left|
\begin{array}{l}
f(a, a, a^2) = x^{-1} \\
f(a^2, a, a^2) = 1
\end{array}
\right|
\begin{array}{l}
f(a, a^2, a) = 1 \\
f(a^2, a^2, a) = x^{-1}
\end{array}
\left|
\begin{array}{l}
f(a, a^2, a^2) = x \\
f(a^2, a^2, a^2) = 1
\end{array}
\right.$$

$f(a, a, b) = t$	$f(a, b, a) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(b, a, a) = s$
$f(a, a, ab) = t$	$f(a, ab, a) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(ab, a, a) = s$
$f(a, a, a^2b) = t$	$f(a, a^2b, a) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(a^2b, a, a) = s$
$f(a, a^2, b) = t^2x$	$f(a, b, a^2) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(b, a, a^2) = s^2x^{-1}$
$f(a, a^2, ab) = t^2x$	$f(a, ab, a^2) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(ab, a, a^2) = s^2x^{-1}$
$f(a, a^2, a^2b) = t^2x$	$f(a, a^2b, a^2) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(a^2b, a, a^2) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a, b) = t^2x$	$f(a^2, b, a) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(b, a^2, a) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a, ab) = t^2x$	$f(a^2, ab, a) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(ab, a^2, a) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a, a^2b) = t^2x$	$f(a^2, a^2b, a) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(a^2b, a^2, a) = s^2x^{-1}$
$f(a^2, a^2, b) = t$	$f(a^2, b, a^2) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(b, a^2, a^2) = s$
$f(a^2, a^2, ab) = t$	$f(a^2, ab, a^2) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(ab, a^2, a^2) = s$
$f(a^2, a^2, a^2b) = t$	$f(a^2, a^2b, a^2) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(a^2b, a^2, a^2) = s$
$f(a, b, b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(b, a, b) = ste^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(b, b, a) = txms^{-1}$
$f(a, b, ab) = m$	$f(b, a, ab) = ste^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(b, ab, a) = (smt)^{-1}$
$f(a, b, a^2b) = t^{-1}$	$f(b, a, a^2b) = st$	$f(b, a^2b, a) = s^{-1}$
$f(a, ab, b) = t^{-1}$	$f(ab, a, b) = st$	$f(ab, b, a) = s^{-1}$
$f(a, ab, ab) = (xmt^2)^{-1}$	$f(ab, a, ab) = ste^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(ab, ab, a) = txms^{-1}$
$f(a, ab, a^2b) = m$	$f(ab, a, a^2b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(ab, a^2b, a) = (smt)^{-1}$
$f(a, a^2b, b) = m$	$f(a^2b, a, b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(a^2b, b, a) = (smt)^{-1}$
$f(a, a^2b, ab) = t^{-1}$	$f(a^2b, a, ab) = st$	$f(a^2b, ab, a) = s^{-1}$
$f(a, a^2b, a^2b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(a^2b, a, a^2b) = ste^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(a^2b, a^2b, a) = txms^{-1}$
$f(a^2, b, b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(b, a^2, b) = ste^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(b, b, a^2) = txms^{-1}$
$f(a^2, b, ab) = t^{-1}$	$f(b, a^2, ab) = st$	$f(b, ab, a^2) = s^{-1}$
$f(a^2, b, a^2b) = m$	$f(b, a^2, a^2b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(b, a^2b, a^2) = (smt)^{-1}$
$f(a^2, ab, b) = m$	$f(ab, a^2, b) = ste^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(ab, b, a^2) = (smt)^{-1}$
$f(a^2, ab, ab) = (xmt^2)^{-1}$	$f(ab, a^2, ab) = ste^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(ab, ab, a^2) = txms^{-1}$
$f(a^2, ab, a^2b) = t^{-1}$	$f(ab, a^2, a^2b) = st$	$f(ab, a^2b, a^2) = s^{-1}$
$f(a^2, a^2b, b) = t^{-1}$	$f(a^2b, a^2, b) = st$	$f(a^2b, b, a^2) = s^{-1}$
$f(a^2, a^2b, ab) = m$	$f(a^2b, a^2, ab) = ste^{\frac{2i\pi}{3}}$	$f(a^2b, ab, a^2) = (smt)^{-1}$
$f(a^2, a^2b, a^2b) = (xmt^2)^{-1}$	$f(a^2b, a^2, a^2b) = ste^{\frac{4i\pi}{3}}$	$f(a^2b, a^2b, a^2) = txms^{-1}$

$$\begin{array}{l}
f(b, b, b) = \epsilon \\
f(b, ab, b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
f(b, a^2b, b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
f(ab, b, b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(ab, ab, b) = \epsilon txms^{-1} \\
f(ab, a^2b, b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
f(a^2b, b, b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(a^2b, ab, b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
f(a^2b, a^2b, b) = \epsilon txms^{-1}
\end{array}
\left|
\begin{array}{l}
f(b, b, ab) = \epsilon txms^{-1} \\
f(b, ab, ab) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(b, a^2b, ab) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
f(ab, b, ab) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
f(ab, ab, ab) = \epsilon \\
f(ab, a^2b, ab) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
f(a^2b, b, ab) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
f(a^2b, ab, ab) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(a^2b, a^2b, ab) = \epsilon txms^{-1}
\end{array}
\right|
\begin{array}{l}
f(b, b, a^2b) = \epsilon txms^{-1} \\
f(b, ab, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
f(b, a^2b, a^2b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(ab, b, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{4i\pi}{3}} \\
f(ab, ab, a^2b) = \epsilon txms^{-1} \\
f(ab, a^2b, a^2b) = \epsilon(xmt^2)^{-1} \\
f(a^2b, b, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
f(a^2b, ab, a^2b) = \epsilon(st)^{-1} e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
f(a^2b, a^2b, a^2b) = \epsilon
\end{array}$$

Feuilles de calcul

On note $(1, a, a^2, b, ab, a^2)$ les éléments de D_3 où a est d'ordre 3, b d'ordre 2 et $ba = a^2b$. Pour résoudre le système d'équations correspondant à un 3-cocycle quasi-abélien de D_3 , on a codé $(1, a, a^2, b, ab, a^2)$ respectivement par $(0, 1, 2, 100, 101, 102)$. Soit (w, Ω) un 3-cocycle quasi-abélien. La valeur de w au point (x, y, z) , avec $x, y, z \in G$, est mise dans le tableau X , à trois entrées, à l'emplacement $X[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]$ où $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ sont les codages respectifs des éléments $x, y, z \in G$. De même, l'application Ω est mise dans le tableau Y à deux entrées. De cette manière les équations à résoudre deviennent des équations à inconnues $X[i, j, k]$ et $Y[i, j]$ où $i, j, k \in \{0, 1, 2, 100, 101, 102\}$.

Dans la recherche d'un cobord, l'application $\eta : D_3 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est codée dans un tableau X à deux entrées. La valeur de η au point (x, y) est mise à l'emplacement $X[\tilde{x}, \tilde{y}]$.

Feuille de calcul :*diedral.mws*

Calcul des 3-cocycles normalisés usuels du groupe diédral $D_3 = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ qui sont stables par l'action adjointe. Les éléments de $1, a, a^2, b, ab, a^2b$ de D_3 sont respectivement codés dans les tableaux par 0,1,2,100,101,102. Un 3-cocycle est un tableau X à trois entrées représentant le 3-cocycle en chaque point.

```
> restart;

#####
# Procédures #
#####

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^t).
> aaaa:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[(p+q mod
n),r,t])*X[p,(q+r mod n),t]*(1/X[p,q,(r+t mod n)])*X[p,q,r]=1;end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).
> aaab:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u;u:=t+r-100 mod n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[(p+q mod
n),r,t])*X[p,(q+r mod n),t]*(1/X[p,q,100+u])*X[p,q,r]=1;end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).
> aaba:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v;u:=q+r-100 mod n;v:=n-t+r-100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[(p+q mod
n),r,t])*X[p,100+u,t]*(1/X[p,q,100+v])*X[p,q,r]=1;end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^t).
> abaa:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v;u:=q+p-100 mod n;v:=n-r+q-100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[100+u,r,t])*X[p,100+v,t]*(1/X[p,q,r+t mod
n])*X[p,q,r]=1;end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^t).
> baaa:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u;u:=p+n-q-100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[100+u,r,t])*X[p,(q+r mod n),t]*(1/X[p,q,(r+t mod
n)])*X[p,q,r]=1;end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).
> aabb:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v;u:=q+r-100 mod n;v:=(r-100)+(n-t+100) mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[p,q,v])*X[p,q,r]=1;end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).
> abab:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=p+q-100 mod n;v:=q-100+n-r mod n;w:=r+t-100
mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u+100,r,t])*X[p,v+100,t]*(1/X[p,q,w+100])*X[p,q,r]=1;
end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).
> baab:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v;u:=(p-100)+n-q mod n;v:=r+t-100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u+100,r,t])*X[p,q+r mod
n,t]*(1/X[p,q,v+100])*X[p,q,r]=1;end;

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).
> baba:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=(p-100)+n-q mod n;v:=r-100+q mod
n;w:=r-100+n-t mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u+100,r,t])*X[p,v+100,t]*(1/X[p,q,w+100])*X[p,q,r]=1;
end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^t).

```
> bbaa:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v;u:=p-100+n-q+100 mod n;v:=q-100+n-r mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u,r,t])*X[p,v+100,t]*(1/X[p,q,r+t mod
n])*X[p,q,r]=1;end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).

```
> abba:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=p+q-100 mod n;v:=q-100+n-r+100 mod
n;w:=r-100+n-t mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u+100,r,t])*X[p,v,t]*(1/X[p,q,w+100])*X[p,q,r]=1;end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).

```
> bbba:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=p-100+n-q+100 mod n;v:=q-100+n-r+100 mod
n;w:=r-100+n-t mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u,r,t])*X[p,v,t]*(1/X[p,q,w+100])*X[p,q,r]=1;end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).

```
> bbab:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=p-100+n-q+100 mod n;v:=q-100+n-r mod
n;w:=r+t-100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u,r,t])*X[p,v+100,t]*(1/X[p,q,w+100])*X[p,q,r]=1;end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).

```
> babb:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=p-100+n-q mod n;v:=q+r-100 mod
n;w:=r-100+n-t+100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u+100,r,t])*X[p,v+100,t]*(1/X[p,q,w])*X[p,q,r]=1;end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).

```
> abbb:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=p+q-100 mod n;v:=q-100+n-r+100 mod
n;w:=r-100+n-t+100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u+100,r,t])*X[p,v,t]*(1/X[p,q,w])*X[p,q,r]=1;end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant aux éléments du type (a^p,a^q,a^r,a^tb).

```
> bbbb:=proc(n,p,q,r,t) local Z,u,v,w;u:=p-100+n-q+100 mod n;v:=q-100+n-r+100 mod
n;w:=r-100+n-t+100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r,t]*(1/X[u,r,t])*X[p,v,t]*(1/X[p,q,w])*X[p,q,r]=1;end;
```

#Procédure pour déterminer les équations correspondant à la stabilité par l'action adjointe diagonale.

```
> conj:=proc(n,gt,xt,yt,zt) local
xt1,yt1,zt1,Z,temp;Z:=evaln(Z);xt1:=evaln(xt1);yt1:=evaln(yt1);zt1:=evaln(zt1);if
xt<=n-1 then if gt<=n-1 then xt1:=xt; else xt1:=n-xt; fi;else if gt<=n-1 then
temp:=2*(n-gt)+xt-100 mod n;xt1:=100+temp; else temp:=2*gt-xt-100 mod
n;xt1:=100+temp;fi;fi;if yt<=n-1 then if gt<=n-1 then yt1:=yt; else yt1:=n-yt;
fi;else if gt<=n-1 then temp:=2*(n-gt)+yt-100 mod n;yt1:=100+temp; else
temp:=2*gt-yt-100 mod n;yt1:=100+temp;fi;fi;if zt<=n-1 then if gt<=n-1 then zt1:=zt;
else zt1:=n-zt; fi;else if gt<=n-1 then temp:=2*(n-gt)+zt-100 mod n;zt1:=100+temp;
else temp:=2*gt-zt-100 mod
n;zt1:=100+temp;fi;fi;Z:=(1/X[xt,yt,zt])*X[xt1,yt1,zt1]=1;end;
```

```
#####
# Initialisation des variables #
#####
```

```
> n:=3;
> x:=evaln(x);y:=evaln(y);
> Norma:=X[0,0,0]=1;
> D0b1:=0=0:D1b1:=0=0:D2b1:=0=0:D3b1:=0=0;
> Stab0b:=1=1:Stab1b:=1=1:Stab2b:=1=1:Stab3b:=1=1;
```

```

#####
# Ecriture des équations #
#####

#Equations de normalisation.
> for i from 1 to n-1 do Norma:=Norma,X[i,0,0]=1,X[0,i,0]=1,X[0,0,i]=1 od;
> for i from 0 to n-1 do Norma:=Norma,X[100+i,0,0]=1,X[0,100+i,0]=1,X[0,0,100+i]=1 od;
> for i from 1 to n-1 do for j from 1 to n-1 do
  Norma:=Norma,X[i,j,0]=1,X[i,0,j]=1,X[0,i,j]=1 od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 1 to n-1 do
  Norma:=Norma,X[i+100,j,0]=1,X[i+100,0,j]=1,X[0,i+100,j]=1 od;od;
> for i from 1 to n-1 do for j from 0 to n-1 do
  Norma:=Norma,X[i,j+100,0]=1,X[i,0,j+100]=1,X[0,i,j+100]=1 od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do
  Norma:=Norma,X[i+100,j+100,0]=1,X[i+100,0,j+100]=1,X[0,i+100,j+100]=1 od;od;

#Equations de stabilité par l'action adjointe sans b.
> for i from 0 to n-1 do for j from 1 to n-1 do for k from 1 to n-1 do for l from 1 to
n-1 do Stab0b:=Stab0b,conj(n,i,j,k,l),conj(n,i+100,j,k,l) od;od;od;od;

#Equations de stabilité par l'action adjointe avec 1 b.
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 1 to n-1 do for l from 1 to
n-1 do
  Stab1b:=Stab1b,conj(n,i,j+100,k,l),conj(n,i+100,j+100,k,l),conj(n,i,k,j+100,l),conj(
n,i+100,k,j+100,l),conj(n,i,l,k,j+100),conj(n,i+100,l,k,j+100) od;od;od;od;

#Equations de stabilité par l'action adjointe avec 2 b.
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do for l from 1 to
n-1 do
  Stab2b:=Stab2b,conj(n,i,j+100,k+100,l),conj(n,i+100,j+100,k+100,l),conj(n,i,j+100,l,
k+100),conj(n,i+100,j+100,l,k+100),conj(n,i,l,j+100,k+100),conj(n,i+100,l,j+100,k+100)
od;od;od;od;

#Equations de stabilité par l'action adjointe avec 3 b.
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do for l from 0 to
n-1 do Stab3b:=Stab3b,conj(n,i,j+100,k+100,l+100),conj(n,i+100,j+100,k+100,l+100)
od;od;od;od;

#Equations de 3-cocycle sans b + équations de stabilité.
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do for l from 0 to
n-1 do D0b1:=D0b1,aaaa(n,i,j,k,l) od;od;od;od;
> D0b1:=D0b1,Stab0b;

#Equations de 3-cocycle avec 1 b + équations de stabilité.
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do for l from 0 to
n-1 do
  D1b1:=D1b1,aaab(n,i,j,k,100+l),aaba(n,i,j,k+100,l),abaa(n,i,j+100,k,l),baaa(n,i+100,
j,k,l) od;od;od;od;
> D1b1:=D1b1,Stab1b;

