

Classification des Variétés à deux orbites

Stéphanie CUPIT-FOUTOU

6 avril 2000

Table des matières

Introduction	iii
1 Notations et rappels	1
1.1 Théorie des groupes semi-simples	1
1.2 Plongements des espaces homogènes	2
1.2.1 Cas général	2
1.2.2 Cas sphérique	3
2 Propriétés des variétés-à-deux-orbites	7
2.1 Propriétés des stabilisateurs génériques	8
2.2 Inductions simples	11
3 Description des variétés de type I	17
3.1 Cas des groupes de rang 2	22
3.2 Cas général	26
3.2.1 Cas des groupes classiques	26
3.2.2 Cas des groupes exceptionnels	35
4 Description des variétés de type II	37
4.1 Cas des groupes de rang 2	43
4.2 Cas général	44
4.2.1 Cas des groupes classiques.	46
4.2.2 Cas des groupes exceptionnels.	48
Bibliographie	51

Introduction

On se place sur \mathbb{C} le corps des complexes. On considère une variété algébrique complète X sur laquelle opère G un groupe algébrique réductif connexe avec une orbite dense $\Omega \cong G/H$, H étant un sous-groupe algébrique de G ; le groupe H sera appelé *stabilisateur générique*.

Lorsque les groupes G et H sont connexes, A. BOREL a montré (*voir* [3]) que l'espace homogène G/H possède au plus deux bouts, *i.e.* la variété $X \setminus \Omega$ a au plus deux composantes connexes. Quand $X = \Omega$, il est bien connu que cela signifie que H est un sous-groupe parabolique de G . Le cas où $X \setminus \Omega$ n'est pas connexe a été complètement étudié par D. AHIEZER dans [2]; en particulier, dans cette situation, les stabilisateurs génériques contiennent un sous-groupe unipotent maximal de G .

Considérons alors le dernier cas de figure — à savoir $X \setminus \Omega$ connexe —, il apparaît alors naturel de vouloir s'intéresser particulièrement au cas des *G -variétés-à-deux-orbites*, *i.e.* aux variétés telles que $X \setminus \Omega$ est homogène. De telles variétés possèdent alors deux orbites — une orbite ouverte et une orbite fermée —, elles ont déjà été décrites sous certaines hypothèses concernant la dimension de l'orbite fermée.

Dans un premier temps, D. AHIEZER a donné dans [1] la liste des couples (G, H) , H non nécessairement connexe, qui admettent une compactification par un diviseur homogène. En particulier, il a montré que si l'orbite ouverte est affine, G/H est la complexification d'un espace homogène riemannien compact isotrope. Parallèlement à cela, A. HUCKLEBERRY et D. SNOW [19] décrivaient ces mêmes variétés dans le contexte plus général des variétés kählériennes. Puis, M. BRION [10] a retrouvé les résultats obtenus par D. AHIEZER, par des méthodes algébriques, plus précisément grâce à la théorie des plongements des espaces homogènes développée par D. LUNA et T. VUST (*voir* [25]). M. BRION a montré plus généralement que les variétés algébriques complexes et complètes, obtenues comme compactification d'une orbite dense par des diviseurs homogènes, sont des variétés rationnelles projectives *sphériques* de rang 1 (une variété sphérique est une variété qui possède une orbite ouverte pour un sous-groupe de Borel de G). Dans [12], M. BRION a donné une démonstration directe du fait que le groupe d'automorphismes des variétés-à-deux-orbites dont l'orbite ouverte est affine, est semi-simple et opère transitivement — résultat obtenu jusque-là au cas par cas.

Dans un second temps, D. FELDMÜLLER a décrit complètement, dans sa thèse de doctorat (*voir* [15]), par des méthodes similaires à celles de D. Ahiezer, les variétés-à-deux-orbites dont l'orbite fermée est de codimension 2.

Afin de compléter le tableau des variétés-à-deux-orbites obtenues jusqu'à aujourd'hui, on pourra aussi citer l'article [31] de B. WASSERMANN même si dans ce papier, il n'est pas fait mention des variétés-à-deux-orbites. En effet, grâce à la combinatoire des variétés magnifiques (donc sphériques [26]) de rang 2 qui y est donnée de façon

détaillée, on peut construire directement des plongements complets à deux orbites; on retrouve ainsi les variétés obtenues par D. FELDMÜLLER.

