Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La stabilisation des équations d'évolution présentant un caractère dissipatif a fait l'objet, ces dernières années, d'importants travaux. Afin de pouvoir tenir compte de certains phénomènes (non-positivité du contrôle), l'absence de la dissipation paraît comme une hypothèse incontournable, mais provoque des difficultés importantes.

Les travaux de cette thèse sont consacrés à l'étude du taux de décroissance de l'énergie d'une équation des ondes en dimension 1, d'un système couplé des équations des ondes et d' un système couplé des équations de poutres de Rayleigh, dans le cadre de feedbacks non dissipatifs.

Chapitre. 2 : Energy decay rate of wave equations with indefinite damping.

Dans ce chapitre on étudie la stabilisation de l'équation des ondes par un contrôle non-dissipatif :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + 2\varepsilon a y_t + by = 0, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ y(x,0) = y_0(x), \; y_t(x,0) = z_0(x), \end{cases} \tag{1.0.1}$$

où a, b sont des fonctions de $L^\infty(0,1)$, et a est une fonction de signe indéfini. Plus précisément, en s'inspirant du travail de Chen et al. [4], nous considérons que a est une fonction “plus positive que négative”. Nous savons que si a est strictement positive sur un sous-intervalle de [0,1] l'énergie de la solution de l'équation (1.0.1) décroît exponentiellement vers zéro quand t tend vers l'infini (voir Bardos et al. [1]).

Les méthodes classiques telles que multiplicateurs, ne s'appliquent pas lorsque a est de signe indéfini.

Par la méthode du tir basée sur une ansatz de Horn, Freitas et Zuazua [8] ont montré que si a est à variations bornée et de signe indéfini et $b \equiv 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit le système (1.0.1) est exponentiellement stable. En absence d'une adéquate ansatz, le problème est laissé ouvert même dans le cas où b est une constante.

Dans ce chapitre nous montrons que l'énergie du système (1.0.1) décroît exponentiellement vers zéro dans le cas où $a \in BV(0,1)$ et $b \in L^1(0,1)$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Nous utilisons la méthode du tir développée par Rao [24] pour une équation de poutre de Rayleigh. Cette approche consiste à construire une approximation de l'équation caractéristique du problème aux valeurs propres associé au système (1.0.1). Nous établissons le développement asymptotique des valeurs propres λ_n du système (1.0.1) :

$$\lambda_{\pm n} = -\varepsilon \int_0^1 a(s)\, ds \pm in\pi + (i+\varepsilon) O_R\left(\frac{1}{n}\right),$$

où $O_R(\xi) \sim \xi$ lorsque $|\xi|$ est assez petit, est un nombre réel. D'autre part nous montrons que le système des vecteurs propres est équivalent à une base orthonormée de l'espace de l'énergie $\mathcal{H} = H_0^1 \times L^2(0,1)$ et nous montrons que l'énergie décroît exponentiellement vers zéro quand $\varepsilon > 0$ est suffisament petit.

Chapitre. 3 : Optimal energy decay rate of a coupled wave equation.

Nous considérons dans ce chapitre un système couplé d'équations des ondes avec deux contrôles internes :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} + 2au_t + \alpha(u-v) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v_{tt} - v_{xx} + 2av_t + \alpha(v-u) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{array}\right. \tag{1.0.2}$$

où a, et α sont deux fonctions positives de $L^\infty(0,1)$. On définit l'énergie du système (1.0.2) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 + u_t^2 + v_x^2 + v_t^2 + \alpha(u-v)^2\, dx. \tag{1.0.3}$$

On en déduit que

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\int_0^1 a(u_t^2 + v_t^2)\,dt \le 0. \tag{1.0.4}$$

Supposons que a est strictement positive sur un sous-intervalle de [0,1]. Nous montrons facilement (voir [1]) qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $\omega < 0$ telles que

$$E(t) \le cE(0)\exp(2\omega t), \qquad \forall t \ge 0. \tag{1.0.5}$$

On définit le taux de décroissance comme une fonction de a par

$$\omega(a) = \inf\{\omega : \ \exists\, c(\omega) > 0 \ \text{ tel que } \ E(t) \le cE(0)e^{2\omega t}\}.$$

Dans ce chapitre nous déterminons une classe de fonctions a pour lesquelle ω atteint un minimum fini. Nous montrons que ce minimum est atteint pour la fonction a appartenant à BV(0,1). Plus précisément nous montrons que $\omega(a)$ est déterminée par l'abscisse spectrale $\nu(a)$ défini par

$$\nu(a) = \sup\{\Re e\lambda, \ \ \lambda \in \sigma(A)\},$$

où on a noté $\sigma(a)$ le spectre du système (1.0.2). Pour cela, on montre d'abord que le spectre du système (1.0.2) est l'union des spectres des systèmes

$$\begin{cases} u_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1.0.6}$$

et

$$\begin{cases} v_{xx} - (\mu^2 + 2a\mu)v = 0, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{1.0.7}$$

Puis nous utilisons la méthode du tir développée par Rao dans [24] pour donner de manière explicite le développement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres associés du système (1.0.6). Nous construisons par suite une famille de vecteurs propres généralisée du système (1.0.2) et nous montrons que cette famille forme une base de Riesz de l'espace de l'énergie $\mathcal{H} = H_0^1 \times L^2(0,1) \times H_0^1 \times L^2(0,1)$.

Chapitre. 4 : Stabilisation des équations des ondes couplées avec un Contrôle non-dissipatif.

Considérons le système des équations des ondes couplées en présence de deux contrôles non dissipatifs

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} + 2a\varepsilon u_t + \alpha(u - v) = 0, \quad 0 < x < 1, \\
v_{tt} - v_{xx} + 2a\varepsilon v_t + \alpha(u - v) = 0, \quad 0 < x < 1, \\
u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad \forall t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = z_0(x), \\
v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = w_0(x),
\end{cases} \tag{1.0.8}
$$

où α et ε sont deux fonctions positives et $a \in L^\infty(0,1)$. Dans le cas où a est positive et dans BV(0,1) nous avons montré dans le Chapitre 3 qu'il existe $C > 0$ et $\omega < 0$ telles que l'énergie $E(t)$ du système (1.0.8) vérifie l'inégalité suivante :

$$E(t) \leq ce^{2\omega t}E(0) \qquad \forall t \geq 0.$$

Si a change de signe, le problème devient d'une part comment mesurer la positivité du coefficient du feedback appliqué au système (1.0.8). D'autre part, de quelle manière la partie négative cessera-t-elle d'influencer le "terme amorti" qui donne l'instabilité de la solution du système (1.0.8). Chen et al. [4] ont suggéré une façon de mesurer cette positivité à l'aide des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 a(x)|v_n|^2\,dx$$

où v_n est le vecteur propre de l'opérateur $\partial_{xx} - 2\alpha$.

L'idée en fait est de contrôler les valeurs propres pour qu'elles restent du côté gauche de l'axe imaginaire. Les termes I_n ont des relations avec les dérivées des valeurs propres associées au système (1.0.8) quand il est considéré comme une perturbation de l'équation non amortie. En particulier si $I_n \geq c_0 > 0$, alors la valeur propre correspondante λ_n est à gauche de l'axe imaginaire pour des perturbations assez petites.

En supposant que I_n est uniformément positive et que $\varepsilon > 0$ assez petit, nous montrons que le système est stable pour $a \in BV(0,1)$. Pour cela nous procédons comme au Chapitre 3 en découplant d'abord le système (1.0.8) en deux systèmes équivalents. La démonstration se fait en deux étapes : la première étape assure l'existence d'un ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il est possible de contrôler la position de chacune des valeurs propres de basse fréquence par rapport à l'axe imaginaire à l'aide de la dérivée $\Re e\lambda_n'(0) = -I_n$. La seconde partie de la démonstration consiste à montrer que tous les valeurs propres de haute fréquence se trouvent à gauche de l'axe imaginaire pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ suffisamment petit. Ainsi on montre que toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative. La deuxième partie de la démonstration est basée sur la méthode de tir développée dans Rao [24] qui nous donne le développement asymptotique des hautes fréquences du spectre.

Chapitre. 5 : Stabilisation exponentielle des systèmes linéaires non-dissipatifs

Dans ce chapitre nous considérons les systèmes d'évolution avec perturbation de la forme

$$\frac{du}{dt} = Au + \varepsilon Bu \tag{1.0.9}$$

sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec A opérateur anti-adjoint, B un opérateur borné et ε un réel positif. Récemment, K. Liu, Z. Liu et Rao [17] ont montré qu'une condition suffisante pour la stabilité exponentielle du système (1.0.9). Le but de ce chapitre est de montrer que les systèmes

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2a\varepsilon u_t + \alpha(u - v) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{tt} - v_{xx} + 2b\varepsilon v_t + \alpha(v - u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(0,x) = z_0(x), \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(0,x) = w_0(x), \end{cases} \tag{1.0.10}$$

et

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{ttxx} + u_{xxxx} + 2\varepsilon(au_{tx})_x + \alpha(u - v) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{tt} - v_{ttxx} + v_{xxxx} + 2\varepsilon(bv_{tx})_x + \alpha(v - u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = v_{xx}(0,t) = v_{xx}(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(0,x) = z_0(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(0,x) = w_0(x) \end{cases} \tag{1.0.11}$$

sont exponentiellement stables. Notons que Horn et Lasiecka ont montré que l'énergie de la solution du système (1.0.11) décroît exponentiellement dans le cas d'un feedback dissipatif non linéraire distribué [11] .

La présence de deux contrôles différents ($a \not\equiv b$) ne permet pas de découpler les systèmes (1.0.10) et (1.0.11). Ainsi les techniques utilisées dans le Chapitre 4 ne sont pas recommandées dans ce cas. Pour cela, nous utilisons le théorème de perturbation de K. Liu, Z. Liu et B. Rao [17] basé sur les valeurs propres du système non perturbé. Nous montrons que les systèmes non perturbés associé aux systèmes (1.0.10)-(1.0.11) admettent chacun deux branches de valeurs propres proches l'une de l'autre et telles que les vecteurs propres associés satisfont la condition suffisante de la stabilisation exponentielle de K. Liu, Z. Liu et B. Rao [17] .

Le Chapitre 1, rédigé en collaboration avec Bopeng Rao, a fait l'objet d'une puplication : Energy decay rate of wave equations with indefinite damping, Journal of Differential Equations, 161, 337-357 (2000).

Le Chapitre 2 est à paraître : Optimal energy decay rate of coupled wave equations, Pan. Americain Math. J. (2000).

Bibliographie

[1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves form the boundary*, SIAM. J. Control Optim. 30 (1992), 1024-1065.

[2] A. Benaddi and B. Rao, *Energy decay rate of wave equations with indefinite damping*, J. Diff. Equa. 161 (2000) 337-357.

[3] A. Benaddi, *Optimal energy decay rate of coupled wave equations*, à paraître dans Pan. Americain Math. J. (2000).

[4] G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich and S. Sun, *Exponential decay of energy of evolution equation with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math., 51 (1991), 266-301.

[5] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which energy decay in a damped string*, Commun. in PDE, 19 (1994), 213-244.

[6] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which energy decay in a string damped at one end*, Indiana Univ. Math, J., 44 (95), 545-573.

[7] E. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equation*, Mc. Graw Hill, 1955.

[8] P. Freitas and E. Zuazua, *Stability results for wave equation with indefinite damping,* J. Diff. Equa. 132 (1996), 320-335.

[9] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators,* AMS Providence. 1969.

[10] S. W. Hansen, *Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod,* J. Math. Anal. Appl, 167 (1992), 429-442.

[11] M. A. Horn and I. Lasiecka, *Nonlinear boundary stabilization of parallelly connected Kirchoff Plates* J. Dynamics and Control, 6 (1996), 263-292.

[12] F. L. Huang, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space*, Ann. Diff. Eqs, 1 (1985), 43-56.

[13] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1984.

[14] V. Komornik and B. Rao, *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations,* Asymptotic Analysis, 14 (1997), 339-359.

[15] V. Komornik and E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation,* J. Math. Pures et Appl. 69 (1990), 33-55.

[16] J. E. Lagnese, *Boundary stabilization of thin plates*, SIAM Publications, Philadelphia, 1989.

[17] K. Liu, Z. Liu, B. Rao, *On an abstract linear elastic system with indefinite damping,* ESAIM : Proc., Vol 8, 2000, 107-117.

[18] O. Morgül, F. Conrad and B.Rao, *On the stabilization of a cable with a tip mass*, IEEE Transactions on automatic control, 39 (1994), 2140-2145.

[19] M. A. Naimark, *Linear differential operators*, vol.I, Ungar, New York, 1967.

[20] M. Najafi, G. R. Sarhangi and H. Wang, *The study of stability of coupled wave equations under various end conditions*, Proceedings of 31st Conferences on decision and control, Tucson, Arizona, 1992, 374-379.

[21] A. Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial equations,* Spinger Verlag, New York, 1983.

[22] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroup,* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), pp. 847-857.

[23] B. Rao, *A compact perturbation method for the boundary stabilization of the Rayleigh beam aquation*, Appl. Math. Optim, 33 (1996), 253-264.

[24] B. Rao, *Optimal energy decay rate in a damped Rayleigh Beam,* Discrete and contiunous dynamical systems, 4 (1998), 721-734.

Chapitre 2

Energy decay rate of wave equations with indefinite damping

2.1 Introduction.

We consider the Dirichlet problem of one-dimensional wave equation with an indefinite viscous damping :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + 2\epsilon a y_t + by = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad \forall t > 0 \\ y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = z_0(x) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

where the variable coefficient a is allowed to change sign. Our goal is to investigate the energy decay rate of the solution, if the coefficient a is assumed to be "more positive than negative", a conjecture put forward by Chen et al. in [2].

We know that if a is nonnegative and strictly positive on some subinterval of $[0,1]$, the energy of the solution of the equation (2.1.1) decays uniformly exponentially to zero as t goes to infinity (see Bardos et al. [1] and Chen et al. [2]). Recently, Freitas and Zuazua [6] established the uniform stability in the case of indefinite sign.

Now we define the linear unbounded operator A^ϵ in the space $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ as follows :

$$A^\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \partial_{xx} - b & -2\epsilon a \end{pmatrix}, \quad D(A^\epsilon) = \left(H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)\right) \times H_0^1(0,1). \tag{2.1.2}$$

Let γ_n be an eigenvalue of the operator $(\partial_{xx}-b)$, and v_n be the associated normalized eigenfunction in $L^2(0,1)$. In [5] Freitas proved that if $\epsilon > 0$ is small enough, the following conditions are necessary for the stability of the equation (2.1.1) :

$$\begin{aligned} &(C_1) \quad 0 > \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_n \to -\infty, \\ &(C_2) \quad I_n = \int_0^1 a(x) v_n^2(x)dx \geq c_0 > 0, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Later on Freitas and Zuazua [6] established the uniform energy decay rate in the case where $a \in BV(0,1)$ and $b = 0$ for $\epsilon > 0$ small enough. Their proof is based on a shooting method developed by Cox and Zuazua [4] for the wave equation. But in the absence of an adequate ansatz for the asymptotic expansion, the problem remained open in the general case, even when b is a constant.

In this work, we will establish the exponential stability in the case where $a \in BV(0,1)$ and $b \in L^1(0,1)$ for $\epsilon > 0$ small enough. We will employ a shooting method used in Rao [10] for the Rayleigh's beam equation. This approach consists in constructing, without any a priori ansatz, an explicit approximation of the characteristic equation of the underlying system. In sections 2, 3 we establish the asymptotic expansion of the eigenvalue $\lambda_{\pm n}$:

$$\lambda_{\pm n} = -\epsilon \int_0^1 a(x)dx \pm in\pi + (i+\epsilon)O_R\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.1.3}$$

where $O_R(\xi) \sim \xi$ is a real number. Section 4 is devoted to a detailed study of the system of eigenvectors. We first determine the number of eigenvalues of low frequency. Next we prove that the system of eigenvectors of A^ϵ is equivalent to the usual orthonormal basis of the energy space $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

Finally recall that the general one-dimensional damped wave equation

$$\rho y_{tt} - (\sigma y_x)_x + 2\epsilon a y_t + by = 0 \tag{2.1.4}$$

can be reduced into the form (2.1.1) by the change of x-variable and the unknown y. Therefore under suitable conditions on the coefficients ρ, σ, a, b, we can establish the uniform stability of the general one-dimensional damped wave equation (2.1.4) without any difficulty.

2.2 A special case.

In this section we consider the special case where b is a constant. From the condition (C_1), we notice that $-\gamma_n = n^2\pi^2 + b \geq \pi^2 + b > 0$ for all $n \geq 1$. For all $n \geq 1$ we define $\mu_{\pm n}$ by the equation :

$$\sqrt{\mu_{\pm n}^2 + b} + \epsilon a_0 = \pm in\pi \quad \text{where} \qquad Re\ \mu_{\pm n} < 0, \quad a_0 = \int_0^1 a(s)ds. \tag{2.2.1}$$

From the condition (C_2), we have $a_0 > 0$. Then $Re\ \mu_{\pm n} < 0$ implies that $Im\ \mu_n > 0$ and $Im\ \mu_{-n} < 0$. It follows that

$$|\mu_{\pm n} - (\epsilon a_0 \mp i\sqrt{n^2\pi^2 + b})| \geq |Im\ \mu_{\pm n} \pm \sqrt{n^2\pi^2 + b}| \geq \sqrt{n^2\pi^2 + b}. \tag{2.2.2}$$

A direct computation gives that

$$\mu_{\pm n}^2 - (\epsilon a_0 \mp i\sqrt{n^2\pi^2 + b})^2 = (\mu_{\pm n}^2 + b) - (\epsilon a_0 \mp in\pi)^2 \mp 2i\epsilon a_0(\sqrt{n^2\pi^2 + b} - n\pi).$$

Using (2.2.1), it follows that

$$|\mu_{\pm n}^2 - (\epsilon a_0 \mp i\sqrt{n^2\pi^2 + b})^2| = \left|\frac{2\epsilon a_0 bi}{n\pi + \sqrt{n^2\pi^2 + b}}\right| \leq \frac{2\epsilon\|a\|_\infty |b|}{n\pi}. \tag{2.2.3}$$

Combining (2.2.2) and (2.2.3) we get :

$$|\mu_{\pm n} + \epsilon a_0 \mp i\sqrt{n^2\pi^2 + b}| \leq \frac{2\epsilon\|a\|_\infty |b|}{n\pi\sqrt{-\gamma_1}} := \frac{\epsilon C_1}{n}. \tag{2.2.4}$$

In particular, for $0 < \epsilon < 1$ we have :

$$\left|\frac{\mu_{\pm n}}{n}\right| \leq \|a\|_\infty + C_1 + \sqrt{\pi^2 + |b|}. \tag{2.2.5}$$

Next for all $n \geq 1$, we define the region $G_{\pm n}$ as :

$$G_{\pm n} = \{|\lambda - \mu_{\pm n}| \leq \epsilon/n\}. \tag{2.2.6}$$

Let $\lambda \in G_{\pm n}$. Then using (2.2.1) and (2.2.5), we find that

$$
\begin{aligned}
|\lambda^2+b| &\geq |\mu_{\pm n}^2+b|-|\lambda+\mu_{\pm n}||\lambda-\mu_{\pm n}| \\
\geq &\qquad (n\pi-\epsilon|a_0|)^2-\tfrac{\epsilon}{n}\Big(2|\mu_n|+\tfrac{\epsilon}{n}\Big) \\
\geq &\ \tfrac{\pi^2}{4}-2\epsilon(1+\|a\|_\infty+C_1+\sqrt{\pi^2+|b|})>\tfrac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

provided that $\epsilon>0$ is small enough :

$$
\epsilon<\epsilon_1:=\frac{\pi^2}{30(1+\|a\|_\infty+C_1+\sqrt{\pi^2+|b|})}<1. \tag{2.2.7}
$$

Hence we can choose $0<Arg(\lambda^2+b)<2\pi$ for $\lambda\in G_n$ and $-2\pi<Arg(\lambda^2+b)<0$ for $\lambda\in G_{-n}$ such that the function $\lambda\to\sqrt{\lambda^2+b}$ is analytic in each region $G_{\pm n}$.

As in Cox and Zuazua [4], we consider the initial value problem :

$$
\begin{cases}
\lambda^2y-y_{xx}+2\epsilon a\lambda y+by=0, & 0<x<1,\\
y(0)=0, \qquad y_x(0)=1.
\end{cases} \tag{2.2.8}
$$

From the classical theory of ordinary differential equations we know that the problem (2.2.8) has a unique solution which is analytic with respect to the parameters ϵ,λ (Coddington and Levinson [3], and $\lambda_{\pm n}$ is an eigenvalue of the operator A^ϵ if and only if $\lambda_{\pm n}$ is a zero of the function $\lambda\to y(1,\lambda)$. Furthermore the eigenvalue $\lambda_{\pm n}$ is geometrically simple and the algebraic multiplicity of $\lambda_{\pm n}$ is the order of $\lambda_{\pm n}$ as a zero of the function $\lambda\to y(1,\lambda)$ (Neimark [9]).

Following an idea used in Rao [10], we will construct an explicit approximation of the solution y of the initial value problem (2.2.8). In fact if a,b are constants, the frequencies of the problem (2.2.8) are given by

$$
\tau=\pm\sqrt{\lambda^2+2\epsilon a\lambda+b}=\pm\sqrt{\lambda^2+b}\pm\epsilon a+O\Big(\frac{\epsilon}{|\lambda|}\Big).
$$

This suggests us to approach the solution y of (2.2.8) by

$$
v(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a(0)}\sinh\Big(\sqrt{\lambda^2+b}\;x+\int_0^x\epsilon a(s)ds\Big). \tag{2.2.9}
$$

By virtue of (2.2.6), we see that the denominator $\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a(0)$ in (2.2.9) doesn't vanish in the region $G_{\pm n}$ for $0<\epsilon<\epsilon_1$. We notice that v satisfies the initial value conditions of (2.2.8). We will justify that v is indeed a good approximation of the problem (2.2.8).

Lemma 2.2.1 *Assume that $a \in L^\infty(0,1)$ and b is a constant. Then there exists a constant $C_2 > 0$, depending only on $\|a\|_\infty$ and b, such that for all $n \geq 1$ and $0 < \epsilon < \epsilon_1$ the solution y of the initial value problem (2.2.8) satisfies the following estimate :*

$$|y| \leq \frac{C_2}{\sqrt{|\lambda^2 + b|}}, \quad \forall \lambda \in G_{\pm n}. \tag{2.2.10}$$

Proof Let $\lambda \in G_{\pm n}$. Then we have $\lambda = \mu_{\pm n} + \epsilon r_n e^{i\theta}$ with $0 \leq r_n \leq 1/n$. By virtue of the choice of $Arg(\lambda^2 + b)$, we see that $Im\ \sqrt{\lambda^2+b} > 0$ for $\lambda \in G_n$ and $Im\ \sqrt{\lambda^2+b} < 0$ for $\lambda \in G_{-n}$. Therefore we obtain that

$$|\sqrt{\lambda^2+b} - (\epsilon a_0 \mp in\pi)| \geq |Im\ \sqrt{\lambda^2+b} \pm n\pi)| \geq n\pi. \tag{2.2.11}$$

Using (2.2.1) we have

$$\lambda^2 + b = \mu_{\pm n}^2 + 2\epsilon\mu_{\pm n} r_n e^{i\theta} + \epsilon^2 r_n^2 e^{i2\theta} + b = (\epsilon a_0 \mp in\pi)^2 + 2\epsilon\mu_{\pm n} r_n e^{i\theta} + \epsilon^2 r_n^2 e^{i2\theta}.$$

Then using (2.2.5), we deduce that

$$\begin{aligned} & |\lambda^2 + b - (\epsilon a_0 \mp in\pi)^2| \qquad (2.2.12) \\ \leq 2\epsilon(r_n^2 + r_n|\mu_n|) \quad \leq \quad & 2\epsilon(1 + \|a\|_\infty + C_1 + \sqrt{\pi^2 + |b|}) := 2\epsilon C_3. \end{aligned}$$

Combining (2.2.11) and (2.2.12), we have

$$|\sqrt{\lambda^2+b} + (\epsilon a_0 \mp in\pi)| \leq \frac{2\epsilon C_3}{n\pi} \leq \epsilon C_3. \tag{2.2.13}$$

It follows from (2.2.13) that

$$|Re\sqrt{\lambda^2+b}| \leq \epsilon(\|a\|_\infty + C_3) \leq 2\epsilon C_3 \leq 1 \tag{2.2.14}$$

where the last inequality is due to (2.2.7). Next using (2.2.5) and (2.2.13) we obtain that

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{|\lambda^2+b|}} \leq \frac{|\mu_{\pm n}| + \epsilon}{n\pi - 2\epsilon C_3} \leq \frac{|\mu_{\pm n}/n| + 1}{\pi - 2\epsilon C_3} \leq \frac{C_3}{\pi - 2\epsilon C_3} \leq \frac{C_3}{2} \tag{2.2.15}$$

where the last inequality is due to (2.2.7).

Now setting

$$z(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+b}}\sinh\sqrt{\lambda^2+b}\;x,$$

then from the variation of constants formula we have

$$y(x)=z(x)-2\epsilon\lambda\int_0^x a(s)y(s)z(x-s)ds.$$

It comes from (2.2.14) and (2.2.15) that

$$|y(x)|\leq\frac{\cosh 1}{\sqrt{|\lambda^2+b|}}+C_3\cosh 1\int_0^x|a(s)||y(s)|ds.$$

Applying Gronwall's inequality, we obtain that

$$|y(x)|\leq\frac{\cosh 1}{\sqrt{|\lambda^2+b|}}\exp\left(C_3\cosh 1\int_0^1|a(s)|ds\right):=\frac{C_2}{\sqrt{|\lambda^2+b|}}.$$

The proof is complete.

Theorem 2.2.1 *Assume that $a\in BV(0,1)$ and b is a constant. Then there exists a constant $C_0>0$, depending only on a,b, such that for all $n\geq 1$ and $0<\epsilon<\epsilon_1$ the following estimations hold for the solution y of (2.8) :*

$$\left|y(x,\lambda)-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+b}}\sinh\left(\sqrt{\lambda^2+b}\;x+\int_0^x\epsilon a(s)ds\right)\right|\leq\frac{C_0\epsilon}{|\lambda^2+b|},\qquad(2.2.16)$$

for all $\lambda\in G_{\pm n}$.

Proof Putting :

$$Lv=\lambda^2v-v_{xx}+2\epsilon a\lambda v+bv,$$

then a straight forward computation gives that

$$\begin{aligned}Lv=\;&-\;\frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a(0)}\Big\{a'\cosh\left(\sqrt{\lambda^2+b}\;x+\int_0^x\epsilon a(s)ds\right)\\&+\;\left(\epsilon a^2+\frac{2ab}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+b}}\right)\sinh\left(\sqrt{\lambda^2+b}\;x+\int_0^x\epsilon a(s)ds\right)\Big\}.\end{aligned}\qquad(2.2.17)$$

Since $\lambda \in G_{\pm n}$, from (2.2.4), (2.2.7) and (2.2.13) we deduce easily that

$$\Big|Re\Big(\sqrt{\lambda^2+b}\; x + \int_0^x \epsilon a(s)ds\Big)\Big| \le 3\epsilon C_3 < 1, \tag{2.2.18}$$
$$2|\sqrt{\lambda^2+b} - \epsilon a(0)| \ge \sqrt{|\lambda^2+b|} + n\pi - 3\epsilon C_3 \ge \sqrt{|\lambda^2+b|}, \tag{2.2.19}$$
$$|\lambda + \sqrt{\lambda^2+b}| \ge n\pi + \sqrt{n^2\pi^2+b} - 2\epsilon C_3 \ge 2. \tag{2.2.20}$$

Inserting (2.2.18), (2.2.19) and (2.2.20) into (2.2.17) gives

$$|L(v)| \le \frac{2\epsilon}{\sqrt{|\lambda^2+b|}}\Big(|a|^2 + |a||b| + |a'|\Big)\cosh 1. \tag{2.2.21}$$

Applying the variation of constants formula and using (2.2.10), (2.2.21), we obtain that

$$|v(x,\lambda) - y(x,\lambda)| \le \int_0^x |Lv(s,\lambda)||y(x-s,\lambda)|ds \tag{2.2.22}$$
$$\le \quad \frac{2\epsilon C_2 \cosh 1}{|\lambda^2+b|}\int_0^1 \Big(|a|^2 + |a||b| + |a'|\Big)ds := \frac{\epsilon C_0'}{|\lambda^2+b|}.$$

Finally inserting the estimation :

$$\Big|v(x,\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+b}}\sinh\Big(\sqrt{\lambda^2+b}\; x + \int_0^x \epsilon a(s)ds\Big)\Big| \le \frac{2\epsilon\|a\|_\infty \cosh 1}{|\lambda^2+b|} \tag{2.2.23}$$

into (2.2.22) gives (2.2.16) with $C_0 := C_0' + 2\|a\|_\infty \cosh 1$. The proof is thus complete.