#Equations de 3-cocycle avec 2 b + équations de stabilité.
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do for l from 0 to
n-1 do
  D2b1:=D2b1,aabb(n,i,j,k+100,l+100),abab(n,i,j+100,k,l+100),baab(n,i+100,j,k,l+100),a
bba(n,i,j+100,k+100,l),baba(n,i+100,j,k+100,l),bbba(n,i+100,j+100,k,l) od;od;od;od;
> D2b1:=D2b1,Stab2b;

#Equations de 3-cocycle avec 3 b + équations de stabilité.
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do for l from 0 to

```

```

n-1 do
D3b1:=D3b1,abbb(n,i,j+100,k+100,l+100),babb(n,i+100,j,k+100,l+100),bbab(n,i+100,j+10
0,k,l+100),bbba(n,i+100,j+100,k+100,l),bbbb(n,i+100,j+100,k+100,l+100) od;od;od;od;
> D3b1:=D3b1,Stab3b;

#####
# Simplification des équations de cocycles (normalisation) #
#####

#Simplification des équations de 3-cocycle sans b.
> D0b2:=subs({Norma},{D0b1});

#Simplification des équations de 3-cocycle avec 1 b.
> D1b2:=subs({Norma},{D1b1});

#Simplifications des équations de 3-cocycle avec 2b.
> D2b2:=subs({Norma},{D2b1});

#Simplification des équations de 3-cocycle avec 3b.
> D3b2:=subs({Norma},{D3b1});
[ > save(D0b2,D1b2,D2b2,D3b2,'equation3u.m');

#####
# Résolution des équations de 3-cocycle #
#####

#Résolution des équations de 3 cocycle sans b.
> Sol0b:=solve(D0b2);

Sol0b := {X1,2,2 = X2,1,1, X2,1,2 = 1, X2,1,1 = X2,1,1, X2,2,2 = 1, X2,2,1 =  $\frac{1}{X_{2,1,1}}$ , X1,1,2 =  $\frac{1}{X_{2,1,1}}$ , X1,1,1 = 1, X1,2,1 = 1}, {
X1,2,2 = X2,1,1, X2,1,2 = 1, X2,1,1 = X2,1,1, X2,2,2 = RootOf(_Z^2 + _Z + 1), X2,2,1 = - $\frac{1 + \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)}{X_{2,1,1}}$ ,
X1,1,2 = - $\frac{1 + \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)}{X_{2,1,1}}$ , X1,1,1 = RootOf(-Z^2 + Z + 1), X1,2,1 = 1}

#Résolution des équations de 3-cocycle avec 1b après simplification par les solutions précédentes.
> for i from 1 to nops([Sol0b]) do D1b3[i]:=subs(Sol0b[i],D1b2) od;
> for i from 1 to nops([Sol0b]) do Sol1b[i]:=solve(D1b3[i]) od;

Sol1b1 := {X1,102,2 = 1, X2,1,100 = %2, X2,102,1 = 1, X2,1,101 = %2, X101,1,1 = X102,2,2, X2,2,101 = X1,1,102, X2,101,1 = 1, X1,2,101 = %2,
X102,2,1 = X101,2,1, X1,2,102 = %2, X1,1,100 = X1,1,102, X1,101,2 = 1, X2,100,1 = 1, X1,100,2 = 1, X1,2,100 = %2, X1,100,1 = 1,
X2,1,102 = %2, X102,1,2 = X101,2,1, X1,1,101 = X1,1,102, X101,1,2 = X101,2,1, X1,101,1 = 1, X1,1,102 = X1,1,102, X101,2,1 = X101,2,1,
X2,101,2 = 1, X102,2,2 = X102,2,2, X100,1,1 = X102,2,2, X101,2,2 = X102,2,2, X2,2,1,1 =  $\frac{X_{102,2,2}}{X_{101,2,1}}$ , X2,2,102 = X1,1,102, X100,2,1 = X101,2,1,
X2,102,2 = 1, X1,102,1 = 1, X2,2,100 = X1,1,102, X2,100,2 = 1, X100,1,2 = X102,2,2, X100,2,2 = X102,2,2, X102,1,1 = X102,2,2}, {X2,1,100 = %2,
X2,1,101 = %2, X1,102,2 = %1, X101,1,1 = X102,2,2, X2,2,101 = X1,1,102, X2,101,1 = %1, X1,2,101 = %2, X102,2,1 = X101,2,1, X1,2,102 = %2,
X2,100,2 = RootOf(-Z^2 + Z + 1), X1,1,100 = X1,1,102, X1,101,2 = %1, X1,100,2 = %1, X2,100,1 = %1,
X2,102,2 = RootOf(-Z^2 + Z + 1), X1,2,100 = %2, X1,101,1 = RootOf(-Z^2 + Z + 1), X2,1,102 = %2, X102,1,2 = X101,2,1,
X1,1,101 = X1,1,102, X101,1,2 = X101,2,1, X1,1,102 = X1,1,102, X101,2,1 = X101,2,1, X2,101,2 = RootOf(-Z^2 + Z + 1), X102,2,2 = X102,2,2,
X1,100,1 = RootOf(-Z^2 + Z + 1), X2,102,1 = %1, X100,1,1 = X102,2,2, X101,2,2 = X102,2,2, X2,2,1,1 =  $\frac{X_{102,2,2}}{X_{101,2,1}}$ , X2,2,102 = X1,1,102,

```

$$X_{100,2,1} = X_{101,2,1}, X_{2,2,100} = X_{1,1,102}, X_{100,1,2} = X_{101,2,1}, X_{100,2,2} = X_{102,2,2}, X_{1,102,1} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), X_{102,1,1} = X_{102,2,2}$$

$$\%1 := -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

$$\%2 := \frac{X_{1,1,102}^2 X_{102,2,2}^2}{X_{101,2,1}}$$

$Sol1b_2 :=$

#Résolution des équations de 3-cocycle avec 2b après simplification par les solutions précédentes.

> for i from 1 to nops([Sol1b[1]]) do D2b3[1][i] := subs(Sol0b[1], Sol1b[1][i], D2b2) od;
> for i from 1 to nops([Sol1b[1]]) do Sol2b[1][i] := solve(D2b3[1][i]) od;

$$Sol2b_1 := \{ X_{101,1,102} = \%1, X_{1,100,101} = X_{2,101,100}, X_{1,100,102} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{102,101,2} = X_{101,102,1}, X_{2,102,102} = X_{1,102,102},$$

$$X_{100,101,2} = \%3, X_{2,100,100} = X_{1,102,102}, X_{100,1,100} = \%1, X_{100,2,100} = \%1, X_{101,1,100} = \%1, X_{100,1,102} = \%1, X_{102,101,1} = \%3,$$

$$X_{102,2,101} = \%1, X_{2,100,101} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{100,102,1} = \%3, X_{2,101,102} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{1,101,100} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{101,2,1} = \frac{X_{1,102,102}}{X_{2,101,100} X_{101,102,1}^2},$$

$$X_{101,1,101} = \%1, X_{100,1,101} = \%1, X_{2,101,100} = X_{2,101,100}, X_{1,102,102} = X_{1,102,102}, X_{101,102,1} = X_{101,102,1}, X_{100,101,1} = X_{101,102,1},$$

$$X_{101,102,2} = \%3, X_{1,1,102} = X_{1,1,102}, X_{101,100,2} = X_{101,102,1}, X_{100,2,102} = \%1, X_{102,100,1} = X_{101,102,1}, X_{1,100,100} = X_{1,102,102},$$

$$X_{101,101,2} = \%2, X_{2,101,101} = X_{1,102,102}, X_{2,102,101} = X_{2,101,100}, X_{2,100,102} = X_{2,101,100}, X_{100,100,1} = \%2, X_{102,1,101} = \%1,$$

$$X_{100,102,2} = X_{101,102,1}, X_{100,2,101} = \%1, X_{101,2,101} = \%1, X_{102,102,1} = \%2, X_{102,1,100} = \%1, X_{1,102,100} = X_{2,101,100},$$

$$X_{1,101,101} = X_{1,102,102}, X_{100,100,2} = \%2, X_{102,2,2} = \frac{1}{X_{101,102,1} X_{2,101,100} X_{1,1,102}}, X_{1,102,101} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{102,100,2} = \%3, X_{102,2,102} = \%1,$$

$$X_{101,2,100} = \%1, X_{2,102,100} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{101,100,1} = \%3, X_{101,2,102} = \%1, X_{102,2,100} = \%1, X_{101,101,1} = \%2, X_{102,102,2} = \%2,$$

$$X_{1,101,102} = X_{2,101,100}, X_{102,1,102} = \%1 \}$$

$$\%1 := \frac{1}{X_{101,102,1} X_{2,101,100}}$$

$$\%2 := \frac{X_{101,102,1} X_{2,101,100}}{X_{1,102,102}}$$

$$\%3 := X_{101,102,1} X_{2,101,100} X_{1,1,102}$$

$$Sol2b_2 := \{ X_{101,1,102} = \%4, X_{1,100,102} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{2,100,102} = X_{2,102,101}, X_{2,102,102} = X_{1,102,102}, X_{101,2,101} = \%2,$$

$$X_{2,100,100} = X_{1,102,102}, X_{100,102,2} = X_{101,100,2}, X_{102,2,100} = \%5, X_{2,100,101} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{2,101,102} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{1,101,100} = \frac{1}{X_{1,1,102}},$$

$$X_{1,102,102} = X_{1,102,102}, X_{100,101,1} = X_{101,100,2}, X_{1,1,102} = X_{1,1,102}, X_{100,100,1} = \%3, X_{102,102,2} = \%3, X_{100,2,100} = \%2,$$

$$X_{102,101,2} = X_{101,100,2}, X_{1,100,101} = X_{2,102,101}, X_{102,1,100} = \%4, X_{100,101,2} = \%1, X_{1,100,100} = X_{1,102,102}, X_{102,2,101} = \%4,$$

$$X_{2,101,101} = X_{1,102,102}, X_{102,100,1} = X_{101,100,2}, X_{100,1,101} = \%4, X_{100,2,102} = \%4, X_{102,2,2} = \frac{1}{X_{2,102,101} X_{101,100,2} X_{1,1,102}},$$

$$X_{101,1,101} = \%2, X_{101,101,1} = \%3, X_{102,1,101} = \%5, X_{100,2,101} = \%5, X_{101,100,1} = \%1, X_{1,101,102} = X_{2,102,101}, X_{100,100,2} = \%3,$$

$$X_{101,2,1} = \frac{X_{1,102,102}}{X_{2,102,101} X_{101,100,2}}, X_{102,1,102} = \%2, X_{102,100,2} = \%1, X_{101,102,2} = \%1, X_{2,101,100} = X_{2,102,101}, X_{100,1,102} = \%5,$$

$$X_{101,2,102} = \%5, X_{1,101,101} = X_{1,102,102}, X_{101,101,2} = \%3, X_{101,1,100} = \%5, X_{1,102,101} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{2,102,100} = \frac{1}{X_{1,1,102}}, X_{101,2,100} = \%4,$$

$$X_{2,102,101} = X_{2,102,101}, X_{102,101,1} = \%1, X_{101,100,2} = X_{101,100,2}, X_{101,102,1} = X_{101,100,2}, X_{1,102,100} = X_{2,102,101}, X_{102,2,102} = \%2,$$

$$X_{102,102,1} = \%3, X_{100,1,100} = \%2, X_{100,102,1} = \%1 \}$$

$$\%1 := X_{2,102,101} X_{101,100,2} X_{1,1,102}$$

$$\%2 := -\frac{1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{X_{101,100,2} X_{2,102,101}}$$

$$\%3 := \frac{X_{101,100,2} X_{2,102,101}}{X_{1,102,102}}$$

$$\%4 := \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{X_{2,102,101} X_{101,100,2}}$$

$$\%5 := \frac{1}{X_{101,100,2} X_{2,102,101}}$$

#Résolution des équations de 3-cocycle avec 3 b après simplification par les solutions précédentes.

> for i from 1 to nops([Sol1b[1]]) do
D3b3[i] := subs(Sol0b[1], Sol1b[1][i], Sol2b[1][i], D3b2) od;
> Sol3b[1] := solve(D3b3[1]);

$$Sol3b_1 := \{ X_{100,102,100} = \%1, X_{101,100,100} = X_{1,102,102}, X_{100,100,102} = X_{101,101,102}, X_{101,101,100} = X_{101,101,102}, X_{101,102,102} = X_{1,102,102},$$

$$X_{102,101,100} = \%1, X_{101,100,102} = \%1, X_{101,101,102} = X_{101,101,102}, X_{1,102,102} = X_{1,102,102}, X_{101,102,1} = X_{101,102,1}, X_{100,100,100} = 1,$$

$$X_{2,101,100} = \frac{X_{101,101,102} X_{1,102,102}}{X_{101,102,1}}, X_{100,101,101} = X_{1,102,102}, X_{102,100,101} = \%1, X_{101,100,101} = \%1, X_{102,100,100} = X_{1,102,102},$$

$$X_{100,102,102} = X_{1,102,102}, X_{102,101,102} = \%1, X_{101,101,101} = 1, X_{100,100,101} = X_{101,101,102}, X_{101,102,101} = \%1, X_{102,100,102} = \%1,$$

$$X_{102,102,102} = 1, X_{100,102,101} = \%1, X_{102,101,101} = X_{1,102,102}, X_{100,101,100} = \%1, X_{102,102,100} = X_{101,101,102}, X_{102,102,101} = X_{101,101,102},$$

$$X_{101,102,100} = \%1, X_{100,101,102} = \%1, \{ X_{100,102,100} = \%1, X_{100,100,102} = X_{101,101,102}, X_{101,101,100} = X_{101,101,102}, X_{102,101,100} = \%1,$$

$$X_{101,100,102} = \%1, X_{101,101,102} = X_{101,101,102}, X_{1,102,102} = X_{1,102,102}, X_{101,102,1} = X_{101,102,1}, X_{2,101,100} = -\frac{X_{101,101,102} X_{1,102,102}}{X_{101,102,1}},$$

$$X_{100,100,100} = -1, X_{102,100,101} = \%1, X_{101,100,101} = \%1, X_{101,100,100} = -X_{1,102,102}, X_{102,100,100} = -X_{1,102,102}, X_{100,102,102} = -X_{1,102,102},$$

$$X_{101,102,102} = -X_{1,102,102}, X_{102,101,102} = \%1, X_{101,101,101} = -1, X_{100,100,101} = X_{101,101,102}, X_{101,102,101} = \%1, X_{102,100,102} = \%1,$$

$$X_{102,102,102} = -1, X_{100,102,101} = \%1, X_{102,101,101} = -X_{1,102,102}, X_{100,101,100} = \%1, X_{102,102,100} = X_{101,101,102}, X_{102,102,101} = X_{101,101,102},$$

$$X_{101,102,100} = \%1, X_{100,101,101} = -X_{1,102,102}, X_{100,101,102} = \%1 \}$$

$$\%1 := X_{101,101,102} X_{1,102,102}$$

> Sol3b[2] := solve(D3b3[2]);

$$Sol3b_2 := \{ X_{100,101,100} = \%1, X_{102,100,100} = X_{102,100,100}, X_{100,100,102} = X_{101,101,102}, X_{101,100,102} = -\%2, X_{102,100,101} = -\%2,$$

$$X_{101,101,100} = X_{101,101,102}, X_{101,102,101} = \%1, X_{101,102,102} = X_{102,100,100}, X_{100,102,100} = \%1, X_{100,102,102} = X_{102,100,100},$$

$$X_{101,101,102} = X_{101,101,102}, X_{100,100,100} = 1, X_{101,102,100} = -\%2, X_{101,101,101} = 1, X_{100,100,101} = X_{101,101,102}, X_{102,102,102} = 1,$$

$$X_{100,101,101} = X_{102,100,100}, X_{102,100,102} = \%1, X_{100,102,101} = -\%2, X_{102,102,100} = X_{101,101,102}, X_{102,101,102} = \%1, X_{102,101,101} = X_{102,100,100},$$

$$X_{102,102,101} = X_{101,101,102}, X_{101,100,101} = \%1, X_{101,100,2} = \frac{X_{102,100,100} X_{101,101,102}}{X_{2,102,101}}, X_{1,102,102} = X_{102,100,100}, X_{100,101,102} = -\%2,$$

$$X_{102,101,100} = -\%2, X_{101,100,100} = X_{102,100,100}, X_{2,102,101} = X_{2,102,101}, \{ X_{100,101,100} = -\%1, X_{102,100,100} = X_{102,100,100},$$

$$X_{102,101,100} = \%2, X_{100,101,102} = \%2, X_{100,100,102} = X_{101,101,102}, X_{101,101,100} = X_{101,101,102}, X_{102,100,101} = \%2, X_{101,102,102} = X_{102,100,100},$$

$$X_{100,102,102} = X_{102,100,100}, X_{101,101,102} = X_{101,101,102}, X_{100,100,100} = -1, X_{100,102,100} = -\%1, X_{101,101,101} = -1, X_{100,100,101} = X_{101,101,102},$$

$$X_{102,102,102} = -1, X_{101,102,100} = \%2, X_{100,102,101} = \%2, X_{100,101,101} = X_{102,100,100}, X_{102,102,100} = X_{101,101,102}, X_{102,101,101} = X_{102,100,100},$$

$$X_{102,100,102} = -\%1, X_{101,100,102} = \%2, X_{102,101,102} = -\%1, X_{102,102,101} = X_{101,101,102}, X_{101,100,101} = -\%1, X_{1,102,102} = -X_{102,100,100},$$

$$X_{101,100,2} = \frac{X_{102,100,100} X_{101,101,102}}{X_{2,102,101}}, X_{101,102,101} = -\%1, X_{101,100,100} = X_{102,100,100}, X_{2,102,101} = X_{2,102,101}$$

$$\%1 := X_{101,101,102} X_{102,100,100} \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)$$

$$\%2 := X_{102,100,100} X_{101,101,102} (1 + \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1))$$