Le but de ce présent travail est d'apporter une réponse à la conjecture de D. LUNA

« *Les variétés-à-deux-orbites sont sphériques.* »

et de donner la liste complète de ces objets mathématiques — ce à quoi, je suis parvenue en montrant les résultats suivants :

Théorème 1. — *Soit G un groupe algébrique simple ou de type $A_1 \times A_1$ et H un sous-groupe algébrique (non nécessairement connexe) de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . Si la paire (G, \mathfrak{h}) figure dans le tableau 1 ou le tableau 2 (voir ci-contre), alors l'espace homogène G/H admet un plongement complet à deux orbites.*

À partir de ce résultat, on peut construire toute une série de variétés-à-deux-orbites en considérant les produits fibrés $G' \times_P Z$ — pour P un sous-groupe algébrique d'un groupe réductif G' et Z une P -variété-à-deux-orbites obtenue comme plongement d'un espace homogène de la forme donnée dans le théorème précédent.

Considérons le cas où P est un sous-groupe parabolique de G' dont le radical opère trivialement sur Z de façon à ce que Z vue comme variété de (L, L) soit de la forme décrite ci-dessus, L étant un sous-groupe de Levi de P . On dira alors qu'une G' -variété complète X est *induite* s'il existe un morphisme injectif P -équivariant de Z dans X donnant un morphisme birationnel de $G' \times_P Z$ dans X . On obtient ainsi toutes les variétés-à-deux-orbites :

Théorème 2. — *Les variétés-à-deux-orbites sont induites par celles obtenues comme plongement d'espace homogène de la forme donnée dans le théorème précédent.*

De cette classification, on déduit le

Corollaire 1. — *Les variétés-à-deux-orbites sont sphériques.*

Dans les tableaux ci-après, les notations employées sont les suivantes :

— $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ désignent les racines simples associées à un sous-groupe de Borel B de G contenant un tore maximal T (voir notations de BOURBAKI);

— si β_1, \dots, β_n sont des racines de G , $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ est le système de racines qu'elles engendrent;

— si H est un sous-groupe algébrique de G , le caractère gothique \mathfrak{h} désigne son algèbre de Lie, en particulier, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}Y_\alpha$ est l'algèbre de Lie radicielle correspondant à la racine α ;

— pour les groupes exceptionnels, on adoptera éventuellement la notation des racines suivant le diagramme de Dynkin (exemple 1231 dans le cas du type F_4).

A_n	\triangleright	\mathfrak{gl}_n	
B_n	\triangleright	\mathfrak{so}_{2n}	
B_n	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t}$,	pour $\Psi = \langle \pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} + 2\alpha_n \rangle$
B_n	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t}$,	pour $\Psi = \langle \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_{n-1}, \alpha_n, \varepsilon_1 + \varepsilon_n \rangle$
C_n	\triangleright	$\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_{2n-2}$	
C_n	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t}$,	pour $\Psi = \langle \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_n, 2\varepsilon_1 \rangle$
C_n	\triangleright	$= \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t}$,	pour $\Psi = \langle \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_{n-1}, \alpha_n, \varepsilon_1 + \varepsilon_n \rangle$
F_4	\triangleright	\mathfrak{spin}_9	
G_2	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t}$,	pour $\Psi = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$
G_2	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t}$,	pour $\Psi = \{\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$
G_2	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t}$,	pour $\Psi = \{\pm\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$
G_2	\triangleright	\mathfrak{sl}_3	

Tableau 1. — Paires de type I.

$A_1 \times A_1$	\triangleright	\mathfrak{sl}_2	(plongé diagonalement)
A_2, B_2 ou G_2	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \mathfrak{t}' \oplus \mathbb{C}(Y_{\alpha_1} + Y_{\alpha_2}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}} \mathfrak{g}_\alpha$,	$\mathfrak{t}' = \text{Lie}(\ker(\alpha_1 - \alpha_2))$
B_3	\triangleright	\mathfrak{g}_2	
C_3	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(Y_{-\alpha_2} + Y_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$,	$\Psi = \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, 2\varepsilon_1 \rangle$
D_n	\triangleright	\mathfrak{sp}_{2n}	
F_4	\triangleright	$\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(Y_{-\alpha_4} + Y_{1232}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$,	$\Psi = \langle 1121, 1221, 0121, \alpha_3 \rangle$

Tableau 2. — Paires de type II.