Now let C_0 be the constant appearing in the estimation (2.2.16). For all $n \ge 1$ and $0 < \epsilon < \epsilon_1$ we define the region $\Gamma_{\pm n}$ as follows :

$$\Gamma_{\pm n} = \{|\lambda - \mu_{\pm n}| \le \epsilon\rho_n\}, \qquad \rho_n = 2C_0\sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2+b}}. \tag{2.2.24}$$

Assume that

$$\epsilon < \epsilon_2 := \min\Big\{\epsilon_1, \quad \frac{\epsilon_1}{2C_0}\sqrt{\pi^2-|b|}\Big\}. \tag{2.2.25}$$

Then we have the inclusion : $\Gamma_{\pm n} \subset G_{\pm n}$ for all $n \ge 1$.

Lemma 2.2.2 *Assume that $a \in BV(0,1)$ and b is a constant. Then the following estimation holds for $\epsilon > 0$ small enough :*

$$\left|\sinh\left(\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a_0\right)\right| > \frac{C_0\epsilon}{\sqrt{|\lambda^2+b|}}, \qquad \lambda \in \partial\Gamma_{\pm n}. \tag{2.2.26}$$

Proof We first assume that $0 < \epsilon < \epsilon_2$. Let $\lambda \in \partial\Gamma_{\pm n}$, then $\lambda = \mu_{\pm n} + \epsilon\rho_n e^{i\theta}$. Since $Im\sqrt{\lambda^2+b} > 0$ for $\lambda \in \Gamma_n$ and $Im\ \sqrt{\lambda^2+b} < 0$ for $\lambda \in \Gamma_{-n}$, then we have

$$\begin{aligned} & \left|\sqrt{\lambda^2+b} - \epsilon a_0 \pm in\pi + \frac{2\epsilon C_0 e^{i\theta}}{n\pi}\right| \\ \geq & \left|Im\ \sqrt{\lambda^2+b} \pm n\pi\right| - \frac{2\epsilon C_0}{\pi} \\ \geq & \ n\pi - \frac{2\epsilon C_0}{\pi} \geq \frac{n\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

On the other hand, using (2.2.1) we get

$$\begin{aligned} & (\lambda^2+b) - \left(\epsilon a_0 \mp in\pi - \frac{2\epsilon C_0 e^{i\theta}}{n\pi}\right)^2 \\ = & \ \mu_{\pm n}^2 + 2\epsilon\mu_{\pm n}\rho_n e^{i\theta} + \epsilon^2\rho_n^2 e^{2i\theta} + b - (\epsilon a_0 \mp in\pi)^2 \\ + & \ \frac{2\epsilon C_0 e^{i\theta}}{n\pi}(\epsilon a_0 \mp in\pi) - \left(\frac{2\epsilon C_0 e^{i\theta}}{n\pi}\right)^2 \\ = & \ 2\epsilon e^{i\theta}(\mu_n\rho_n \mp i2C_0) + \epsilon^2\rho_n^2 e^{i2\theta} + 4\frac{\epsilon^2 a_0 C_0 e^{i\theta}}{n\pi} - \left(\frac{2\epsilon C_0 e^{i\theta}}{n\pi}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

From (2.2.4), we deduce that

$$|\mu_n\rho_n \mp i2C_0| \leq 2\epsilon C_0(|a_0| + C_1)\sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2+b}}. \tag{2.2.29}$$

Combining (2.2.28) and (2.2.29), it follows that

$$\begin{aligned} & \left|(\lambda^2+b) - \left(\epsilon a_0 \mp in\pi - \frac{2\epsilon C_0 e^{i\theta}}{n\pi}\right)^2\right| \\ \leq & \ 4C_0^2\left(\tfrac{1}{\pi^2} + \frac{1}{|\gamma_1|}\right)\epsilon^2 + 4C_0\left(\frac{|a_0|}{\pi} + \frac{|a_0|}{\sqrt{|\gamma_1|}} + \frac{C_1}{\sqrt{|\gamma_1|}}\right)\epsilon^2 := C_4\epsilon^2 \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

which together with (2.2.27) gives

$$\Big|\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a_0 \mp in\pi - \frac{2\epsilon C_0 e^{i\theta}}{n\pi}\Big| \le \frac{2C_4\epsilon^2}{n\pi}. \qquad (2.2.31)$$

Now using (2.2.31) and the inequality :

$$|\sinh(\alpha+i\beta)| \ge \frac{2}{\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \forall \alpha,\beta \in R, \quad |\beta| \le \frac{\pi}{2}, \qquad (2.2.32)$$

we find that

$$|\sinh(\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a_0)| \ge \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\epsilon C_0}{n\pi} - \frac{C_4\epsilon^2}{n\pi}\Big). \qquad (2.2.33)$$

Once again from (2.2.31), we get :

$$\sqrt{|\lambda^2+b|} \ge n\pi - \epsilon(\|a\|_\infty + C_0 + C_4) \qquad (2.2.34)$$

which combined with (2.2.33) gives (2.2.26), if $\epsilon > 0$ satisfies :

$$\epsilon \le \epsilon_3 := \min\Big\{\epsilon_2, \quad \frac{(4-\pi)C_0}{\pi(4C_4 + C_0(\|a\|_\infty + C_0 + C_4))}\Big\}. \qquad (2.2.35)$$

The proof is thus complete.

Theorem 2.2.2 *Assume that $a \in BV(0,1)$ and b is a constant. Then for $0 < \epsilon < \epsilon_3$ the operator A^ϵ admits a unique eigenvalue in $G_{\pm n}$ for each $n \ge 1$. Moreover, we have the asymptotic expansion*

$$|\lambda_{\pm n} + \epsilon a_0 \mp i\sqrt{n^2\pi^2+b}| \le \epsilon\Big(\frac{C_1}{n} + \frac{C_0}{\sqrt{n^2\pi^2+b}}\Big). \qquad (2.2.36)$$

Proof From (2.2.16) and (2.2.26), we deduce that

$$\Big|y(1,\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+b}}\sinh(\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a_0)\Big| < \Big|\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+b}}\sinh(\sqrt{\lambda^2+b}+\epsilon a_0)\Big| \quad (2.2.37)$$

for any $\lambda \in \partial\Gamma_{\pm n}$. Via Rouché's theorem, there exists one simple zero $\lambda_{\pm n} \in \Gamma_{\pm n}$ of the function $\lambda \to y(1,\lambda)$. In particular, we get

$$|\lambda_{\pm n} - \mu_{\pm n}| \le \frac{2C_0\epsilon}{\sqrt{n^2\pi^2+b}}, \qquad \forall n \ge 1. \qquad (2.2.38)$$

which together with (2.2.4) implies (2.2.36). The proof is thus complete.

Remark. Let $\lambda_{\pm n}$ be an eigenvalue of the operator A^ϵ and $u_{\pm n} = (y_{\pm n}, \lambda_{\pm n} y_{\pm n})$ be the associated eigenvector. We should prove (but we leave it to Theorem 2.4.3) that the system of eigenvectors $(u_{\pm n})_{n\geq 1}$ forms a Riesz basis in the space $H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)$.

2.3 High frequencies in the general case.

In this section we will consider the general case. Assume that $\epsilon > 0$ is small enough. Then from the condition (C_1), we see that the eigenvalues $\lambda_{\pm n}$ are complex. Moreover we have the expession :

$$Re\lambda_{\pm n} = \frac{-\epsilon\int_0^1 a|y_{\pm n}|^2 dx}{\int_0^1 |y_{\pm n}|^2 dx}. \tag{2.3.1}$$

We will prove that the real part of the eigenvalues of high frequency can be uniformly localized in the left of the imaginary axis of the complex plan.

We will assume that $\|a\|_\infty \neq 0$ (the contrary case is trivial). On the other hand, in order to clarify the independence of the various constants $C's$ appearing in the estimations on the parameter ϵ, we assume that $0<\epsilon<1$. Therefore we consider the equation (2.2.8) only for $|Re\lambda| \leq 2\|a\|_\infty$. We will construct an explicit approximation of the solution y of the initial value problem (2.2.8). We use the same idea as in the previous case. But this time we neglect the zero order potential by and we approach the solution y of (2.2.8) by $\widetilde{v}$:

$$\widetilde{v} = \frac{1}{\lambda+\epsilon a(0)}\sinh\Big(\lambda x + \epsilon\int_0^x a(s)ds\Big). \tag{2.3.2}$$

Theorem 2.3.1 *Assume that $a\in BV(0,1)$, $b\in L^1(0,1)$. Let $|\lambda|\geq 2\|a\|_\infty$ and $|Re\lambda|\leq 2\|a\|_\infty$. Then there exists constant $C_5>0$, depending only on a and b, such that the solution y of equation (2.2.8) satisfies the following estimations :*

$$\Big|y(x,\lambda) - \frac{1}{\lambda}\sinh\Big(\lambda x + \epsilon\int_0^x a(s)ds\Big)\Big| \leq \frac{C_5}{|\lambda|^2}, \tag{2.3.3}$$

$$\Big|y_x(x,\lambda) - \cosh\Big(\lambda x + \epsilon\int_0^x a(s)ds\Big)\Big| \leq \frac{C_5}{|\lambda|}. \tag{2.3.4}$$

Proof Let y be the solution of (2.2.8). We first prove that there exists C_6, depending only on a and b, such that the following estimations hold :

$$|y| \leq \frac{C_6}{|\lambda|}, \quad |y_x| \leq C_6. \tag{2.3.5}$$

In fact using the variation of constants formula, we have

$$y = \frac{1}{\lambda}\sinh\lambda x - \int_0^x \frac{2a\epsilon\lambda + b}{\lambda}\sinh\lambda(x-s)y(s)ds.$$

It follows that

$$|y| \leq \frac{\cosh(2\|a\|_\infty)}{|\lambda|} + \cosh(2\|a\|_\infty)\int_0^x \Big(2|a| + \frac{|b|}{2\|a\|_\infty}\Big)|y(s)|ds.$$

Using Gronwall's inequality, we obtain

$$|y| \leq \frac{\cosh(2\|a\|_\infty)}{|\lambda|}\exp\Big(\cosh(2\|a\|_\infty)\int_0^1 \Big(2|a| + \frac{|b|}{2\|a\|_\infty}\Big)ds\Big) := C_6.$$

This implies that

$$|y_x| \leq \cosh(2\|a\|_\infty) + C_5\cosh(2\|a\|_\infty)\int_0^x \Big(2|a| + \frac{|b|}{2\|a\|_\infty}\Big)ds := C_6'.$$

Taking C_6 as the maximum of C_6 and C_6' we obtain the estimations (2.3.5).

On the other hand, a straight forward computation gives that

$$L\widetilde{v} = -\frac{\epsilon a'}{\lambda + \epsilon a(0)}\cosh\Big(\lambda x + \epsilon\int_0^x a(s)ds\Big) + \frac{b - \epsilon^2 a^2}{\lambda + \epsilon a(0)}\sinh\Big(\lambda x + \epsilon\int_0^x a(s)ds\Big).$$

It follows that

$$|L\widetilde{v}| \leq \frac{2\cosh(3\|a\|_\infty)}{|\lambda|}(|a'| + |a|^2 + |b|). \tag{2.3.6}$$

Once again using the variation of constants formula, we have

$$\widetilde{v}(x,\lambda) - y(x,\lambda) = \int_0^x L\widetilde{v}(s,\lambda)y(x-s,\lambda)ds. \tag{2.3.7}$$

From the estimations (2.3.5)-(2.3.6) comes that

$$|\widetilde{v}(x,\lambda)-y(x,\lambda)| \leq \int_0^1 |L\widetilde{v}(s)||y(x-s,\lambda)|ds \tag{2.3.8}$$
$$\leq \quad \frac{2C_5\cosh(3\|a\|_\infty)}{|\lambda|^2}\int_0^1 (|a'|+|a|^2+|b|)ds := \frac{C_5'(T_a,\|a\|_2,\|b\|_1)}{|\lambda|^2}$$

where T_a denotes the total variation of the function a.

Differentiating the equation (2.3.7) gives

$$\widetilde{v}_x(x,\lambda)-y_x(x,\lambda) = \int_0^x L\widetilde{v}(s,\lambda)y_x(x-s,\lambda)ds.$$

Using (2.3.5) and (2.3.6), it follows that

$$|\widetilde{v}_x(x,\lambda)-y_x(x,\lambda)| \tag{2.3.9}$$
$$\leq \int_0^1 |L\widetilde{v}(s,\lambda)| \quad |y_x(x-s,\lambda)|ds \leq \frac{C_5'(T_a,\|a\|_2,\|b\|_1)}{|\lambda|}.$$

Finally using the explicit expression (2.3.2) into (2.3.8)-(2.3.9) gives the estimations (2.3.3)-(2.3.4) with the constant $C_5 = C_5' + 2\cosh(3\|a\|_\infty)$. The proof is complete.

Now let C_5 be the constant appearing in the estimations (2.3.3)-(2.3.4) and N be an integer. We define the regions $\Gamma_{\pm n}$:

$$\begin{cases} \Gamma_{\pm n} = \{|\lambda+\epsilon a_0 \mp in\pi| \leq C_5/n\}, & n > N, \\ \Gamma_N = \{-\|a\|_\infty \leq Re\lambda \leq \|a\|_\infty, & -N\pi \leq Im\lambda \leq N\pi\}. \end{cases}$$

Lemma 2.3.1 *There exists an integer N, depending only on a and b, such that for all $n > N$ the following estimation holds*

$$|\sinh(\lambda+\epsilon a_0)| > \frac{C_5}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \Gamma_{\pm n}. \tag{2.3.10}$$

Proof Let $\lambda \in \Gamma_{\pm n}$. Then $\lambda+\epsilon a_0 = \pm in\pi + C_5e^{i\theta}/n$. Applying (2.2.32) we obtain that

$$|\sinh(\lambda+\epsilon a_0)| = |\sinh(\pm in\pi + C_5e^{i\theta}/n)| = |\sinh(C_5e^{i\theta}/n)| \geq \frac{2C_5}{\pi n}.$$

Since $|\lambda| \geq n\pi - |a_0| - C_5$ for $\lambda \in \Gamma_{\pm n}$, we get the estimation (2.3.10) provided that

$$n > \max\left\{\frac{3(C_5 + \|a\|_\infty)}{\pi}, \quad \frac{C_5}{\|a\|_\infty}\right\}. \tag{2.3.11}$$

Here we add the second term in (2.3.11) to guarantee that $\Gamma_{\pm n}$ is included in the strip $\{|Re\lambda| \leq 2\|a\|_\infty, \quad |\lambda| \geq 2\|a\|_\infty\}$.

Theorem 2.3.2 *Assume that $a \in BV(0,1)$ and $b \in L^1(0,1)$. Then for $n > N$ the operator A^ϵ admits a unique eigenvalue in each $\Gamma_{\pm n}$, and a finite number of eigenvalues in the region Γ_N. Moreover, we have the asymptotic expansion :*

$$\lambda_{\pm n} = -\epsilon a_0 \pm in\pi + (\epsilon + i)O_R\Big(\frac{1}{n}\Big) \tag{2.3.12}$$

where $O_R(\xi) \sim \xi$ denotes one real number.

Proof We first notice that the spectrum of A^ϵ is discrete, therefore there exists at most a finite number of eigenvalues in the compact region Γ_N.

Next combining (2.3.3) and (2.3.10) we obtain that

$$\Big|y(1,\lambda) - \frac{1}{\lambda}\sinh(\lambda + \epsilon a_0)\Big| < \Big|\frac{1}{\lambda}\sinh(\lambda + \epsilon a_0)\Big|$$

for any $\lambda \in \partial\Gamma_{\pm n}$. Via Rouché's theorem, we deduce that there exists one and only one eigenvalue $\lambda_{\pm n} \in \Gamma_{\pm n}$. In particular we have the following rough estimation :

$$\Big|\lambda_{\pm n} + \epsilon a_0 \mp in\pi\Big| \leq \frac{C_5}{n}. \tag{2.3.13}$$

Putting

$$\xi(x) = \int_0^x a(s)ds - x\int_0^1 a(s)ds \tag{2.3.14}$$

then using (2.3.3), (2.3.4) and (2.3.13), we find easily

$$\Big|y_{\pm n}(x) - \frac{1}{\lambda_{\pm n}}\sinh\left(\epsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)\Big| \leq \frac{C_6}{n^2}, \tag{2.3.15}$$

$$\Big|y_{\pm nx}(x) - \cosh\left(\epsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)\Big| \leq \frac{C_6}{n}, \quad \forall n > N \tag{2.3.16}$$

where we have put

$$C_6 = (1 + \cosh(3\|a\|_\infty))C_5.$$

From (2.3.15) we see that the leading term of the eigenfunction $y_{\pm n}$ doesn't depend on the coefficient b. By virtue of the expression (2.3.1), we see that $Re\lambda_{\pm n}$ doesn't depend on b either. We first calculate

$$\begin{aligned} 2 & \int_0^1 a|\sinh(\epsilon\xi(x) \pm in\pi x)|^2 dx && (2.3.17) \\ = & \; a_0 \int_0^1 \cosh(2\epsilon\xi(x))dx + \int_0^1 a(x)\cos 2n\pi x dx, \\ 2 & \int_0^1 |\sinh(\epsilon\xi(x) \pm in\pi x)|^2 dx = \int_0^1 \cosh(2\epsilon\xi(x))dx. && (2.3.18) \end{aligned}$$

From (2.3.15) we can write

$$\left| |y_{\pm n}(x)|^2 - \frac{1}{|\lambda_{\pm n}|^2} |\sinh\left(\epsilon\xi(x) + in\pi x\right)|^2 \right| \le \frac{C_7}{n^3} \qquad (2.3.19)$$

with

$$c_7 = \frac{C_6^2 + 2C_6\cosh(2\|a\|_\infty)}{n^3}.$$

Inserting (2.2.18) -(2.3.19) into (2.3.1) gives

$$|Re\lambda_{\pm n} + \epsilon a_0| \le \epsilon \frac{\left|\int_0^1 a(x)\cos 2n\pi x dx\right| + \frac{2\|a_0 - a\|_\infty C_7 |\lambda_{\pm n}|^2}{n^3}}{\int_0^1 \cosh(2\epsilon\xi(x))dx - \frac{2C_7|\lambda_{\pm n}|^2}{n^3}}. \qquad (2.3.20)$$

Since

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \cosh(2\epsilon\xi(x))dx \ge 1, \\ \displaystyle\left|\int_0^1 a(x)\cos 2n\pi x dx\right| \le \frac{T_a}{n}, \\ \displaystyle\frac{n\pi}{2} \le |\lambda_{\pm n}| \le 2n\pi. \end{cases} \qquad (2.3.21)$$

Then inserting (2.3.21) into (2.3.20), we obtain that

$$|Re\lambda_{\pm n} + \epsilon a_0| \le \frac{2\epsilon}{n}(T_a + 16\pi^2 C_7\|a\|_\infty) := \frac{C_8\epsilon}{n}, \qquad (2.3.22)$$

provided that

$$n > 16\pi^2 C_7. \tag{2.3.23}$$

The proof is thus complete.

2.4 Low frequencies and root system.

Let us denote by $\lambda_{\pm k}$ the eigenvalues of A^ϵ contained in the region Γ_N with the algebraic multiplicity $m_{\pm k} \geq 1$. For ϵ small enough, the eigenvalues are complex and appear in conjugate pairs. Thus we have $m_k = m_{-k}$. We choose λ_k such that $Im\ \lambda_k > 0$, and λ_{-k} such that $Im\ \lambda_{-k} < 0$. Accordingly, we denote by $(u_{\pm k,j})_{j=1}^{m_{\pm k}}$ an arbitrary orthonormal basis of the eigenspace $Ker(A - \lambda_{\pm k})^{m_{\pm k}}$.

Let $n > N$, we denote by $u_{\pm n} = (y_{\pm n}, \lambda_{\pm n} y_{\pm n})$ the eigenvectors of high frequency. On constructing the corresponding biorthogonal system as in Cox-Zuazua [4], it is easily seen that the system of eigenvectors

$$(u_{\pm k,j})_{1 \leq k \leq K, 1 \leq j \leq m_{\pm k}} \cup (u_{\pm n})_{n > N} \tag{2.4.1}$$

is linearly independent in the energy space $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. We arrange the eigenvectors of low frequency in the following way :

$$u_{\pm k,j} = \widetilde{u}_{\pm n}, \qquad n = j + \sum_{i=1}^{k-1} m_i. \tag{2.4.2}$$

Here we have used the symbol $\widetilde{u}_{\pm n}$ to avoid possible ambiguity with the eigenvectors $u_{\pm n}$ of the high frequency. Setting $\widetilde{N} = \sum_{k=1}^{K} m_k$, we write the system of eigenvectors in the following form :

$$(\widetilde{u}_{\pm n})_{1 \leq n \leq \widetilde{N}} \cup (u_{\pm n})_{n > N}. \tag{2.4.3}$$

Theorem 2.4.1 *The operator A^0 has exactly $2N$ eigenvalues in the region Γ_N.*

Proof In the case $\epsilon = 0$, A^0 is skew adjoint and has a compact resolvent. The corresponding system of eigenvectors $(\widetilde{u}^0_{\pm n})_{1 \leq n \leq \widetilde{N}} \cup (u^0_{\pm n})_{n > N}$ is complete, orthogonal and almost normal, therefore forms a Riesz basis in the energy space $H^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Let us denote by $e_{\pm n}$ the usual orthonormal basis of $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$:

$$e_{\pm n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{in\pi} \sinh in\pi x \\ \pm \sinh in\pi x \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1. \tag{2.4.4}$$

Assume that $\widetilde{N} < N$, from (2.3.15)-(2.3.16) it follows that

$$\sum_{1 \leq n \leq \widetilde{N}} \|\widetilde{u}^0_{\pm n} - e_{\pm n}\|^2_{H^1_0(0,1)\times L^2(0,1)} + \sum_{n>N} \|u^0_{\pm n} - e_{\pm n}\|^2_{H^1_0(0,1)\times L^2(0,1)} < +\infty.$$

Thanks to Bari's theorem, we find that the subsystem $(e_{\pm n})_{1\leq n\leq \widetilde{N}} \cup (e_{\pm n})_{n>N}$, which is quadratically close to the Riesz basis $(\widetilde{u}^0_{\pm n})_{1\leq n\leq \widetilde{N}} \cup (u^0_{\pm n})_{n>N}$, would also be a Riesz basis in the energy space $H^1_0(0,1) \times L^2(0,1)$. This contradicts the linearly independence of the system $(e_{\pm n})_{n\geq 1}$. Changing the role of $u^0_{\pm n}$ and $e_{\pm n}$ we obtain that $\widetilde{N} = N$. Now there is no more ambiguity, we can replace $\widetilde{u}^0_{\pm n}$ by $u^0_{\pm n}$ in (2.4.2). The proof is thus complete.

Theorem 2.4.2 *Assume that $a \in BV(0,1)$ and $b \in L^1(0,1)$. Then for $\epsilon > 0$ small enough the operator A^ϵ admits exactly $2N$ eigenvalues in the region Γ_N.*

Proof We first write

$$(A^\epsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (\partial_{xx} - b)^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 2(\partial_{xx} - b)^{-1}a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := (A^0)^{-1} + \epsilon B. \tag{2.4.5}$$

Next for $\delta > 0$ small enough we define the region $D_{\pm k}$ as

$$D_{\pm k} = \{|\lambda - \lambda^0_{\pm k}| \leq \delta\}. \tag{2.4.6}$$

Since A^{-1} is compact and skew adjoint, then the eigenvalues $\lambda^0_{\pm k}$ are normal points of $(A^0)^{-1}$ and the contour $\partial D_{\pm k}$ consists of regular points of $(A^0)^{-1}$. Applying Theorem I.3.1 in Gohberg and Krein [7], we conclude that there exists $\epsilon_4 > 0$ such that for $0 < \epsilon < \epsilon_4$ the operator $(A^\epsilon)^{-1}$ has the same number of eigenvalues than $(A^0)^{-1}$ in each region $D_{\pm k}$:

$$\lambda_{\pm k,j} \in D_{\pm k}, \qquad k = 1, 2, \cdots, K; \quad j = 1, 2, \cdots, m_{\pm k}. \tag{2.4.7}$$

Since A^ϵ is an analytic family (see Kato [8]), arranging the root vectors $u_{\pm k,j}$ in the same way as in (2.4.2), we find that

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_{\pm n} = u^0_{\pm n}, \qquad \forall n \geq 1. \tag{2.4.8}$$

The proof is thus complete.

Now we introduce a subspace :

$$V = \{y \in H^1(0,1) : \quad y(0) = 0\}, \tag{2.4.9}$$

and a linear application L :

$$L(y,z) = (y_x, z), \qquad (y,z) \in V \times L^2(0,1). \tag{2.4.10}$$

Then we verify easily that L is an isomorphism from $V \times L^2(0,1)$ onto $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$.

Setting :

$$e_0 = u_0 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4.11}$$

the extended system $(e_{\pm n})_{n\geq 0}$ becomes an orthonormal basis of $V \times L^2(0,1)$, and the extended system $(u_{\pm n})_{n\geq 0}$ remains linearly independent in the space $V \times L^2(0,1)$.