```
> save Sol0b,Sol1b,Sol2b,Sol3b, 'solution1.m':
```

Feuille de calcul :

solution3u.mws

Simplification des 3-cocycles usuels du groupe diédral D_3 trouvés dans la feuille de calcul " *diedral.mws*".

Remarque: $1 + \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1) = \exp(i\pi/3)$;

$$\text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1) = \exp(2\pi i/3)$$

```
> restart; read 'solution1.m';
```

```
[ #Procédure pour réduire les solutions(enlève les égalité du type l=)
```

```
> enleve:=proc(EXP) local d,temp,temp1,temp2; temp:=EXP;d:=0;do d:=d+1; if d>nops(temp)
then break else if temp[d] then
temp1:=op(temp[1..d-1]);temp2:=op(temp[d+1..nops(temp)]);temp:={temp1,temp2};d:=0
fi;fi;od;RETURN(temp);end;
```

```
#Solution sans b
```

```
> temp:={X[2,1,1]=x,op(subs(X[2,1,1]=x,Sol0b[1]))};
```

```
> Sol0b:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol0b} := \{X_{2,1,2} = 1, X_{2,2,2} = 1, X_{1,1,1} = 1, X_{1,2,1} = 1, X_{2,1,1} = x, X_{2,2,1} = \frac{1}{x}, X_{1,2,2} = x, X_{1,1,2} = \frac{1}{x}\}$$

```
#Solution avec 1b du type 1
```

```
> temp:={X[1,1,102]=t,X[101,2,1]=r,X[102,2,2]=s,op(subs(X[2,1,1]=x,X[1,1,102]=t,X[101,
2,1]=r,X[102,2,2]=s,Sol1b[1][1]))};
```

```
> Sol1b1:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol1b1} := \{X_{1,102,2} = 1, X_{2,102,1} = 1, X_{2,101,1} = 1, X_{1,101,2} = 1, X_{2,100,1} = 1, X_{1,100,2} = 1, X_{1,100,1} = 1, X_{1,101,1} = 1, X_{2,101,2} = 1,$$

$$X_{2,102,2} = 1, X_{1,102,1} = 1, X_{2,100,2} = 1, X_{1,1,102} = t, X_{101,2,1} = r, X_{102,2,2} = s, X_{2,2,101} = t, X_{1,1,100} = t, X_{1,1,101} = t, X_{2,2,102} = t,$$

$$X_{2,2,100} = t, X_{102,2,1} = r, X_{102,1,2} = r, X_{101,1,2} = r, X_{100,2,1} = r, X_{100,1,2} = r, X_{101,1,1} = s, X_{100,1,1} = s, X_{101,2,2} = s, X_{100,2,2} = s,$$

$$X_{102,1,1} = s, X = \frac{s^2}{r}, X_{2,1,100} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{2,1,101} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{1,2,101} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{1,2,102} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{1,2,100} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{2,1,102} = \frac{t^2 s^2}{r}\}$$

```
#Solution avec 1b du type 2
```

```
> temp:={X[1,1,102]=t,X[101,2,1]=r,X[102,2,2]=s,op(subs(X[2,1,1]=x,X[1,1,102]=t,X[101,
2,1]=r,X[102,2,2]=s,Sol1b[1][2]))};
```

```
> Sol1b2:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol1b2} := \{X_{1,102,2} = \%1, X_{2,101,1} = \%1, X_{2,100,2} = \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1), X_{1,101,2} = \%1, X_{1,100,2} = \%1, X_{2,100,1} = \%1,$$

$$X_{2,102,2} = \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1), X_{1,101,1} = \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1), X_{2,101,2} = \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1),$$

$$X_{1,100,1} = \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1), X_{2,102,1} = \%1, X_{1,102,1} = \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1), X_{1,1,102} = t, X_{101,2,1} = r, X_{102,2,2} = s,$$

$$X_{2,2,101} = t, X_{1,1,100} = t, X_{1,1,101} = t, X_{2,2,102} = t, X_{2,2,100} = t, X_{102,2,1} = r, X_{102,1,2} = r, X_{101,1,2} = r, X_{100,2,1} = r, X_{100,1,2} = r,$$

$$X_{101,1,1} = s, X_{100,1,1} = s, X_{101,2,2} = s, X_{100,2,2} = s, X_{102,1,1} = s, X = \frac{s^2}{r}, X_{2,1,100} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{2,1,101} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{1,2,101} = \frac{t^2 s^2}{r},$$

$$X_{1,2,102} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{1,2,100} = \frac{t^2 s^2}{r}, X_{2,1,102} = \frac{t^2 s^2}{r}\}$$

$$\%1 := -1 - \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)$$

```
#Solution avec 2b du type 1
```

```
> temp:={X[2,101,100]=m,X[1,102,102]=p,X[101,102,1]=q,op(subs(X[2,1,1]=x,X[1,1,102]=t,
X[101,2,1]=r,X[102,2,2]=s,X[2,101,100]=m,X[1,102,102]=p,X[101,102,1]=q,Sol2b[1][1]))};
```

```
> Sol2b1:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol2b1} := \{X_{2,101,100} = m, X_{1,102,102} = p, X_{101,102,1} = q, X_{2,100,101} = \frac{1}{t}, X_{2,101,102} = \frac{1}{t}, X_{1,101,100} = \frac{1}{t}, X_{1,100,102} = \frac{1}{t}, X_{1,102,101} = \frac{1}{t},$$

$$X_{2,102,100} = \frac{1}{t}, X_{2,102,101} = m, X_{2,100,102} = m, X_{1,100,101} = m, X_{1,102,100} = m, X_{1,101,102} = m, X_{1,100,100} = p, X_{2,101,101} = p,$$

$$X_{2,100,100} = p, X_{2,102,102} = p, X_{1,101,101} = p, X_{100,101,1} = q, X_{101,100,2} = q, X_{102,100,1} = q, X_{100,102,2} = q, X_{102,101,2} = q,$$

$$X_{101,1,101} = \frac{1}{qm}, X_{100,1,101} = \frac{1}{qm}, X_{100,2,102} = \frac{1}{qm}, X_{102,1,101} = \frac{1}{qm}, X_{100,2,101} = \frac{1}{qm}, X_{101,2,101} = \frac{1}{qm}, X_{102,1,100} = \frac{1}{qm},$$

$$X_{100,1,100} = \frac{1}{qm}, X_{100,2,100} = \frac{1}{qm}, X_{101,1,100} = \frac{1}{qm}, X_{100,1,102} = \frac{1}{qm}, X_{102,2,101} = \frac{1}{qm}, X_{101,1,102} = \frac{1}{qm}, X_{102,2,102} = \frac{1}{qm},$$

$$X_{101,2,100} = \frac{1}{qm}, X_{101,2,102} = \frac{1}{qm}, X_{102,2,100} = \frac{1}{qm}, X_{102,1,102} = \frac{1}{qm}, X_{100,102,1} = qm t, X_{101,102,2} = qm t, X_{102,101,1} = qm t,$$

$$X_{100,101,2} = qm t, X_{102,100,2} = qm t, X_{101,100,1} = qm t, s = \frac{1}{qm t}, X_{101,101,2} = \frac{qm}{p}, X_{100,100,1} = \frac{qm}{p}, X_{102,102,1} = \frac{qm}{p},$$

$$X_{100,100,2} = \frac{qm}{p}, X_{101,101,1} = \frac{qm}{p}, X_{102,102,2} = \frac{qm}{p}, r = \frac{p}{m q^2}\}$$

```
#Solution avec 2b du type 2
```

```
> temp:={X[1,102,102]=p,X[101,100,2]=q,X[2,102,101]=m,op(subs(X[2,1,1]=x,X[1,1,102]=t,
X[101,2,1]=r,X[102,2,2]=s,X[1,102,102]=p,X[101,100,2]=q,X[2,102,101]=m,Sol2b[1][2]))};
```

```
> Sol2b2:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol2b2} := \{X_{2,101,100} = m, X_{1,102,102} = p, X_{101,102,1} = q, X_{2,100,101} = \frac{1}{t}, X_{2,101,102} = \frac{1}{t}, X_{1,101,100} = \frac{1}{t}, X_{1,100,102} = \frac{1}{t}, X_{1,102,101} = \frac{1}{t},$$

$$X_{2,102,100} = \frac{1}{t}, X_{2,102,101} = m, X_{2,100,102} = m, X_{1,100,101} = m, X_{1,102,100} = m, X_{1,101,102} = m, X_{1,100,100} = p, X_{2,101,101} = p,$$

$$X_{2,100,100} = p, X_{2,102,102} = p, X_{1,101,101} = p, X_{100,101,1} = q, X_{101,100,2} = q, X_{102,100,1} = q, X_{100,102,2} = q, X_{102,101,2} = q,$$

$$X_{102,1,101} = \frac{1}{qm}, X_{100,2,101} = \frac{1}{qm}, X_{101,1,100} = \frac{1}{qm}, X_{100,1,102} = \frac{1}{qm}, X_{101,2,102} = \frac{1}{qm}, X_{102,2,100} = \frac{1}{qm}, X_{100,102,1} = qm t,$$

$$X_{101,102,2} = qm t, X_{102,101,1} = qm t, X_{100,101,2} = qm t, X_{102,100,2} = qm t, X_{101,100,1} = qm t, s = \frac{1}{qm t}, X_{101,101,2} = \frac{qm}{p},$$

$$X_{100,100,1} = \frac{qm}{p}, X_{102,102,1} = \frac{qm}{p}, X_{100,100,2} = \frac{qm}{p}, X_{101,101,1} = \frac{qm}{p}, X_{102,102,2} = \frac{qm}{p}, r = \frac{p}{m q^2},$$

$$X_{101,1,102} = \frac{\text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)}{m q}, X_{101,2,101} = \%1, X_{100,2,100} = \%1, X_{102,1,100} = \frac{\text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)}{m q},$$

$$X_{102,2,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{m q}, X_{100,1,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{m q}, X_{100,2,102} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{m q}, X_{101,1,101} = \%1,$$

$$X_{102,1,102} = \%1, X_{101,2,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{m q}, X_{102,2,102} = \%1, X_{100,1,100} = \%1 \}$$

$$\%1 := -\frac{1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{q m}$$

#Solution avec 3b du type 1.1

```
> temp:= {X[101,101,102]=w, op(subs(X[2,1,1]=x, X[1,1,102]=t, X[101,2,1]=r, X[102,2,2]=s, X[2,101,100]=m, X[1,102,102]=p, X[101,102,1]=q, X[101,101,102]=w, Sol3b[1][1]))}:
> Sol3b11:=enleve(temp);
Sol3b11 := {X100,100,100 = 1, X101,101,101 = 1, X102,102,102 = 1, X101,101,102 = w, X101,100,100 = p, X101,102,102 = p, X100,101,101 = p,
X102,100,100 = p, X100,102,102 = p, X102,101,101 = p, X100,100,102 = w, X101,101,100 = w, X100,100,101 = w, X102,102,100 = w, X102,102,101 = w,
X100,102,100 = w p, X102,101,100 = w p, X101,100,102 = w p, X102,100,101 = w p, X101,100,101 = w p, X102,101,102 = w p, X101,102,101 = w p,
X102,100,102 = w p, X100,102,101 = w p, X100,101,100 = w p, X101,102,100 = w p, X100,101,102 = w p, m = -\frac{p w}{q}}
```

#Solution avec 3b du type 12

```
> temp:= {X[101,101,102]=w, op(subs(X[2,1,1]=x, X[1,1,102]=t, X[101,2,1]=r, X[102,2,2]=s, X[2,101,100]=m, X[1,102,102]=p, X[101,102,1]=q, X[101,101,102]=w, Sol3b[1][2]))}:
> Sol3b12:=enleve(temp);
Sol3b12 := {X100,100,100 = -1, X101,101,101 = -1, X102,102,102 = -1, X101,101,102 = w, X100,100,102 = w, X101,101,100 = w, X100,100,101 = w,
X102,102,100 = w, X102,102,101 = w, X100,102,100 = w p, X102,101,100 = w p, X101,100,102 = w p, X102,100,101 = w p, X101,100,101 = w p,
X102,101,102 = w p, X101,102,101 = w p, X102,100,102 = w p, X100,102,101 = w p, X100,101,100 = w p, X101,102,100 = w p, X100,101,102 = w p,
X101,100,100 = -p, X102,100,100 = -p, X100,102,102 = -p, X101,102,102 = -p, X102,101,101 = -p, X100,101,101 = -p, m = -\frac{p w}{q}}
```