Après quelques rappels (chapitre premier) sur la théorie des groupes réductifs et des plongements homogènes, j'aborde dans le chapitre suivant le problème de classification des G -variétés-à-deux-orbites — G étant un groupe algébrique réductif — en commençant par remarquer que de telles variétés peuvent être supposées projectives et normales. Je me consacre ensuite à l'étude des stabilisateurs génériques dont je dégage les propriétés résumées dans

Proposition 1. — (i) *Les rangs des stabilisateurs génériques d'une G -variété-à-deux-orbites diffèrent de celui du groupe G d'au plus une unité.*

(ii) *Les tores maximaux des stabilisateurs génériques sont des sous-tores réguliers de G .*

Une fois ces résultats obtenus, je peux montrer, tout comme l'ont fait mes prédécesseurs, que le problème de classification des variétés-à-deux-orbites peut se restreindre à l'étude d'une « sous-classe ». Plus précisément, en reprenant la notion d'*induction simple* introduite par D. LUNA dans [26] (voir aussi [31]) et en l'adaptant à mon contexte, je définis les variétés-à-deux-orbites de cette « sous-classe » (appelées ultérieurement *cuspidales*) comme suit

Définition 1. — *On dit qu'une G -variété X s'obtient par induction à partir d'une paire (P, Y) — dite induction simple — si P est un sous-groupe parabolique de G et Y une P -variété à deux orbites tels que :*

(i) *le radical de P opère trivialement sur Y ;*

(ii) *il existe un morphisme injectif P -équivariant $\varphi : Y \rightarrow X$ qui induit un morphisme $\psi : G \times_P Y \rightarrow X$ birationnel.*

On dit que la variété X est cuspidale si elle n'est obtenue par aucune induction simple.

et je démontre

Théorème 3. — (i) *La géométrie d'une G -variété-à-deux-orbites obtenue par induction à partir de la paire (P, Y) est complètement déterminée par celle de son orbite fermée et celle de Y .*

(ii) *L'ensemble des inductions simples d'une variété-à-deux-orbites (muni d'un ordre naturel) possède un unique élément minimal.*

(iii) *S'il existe une G -variété-à-deux-orbites cuspidale, alors G est simple ou de type $A_1 \times A_1$.*

Grâce à quoi, je peux réduire mon problème au cas des G -variétés-à-deux-orbites cuspidales pour G un groupe simple ou de type $A_1 \times A_1$. Je scinde, ensuite, mon étude en deux grandes parties (correspondant aux deux derniers chapitres), selon que la variété X considérée est *de type I* (resp. *de type II*), i.e. si les rangs des stabilisateurs génériques sont égaux à (resp. différents de) celui du groupe G .

La démarche qui conduit à la description des variétés-à-deux-orbites cuspidales est sensiblement la même pour chacun de ces types, elle consiste principalement à montrer, par des méthodes combinatoires, que si X est une G -variété-à-deux-orbites, alors pour certains sous-groupes réductifs L de G , de rang semi-simple égal à 2, l'adhérence de la L -orbite d'un élément générique doit être une L -variété-à-deux-orbites. De ce

fait, ressort la nécessité de commencer par décrire les G -variétés-à-deux-orbites pour un groupe G de rang 2. Ce problème résolu, je peux alors déterminer par un « jeu de racines », quel doit être le système de racines de la composante neutre du stabilisateur générique. Au lire des résultats obtenus, il apparaît que seules deux familles de sous-groupes sont susceptibles de générer de nouvelles variétés-à-deux-orbites. Pour déterminer si ces sous-groupes sont les stabilisateurs génériques de variétés-à-deux-orbites, j'utilise, après avoir noté que ces sous-groupes sont sphériques, la combinatoire des variétés sphériques développée par M. BRION, D. LUNA, F. PAUER, F. KNOP et T. VUST (rappelée au chapitre premier).