Putting

$$B^\epsilon = \begin{pmatrix} \cosh \epsilon\xi(x) & \sinh \epsilon\xi(x) \\ \sinh \epsilon\xi(x) & \cosh \epsilon\xi(x) \end{pmatrix}, \ \Phi^\epsilon_{\pm n} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\epsilon\xi(x) \pm in\pi x\right) \\ \sinh\left(\epsilon\xi(x) \pm in\pi x\right) \end{pmatrix} \tag{2.4.12}$$

we have

$$B^\epsilon \Phi^0_{\pm n} = \Phi^\epsilon_{\pm n}, \qquad L e_{\pm n} = \Phi^0_{\pm n}, \qquad \forall n \geq 0. \tag{2.4.13}$$

Since the matrix B^ϵ has a bounded inverse, we see that B^ϵ is a bounded invertible linear operator of $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Moreover, we verify easily that

$$\|B^\epsilon\| \leq 2\cosh(2\|a\|_\infty), \quad \|(B^\epsilon)^{-1}\| \leq 2\cosh(2\|a\|_\infty). \tag{2.4.14}$$

Theorem 2.4.3 *Assume that $a \in BV(0,1)$ and $b \in L^1(0,1)$. There exists a linear bounded invertible operator S^ϵ of $V \times L^2(0,1)$ such that*

$$S^\epsilon e_{\pm n} = u_{\pm n}, \qquad \forall n \geq 0. \tag{2.4.15}$$

Moreover we can find $\epsilon_5 > 0$, depending only on a and b, such that the following estimations hold

$$\sup_{0<\epsilon<\epsilon_5} \|S^\epsilon\| < +\infty, \quad \sup_{0<\epsilon<\epsilon_5} \|(S^\epsilon)^{-1}\| < +\infty. \tag{2.4.16}$$

Proof We first assume that $0 < \epsilon < \epsilon_4$. Then using (2.3.15)-(2.3.16), we calculate the high frequency :

$$\begin{aligned} & \sum_{n>N} \|Lu_{\pm n} - \Phi^\epsilon_{\pm n}\|^2_{L^2(,0,1)\times L^2(0,1)} \\ \leq & \sum_{n>N} \frac{C_6^2(1+4\pi^2)}{n^2} < \frac{C_6^2(1+4\pi^2)\pi^2}{6}. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

By virtue of the choice of eigenvectors $u_{\pm n}$ of low frequency and (2.3.16) we have :

$$\sum_{0\leq n\leq N} \|Lu_{\pm n} - \Phi^\epsilon_{\pm n}\|^2_{L^2(,0,1)\times L^2(0,1)} \leq (2N+1)(1+\cosh(2\|a\|_\infty)). \tag{2.4.18}$$

Combining (2.4.17) and (2.4.18) we find a constant C_9, depending only on a and b, such that

$$\sum_{n\geq 1} \|Lu_{\pm n} - \Phi^\epsilon_{\pm n}\|^2_{L^2(,0,1)\times L^2(0,1)} \leq C_9. \tag{2.4.19}$$

Now defining the linear operator R^ϵ as follows :

$$R^\epsilon e_{\pm n} = L^{-1}B^\epsilon \Phi^0_{\pm n} - u_{\pm n}, \qquad \forall n \geq 0, \tag{2.4.20}$$

from (2.4.19) we deduce that

$$\|R^\epsilon\|^2 \leq \|L^{-1}\|^2 \sum_{n\geq 1} \|\Phi^\epsilon_{\pm n} - Lu_{\pm n}\|^2_{L^2(0,1)\times L^2(0,1)} \leq C_9\|L^{-1}\|^2. \tag{2.4.21}$$

Therefore R^ϵ is a Hilbert-Schmidt operator of the space $V \times L^2(0,1)$. Now setting

$$S^\epsilon = L^{-1}B^\epsilon L - R^\epsilon, \tag{2.4.22}$$

then from (2.4.13) and (2.4.20) it follows that

$$S^\epsilon e_{\pm n} = L^{-1}B^\epsilon L e_{\pm n} - R^\epsilon e_{\pm n} = L^{-1}B^\epsilon \Phi^0_{\pm n} - R^\epsilon e_{\pm n} = u_{\pm n}, \qquad n \geq 0.$$

Moreover using (2.4.14) and (2.4.22) we get easily that

$$\|S^\epsilon\| \leq 2\|L^{-1}\|\|L\| \cosh(2\|a\|_\infty) + C_9\|L^{-1}\|^2, \qquad 0 < \epsilon < \epsilon_4.$$

This gives the first estimation of (2.4.16).

On the other hand, since the system $(u_{\pm n})_{n\geq 1}$ is linearly independent, using Fredholm's Alternative we show easily that S^ϵ has a bounded inverse $(S^\epsilon)^{-1}$ in $V \times L^2(0,1)$. If the second estimation of (2.4.16) fails, there would exist a sequence $u^\epsilon \in V \times L^2(0,1)$ such that

$$\|u^\epsilon\|_{V\times L^2(0,1)} = 1, \qquad L^{-1}B^\epsilon L u^\epsilon - R^\epsilon u^\epsilon \to 0, \quad \text{in} \quad V \times L^2(0,1). \qquad (2.4.23)$$

Let R^0 denote the limit operator of R^ϵ :

$$R^0 e_{\pm n} = L^{-1}\Phi^0_{\pm n} - u^0_{\pm n} = e^0_{\pm n} - u^0_{\pm n}, \qquad \forall n \geq 0. \qquad (2.4.24)$$

Then using (2.4.19) and Lebesgue's convergence theorem, we can prove easily that

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \|R^\epsilon - R^0\|^2 = 0. \qquad (2.4.25)$$

Since $B^\epsilon \to I, R^\epsilon \to R^0$ for the uniform topology of $V \times L^2(0,1)$ as $\epsilon \to 0^+$, there exists a subsequence, still indexed by u^ϵ, which converges to u strongly in $V \times L^2(0,1)$. Then passing to the limit in (2.4.23) we get

$$\|u\|_{V\times L^2(0,1)} = 1, \qquad u - R^0 u = 0. \qquad (2.4.26)$$

Then indeed let $u = \sum_{n\geq 0} \alpha_{\pm n} e_{\pm n}$. Using (2.4.24) we deduce easily that

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_{\pm n} u^0_{\pm n} = 0. \qquad (2.4.27)$$

Since $(u^0_{\pm n})$ is a Riesz Basis, it follows that $\alpha_{\pm n} = 0$ for all $n \geq 0$. This contradicts $\|u\|_{V\times L^2(0,1)} = 1$. The proof is thus complete.

Theorem 2.4.4 *Assume that the conditions* $(C_1), (C_2)$ *hold. Let* $a \in BV(0,1)$ *and* $b \in L^1(0,1)$. *Then there exist positive constants* $\epsilon_0 > 0, \omega, M > 0$ *depending only on* a, b *such that for all* $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *the solution* y *of the system (2.1.1) satisfies the following estimation :*

$$\|y(t)\|^2_{H^1_0(0,1)} + \|y_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} \leq Me^{-\omega\epsilon t}\Big(\|y_0\|^2_{H^1_0(0,1)} + \|y_1\|^2_{L^2(0,1)}\Big), \tag{2.4.28}$$

for all $t \geq 0$.

Proof From the condition (C_2) and the asymptotic expansion (2.3.15), we deduce that $I_n \to a_0 \geq c_0 > 0$. For the validity of Theorems 2.4.2, 2.4.3, we first assume that ϵ satisfies

$$\epsilon < \epsilon_6 := \min\{\epsilon_4, \quad \epsilon_5\}.$$

Using the expansion (2.3.22) and taking into account the conditions (2.3.11) and (2.3.23), we find that the eigenvalues of high frequency are in the left of the imaginary axis :

$$Re\lambda_{\pm n} \leq -\frac{c_0\epsilon}{2} \tag{2.4.29}$$

provided that

$$n > N_0 := \max\Big\{16\pi^2 C_7, \quad \frac{2C_8}{a_0}, \quad \frac{3(C_5 + \|a\|_\infty)}{\pi}, \quad \frac{C_5}{\|a\|_\infty}\Big\}. \tag{2.4.30}$$

But from the condition $\lambda'_{\pm n}(0) = -I_n \leq -c_0$, we can find $0 < \epsilon_0 \leq \epsilon_6$ such that for all $0 < \epsilon < \epsilon_0$ the remaining $2N_0$ eigenvalues of low frequency satisfy also (2.4.29). Now let $(y_0, y_1) \in H^1_0(0,1) \times L^2(0,1)$ such that

$$(y_0, y_1) = \sum_{1\leq k\leq K}\sum_{1\leq j\leq m_k} \alpha_{\pm k,j} u_{\pm k,j} + \sum_{n>N} \alpha_{\pm n} u_{\pm n}. \tag{2.4.31}$$

Then the solution of the problem (2.1.1) is given by

$$(y(t), y_t(t)) = \sum_{1\leq k\leq K} e^{\lambda_{\pm k}t} \sum_{1\leq j\leq m_k} \alpha_{\pm k,j} \sum_{1\leq l\leq j} \frac{t^{j-l}}{(j-l)!} u_{\pm k,l} + \sum_{n>N} e^{\lambda_{\pm n}t}\alpha_{\pm n}u_{\pm n}.$$

Using (2.4.15) and (2.4.29), we get

$$
\begin{aligned}
&\|y(t)\|^2_{H^1_0(0,1)} + \|y_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} \qquad (2.4.32)\\
&\leq \|S^\epsilon\|^2 \exp(-c_0\epsilon t)\Big\{ \textstyle\sum_{1\leq k\leq K} \displaystyle\sum_{1\leq j\leq m_k} |\alpha_{\pm k,j}|^2 \sum_{1\leq l\leq j} \Big(\frac{t^{j-l}}{(j-l)!}\Big)^2 + \sum_{n>N} |\alpha_{\pm n}|^2 \Big\}.
\end{aligned}
$$

Recalling from Theorem 2.4.2 that the number of eigenvalues of low frequency is exactly $2N$, then the multiplicity $m_k \leq N$. Hence we deduce that there exists a constant C_N depending only on N such that

$$
\sum_{1\leq l\leq j} \Big(\frac{t^{j-l}}{(j-l)!}\Big)^2 \leq \sum_{1\leq l\leq N} \Big(\frac{t^{N-l}}{(N-l)!}\Big)^2 \leq C_N(1+t^{2N}). \qquad (2.4.33)
$$

It follows that

$$
\begin{aligned}
&\|y(t)\|^2_{H^1_0(0,1)} + \|y_t(t)\|^2_{L^2(0,1)} \qquad (2.4.34)\\
&\leq C_N \|S^\epsilon\|^2 \|(S^\epsilon)^{-1}\|^2 \quad (1+t^{2N}) \exp(-c_0\epsilon t)\Big(\|y_0\|^2_{H^1_0(0,1)} + \|y_1\|^2_{L^2(0,1)} \Big)
\end{aligned}
$$

which together with (2.4.16) gives (2.4.28) with $\omega < c_0$. The proof is thus complete.

Bibliographie

[1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary,* SIAM J. Control Optim. 30 (1992), 1024-1065.

[2] G. Chen, S. A. Fulling, F. G. Narcowich and S.Sun, *Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping,* SIAM J. Appl. Math. 51 (1991), 266-301.

[3] E. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Mc. Graw Hill, 1955.

[4] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which energy decays in a damped string*, Commun. in PDE. 19 (1994) pp. 213-244.

[5] P. Freitas, *On some eigenvalue problem related to the wave equation with indefinite damping*, J. Diff. Equa. 127 (1996) p. 320-335.

[6] P. Freitas and E. Zuazua, Stability results for wave equation with indefinite damping, J. Diff. Equa. 132 (1996) p. 338-352.

[7] I. C. Gohberg and M.G. Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, AMS, Providence, 1969.

[8] T. Kato, *Perturbation theory for linear operartors*, Springer, New York, 1980.

[9] M. A. Naimark, *Linear differential operators*, Vol. I, Ungar, New York, 1967.

[10] B. Rao, *Optimal energy decay rate in the Rayleigh beam equation*, in Optimization Methods in Partial Differential Equations, ed. Cox and Lasiecka, Contemporary Mathematics, 209 (1997) 211-229.

Chapitre 3

Optimal energy decay rate of coupled wave equations

3.1 Introduction.

In this paper we consider a system of coupled wave equations in the presence of viscous damping :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2au_t + \alpha(u-v) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v_{tt} - v_{xx} + 2av_t + \alpha(v-u) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

where $a, \alpha \in L^\infty(0,1)$ are positive functions.

Let $\mathcal{H} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. We next define the linear unbounded operator $\mathcal{A}$ by

$$\mathcal{A} = (u,z,v,w) \;=\; (z, u_{xx} - 2az - \alpha(u-v), w, v_{xx} - 2aw - \alpha(v-u)), \tag{3.1.2}$$

$$D(\mathcal{A}) \;=\; \mathcal{V}\times H_0^1(0,1)\times\mathcal{V}\times H_0^1(0,1) \tag{3.1.3}$$

where we have put $\mathcal{V} := H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$. Setting $U = (u, u_t, v, v_t)$, we transform the system (3.1.1) into an evolutionary equation

$$U_t = \mathcal{A}U, \qquad U(0) = U_0 \in \mathcal{H}. \tag{3.1.4}$$

we can prove easily that the operator $\mathcal{A}$ generates a C_0-semigroup (see Pazy [16]). Moreover defining the energy of the system by :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2 + u_t^2 + v_x^2 + v_t^2 + \alpha(u-v)^2 dx, \tag{3.1.5}$$

we find that

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2\int_0^1 a(u_t^2 + v_t^2)dt \leq 0. \tag{3.1.6}$$

Assume that a is nonnegative and strictly positive on some subinterval we can easily prove (see[1]) that there exist constants $C > 0$ and $\omega < 0$ such that the following exponential decay rate holds :

$$E(t) \leq CE(0)\exp(2\omega t), \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.1.7}$$

The exponential stability of the system (3.1.1) has been established by Najafi et al [15] in the case of linear boundary feedback and by Komornik-Rao [10] in the case of nonlinear boundary feedback.

In this work, we will determine the optimal energy decay rate of the system (3.1.1). More precisely, denoting by $\omega(a)$ the supremum of ω satisfying (3.1.7), and by $\mu(a)$ the minimum of the real part of eigenvalues of $\mathcal{A}$, we will establish the relation $\mu(a) = \omega(a)$ for the coefficient a being of bounded variations. To this end, we will give the asymptotic expansion of the eigenvalues and prove that the system of eigenvectors of the operator $\mathcal{A}$ constitutes a Riesz basis in the energy space $\mathcal{H}$.

In section 2 we prove that the spectrum of system (3.1.1) is the union of the spectrum of systems :

$$\begin{cases} u_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1.8}$$

and

$$\begin{cases} v_{xx} - (\mu^2 + 2a\mu)v = 0, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Noting that the system (3.1.9) is well studied by Cox and Zuazua in [4]. In this work, we will apply a method used by Rao in [18] to the system (3.1.8). This approach consists in constructing, without any a priori ansatz, an explicit approximation of the characteristic equation of the underlying system. In this way, we find the asymptotic form of the eigenvalues of (3.1.1). In section 3, we construct the root system of the system (3.1.1) and we prove that root vectors of the operator $\mathcal{A}$ constitue a Riesz basis in $\mathcal{H}$, therefore we identify the optimal decay rate of energy $\omega(a)$ with the supremum of the real part of the eigenvalues of the system (3.1.1).

The method that is used in this work is adapted to the problem of indefinite damping :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2\varepsilon a u_t + \alpha(u - v) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v_{tt} - v_{xx} + 2\varepsilon b v_t + \alpha(v - u) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

where a, b are functions of indefinite sign and $\varepsilon > 0$ is a small parameter. In fact in the case $a = b$ the determination of the spectrum of (3.1.10) can be reduced to that one of the following system :

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \varphi_{tt} + 2a\lambda\varphi_t + 2\alpha\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1.11}$$

In the case where $\alpha = 0$, it was proved that the system (3.1.11) is exponentially uniformly stable for $\varepsilon > 0$ small enough if a is of bounded variation and is "more positive then negative" (see Freitas-Zuazua [6]). Recently, this result was improved to the system (3.1.11) with an arbitrary function $\alpha \in L^\infty(0,1)$ by Benaddi-Rao [2] using a new asymptotic expansion of eigenfunction which take into account the potential term $\alpha\varphi$.

In Liu et al [12] we can find a general result on the stability of nondissipative semigroups which is based on the perturbation theory (Kato [9]) and the characteristic condition of the uniform stability of semigroups (Huang [8], Prüss, [17]). It seems interesting to adapt their approach to the system (3.1.10) with $a \neq b$.

3.2 Asymptotic analysis of the spectrum of $\mathcal{A}$.

For any $U_1 = (u_1, z_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}$, $U_2 = (u_2, z_2, v_2, w_2) \in \mathcal{H}$, we define the inner product in the space $\mathcal{H}$ by setting :

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^1 u_{1x}\bar{u}_{2x} + z_1\bar{z}_2 + v_{1x}\bar{v}_{2x} + w_1\bar{w}_2 + \alpha(u_1 - v_1)(\bar{u}_2 - \bar{v}_2)dx, \tag{3.2.1}$$

and we consider the following eigenvalue problem

$$\begin{cases} \lambda^2 u - u_{xx} + 2a\lambda u + \alpha(u - v) = 0, \\ \lambda^2 v - v_{xx} + 2a\lambda v + \alpha(v - u) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

We first prove that the eigenvalues of (3.2.2) are the eigenvalues of one of the systems (3.1.8) or (3.1.9). More precisely, we have the following result :

Lemma 3.2.1 *Let $a \in L^\infty(0,1), \alpha \in L^\infty(0,1)$ and $\alpha \geq \alpha_0 > 0$. If λ is an eigenvalue of (3.2.2), then λ is an eigenvalue of (3.1.8) or (3.1.9).*

Proof- First, we prove that the system (3.2.2) is equivalent to the problem $u \in \mathcal{V}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\alpha}[\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda)]u \cdot [\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)]\varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{3.2.3}$$

Indeed, let $u \in \mathcal{V}$ be a solution of the problem (3.2.3). Setting :

$$\alpha(v - u) = (\lambda^2 + 2a\lambda)u - u_{xx} \in L^2(0,1), \tag{3.2.4}$$

and inserting (3.2.4) into (3.2.3) we have :

$$\int_0^1 (u - v) \cdot \left(\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)\right) \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{3.2.5}$$

Hence

$$\int_0^1 (u - v)\varphi_{xx} dx = \int_0^1 \left(\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha\right) \cdot (u - v)\varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{3.2.6}$$

Since $u \in H^2(0,1)$, it follows that :

$$u_{xx} - v_{xx} = (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)(u - v), \quad \text{in} \ \ \mathcal{D}'(0,1). \tag{3.2.7}$$

This, combined with (3.2.4), implies that

$$\lambda^2 v + 2a\lambda v - v_{xx} = \alpha(u - v), \quad \text{in} \ \ L^2(0,1). \tag{3.2.8}$$

Moreover, inserting (3.2.8) into (3.2.6) and integrating by parts, we obtain the boundary condition : $v(0) = v(1) = 0$.

Conversely, let $(u, v) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ be a solution of (3.2.2). Summarizing the equations of (3.2.2), we obtain that

$$\left(\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)\right)(u - v) = 0. \tag{3.2.9}$$

It follows that

$$\int_0^1 (u - v) \cdot \left(\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)\right) \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{3.2.10}$$

Substituting the term $(u-v)$ by the first equation of (3.2.2) we obtain :

$$\int_0^1 \frac{1}{\alpha}\big(\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda)\big)\, u \cdot \big(\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)\big)\, \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{3.2.11}$$

Now let λ be an eigenvalue of (3.2.2) and $u, v \in \mathcal{V}$ be the corresponding eigenfunctions. We set

$$z = \frac{1}{\alpha}\left[\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda)\right] u \in L^2(0,1). \tag{3.2.12}$$

If $z \equiv 0$, then u is a solution of (3.1.9) and λ is the corresponding eigenvalue.
If $z \not\equiv 0$ then, z solves the equation :

$$\int_0^1 z \cdot \big(\partial_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)\big)\, \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{3.2.13}$$

It follows that :

$$z_{xx} = (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha) z \in L^2(0,1). \tag{3.2.14}$$

This implies that $z \in H^2(0,1)$. Moreover, using (3.2.14) and integrating by parts in (3.2.13) we deduce that $z(0) = z(1) = 0$. Consequently λ is an eigenvalue of (3.1.8) and z is the corresponding eigenfunction. The proof is thus complete.

Proposition 3.2.1 *Set $\alpha \in L^\infty(0,1)$ and $0 \leq a_1 \leq a(x) \leq a_2 < \infty$. Then the complex part of the spectrum of (3.1.8) is symetric about the real axis and is contained in*

$$\mathcal{C} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \sqrt{\pi^2 + 2\alpha_0}; \quad -a_2 \leq Re\lambda \leq -a_1 \right\}. \tag{3.2.15}$$

A necessary condition for the existence of real eigenvalue is :

$$a_2 \geq \sqrt{\pi^2 + 2\alpha_0}. \tag{3.2.16}$$

In that case the real eigenvalues λ_n, are contained in the interval :

$$-a_2 - \sqrt{a_2^2 - \pi^2 - 2\alpha_0} \leq \lambda_n \leq -a_1 + \sqrt{a_2^2 - \pi^2 - 2\alpha_0}. \tag{3.2.17}$$

Proof- Let λ_n be an eigenvalue associated to the eigenfunction u_n. Then, we have

$$\begin{cases} u_{nxx} - (\lambda_n^2 + 2a\lambda_n + 2\alpha) u_n = 0, \\ u_n(0) = u_n(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

Multiplying (3.2.18) by u_n we obtain :

$$\lambda_n^2 \int_0^1 |u_n|^2\, dx + 2\lambda_n \int_0^1 a\,|u_n|^2\, dx + \int_0^1 |u_{nx}|^2\, dx + 2\int_0^1 \alpha |u_n|^2\, dx = 0. \quad (3.2.19)$$

Hence

$$\lambda_n = \frac{-\int_0^1 a\,|u_n|^2\, dx \pm \sqrt{(\int_0^1 a\,|u_n|^2)^2 dx - \int_0^1 |u_n|^2\, dx(\int_0^1 |u_{nx}|^2 + 2\alpha \int_0^1 |u_n|^2\, dx)}}{\int_0^1 |u_n|^2\, dx}. \quad (3.2.20)$$

If λ_n is a complex eigenvalue then we have :

$$Re\lambda_n = -\frac{\int_0^1 a\,|u_n|^2\, dx}{\int_0^1 |u_n|^2\, dx} \quad \text{and} \quad -a_2 \le Re\lambda_n \le -a_1. \quad (3.2.21)$$

Furthermore we have

$$(Re\lambda_n)^2 + (Im\lambda_n)^2 = \frac{\int_0^1 |u_{nx}|^2 + 2\int_0^1 \alpha\,|u_n|^2\, dx}{\int_0^1 |u_n|^2\, dx}. \quad (3.2.22)$$

By Poincaré's inequality, we have :

$$|\lambda_n|^2 = (Re\lambda_n)^2 + (Im\lambda_n)^2 \ge \pi^2 + 2\alpha_0. \quad (3.2.23)$$

If λ_n is a real eigenvalue, we have

$$0 \le \left(\frac{\int_0^1 a\,|u_n|^2}{\int_0^1 |u_n|^2\, dx}\right)^2 - \frac{\int_0^1 |u_{nx}|^2\, dx}{\int_0^1 |u_n|^2\, dx} - 2\alpha \le a_2^2 - \pi^2 - 2\alpha_0. \quad (3.2.24)$$

This gives (3.2.16). The proof is complete.

Now, we carry out the study of the high frequencies of problem (3.2.18). We will use a method used in Rao [18]. We denote by BV(0,1) the set of functions of bounded variations. We have the following result :

Proposition 3.2.2 *Let $a \in BV(0,1)$. Then for all $\lambda \in \mathcal{C}$, sufficienly large, we have :*

$$\left| y(x,\lambda) - \frac{\sinh(\lambda x + \int_0^x a(s)ds)}{\lambda} \right| \le \frac{C_0}{|\lambda|^2}, \quad (3.2.25)$$

$$\left| y_x(x,\lambda) - \cosh(\lambda x + \int_0^x a(s)ds) \right| \le \frac{C_0}{|\lambda|} \quad (3.2.26)$$

where $C_0 > 0$ is a constant independent of λ.

Proof- We consider the following initial value problem

$$\begin{cases} y_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 0, y_x(0,\lambda) = 1. \end{cases} \tag{3.2.27}$$

By the theory of ordinary differential equations (see Naimark [14]), we know that $y(x,\lambda)$ is analytic with respect to λ. Furthermore λ_n is an eigenvalue of (3.1.9) if and only if λ_n is a root of $y(1,\lambda) = 0$, and its algebraic multiplicity is the nullity order of λ_n as a zero of the function $\lambda \longrightarrow y(1,\lambda)$.

Let $z(x,\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\sinh \lambda x$ be the solution of the undamped initial value problem ($a \equiv 0$). By the variation of constants formula we have :

$$y(x,\lambda) = z + \int_0^x 2a(s)\lambda y(s) z(x-s)ds. \tag{3.2.28}$$

Hence

$$y_x(x,\lambda) = z_x + \int_0^x 2a(s)\lambda y(s) z_x(x-s)ds. \tag{3.2.29}$$

Since $|\sinh \lambda x| \leq \cosh |a_2| := C_1$ and $|\cosh \lambda x| \leq C_1$, thanks to Gronwall's inequality, we deduce that

$$|y(x,\lambda)| \leq \frac{C_1}{|\lambda|} \exp\left(2C_1 \int_0^1 |a(s)|ds\right) := \frac{C_2}{|\lambda|}. \tag{3.2.30}$$

Inserting (3.2.30) into (3.2.29) we conclude that

$$|y_x(x,\lambda)| \leq C_1 + C_1C_2 \int_0^1 2|a(s)|ds := C_3. \tag{3.2.31}$$

Now we construct an approximate solution of problem (3.2.27). Using an idea of Rao [18], we consider the case where a is a constant. In that case, the characteristic equation of (3.2.27) is given by

$$\tau^2 - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha) = 0.$$

Thus we have :

$$\tau_\pm = \pm\sqrt{\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha} = \pm\lambda\left(1 + \frac{a}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right). \tag{3.2.32}$$

By neglecting the high order term, we set

$$\theta(x) = \lambda x + \int_0^x a(s)ds, \qquad v(x) = \frac{1}{\lambda + a(0)}\sinh\theta(x). \tag{3.2.33}$$

Furthermore, since the functions $\sinh\theta(x)$ and $\cosh\theta(x)$ are uniformily bounded for $\lambda \in \mathcal{C}$, we deduce that there exists $C_4 > 0$ independent of λ, such that

$$|v| \le \frac{C_4}{|\lambda|} \quad \text{and} \quad |v_x| \le C_4. \tag{3.2.34}$$

Let us consider the following problem :

$$\begin{cases} v_{xx} - (\lambda^2 + 2a\lambda + 2\alpha)v = f, \\ v(0) = 0, \quad v_x(0) = 1. \end{cases} \tag{3.2.35}$$

where

$$f = \frac{1}{\lambda + a(0)}\Big((a^2 - 2\alpha)\sinh\theta(x) + a'\cosh\theta(x)\Big). \tag{3.2.36}$$

By the variation of constants formula we have

$$\begin{aligned} v(x) - y(x) &= \int_0^x f(s)y(x-s)ds, \\ v_x(x) - y_x(x) &= \int_0^x f(s)y_x(x-s)ds. \end{aligned}$$

Thanks to (3.2.30), (3.2.31) and (3.2.36) we obtain that

$$|v(x) - y(x)| \le \frac{C_1 \cdot C_2}{|\lambda||\lambda + a(0)|}\int_0^1 \big(|a^2 - 2\alpha| + |a'|\big)\, dx, \tag{3.2.37}$$

$$|v_x(x) - y_x(x)| \le \frac{C_1 \cdot C_3}{|\lambda + a(0)|}\int_0^1 \big(|a^2 - 2\alpha| + |a'|\big)\, dx. \tag{3.2.38}$$

Consequently, we obtain

$$\left|y(x) - \frac{\sinh(\lambda x + \int_0^x a(s)ds)}{\lambda + a(0)}\right| \le \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (T_a + \|a\|_\infty^2 + 2\alpha)}{|\lambda||\lambda + a(0)|}, \tag{3.2.39}$$

$$\left|y_x(x) - \frac{\lambda + a(x)}{\lambda + a(0)}\cosh(\lambda x + \int_0^x a(s)ds)\right| \le \frac{C_1 \cdot C_3 \cdot (T_a + \|a\|_\infty^2 + 2\alpha)}{|\lambda + a(0)|}, \tag{3.2.40}$$

where T_a denotes the total variations of a. Since for λ large enough we have :

$$\frac{\lambda + a(x)}{\lambda + a(0)} = 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right), \tag{3.2.41}$$

$$\frac{1}{\lambda + a(0)} = \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right). \tag{3.2.42}$$

We deduce that there exists a constant $C_0 > 0$ such that (3.2.25)-(3.2.26) hold. This achieves the proof.