#Solution avec 3b du type 21

```
> temp:= {X[101,101,102]=w, X[102,100,100]=p, op(subs(X[2,1,1]=x, X[1,1,102]=t, X[101,2,1]=r, X[102,2,2]=s, X[1,102,102]=p, X[101,100,2]=q, X[2,102,101]=m, X[101,101,102]=w, X[102,100,100]=p, Sol3b[2][1]))}:
> Sol3b21:=enleve(temp);
Sol3b21 := {X100,100,100 = 1, X101,101,101 = 1, X102,102,102 = 1, X101,101,102 = w, X101,100,100 = p, X101,102,102 = p, X100,101,101 = p,
X102,100,100 = p, X100,102,102 = p, X102,101,101 = p, X100,100,102 = w, X101,101,100 = w, X100,100,101 = w, X102,102,100 = w, X102,102,101 = w,
X100,101,100 = %2, X101,100,102 = %1, X102,100,101 = %1, X101,102,101 = %2, X100,102,100 = %2, X101,102,100 = %1, X102,100,102 = %2,
X100,102,101 = %1, X102,101,102 = %2, X101,100,101 = %2, X100,101,102 = %1, X102,101,100 = %1, q = \frac{p w}{m}}
%1 := -p w (1 + RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1))
%2 := w p RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1)
```

#Solution avec 3b du type 22

```
> temp:= {X[101,101,102]=w, X[102,100,100]=-p, op(subs(X[2,1,1]=x, X[1,1,102]=t, X[101,2,1]=r, X[102,2,2]=s, X[1,102,102]=p, X[101,100,2]=q, X[2,102,101]=m, X[102,100,100]=-p, X[101,101,102]=w, Sol3b[2][2]))}:
> Sol3b22:=enleve(temp);
```

```
Sol3b22 := {X100,100,100 = -1, X101,101,101 = -1, X102,102,102 = -1, X101,101,102 = w, X100,100,102 = w, X101,101,100 = w, X100,100,101 = w,
X102,102,100 = w, X102,102,101 = w, X101,100,100 = -p, X102,100,100 = -p, X100,102,102 = -p, X101,102,102 = -p, X102,101,101 = -p,
X100,101,101 = -p, X100,101,100 = %2, X101,100,102 = %1, X102,100,101 = %1, X101,102,101 = %2, X100,102,100 = %2, X101,102,100 = %1,
X102,100,102 = %2, X100,102,101 = %1, X102,101,102 = %2, X101,100,101 = %2, X100,101,102 = %1, X102,101,100 = %1, q = -\frac{p w}{m}}
%1 := -p w (1 + RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1))
%2 := w p RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1)
> save
Sol0b, Sol1b1, Sol2b1, Sol3b11, Sol3b12, Sol1b2, Sol2b2, Sol3b21, Sol3b22, 'solution3u.m';
```

Feuille de calcul :

script.mws

Donne la feuille de calcul maple qui détermine des 3-cocycles quasi-abéliens associés aux 3-cocycles usuels de la feuille de calcul "solution3u.mws"

```
> restart;
#Procédure des équations de la première relation de 3-cocycle quasi-abélien.
> Relation:=proc(n,gt,ht,kt) local
Z, jt, ijt, temp; Z:=evaln(Z); jt:=evaln(jt); ijt:=evaln(ijt); if gt<=n-1
then if kt<=n-1 then it:=gt; else it:=n-gt mod n; fi; else if kt<=n-1 then
temp:=(2*n-2*kt+gt-100) mod n; it:=100+temp; else temp:=(2*kt-gt-100) mod n; it:=
100+temp; fi; fi; if ht<=n-1 then if kt<=n-1 then jt:=ht; else jt:=n-ht mod n; fi; else if
kt<=n-1 then temp:=(2*n-2*kt+ht-100) mod n; jt:=100+temp; else temp:=(2*kt-ht-100) mod
n; jt:=100+temp; fi; fi; if gt<=n-1 then if ht<=n-1 then ijt:=(gt+ht) mod n; else temp:=
(gt+ht-100) mod n; ijt:=temp+100; fi; else if ht<=n-1 then temp:=(gt-100+n-ht) mod
n; ijt:=100+temp; else ijt:=(gt+n-ht) mod
n; fi; fi; Z:=X[gt,ht,kt]*X[kt,it,jt]*1/X[gt,kt,jt]*Y[ijt,kt]*1/Y[gt,kt]*1/Y[ht,kt]=1;
end;

#Procédure des équations de la deuxième relations de 3 cocycle quasi abélien.
> Relation2:=proc(n,gt,ht,kt) local
Z, jt, ijt, jkt, temp; Z:=evaln(Z); jt:=evaln(jt); ijt:=evaln(ijt); jkt:=evaln(jkt); if
gt<=n-1 then if ht<=n-1 then jt:=gt; else jt:=n-gt mod n; fi; else if ht<=n-1 then
temp:=(2*n-2*ht+gt-100) mod n; jt:=100+temp; else temp:=(2*ht-gt-100) mod n; jt:=
100+temp; fi; fi; if jt<=n-1 then if kt<=n-1 then ijt:=jt; else ijt:=n-jt mod n; fi; else
if kt<=n-1 then temp:=(2*n-2*kt+jt-100) mod n; ijt:=100+temp; else
temp:=(2*kt-jt-100) mod n; ijt:=100+temp; fi; fi; if ht<=n-1 then if kt<=n-1 then
jkt:=(ht+kt) mod n; else temp:=(ht+kt-100) mod n; jkt:=temp+100; fi; else if kt<=n-1
then temp:=(ht-100+n-kt) mod n; jkt:=100+temp; else jkt:=(ht+n-kt) mod
n; fi; fi; Z:=1/X[gt,ht,kt]*X[ht,jt,kt]*1/X[ht,kt,ijt]*Y[gt,jkt]*1/Y[jt,kt]*1/Y[gt,ht]=
1; end;

#Solution des 3-cocycles de groupe usuels.
> read'solution3u.m';

#Initialisation
> n:=3;
[ > Equa:=1:1;
[ > Normay:=Y[0,0]=1;
```

```

[ > Norma:=X[0,0,0]=1:

#Equation de normalisation de Y et de X.
[ > for i from 1 to n-1 do NormaY:=NormaY,Y[0,i]=1,Y[i,0]=1 od:
[ > for i from 0 to n-1 do NormaY:=NormaY,Y[100+i,0]=1,Y[0,100+i]=1 od:

#Génère les équations de normalisation de X.
[ > for i from 1 to n-1 do Norma:=Norma,X[i,0,0]=1,X[0,i,0]=1,X[0,0,i]=1 od:
[ > for i from 0 to n-1 do Norma:=Norma,X[100+i,0,0]=1,X[0,100+i,0]=1,X[0,0,100+i]=1 od:
[ > for i from 1 to n-1 do for j from 1 to n-1 do
Norma:=Norma,X[i,j,0]=1,X[i,0,j]=1,X[0,i,j]=1 od:od:
[ > for i from 0 to n-1 do for j from 1 to n-1 do
Norma:=Norma,X[i+100,j,0]=1,X[i+100,0,j]=1,X[0,i+100,j]=1 od:od:
[ > for i from 1 to n-1 do for j from 0 to n-1 do
Norma:=Norma,X[i,j+100,0]=1,X[i,0,j+100]=1,X[0,i,j+100]=1 od:od:
[ > for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do
Norma:=Norma,X[i+100,j+100,0]=1,X[i+100,0,j+100]=1,X[0,i+100,j+100]=1 od:od:
#Equation de 3-cocycle quasi-abélien.
[ > for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do
Equa:=Equa,Relation(n,i,j,k),Relation2(n,i,j,k),Relation(n,i+100,j,k),Relation2(n,i+
100,j,k),Relation(n,i,j+100,k),Relation2(n,i,j+100,k),Relation(n,i,j,k+100),Relation
2(n,i,j,k+100),Relation(n,i+100,j+100,k),Relation2(n,i+100,j+100,k),Relation(n,i+100
,j,k+100),Relation2(n,i+100,j,k+100),Relation(n,i,j+100,k+100),Relation2(n,i,j+100,k
+100),Relation(n,i+100,j+100,k+100),Relation2(n,i+100,j+100,k+100) od:od:od:
[ > Equan:=subs( {Norma}, {NormaY}, {Equa} ):
[ #(fin de lecture pour exécuter la feuille de calcul"verification3qa.mws")
[ > Equa11:=subs(Sol0b,Sol1b1,Sol2b1,Sol3b11,Equan):
[ > Equa12:=subs(Sol0b,Sol1b1,Sol2b1,Sol3b12,Equan):
[ > Equa21:=subs(Sol0b,Sol1b2,Sol2b2,Sol3b21,Equan):
[ > Equa22:=subs(Sol0b,Sol1b2,Sol2b2,Sol3b22,Equan):
[ > Sol11:=solve(Equa11);
[ > Sol12:=solve(Equa12);
[ > Sol21:=solve(Equa21);
[ > Sol22:=solve(Equa22);
[ > save `travail.m`;
[ > quit


```

Feuille de calcul :
solution3qa.mws

Simplification des solutions obtenues par la feuille de calcul "script.mws".

Remarque: $1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) = \exp(i \cdot \pi / 3)$
 $\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) = \exp(2 \cdot i \cdot \pi / 3)$
 $\text{RootOf}(1 + _Z^2) = i$
 $\text{RootOf}(_Z^2 + 2 \cdot \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)) = \exp(11 \cdot i \cdot \pi / 6)$

```

[ > restart;
[ > read `travail.m`;
#Procédure pour réduire les solutions(enlève les égalité du type l=)
[ > enleve:=proc(EXP) local d,temp,temp1,temp2;temp:=EXP;d:=0;do d:=d+1; if d>nops(temp)
then break else if temp[d] then

```

```

temp1:=op(temp[1..d-1]);temp2:=op(temp[d+1..nops(temp)]);temp:={temp1,temp2};d:=0
fi;fi;od;RETURN(temp);end:

#Solutions correspondant à Equa11
[ > Sol11;
{ w = w, Y_{1,100} = Y_{2,100}, Y_{102,100} = 1, Y_{102,2} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{101,101} = 1, Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{2,100} = Y_{2,100}, p = \frac{1}{w Y_{2,100}}, Y_{100,102} = 1,
Y_{102,101} = 1, Y_{100,101} = 1, Y_{100,1} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{102,102} = 1, Y_{101,2} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{2,102} = Y_{2,100}, Y_{1,102} = Y_{2,100}, Y_{102,1} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{100,100} = 1,
Y_{101,100} = 1, Y_{101,102} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{1,101} = Y_{2,100}, Y_{2,1} = 1, Y_{101,1} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{100,2} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{2,101} = Y_{2,100}, \{ w = w, Y_{1,100} = Y_{2,100},
Y_{102,2} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{2,100} = Y_{2,100}, p = \frac{1}{w Y_{2,100}}, Y_{100,1} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{101,2} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{2,102} = Y_{2,100}, Y_{1,102} = Y_{2,100},
Y_{102,1} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{1,2} = 1, Y_{1,101} = Y_{2,100}, Y_{2,1} = 1, Y_{101,1} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{100,2} = \frac{1}{Y_{2,100}}, Y_{2,101} = Y_{2,100}, Y_{102,101} = -1, Y_{100,101} = -1,
Y_{102,102} = -1, Y_{100,100} = -1, Y_{101,100} = -1, Y_{100,102} = -1, Y_{101,102} = -1, Y_{101,101} = -1 \}
[ > temp:={Y[2,100]=1/(p*w), op(subs(Y[2,100]=1/(p*w), Sol11[1]))}:
[ > Sol111:=enleve(temp);
Sol111 := { Y_{102,2} = w p, Y_{2,100} = \frac{1}{w p}, Y_{100,2} = w p, Y_{101,1} = w p, Y_{1,101} = \frac{1}{w p}, Y_{102,1} = w p, Y_{1,102} = \frac{1}{w p}, Y_{2,102} = \frac{1}{w p},
Y_{101,2} = w p, Y_{100,1} = w p, Y_{2,100} = \frac{1}{w p}, Y_{1,100} = \frac{1}{w p}, Y_{102,100} = 1, Y_{101,101} = 1, Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{100,102} = 1, Y_{102,101} = 1,
Y_{100,101} = 1, Y_{102,102} = 1, Y_{100,100} = 1, Y_{101,100} = 1, Y_{101,102} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1 }
[ > temp:={Y[2,100]=1/(p*w), op(subs(Y[2,100]=1/(p*w), Sol11[2]))}:
[ > Sol112:=enleve(temp);
Sol112 := { Y_{102,2} = w p, Y_{2,100} = \frac{1}{w p}, Y_{100,2} = w p, Y_{101,1} = w p, Y_{1,101} = \frac{1}{w p}, Y_{102,1} = w p, Y_{1,102} = \frac{1}{w p}, Y_{2,102} = \frac{1}{w p},
Y_{101,2} = w p, Y_{100,1} = w p, Y_{2,100} = \frac{1}{w p}, Y_{1,100} = \frac{1}{w p}, Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1, Y_{102,101} = -1, Y_{100,101} = -1, Y_{102,102} = -1,
Y_{102,100} = -1, Y_{100,100} = -1, Y_{101,100} = -1, Y_{100,102} = -1, Y_{101,102} = -1, Y_{101,101} = -1 }

# Solutions correspondant à Equa12
[ > Sol12;
{ Y_{102,100} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{100,100} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{101,102} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{100,101} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), w = w,
Y_{100,102} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{101,101} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{101,100} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{102,101} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2),
Y_{102,102} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1, Y_{1,101} = Y_{1,100}, p = -\frac{1}{w Y_{1,100}}, Y_{101,2} = \frac{1}{Y_{1,100}}, Y_{100,1} = \frac{1}{Y_{1,100}},
Y_{102,2} = \frac{1}{Y_{1,100}}, Y_{2,100} = Y_{1,100}, Y_{102,1} = \frac{1}{Y_{1,100}}, Y_{1,102} = Y_{1,100}, Y_{100,2} = \frac{1}{Y_{1,100}}, Y_{101,1} = \frac{1}{Y_{1,100}}, Y_{2,101} = Y_{1,100}, Y_{2,102} = Y_{1,100},
Y_{1,100} = Y_{1,100} }
[ > temp:={Y[1,100]=-1/(p*w), op(subs(Y[1,100]=-1/(p*w), Sol12))}:
[ > Sol120:=enleve(temp);
Sol120 := { Y_{102,102} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{100,100} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{102,101} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{100,101} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2),
Y_{101,102} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{100,102} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{101,101} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2), Y_{101,100} = \text{RootOf}(1 + \_Z^2),
Y_{1,100} = -\frac{1}{w p}, Y_{1,101} = -\frac{1}{w p}, Y_{101,2} = -w p, Y_{100,1} = -w p, Y_{102,2} = -w p, Y_{2,100} = -\frac{1}{w p}, Y_{102,1} = -w p, Y_{1,102} = -\frac{1}{w p},

```

$$Y_{100,2} = -w p, Y_{101,1} = -w p, Y_{2,101} = -\frac{1}{w p}, Y_{2,102} = -\frac{1}{w p}, Y_{102,100} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1 \}$$