Chapitre 1

Notations et rappels

1.1 Théorie des groupes semi-simples

La plupart des notations usitées dans ce paragraphe seront celles de BOURBAKI (voir [5]). Le corps de base considéré sera celui des complexes, il sera noté \mathbb{C} . On considère G un groupe algébrique semi-simple connexe, B un sous-groupe de Borel et T le tore maximal de G contenu dans B . À ce groupe de Borel correspond une base Δ du système de racines Φ de G ; les racines simples seront désignées par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (n étant le rang de G). Toute racine dans Φ s'écrit donc sous la forme $\sum_{i=1}^n n_i \alpha_i$ où les entiers n_i sont tous de même signe; on définit son *support* — noté *supp* — comme étant le sous-ensemble de Δ égal à $\{\alpha_i : n_i \neq 0\}$. On dira que *la racine β est de support maximal* si son support est égal à Δ .

Pour γ une racine, le sous-groupe unipotent de G isomorphe à \mathbb{C} via l'isomorphisme admissible ε_γ sera désigné par U_γ . Si \mathfrak{g}_γ est l'algèbre de Lie de U_γ alors \mathfrak{g}_γ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1, on note Y_γ un de ses vecteurs non nuls qui sera qualifié de *vecteur radiciel*. Plus généralement, si H est un groupe algébrique (en particulier si c'est un sous-groupe algébrique de G), on notera \mathfrak{h} son algèbre de Lie.

À un sous-ensemble I de Δ , on peut associer un sous-groupe parabolique P_I contenant B tel que, $P_I = P^u L_I$ soit une décomposition de Levi de P_I , P^u étant le radical unipotent de P et L_I le sous-groupe (réductif) de Levi contenant le tore T et de système de racines de base I . Plus précisément,

$$L_I = C_G(Z) \quad \text{pour} \quad Z = \left(\bigcap_{\alpha \in I} \ker \alpha \right)^\circ$$

le sous-groupe $C_G(Z)$ est le centralisateur de Z dans G . Pour tout sous-groupe H de G , on a aussi une décomposition de Levi de H° — la composante connexe contenant l'élément neutre — $H^\circ = KH^u$ où K est un sous-groupe de Levi de H° et H^u son radical unipotent (voir [21]).

Deux sous-groupes H et H' seront dits *opposés* s'il existe un sous-groupe de Levi L à la fois de H et de H' tel que $H \cap H' = L$.

On associe aux racines simples, les réflexions s_i dites *simples* pour $i = 1, \dots, n$ et, plus généralement, on note par s_α la réflexion associée à une racine $\alpha \in \Phi$. Les réflexions simples engendrent le groupe de Weyl W de G , W étant aussi le quotient $N_G(T)/T$, pour $N_G(T)$ le normalisateur du tore T dans G .

On considère pour finir les modules de G ; pour cela, on note $\mathcal{X}(H)$ le groupe des caractères d'un sous-groupe H de G , simplement par \mathcal{X} celui du tore T et par \mathcal{X}^+ l'ensemble des poids dominants de G . Ce dernier ensemble est égal à l'intersection du réseau des poids avec le cône engendré par les poids fondamentaux ω_i définis par

$$\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij} \quad \text{pour} \quad \alpha_j^\vee = 2 \frac{\alpha_j}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker et (\cdot, \cdot) la forme de Killing de G . On munit \mathcal{X} de l'ordre (partiel) suivant

$\mu > \mu'$ si et seulement si $\mu - \mu'$ s'écrit comme une somme de racines positives.

Si V est un G -module de dimension finie, tout vecteur v de V s'écrit comme somme finie de vecteurs v_{μ_i} de poids μ_i ; le support de v sera l'ensemble $\text{supp } v = \{\mu_i : v_{\mu_i} \neq 0\}$. Le sous-espace propre de V associé au poids μ sera noté par V_μ , le module dual de V par V^* . Les G -modules irréductibles seront désignés par $V(\lambda)$ pour λ un poids dominant ; le dual de $V(\lambda)$ est donc le module $V(-w_0(\lambda))$, w_0 étant l'élément le plus long (pour l'ordre de Bruhat) du groupe de Weyl.

1.2 Plongements des espaces homogènes

L'objet de ce paragraphe consiste à rappeler les grandes lignes de la théorie des plongements des espaces homogènes développée par D. LUNA et T. VUST et plus particulièrement, celle des variétés sphériques ; on ne fera mention que des résultats principaux utiles à notre étude. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter principalement aux articles de M. BRION, F. KNOP, D. LUNA, F. PAUER, T. VUST [6, 8, 9, 14, 24, 25] desquels sont tirés tous les énoncés cités.