Let N be the smallest integer greater than $\dfrac{4C_0}{\pi}$. we define the sets

$$\Pi_N \leq \{z; |z + a_0| \leq N\pi + \frac{\pi}{2}\}, \tag{3.2.43}$$

$$\Pi_n = \{z; |z + a_0 \pm in\pi| = \frac{2C_0}{n\pi}\}, \quad \text{for} \quad n > N \tag{3.2.44}$$

where we have put :

$$a_0 = \int_0^1 a(x)dx.$$

By Lemma 5.2 in Cox-Zuazua [4], we have $|\sinh(\lambda + a_0)| > \dfrac{C_0}{|\lambda|}$ for all $\lambda \in \Pi_n$.

Theorem 3.2.1 *Let $a \in BV(0,1)$. There exists a finite number of eigenvalues $\lambda_n \in \Pi_N$, and one simple eigenvalue in the region enclosed by Π_n for each $n > N$.*

Proof- Let $n > N$. By (3.2.25) we have

$$\left| y(1,\lambda) - \frac{\sinh(\lambda + a_0)}{\lambda} \right| \leq \frac{C_0}{|\lambda|^2} < \left| \frac{\sinh(\lambda + a_0)}{\lambda} \right|, \quad \forall \lambda \in \Pi_n. \tag{3.2.45}$$

By Rouché's theorem, $y(1,\lambda)$ has the same number of roots as the function $\lambda \longrightarrow \dfrac{\sinh(\lambda + a_0)}{\lambda}$ in the region enclosed by Π_n. In particular, we have

$$\lambda_{\pm n} = -a_0 \pm in\pi + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2.46}$$

As the spectrum of (3.1.8) is discret and Π_N is compact, there exists at most a finite number of eigenvalues $\lambda_n \in \Pi_N$. This achieves the proof.

Theorem 3.2.2 *Let $a \in BV(0,1)$. Setting*

$$\xi(x) = \int_0^x a(s)dx - xa_0, \tag{3.2.47}$$

we have

$$\lambda_{\pm n} \cdot u_{\pm n}(x) = \sinh(\xi(x) \pm in\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.2.48}$$

$$u_{\pm nx}(x) = \cosh(\xi(x) \pm in\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2.49}$$

Proof- Using (3.2.46) and (3.2.25) we obtain :

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm n}\cdot u_{\pm n}(x) &= \lambda_{\pm n}y(x,\lambda_{\pm n})\\ &= \sinh\left(\xi(x)\pm in\pi x\right)+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Similarly, using (3.2.26) and (3.2.46) we get :

$$\begin{aligned}u_{\pm nx}(x) &= y_x(x,\lambda_{\pm n})\\ &= \cosh\left(\xi(x)\pm in\pi x\right)+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

The proof is complete.

Now we consider the eigenvalue problem (3.1.9) defined by

$$\begin{cases} v_{mxx}-(\mu_m^2+2a\mu_m)v_m=0,\\ v_m(0)=v_m(1)=0.\end{cases}\tag{3.2.50}$$

By applying the same method, we obtain the following developement for all $m>M$ where M is an integer depending only on $a(x)$:

$$\mu_{\pm m}=-a_0\pm im\pi+O\left(\frac{1}{m}\right),\tag{3.2.51}$$

$$\mu_{\pm m}v_{\pm m}(x)=\sinh(\xi(x)\pm im\pi x)+O\left(\frac{1}{m}\right),\tag{3.2.52}$$

$$v_{\pm mx}(x)=\cosh(\xi(x)\pm im\pi x)+O\left(\frac{1}{m}\right).\tag{3.2.53}$$

We notice that for $|n|>\sup(N,M)$, there exist, in Π_n, two eigenvalues λ_n and μ_n of algebraic multiplicity 1. We will prove that these two eigenvalues are distinct :

Proposition 3.2.3 *Let n be a sufficiently large integer. We have*

$$\lambda_n\neq\mu_n.\tag{3.2.54}$$

Proof- Assume that $\lambda_n=\mu_n$. Let u_n and v_n be eigenfunctions associated to λ_n and μ_n. We have

$$\begin{cases} v_{nxx}-(\mu_n^2+2a\mu_n)v_n=0,\\ v_n(0)=v_n(1)=0.\end{cases}\tag{3.2.55}$$

Multiplying (3.2.55) with u_n and integrating by parts, we obtain that

$$\int_0^1 v_n \cdot [\partial_{xx} - (\lambda_n^2 + 2a\lambda_n + 2\alpha)]u_n dx + 2\int_0^1 \alpha u_n \cdot v_n dx = 0. \tag{3.2.56}$$

Since u_n is a solution of (3.1.8), we have

$$\int_0^1 \alpha u_n \cdot v_n dx = 0. \tag{3.2.57}$$

On the other hand by (3.2.48) and (3.2.52) we have

$$\int_0^1 \alpha u_n \cdot v_n dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 \alpha \left|\sinh(\xi(x) \pm in\pi x)\right|^2 dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0. \tag{3.2.58}$$

It follows that

$$\int_0^1 \alpha \left|\sinh(\xi(x) \pm in\pi x)\right|^2 dx = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2.59}$$

A straight forward computation shows that

$$\begin{aligned}\int_0^1 \alpha \left|\sinh(\xi(x) \pm in\pi x)\right|^2 dx &= \int_0^1 \alpha \left(\sinh^2 \xi(x) + \sin^2(n\pi x)\right) dx \\ &> \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha dx > \frac{\alpha_0}{2} > 0. \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

This leads to a contradiction. Thus, we have proved that for each $n > \sup(N, M)$, The region enclosed by Π_n contains two distincts eigenvalues μ_n, λ_n.

3.3 System of root vectors.

Let λ_n and μ_m be two eigenvalues of the operator $\mathcal{A}$. We know that their algebraic multiplicity is equal to one for $|n| > N$ and $|m| > M$. We index the eigenvalues λ_n and μ_m ($|n| > N, |m| > M$) of high frequencies following the asymptotic expansions (3.2.46) and (3.2.51). We denote by $\tilde{\lambda}_k$ for $1 \leq k \leq K$ and $\tilde{\mu}_l$ for $1 \leq l \leq L$ the eigenvalues of low frequencies. Hence we write the spectrum of $\mathcal{A}$:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_n : |n| > N\} \cup \{\tilde{\lambda}_k : 1 \leq k \leq K\} \cup \{\mu_m : |m| > M\} \cup \{\tilde{\mu}_l : 1 \leq l \leq L\}.$$

Let λ_n be an eigenvalue of (3.1.8) with the corresponding eigenfunction u_n and μ_m be an eigenvalue of (3.1.9) with the corresponding eigenfunction v_n. Then, λ_n is an eigenvalue of $\mathcal{A}$ associated to the eigenvector $\phi_n^- = (u_n, \lambda_n u_n, -u_n, -\lambda_n u_n)$, and μ_m is an eigenvalue of $\mathcal{A}$ associated to the eigenfunction $\phi_m^+ = (v_n, \mu_m v_m, v_m, \mu_m v_m)$. We denote by s_k the algebraic multiplicity of $\tilde{\lambda}_k$ and by $\{\tilde{\phi}_{k,j}^-\}_0^{s_k-1}$ the associated Jordan chain. Respectively, we denote by q_l the algebraic multiplicity of $\tilde{\mu}_l$ and by $\{\tilde{\phi}_{l,j}^+\}_0^{q_l-1}$ the associated Jordan chain. The root vectors of $\mathcal{A}$ are given by

$$\{\tilde{\phi}_{k,j}^- : 0 \le j \le s_k - 1; 1 \le k \le K\} \cup \{\phi_n^- : |n| > N\}$$

$$\cup\{\tilde{\phi}_{l,j}^+ : 0 \le j \le q_l - 1; 1 \le l \le L\} \cup \{\phi_m^+ : |m| > M\}. \tag{3.3.1}$$

Our aim is to prove that (3.3.1) is a Riesz basis in the energy space $\mathcal{H}$ by using the following theorem :

Theorem 3.3.1 *(Rao [18]) : Let $\{\phi_n\}_0^n$ be a Riesz basis in the Hilbert space X, and let $\{g_n\}_{n_0}^\infty$ be a $\omega-$linearly independent system. Assume that*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \|\phi_n - g_n\|_X^2 < \infty. \tag{3.3.2}$$

Then $\{g_n\}_{n_0}^\infty$ is a Riesz basis in the subspace X_0 spanned by itself in X.

We first prove the following preliminary result :

Proposition 3.3.1 *The system of root vectors (3.3.1) of $\mathcal{A}$ is complete and ω-linearly independent in the energy space $\mathcal{H}$.*

Proof- Putting :

$$L = i\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \partial_{xx} - \alpha I & 0 & \alpha I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \alpha I & 0 & \partial_{xx} - \alpha I & 0 \end{pmatrix}, \quad T = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.3}$$

Then we have $i\mathcal{A} = L+T$. A straightforward computation shows that L is selfadjoint in $\mathcal{H}$. Since T is bounded in the energy space $\mathcal{H}$, then

$$\rho(L^{-1}TL^{-1}) \le \|L^{-1}\|\|T\|\rho(L^{-1}) \tag{3.3.4}$$

where ρ denotes the order of a linear bounded operator (see [7, p. 27] for definition). On the other hand, L^{-1} is compact, from (3.2.46) and (3.2.51) we deduce that the asymptotic form of the eigenvalues of L^{-1} :

$$\lambda_n(L^{-1}) = \frac{i}{\pm in\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{3.3.5}$$

Then, the order ρ of L^{-1} is given by (Gohberg-Krein [7, p. 256]) :

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\lambda_n(L^{-1})}} = 1. \tag{3.3.6}$$

Hence by Theorem V 8.1 (Gohberg-Krein [7, p. 257]), we deduce that the system (3.3.1) is complete in the energy space $\mathcal{H}$.

On the other hand, a straightforward computation shows that $\mathcal{A}^{-1}$ is compact in $\mathcal{H}$. Since the operator $i\mathcal{A}^{-1}$ has no real eigenvalues, by Theorem I.5.2 (Gohberg-Krein [7, p. 23]), all $\frac{i}{\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ is normal point of $i\mathcal{A}^{-1}$. Let λ_0 be a point of the operator $i\mathcal{A}$. Following Thorem I 2.1 Gohberg-Krein [7, p. 9], the projection operator correspoding :

$$P_{\lambda_0} = -\frac{1}{2i\pi}\int_{|\ \mu-\lambda_0|=\delta} (i\mathcal{A}^{-1} - \mu I)^{-1} d\mu, \tag{3.3.7}$$

is of finite-dimension and the range of P_{λ_0} is the subspace ker $\left(i\mathcal{A}^{-1} - \lambda_0 I\right)^{\nu_0}$, where $\nu_0 \geq 1$ is the algebraic multiplicity of λ_0. Now we consider a serie :

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=0}^{s_k-1} \left|c_{k,j}^-\right|^2 + \sum_{|n|>N} \left|c_n^-\right|^2 + \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=0}^{q_l-1} \left|c_{l,j}^+\right|^2 + \sum_{|m|>M} \left|c_m^+\right|^2 < \infty \tag{3.3.8}$$

such that

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=0}^{s_k-1} c_{k,j}^-\tilde{\phi}_{k,j}^- + \sum_{|n|>N} c_n^-\phi_n^- + \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=0}^{q_l-1} c_{l,j}^+\tilde{\phi}_{l,j}^+ + \sum_{|m|>M} c_m^+\phi_m^+ = 0. \tag{3.3.9}$$

Applying the projector $P_{\tilde{\mu}_l}, 1 \leq l \leq L$ to (3.3.9), we obtain that

$$\sum_{j=0}^{q_l-1} c_{l,j}^+\tilde{\phi}_{l,j}^+ = 0 \qquad \text{for } 1 \leq l \leq L. \tag{3.3.10}$$

Since $\{\tilde{\phi}_{l,j}^+\}_0^{q_l-1}$ is a basis of $\ker(\mathcal{A} - \tilde{\mu}_l I)^{q_l-1}$ for all $1 \leq l \leq L$, it follows that

$$c_{l,j}^+ = 0, \quad 0 \leq j \leq q_l - 1, \quad 1 \leq l \leq L. \tag{3.3.11}$$

On the other hand, the algebraic multiplicity of the eigenvalue μ_m is equal to 1 for $m > M$. Applying P_{μ_m} for $m > M$ to (3.3.9) we have :

$$c_m^+ = 0 \quad \text{for all} \quad |m| > M. \tag{3.3.12}$$

Similarly, applying $P_{\tilde{\lambda}_n}$ for $1 \leq k \leq K$ and P_{λ_n} for $|n| > N$ to (3.3.9) we get that

$$c_{k,j}^- = 0, \quad \text{for } 0 \leq j \leq s_k - 1, \quad 1 \leq k \leq K \quad \text{and } c_n^- = 0 \quad \text{for all} \quad |n| > N. \tag{3.3.13}$$

This achieves the proof.

Now we consider the subspace $\mathcal{L}$ of $X = L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ defined by

$$\mathcal{L} = \left\{ (f, g, h, k) \in X \text{ such that } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 0 \right\} \tag{3.3.14}$$

and we define the linear bounded operator from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{L}$ by

$$\mathcal{F}(u, z, v, w) = (u_x, z, v_x, w) \qquad \forall (u, z, v, w) \in \mathcal{H}. \tag{3.3.15}$$

Proposition 3.3.2 *The linear operator $\mathcal{F}$ defined by (3.3.14)-(3.3.15) is an isomorphism from $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{L}$.*

Proof- Let $(u, z, v, w) \in \mathcal{H}$, then

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u, z, v, w)\|_X^2 &= \int_0^1 |u_x|^2 + |z|^2 + |v_x|^2 + |w|^2 dx \\ &= \|u\|^2_{H_0^1(0,1)} + \|z\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{H_0^1(0,1)} + \|w\|^2_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Hence $\mathcal{F}$ is a linear bounded operator from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{L}$. Let $(f, g, h, k) \in \mathcal{L}$. We can verify that

$$u = \int_0^x f(x)dx \in H_0^1(0,1), \qquad z = g \in L^2(0,1), \tag{3.3.16}$$

$$v = \int_0^x h(x)dx \in H_0^1(0,1), \qquad w = k \in L^2(0,1), \tag{3.3.17}$$

satisfy the equation $\mathcal{F}(u, z, v, w) = (f, g, h, k)$. We conclude, by Banach's theorem that $\mathcal{F}$ is an isomorphism from $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{L}$. The proof is complete.

Let $\xi(x) \in L^\infty(0,1)$, and set $\Theta_n = \xi(x) + in\pi x$. We have the following system

$$\Phi_n^\pm = (\cosh \Theta_n, \sinh \Theta_n, \pm \cosh \Theta_n, \pm \sinh \Theta_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3.18}$$

Proposition 3.3.3 *For all $\xi(x) \in L^\infty(0,1)$, the system (3.3.18) is a Riesz basis in X.*

Proof- For $n \in \mathbb{Z}$, we set :

$$\begin{aligned} e_n^\pm &= (\cos n\pi x, \sin n\pi x, \pm\cos n\pi x, \pm \sin n\pi x), \\ M &= \begin{pmatrix} \cosh\xi(x) & \sinh\xi(x) & 0 & 0 \\ i\cosh\xi(x) & i\sinh\xi(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\xi(x) & \sinh\xi(x) \\ 0 & 0 & i\cosh\xi(x) & i\sinh\xi(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (3.3.19)$$

Then we have $\Phi_n^\pm = e_n^\pm \cdot M$. Since the transformation matrix has a bounded inverse in X and since the system $\{e_n^\pm\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is equivalent to an orthonormal basis in X, it follows that the system (3.3.18) is a Riesz basis in X. The proof is complete.

Theorem 3.3.2 *Assume that $a \in BV(0,1)$. Then the root system (3.3.1) forms a Riesz basis in the energy space $\mathcal{H}$.*

Proof- We use an idea of Rao in [18]. Since operator $\mathcal{F}$ is an isomorphism from $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{L}$, it is sufficient to prove that the syste

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}\tilde{\phi}^-_{j,k} : 0 \le j \le s_k - 1, 1 \le k \le K\} \cup \{\mathcal{F}\phi_n^- : |n| > N\} \\ \cup \{\mathcal{F}\tilde{\phi}^+_{j,l} : 0 \le j \le q_l - 1, 1 \le l \le L\} \cup \{\mathcal{F}\phi^+ : |m| > M\} \end{aligned} \qquad (3.3.20)$$

is a Riesz basis in $\mathcal{L}$. We distinguish the three cases :

Case i : $\sum_{k=1}^K s_k + \sum_{l=1}^L q_l = M + N$. From (3.2.48), (3.2.49), (3.2.52) and (3.2.53) it follows that :

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{s_k-1} \|\mathcal{F}\tilde{\phi}^-_{j,k} - \tilde{\Phi}^-_{j,k}\|_X^2 + \sum_{l=0}^{L}\sum_{j=0}^{q_l-1} \|\mathcal{F}\tilde{\phi}^+_{j,l} - \tilde{\Phi}^+_{j,l}\|_X^2 \qquad (3.3.21)$$

$$+ \sum_{|n|>N} \|\mathcal{F}\phi_n^- - \Phi_n^-\|_X^2 + \sum_{|m|>M} \|\mathcal{F}\phi_m^+ - \Phi_m^+\|_X^2 < \infty. \qquad (3.3.22)$$

Thanks to Bari's Theorem, we show that the system (3.3.20) is a Riesz basis in X.

Case ii : If $\sum_{k=1}^K s_k + \sum_{l=1}^L q_l > M + N$. From Bari's theorem, we can find a subsystem of (3.3.20) which is quadratically close to the Riesz basis $\{\Phi_n^\pm\}_{n\in\mathbb{Z}}$, and would be also a Riesz basis in X. This contradicts the linear independence of the system (3.3.20).

Case iii : If $\sum_{k=1}^{K} s_k + \sum_{l=1}^{L} q_l \leq M+N$. From Proposition 3.1, the system(3.3.20) is complete and ω-linearly independent in $\mathcal{L}$. Since the system (3.3.20) is quadratically close to a subsystem of the Riesz basis $\{\Phi_n^{\pm}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, applying Theorem 3.1, we conclude that system (3.3.20) is a Riesz basis of the subspace spanned by itself. But the system (3.3.20) is complete in $\mathcal{L}$, hence forms a Riesz basis in the whole space $\mathcal{L}$. The proof is thus complete.

Theorem 3.3.3 *If $a \in BV(0,1)$, then have $\mu(a) = \omega(a)$.*

Proof- The proof is similar to the one used in [2], [4] and [13]. For the sake of the complement we give a brief outline of the proof.

We know that $\mu(a) \leq \omega(a)$. We will establish the reverse inequality. We expand the initial data into :

$$(u_0, z_0, v_0, w_0) = \sum_{n=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{s_n-1} \beta_{n,j}^{-} \phi_{n,j}^{-} + \sum_{m=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{q_m-1} \beta_{m,j}^{+} \phi_{m,j}^{+}. \tag{3.3.23}$$

It follow that

$$\|(u, u_t, v, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{s_n-1} \beta_{n,j}^{-} S(t) \phi_{n,j}^{-} + \sum_{m=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{q_m-1} \beta_{m,j}^{+} S(t) \phi_{m,j}^{+} \right\|^2 \tag{3.3.24}$$

where $S(t)$ is the C_0-semigroup generated by the system (3.1.1). By the property of Riesz basis there exist positive constants C_1, C_2 such that

$$C_1 \left(\sum_{n=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{s_n-1} |\beta_{n,j}^{-}|^2 + \sum_{m=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{q_m-1} |\beta_{m,j}^{+}|^2 \right) \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_2 \left(\sum_{n=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{s_n-1} |\beta_{n,j}^{-}|^2 + \sum_{m=0}^{\pm\infty} \sum_{j=0}^{q_m-1} |\beta_{m,j}^{+}|^2 \right).$$

for any $U_0 = (u_0, z_0, v_0, w_0) \in \mathcal{H}$. Then a straightforward computation gives that

$$\begin{aligned}\|(u, u_t, v, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C_2 \Bigg(\sum_{n=0}^{\pm\infty} e^{2\mu(a)t} \sum_{j=0}^{s_n-1} |\beta_{n,j}^{-}|^2 \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{t^{(j-k)}}{(j-k)!} \right)^2 \\ &+ \sum_{n=0}^{\pm\infty} e^{2\mu(a)t} \sum_{j=0}^{q_n-1} |\beta_{n,j}^{+}|^2 \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{t^{(j-k)}}{(j-k)!} \right)^2 \Bigg).\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Recalling that at most $M+N$ eigenvalues may be of algebraic multiplicity greater than one, we conclude that there exists a positive constant C_3 such that :

$$\|(u, u_t, v, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_3 C_2 e^{2\mu(a)t} \left(\sum_{n=0}^{\pm\infty} \sum_{j=o}^{s_n-1} |\beta_{n,j}^{-}|^2 + \sum_{m=0}^{\pm\infty} \sum_{j=o}^{q_m-1} |\beta_{m,j}^{+}|^2 \right) \left(1 + t^{2(m+N)}\right),$$

$$\leq \frac{C_3C_2}{C_1}e^{2\mu(a)t}\left(1+t^{2(M+N)}\right)\|(u_0,u_{0t},v_0,v_{0t})\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad (3.3.26)$$

We have established our main result.

Bibliographie

[1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves form the boundary*, SIAM. J. Control Optim. 30 (1992), 1024-1065.

[2] A. Benaddi and B. Rao, *Energy decay rate of wave equations with indefinite damping*, J. Diff. Equa. 161 (2000) 337-357.

[3] G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich and S. Sun, *Exponential decay of energy of evolution equation with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math, 51 (1991), pp. 266-301.

[4] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which energy decay in a damped string*, Commun. in PDE 19 (1994), 213-244.

[5] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which energy decay in a string damped at one end*, Indiana Univ. Math. J, 44 (95), 545-573.

[6] P. Freitas and E. Zuazua, *Stability results for wave equation with indefinite damping,* J. Diff. Equa. 132 (1996) 320-335.

[7] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators,* AMS Providence. 1969.

[8] F. L. Huang, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space*, Ann. of Diff. Eqs, 1 (1985), pp. 43-56.

[9] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] V. Komornik and B. Rao, *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations,* Asymptotic Analysis, 14 (1997), 339-359.

[11] V. Komornik and E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation,* J. Math. Pures et Appl. 69 (1) (1990), 33-55.

[12] K. Liu, Z. Liu, B. Rao, *On an abstract linear elastic system with indefinite damping,* ESAIM : Proc., Vol 8, 2000, 107-117.

[13] O. Morgül, F. Conrad and B.Rao, *On the stabilization of a cable with a tip mass*, IEEE Transactions on automatic control, 39 (1994), 2140-2145.

[14] M. A. Naimark, *Linear differential operators*, vol.I, Ungar, New York, 1967.

[15] M. Najafi, G. R. Sarhangi and H. Wang, *The study of stability of coupled wave equations under various end conditions*, Proceedings of 31st Conference on decision and control, Tucson, Arizona, 1992, 374-379.

[16] A. Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial equations,* Spinger Verlag, New York, 1983.

[17] J. Prüss, *On the spectrum of* C_0*-semigroup,* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), pp. 847-857.

[18] B. Rao, *Optimal energy decay rate in a damped Rayleigh Beam,* Discrete and continuous dynamical systems, 4 (1998), 721-734.

Chapitre 4

Stabilisation des équations des ondes couplées avec des contrôles non dissipatifs

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la stabilisation d'un système des équations des ondes couplées en présence des contrôles non dissipatifs :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2a\varepsilon u_t + \alpha(u-v) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{tt} - v_{xx} + 2a\varepsilon v_t + \alpha(v-u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(0,x) = z_0(x), & \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(0,x) = w_0(x), & \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in L^\infty(0,1)$.

Dans l'espace de Hilbert : $\mathcal{H} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ on définit l'opérateur linéaire non borné $\mathcal{A}^\varepsilon$ par :

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \partial_{xx} - \alpha & -2a\varepsilon & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \partial_{xx} - \alpha & -2a\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{4.1.2}$$

$$D(\mathcal{A}^\varepsilon) = \mathcal{V} \times H_0^1(0,1) \times \mathcal{V} \times H_0^1(0,1), \tag{4.1.3}$$

où on a posé : $\mathcal{V} = H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$.

Posant $\phi = (u, u_t, v, v_t)^\top$, on transforme le système (4.1.1) en une équation d'evolution :

$$\phi_t = \mathcal{A}^\varepsilon \phi, \qquad \phi(0) = \phi_0. \tag{4.1.4}$$

Dans le cas où a est une fonction positive sur (0,1), il est prouvé dans le Chapitre 3, que l'énergie du système décoît exponentiellement vers zéro quand t tend vers l'infini. Par ailleurs, si a est négative l'énergie du système croît vers l'infini.

On s'intéresse dans ce chapitre au cas où a est de signe indéfini. Plus précisément en s'inspirant du travail de Chen et al [3], nous considérons le cas où a est une fonction "plus positive que négative". La stabilisation du système (4.1.1) devient plus délicate. Dans le cas où $\alpha = 0$ le système (4.1.1) n'est plus couplé, ce cas a été étudié par Freitas et Zuazua dans [5]. Ce résultat a été généralisé par Benaddi et Rao dans [1]. Une condition nécessaire prouvée par Freitas dans [4] est que : si v_n est un vecteur propre de l'opérateur $(\partial_{xx} - b)$, alors pour ε assez petit la condition suivante

$$(C) \qquad I_n = \int_0^1 a(x) v_n^2(x)dx \geq c_0 > 0, \quad \forall n \geq 1, \tag{4.1.5}$$

est nécessaire pour la stabilisation du système :

$$\begin{cases} u_{tt} + \varepsilon a u_t = u_{xx} + bu, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Dans ce chapitre nous montrons que le système (4.1.1) est exponentiellement stable si a est une fonction de variations bornées et si α est une constante positive pour ε assez petit. La preuve est basée essentiellement sur deux étapes. La première est de découpler le système (4.1.1). La seconde étape consiste a déterminer explicitement la base orthonormale équivalente à la famille des vecteurs propres associés au système (4.1.1).

Dans le paragraphe 2 nous utiliserons la méthode du tir développée par Rao dans [11] pour établir les développements asymptotique des valeurs propres des systèmes découplés. Cette approche permet de calculer explicitement les constantes qui apparaissent dans les approximations des fonctions propres du système (4.1.1).

Le paragraphe 3 sera consacré à la construction de la base de Riesz formée des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ qui engendre le semi-groupe de contractions associé au système (4.1.1). Puis nous montrons que l'énergie décroît exponentiellement vers zéro quand $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

4.2 Hautes fréquences

Nous considérons le problème de valeurs propres associé au système (4.1.1) :

$$\begin{cases} \lambda^2 u - u_{xx} + 2a\varepsilon\lambda u + \alpha(u-v) = 0, \\ \lambda^2 v - v_{xx} + 2a\varepsilon\lambda v + \alpha(v-u) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

D'après le Lemme 3.2.1 du Chapitre 3 nous savons que λ_n est une valeur propre de (4.2.1) si et seulement si λ_n est une valeur propre du problème :

$$\begin{cases} u_{xx} - (\lambda^2 + 2\varepsilon a(x)\lambda + 2\alpha)u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

ou du problème :

$$\begin{cases} u_{xx} - (\lambda^2 + 2\varepsilon a(x)\lambda)u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Pour faciliter la lecture de cette partie, nous rappelons quelques résultats démontrés dans le Chapitre 2.