Solution correspondant à Equa21

> Sol211:

$$\{ Y_{102,100} = \%1, p = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w Y_{2,101}}, Y_{1,2} = \%1^4, Y_{101,1} = \frac{\%1^4}{Y_{2,101}}, Y_{100,101} = -\%1^4, Y_{2,100} = Y_{2,101}, Y_{102,1} = \frac{\%1^4}{Y_{2,101}},$$

$$Y_{100,102} = \%3, Y_{101,102} = \%3, Y_{102,101} = \%3, Y_{1,100} = \%2, Y_{2,101} = Y_{2,101}, Y_{102,102} = -\%1^6, Y_{2,2} = \%1^8, Y_{101,100} = \%1,$$

$$Y_{100,100} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{2,1} = \%1^4, Y_{1,1} = \%1^2, Y_{2,102} = \%2, w = w, Y_{100,1} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{102,2} = \frac{\%1^4}{Y_{2,101}},$$

$$Y_{101,101} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4, Y_{100,2} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{1,101} = Y_{2,101}, Y_{101,2} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{1,102} = Y_{2,101}, \{ Y_{100,101} = \%1^4,$$

$$Y_{100,102} = -\%3, Y_{101,102} = -\%3, Y_{102,101} = -\%3, Y_{102,102} = \%1^6, Y_{101,100} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1),$$

$$Y_{101,101} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4, p = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w Y_{2,101}}, Y_{1,2} = \%1^4, Y_{101,1} = \frac{\%1^4}{Y_{2,101}}, Y_{2,100} = Y_{2,101}, Y_{102,1} = \frac{\%1^4}{Y_{2,101}},$$

$$Y_{1,100} = \%2, Y_{2,101} = Y_{2,101}, Y_{2,2} = \%1^8, Y_{100,100} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{2,1} = \%1^4, Y_{1,1} = \%1^2, Y_{2,102} = \%2, w = w,$$

$$Y_{100,1} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{102,2} = \frac{\%1^4}{Y_{2,101}}, Y_{100,2} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{1,101} = Y_{2,101}, Y_{101,2} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{1,102} = Y_{2,101},$$

$$Y_{102,100} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \}$$

> temp := {Y[2,101]=RootOf(_Z^2+_Z+1)/(w*p), op(subs(Y[2,101]=RootOf(_Z^2+_Z+1)/(w*p), Sol21[1]))}:

> Sol211 := enleve(temp);

$$\text{Sol211} := \{ Y_{102,100} = \%1, Y_{1,2} = \%1^4, Y_{100,101} = -\%1^4, Y_{100,102} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5,$$

$$Y_{101,102} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{102,101} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{102,102} = -\%1^6, Y_{2,2} = \%1^8, Y_{101,100} = \%1,$$

$$Y_{100,100} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{2,1} = \%1^4, Y_{1,1} = \%1^2, Y_{101,101} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4,$$

$$Y_{101,1} = \frac{\%1^4 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{2,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p}, Y_{102,1} = \frac{\%1^4 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)},$$

$$Y_{1,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4}{w p}, Y_{2,102} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4}{w p}, Y_{100,1} = -\frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)},$$

$$Y_{102,2} = \frac{\%1^4 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{100,2} = -\frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{1,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p},$$

$$Y_{101,2} = -\frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{1,102} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p}, Y_{2,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p} \}$$

> temp := {Y[2,101]=RootOf(_Z^2+_Z+1)/(w*p), op(subs(Y[2,101]=RootOf(_Z^2+_Z+1)/(w*p), Sol21[2]))}:

> Sol212 := enleve(temp);

$$\text{Sol212} := \{ Y_{100,101} = \%1^4, Y_{100,102} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{101,102} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5,$$

$$Y_{102,101} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{102,102} = \%1^6, Y_{101,100} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1),$$

$$Y_{101,101} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4, Y_{1,2} = \%1^4, Y_{2,2} = \%1^8, Y_{100,100} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{2,1} = \%1^4, Y_{1,1} = \%1^2,$$

$$Y_{101,1} = \frac{\%1^4 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{2,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p}, Y_{102,1} = \frac{\%1^4 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)},$$

$$Y_{1,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4}{w p}, Y_{2,102} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4}{w p}, Y_{100,1} = -\frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)},$$

$$Y_{102,2} = \frac{\%1^4 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{100,2} = -\frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{1,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p},$$

$$Y_{101,2} = -\frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{1,102} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p}, Y_{102,100} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1),$$

$$Y_{2,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p} \}$$

$$\%1 := 1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

Solution correspondant à Equa22

> Sol222:

$$\{ Y_{2,101} = Y_{2,101}, w = w, Y_{102,100} = \%2, Y_{102,1} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{100,100} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%2,$$

$$Y_{101,101} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^3 \%2, Y_{101,100} = \%2, Y_{2,100} = -Y_{2,101} \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1,$$

$$Y_{2,2} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), Y_{1,2} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), Y_{2,1} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1),$$

$$p = -\frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w Y_{2,101}}, Y_{100,2} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{1,101} = Y_{2,101}, Y_{101,2} = -\frac{\%1}{Y_{2,101}}, Y_{1,102} = Y_{2,101}, Y_{1,1} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1),$$

$$Y_{101,1} = \frac{\%1^2 \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{Y_{2,101}}, Y_{100,102} = -\%2 \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{102,102} = \%1^2 \%2, Y_{100,101} = -\%1^3 \%2,$$

$$Y_{2,102} = Y_{2,101}, Y_{1,100} = Y_{2,101}, Y_{101,102} = -\%2 \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{102,101} = -\%1^3 \%2,$$

$$Y_{102,2} = \frac{\%1^2 \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{Y_{2,101}}, Y_{100,1} = \frac{\%1^4}{Y_{2,101}} \}$$

$$\%1 := 1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

$$\%2 := \text{RootOf}(\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^3)$$

> temp := {Y[2,101] = -RootOf(_Z^2+_Z+1)/w/p, op(subs(Y[2,101] = -RootOf(_Z^2+_Z+1)/w/p, Sol222))}:

> Sol220 := enleve(temp);

$$\text{Sol220} := \{ Y_{102,100} = \%3, Y_{100,100} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%3, Y_{101,101} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^3 \%3, Y_{101,100} = \%3,$$

$$Y_{2,2} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), Y_{1,2} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), Y_{2,1} = -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1),$$

$$Y_{1,1} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), Y_{100,102} = -\%3 \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{102,102} = \%1^2 \%3, Y_{100,101} = -\%1^3 \%3,$$

$$Y_{101,102} = -\%3 \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1, Y_{102,101} = -\%1^3 \%3, Y_{2,101} = \%2, Y_{102,1} = \frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)},$$

$$Y_{2,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1}{w p}, Y_{100,2} = \frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{1,101} = \%2, Y_{101,2} = \frac{\%1 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}, Y_{1,102} = \%2,$$

$$Y_{101,1} = -\%1^2 w p, Y_{2,102} = \%2, Y_{1,100} = \%2, Y_{102,2} = -\%1^2 w p, Y_{100,1} = -\frac{\%1^4 w p}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)} \}$$

$$\%1 := 1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

$$\%2 := -\frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{w p}$$


```

%3 := RootOf(RootOf(_Z^2+_Z+1)+_Z^2)
[ > save Sol111,Sol112,Sol120,Sol211,Sol212,Sol220, 'solution3qa.m';

```

Feuille de calcul :

soluce.mws

Deuxième simplification des 3-cocycles quasi-abéliens obtenus et rajout de deux types de solutions. Puis vérification des résultats trouvés.

```

[ > restart;
[ > read 'solution3u.m';read 'solution3qa.m';
[ #Procédure pour réduire les solutions(enlève les égalité du type l=)
[ > enleve:=proc(EXP) local d,temp,temp1,temp2;temp:=EXP;d:=0;do d:=d+1; if d>nops(temp)
then break else if temp[d] then
temp1:=op(temp[1..d-1]);temp2:=op(temp[d+1..nops(temp)]);temp:={temp1,temp2};d:=0
fi;fi;od;RETURN(temp);end:

```

Solution du premier type :

```

[ > Sol1b1:
[ > temp:=subs(r=s*s/x,Sol1b1):
[ > Sol1b1:=enleve(temp):

```

$$Sol1b1 := \{ X_{101,2,1} = \frac{s^2}{x}, X_{102,2,1} = \frac{s^2}{x}, X_{102,1,2} = \frac{s^2}{x}, X_{101,1,2} = \frac{s^2}{x}, X_{100,2,1} = \frac{s^2}{x}, X_{100,1,2} = \frac{s^2}{x}, X_{2,1,100} = t^2 x, X_{2,1,101} = t^2 x, \\ X_{1,2,101} = t^2 x, X_{1,2,102} = t^2 x, X_{1,2,100} = t^2 x, X_{2,1,102} = t^2 x, X_{1,102,2} = 1, X_{2,102,1} = 1, X_{2,101,1} = 1, X_{1,101,2} = 1, X_{2,100,1} = 1, \\ X_{1,100,2} = 1, X_{1,100,1} = 1, X_{1,101,1} = 1, X_{2,101,2} = 1, X_{2,102,2} = 1, X_{1,102,1} = 1, X_{2,100,2} = 1, X_{1,1,102} = t, X_{102,2,2} = s, X_{2,2,101} = t, \\ X_{1,1,100} = t, X_{1,1,101} = t, X_{2,2,102} = t, X_{2,2,100} = t, X_{101,1,1} = s, X_{100,1,1} = s, X_{101,2,2} = s, X_{100,2,2} = s, X_{102,1,1} = s \}$$

```

[ > temp:=subs(r=s*s/x,Sol2b1):
[ > temp:=subs(q=1/(s*m*t),temp):
[ > temp:=subs(p=1/(x*m*t*t),temp):
[ > Sol2b1:=enleve(temp):

```

$$Sol2b1 := \{ X_{2,101,100} = m, X_{2,100,101} = \frac{1}{t}, X_{2,101,102} = \frac{1}{t}, X_{1,101,100} = \frac{1}{t}, X_{1,100,102} = \frac{1}{t}, X_{1,102,101} = \frac{1}{t}, X_{2,102,100} = \frac{1}{t}, X_{2,102,101} = m, \\ X_{2,100,102} = m, X_{1,100,101} = m, X_{1,102,100} = m, X_{1,101,102} = m, X_{100,101,1} = \frac{1}{s m t}, X_{101,100,2} = \frac{1}{s m t}, X_{102,100,1} = \frac{1}{s m t}, \\ X_{100,102,2} = \frac{1}{s m t}, X_{102,101,2} = \frac{1}{s m t}, X_{101,1,101} = s t, X_{100,1,101} = s t, X_{100,2,102} = s t, X_{102,1,101} = s t, X_{100,2,101} = s t, X_{101,2,101} = s t, \\ X_{102,1,100} = s t, X_{100,1,100} = s t, X_{100,2,100} = s t, X_{101,1,100} = s t, X_{100,1,102} = s t, X_{102,2,101} = s t, X_{101,1,102} = s t, X_{102,2,102} = s t, \\ X_{102,1,100} = s t, X_{101,2,102} = s t, X_{102,2,100} = s t, X_{102,1,102} = s t, X_{100,1,02} = \frac{1}{s}, X_{101,102,2} = \frac{1}{s}, X_{102,101,1} = \frac{1}{s}, X_{100,101,2} = \frac{1}{s}, \\ X_{102,100,2} = \frac{1}{s}, X_{101,100,1} = \frac{1}{s}, X_{101,102,1} = \frac{1}{s m t}, X_{1,102,102} = \frac{1}{x m t^2}, X_{2,101,101} = \frac{1}{x m t^2}, X_{2,100,100} = \frac{1}{x m t^2}, X_{2,102,102} = \frac{1}{x m t^2}, \\ X_{1,101,101} = \frac{1}{x m t^2}, X_{1,100,100} = \frac{1}{x m t^2}, X_{101,101,2} = \frac{t x m}{s}, X_{100,100,1} = \frac{t x m}{s}, X_{102,102,1} = \frac{t x m}{s}, X_{100,100,2} = \frac{t x m}{s}, \\ X_{101,101,2} = \frac{t x m}{s}, X_{1,100,101} = \frac{t x m}{x m t^2}, X_{1,101,102} = \frac{t x m}{s}, X_{101,101,2} = \frac{t x m}{s}, X_{102,102,1} = \frac{t x m}{s}, X_{100,100,2} = \frac{t x m}{s} \}$$

$$X_{101,101,1} = \frac{t x m}{s}, X_{102,102,2} = \frac{t x m}{s}$$

```

[ > temp:=subs(r=s*s/x,q=1/(s*m*t),p=1/(x*m*t*t),Sol3b11):
[ > temp:=subs(w=(m*x*t)/s,temp):
[ > Sol3b11:=enleve(temp):

```

$$Sol3b11 := \{ X_{100,100,100} = 1, X_{101,101,101} = 1, X_{102,102,102} = 1, X_{101,101,102} = \frac{t x m}{s}, X_{100,100,102} = \frac{t x m}{s}, X_{101,101,100} = \frac{t x m}{s}, \\ X_{100,100,101} = \frac{t x m}{s}, X_{102,102,100} = \frac{t x m}{s}, X_{102,102,101} = \frac{t x m}{s}, X_{100,102,100} = \frac{1}{s t}, X_{102,101,100} = \frac{1}{s t}, X_{101,100,102} = \frac{1}{s t}, X_{102,100,101} = \frac{1}{s t}, \\ X_{101,100,101} = \frac{1}{s t}, X_{102,101,102} = \frac{1}{s t}, X_{101,102,101} = \frac{1}{s t}, X_{102,100,102} = \frac{1}{s t}, X_{100,102,101} = \frac{1}{s t}, X_{100,101,100} = \frac{1}{s t}, X_{101,102,100} = \frac{1}{s t}, \\ X_{100,101,102} = \frac{1}{s t}, X_{101,100,100} = \frac{1}{x m t^2}, X_{101,102,102} = \frac{1}{x m t^2}, X_{100,101,101} = \frac{1}{x m t^2}, X_{102,100,100} = \frac{1}{x m t^2}, X_{100,102,102} = \frac{1}{x m t^2}, \\ X_{102,101,101} = \frac{1}{x m t^2} \}$$

```

[ > Sol111:=subs(r=s*s/x,q=1/(s*m*t),p=1/(x*m*t*t),w=(m*x*t)/s,Sol111):

```

$$Sol111 := \{ Y_{102,100} = 1, Y_{101,101} = 1, Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{100,102} = 1, Y_{102,101} = 1, Y_{100,101} = 1, Y_{102,102} = 1, Y_{100,100} = 1, Y_{101,100} = 1, \\ Y_{101,102} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1, Y_{2,100} = s t, Y_{1,100} = s t, Y_{100,1} = \frac{1}{s t}, Y_{102,2} = \frac{1}{s t}, Y_{2,101} = s t, Y_{100,2} = \frac{1}{s t}, Y_{101,1} = \frac{1}{s t}, Y_{1,101} = s t, \\ Y_{102,1} = \frac{1}{s t}, Y_{1,102} = s t, Y_{2,102} = s t, Y_{101,2} = \frac{1}{s t} \}$$

```

[ > Sol112:=subs(r=s*s/x,q=1/(s*m*t),p=1/(x*m*t*t),w=(m*x*t)/s,Sol112):

```

$$Sol112 := \{ Y_{102,100} = -1, Y_{101,100} = -1, Y_{102,102} = -1, Y_{101,102} = -1, Y_{101,101} = -1, Y_{100,100} = -1, Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1, \\ Y_{102,101} = -1, Y_{100,101} = -1, Y_{102,102} = -1, Y_{2,100} = s t, Y_{1,100} = s t, Y_{100,1} = \frac{1}{s t}, Y_{102,2} = \frac{1}{s t}, Y_{2,101} = s t, Y_{100,2} = \frac{1}{s t}, Y_{101,1} = \frac{1}{s t}, \\ Y_{1,101} = s t, Y_{102,1} = \frac{1}{s t}, Y_{1,102} = s t, Y_{2,102} = s t, Y_{101,2} = \frac{1}{s t} \}$$

```

[ > temp:=subs(r=s*s/x,q=1/(s*m*t),p=1/(x*m*t*t),Sol3b12):
[ > temp:=subs(w=-(m*x*t)/s,temp):
[ > Sol3b12:=enleve(temp):