1.2.1 Cas général

Soit X une G -variété, *i.e.* une variété algébrique sur laquelle opère algébriquement le groupe G , on note la G -orbite d'un élément x par $G \cdot x$, son adhérence dans X par $\text{Adh}(G \cdot x)$ et le stabilisateur de x dans G par G_x . Si l'orbite $G \cdot x$ est projective, on rappelle que le sous-groupe G_x est parabolique.

Théorème 4 (Structure locale). — *On considère un élément z d'une G -variété algébrique normale X tel que la G -orbite de z soit projective. Soit P un sous-groupe parabolique opposé à G_z et L le sous-groupe de Levi tel que $P \cap G_z = L$. Alors, il existe des sous-variétés (localement fermées) affines Z de X possédant les propriétés suivantes :*

- (i) *la variété Z contient z et est stable par L ;*
- (ii) *$P^u \cdot Z$ est ouvert dans Z ;*
- (iii) *l'opération de P^u sur X induit un isomorphisme de variétés algébriques de $P^u \times Z$ sur $P^u \cdot Z$.*

On notera $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{C}(X)$) l'anneau des fonctions régulières sur X (resp. le corps des fonctions rationnelles sur X). L'action du groupe G sur la variété X induit de façon naturelle une structure de G -modules sur ces anneaux

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in \mathbb{C}(X), g \in G \text{ et } x \in X.$$

On considère alors l'ensemble des B -semi-invariants $\mathbb{C}(X)^{(B)}$ de $\mathbb{C}(X)$, *i.e.* les vecteurs propres de B dans $\mathbb{C}(X)$, et on note $\mathcal{X}(X)$ l'ensemble des poids de B des fonctions de $\mathbb{C}(X)^{(B)}$; c'est un groupe abélien libre de rang fini.

Définition 2. — *Le rang de X est celui du groupe $\mathcal{X}(X)$.*

On rappelle qu'une *valuation* ν de X est une application de $\mathbb{C}(X)^*$ dans \mathbb{Q} qui vérifie pour toutes les fonctions f_1, f_2 de $\mathbb{C}(X)^*$:

- (i) $\nu(f_1 + f_2) \geq \min\{\nu(f_1), \nu(f_2)\}$;
- (ii) $\nu(f_1 f_2) = \nu(f_1) + \nu(f_2)$;
- (iii) $\nu(\mathbb{C}^*) = 0$.

La valuation sera dite *G -invariante* si $\nu(g \cdot f) = \nu(f)$ pour tout $f \in \mathbb{C}(X)^*$ et tout $g \in G$. On désigne par $\mathcal{V}(X)$ l'ensemble des valuations G -invariantes de X .

Un *plongement de l'espace homogène G/H* , pour H un sous-groupe de G , est la donnée d'une G -variété normale X et d'un point x de X tels que H soit le groupe d'isotropie de x et l'orbite $G \cdot x$ soit dense dans X . Le groupe H et ses conjugués dans G sont appelés *stabilisateurs génériques* de X . Vu le contexte dans lequel on sera amené à travailler — celui des variétés-à-deux-orbites —, on ne s'intéressera qu'aux plongements dits *simples*, *i.e.* ceux qui ne contiennent qu'une seule orbite fermée, et ce, bien que tous les rappels ci-après puissent être faits sans supposer une telle propriété.

Théorème 5. — *Les plongements simples de l'espace homogène G/H sont déterminés par leurs diviseurs premiers G -stables (*i.e.* leurs valuations G -invariantes) et par les diviseurs premiers B -stables de l'orbite ouverte, dont l'adhérence contient la G -orbite fermée.*

1.2.2 Cas sphérique

Définition 3. — *Une G -variété est sphérique si elle est normale et contient une orbite ouverte par un sous-groupe de Borel de G . Un sous-groupe H est sphérique si l'espace homogène G/H est sphérique.*

Comme exemples classiques de variétés sphériques, on pourra citer les variétés de drapeaux G/P pour P un sous-groupe parabolique de G ou encore les variétés toriques, *i.e.* les variétés sur lesquelles un tore algébrique opère avec une orbite dense.