Soit $\mu_{\pm n}$ défini par :

$$\sqrt{\mu_{\pm n}^2 + 2\alpha} + \varepsilon a_0 = \pm i n\pi, \quad \text{où} \quad a_0 = \int_0^1 a(x)dx, \qquad \text{et} \quad \Re e \mu_{\pm n} < 0. \tag{4.2.4}$$

On pose pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} G_{\pm n} &= \left\{ \lambda \ / \ |\lambda - \mu_{\pm n}| < \frac{\varepsilon}{n} \right\}, \\ \varepsilon < \varepsilon_1 &:= \frac{\pi^2}{30\left(1 + C_1 + \|a\|_\infty + \sqrt{\pi^2 + 2\alpha}\right)} < 1, \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

où $C_1 > 0$ est une constante dépendant de a, α et la première valeur propre de l'opérateur $(\partial_{xx} - 2\alpha)$. Nous choisissons alors $0 < Arg\sqrt{\lambda + 2\alpha} < 2\pi$, pour $\lambda \in G_n$ et $-2\pi < Arg\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha} < 0$, pour $\lambda \in G_{-n}$ telle que la fonction $\lambda \longrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}$ soit analytique dans chaque région $G_{\pm n}$ et que $\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha} + \varepsilon a(0)$ est non nul dans $G_{\pm n}$ pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Sous les hypothèses : $a \in L^\infty(0,1)$ et α est une constante positive, nous avons montré dans le Lemme 2.2.1 du Chapitre 2, qu' il existe des constantes C_2 et C_3 dépendant uniquement de $\|a\|_\infty$ et α telles que, pour tout $n \geq 1$, $\lambda \in G_{\pm n}$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left| \Re\mathrm{e} \left(\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha} + \varepsilon \int_0^x a(s)ds \right) \right| &< 3\varepsilon C_3 < 1, && (4.2.6)\\
\left| \Re\mathrm{e} \sqrt{\lambda^2 + 2\alpha} \right| &< 2\varepsilon C_3 < 1, && (4.2.7)\\
\frac{|\lambda|}{\sqrt{|\lambda^2 + 2\alpha|}} &\leq \frac{C_3}{2}. && (4.2.8)
\end{aligned}$$

Soit maintenant la région $\Gamma_{\pm n}$ définie par :

$$\Gamma_{\pm n} = \{\lambda \ / \ |\lambda - \mu_{\pm n}| \leq \varepsilon r_n\} \quad \text{avec} \quad r_n := \frac{2C_0}{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha}}, \tag{4.2.9}$$

pour tout $n \geq 1, 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ où $C_0 > 0$ dépendant uniquement de a et α. D'après (2.2.25) du Chapitre 2 nous savons que

$$\Gamma_{\pm n} \subset G_{\pm n}, \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon < \varepsilon_2 = \min \left\{ \varepsilon_1, \frac{\varepsilon_1}{2C_2}\sqrt{\pi^2 - 2\alpha} \right\}. \tag{4.2.10}$$

En vertu de (2.2.31) et (2.2.34) du Chapitre 2, nous savons qu'il existe $C_4 > 0$ déterminée par α et a tel que pour tout $\lambda \in G_{\pm n}$ on a :

$$\begin{aligned}
\left| \sqrt{\lambda^2 + 2\alpha} + \varepsilon a_0 \mp in\pi \right| &\leq \frac{2\varepsilon C_0}{n\pi} + \frac{2\varepsilon^2 C_4}{n\pi}, && (4.2.11)\\
\sqrt{|\lambda^2 + 2\alpha|} &\geq n\pi - \varepsilon \left(\|a\|_\infty + C_0 + C_4 \right), \quad \forall n \geq 1. && (4.2.12)
\end{aligned}$$

Enfin nous rappelons un résultat du Chapitre 2 (Théorème 2.2.2) sur le développement asymptotique des valeurs propres du système (4.2.2) :

Théorème 4.2.1 *Soient $a \in BV(0,1)$ et α une constante positive. Alors pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$:*

$$\varepsilon_3 := \min \left\{ \varepsilon_2, \frac{(4-\pi)C_0}{\pi \left(4C_4 + C_0(\|a\|_\infty + 2C_0 + C_4) \right)} \right\} \tag{4.2.13}$$

le système (4.2.2) et le système (4.2.3) admettent respectivement une et une seule valeur propre $\lambda_{\pm n}, \lambda^\alpha_{\pm n}$ dans $G_{\pm n}$ pour tout $n \geq 1$. De plus, Nous avons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\left| \lambda^\alpha_{\pm n} + \varepsilon a_0 \mp i\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha} \right| &\leq \varepsilon \left(\frac{C_1}{n} + \frac{C_0}{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha}} \right), && (4.2.14)\\
|\lambda_{\pm n} + \varepsilon a_0 \mp in\pi| &\leq \varepsilon \left(\frac{C_1}{n} + \frac{C_0}{n\pi} \right). && (4.2.15)
\end{aligned}$$

Le but de ce paragraphe est de donner des estimations explicites sur les fonctions propres associées aux systèmes (4.2.2)-(4.2.3). Pour cela nous avons besoin du résultat suivant :

Proposition 4.2.1 *Supposons que $a \in BV(0,1)$ et que α est une constante positive. Alors, il existe $C_0 > 0, C_5 > 0$ dépendant seulement de a et α tels que pour tout $n \geq 1$, $\lambda \in G_{\pm n}$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ nous avons les estimations suivantes :*

$$\left| u(x,\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2\alpha}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x + \varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\right| \leq \frac{C_0\varepsilon}{|\lambda^2+2\alpha|}, \tag{4.2.16}$$

$$\left| u_x(x,\lambda) - \cosh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x + \varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\right| \leq \frac{C_5\varepsilon}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}. \tag{4.2.17}$$

Démonstration- Nous rappelons que (4.2.16) a été prouvée dans le Chapitre 2 (Théorème 2.2.1). Soit maitenant u solution du problème de valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} u_{xx} - (\lambda^2 + 2\varepsilon a\lambda + 2\alpha)u = 0, \\ u(0) = 0, u_x(0) = 1. \end{cases} \tag{4.2.18}$$

Soit

$$z(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2\alpha}} \sinh \sqrt{\lambda^2+2\alpha}x, \tag{4.2.19}$$

solution du problème (4.2.18) dans le cas où $a \equiv 0$. D'après la formule de la variation de constantes, nous avons :

$$u_x(x) = z_x - 2\varepsilon\lambda\int_0^x a(s)u(s)z_x(x-s)ds. \tag{4.2.20}$$

En utilisant le Lemme 2.2.1 du Chapitre 2 on obtient :

$$|u_x(\lambda,x)| \leq \cosh|\Re e\sqrt{\lambda^2+2\alpha}|\left(1 + C_2\frac{2|\lambda|}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}\int_0^x |a(s)|ds\right). \tag{4.2.21}$$

Combinant (4.2.7), (4.2.8) et (4.2.21) on obtient :

$$|u_x(\lambda,x)| \leq (1 + \|a\|_\infty C_2C_3)\cosh 1 := C_4, \tag{4.2.22}$$

pour tout λ dans $G_{\pm n}$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

On pose :

$$\begin{aligned} L(v) &= v_{xx} - (\lambda^2 + 2\varepsilon a\lambda + 2\alpha)v, && (4.2.23)\\ v(x,\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2\alpha}+\varepsilon a(0)}\sinh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x + \int_0^x \varepsilon a(s)ds\right). && (4.2.24)\end{aligned}$$

Par un calcul direct nous avons :

$$\begin{aligned} L(v) &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda^2+2\alpha}+\varepsilon a(0)}\Big\{a' \cosh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right) \\ &+ \left(\varepsilon a^2+\frac{4a\alpha}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+2\alpha}}\right)\sinh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\Big\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$|L(v)| \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}\left(|a'|+|a|^2+2\alpha|a|\right)\cosh 1. \tag{4.2.25}$$

En combinant (4.2.22) et (4.2.25), on obtient :

$$\begin{aligned} |v_x(x,\lambda)-u_x(x,\lambda)| &\leq \int_0^x L\left(v(s,\lambda)\right)|u_x|\,ds \\ \leq \frac{2\varepsilon C_4\cosh 1}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}\left(T_a+\|a\|_2+2\alpha\|a\|_\infty\right) &:= \frac{\varepsilon C_4 C_4'}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}. \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

D'autre part en utilisant (4.2.6) on a :

$$\begin{aligned} &\left|v_x(x,\lambda)-\cosh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\right| \\ &= \varepsilon\left|\frac{a(x)-a(0)}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}+\varepsilon a(0)}\cosh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\right| \\ &\leq \frac{4\varepsilon\|a\|_\infty}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}\cosh 1. \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

En vertu de (4.2.26) et (4.2.27) nous avons

$$\left|u_x(x,\lambda)-\cosh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\right| \tag{4.2.28}$$

$$\leq |y_x-v_x|+\left|v_x(x,\lambda)-\cosh\left(\sqrt{\lambda^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\right| \tag{4.2.29}$$

$$\leq \frac{\varepsilon C_4\cdot C_4'}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}+\frac{4\varepsilon\|a\|_\infty\cosh 1}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}} := \frac{\varepsilon C_5}{\sqrt{|\lambda^2+2\alpha|}}. \tag{4.2.30}$$

pour tout λ dans $G_{\pm n}$ et $0<\varepsilon<\varepsilon_1$. Ceci termine la démonstration.

En posant $\xi(x)=\int_0^1 a(s)ds - x\int_0^1 a(s)ds$. Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 4.2.2 *Soient $a \in BV(0,1)$ et α une constante positive. Alors il existe des constantes $C_6 > 0$ et ε_6 tels que pour tout $n \geq 1$, $\lambda_{\pm n} \in G_{\pm n}$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_6$ nous avons les estimations suivantes :*

$$\left| u^{\alpha}_{\pm n}(x, \lambda_{\pm n}) - \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha}}{n\pi} \cdot \frac{\sinh\left(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)}{\lambda_{\pm n}} \right| \leq \frac{C_6 \varepsilon}{n^2\pi^2}, \tag{4.2.31}$$

$$\left| u^{\alpha}_{\pm nx}(x, \lambda_{\pm n}) - \cosh \varepsilon\xi(x) \pm in\pi x \right| \leq \frac{C_6 \varepsilon}{n\pi}. \tag{4.2.32}$$

Démonstration- Soit $\lambda_{\pm n} \in G_{\pm n}$. En utilisant (4.2.12) nous avons

$$\left|\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha\right| \geq \frac{n^2\pi^2}{4}, \tag{4.2.33}$$

pour tout

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_4 := \left(\varepsilon_3, \frac{\pi}{2\left(\|a\|_\infty + C_0 + C_4\right)}\right). \tag{4.2.34}$$

En combinant (4.2.16) et (4.2.33) on obtient :

$$\left| u^{\alpha}_{\pm n}(x, \lambda_{\pm n}) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha}} \sinh\left(\sqrt{\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha}x + \varepsilon \int_0^x a(s)ds\right) \right| \leq \frac{4C_0\varepsilon}{n^2\pi^2}. \tag{4.2.35}$$

D'autre part en utilisant (4.2.11), on déduit que pour tout $\lambda_{\pm n} \in G_{\pm n}$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\sinh\left(\sqrt{\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha}x + \varepsilon \int_0^x a(s)ds\right)}{\sqrt{\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha}} - \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha}}{n\pi} \cdot \frac{\sinh\left(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)}{\lambda_{\pm n}} \right| \\
\leq\ & \left(\left|\sinh \varepsilon\rho_n e^{i\theta}\right| + 2\left|\sinh \frac{\varepsilon\rho_n e^{i\theta}}{2}\right|^2 \right) \frac{\cosh 2\|a\|_\infty}{\sqrt{|\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha|}} \\
+\ & \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha}} - \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha}}{n\pi} \frac{1}{\lambda_{\pm n}} \right| \cosh 2\|a\|_\infty,
\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

où on a posé :

$$\rho_n = 2\frac{C_0 + \varepsilon C_4}{n\pi}. \tag{4.2.37}$$

On déduit alors, de (4.2.33) :

$$\begin{aligned}
&\left(\left|\sinh \varepsilon\rho_n e^{i\theta}\right| + 2\left|\sinh \frac{\varepsilon\rho_n e^{i\theta}}{2}\right|^2 \right) \frac{\cosh 2\|a\|_\infty}{\sqrt{|\lambda^2_{\pm n} + 2\alpha|}} \\
\leq\ & \left(4\sqrt{5} + 20\varepsilon\left(\frac{C_0 + \varepsilon C_4}{n\pi}\right)\right) \frac{\cosh 2\|a\|_\infty (C_0 + \varepsilon C_4)}{n^2\pi^2}\varepsilon := \frac{C_6'\varepsilon}{n^2\pi^2}.
\end{aligned} \tag{4.2.38}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\pm n}^2+2\alpha}}-\frac{\sqrt{n^2\pi^2+2\alpha}}{n\pi}\frac{1}{\lambda_{\pm n}}\right| \\
= &\left|\frac{\varepsilon a_0\left(n\pi-\sqrt{n^2\pi^2+2\alpha}\right)+\left(n\pi\rho_n' e_n^{i\theta'}-\sqrt{n^2\pi^2+2\alpha}\rho_n e^{i\theta}\right)\varepsilon}{n\pi\lambda_{\pm n}\sqrt{\lambda_{\pm n}^2+2\alpha}}\right|, \quad (4.2.39)
\end{aligned}$$

où on a posé $\rho_n' = \dfrac{C_1}{n}+\dfrac{C_0}{\sqrt{n^2\pi^2+2\alpha}}$. En utilisant (4.2.33) on obtient :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\pm n}^2+2\alpha}}-\frac{\sqrt{n^2\pi^2+2\alpha}}{n\pi}\frac{1}{\lambda_{\pm n}}\right| \quad (4.2.40)$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{n^2\pi^2}\left\{\frac{2\alpha}{\pi^2}\left(a_0+\frac{2C_0+\varepsilon C_4}{\pi}\right)\right. \quad (4.2.41)$$

$$+ \left.\left(1+\sqrt{1+\frac{2\alpha}{\pi}}\right)\left(C_1+\frac{C_0}{\sqrt{\pi^2+2\alpha}}+2\frac{C_0+\varepsilon C_4}{\pi}\right)\right\} := \frac{C_6''\varepsilon}{n^2\pi^2}. \quad (4.2.42)$$

pour tout $\lambda_{\pm n}\in G_{\pm n}$ et

$$0<\varepsilon<\varepsilon_5 := \min\left(\varepsilon_4, \frac{\sqrt{\pi^2+2\alpha}}{2\left(\|a\|_\infty+C_1+\frac{C_0}{\sqrt{\pi^2+2\alpha}}\right)}\right). \quad (4.2.43)$$

En combinant (4.2.35), (4.2.36), (4.2.38) et (4.2.42) on obtient (4.2.31).
Nous procédons de la même manière pour l'estimation (4.2.32) , en effet :

$$\begin{aligned}
&\left|u_{\pm nx}^\alpha(x,\lambda_{\pm n})-\cosh\left(\varepsilon\xi(x)\pm in\pi x\right)\right| \\
\leq &\left|u_{\pm nx}^\alpha(x,\lambda_{\pm n})-\cosh\left(\sqrt{\lambda_{\pm n}^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)\right| \\
+ &\left|\cosh\left(\sqrt{\lambda_{\pm n}^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)-\cosh\left(\varepsilon\xi(x)\pm in\pi x\right)\right|. \quad (4.2.44)
\end{aligned}$$

En combinant (4.2.17), (4.2.33) et (4.2.38), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|u_{\pm nx}^\alpha(x,\lambda_{\pm n})-\cosh\left(\varepsilon\xi(x)\pm in\pi x\right)\right| \\
\leq &\frac{2\varepsilon C_0}{n\pi}+\left|\cosh\left(\sqrt{\lambda_{\pm n}^2+2\alpha}x+\varepsilon\int_0^x a(s)ds\right)-\cosh\left(\varepsilon\xi(x)\pm in\pi x\right)\right| \\
\leq &\frac{2\varepsilon C_0}{n\pi}+2\sqrt{5}\varepsilon\frac{C_0+\varepsilon C_4}{n\pi}\cosh 2\|a\|_\infty \\
+ &10\varepsilon^2\left(\frac{C_0+\varepsilon C_4}{n\pi}\right)^2\cosh 2\|a\|_\infty := \frac{C_6'''\varepsilon}{n\pi}. \quad (4.2.45)
\end{aligned}$$

pour tout $\lambda_{\pm n} \in G_{\pm n}$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_6$. Ceci termine la démonstration.

Soient $\lambda_{\pm n}$ et $\lambda^{\alpha}_{\pm n}$ deux valeurs propres appartenant à deux branches différentes. Si $n \neq m$ alors, $\lambda_{\pm n} \in \Gamma_{\pm n}$ et $\lambda^{\alpha}_{\pm m} \in \Gamma_{\pm m}$ par conséquent, $\lambda_{\pm n}$ et $\lambda^{\alpha}_{\pm m}$ sont distinctes. Si $n = m$ alors, $\lambda_{\pm n}, \lambda^{\alpha}_{\pm n} \in \Gamma_{\pm n}$. Le résultat suivant montre que, $\lambda_{\pm n}$ et $\lambda^{\alpha}_{\pm n}$ sont distinctes.

Proposition 4.2.2 *Soient λ^{α}_n et λ_n deux valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}^{\varepsilon}$. Alors , il existe $\varepsilon_7 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_7$ nous avons*

$$\lambda^{\alpha}_n \neq \lambda_n. \tag{4.2.46}$$

Démonstration- Supposons $\lambda^{\alpha}_n = \lambda_n$. Soient u^{α}_n et u_n deux fonctions propres associées respectivement à λ^{α}_n et λ_n. Alors

$$\begin{cases} u_{nxx} - ((\lambda_n)^2 + 2a\lambda_n)u_n = 0, \\ u_n(0) = u_n(1) = 0. \end{cases} \tag{4.2.47}$$

Multipliant (4.2.47) par u_n et intégrant par parties on obtient :

$$\int_0^1 u_n \cdot [\partial_{xx} - ((\lambda^{\alpha}_n)^2 + 2a\,(\lambda^{\alpha}_n) + 2\alpha)]u^{\alpha}_n dx + 2\int_0^1 \alpha u^{\alpha}_n \cdot u_n dx = 0. \tag{4.2.48}$$

Comme u^{α}_n est solution de (4.2.2), nous avons

$$\int_0^1 u^{\alpha}_n \cdot u_n dx = 0. \tag{4.2.49}$$

En combinant (4.2.14), (4.2.15) et (4.2.31) nous avons

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 u^{\alpha}_n \cdot u_n dx \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha}}{n\pi} \frac{|\sinh(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x)|^2}{\lambda_n \lambda^{\alpha}_n} \\
&+ \frac{C_6\varepsilon}{n^2\pi^2} \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha}}{n\pi} \frac{\sinh(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x)}{\lambda^{\alpha}_n} e^{i\theta} \\
&+ \frac{C_6\varepsilon}{n^2\pi^2} \frac{\sinh(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x)}{\lambda_n} e^{i\theta} + \frac{C_6^2\varepsilon^2}{n^4\pi^4} e^{2i\theta} \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^1 |\sinh(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x)|^2 - 4\varepsilon\frac{C_5}{n\pi}\cosh 2\|a\|_{\infty} - \frac{\varepsilon^2 C_6^2}{n^2\pi^2} \\
&\geq \frac{1}{2} - \varepsilon\left(\frac{4C_6}{\pi}\cosh 2\|a\|_{\infty} + \frac{C_6^2}{\pi^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.2.50}$$

Comme $\frac{1}{2} - 4\varepsilon\frac{C_6}{\pi}\cosh 2\|a\|_\infty - \frac{C_6^2}{\pi^2} > 0$, pour tout

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_7 := \min\left(\varepsilon_6, \frac{\pi^2}{8\pi C_6 \cosh 2\|a\|_\infty + 2C_6^2}\right). \tag{4.2.51}$$

Alors $\lambda_n \neq \lambda_n^\alpha$ pour tout $n \geq 1$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_7$. Ce qui termine la démonstration.

4.3 Base de Riesz formée des vecteurs propres

Soit $\lambda_{\pm n}$ une valeur propre du système (4.2.3). Alors $\lambda_{\pm n}$ est une valeur propre simple de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_7$. En outre d'après le Lemme 3.2.1 du Chapitre 3 nous avons $\lambda_{\pm n}$ est une valeur propre simple de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ associée au vecteur propre :

$$\phi_{\pm n} = (u_{\pm n}, \lambda_{\pm n}u_{\pm n}, u_{\pm n}, \lambda_{\pm n}u_{\pm n})^\top, \quad \forall n \geq 1. \tag{4.3.1}$$

D'autre part soit $\lambda_{\pm m}^\alpha$ une valeur propre du système (4.2.2). Alors $\lambda_{\pm m}^\alpha$ est une valeur propre simple de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$. De plus d'après le Lemme 3.2.1 du Chapitre 3 nous avons $\lambda_{\pm m}^\alpha$ est une valeur propre simple de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ associée au vecteur propre :

$$\phi_{\pm m}^\alpha = \left(u_{\pm m}^\alpha, \lambda_{\pm m}^\alpha u_{\pm m}^\alpha, -u_{\pm m}^\alpha, -\lambda_{\pm m}^\alpha u_{\pm m}^\alpha\right)^\top, \forall m \geq 1. \tag{4.3.2}$$

Nous concluons alors que le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ est donné par :

$$\left\{\lambda_{\pm m}^\alpha\right\}_{m\geq 1} \cup \left\{\lambda_{\pm n}\right\}_{n\geq 1}, \tag{4.3.3}$$

associé au système des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ donné par :

$$\left\{\phi_{\pm m}^\alpha\right\}_{m\geq 1} \cup \left\{\phi_{\pm n}\right\}_{n\geq 1}. \tag{4.3.4}$$

Le but de ce paragraphe est de montrer que le système (4.3.4) forme une base de Riesz dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$. Nous montrons d'abord le résultat suivant :

Proposition 4.3.1 *Le système $\{\phi_{\pm m}^\alpha\}_{m\geq 1} \cup \{\phi_{\pm n}\}_{n\geq 1}$ des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ est ω-linéairement indépendant.*

Démonstration Nous savons que $(\mathcal{A}^\varepsilon)^{-1}$ est un opérateur compact dans $\mathcal{H}$. Comme l'opérateur $(\mathcal{A}^\varepsilon)$ n'a pas de valeurs propres imaginaires pures, donc $i(\mathcal{A}^\varepsilon)^{-1}$

n'a pas de valeur propre réelle. D'après Théorème I.5.2 (Gohberg-Krein [6], page 23), $\dfrac{i}{\lambda_n} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est un point normal de l'opérateur $i(\mathcal{A}^\varepsilon)^{-1}$. Par conséquent pour tout $\tau_n > 0$ assez petit l'opérateur de projection correspondant

$$P_n = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\left|\lambda - \frac{i}{\lambda_n}\right| = \tau_n} (i(\mathcal{A}^\varepsilon)^{-1} - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

est de dimension finie, et l'image de P_n est le sous-espace propre $\ker (\mathcal{A}^\varepsilon - \lambda_n I)^{\nu_n}$ où ν_n est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_n.

Étant données deux suites $\left(C^\alpha_{\pm m}\right)_{m\geq 1}, (C_{\pm n})_{n\geq 1}$ telles que :

$$\sum_{m,n\geq 1} C_{\pm n}\phi_{\pm n} + C^\alpha_{\pm m}\phi^\alpha_{\pm m} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} |C_{\pm n}|^2 + \sum_{m\geq 1} |C^\alpha_{\pm m}|^2 < +\infty. \tag{4.3.5}$$

En appliquant l'opérateur de projection $P_{\pm n}$ à (4.3.5) on obtient :

$$C_{\pm n}\phi_{\pm n} = 0 \quad \text{donc} \quad C_{\pm n} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

De la même manière on obtient : $C^\alpha_{\pm m} = 0$, pour tout $m \geq 1$. Ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant une base orthonormée dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$:

$$\{e^\alpha_{\pm m}\}_{m\geq 1} \cup \{e_{\pm n}\}_{n\geq 1} \tag{4.3.6}$$

défini par :

$$e^\alpha_{\pm m} = \left(\frac{1}{im\pi}\sinh im\pi x, \gamma_m \sinh im\pi x, -\frac{1}{im\pi}\sinh im\pi x, -\gamma_m \sinh im\pi x\right)^\top \ \forall m \geq 1,$$
$$e_{\pm n} = \left(\frac{1}{in\pi}\sinh in\pi x, \sinh in\pi x, \frac{1}{in\pi}\sinh in\pi x, \sinh in\pi x\right)^\top \ \forall n \geq 1.$$

où on a posé $\gamma_m = \dfrac{\sqrt{m^2\pi^2 + 2\alpha}}{m\pi}$.

Pour montrer que le système des vecteurs propres (4.3.4) associé à l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$, forme une base de Riesz de l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$, il suffit de montrer que $\{\phi^\alpha_{\pm m}\}_{m\geq 1} \cup \{\phi_{\pm n}\}_{n\geq 1}$ est équivalent au système défini par (4.3.6). Pour cela nous avons besoin des préliminaires suivants. On pose :

$$\begin{aligned}
L_0^2(0,1) &= \left\{ u \in L^2(0,1) : \quad \int_0^1 u(s)ds = 0 \right\}, \\
\mathcal{L}_2 &= L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \\
\mathcal{L} &= L^2(0,1) \times L_0^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L_0^2(0,1), \\
& F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L} \\
& (y, z, f, g) \longrightarrow (y_x, z, f_x, g).
\end{aligned}$$

Nous savons d'après la Proposition 3.3.2 du Chapitre 3 que l'application F est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{L}$.

Soient maintenant les matrices B_1^ε et $B_{2,n}^\varepsilon$ définies par :

$$\begin{aligned}
B_1^\varepsilon &= \begin{pmatrix} \cosh \varepsilon\xi(x) & \sinh \varepsilon\xi(x) & 0 & 0 \\ \sinh \varepsilon\xi(x) & \cosh \varepsilon\xi(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \varepsilon\xi(x) & \sinh \varepsilon\xi(x) \\ 0 & 0 & \sinh \varepsilon\xi(x) & \cosh \varepsilon\xi(x) \end{pmatrix}, \\
B_{2,n}^\varepsilon &= \begin{pmatrix} \cosh \varepsilon\xi(x) & \gamma_n^{-1} \sinh \varepsilon\xi(x) & 0 & 0 \\ \gamma_n \sinh \varepsilon\xi(x) & \cosh \varepsilon\xi(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \varepsilon\xi(x) & \gamma_n^{-1} \sinh \varepsilon\xi(x) \\ 0 & 0 & \gamma_n \sinh \varepsilon\xi(x) & \cosh \varepsilon\xi(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On pose $\theta_{\pm n}(x) = \varepsilon\xi(x) \pm in\pi x$ et

$$\Phi_{\pm n}^\varepsilon = (\cosh \theta_{\pm n}(x), \sinh \theta_{\pm n}(x), \cosh \theta_{\pm n}(x), \sinh \theta_{\pm n}(x))^\top \, \forall\, n \geq 1,$$

$$\Phi_{\pm m}^{\varepsilon,\alpha} = \Big(\cosh \theta_{\pm m}(x), \gamma_m \sinh \theta_{\pm m}(x), -\cosh \theta_{\pm m}(x), -\gamma_m \sinh \theta_{\pm m}(x) \Big)^\top \, \forall\, m \geq 1.$$

Par un calcul direct nous avons pour tout $m, n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$:

$$B_1^\varepsilon \Phi_{\pm n}^0 = \Phi_{\pm n}^\varepsilon, \qquad F e_{\pm n} = \Phi_{\pm n}^0, \quad \forall n \geq 1, \tag{4.3.7}$$
$$B_{2,m}^\varepsilon \Phi_{\pm m}^{0,\alpha} = \Phi_{\pm m}^{\varepsilon,\alpha}, \qquad F e_{\pm m}^\alpha = \Phi_{\pm m}^{0,\alpha}, \quad \forall m \geq 1. \tag{4.3.8}$$

Ainsi nous définissons l'opérateur B^ε de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ par :

$$B^\varepsilon \Phi_{\pm n}^0 = P \Phi_{\pm n}^\varepsilon, \quad \forall n \geq 1, \tag{4.3.9}$$
$$B^\varepsilon \Phi_{\pm m}^{0,\alpha} = P \Phi_{\pm m}^{\varepsilon,\alpha}, \quad \forall m \geq 1, \tag{4.3.10}$$

où P désigne la projection orthogonale de $\mathcal{L}_2$ sur $\mathcal{L}$.
Comme F est un isomerphisme et $\{e_{\pm n}\}_{n\geq 1} \cup \{e^{\alpha}_{\pm m}\}_{m\geq 1}$ est une base orthonormée, les relations $Fe_{\pm n} = \Phi^0_{\pm n}, Fe^{\alpha}_{\pm m} = \Phi^{0,\alpha}_{\pm m}$ impliquent que $\{\Phi^0_{\pm n}\}_{n\geq 1} \cup \{\Phi^{0,\alpha}_{\pm m}\}_{m\geq 1}$ est une base orthonormée dans $\mathcal{L}$.