```

$$Sol3b12 := \{ X_{100,100,100} = -1, X_{101,101,101} = -1, X_{102,102,102} = -1, X_{101,100,100} = -\frac{1}{x m t^2}, X_{102,100,100} = -\frac{1}{x m t^2}, \\ X_{100,102,102} = -\frac{1}{x m t^2}, X_{101,102,102} = -\frac{1}{x m t^2}, X_{102,101,101} = -\frac{1}{x m t^2}, X_{100,101,101} = -\frac{1}{x m t^2}, X_{101,101,102} = -\frac{t x m}{s}, \\ X_{100,100,102} = -\frac{t x m}{s}, X_{101,101,100} = -\frac{t x m}{s}, X_{100,100,101} = -\frac{t x m}{s}, X_{102,102,100} = -\frac{t x m}{s}, X_{102,102,101} = -\frac{t x m}{s}, X_{100,102,100} = -\frac{1}{s t}, \\ X_{102,101,100} = -\frac{1}{s t}, X_{101,100,102} = -\frac{1}{s t}, X_{102,100,101} = -\frac{1}{s t}, X_{101,100,101} = -\frac{1}{s t}, X_{100,101,102} = -\frac{1}{s t}, X_{101,102,101} = -\frac{1}{s t}, \\ X_{102,100,102} = -\frac{1}{s t}, X_{100,102,101} = -\frac{1}{s t}, X_{100,101,100} = -\frac{1}{s t}, X_{101,102,100} = -\frac{1}{s t}, X_{100,101,102} = -\frac{1}{s t} \}$$

```

[ > Sol121:=subs(r=s*s/x,q=1/(s*m*t),p=1/(x*m*t*t),w=-(m*x*t)/s,Sol120):

```

$$Sol121 := \{ Y_{2,2} = 1, Y_{1,1} = 1, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1, Y_{2,100} = s t, Y_{1,100} = s t, Y_{100,1} = \frac{1}{s t}, Y_{102,2} = \frac{1}{s t}, Y_{2,101} = s t, Y_{100,2} = \frac{1}{s t}, \\ Y_{101,1} = \frac{1}{s t}, Y_{1,101} = s t, Y_{102,1} = \frac{1}{s t}, Y_{1,102} = s t, Y_{2,102} = s t, Y_{101,2} = \frac{1}{s t}, Y_{102,100} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{100,100} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), \\ Y_{101,102} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{100,101} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{100,102} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{101,101} = \text{RootOf}(1 + _Z^2) \}$$

$$Y_{101,100} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{102,101} = \text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{102,102} = \text{RootOf}(1 + _Z^2)$$

Rajout de la solution non trouvée par Maple correspondant aux solutions de la forme Sol121, mais avec un signe négatif devant les valeurs du type Y[10?,10?].

```
> Sol122:={Y[1,2] = 1, Y[2,1] = 1, Y[2,2] = 1, Y[2,100] = t*s, Y[102,1] = 1/t/s,
Y[100,1] = 1/t/s, Y[102,2] = 1/t/s, Y[1,101] = t*s, Y[101,2] = 1/t/s, Y[1,100] =
t*s, Y[2,102] = t*s, Y[101,1] = 1/t/s, Y[2,101] = t*s, Y[101,101] = -
RootOf(1+_Z^2), Y[102,100] = - RootOf(1+_Z^2), Y[100,100] = - RootOf(1+_Z^2),
Y[101,102] = - RootOf(1+_Z^2), Y[100,101] = - RootOf(1+_Z^2), Y[100,102] = -
RootOf(1+_Z^2), Y[101,100] = - RootOf(1+_Z^2), Y[102,101] = - RootOf(1+_Z^2),
Y[102,102] = - RootOf(1+_Z^2), Y[1,1] = 1, Y[100,2] = 1/t/s, Y[1,102] = t*s};
```

$$\text{Sol122} := \{Y_{100,102} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{101,100} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{102,101} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2),$$

$$Y_{102,102} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{1,1} = 1, Y_{100,2} = \frac{1}{t s}, Y_{1,102} = s t, Y_{1,2} = 1, Y_{2,1} = 1, Y_{2,2} = 1, Y_{2,100} = s t, Y_{102,1} = \frac{1}{t s}, Y_{100,1} = \frac{1}{t s},$$

$$Y_{102,2} = \frac{1}{t s}, Y_{1,101} = s t, Y_{101,2} = \frac{1}{t s}, Y_{1,100} = s t, Y_{2,102} = s t, Y_{101,1} = \frac{1}{t s}, Y_{2,101} = s t, Y_{101,101} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2),$$

$$Y_{102,100} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{100,100} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{101,102} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2), Y_{100,101} = -\text{RootOf}(1 + _Z^2)\}$$

Solution du Type 2 :

```
> Sol1b2:
> temp:=subs(r=s*s/x, Sol1b2);
> Sol1b2:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol1b2} := \{X_{1,102,2} = \%1, X_{2,101,1} = \%1, X_{2,100,2} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), X_{1,101,2} = \%1, X_{1,100,2} = \%1, X_{2,100,1} = \%1,$$

$$X_{2,102,2} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), X_{1,101,1} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), X_{2,101,2} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1),$$

$$X_{1,100,1} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), X_{2,102,1} = \%1, X_{1,102,1} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1), X_{101,2,1} = \frac{s^2}{x}, X_{102,2,1} = \frac{s^2}{x}, X_{102,1,2} = \frac{s^2}{x},$$

$$X_{101,1,2} = \frac{s^2}{x}, X_{100,2,1} = \frac{s^2}{x}, X_{100,1,2} = \frac{s^2}{x}, X_{2,1,100} = t^2 x, X_{2,1,101} = t^2 x, X_{1,2,101} = t^2 x, X_{1,2,102} = t^2 x, X_{1,2,100} = t^2 x, X_{2,1,102} = t^2 x,$$

$$X_{1,1,102} = t, X_{102,2,2} = s, X_{2,2,101} = t, X_{1,1,100} = t, X_{1,1,101} = t, X_{2,2,102} = t, X_{2,2,100} = t, X_{101,1,1} = s, X_{100,1,1} = s, X_{101,2,2} = s,$$

$$X_{100,2,2} = s, X_{102,1,1} = s\}$$

$$\%1 := -1 - \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

```
> temp:=subs(r=s*s/x, Sol1b2);
> temp:=subs(q=1/(s*m*t), temp);
> temp:=subs(p=1/(m*x*t*t), temp);
> Sol2b2:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol2b2} := \{X_{2,101,100} = m, X_{2,100,101} = \frac{1}{t}, X_{2,101,102} = \frac{1}{t}, X_{1,101,100} = \frac{1}{t}, X_{1,100,102} = \frac{1}{t}, X_{1,102,101} = \frac{1}{t}, X_{2,102,100} = \frac{1}{t}, X_{2,102,101} = m,$$

$$X_{2,100,102} = m, X_{1,100,101} = m, X_{1,102,100} = m, X_{1,101,102} = m, X_{102,2,100} = s t, X_{101,1,100} = s t, X_{100,1,102} = s t, X_{101,2,102} = s t,$$

$$X_{100,102,1} = \frac{1}{s}, X_{101,102,2} = \frac{1}{s}, X_{102,101,1} = \frac{1}{s}, X_{100,101,2} = \frac{1}{s}, X_{102,100,2} = \frac{1}{s}, X_{101,100,1} = \frac{1}{s}, X_{101,1,102} = \%1, X_{101,2,101} = \%2,$$

$$X_{101,102,1} = \frac{1}{s m t}, X_{100,101,1} = \frac{1}{s m t}, X_{101,100,2} = \frac{1}{s m t}, X_{102,100,1} = \frac{1}{s m t}, X_{100,102,2} = \frac{1}{s m t}, X_{102,101,2} = \frac{1}{s m t}, X_{102,1,101} = s t,$$

$$X_{100,2,101} = s t, X_{101,1,101} = \%2, X_{102,1,102} = \%2, X_{101,2,100} = \%1, X_{102,2,102} = \%2, X_{100,1,100} = \%2, X_{100,2,100} = \%2, X_{102,1,100} = \%1,$$

$$X_{102,2,101} = \%1, X_{100,1,101} = \%1, X_{100,2,102} = \%1, X_{1,102,102} = \frac{1}{m x t^2}, X_{1,100,100} = \frac{1}{m x t^2}, X_{2,101,101} = \frac{1}{m x t^2}, X_{2,100,100} = \frac{1}{m x t^2},$$

$$X_{2,102,102} = \frac{1}{m x t^2}, X_{1,101,101} = \frac{1}{m x t^2}, X_{101,101,2} = \frac{t m x}{s}, X_{100,101,1} = \frac{t m x}{s}, X_{102,102,1} = \frac{t m x}{s}, X_{100,100,2} = \frac{t m x}{s},$$

$$X_{101,101,1} = \frac{t m x}{s}, X_{102,102,2} = \frac{t m x}{s}\}$$

$$\%1 := s t \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

$$\%2 := -(1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)) s t$$

```
> temp:=subs(r=s*s/x, q=1/(s*m*t), p=1/(x*m*t*t), Sol3b21);
```

```
> temp:=subs(w=(x*m*t)/s, temp);
```

```
> Sol3b21:=enleve(temp);
```

$$\text{Sol3b21} := \{X_{100,100,100} = 1, X_{101,101,101} = 1, X_{102,102,102} = 1, X_{101,100,100} = \frac{1}{m x t^2}, X_{101,102,102} = \frac{1}{m x t^2}, X_{100,101,101} = \frac{1}{m x t^2},$$

$$X_{102,100,100} = \frac{1}{m x t^2}, X_{100,102,102} = \frac{1}{m x t^2}, X_{102,101,101} = \frac{1}{m x t^2}, X_{101,101,102} = \frac{t m x}{s}, X_{100,100,102} = \frac{t m x}{s}, X_{101,101,100} = \frac{t m x}{s},$$

$$X_{100,100,101} = \frac{t m x}{s}, X_{102,102,100} = \frac{t m x}{s}, X_{102,102,101} = \frac{t m x}{s}, X_{100,101,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{s t}, X_{101,101,102} = \%1,$$

$$X_{102,100,101} = \%1, X_{101,102,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{s t}, X_{100,102,100} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{s t}, X_{101,102,100} = \%1,$$

$$X_{102,100,102} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{s t}, X_{100,102,101} = \%1, X_{102,101,102} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{s t},$$

$$X_{101,101,101} = \frac{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{s t}, X_{100,101,102} = \%1, X_{102,101,100} = \%1\}$$

$$\%1 := -\frac{1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)}{t s}$$

```
> Sol211:=subs(r=s*s/x, q=1/(s*m*t), p=1/(x*m*t*t), w=(m*x*t)/s, Sol211);
```

$$\text{Sol211} := \{Y_{2,2} = -\%1^6, Y_{2,2} = \%1^8, Y_{101,100} = \%1, Y_{1,2} = \%1^4, Y_{100,101} = -\%1^4, Y_{100,102} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5,$$

$$Y_{101,102} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{102,101} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{100,100} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1,$$

$$Y_{101,101} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4, Y_{2,1} = \%1^4, Y_{1,1} = \%1^2, Y_{102,100} = \%1, Y_{2,102} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)^2 s t \%1^4,$$

$$Y_{101,1} = \frac{\%1^4}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{2,100} = \%2, Y_{102,1} = \frac{\%1^4}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{1,100} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)^2 s t \%1^4,$$

$$Y_{102,2} = \frac{\%1^4}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{2,101} = \%2, Y_{1,102} = \%2, Y_{1,101} = \%2, Y_{101,2} = -\frac{\%1}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t},$$

$$Y_{100,1} = -\frac{\%1}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{100,2} = -\frac{\%1}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}\}$$

$$\%1 := 1 + \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

$$\%2 := s t \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)$$

```
> Sol212:=subs(r=s*s/x, q=1/(s*m*t), p=1/(x*m*t*t), w=(m*x*t)/s, Sol212);
```

$$\text{Sol212} := \{Y_{2,2} = \%1^8, Y_{1,2} = \%1^4, Y_{2,1} = \%1^4, Y_{1,1} = \%1^2, Y_{2,102} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)^2 s t \%1^4,$$

$$Y_{101,1} = \frac{\%1^4}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{2,100} = \%2, Y_{102,1} = \frac{\%1^4}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{1,100} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1)^2 s t \%1^4,$$

$$Y_{102,2} = \frac{\%1^4}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{2,101} = \%2, Y_{1,102} = \%2, Y_{1,101} = \%2, Y_{101,2} = -\frac{\%1}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t},$$

$$Y_{100,1} = -\frac{\%1}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{100,2} = -\frac{\%1}{\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) s t}, Y_{100,100} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1,$$

$$Y_{101,101} = \text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^4, Y_{100,101} = \%1^4, Y_{100,102} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5,$$

$$Y_{101,102} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{102,101} = -\text{RootOf}(_Z^2 + _Z + 1) \%1^5, Y_{102,102} = \%1^6,$$

```

Y101,100 = -1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y102,100 = -1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1)
%1 := 1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)
%2 := s t RootOf(_Z^2 + _Z + 1)
[ > temp := subs(r=s*s/x, q=1/(s*m*t), p=1/(x*m*t*t), Sol3b22):
[ > temp := subs(w=- (m*x*t) / s, temp):
[ > Sol3b22 := enleve(temp):

Sol3b22 := { X100,100,100 = -1, X101,101,101 = -1, X102,102,102 = -1, X101,100,100 = -1/m x t^2, X102,100,100 = -1/m x t^2,
X100,102,102 = -1/m x t^2, X101,102,102 = -1/m x t^2, X102,101,101 = -1/m x t^2, X100,101,101 = -1/m x t^2, X101,101,101 = -1/m x t^2, X102,101,101 = -1/m x t^2,
X102,102,100 = -1/m x t^2, X102,102,101 = -1/m x t^2, X102,101,100 = %2, X101,102,100 = %2, X102,100,102 = %1, X100,102,101 = %2,
X102,101,102 = %1, X101,100,101 = %1, X100,101,102 = %2, X101,101,102 = -1/m x t^2, X100,102,102 = -1/m x t^2, X101,101,100 = -1/m x t^2,
X100,101,100 = %1, X101,100,102 = %2, X102,100,101 = %2, X101,102,101 = %1, X100,102,100 = %1 }
%1 := -1/m x t^2
%2 := (1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)) / s t
[ > Sol221 := subs(r=s*s/x, q=1/(s*m*t), p=1/(x*m*t*t), w=- (m*x*t) / s, Sol220):
Sol221 := { Y100,1 = %2^2 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t), Y2,100 = -RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t %2, Y2,102 = %3, Y1,100 = %3, Y102,2 = %2^2 / s t,
Y101,1 = %2^2 / s t, Y102,1 = -1/m x t^2 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t), Y100,102 = -%1 RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %2, Y102,102 = %2^2 %1,
Y100,101 = -%2^3 %1, Y101,102 = -%1 RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %2, Y102,101 = -%2^3 %1, Y100,100 = RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %1,
Y101,101 = -RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %2^3 %1, Y101,100 = %1, Y2,2 = RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y1,2 = -1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1),
Y2,1 = -1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y2,101 = %3, Y1,102 = %3, Y1,101 = %3, Y101,2 = -1/m x t^2 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t),
Y100,2 = -1/m x t^2 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t), Y1,1 = RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y102,100 = %1 }
%1 := RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2)
%2 := 1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)
%3 := s t RootOf(_Z^2 + _Z + 1)

Rajout de la solution non trouvée par Maple correspondant aux solutions de la forme Sol121, mais avec un signe négatif devant les valeurs du type Y[10?,10?].
[ > Sol222 := { Y[100,102] =
RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2) * RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * (1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)), Y[102,102] =
-(1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1))^2 * RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2), Y[100,101] =
(1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1))^3 * RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2), Y[102,100] =
-RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2), Y[101,102] =
RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2) * RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * (1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)), Y[102,101] =
(1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1))^3 * RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2), Y[100,100] =
-RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2), Y[101,101] =
RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * (1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1))^3 * RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2), Y[101,100] =
-RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2), Y[2,2] = RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y[1,2] =