Proposition 2. — *Soit H un sous-groupe algébrique connexe de G , $H = H^u K$ une décomposition de Levi. Soit P un sous-groupe parabolique de G et $P = P^u L$ sa décomposition de Levi tels que $H^u \subset P^u$ et $K \subset L$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le sous-groupe H est sphérique dans G ;*

- (ii) un sous-groupe de Borel de L a une orbite ouverte dans P/H ;
- (iii) le sous-groupe K a une orbite ouverte dans P^u/H^u et le stabilisateur générique dans K de P^u/H^u est sphérique dans L ;
- (iv) Le sous-groupe K est sphérique dans L et si B_L est un sous-groupe de Borel de L opposé à K alors $B_L \cap K$ a une orbite ouverte dans P^u/H^u .

Corollaire 2. — Soit H un sous-groupe sphérique de G et P un sous-groupe parabolique de G vérifiant les conditions de la proposition ci-dessus. Alors le rang du G -espace homogène G/H est égal à celui du L -espace homogène P/H .

On suppose dorénavant que l'espace homogène G/H est sphérique, B sera un sous-groupe de Borel de G tel que BH/H est ouvert dans G/H .

Combinatoire des variétés sphériques.

Dans ces conditions, une fonction dans $\mathbb{C}(G/H)^{(B)}$ est déterminée par son poids à une constante multiplicative près ; on obtient ainsi une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}(G/H)^{(B)} \longrightarrow \mathcal{X}(G/H) \longrightarrow 0.$$

De plus, toute valuation ν de G/H induit un homomorphisme de $\mathbb{C}(G/H)^{(B)}$ dans \mathbb{Q} , nul sur \mathbb{C}^* , donc se factorise sur $\mathcal{X}(G/H)$. On pose : $V(G/H) = \text{Hom}(\mathcal{X}(G/H), \mathbb{Q})$.

Proposition 3. — L'application ρ de $\mathcal{V}(G/H)$ dans $V(G/H)$ est injective.

On considère un plongement X de l'espace homogène G/H . On note \mathcal{D} l'ensemble des diviseurs irréductibles B -stables de G/H , appelé aussi *ensemble des couleurs de G/H* . L'ouvert BH/H de G/H étant affine, \mathcal{D} est fini et n'est en fait que l'ensemble des composantes irréductibles de son complémentaire dans G/H . Le sous-ensemble de \mathcal{D} , constitué des diviseurs dont l'adhérence dans X contient l'orbite fermée, sera noté par \mathcal{D}_X . L'ensemble des diviseurs premiers G -stables de X sera identifié à l'ensemble des valuations correspondantes (donc G -invariantes) et noté \mathcal{V}_X .

Définition 4. — Un cône colorié est un couple $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{C} \subset V(G/H)$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ tels que :

(CC1) \mathcal{C} est un cône convexe engendré par $\rho(\mathcal{F})$ et par un nombre fini d'éléments de \mathcal{V} ;

(CC2) l'intérieur relatif de \mathcal{C} rencontre $\mathcal{V}(G/H)$.

Un cône colorié est dit saillant si \mathcal{C} ne contient pas de droite et $\rho(\mathcal{F})$ ne contient pas l'origine.

On note par \mathcal{C}_X le cône convexe engendré par \mathcal{V}_X et $\rho(\mathcal{D}_X)$.

Théorème 6. — L'application qui à un plongement X de l'espace homogène sphérique G/H associe le couple $(\mathcal{C}_X, \mathcal{D}_X)$ définit une bijection entre les classes d'isomorphisme de plongements simples et les cônes coloriés saillants. De plus, X est projectif si et seulement si $\mathcal{V}(G/H)$ est contenu dans le cône engendré par \mathcal{C}_X et \mathcal{D}_X .

Remarque. — Ce théorème est un raffinement du théorème 5 dans le cas sphérique.

Définition 5. — Une face du cône colorié $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ est un couple $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$, \mathcal{C}' étant une face du cône \mathcal{C} , tel que l'intérieur relatif de \mathcal{C}' rencontre $\mathcal{V}(G/H)$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \rho^{-1}(\mathcal{C}')$.

Théorème 7. — Il existe une bijection entre l'ensemble des orbites de G d'un plongement simple et l'ensemble des faces du cône colorié qui lui est associé.

Si H' est un sous-groupe de G contenant H et φ un G -morphisme de G/H dans G/H' alors φ induit un homomorphisme injectif $\varphi^* : \mathcal{X}(G/H') \rightarrow \mathcal{X}(G/H)$ et donc une application surjective $\varphi_* : V(G/H) \rightarrow V(G/H')$.