Soit $X \in \mathcal{L}$. Alors il existe deux suites $(x_{\pm n})_{n\geq 1}$ et $(x^{\alpha}_{\pm m})_{m\geq 1}$ telles que :

$$X = \sum_{n\geq 1} x_n \Phi^0_{\pm n} + \sum_{m\geq 1} x^{\alpha}_m \Phi^{0,\alpha}_{\pm m}. \tag{4.3.11}$$

Alors $B^{\varepsilon}X = X + PA^{\varepsilon}X + \sum_{m\geq 1} PA^{\varepsilon}_m x^{\alpha}_{\pm m} \Phi^{0,\alpha}_{\pm m}$, où on a posé :

$$\begin{aligned}
A^{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} 2\sinh^2 \frac{\varepsilon\xi(x)}{2} & \sinh \varepsilon\xi(x) & 0 & 0 \\ \sinh \varepsilon\xi(x) & 2\sinh^2 \frac{\varepsilon\xi(x)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sinh^2 \frac{\varepsilon\xi(x)}{2} & \sinh \varepsilon\xi(x) \\ 0 & 0 & \sinh \varepsilon\xi(x) & 2\sinh^2 \frac{\varepsilon\xi(x)}{2} \end{pmatrix}, \\
A^{\varepsilon}_n &= \begin{pmatrix} 0 & (\gamma_n^{-1} - 1)\sinh \varepsilon\xi(x) & 0 & 0 \\ (\gamma_n - 1)\sinh \varepsilon\xi(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\gamma_n^{-1} - 1)\sinh \varepsilon\xi(x) \\ 0 & 0 & (\gamma_n - 1)\sinh \varepsilon\xi(x) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Comme

$$|\sinh \varepsilon\xi(x)| \leq 2\varepsilon \|a\|_{\infty} \cosh 2\|a\|_{\infty}, \tag{4.3.12}$$

un calcul direct montre que la norme $\|.\|_2$ subordonnée à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ de A^{ε} et A^{ε}_m satisfont :

$$\|A^{\varepsilon}\|_2 \leq 2\varepsilon \left(\|a\|_{\infty} \cosh 2\|a\|_{\infty} + \|a\|^2_{\infty} \cosh^2 \|a\|_{\infty}\right), \tag{4.3.13}$$

$$\|A^{\varepsilon}_m\|_2 \leq \frac{2\alpha\varepsilon}{m^2} \|a\|_{\infty} \cosh 2\|a\|_{\infty}. \tag{4.3.14}$$

En utilisant (4.3.14) on déduit :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m\geq 1} PA^{\varepsilon}_m x^{\alpha}_{\pm m} \Phi^{\alpha,0}_{\pm m} \right\| &\leq \sum_{m\geq 1} \left|x^{\alpha}_{\pm m}\right| \|A^{\varepsilon}_m\|_2 \\
&\leq \left(\sum_{m\geq 1} \left|x^{\alpha}_{\pm m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m\geq 1} \|A^{\varepsilon}_m\|^2_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m^4}\right)^{\frac{1}{2}} 2\alpha\varepsilon \cosh\left(2\|a\|_{\infty}\right) \\
&\leq 2\alpha\varepsilon \cosh\left(2\|a\|_{\infty}\right). \qquad (4.3.15)
\end{aligned}$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned}
\|B^\varepsilon\| &\leq 1 + \|PA^\varepsilon\| + 2\alpha\varepsilon \cosh\left(2\|a\|_\infty\right) \\
&\leq 1 + 2\varepsilon(\|a\|_\infty \cosh\left(2\|a\|_\infty\right) + \|a\|_\infty^2 \cosh^2\|a\|_\infty \\
&+ \alpha\cosh\left(2\|a\|_\infty\right)) \leq \frac{3}{2} && (4.3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\left(B^\varepsilon\right)^{-1}\| &\leq \frac{1}{1-2\varepsilon\left(\|a\|_\infty \cosh\left(2\|a\|_\infty\right) + \|a\|_\infty^2 \cosh^2\|a\|_\infty + \alpha\cosh\left(2\|a\|_\infty\right)\right)} \\
&\leq 2. && (4.3.17)
\end{aligned}$$

Pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_8$:

$$\varepsilon_8 =: \min\left(\varepsilon_7, \frac{1}{4\left(\|a\|_\infty \cosh\left(2\|a\|_\infty\right) + \|a\|_\infty^2 \cosh^2\|a\|_\infty + \alpha\cosh\left(2\|a\|_\infty\right)\right)}\right).$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 4.3.1 *Supposons que $a \in BV(0,1)$ et α une constante positive. Alors il existe un opérateur linéaire borné inversible $\mathcal{S}^\varepsilon$ de $\mathcal{H}$ tel que*

$$\mathcal{S}^\varepsilon e_{\pm n} = \phi_{\pm n} \quad \textit{pour tout} \quad n \geq 1. \tag{4.3.18}$$

$$\mathcal{S}^\varepsilon e_{\pm m}^\alpha = \phi_{\pm m}^\alpha \quad \textit{pour tout} \quad m \geq 1. \tag{4.3.19}$$

De plus il existe ε_9 dépendant seulement de a et α tel que nous ayons les estimations suivantes :

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_9} \|\mathcal{S}^\varepsilon\| < +\infty, \tag{4.3.20}$$

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_9} \|(\mathcal{S}^\varepsilon)^{-1}\| < +\infty. \tag{4.3.21}$$

Démonstration Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_7$. En utilisant (4.2.14), (4.2.15), (4.2.31) et (4.2.32) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} \left\|F\phi_{\pm n} - \Phi_{\pm n}^\varepsilon\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \sum_{m\geq 1} \left\|F\phi_{\pm m}^\alpha - \Phi_{\pm m}^{\varepsilon,\alpha}\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 \\
= \;& 2\sum_{n\geq 1} \int_0^1 \left|u_{\pm nx}(\lambda_{\pm n}, x) - \cosh\left(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)\right|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad |\lambda_{\pm n} u_{\pm n}(\lambda_{\pm n}, x) - \sinh\left(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)|^2 \, dx \\
&+ \quad 2\sum_{m\geq 1}\int_0^1 \left|u^\alpha_{\pm mx}(\lambda^\alpha_{\pm m}, x) - \cosh\left(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)\right|^2 \\
&+ \quad \left|\lambda^\alpha_{\pm m} u^\alpha_{\pm n}(\lambda^\alpha_{\pm m}, x) - \frac{\sqrt{m^2\pi^2 + 2\alpha}}{m\pi}\sinh\left(\varepsilon\xi(x) \pm in\pi x\right)\right|^2 dx \\
&\leq \quad \frac{4}{3}C_5^2\varepsilon^2. \qquad (4.3.22)
\end{aligned}
$$

Soit maintenant l'opérateur linéaire R^ε dans $\mathcal{H}$ défini par :

$$
\begin{aligned}
R^\varepsilon e_{\pm n} &= F^{-1}B^\varepsilon \Phi^0_{\pm n} - \phi_{\pm n}, \quad \forall n \geq 1, \qquad (4.3.23)\\
R^\varepsilon e^\alpha_{\pm m} &= F^{-1}B^{\varepsilon,\alpha} \Phi^{0,\alpha}_{\pm m} - \phi^\alpha_{\pm m}, \quad \forall m \geq 1. \qquad (4.3.24)
\end{aligned}
$$

En utilisant (4.3.22) nous déduisons que

$$
\begin{aligned}
\|R^\varepsilon\|^2 &\leq \|F^{-1}\|^2 \sum_{n\geq 1} \|P\Phi^\varepsilon_{\pm n} - F\phi_{\pm n}\|^2_{\mathcal{L}} + \|F^{-1}\|^2 \sum_{m\geq 1} \|P\Phi^{\varepsilon,\alpha}_{\pm m} - F\phi^\alpha_{\pm m}\|^2_{\mathcal{L}} \\
&\leq \|P\|^2\|F^{-1}\|^2 \left(\sum_{n\geq 1} \|\Phi^\varepsilon_{\pm n} - F\phi_{\pm n}\|^2_{\mathcal{L}_2} + \sum_{m\geq 1} \|\Phi^{\varepsilon,\alpha}_{\pm m} - F\phi^\alpha_{\pm m}\|^2_{\mathcal{L}_2}\right) \\
&< \frac{4}{3}\varepsilon^2 C_5^2 \|F^{-1}\|^2 := \varepsilon^2 C_9^2. \qquad (4.3.25)
\end{aligned}
$$

Soit maintenant l' opérateur $\mathcal{S}^\varepsilon$ définit par :

$$
\mathcal{S}^\varepsilon = F^{-1}B^\varepsilon F - R^\varepsilon = F^{-1}B^\varepsilon F\left(I - F^{-1}\left(B^\varepsilon\right)^{-1} FR^\varepsilon\right). \qquad (4.3.26)
$$

Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^\varepsilon e_{\pm n} &= F^{-1}B^\varepsilon F e_{\pm n} - R^\varepsilon e_{\pm n} = F^{-1}B^\varepsilon \Phi^0_{\pm n} - R^\varepsilon e_{\pm n} = \phi_{\pm n}, \\
\mathcal{S}^\varepsilon e^\alpha_{\pm m} &= F^{-1}B^\varepsilon F e^\alpha_{\pm m} - R^\varepsilon e^\alpha_{\pm m} = F^{-1}B^\varepsilon \Phi^{0,\alpha}_{\pm m} - R^\varepsilon e^\alpha_{\pm m} = \phi^\alpha_{\pm m}.
\end{aligned}
$$

En combinant (4.3.16) et (4.3.25) on obtient pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_8 < 1$:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{S}^\varepsilon\| &\leq \|F^{-1}\|\,\|F\|\Big\{1 + 2\varepsilon\Big(\|a\|_\infty \cosh 2\|a\|_\infty + \|a\|^2_\infty \cosh^2\|a\|_\infty \\
&+ \alpha\|a|_\infty \cosh 2\|a\|_\infty\Big)\Big\} + C_9\varepsilon \\
&\leq \frac{3}{2}\|F\|\|F^{-1}\| + C_9. \qquad (4.3.27)
\end{aligned}
$$

En outre

$$\begin{aligned}\left\|(B^{\varepsilon})^{-1}FR^{\varepsilon}F^{-1}\right\| &< \|(B^{\varepsilon})^{-1}\|\|F\|\|F^{-1}\|C_9\varepsilon,\\ &\leq \frac{3}{2}\|F\|\|F^{-1}\|C_9\varepsilon < 1. \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

pour tout

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_9 = \left(\varepsilon_8, \frac{1}{2\|F\|\|F^{-1}\|C_9}\right) \tag{4.3.29}$$

Par conséquent l' opérateur

$$I - (B^{\varepsilon})^{-1} FR^{\varepsilon}F^{-1}, \tag{4.3.30}$$

est inversible. De plus, en utilisant (4.3.26) et (4.3.28) on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|(\mathcal{S}^{\varepsilon})^{-1}\right\| &\leq \|F\|\|F^{-1}\|\|B^{\varepsilon}\|\left(\frac{1}{1-\|F^{-1}(B^{\varepsilon})^{-1}FR^{\varepsilon}\|}\right)\\ &\leq 6\|F\|\|F^{-1}\|.\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

Théorème 4.3.2 *Nous supposons que la condition* (C) *est satisfaite. Soient* $a \in BV(0,1)$ *et* α *une constante. Alors il existe* $\varepsilon_0 > 0, \omega, M > 0$ *dépendant de* a, α *tels que pour tout* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, la solution* ϕ *du système (4.1.1) satisfait l' estimation suivante :*

$$\|\phi\|^2_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\omega\varepsilon t}\|\phi_0\|^2_{\mathcal{H}} \tag{4.3.31}$$

pour tout $t \geq 0$.

Démonstration- D'après (4.2.14) et (4.2.15), si

$$n > \frac{2}{a_0}\left(C_1 + \frac{C_0}{\pi}\right) := K, \tag{4.3.32}$$

les valeurs propres sont à gauche de l'axe imaginaire. Plus précisément il existe une constante $C_{10} > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ le plus petit entier supérieur à K tel que

$$\sup_{m\geq N} \Re e(\lambda^{\alpha}_{\pm n}) < -C_{10}\varepsilon; \quad \sup_{n\geq N} \Re e(\lambda_{\pm n}) < -C_{10}\varepsilon \tag{4.3.33}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_9$.

D'autre part, d'après la condition $\Re e\lambda'_{\pm n}(0) = -I_n < -c_0$, il existe $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_9$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ les 2N valeurs propres de basses fréquences satisfont

$$\sup_{n<N} \Re e\lambda^{\alpha}_{\pm n} \leq -\frac{c_0}{2}\varepsilon; \quad \sup_{n<N} \Re e\lambda_{\pm n} \leq -\frac{c_0}{2}\varepsilon. \tag{4.3.34}$$

Posons $C = \min\{C_{10}, c_0\}$, alors combinant (4.3.33) et (4.3.34) on a :

$$\Re e\lambda^{\alpha}_{\pm n} \leq -C\varepsilon; \quad \Re e_{n\geq 1}\lambda_{\pm n} \leq -C\varepsilon, \tag{4.3.35}$$

pour tout $n \geq 1$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.
Soit maintenant $\phi_0 \in \mathcal{H}$ tel que

$$\phi_0 = \sum_{n\geq 1} a_{\pm n}\phi_{\pm n} + \sum_{m\geq 1} a_{\pm m}\phi^{\alpha}_{\pm m}. \tag{4.3.36}$$

Alors, la solution du problème (4.1.4) est donnée par

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_{\pm n}t} a_{\pm n}\phi_{\pm n} + \sum_{m\geq 1} e^{\lambda^{\alpha}_{\pm m}t} a^{\alpha}_{\pm m}\phi^{\alpha}_{\pm m} \\ &= \sum_{n\geq 1} e^{\lambda_{\pm n}t} a_{\pm n}\mathcal{S}^{\varepsilon} e_{\pm n} + \sum_{m\geq 1} e^{\lambda^{\alpha}_{\pm m}t} a^{\alpha}_{\pm m}\mathcal{S}^{\varepsilon} e^{\alpha}_{\pm m}. \end{aligned} \tag{4.3.37}$$

De (4.3.33) et (4.3.37), on déduit que

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2_{\mathcal{H}} &\leq \|\mathcal{S}^{\varepsilon}\|^2 \exp(-2C\varepsilon t) \left(\sum_{n\geq 1} |a_{\pm n}|^2 + \sum_{m\geq 1} |a^{\alpha}_{\pm m}|^2 \right) \\ &\leq \|\mathcal{S}^{\varepsilon}\|^2 \exp(-2C\varepsilon t) \left\| (\mathcal{S}^{\varepsilon})^{-1} \left(\sum_{n\geq 1} a_{\pm n}\phi_{\pm n} + \sum_{m\geq 1} a^{\alpha}_{\pm m}\phi^{\alpha}_{\pm m} \right) \right\|^2. \end{aligned}$$

On déduit de (4.3.27) que

$$\|\phi\|^2 \leq \|\mathcal{S}^{\varepsilon}\|^2 \|(\mathcal{S}^{\varepsilon})^{-1}\|^2 \quad \exp(-2C\varepsilon t)\|\phi_0\|^2, \tag{4.3.38}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Ceci termine la démonstration du théorème.

Bibliographie

[1] A. Benaddi and B. Rao, *Energy decay rate of wave equations with indefinite damping*, J. Diff. Equa. 161 (2000) 337-357.

[2] A. Benaddi, *Optimal energy decay rate of coupled wave equations*, à paraître dans Pan Americain Math. J (2000).

[3] G. Chen, S. A. Fulling, F. G. Narcowich and S.Sun, *Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math. 51 (1991), 266-301.

[4] P. Freitas, *On some eigenvalue problem related to the wave equation with indefinite damping*, J. Diff. Equa. 127 (1996), 320-335.

[5] P. Freitas and E. Zuazua, *Stability results for wave equation with indefinite damping,* J. Diff. Equa. 132 (1996) 320-335.

[6] I. C. Gohberg and M. G. Krejn, *Opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace Hilbertien,* AMS. 1971.

[7] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1984.

[8] M. A. Naimark, *Linear differential operators*, vol.I, Ungar, New York, 1967.

[9] M. Najafi, G. R. Sarhangi and H. Wang, *The study of stability of coupled wave equations under various end conditions*, Proceedings of 31st Conferences on decision and control, Tucson, Arizona, 1992, 374-379.

[10] A. Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial equations,* Spinger Verlag, New York, 1983.

[11] B. Rao, *Optimal energy decay rate in a damped Rayleigh Beam,* Discrete and contiunous dynamical systems, 4 (1998), 721-734

the

Chapitre 5

Stabilisation exponentielle de systèmes linéaires non dissipatifs

5.1 Introduction

Considérons une équation d'évolution de la forme

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}_\varepsilon U(t) = (A + \varepsilon B)U(t), \\ u(x,0) = u_0. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

où est $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et ε est un paramètre réel.
Supposons que :
$\mathbf{H_1}$ A est un opérateur anti-adjoint ($A^* = -A$) et à résolvante compacte dans $\mathcal{H}$.
$\mathbf{H_2}$ B est un opérateur linéaire borné dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$.
Il est connu que sous ces hypothèses, l'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ engendre un C_0-semi-groupe $S_\varepsilon(t)$ (voir Pazy [13]) sur l'espace $\mathcal{H}$.

On s'intéresse au problème de la décroissance exponentielle de l'énergie du système (5.1.1) introduit dans Chen et al [4] : sous quelles conditions sur B peut-on obtenir la décroissance exponentielle de l'énergie ?

Les techniques développées dans le cadre d'une équation des ondes par Freitas [5], Freitas et Zuazua [6] et Benaddi et Rao [2] permettent d'identifier le taux de décroissance de l'énergie à l'abscisse spectrale de l'opérateur infinitésimal du semi-groupe associé au système dans certains cas particulier (voir Chapitre 4).

Cependant ces techniques ne permettent pas d'étudier par exemple le problème de stabilisation des équations des ondes couplées en présence des contrôles internes de coefficients différents. Le découplage s'avère un facteur décisif dans ce genre de situations. La méthode du tir est limitée à des systèmes de couplage simple.

Récemment K. Liu, Z. Liu et B. Rao [11] ont montré un résultat plus général concernant la stabilition exponentielle des systèmes linéaires non dissipatifs du type (5.1.1), qui fera l'objet d'un rappel dans le paragraphe 2.

Dans le paragraphe 3 et 4 nous appliquerons le résultat de K. Liu, Z. Liu et B. Rao [11] au système

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2a\varepsilon u_t + \alpha(u - v) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{tt} - v_{xx} + 2b\varepsilon v_t + \alpha(v - u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(0,x) = z_0(x), \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(0,x) = w_0(x), \end{cases} \tag{5.1.2}$$

et au système

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{ttxx} + u_{xxxx} + 2\varepsilon(au_{tx})_x + \alpha(u - v) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{tt} - v_{ttxx} + v_{xxxx} + 2\varepsilon(av_{tx})_x + \alpha(v - u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = v_{xx}(0,t) = v_{xx}(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(0,x) = z_0(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(0,x) = w_0(x). \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Nous montrons que les énergies des systèmes (5.1.2) et (5.1.3) décroîssent exponentiellement vers zéro. Autrement dit, nous montrons qu'il existe $\omega > 0, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $M_\varepsilon \geq 1$, tels que

$$\|E(t)\| \leq M_\varepsilon \exp(-\varepsilon\omega t)E(0), \quad \forall t \geq 0 \tag{5.1.4}$$

pour toutes les données initiales des systèmes (5.1.2) et (5.1.3).

5.2 Théorème abstrait sur la décroissance exponentielle de l'énergie de systèmes non dissipatifs.

Dans ce paragraphe, nous rappelons un résultat abstrait de K. Liu, Z. Liu et B. Rao [11] sur la stabilisation uniforme de systèmes non-dissipatifs. Il est connu que sous l'hypothèse $\mathbf{H_1}$, l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$ admet une base orthonormale :

$$\{\varphi_n \ / \ n = 1, 2, \ldots\}, \tag{5.2.1}$$

constituée des vecteurs propres de l'opérateur A, tel que

$$\begin{aligned} &A\varphi_n = \mathbf{i}\lambda_n\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \\ &0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}| \longrightarrow \infty, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

en tenant compte des multiplicités algébriques de $\mathbf{i}\lambda_n$.

Soit $\gamma > 0$, on défini l'ensemble suivant :

$$\Sigma_\gamma = \left\{ \phi = \sum_{n \in I_{\gamma,m}} c_n \varphi_n \quad \text{tel que} \quad \sum_{n \in I_{\gamma,m}} |c_n|^2 = 1, m \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{C} \right\} \tag{5.2.3}$$

où l'ensemble $I_{\gamma,m}$ est défini par

$$I_{\gamma,m} = \{n \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ |\lambda_n - \lambda_m| < \gamma\}. \tag{5.2.4}$$

Soit maintenant

$$C_\gamma = \inf_{\phi \in \sum_\gamma} \Re e \langle -B\phi, \phi \rangle. \tag{5.2.5}$$

Nous remarquons que $I_{\gamma,m} = I_{\gamma,l}$ si $\lambda_m = \lambda_l$ et $C_{\gamma_1} \geq C_{\gamma_2}$ pour $0 < \gamma_1 < \gamma_2$. Nous supposons que

$\mathbf{H_3}$ $\qquad C_\gamma > 0$, pour un certain $\quad \gamma > 0$.

Notons le taux de décroissance du semi-groupe $S_\varepsilon(t)$ est donné par :

$$\omega_0(\mathcal{A}_\varepsilon) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|S_\varepsilon(t)\|}{t}, \tag{5.2.6}$$

et l'abscisse spéctrale de l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon$ par :

$$\sigma_0(\mathcal{A}_\varepsilon) = \sup \{\Re e\lambda \ \text{ tel que } \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_\varepsilon)\}. \tag{5.2.7}$$

Nous utilisons le résultat de Huang dans [8] et Prüss dans [14], qui est :

$$\omega_0(\mathcal{A}_\varepsilon) = \inf \left\{ s > \sigma_0(\mathcal{A}_\varepsilon) \ \text{ tel que } \ \sup_{\Re\lambda = s} \left\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \right\| < +\infty \right\}. \tag{5.2.8}$$

Théorème 5.2.1 *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ *et* $\mathbf{H_3}$, *pour tout* $C \in [0, C_\gamma)$ *nous avons l'inégalité suivante :*

$$\omega_0(\mathcal{A}_\varepsilon) < -\varepsilon C \tag{5.2.9}$$

où ε est choisi dans l'intervalle :

$$0 < \varepsilon < \frac{\gamma \left(\sqrt{\|B\|^2 + C_\gamma (C_\gamma - C)} - \|B\| \right)}{2C_\gamma \sqrt{\|B\|^2 - C^2}}. \tag{5.2.10}$$

En particulier, $S_\varepsilon(t)$ est exponentiellement stable si :

$$0 < \varepsilon < \frac{\gamma}{2\|B\| C_\gamma} \left(\sqrt{\|B\|^2 + C_\gamma^2} - \|B\| \right). \tag{5.2.11}$$

Démonstration- La démonstration se trouve dans K. Liu, Z. Liu, et B. Rao [11]. Ici, nous donnons un bref rappel pour faciliter la lecture. Nous montrons que pour tout $\sigma \geq -C$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|(\varepsilon\sigma + \mathbf{i}\tau)y - \mathcal{A}_\varepsilon y\| \geq \delta_\varepsilon \|y\|, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{5.2.12}$$

Comme pour $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\|(\varepsilon\sigma + \mathbf{i}\tau)y - \mathcal{A}_\varepsilon y\| \|y\| \geq \Re e \langle (\varepsilon\sigma + \mathbf{i}\tau)y - \mathcal{A}_\varepsilon y, y\rangle \geq \varepsilon (\sigma - \|B\|) \|y\|^2, \tag{5.2.13}$$

(5.2.12) est vérifié pour tout $\sigma > \|B\|$.