```

```

-1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y[2,1] = -1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y[1,102] =
RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * t * s, Y[100,2] = -(1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)) / RootOf(_Z^2 + _Z + 1) / t / s,
Y[1,101] = RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * t * s, Y[101,2] =
-(1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)) / RootOf(_Z^2 + _Z + 1) / t / s, Y[100,1] =
(1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1))^4 / RootOf(_Z^2 + _Z + 1) / t / s, Y[2,100] =
-RootOf(_Z^2 + _Z + 1)^2 * t * s * (1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)), Y[2,102] = RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * t * s,
Y[102,2] = (1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1))^2 / t / s, Y[101,1] = (1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1))^2 / t / s,
Y[102,1] = -(1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)) / RootOf(_Z^2 + _Z + 1) / t / s, Y[2,101] =
RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * t * s, Y[1,100] = RootOf(_Z^2 + _Z + 1) * t * s, Y[1,1] =
RootOf(_Z^2 + _Z + 1);
[ >
Sol222 := { Y100,1 = %1^4 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t), Y2,100 = -RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t %1, Y2,102 = %2, Y1,100 = %2, Y102,2 = %1^2 / s t,
Y101,1 = %1^2 / s t, Y102,1 = -1/m x t^2 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t), Y100,102 = %3 RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %1, Y102,102 = -%1^2 %3,
Y100,101 = %1^3 %3, Y102,100 = -%3, Y101,102 = %3 RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %1, Y102,101 = %1^3 %3,
Y100,100 = -RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %3, Y101,101 = RootOf(_Z^2 + _Z + 1) %1^3 %3, Y101,100 = -%3, Y2,2 = RootOf(_Z^2 + _Z + 1),
Y1,2 = -1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y2,1 = -1 - RootOf(_Z^2 + _Z + 1), Y2,101 = %2, Y1,102 = %2, Y1,101 = %2,
Y101,2 = -1/m x t^2 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t), Y100,2 = -1/m x t^2 / (RootOf(_Z^2 + _Z + 1) s t), Y1,1 = RootOf(_Z^2 + _Z + 1) }
%1 := 1 + RootOf(_Z^2 + _Z + 1)
%2 := s t RootOf(_Z^2 + _Z + 1)
%3 := RootOf(RootOf(_Z^2 + _Z + 1) + _Z^2)
[ > save
Sol0b, Sol1b1, Sol2b1, Sol3b11, Sol111, Sol112, Sol3b12, Sol121, Sol122, Sol1b2, Sol2b2, Sol3b2
1, Sol211, Sol212, Sol3b22, Sol221, Sol222, `solsimp3u.m`;
[ # On vérifie que les solutions sont effectivement des solutions.
[ > read('travail.m'); read('solsimp3u.m'); read('equation3u.m');
[ > verif := proc(temp) local i, test; for i from 1 to nops(temp) do if
eval(convert(temp[i], radical)) then test:=1 else test:=0; print('FAUX'); break
fi; od; if test=1 then print('Correct') fi; end:
[ > temp := subs(Sol0b, Sol1b1, Sol2b1, Sol3b11, {op(D0b2), op(D1b2), op(D2b2), op(D3b2)}): verif(temp);
Correct
[ > temp1 := subs(Sol0b, Sol1b1, Sol2b1, Sol3b12, {op(D0b2), op(D1b2), op(D2b2), op(D3b2)}): verif(temp1);
Correct
[ > temp2 := subs(Sol0b, Sol1b2, Sol2b2, Sol3b21, {op(D0b2), op(D1b2), op(D2b2), op(D3b2)}): verif(temp2);
Correct
[ > temp3 := subs(Sol0b, Sol1b2, Sol2b2, Sol3b22, {op(D0b2), op(D1b2), op(D2b2), op(D3b2)}): verif(temp3);
Correct
[ > Equall := subs(Sol0b, Sol1b1, Sol2b1, Sol3b11, Equan): temp := subs(Sol111, Equall): verif(temp);
Correct
[ > temp := subs(Sol112, Equall): verif(temp);
Correct
[ > Equal2 := subs(Sol0b, Sol1b1, Sol2b1, Sol3b12, Equan): temp := subs(Sol121, Equal2): verif(temp);
Correct

```

```

> temp:=subs(Sol122,Equal2):verif(temp);
Correct
> Equa21:=subs(Sol10b,Sol1b2,Sol2b2,Sol3b21,Equan):temp:=subs(Sol211,Equa21):verif(temp);
Correct
> temp:=subs(Sol212,Equa21):verif(temp);
Correct
> Equa22:=subs(Sol10b,Sol1b2,Sol2b2,Sol3b22,Equan):temp:=subs(Sol221,Equa22):verif(temp);
Correct
> temp:=subs(Sol222,Equa22):verif(temp);
Correct

```

Feuille de calcul : cobord??.?.mws

Détermine si la solution P.Q.R est un cobord.

```

#Initialisation des variables.
> restart;n:=3:read 'solsimp3u.m';
#Procédure pour réduire les solutions(enlève les égalité du type l=)
> enleve:=proc(EXP) local d,temp,temp1,temp2;temp:=EXP;d:=0;do d:=d+1; if d>nops(temp)
then break else if temp[d] then
temp1:=op(temp[l..d-1]);temp2:=op(temp[d+1..nops(temp)]);temp:={temp1,temp2};d:=0
fi;fi;od;RETURN(temp);end:
#Assigne à chaque inconnue la valeur de la solution.
> for i from 1 to nops(Sol0b) do assign(Sol0b[i]) od;
> for i from 1 to nops(Sol1bP) do assign(Sol1bP[i]) od;
> for i from 1 to nops(Sol2bP) do assign(Sol2bP[i]) od;
> for i from 1 to nops(Sol3bPQ) do assign(Sol3bPQ[i]) od;
> for i from 1 to nops(SolPQR) do assign(SolPQR[i]) od;
> for i from 0 to n-1 do X[i,0,0]:=1;X[0,i,0]:=1;X[0,0,i]:=1;Y[i,0]:=1;Y[0,i]:=1 od;
> for i from 0 to n-1 do
X[100+i,0,0]:=1;X[0,100+i,0]:=1;Y[100+i,0]:=1;Y[0,100+i]:=1 od;
> for i from 1 to n-1 do for j from 1 to n-1 do X[i,j,0]:=1;X[0,i,j]:=1;X[0,i,j]:=1 od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 1 to n-1 do
X[i+100,j,0]:=1;X[i+100,0,j]:=1;X[0,i+100,j]:=1;X[j,i+100,0]:=1;X[j,0,i+100]:=1;X[0,
j,i+100]:=1 od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do
X[i+100,j+100,0]:=1;X[i+100,0,j+100]:=1;X[0,i+100,j+100]:=1 od;od;

```

#Ecriture des procédures pour les équations d'existence d'un cobord pour ce cocycle.

```

> aaa:=proc(n,p,q,r) local Z;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[(p+q mod n),r])*X[p,(q+r mod
n)]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> aab:=proc(n,p,q,r) local Z,u,v;u:=q+r-100 mod n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[(p+q mod
n),r])*X[p,100+u]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> aba:=proc(n,p,q,r) local Z,u,v;u:=q+p-100 mod n;v:=n-r+q-100 mod

```

```

n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[100+u,r])*X[p,100+v]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> baa:=proc(n,p,q,r) local Z,u;u:=p+n-q-100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[100+u,r])*X[p,(q+r mod n)]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> abb:=proc(n,p,q,r) local Z,u,v;u:=p+q-100 mod n;v:=q-100+n-r+100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[u+100,r])*X[p,v]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> bab:=proc(n,p,q,r) local Z,u,v;u:=(p-100)+n-q mod n;v:=r-100+q mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[u+100,r])*X[p,v+100]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> bba:=proc(n,p,q,r) local Z,u,v;u:=p-100+n-q+100 mod n;v:=q-100+n-r mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[u,r])*X[p,v+100]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> bbb:=proc(n,p,q,r) local Z,u,v;u:=p-100+n-q+100 mod n;v:=q-100+n-r+100 mod
n;Z:=evaln(Z);Z:=X[q,r]*(1/X[u,r])*X[p,v]*(1/X[p,q])=X[p,q,r];end:
> aa:=proc(n,p,q) local Z;Z:=evaln(Z);Z:=X[p,q]*1/X[q,p]=Y[p,q];end:
> ab:=proc(n,p,q) local Z,u;u:=n-p mod n;Z:=X[p,q]*1/X[q,u]=Y[p,q];end:
> ba:=proc(n,p,q) local Z,u;u:=2*(n-q)+p-100 mod n;Z:=X[p,q]*1/X[q,u+100]=Y[p,q];end:
> bb:=proc(n,p,q) local Z,u;u:=2*(q-100)+n-p+100 mod
n;Z:=X[p,q]*1/X[q,u+100]=Y[p,q];end:
> conj2:=proc(n,gt,xt,yt) local
xt1,yt1,Z,temp;Z:=evaln(Z);xt1:=evaln(xt1);yt1:=evaln(yt1);if xt<=n-1 then if
gt<=n-1 then xt1:=xt; else xt1:=n-xt mod n; fi;else if gt<=n-1 then
temp:=2*(n-gt)+xt-100 mod n;xt1:=100+temp; else temp:=2*gt-xt-100 mod
n;xt1:=100+temp;fi;fi;if yt<=n-1 then if gt<=n-1 then yt1:=yt; else yt1:=n-yt mod n;
fi;else if gt<=n-1 then temp:=2*(n-gt)+yt-100 mod n;yt1:=100+temp; else
temp:=2*gt-yt-100 mod n;yt1:=100+temp;fi;fi;Z:=(1/X[xt,yt])*X[xt1,yt1]=1;end:

```

#Equations d'existence d'un cobord pour la solution de type P.Q.

```

> Norma2:=X[0,0]=1;CoD0b1:=0=0;CoD1b1:=0=0;CoD2b1:=0=0;CoD3b1:=0=0;Equacob:=1=1:
> for i from 0 to n-1 do Norma2:=Norma2,X[100+i,0]=1,X[0,100+i]=1 od:
> for i from 1 to n-1 do Norma2:=Norma2,X[i,0]=1,X[0,i]=1 od:
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do
CoD0b1:=CoD0b1,aaa(n,i,j,k),conj2(n,i,j,k),conj2(n,i+100,j,k) od;od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do CoD0b1:=CoD0b1,aa(n,i,j) od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do
CoD1b1:=CoD1b1,aab(n,i,j,k+100),aba(n,i,j+100,k),baa(n,i+100,j,k),conj2(n,i,j+100,k)
,conj2(n,i+100,j+100,k),conj2(n,i,j,k+100),conj2(n,i+100,j,k+100) od;od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do
CoD1b1:=CoD1b1,ab(n,i,j+100),ba(n,i+100,j) od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do for k from 0 to n-1 do
CoD2b1:=CoD2b1,abb(n,i,j+100,k+100),bab(n,i+100,j,k+100),bba(n,i+100,j+100,k),bbb(n,
i+100,j+100,k+100),conj2(n,i,j+100,k+100),conj2(n,i+100,j+100,k+100) od;od;od;
> for i from 0 to n-1 do for j from 0 to n-1 do CoD2b1:=CoD2b1,bb(n,i+100,j+100)
od;od;
> CoD0b2:=subs({Norma2},{CoD0b1}):
> CoD1b2:=subs({Norma2},{CoD1b1}):
> CoD2b2:=subs({Norma2},{CoD2b1}):

```

Pour chaque type de 3-cocycle quasi-abélien trouvé, on crée une feuille de calcul avec la même en-tête. On trouve alors les résultats suivants :

#Résolution des équations de cobord. Cas 1.1.1: c'est un cobord.

```
> solve(CoD0b2);
```

$$\{X_{1,2} = X_{2,1}, X_{1,1} = X_{2,2}, x = \frac{X_{2,2}^2}{X_{2,1}}, X_{2,2} = X_{2,2}, X_{2,1} = X_{2,1}\}$$

```
> Solco0b:={X[2,2]=a,X[1,1]=a,X[2,1]=a^2/x,X[1,2]=a^2/x};
```