Proposition 4. — L'application φ_* envoie $\mathcal{V}(G/H)$ sur $\mathcal{V}(G/H')$; de plus, si \mathcal{D}_φ dénote l'ensemble des couleurs de G/H qui ont pour image par φ l'espace homogène G/H' , alors $\varphi(D)$ est une couleur de G/H' pour tout $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varphi$.

Description de l'ensemble des valuations $\mathcal{V}(G/H)$.

On a une action de $B \times H$ sur $\mathbb{C}(G)$ définie par l'action à gauche de B et l'action à droite de H sur $\mathbb{C}(G)$. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}(G)^{(B \times H)}$ l'ensemble des fonctions rationnelles sur \mathbb{C} qui valent 1 en l'élément neutre de G et qui sont à la fois vecteurs propres de B et de H . L'ensemble BH étant supposé dense dans H , de telles fonctions ne peuvent s'annuler sur BH . On pose

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P} \cap \mathbb{C}[G].$$

Lemme 1. — (i) Si V est un G -module rationnel irréductible et si $x \in V \setminus \{0\}$ est un vecteur propre pour H , alors il existe $\eta \in V^*$ tel que la fonction $f \in \mathbb{C}[G]$ définie pour $g \in G$ par $f(g) = \langle \eta, gx \rangle$, appartienne à \mathcal{P}_+ .

(ii) Inversement, si $f \in \mathcal{P}_+$, il existe un G -module rationnel irréductible V , x un vecteur propre de H dans V , η un vecteur propre de B dans V^* tels que $f(g) = \langle \eta, gx \rangle$, pour $g \in G$. De plus, le triplet V, x, η est unique à isomorphisme près.

Soient $f \in \mathcal{P}_+$ et ω (resp. χ) son poids par rapport à B (resp. H), le couple (ω, χ) détermine f ; on peut donc poser: $f = [\omega, \chi]$.

Proposition 5. — (i) L'ensemble des valuations $\mathcal{V}(G/H)$ est un cône convexe qui engendre l'espace vectoriel $V(G/H)$.

(ii) Le cône dual Σ de $\mathcal{V}(G/H)$ est l'enveloppe convexe des $\pi - \omega - \omega'$ tels qu'il existe $f = [\omega, \chi]$, $f' = [\omega', \chi']$ et $\varphi = [\pi, \chi + \chi']$ dans \mathcal{P}_+ , avec φ dans l'espace vectoriel engendré par les produits $(sf)(s'f')$, pour $s, s' \in G$.

Corollaire 3. — Le cône Σ est inclus dans le cône convexe engendré par les racines négatives de G . Par conséquent, le cône $\mathcal{V}(G/H)$ contient l'image de la chambre de Weyl négative de G dans $V(G/H)$.

Propriétés des sous-groupes sphériques.

Proposition 6. — (i) Le normalisateur d'un sous-groupe sphérique est égal à celui de sa composante connexe.

(ii) *Le cône $\mathcal{V}(G/N_G(H))$ est le quotient de $\mathcal{V}(G/H)$ par sa partie linéaire.*

Proposition 7. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le cône $\mathcal{V}(G/H)$ est saillant.*
- (ii) *Le quotient $N_G(H)/H$ est fini.*

Chapitre 2

Propriétés des variétés-à-deux-orbites

Considérons X une variété algébrique complète sur laquelle opère un groupe semi-simple G . On rappelle (*voir* l'introduction) la

Définition 6. — *La variété X est une G -variété-à-deux-orbites si elle possède exactement deux G -orbites à savoir une orbite ouverte (dense) et une orbite fermée.*