Supposons que l'inégalité (5.2.12) n'est pas satisfaite pour $\sigma \in [-C, \|B\|]$, alors il existe une famille de nombres réels et une famille de vecteurs normalisés y_p appartenant à $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon)$ tels que

$$((\varepsilon\sigma + \mathbf{i}\tau_p) I - \mathcal{A}_\varepsilon) y_p \equiv f_p \to 0 \text{ dans } \mathcal{H} \text{ quand } p \to +\infty. \tag{5.2.14}$$

D'après (5.2.14), nous avons :

$$\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \langle f_p - (\mathbf{i}\tau_p I - A) y_p + \varepsilon B y_p, y_p \rangle = \lim_{p \to +\infty} \Re e \langle B y_p, y_p \rangle. \tag{5.2.15}$$

De plus d'après (5.2.14) et (5.2.15) nous avons

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{i}\tau_p I - A) y_p\|^2 &= \|f_p - \varepsilon(\sigma I - B) y_p\|^2 && (5.2.16)\\
&\leq \|f_p\|^2 + 2\varepsilon \|\sigma I - B\| \|f_p\| + \varepsilon^2 \|(\sigma I - B) y_p\|^2 && (5.2.17)\\
&= o(1) + \varepsilon^2 \left(\sigma^2 - 2\sigma \Re \langle B y_p, y_p\rangle + \|B y_p\|^2\right) && (5.2.18)\\
&\leq \varepsilon^2 \left(\|B\|^2 - \sigma^2\right) + o(1). && (5.2.19)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, il existe un entier N dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\|(\mathbf{i}\tau_p I - A) y_p\|^2 \leq \varepsilon^2 \left(\|B\| - \sigma^2 + \delta\right) \quad \forall p > N. \tag{5.2.20}$$

Nous développons y_p pour tout $P > N$ dans la base formée des vecteurs propres normaliés de l'opérateur A :

$$y_p = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y_p, \varphi_n \rangle \varphi_n. \tag{5.2.21}$$

En substituant (5.2.21) dans (5.2.20), nous avons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_p - \lambda_n|^2 |\langle y_p, \varphi_n \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \left(\|B\|^2 - \sigma^2 + \delta \right). \tag{5.2.22}$$

Choisissons $m = m(p)$ tel que

$$|\tau_p - \lambda_m| = \min \{ |\tau_p - \lambda_n| \quad / \quad n \in \mathbb{N} \}. \tag{5.2.23}$$

Nous avons alors

$$\frac{\gamma}{2} < |\tau_p - \lambda_n| \quad \forall n \notin I_{\gamma,m}. \tag{5.2.24}$$

En fait, si $|\tau_p - \lambda_m| \geq \dfrac{\gamma}{2}$, l'inégalité (5.2.24) est triviale. Si $|\tau_p - \lambda_m| < \dfrac{\gamma}{2}$, d'après (5.2.24) nous avons $|\tau_p - \lambda_n| \geq |\lambda_n - \lambda_m| - |\tau_p - \lambda_m|$. En combinant (5.2.22) et (5.2.24) on obtient :

$$\frac{\gamma^2}{4} \sum_{n \notin I_{\gamma,m}} |\langle y_p, \varphi \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \left(\|B\|^2 - \sigma^2 + \delta \right). \tag{5.2.25}$$

Posant :

$$z_p = \sum_{n \in I_{\gamma,m}} \langle y_p, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad \text{pour} \quad p > N, \tag{5.2.26}$$

on déduit de (5.2.25) que

$$\|y_p - z_p\| \leq \frac{2\varepsilon}{\gamma} \sqrt{\|B\|^2 - \sigma^2 + \delta}, \quad 1 \geq \|z_p\|^2 \geq 1 - \frac{4\varepsilon^2}{\gamma^2} \left(\|B\|^2 - \sigma^2 + \delta \right). \tag{5.2.27}$$

Comme la fonction

$$g(x) = \frac{\sqrt{\|B\|^2 + C_\gamma \left(C_\gamma + x \right)} - \|B\|}{\sqrt{\|B\|^2 - x^2}} \tag{5.2.28}$$

est croissante sur $(-C_\gamma, \|B\|)$, l'inégalité (5.2.10) implique. (5.2.11). Nous avons donc :

$$\frac{2\|B\|\varepsilon}{\gamma} < \frac{\sqrt{\|B\|^2 + C_\gamma^2} - \|B\|}{C_\gamma} = \frac{C_\gamma}{\sqrt{\|B\|^2 + C_\gamma^2} + \|B\|} < 1. \tag{5.2.29}$$

D'après (5.2.27), nous savons que $z_p \neq 0$ si δ est assez petit. Donc $\dfrac{z_p}{\|z_p\|} \in \Sigma_\gamma$. D'après (5.2.5) ona :

$$-\Re\langle Bz_p, z_p\rangle \geq C_\gamma \|z_p\|^2 \geq C_\gamma\left(1 - \frac{4\varepsilon^2}{\gamma^2}\left(\|B\|^2 - \sigma^2 + \delta\right)\right). \tag{5.2.30}$$

Par conséquent, d'après (5.2.15), (5.2.27) et (5.2.31) nous avons :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \lim_{p\to+\infty} \Re\langle By_p, y_p\rangle \\
&\leq \sup_{p>N}\left(\Re\langle Bz_p, z_p\rangle + \Re\langle B(y_p - z_p), y_p\rangle + \Re\langle Bz_p, y_p - z_p\rangle\right) \\
&\leq \sup_{p>N}\left(-C_\gamma\|z_p\|^2 + (1 + \|z_p\|)\,\|B\|\,\|y_p - z_p\|\right) \\
&\leq -C_\gamma\left(1 - \frac{4\varepsilon^2}{\gamma^2}\left(\|B\|^2 - \sigma^2 + \delta\right)\right) + \frac{4\|B\|\varepsilon}{\gamma}\sqrt{\|B\|^2 - \sigma^2 + \delta}.
\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

Par passage à la limite ($\delta \to 0$) dans (5.2.31), on obtient :

$$C_\gamma + \sigma \leq 4C_\gamma\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\sqrt{\|B\|^2 - \sigma^2}\right)^2 + 4\|B\|\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\sqrt{\|B\|^2 - \sigma^2}\right). \tag{5.2.32}$$

Si $\sigma = \|B\|$, alors (5.2.32) est une contradiction. Si $-C \leq \sigma < \|B\|$, (5.2.32) implique

$$\varepsilon \geq \frac{\gamma}{2C_\gamma} g(\sigma) \geq \frac{\gamma}{2C_\gamma} g(-C), \tag{5.2.33}$$

qui est en contadiction avec (5.2.25). Comme $\mathcal{A}_\varepsilon$ est à résolvante compacte, d'après (5.2.15) la résolvante de $\mathcal{A}_\varepsilon$ est bornée sur $\varepsilon\sigma + \mathbf{i}\mathbb{R}$ pour tout $\sigma \geq -C$. Ainsi la résolvante est bornée sur $\{\varepsilon\sigma + \mathbf{i}\tau \geq -C - \delta,\ \ \tau \in \mathbb{R}\}$ pour tout $\delta > 0$ assez petit. Ceci termine la démonstration.

Il est facile de voir que les conditions

$\mathbf{H_4}$ Le spectre de l'opérateur A satisfait la condition d'écartement :

$$\gamma_0 \equiv \inf\{|\lambda_j - \lambda_k| \ \ / \ \ j, k = 1, 2, \ldots, \ \ \lambda_j \neq \lambda_k\} > 0. \tag{5.2.34}$$

H_5 Pour tout vecteur propre normalisé φ de l'opérateur A,

$$-\Re\langle B\varphi,\varphi\rangle \geq C_0 > 0 \tag{5.2.35}$$

impliquent la condition **H_3** avec $\gamma = \gamma_0$

Corollaire 5.2.1 *Supposons que les hypotèses* **H_1**, **H_2**, **H_4** *et* **H_5** *sont satisfaites. Alors le semi-groupe $S_\varepsilon(t)$ est exponentiellement stable si*

$$0 < \varepsilon < \frac{\gamma_0}{2\|B\|C_0}\left(\sqrt{\|B\|^2 + C_0^2} - \|B\|\right). \tag{5.2.36}$$

De plus pour tout $C \in (0, C_0)$, nous avons :

$$\omega_0(\mathcal{A}) < -\varepsilon C, \quad \textit{pour tout} \;\; 0 < \varepsilon < \frac{\gamma_0\left(\sqrt{\|B\|^2 + C_0(C_0 - C)} - \|B\|\right)}{2C_0\sqrt{\|B\|^2 - C^2}}. \tag{5.2.37}$$

5.3 Les équations des ondes couplées avec des contrôles distribués non dissipatifs

Dans ce paragraphe, nous considérons le système des éequations des ondes couplée soumises à des contrôles non dissipatifs :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2a\varepsilon u_t + \alpha(u - v) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{tt} - v_{xx} + 2b\varepsilon v_t + \alpha(v - u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(0,x) = z_0(x), \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(0,x) = w_0(x). \end{cases} \tag{5.3.1}$$

où $\alpha > 0$ est une constante a et b sont deux fonctions de $L^\infty(0,1)$. Nous définissons l'espace de l'énergie par

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1), \tag{5.3.2}$$

et l'énergie d'une solution (u, v) par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2 + u_t^2 + v_x^2 + v_t^2 + \alpha(u - v)^2 dx. \tag{5.3.3}$$

Le système (5.3.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \mathcal{A}_\varepsilon u(t) = (A+\varepsilon B)u(t), \\ u(x,0) = u_0. \end{cases} \tag{5.3.4}$$

où les opérateurs A et B sont définis par :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \partial_{xx}-\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \partial_{xx}-\alpha & 0 \end{pmatrix}, \\ D(\mathcal{A}) &= \mathcal{V}\times H_0^1(0,1)\times\mathcal{V}\times H_0^1(0,1), \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où on a posé $\mathcal{V} := H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1)$. Il est facile de voir que l'opérateur A est anti-adjoint et à résolvante compacte, et l'opérateur B est borné dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Lemme 5.3.1 *Soit $\alpha > 0$ une constante. Alors le spectre de l'opérateur A est la réunion des deux branches définies par :*

$$\lambda_n = \pm\mathbf{i}n\pi, \quad n\in\mathbb{N}^*, \tag{5.3.5}$$

$$\lambda_m^\alpha = \pm\mathbf{i}\sqrt{m^2\pi^2+2\alpha}, \quad m\in\mathbb{N}^*. \tag{5.3.6}$$

Démonstration- Soit $y(x) = (u,z,v,w)$ une fonction propre associée à la valeur propre λ de l'opérateur A. Alors le couple (u,v) est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \lambda^2 u - u_{xx} + \alpha(u-v) = 0, & 0<x<1, \\ \lambda^2 v - v_{xx} + \alpha(v-u) = 0, & 0<x<1, \\ u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{5.3.7}$$

Posons :

$$\varphi = u+v, \quad \varphi^\alpha = u-v. \tag{5.3.8}$$

D'après le Lemme 3.2.1 du Chapitre 3, λ est une valeur propre de l'opérateur A si et seulement si λ est une valeur propre du système :

$$\begin{cases} \varphi^\alpha_{xx} - (\lambda^2+2\alpha)\varphi^\alpha = 0, \\ \varphi^\alpha(0) = \varphi^\alpha(1) = 0, \end{cases} \tag{5.3.9}$$

ou du système

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_{xx}-\lambda^2\varphi=0,\\ \varphi(0)=\varphi(1)=0.\end{array}\right. \tag{5.3.10}$$

Les équations charactéristiques des systèmes (5.3.9) et (5.3.10) sont respectivement :

$$\tau^2-\lambda^2=0,\quad \tau^2-(\lambda^2+2\alpha)=0. \tag{5.3.11}$$

Un calcul direct donne :

$$\left\{\begin{array}{llll}\lambda_{\pm n}= & \pm\mathbf{i}n\pi, & \varphi_{\pm n}= & \sin n\pi x,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\\ \lambda_{\pm m}^{\alpha}= & \pm\mathbf{i}\sqrt{m^2\pi^2+2\alpha}, & \varphi_{\pm m}^{\alpha}= & \sin m\pi x,\quad \forall m\in\mathbb{N}^*.\end{array}\right. \tag{5.3.12}$$

Ceci termine la démonstration.

Avec la norme de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, le vecteur propre normalisé $y_n(x)$ associé à la valeur propre $\lambda_{\pm n}$ est donné par :

$$y_{\pm n}(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x,\pm\mathbf{i}\sin n\pi,\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x,\pm\mathbf{i}\sin n\pi x\right), \tag{5.3.13}$$

et le vecteur propre normalisé $y_{\pm m}^{\alpha}(x)$ associé à la valeur propre λ_m^{α} est donné par :

$$y_{\pm m}^{\alpha}(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m^2\pi^2+2\alpha}}\sin m\pi x,\pm\mathbf{i}\sin m\pi,-\frac{1}{\sqrt{m^2\pi^2+2\alpha}}\sin m\pi x,\mp\mathbf{i}\sin m\pi x\right).$$

Remarques 5.3.1- Pour vérifier l'hypothèse $\mathbf{H_3}$ nous avons besoin des observations suivantes :

1- Soit $n\neq m$ deux entiers. Alors on a :

$$|\lambda_{\pm n}-\lambda_{\pm m}|=|(n-m)\mathbf{i}\pi|\geq\pi=\gamma_1>0. \tag{5.3.14}$$

Ceci implique que les valeurs propres dans la première branche satisfont à la condition d'écartement

$$\inf_{m\neq n}|\lambda_{\pm n}-\lambda_{\pm m}|:=\gamma_1>0. \tag{5.3.15}$$

2- Pour vérifier la condition d'écartement dans la deuxième branche il suffit de considérer deux termes consécutifs. En effet, d'après (5.3.6) nous avons :

$$\left|\lambda_{m+1}^{\alpha}-\lambda_m^{\alpha}\right| = \frac{(2m+1)\pi^2}{\sqrt{(m+1)^2\pi^2+2\alpha}+\sqrt{m^2\pi^2+2\alpha}} \tag{5.3.16}$$

$$> \frac{(2m+1)\pi^2}{2\sqrt{(1+m)^2\pi^2+2\alpha}}>\frac{3\pi^2}{2\sqrt{4\pi^2+2\alpha}}:=\gamma_2>0. \tag{5.3.17}$$

La condition d'écartement est donc satisfaite dans la deuxième branche.

3- Considérons maintenant deux valeurs propres appartenant à deux branches différentes et de même indice :

$$\begin{aligned} |\lambda_n - \lambda_n^\alpha| &= \sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha} - n\pi \\ &= \frac{2\alpha}{\sqrt{n^2\pi^2 + 2\alpha} + n\pi} \\ &\leq \frac{\alpha}{n\pi}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $|\lambda_n - \lambda_n^\alpha| \to 0$. Nous concluons que les deux branches sont asymptotiquement proches.

4- Étudions l'écartement des valeurs propres appartenant à deux branches différentes et d'indices différents $(n \neq m)$:

$$\begin{aligned} |\lambda_n - \lambda_m^\alpha| &\geq |\lambda_n - \lambda_m| - |\lambda_m - \lambda_m^\alpha| \\ &> \pi - |\lambda_m - \lambda_m^\alpha| \\ &= \pi - \sqrt{m^2\pi^2 + 2\alpha} + m\pi \\ &= \pi - \frac{2\alpha}{\sqrt{m^2\pi^2 + 2\alpha} + m\pi} \\ &\geq \pi - \frac{\alpha}{m\pi} \end{aligned}$$

Il existe donc $N > 0$ tel que $|\lambda_n - \lambda_m^\alpha| \geq \gamma_3 > 0$ pour $m \neq n$ et $m \geq N$, ou $n \geq N$.

5- Soient $\lambda_p = \lambda_q^\alpha$, pour $p > q$. Alors on a :

$$\alpha^* = \frac{(p^2 - q^2)\,\pi^2}{2} > 0. \tag{5.3.18}$$

Si $\alpha = \alpha^*$, $\lambda_p = \lambda_q^{\alpha^*}$ est une valeur propre double associée au vecteur propre $\varphi = C_*\varphi_p^* + C_{\alpha^*}\varphi_q^{\alpha^*}$. Notons que cette situation ne se produit que pour un nombre fini de couples $p > q$.

6- Soient maintenant, $n, m \leq N$.

- Si $\alpha \neq \alpha^*$, $\lambda_n \neq \lambda_m^\alpha$ pour tout $n, m \leq N$. Alors il existe $\gamma_4 > 0$ tel que

$$|\lambda_n - \lambda_m^\alpha| = \left| \frac{m^2\pi^2 + 2\alpha - n^2\pi^2}{\sqrt{m^2\pi^2 + 2\alpha} + n\pi} \right| \geq \gamma_4, \quad \forall n, m \leq N. \tag{5.3.19}$$

• Si $\alpha = \alpha^*$, $\lambda_n \neq \lambda_m^{\alpha^*}$ pour tout $p_i \neq n$ et $q_i \neq m$. Alors pour tout $n, m \leq N$ tels que $p_i \neq n$ et $q_i \neq m$, nous avons :

$$|\lambda_n - \lambda_m^\alpha| \geq \gamma_4 > 0. \tag{5.3.20}$$

On pose $\gamma_0 = \min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$. D'après les remarques **1, 2, 3, 4, 5** et **6** nous définissons l'ensemble suivant :

(a) Si $\alpha \neq \alpha^*$. Alors

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma_0}^a &= \left\{ C y_{\pm n} + C_\alpha y_{\pm n}^\alpha \ / \ |C|^2 + |C_\alpha|^2 = 1, \quad n > N, \quad C, C_\alpha \in \mathbb{C} \right\} \\ &\cup \ \left\{ y_{\pm n}, \quad y_{\pm n}^\alpha \ / \ n \leq N \right\}. \end{aligned}$$

Pour vérifier l'hypothèse $\mathbf{H_3}$ il suffit de montrer que $-\langle B\phi, \phi\rangle = C^{te} > 0$ pour tout $\phi \in \sum_{\gamma_0}^a$. En effet :

$$\begin{aligned} -\langle B\phi, \phi\rangle &= -\left\langle B\left(C y_{\pm n} + C_\alpha y_{\pm n}^\alpha\right), C y_{\pm n} + C_\alpha y_{\pm n}^\alpha \right\rangle && (5.3.21) \\ &= -\Big(|C|^2 \langle B y_{\pm n}, y_{\pm n}\rangle + C\overline{C_\alpha} \left\langle B y_{\pm n}, y_{\pm n}^\alpha \right\rangle && (5.3.22) \\ &+ \overline{C} C_\alpha \left\langle B y_{\pm n}^\alpha, y_{\pm n} \right\rangle + |C_\alpha|^2 \left\langle B y_{\pm n}^\alpha, y_{\pm n}^\alpha \right\rangle \Big) && (5.3.23) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} -By_{\pm n} &= \sqrt{2}\mathbf{i}\,(0, \pm a, 0, \pm b) \sin n\pi x, && (5.3.24) \\ -By\alpha_{\pm n} &= \sqrt{2}\mathbf{i}\,(0, \pm a, 0, \mp b) \sin n\pi x. && (5.3.25) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle B y_{\pm n}, y_{\pm n}\rangle &= -\int_0^1 (a+b) \sin^2 n\pi x dx, && (5.3.26) \\ \left\langle B y_{\pm n}^\alpha, y_{\pm n}^\alpha \right\rangle &= -\int_0^1 (a+b) \sin^2 n\pi x dx, && (5.3.27) \\ \left\langle B y_{\pm n}, y_{\pm n}^\alpha \right\rangle &= -\int_0^1 (a-b) \sin^2 n\pi x dx = \left\langle B y_{\pm n}^\alpha, y_{\pm n} \right\rangle. && (5.3.28) \end{aligned}$$

Choisissons par exemple $a(x) = 1 + a_1 \cos(2h+1)\pi x, \quad b(x) = 1 + b_1 \cos(2k+1)\pi x$

avec $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ et $h, k \in \mathbb{N}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} -\langle By_{\pm n}, y_{\pm n}\rangle &= \int_0^1 (a+b)\sin^2 n\pi x dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2n\pi x\right)\Big(2 + a_1\cos(2h+1)\pi x \\ &+ b_1\cos(2k+1)\pi x\Big)dx = 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\left\langle By^{\alpha}_{\pm n}, y_{\pm n}\right\rangle &= \int_0^1 (a-b)\sin^2 n\pi x dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2n\pi x\right)\Bigg(a_1\cos(2h+1)\pi x \\ &- b_1\cos(2k+1)\pi x\Bigg)dx = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$-\langle B\phi, \phi\rangle = 1, \qquad \forall \phi \in \Sigma^a_{\gamma_0}. \tag{5.3.29}$$

($\mathbf{b}$) Si $\alpha = \alpha^*$. Dans ce cas on définit :

$$\begin{aligned} \Sigma^b_{\gamma_0} &= \left\{Cy_{\pm n} + C_\alpha y^\alpha_{\pm n} \;\;/\;\; |C|^2 + |C_\alpha|^2 = 1, \;\; n > N\right\} \\ &\cup \;\left\{y_{\pm n}, y^\alpha_{\pm n} \;\;/\;\; n \leq N\right\} \cup \left\{C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q} \;\;/\;\; |C_*|^2 + |C_{\alpha^*}|^2 = 1\right\} \\ &= \Sigma_{\gamma_0} \cup \Big\{C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q} \;\;/\;\; |C_*|^2 + |C_{\alpha^*}|^2 = 1\Big\}. \end{aligned}$$

Pour vérifier $\mathbf{H_3}$, d'après les calcules dans l'etape ($\mathbf{a}$), il suffit de compléter le calcul du terme

$$\left\langle -B\left(C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q}\right), C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle. \tag{5.3.30}$$

Soit $p > q > 0$. Alors on a :

$$\begin{aligned} &- \;\left\langle B\left(C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q}\right), C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle \\ &= \;|C_*|^2 + \left(\overline{C_*} C_{\alpha^*} + C_* \overline{C_{\alpha^*}}\right)\left\langle -By_{\pm p}, y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle + |C_{\alpha^*}|^2 \\ &= \;1 + \left(\overline{C_*} C_{\alpha^*} + C_* \overline{C_{\alpha^*}}\right)\left\langle -By_{\pm p}, y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$
\begin{aligned}
\left\langle -By_{\pm p}, y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle &= \int_0^1 (a-b)\sin p\pi x \sin q\pi x dx \\
&= \int_0^1 (a_1\cos(2h+1)\pi x - b_1\cos(2k+1)\pi x)\sin p\pi x \sin q\pi x dx \\
&= \int_0^1 \frac{a_1}{4}\left(\cos\left(2h+1-(p-q)\right)\pi x - \cos\left(2h+1-(p+q)\right)\pi x\right) \\
&- \frac{b_1}{4}\left(\cos\left(2k+1-(p-q)\right)\pi x - \cos\left(2k+1-(p+q)\right)\pi x\right) dx \\
&= A + D.
\end{aligned}
$$

Nous distinguons les cas suivants :

i Si $2h+1 \neq (p-q)$, $2h+1 \neq (p+q)$, $2k+1 \neq (p+q)$ et $2k+1 \neq (p-q)$. Alors on a :

$$
-\left\langle By_{\pm p}, y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle = 0. \tag{5.3.31}
$$

ii Si $2h+1 = (p-q)$, alors $2h+1 \neq (p+q)$. Respectivement si $2h+1 = (p+q)$, alors $2h+1 \neq (p-q)$. On a :

$$
|A| \leq \frac{|a_1|}{4}. \tag{5.3.32}
$$

De même, si $2k+1 = (p+q)$, alors $2k+1 \neq (p-q)$. Respectivement si $2k+1 = (p-q)$, alors $2k+1 \neq (p+q)$. On a :

$$
|D| \leq \frac{|b_1|}{4}. \tag{5.3.33}
$$

Combinant les cas **i** et **ii**, on obtient :

$$
\left|-\left\langle By_{\pm p}, y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle\right| \leq \frac{|a_1|+|b_1|}{4}. \tag{5.3.34}
$$

Par conséquent, on a :

$$
\begin{aligned}
&- \quad \left\langle B\left(C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q}\right), C_* y_{\pm p} + C_{\alpha^*} y^{\alpha^*}_{\pm q}\right\rangle && (5.3.35)\\
&\geq \quad 1 - 2\left|C_*\right|\left|C_{\alpha^*}\right| \frac{|a_1|+|b_1|}{4} && (5.3.36)\\
&\geq \quad 1 - \frac{|a_1|+|b_1|}{4} := C_{\gamma_0}. && (5.3.37)
\end{aligned}
$$

Ainsi on a montré que si a_1 et b_1 verifient la condition :

$$|a_1| + |b_1| < 4, \tag{5.3.38}$$

alors on a :

$$-\langle B\phi, \phi\rangle \geq C_{\gamma_0} > 0, \qquad \forall \phi \in \Sigma^b_{\alpha_0}. \tag{5.3.39}$$

Nous concluons ce paragraphe par le Théorème suivant :

Théorème 5.3.1 *Soient a_1, b_1 deux réels tels que $|a_1| + |b_1| < 4$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ le semi-groupe $S_\varepsilon(t)$ est exponentiellement stable.*

Démonstration- Nous avons montré que le système (5.3.1) vérifie les hypothèses $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ et $\mathbf{H_3}$, alors d'après le Théorème 2.1 posant :

$$\varepsilon_B = \frac{\gamma_0}{2\|B\|C_\gamma}\left(\sqrt{\|B\|^2 + C_\gamma^2} - \|B\|\right), \tag{5.3.40}$$

tel que le semi-groupe S_ε associé au système (5.3.1) est exponentiellement stable pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_B$.

Soit $\phi = (u, z, v, w) \in \mathcal{H}$ tel que $\|\phi\| = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\|B\phi\|^2_{\mathcal{H}} &= 4\int_0^1 a^2|z|^2 + b^2|w|^2 dx \\
&= 4\int_0^1 \left(1 + 2a_1\cos(2h+1)\pi x + a_1^2\cos^2(2h+1)\pi x\right)|z|^2 dx \\
&+ 4\int_0^1 \left(1 + 2b_1\cos(2k+1)\pi x + b_1^2\cos^2(2k+1)\pi x\right)|w|^2 dx \\
&\leq 4\int_0^1 (1 + |a_1|)^2|z|^2 + (1 + |b_1|)^2|w|^2 dx \\
&\leq 4\max\left((1 + |a_1|)^2, (1 + |b_1|)^2|\right)\int_0^1 |z|^2 + |w|^2 dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\|B\| \leq 2\left(1 + |a_1| + |b_1|\right). \tag{5.3.41}$$

Comme ε_B est décroissante par rapport à $\|B\|$, alors le système (5.3.1) est exponentiellement stable pour

$$\begin{aligned}
0 \; < \; \varepsilon &< \frac{\gamma_0}{(1 + |a_1| + |b_1|)(4 - |a_1| + |b_1|)} \\
&\left(\sqrt{4\left(1 + |a_1| + |b_1|\right)^2 + \left(1 - \frac{|a_1| + |b_1|}{4}\right)^2} - 2(1 + |a_1| + |b_1|)\right) := \varepsilon_0 < \varepsilon_B.
\end{aligned}$$

5.4 Équations de poutres de Rayleigh couplées avec des contôles non-dissipatifs.

Dans ce paragraphe on s'intéresse au système des équations des poutres de Rayleigh couplées en moyennant deux contrôles non dissipatifs :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{ttxx} + u_{xxxx} + 2\varepsilon(au_{tx})_x + \alpha(u-v) = 0, & 0 < x < 1, \\ v_{tt} - v_{ttxx} + v_{xxxx} + 2\varepsilon(bv_{tx})_x + \alpha(v-u) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = v_{xx}(0,t) = v_{xx}(1,t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(0,x) = z_0(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(0,x) = w_0(x) \end{cases} \tag{5.4.1}$$

où a, b sont des fonctions dans $L^\infty(0,1)$ et α est une constante positive. Nous montrons à l'aide du Théorème 2.1 que le système (5.4.1) est exponentiellement satble .

Soit l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$ défini par :

$$\mathcal{H} = \left(H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)\right) \times H_0^1(0,1) \times \left(H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)\right) \times H_0^1(0,1). \tag{5.4.2}$$

L'énergie de la solution du système (5.4.1) est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2 + v_{xx}^2 + z^2 + w^2 + z_x^2 + w_x^2 + \alpha(u-v)^2 dx. \tag{5.4.3}$$

On définit les opérateurs A et B par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -G^{-1}(\partial_{xxxx} + \alpha) & 0 & \alpha G^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha G^{-1} & 0 & -G^{-1}(\partial_{xxxx} + \alpha) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \begin{array}{c} (u,z,v,w) \in \mathcal{H} \text{ tel que } u,v \in H^3(0,1) \cap H_0^1(0,1), \\ z,w \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \quad u_{xx}(i) = v_{xx}(i) = 0, \quad i = 0,1 \end{array} \right\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2G^{-1}(a\partial_x)_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2G^{-1}(b\partial_x)_x \end{pmatrix},$$

où

$$z := G^{-1}y = (I - \partial_{xx})^{-1}\, y \tag{5.4.4}$$

est un isomorphisme de $H^{-1}(0,1)$ dans $H_0^1(0,1)$ défini par :

$$\int_0^1 (z_x\phi_x + z\phi)\,dx = \langle y,\phi\rangle_{H^{-1}(0,1)\times H_0^1(0,1)}, \quad \forall\phi \in H_0^1(0,1). \tag{5.4.5}$$

En posant $U = (u, z, v, w)$, nous transformons le problème (5.1.4) en un problème d'évolution :

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}_\varepsilon U = (A + \varepsilon B)\,U, \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{H} \tag{5.4.6}$$

Comme A est un opérateur anti-adjoint et B est borné dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}_\varepsilon$ engendre un C_0semi-groupe $S_\varepsilon(t)$ dans l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$ (voir Pazy [13], Lagnese [10], Rao [15]). Donc les hypothèses ($\mathbf{H_1}$) et ($\mathbf{H_2}$) sont satisfaites.