$$\text{Solco0b} := \{X_{2,2} = a, X_{1,1} = a, X_{2,1} = \frac{a^2}{x}, X_{1,2} = \frac{a^2}{x}\}$$

```
> CoD1b3:=subs(Solco0b,CoD1b2):
```

```

> Solbis:=solve(CoD1b3);

Solbis := { X1,100 = X101,1 s t, X100,1 = X101,1, X100,2 = X101,1, X2,102 = X101,1 s t, X101,2 = X101,1, X1,101 = X101,1 s t,
  X1,102 = X101,1 s t, X2,100 = X101,1 s t, X2,101 = X101,1 s t, X102,1 = X101,1, x = x, t = t, s = s, X101,1 = X101,1, a = s X101,1 }
[ > temp := {X[101,1]=a/s, op(subs(X[101,1]=a/s, Solbis))}:
[ > Solcolb:=enleve(temp);

Solcolb := { X101,1 =  $\frac{a}{s}$ , X1,100 = a t, X100,1 =  $\frac{a}{s}$ , X100,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,102 = a t, X101,2 =  $\frac{a}{s}$ , X102,2 =  $\frac{a}{s}$ , X1,101 = a t, X1,102 = a t,
  X2,100 = a t, X2,101 = a t, X102,1 =  $\frac{a}{s}$  }

[ > CoD2b3:=subs(Solco0b, Solcolb, CoD2b2):
[ > Solbis:=solve(CoD2b3);

Solbis := { m = m, X102,100 = X101,102, X102,102 = X101,101, X101,101 = X101,101, X101,102 = X101,102, X100,100 = X101,101, a =  $\frac{t x m X_{101,101}}{X_{101,102}}$ ,
  X100,101 = X101,102, X102,101 = X101,102, X100,102 = X101,102, X101,100 = X101,102, x = x, t = t, s = s }

#Résolution des équations de cobord. Cas 1.1.2; on ne peut pas conclure.

[ > solve(CoD0b2);

{ X1,2 = X2,1, X2,2 = X1,1, x =  $\frac{X_{1,1}^2}{X_{2,1}}$ , X1,1 = X1,1, X2,1 = X2,1 }

[ > Solco0b := {X[2,2]=a, X[1,1]=a, X[2,1]=a^2/x, X[1,2]=a^2/x};

Solco0b := { X2,2 = a, X1,1 = a, X2,1 =  $\frac{a^2}{x}$ , X1,2 =  $\frac{a^2}{x}$  }

[ > CoD1b3:=subs(Solco0b, CoD1b2):
[ > Solbis:=solve(CoD1b3);

Solbis := { X2,101 = X100,2 s t, X101,2 = X100,2, X2,100 = X100,2 s t, a = X100,2 s, X2,102 = X100,2 s t, X1,102 = X100,2 s t, X1,101 = X100,2 s t,
  X102,1 = X100,2, X102,2 = X100,2, X100,2 = X100,2, t = t, s = s, x = x, X100,1 = X100,2, X1,100 = X100,2 s t, X101,1 = X100,2 }
[ > temp := {X[100,2]=a/s, op(subs(X[100,2]=a/s, Solbis))}:
[ > Solcolb:=enleve(temp);

Solcolb := { X100,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,101 = a t, X101,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,100 = a t, X2,102 = a t, X1,102 = a t, X1,101 = a t, X102,1 =  $\frac{a}{s}$ , X102,2 =  $\frac{a}{s}$ ,
  X100,1 =  $\frac{a}{s}$ , X1,100 = a t, X101,1 =  $\frac{a}{s}$  }

[ > CoD2b3:=subs(Solco0b, Solcolb, CoD2b2):
[ > Solbis:=solve(CoD2b3);

Solbis :=

#Résolution des équations de cobord. Cas 1.2.1; on ne peut pas conclure.

[ > solve(CoD0b2);

{ X2,2 = X1,1, X2,1 =  $\frac{X_{1,1}^2}{x}$ , X1,1 = X1,1, x = x, X1,2 =  $\frac{X_{1,1}^2}{x}$  }

[ > Solco0b := {X[2,2]=a, X[1,1]=a, X[2,1]=a^2/x, X[1,2]=a^2/x};

Solco0b := { X2,2 = a, X1,1 = a, X2,1 =  $\frac{a^2}{x}$ , X1,2 =  $\frac{a^2}{x}$  }

[ > CoD1b3:=subs(Solco0b, CoD1b2):
[ > Solbis:=solve(CoD1b3);

Solbis :=

#Résolution des équations de cobord. Cas 1.2.2; on ne peut pas conclure.

[ > solve(CoD0b2);

{ X2,1 = X1,2, X2,2 = X1,1, X1,1 = X1,1, X1,2 = X1,2, x =  $\frac{X_{1,1}^2}{X_{1,2}}$  }

[ > Solco0b := {X[2,2]=a, X[1,1]=a, X[2,1]=a^2/x, X[1,2]=a^2/x};

Solco0b := { X2,2 = a, X1,1 = a, X1,2 =  $\frac{a^2}{x}$ , X2,1 =  $\frac{a^2}{x}$  }

[ > CoD1b3:=subs(Solco0b, CoD1b2):
[ > Solbis:=solve(CoD1b3);

Solbis := { X100,1 = X101,1, X2,100 = s t X101,1, X102,2 = X101,1, a = s X101,1, X102,1 = X101,1, X1,100 = s t X101,1, X1,101 = s t X101,1,
  X1,102 = s t X101,1, X2,102 = s t X101,1, X2,101 = s t X101,1, s = s, x = x, t = t, X101,1 = X101,1, X100,2 = X101,1, X101,2 = X101,1 }
[ > temp := {X[101,1]=a/s, op(subs(X[101,1]=a/s, Solbis))}:
[ > Solcolb:=enleve(temp);

Solcolb := { X100,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,101 = a t, X101,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,100 = a t, X2,102 = a t, X1,102 = a t, X1,101 = a t, X102,1 =  $\frac{a}{s}$ , X102,2 =  $\frac{a}{s}$ ,
  X100,1 =  $\frac{a}{s}$ , X1,100 = a t, X101,1 =  $\frac{a}{s}$  }

[ > CoD2b3:=subs(Solco0b, Solcolb, CoD2b2):
[ > Solbis:=solve(CoD2b3);

Solbis :=

#Résolution des équations de cobord. Cas 2.1.1; ce n'est pas un cobord.

[ > solve(CoD0b2);
[ > CoD0b2;

{ 1 = 1, 1 = RootOf(-Z2 + Z + 1),  $\frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = -1 - \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)$ ,  $\frac{X_{2,2} X_{1,1}}{X_{1,2}} = x$ ,  $\frac{X_{1,1} X_{2,2}}{X_{2,1}} = x$ ,  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,2} X_{1,1}} = \frac{1}{x}$ ,
   $\frac{X_{2,1}}{X_{1,1} X_{2,2}} = \frac{1}{x}$ , 0 = 0,  $\frac{X_{1,1}}{X_{2,2}} = 1$ ,  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = 1$ ,  $\frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = 1$ ,  $\frac{X_{2,2}}{X_{1,1}} = 1$ ,  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = -1 - \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)$  }

#Résolution des équations de cobord. Cas 2.1.2; ce n'est pas un cobord.

[ > solve(CoD0b2);
[ > CoD0b2;

```

```

> Solbis:=solve(CoD1b3);

Solbis := { X2,100 = X100,2 s t, x = x, X1,101 = X100,2 s t, X101,1 = X100,2, X101,2 = X100,2, X102,2 = X100,2, X1,102 = X100,2 s t, a = X100,2 s,
  X100,1 = X100,2, X102,1 = X100,2, X2,101 = X100,2 s t, X2,102 = X100,2 s t, X1,100 = X100,2 s t, X100,2 = X100,2, t = t, s = s }
[ > temp := {X[100,2]=a/s, op(subs(X[100,2]=a/s, Solbis))}:
[ > Solcolb:=enleve(temp);

Solcolb := { X100,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,101 = a t, X101,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,100 = a t, X2,102 = a t, X1,102 = a t, X1,101 = a t, X102,1 =  $\frac{a}{s}$ , X102,2 =  $\frac{a}{s}$ ,
  X100,1 =  $\frac{a}{s}$ , X1,100 = a t, X101,1 =  $\frac{a}{s}$  }

[ > CoD2b3:=subs(Solco0b, Solcolb, CoD2b2):
[ > Solbis:=solve(CoD2b3);

Solbis :=

#Résolution des équations de cobord. Cas 1.2.2; on ne peut pas conclure.

[ > solve(CoD0b2);

{ X2,1 = X1,2, X2,2 = X1,1, X1,1 = X1,1, X1,2 = X1,2, x =  $\frac{X_{1,1}^2}{X_{1,2}}$  }

[ > Solco0b := {X[2,2]=a, X[1,1]=a, X[2,1]=a^2/x, X[1,2]=a^2/x};

Solco0b := { X2,2 = a, X1,1 = a, X1,2 =  $\frac{a^2}{x}$ , X2,1 =  $\frac{a^2}{x}$  }

[ > CoD1b3:=subs(Solco0b, CoD1b2):
[ > Solbis:=solve(CoD1b3);

Solbis := { X100,1 = X101,1, X2,100 = s t X101,1, X102,2 = X101,1, a = s X101,1, X102,1 = X101,1, X1,100 = s t X101,1, X1,101 = s t X101,1,
  X1,102 = s t X101,1, X2,102 = s t X101,1, X2,101 = s t X101,1, s = s, x = x, t = t, X101,1 = X101,1, X100,2 = X101,1, X101,2 = X101,1 }
[ > temp := {X[101,1]=a/s, op(subs(X[101,1]=a/s, Solbis))}:
[ > Solcolb:=enleve(temp);

Solcolb := { X100,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,101 = a t, X101,2 =  $\frac{a}{s}$ , X2,100 = a t, X2,102 = a t, X1,102 = a t, X1,101 = a t, X102,1 =  $\frac{a}{s}$ , X102,2 =  $\frac{a}{s}$ ,
  X100,1 =  $\frac{a}{s}$ , X1,100 = a t, X101,1 =  $\frac{a}{s}$  }

[ > CoD2b3:=subs(Solco0b, Solcolb, CoD2b2):
[ > Solbis:=solve(CoD2b3);

Solbis :=

#Résolution des équations de cobord. Cas 2.1.1; ce n'est pas un cobord.

[ > solve(CoD0b2);
[ > CoD0b2;

{ 1 = 1, 1 = RootOf(-Z2 + Z + 1),  $\frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = -1 - \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)$ ,  $\frac{X_{2,2} X_{1,1}}{X_{1,2}} = x$ ,  $\frac{X_{1,1} X_{2,2}}{X_{2,1}} = x$ ,  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,2} X_{1,1}} = \frac{1}{x}$ ,
   $\frac{X_{2,1}}{X_{1,1} X_{2,2}} = \frac{1}{x}$ , 0 = 0,  $\frac{X_{1,1}}{X_{2,2}} = 1$ ,  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = 1$ ,  $\frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = 1$ ,  $\frac{X_{2,2}}{X_{1,1}} = 1$ ,  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = -1 - \text{RootOf}(-Z^2 + Z + 1)$  }

#Résolution des équations de cobord. Cas 2.1.2; ce n'est pas un cobord.

[ > solve(CoD0b2);
[ > CoD0b2;

```

```

[ { 1 = 1, 0 = 0,  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = 1, \frac{X_{2,2}}{X_{1,1}} = 1, \frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = 1, \frac{X_{1,1}}{X_{2,2}} = 1, \frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = -1 - \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1), 1 = \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1),$ 
 $\frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = -1 - \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1), \frac{X_{1,2}}{X_{2,2} X_{1,1}} = \frac{1}{x}, \frac{X_{2,2} X_{1,1}}{X_{1,2}} = x, \frac{X_{2,1}}{X_{1,1} X_{2,2}} = \frac{1}{x}, \frac{X_{1,1} X_{2,2}}{X_{2,1}} = x$  }
#Résolution des équations de cobord. Cas 2.2.1; ce n'est pas un cobord.
[ > solve(CoD0b2);
> CoD0b2;
{ 0 = 0,  $\frac{X_{1,1}}{X_{2,2}} = 1, \frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = 1, \frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = 1, \frac{X_{2,2}}{X_{1,1}} = 1, \frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = -1 - \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1), 1 = \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1),$ 
 $\frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = -1 - \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1), 1 = 1, \frac{X_{2,2} X_{1,1}}{X_{1,2}} = x, \frac{X_{1,2}}{X_{2,2} X_{1,1}} = \frac{1}{x}, \frac{X_{1,1} X_{2,2}}{X_{2,1}} = x, \frac{X_{2,1}}{X_{1,1} X_{2,2}} = \frac{1}{x}$  }
#Résolution des équations de cobord. Cas 2.2.2; ce n'est pas un cobord.
[ > solve(CoD0b2);
> CoD0b2;
{  $\frac{X_{1,2}}{X_{2,2} X_{1,1}} = \frac{1}{x}, \frac{X_{2,2} X_{1,1}}{X_{1,2}} = x, \frac{X_{1,1} X_{2,2}}{X_{2,1}} = x, \frac{X_{2,1}}{X_{1,1} X_{2,2}} = \frac{1}{x}, 0 = 0, \frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = 1, \frac{X_{2,2}}{X_{1,1}} = 1, \frac{X_{1,1}}{X_{2,2}} = 1, \frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = 1,$ 
 $\frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = -1 - \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1), 1 = \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1), \frac{X_{1,2}}{X_{2,1}} = -1 - \text{RootOf}(\_Z^2 + \_Z + 1), 1 = 1$  }
[ >

```

Bibliographie

- [AC92] Altschüler (D.) et Coste (A.). – Quasi-quantum groups, knots, three-manifolds, and topological field theory. *Comm. Math. Phys.*, vol. 150, n° 1, 1992, pp. 83–107.
- [BCM86] Blattner (R. J.), Cohen (M.) et Montgomery (S.). – Crossed products and inner actions of Hopf algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 298, n° 2, 1986, pp. 671–711.
- [DPR90] Dijkgraaf (R.), Pasquier (V.) et Roche (P.). – Quasi-Hopf algebras, group cohomology and orbifold models. *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.*, vol. 18B, 1990, pp. 60–72.
- [Dri87] Drinfel'd (V. G.). – Quantum groups. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*. pp. 798–820. – Amer. Math. Soc.
- [Dri90] Drinfel'd, (V. G.) – Quasi-Hopf algebras. *Leningr. Math. J.*, vol. 1, n° 6, 1990, pp. 1419–1457.
- [EML50] Eilenberg (S.) et MacLane (S.). – Cohomology theory of Abelian groups and homotopy theory. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 36, 1950, pp. 657–663.
- [EML53] Eilenberg (S.) et MacLane (S.). – On the groups of $H(\pi, n)$. I. *Ann. of Math. (2)*, vol. 58, 1953, pp. 55–106.
- [FY89] Freyd (P. J.) et Yetter (Da. N.). – Braided compact closed categories with applications to low-dimensional topology. *Adv. Math.*, vol. 77, n° 2, 1989, pp. 156–182.
- [FY92] Freyd (P. J.) et Yetter (D. N.). – Coherence theorems via knot theory. *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 78, n° 1, 1992, pp. 49–76.
- [HJPOR84] Habegger (N.), Jones (V.), Pino Ortiz (O.) et Ratcliffe (J.). – Relative cohomology of groups. *Comment. Math. Helv.*, vol. 59, n° 1, 1984, pp. 149–164.
- [HS53] Hochschild (G.) et Serre (J.-P.). – Cohomology of group extensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, 1953, pp. 110–134.
- [JS93] Joyal, (A.) et Street, (R.) – Braided tensor categories. *Adv. Math.*, vol. 102, n° 1, 1993, pp. 20–78.

- [Kas95] Kassel (C.). – *Quantum groups*. – New-York, Springer-Verlag, 1995.
- [Lic97] Lickorish (W. B. R.). – *An introduction to knot theory*. – New York, Springer-Verlag, 1997.
- [Lod92] Loday (J.-L.). – *Cyclic homology*. – Springer-Verlag, 1992.
- [LW96] Lepowsky (J.) et Wilson (R. L.). – On Hopf algebras and the elimination theorem for free Lie algebras. *Contemp. Math.*, vol. 193, 1996, pp. 191–202.
- [ML95] MacLane (S.). – *Homology*. – Berlin, Springer-Verlag, 1995.
- [Mon93] Montgomery (S.). – *Hopf algebras and their actions on rings*. – Regional Conference Series in Mathematics. CBMS, 1993.
- [MPR93] Mattes (J.), Polyak (M.) et Reshetikhin (N.). – On invariants of 3-manifolds derived from abelian groups. *In: Quantum topology*, pp. 324–338. – River Edge, NJ, World Sci. Publishing, 1993.
- [Nic78] Nichols (W. D.). – Bialgebras of type one. *Comm. Algebra*, vol. 6, n° 15, 1978, pp. 1521–1552.
- [PS97] Prasolov (V. V.) et Sossinsky (A. B.). – *Knots, links, braids and 3-manifolds*. – Providence, RI, American Mathematical Society, 1997.
- [PW97] Podleś (P.) et Woronowicz (S. L.). – On the structure of inhomogeneous quantum groups. *Commun. Math. Phys.*, vol. 185, n° 2, 1997, pp. 325–358.
- [Roc91] Roche (P.). – *Structures algébriques liées à des modèles de mécaniques statistiques bidimensionnels*. – Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1991.
- [Rol90] Rolfsen (D.). – *Knots and links*. – Houston, TX, Publish or Perish Inc., 1990.
- [Ros98] Rosso (M.). – Quantum groups and quantum shuffles. *Invent. Math.*, vol. 133, n° 2, 1998, pp. 399–416.
- [RT90] Reshetikhin (N. Y.) et Turaev (V. G.). – Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Commun. Math. Phys.*, vol. 127, n° 1, 1990, pp. 1–26.
- [RT91] Reshetikhin (N.) et Turaev (V. G.). – Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, vol. 103, n° 3, 1991, pp. 547–597.
- [Swe68] Sweedler (M. E.). – Cohomology of algebras over Hopf algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 133, 1968, pp. 205–239.
- [Swe69] Sweedler (M. E.). – *Hopf algebras*. – New York: W.A. Benjamin, 1969.
- [Tur94] Turaev (V. G.). – *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. – Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1994.

- [Wor89] Woronowicz (S.L.). – Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups). *Commun. Math. Phys.*, vol. 122, n° 1, 1989, pp. 125–170.
- [Wor91] Woronowicz (S. L.). – Solutions of the braid equation related to a Hopf algebra. *Lett. Math. Phys.*, vol. 23, n° 2, 1991, pp. 143–145.