Lemme 5.4.1 *Soit α une constante positive. Alors le spectre de l'opérateur A est la réunion des spectres σ_n et σ_n^α définis par*

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{\lambda_{\pm n} = \pm\mathbf{i}\frac{n^2\pi^2}{\sqrt{n^2\pi^2+1}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*\}, \qquad (5.4.7)\\ &et \\ \sigma_m^\alpha &= \{\lambda_{\pm m}^\alpha = \pm\mathbf{i}\sqrt{\frac{n^4\pi^4+2\alpha}{n^2\pi^2+1}} \quad ; \quad m \in \mathbb{N}^*\}. \qquad (5.4.8)\end{aligned}$$

Démonstration- Soit λ une valeur propre de l'opérateur A. Alors il existe (u, v) solution du problème de valeur propre suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda^2 u - \lambda^2 u_{xx} + u_{xxxx} + \alpha(u-v) = 0, & 0 < x < 1,\\ \lambda^2 v - \lambda^2 v_{xx} + v_{xxxx} + \alpha(v-u) = 0, & 0 < x < 1,\\ u(0,\lambda) = u(1,\lambda) = v(0,\lambda) = v(1,\lambda) = 0, & \forall t > 0,\\ u_{xx}(0,\lambda) = u_{xx}(1,\lambda) = v_{xx}(0,\lambda) = v_{xx}(1,\lambda) = 0, & \end{array}\right. \tag{5.4.9}$$

Si on pose $\varphi = u+v$ et $\varphi^\alpha = u-v$, alors λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2\varphi - \lambda^2\varphi_{xx} + \varphi_{xxxx} = 0,\\ \varphi(0,\lambda) = \varphi(1,\lambda) = 0,\\ \varphi_{xx}(0,\lambda) = \varphi_{xx}(1,\lambda) = 0; \end{array}\right. \tag{5.4.10}$$

ou du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2\varphi^\alpha - \lambda^2\varphi_{xx}^\alpha + \varphi_{xxxx}^\alpha + 2\alpha\varphi^\alpha = 0,\\ \varphi^\alpha(0,\lambda) = \varphi^\alpha(1,\lambda) = 0,\\ \varphi_{xx}^\alpha(0,\lambda) = \varphi_{xx}^\alpha(1,\lambda) = 0. \end{array}\right. \tag{5.4.11}$$

Les équations charactéristiques des systèmes (5.4.10) et (5.4.11) sont données par

$$\tau^4 - \lambda^2\tau^2 + \lambda^2 = 0,$$
$$\tau_\alpha^4 - \lambda^2\tau_\alpha^2 + (\lambda_\alpha^2 + 2\alpha) = 0.$$

Par conséquent, les solutions des problèmes (5.4.10) et (5.4.11) sont de la forme :

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda) &= A\sinh\tau^+ x + B\sinh\tau^- x,\\ \varphi^\alpha(x,\lambda) &= A_\alpha\sinh\tau_\alpha^+ x + B_\alpha\sinh\tau_\alpha^- x,\end{aligned}$$

avec

$$\tau^\pm = \sqrt{\frac{\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\lambda^2}}{2}}, \qquad \tau_\alpha^\pm = \sqrt{\frac{\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4(\lambda^2 + 2\alpha)}}{2}}. \tag{5.4.12}$$

En utilisant les conditions aux bords des deux problèmes, et sachant que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de l'opérateur A et que toutes ces valeurs propres sont imaginaires pures, nous obtenons les équations charactéristiques suivantes :

$$\sinh\tau^+ \cdot \sinh\tau^- = 0, \quad \text{et} \quad \sinh\tau_\alpha^+ \cdot \sinh\tau_\alpha^- = 0. \tag{5.4.13}$$

Ceci implique que l'opérateur A admet deux branches différentes de valeurs propres :

$$\lambda_{\pm n} = \pm\mathbf{i}\frac{n^2\pi^2}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{5.4.14}$$

est une valeur propre associée a la fonction propre

$$\varphi_{\pm n} = C_n \sin n\pi x, \quad C_n \in \mathbb{C}. \tag{5.4.15}$$

De même,

$$\lambda_{\pm n}^\alpha = \pm\mathbf{i}\sqrt{\frac{n^4\pi^4 + 2\alpha}{n^2\pi^2+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{5.4.16}$$

est une valeur propre associée à la fonction propre

$$\varphi_{\pm m}^\alpha = C_m^\alpha \sin m\pi x, \quad C_m^\alpha \in \mathbb{C}. \tag{5.4.17}$$

Ceci termine la démonstration.

Soit λ une valeur propre de l'opérateur A. Alors il existe (u, v) solution du problème (5.4.9) telle que $(u, \lambda u, v, \lambda v)$ est le vecteur propre de l'opérateur A associée à la valeur propre λ. Reciproquement, si $\lambda = \lambda_{\pm n}$ est une valeur propre de (5.4.10), et u satisfait l'équation de (5.4.10), on aura :

$$v = \frac{1}{\alpha}\left(u_{xxxx} - \lambda^2 u_{xx} + \lambda^2 u + \alpha u\right) = u. \tag{5.4.18}$$

De même si $\lambda = \lambda^{\alpha}_{\pm n}$ est une valeur propre de (5.4.11), et u satisfait l'équation de (5.4.11), on aura : $u = -v$. Par conséquent, $\lambda_{\pm n} = \pm\mathbf{i}\dfrac{n^2\pi^2}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}$ est une valeur propre de A associée au vecteur propre :

$$\phi_{\pm n} = C_n\left(1, \pm\mathbf{i}\frac{n^2\pi^2}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}, 1, \pm\mathbf{i}\frac{n^2\pi^2}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}\right)\sin n\pi x, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{5.4.19}$$

et $\lambda^{\alpha}_{\pm m} = \pm\mathbf{i}\sqrt{\dfrac{m^4\pi^4+2\alpha}{m^2\pi^2+1}}$ est une valeur propre de A associée au vecteur propre :

$$\phi^{\alpha}_{\pm m} = C^{\alpha}_m\left(1, \pm\mathbf{i}\sqrt{\frac{m^4\pi^4+2\alpha}{m^2\pi^2+1}}, 1, \mp\mathbf{i}\sqrt{\frac{m^4\pi^4+2\alpha}{m^2\pi^2+1}}\right)\sin m\pi x, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{5.4.20}$$

En utilisant la norme de l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\phi_{\pm n}\| &= 2|C_n|^2\int_0^1 \left(n^4\pi^4 + \frac{n^4\pi^4}{n^2\pi^2+1}\right)\sin^2 n\pi x + \frac{n^6\pi^6}{n^2\pi^2+1}\cos^2 n\pi x dx \\
&= 2|C_n|^2 n^4\pi^4
\end{aligned}$$

Nous choisissons alors $C_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{n^2\pi^2}$ ce qui fournit le vecteur propre normalisé :

$$\phi_{\pm n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}, \pm\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}, \frac{1}{n^2\pi^2}, \pm\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}\right)\sin n\pi x, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{5.4.21}$$

Nous calculons de la même manière la norme du vecteur $\phi^{\alpha}_{\pm m}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\left\|\phi^{\alpha}_{\pm m}\right\| &= 2|C_m|^2\int_0^1 \left(m^4\pi^4 + 2\alpha + \frac{m^4\pi^4+2\alpha}{1+m^2\pi^2}\right)\sin^2 m\pi x \\
&+ m^2\pi^2\frac{m^4\pi^4+2\alpha}{1+m^2\pi^2}\cos^2 m\pi x dx \\
&= 2|C_m|^2\left(m^4\pi + 2\alpha\right).
\end{aligned}$$

Donc le vecteur propre normalisé de l'opérateur A associé à la valeur propre $\lambda^{\alpha}_{\pm m}$ est donné par :

$$\phi^{\alpha}_{\pm m} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m^4\pi^4+2\alpha}}, \pm\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{1+m^2\pi^2}}, \frac{1}{\sqrt{m^4\pi^4+2\alpha}}, \mp\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{1+m^2\pi^2}}\right)\sin m\pi x. \tag{5.4.22}$$

Remarques 5.4.1-

1- Soient λ_n et λ_{n+1} deux valeurs propres distinctes appartenant à la première branche . Alors on a :

$$|\lambda_{n+1}-\lambda_n| = \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2\pi^2}}} - \frac{n\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2\pi^2}}} = \pi + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.4.23}$$

Il existe $\gamma_1 > 0$ tel que $|\lambda_{n+1}-\lambda_n| > \gamma_1$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi on montre que les valeurs propres de la première branche satisfont une condition d'écartement.

2- Considérons les valeurs propres de la deuxième branche. S'il existe deux entiers $p \neq q$ tel que :

$$\lambda^{\alpha}_p = \lambda^{\alpha}_q, \qquad \text{pour certain} \quad \alpha^* > 0, \tag{5.4.24}$$

alors on a :

$$\alpha^* = \frac{\pi^4p^2q^2 + p^2\pi^2 + q^2\pi^2}{2}. \tag{5.4.25}$$

Supposons qu'il existe un entier r tel que :

$$\lambda^{\alpha^*}_p = \lambda^{\alpha^*}_q = \lambda^{\alpha^*}_r. \tag{5.4.26}$$

Alors, on aurait :

$$\pi^4p^2q^2 + p^2\pi^2 + q^2\pi^2 = \pi^4p^2r^2 + p^2\pi^2 + r^2\pi^2. \tag{5.4.27}$$

$$\text{Soit :} \qquad \pi^2\left(p^2q^2 - p^2r^2\right) + \left(r^2 - q^2\right) = 0. \tag{5.4.28}$$

Comme $p, q, r \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$q = r. \tag{5.4.29}$$

Ainsi on montre qu' il y a une seule valeur propre double de type $\lambda^{\alpha^*}_p = \lambda^{\alpha^*}_q$ si et seulement si $\alpha = \alpha^*$.

3- Considérons les valeurs propres de la deuxième branche :

$$\left|\lambda_{m+1}^{\alpha} - \lambda_m^{\alpha}\right| = \pi + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{5.4.30}$$

Ceci montre que

$$\left|\lambda_{m+1}^{\alpha} - \lambda_m^{\alpha}\right| \geq \gamma_2 \quad \text{pour} \quad m > N. \tag{5.4.31}$$

Combinant avec 2, nous concluons :

- Si $\alpha \neq \alpha^*$, alors il existe $\gamma_2 > 0$ tel que

$$\left|\lambda_m^{\alpha} - \lambda_n^{\alpha}\right| \geq \gamma_2 \quad \text{pour} \quad m \neq n. \tag{5.4.32}$$

- Si $\alpha = \alpha^*$, alors

$$\left|\lambda_m^{\alpha^*} - \lambda_n^{\alpha^*}\right| \geq \gamma_2 \quad \text{pour} \quad m \neq n \quad \text{et} \quad m \neq p, \quad n \neq q. \tag{5.4.33}$$

4- Soient λ_n, λ_n^{α} deux valeurs propres appartenant à deux branches différentes et de même indice, alors on a :

$$\begin{aligned} \left|\lambda_n - \lambda_n^{\alpha}\right| &= n\pi \left(\left(1 + \frac{2\alpha}{n^4\pi^4}\right) - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\alpha}{n^3\pi^3} + O\left(\frac{1}{n^5\pi^5}\right). \end{aligned}$$

Nous concluons alors que les deux branches de valeurs propres sont asymptotiquement proches.

5- Soient maintenant $\lambda_{\pm n}$ et λ_m^{α} deux valeurs propres appartenant à deux branches différentes et d'indices différents, alors pour $\delta > 0$ suffisament petit, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ ou $n > N$ et $n \neq m$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\lambda_n - \lambda_m^{\alpha}\right| &\geq \left|\lambda_n - \lambda_m\right| - \left|\lambda_m - \lambda_m^{\alpha}\right| \\ &> \left|\lambda_n - \lambda_m\right| - \delta > \gamma_1 - \delta = \gamma_3 > 0. \end{aligned}$$

6- Nous montrons qu'il existe une seule valeur propre double de type $\lambda_l = \lambda_r^{\alpha^{**}}$.
Soit $l, r \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_l = \lambda_r^{\alpha^{**}}$ alors on a :

$$\alpha = \alpha^{**} = \frac{\pi^4}{2} \cdot \frac{\left(l^2r^2\pi^2 + l^2 + r^2\right)\left(l^2 - r^2\right)}{l^2\pi^2 + 1}. \tag{5.4.34}$$

Supposons qu'il existe $\tilde{l}$, $\tilde{r}$ tels que :

$$\lambda_{\tilde{l}} = \lambda_{\tilde{r}}^{\alpha^{**}} \tag{5.4.35}$$

alors on a :

$$\frac{\left(\tilde{l}^2\tilde{r}^2\pi^2 + \tilde{l}^2 + \tilde{r}^2\right)\left(\tilde{l}^2 - \tilde{r}^2\right)}{\tilde{l}^2\pi^2 + 1} = \frac{\left(l^2r^2\pi^2 + l^2 + r^2\right)\left(l^2 - r^2\right)}{l^2\pi^2 + 1},$$

soit
$$\begin{aligned}&\pi^4\left(\tilde{l}^2\tilde{r}^2 l^2\left(\tilde{l}^2 - \tilde{r}^2\right) - l^2r^2\tilde{l}\left(l^2 - r^2\right)\right) + \pi^2\Big(\tilde{l}^2\tilde{r}^2\left(\tilde{l}^2 - \tilde{r}^2\right)\\ &+ l^2\left(\tilde{l}^2 + \tilde{r}^2\right)\left(\tilde{l}^2 - \tilde{r}^2\right)\Big) + \left(\tilde{l}^2 - \tilde{r}^2\right) = 0.\end{aligned}$$

Comme π est un nombre transcendant, on obtient :

$$\tilde{l}^2 - \tilde{r}^2 = l^2 - r^2 \tag{5.4.36}$$

$$\tilde{r}^2 l^2\left(\tilde{l}^2 - \tilde{r}^2\right) = l^2r^2\left(l^2 - r^2\right). \tag{5.4.37}$$

On en déduit :

$$r = \tilde{r}, \qquad l = \tilde{l}. \tag{5.4.38}$$

7- Montrons maintenant qu'il n' y a pas de valeur propre triple. En effet, s'il y avait une valeur propre triple, alors il existerait $p \neq q \neq r$ tels que

$$\lambda_l = \lambda_p^{\alpha^*} = \lambda_r^{\alpha^{**}}.$$

Alors on a nécessairement $\alpha^* = \alpha^{**}$, soit :

$$\frac{\pi^4}{2} \cdot \frac{\left(l^2r^2\pi^2 + l^2 + r^2\right)\left(l^2 - r^2\right)}{l^2\pi^2 + 1} = \frac{\left(p^2r^2\pi^4 + p^2\pi^2 + r^2\pi^2\right)}{2}. \tag{5.4.39}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\pi^4\left(l^2r^2\left(l^2 - r^2\right) - l^2p^2r^2\right) &+ \pi^2\left(\left(l^2 + r^2\right)\left(l^2 - r^2\right) - l^2\left(p^2 + r^2\right) - p^2r^2\right)\\ &= \left(p^2 + r^2\right).\end{aligned}$$

Ceci n'est pas possible, car p, l, r sont des entiers et π est un nombre transcendant.

8- Soit maintenant $\alpha \neq \alpha^*$ et $\alpha \neq \alpha^{**}$. Alors, il existe $\gamma_4 \geq 0$ tel que

$$|\lambda_n - \lambda_m^{\alpha}| \geq \gamma_4 \quad \forall m, n \leq \mathbb{N}. \tag{5.4.40}$$

On pose $\gamma_0 = \min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$. En utilisant la Remarque 4.1, nous distiguons trois cas possibles.

a- Si $\alpha \neq \alpha^{**}$ et $\alpha \neq \alpha^{*}$. Alors, la deuxième branche ne contient pas de valeurs propres double. Il existe N tel que pour tout $n > N$, $\lambda_{\pm n}$ et $\lambda^{\alpha}_{\pm n}$ sont proches. Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}\Sigma^{a}_{\gamma_0} &= \left\{C_1\varphi_{\pm n} + C_2\varphi^{\alpha}_{\pm n} \ / \ |C_1|^2 + |C_2|^2 = 1, \quad n > N, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}\right\} \\ &\cup \ \left\{\varphi_{\pm n}, \quad \varphi^{\alpha}_{\pm n}, \quad n \leq N\right\}. \end{aligned} \tag{5.4.41}$$

Soient (u, z, v, w) et (u', z', v', w') deux vecteurs propres. Par des intégrations par parties nous avons :

$$\begin{aligned} &- \ \langle B(u, z, v, w), (u', z', v', w')\rangle \\ &= \ \left\langle (0, 2G^{-1}(az_x)_x, 0, 2G^{-1}(bw_x)_x), (u', z', v', w')\right\rangle \\ &= \ 2\int_0^1 az_x\overline{z'}_x + bw_x\overline{w'}_x dx. \end{aligned} \tag{5.4.42}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} &- \ \left\langle B\left(C_1\varphi_{\pm n} + C_2\varphi^{\alpha}_{\pm n}\right), C_1\varphi_{\pm n} + C_2\varphi^{\alpha}_{\pm n}\right\rangle \\ &= \ |C_1|^2 \left\langle B\varphi_{\pm n}, \varphi_{\pm n}\right\rangle + |C_2|^2 \left\langle B\varphi^{\alpha}_{\pm n}, \varphi^{\alpha}_{\pm n}\right\rangle \\ &+ \ C_1\overline{C_2}\left\langle B\varphi_{\pm n}, \varphi^{\alpha}_{\pm n}\right\rangle + C_2\overline{C_1}\left\langle B\varphi^{\alpha}_{\pm n}, \varphi_{\pm n}\right\rangle \\ &= \ \left(|C_1|^2 + |C_2|^2\right)\int_0^1 \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2+1}\cos^2 n\pi x\,(a+b)\,dx \\ &+ \ \left(C_1\overline{C_2} + C_2\overline{C_1}\right)\int_0^1 \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2+1}\cos^2 n\pi x\,(a-b)\,dx. \end{aligned}$$

En posant,

$$a = 1 + a_1\cos(2h+1)\pi x, \qquad b = 1 + b_1\cos(2k+1)\pi x, \tag{5.4.43}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} &- \ \left\langle B\left(C_1\varphi_{\pm n} + C_2\varphi^{\alpha}_{\pm n}\right), C_1\varphi_{\pm n} + C_2\varphi^{\alpha}_{\pm n}\right\rangle \\ &= \ \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2+1}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2n\pi x\right)\left(2 + a_1\cos(2h+1)\pi x + b_1\cos(2k+1)\pi x\right)dx \\ &+ \ \left(C_1\overline{C_2} + C_2\overline{C_1}\right)\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2+1}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2n\pi x\right)\left(a_1\cos(2h+1)\pi x - b_1\cos(2k+1)\pi x\right)dx. \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\forall \psi \in \Sigma_{\gamma_0}^{a}, \qquad -\langle B\psi, \psi\rangle = \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2+1} > \frac{\pi^2}{\pi^2+1} > 0. \tag{5.4.44}$$

On en déduit que l'hypothèse ($\mathbf{H_3}$) est satisfaite dans ce cas.

b- Supposons maitenant $\alpha = \alpha*$. L'ensemble $\Sigma_{\gamma_0}^{b}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma_0}^{b} &= \left\{C_1\varphi_{\pm n} + C_2\varphi_{\pm n}^{\alpha^*} \;\; / \;\; |C_1|^2+|C_2|^2 = 1, \;\; n > N, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{C}\right\} \\ &\cup \;\; \left\{C_p\varphi_p^{\alpha^*} + C_q\varphi_q^{\alpha^*} \;\; / \;\; |C_p|^2+|C_q|^2 = 1, \;\; C_p, C_q \in \mathbb{C}\right\} \\ &\cup \;\; \left\{\varphi_{\pm n}, \;\; \varphi_{\pm n}^{\alpha^*}, \;\; n \leq N\right\}. \end{aligned} \tag{5.4.45}$$

Pour déterminer C_{γ_0}, il suffit de calculer l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &- \;\; \left\langle B\left(C_p\varphi_p^{\alpha^*} + C_q\varphi_q^{\alpha^*}\right), C_p\varphi_p^{\alpha^*} + C_q\varphi_q^{\alpha^*}\right\rangle \\ &= \;\; |C_p|^2\frac{p^2\pi^2}{p^2\pi^2+1}\int_0^1 \cos^2 p\pi x\,(a+b)\,dx \\ &+ \;\; |C_q|^2\frac{q^2\pi^2}{q^2\pi^2+1}\int_0^1 \cos^2 q\pi x\,(a+b)\,dx \\ &+ \;\; \left(C_p\overline{C_q} + C_q\overline{C_p}\right)\frac{pq\pi^2}{\sqrt{p^2\pi^2+1}\sqrt{q^2\pi^2+1}}\int_0^1 \cos p\pi x\cos q\pi x\,(a-b)\,dx \\ &= \;\; |C_p|^2\frac{p^2\pi^2}{p^2\pi^2+1} + |C_q|^2\frac{q^2\pi^2}{q^2\pi^2+1} \\ &+ \;\; \left(C_p\overline{C_q} + C_q\overline{C_p}\right)\frac{pq\pi^2}{\sqrt{p^2\pi^2+1}\sqrt{q^2\pi^2+1}})\Big(\frac{a_1}{4}\int_0^1 \cos(2h+1-(p+q))\pi x \\ &+ \;\; \cos(2h+1-(p-q))\pi x dx - \frac{b_1}{4}\int_0^1 \cos(2k+1-(p+q))\pi x \\ &+ \;\; \cos(2k+1-(p-q))\pi x dx)\Big) \\ &= \;\; |C_p|^2\frac{p^2\pi^2}{p^2\pi^2+1} + |C_q|^2\frac{q^2\pi^2}{q^2\pi^2+1} + A + D. \end{aligned}$$

Nous avons alors :

i− Si $2h+1 \neq (p-q)$, $2h+1 \neq (p+q)$, $2k+1 \neq (p+q)$ et $2k+1 \neq (p-q)$. Alors on a :

$$- \;\; \left\langle B\left(C_p\varphi_p + C_q\varphi_q^{\alpha}\right), C_p\varphi_p + C_q\varphi_q^{\alpha}\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= |C_p|^2\frac{p^2\pi^2}{p^2\pi^2+1} + |C_q|^2\frac{q^2\pi^2}{q^2\pi^2+1} \\
&\geq \frac{\pi^2}{\pi^2+1}.
\end{aligned}
$$

ii– Si $2h+1=(p-q)$, alors $2h+1\neq(p+q)$. Respectivement si $2h+1=(p+q)$, alors $2h+1\neq(p-q)$ on a :

$$
|A| \leq \frac{pq\pi^2}{\sqrt{p^2\pi^2+1}\sqrt{q^2\pi^2+1}}\frac{|a_1|}{4}. \tag{5.4.46}
$$

iii Si $2k+1=(p+q)$, alors $2k+1\neq(p-q)$. Respectivement $2k+1=(p-q)$, alors $2k+1\neq(p+q)$. On a :

$$
|D| \leq \frac{pq\pi^2}{\sqrt{p^2\pi^2+1}\sqrt{q^2\pi^2+1}}\frac{|b_1|}{4}. \tag{5.4.47}
$$

Combinant les cas **i**, **ii** et **iii**, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&- \left\langle B\left(C_p\varphi_p + C_q\varphi_q^\alpha\right), C_p\varphi_p + C_q\varphi_q^\alpha\right\rangle \\
&\geq |C_p|^2\frac{p^2\pi^2}{p^2\pi^2+1} + |C_q|^2\frac{q^2\pi^2}{q^2\pi^2+1} - 2\,|C_p|\,|C_q|\,\frac{pq\pi^2}{\sqrt{p^2\pi^2+1}\sqrt{q^2\pi^2+1}}\,\frac{|a_1|+|b_1|}{4} \\
&\geq \left(|C_p|^2\,\frac{p^2\pi^2}{p^2\pi^2+1} + |C_p|^2\,\frac{q^2\pi^2}{q^2\pi^2+1}\right)\left(1-\frac{|a_1|+|b_1|}{4}\right) \\
&\geq \frac{\pi^2}{\pi^2+1}\left(1-\frac{|a_1|+|b_1|}{4}\right).
\end{aligned}
$$

c- Nous considérons le cas où $\alpha=\alpha^{**}$. D'après Remarques 4.1, l'ensemble $\Sigma_{\gamma 0}^c$ est défini par :

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\gamma 0}^c &= \left\{C_1\varphi_{\pm n} + C_2\varphi_{\pm n}^{\alpha^{**}} \;\;/\;\; |C_1|^2+|C_2|^2=1, \quad n>N, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}\right\} \\
&\cup \left\{C_l\varphi_l + C_r\varphi_r^{\alpha^{**}} \;\;/\;\; |C_l|^2+|C_r|^2=1\right\} \\
&\cup \left\{\varphi_{\pm n}, \quad \varphi_{\pm n}^{\alpha^{**}}, \quad n\leq N,\right\}.
\end{aligned} \tag{5.4.48}
$$

Nous montrons de la même manière que dans le cas **b-** :

$$
\forall \psi \in \Sigma_{\gamma 0}^c \qquad -\langle B\psi,\psi\rangle \geq C_{\gamma 0} > 0. \tag{5.4.49}
$$

Théorème 5.4.1 *Soient a_1, b_1 deux réels tels que $|a_1| + |b_1| < 4$. Alors il existe ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, le semi-groupe $S_\varepsilon(t)$ est exponentiellement stable.*

Démonstration- Nous avons montré que le système (5.4.1) vérifie les hypothèses $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ et $\mathbf{H_3}$, alors d'après le Théorème 2.1 posant :

$$\varepsilon_B = \frac{\gamma_0}{2\|B\|C_\gamma}\left(\sqrt{\|B\|^2 + C_\gamma^2} - \|B\|\right), \tag{5.4.50}$$

tel que le semi-groupe S_ε associé au système (5.4.1) est exponentiellement stable pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_B$.
Soit $\phi = (u, z, v, w) \in \mathcal{H}$ tel que $\|\phi\| = 1$. Alors

$$\|B\| \leq 2\left(2 + |a_1| + |b_1|\right). \tag{5.4.51}$$

Comme ε_B est décroissante par rapport à $\|B\|$, alors le système (5.4.1) est exponentiellement stable pour

$$\begin{aligned} 0 \;<\; \varepsilon &< \frac{\gamma_0}{\left(2 + |a_1| + |b_1|\right)\left(4 - |a_1| + |b_1|\right)} \\ &\left(\sqrt{4\left(2 + |a_1| + |b_1|\right)^2 + \left(1 - \frac{|a_1| + |b_1|}{4}\right)^2} - 2(2 + |a_1| + |b_1|)\right) := \varepsilon_0 < \varepsilon_B. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves form the boundary*, SIAM. J. Control Optim. 30 (1992), 1024-1065.

[2] A. Benaddi and B. Rao, *Energy decay rate of wave equations with indefinite damping*, Diff. Equa. 161 (2000) 337-357.

[3] A. Benaddi, *Optimal energy decay rate of coupled wave equations*, à paraître dans Pan Americain Math. J (2000).

[4] G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich and S. Sun, *Exponential decay of energy of evolution equation with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math, 51 (1991), 266-301.

[5] P. Freitas, *On some eigenvalue problem related to the wave equation with indefinite damping*, J. Diff. Equa. 127 (1996), 320-335.

[6] P. Freitas and E. Zuazua, *Stability results for wave equation with indefinite damping,* Diff. Equa. 132 (1996) 320-335.

[7] M. A. Horn and I. Lasiecka, *Nonlinear boundary stabilization of parallelly connected Kirchoff Plates* J. Dynamics and Control, 6 (1996), 263-292.

[8] F. L. Huang, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space*, Ann. of Diff. Eqs, 1 (1985), 43-56.

[9] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* 2nd ed, Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] J. E. Lagnese, *Boundary stabilization of thin plates*, SIAM Publications, Philadelphia,1989.

[11] K. Liu, Z. Liu, B. Rao, *On an abstract linear elastic system with indefinite damping,* ESAIM : Proc., Vol 8, 2000, 107-117.

[12] M. Najafi, G. R. Sarhangi and H. Wang, *The study of stability of coupled wave equations under various end conditions*, Proceedings of 31st Conferences on decision and control, Tucson, Arizona, 1992, 374-379.

[13] A. Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial equations,* Spinger Verlag, New York, 1983.

[14] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroup,* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), 847-857.

[15] B. Rao, *A compact perturbation method for the boundary stabilization of the Rayleigh beam aquation*, Appl. Math. Optim, 33 (1996), 253-264.