La variété X sera désormais supposée à deux orbites ; notons (\tilde{X}, π) sa normalisation. Le morphisme π est birationnel, fini et G -équivariant. On considère alors l'image réciproque par π de l'orbite fermée $G \cdot y$ de X . Cette image réciproque n'est constituée que d'une seule orbite qui est, de plus, *a fortiori*, fermée. En effet, soit y' un point de $\pi^{-1}(G \cdot y)$, l'orbite par G de y' est alors contenue dans $\pi^{-1}(G \cdot y)$. En outre, si Q (resp. Q') désigne le stabilisateur de y (resp. de y'), la fibre Q/Q' étant finie, il résulte de la connexité du sous-groupe parabolique Q que $Q = Q'$. L'orbite $G \cdot y'$ est donc une orbite fermée et $\pi^{-1}(G \cdot y)$ est une union finie d'orbites fermées isomorphes à $G \cdot y$. Supposons que l'image réciproque $\pi^{-1}(G \cdot y)$ n'est pas connexe, *i.e.* qu'elle est constituée de plusieurs orbites. Soit B^u le radical unipotent de B , l'ensemble des points fixes de B^u dans une variété connexe et complète est connexe (*voir* [18]) ; comme chaque composante connexe de $\pi^{-1}(G \cdot y)$ admet un point fixe par B^u , il existe aussi un point fixe x' de B^u dans la G -orbite ouverte de \tilde{X} . Soit x l'élément $\pi(x')$ de X , x appartient alors à l'orbite ouverte de X et est fixé par B^u . De plus, la variété $\text{Adh}(B \cdot x)$ est égale à $\text{Adh}(T \cdot x)$, on la note Z . La dimension de Z est supérieure ou égale à 1 car $B \not\subset G_{x'}$ — autrement, l'orbite $G \cdot x$ serait fermée —, donc Z admet au moins deux points fixes de T et donc de B , ce qui n'est pas possible parce que X n'a qu'une seule orbite fermée. Ceci nous permet de conclure que

Lemme 2. — *La normalisée \tilde{X} est une variété-à-deux-orbites. De plus, la normalisation est bijective.*

On supposera donc X normale et complète. Soit y un élément de X , d'après un résultat de SUMIHIRO (*voir* [30]), il existe U un voisinage (ouvert) de y dans X stable par G et quasiprojectif. Si l'élément y est choisi dans l'orbite fermée, l'orbite ouverte de X rencontrant U , la variété X est forcément égale à l'ouvert U . Ainsi, X étant quasiprojective et complète, X est projective.

Les variétés-à-deux-orbites seront dorénavant supposées normales et projectives.

L'objet de ce qui va suivre dans ce chapitre consistera, dans un premier temps, à dégager les propriétés des *stabilisateurs génériques*, *i.e.* les stabilisateurs des points de l'orbite dense, afin d'obtenir, dans un second temps, une réduction notable de notre étude des variétés-à-deux-orbites à une « sous-classe » de ces objets.

Il convient de signaler que ce chapitre repose sur des idées de P. LITTELMANN et D. LUNA.

2.1 Propriétés des stabilisateurs génériques

Avant tout, considérons le groupe simple SL_2 — qui est de dimension 3. Les orbites de ce groupe sont de dimension 0, 1, 2 ou 3 ; les orbites de dimension 1 sont complètes, celles de dimension 3 sont affines car les stabilisateurs de leurs points sont finis donc réductifs ; de plus, le complémentaire de ces orbites dans une variété complète est de codimension 1. Ainsi, les variétés-à-deux-orbites de SL_2 sont nécessairement de dimension 2, par conséquent, elles possèdent au moins trois points fixes par le tore maximal T ; le nombre de points T -fixes dans une SL_2 -orbite projective est égal à 2, il en résulte que l'orbite ouverte contient un point fixe de T . Le tore T est donc d'indice fini dans le stabilisateur générique, ce dernier est donc égal à T ou au normalisateur de T .

Lemme 3. — *Les variétés-à-deux-orbites de SL_2 sont les variétés $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et \mathbb{P}^2 pour les actions naturelles.*

Les variétés-à-deux-orbites de SL_2 obtenues, on peut supposer définitivement le groupe G de rang supérieur ou égal à 2.

Proposition 8. — *Dans le cas d'une G -variété-à-deux-orbites X , le groupe algébrique G et le stabilisateur générique ont des rangs qui diffèrent d'au plus une unité.*

Démonstration. — Si $G \cdot y$ dénote l'orbite fermée de X telle que $G_y = P$ pour P un sous-groupe parabolique de G contenant le sous-groupe de Borel B , d'après le théorème 4 de structure locale rappelé au chapitre premier, on sait qu'il existe une variété Z affine de dimension au moins 1 et L -stable telle que $Z \cap G \cdot y = \{y\}$, L étant le sous-groupe de Levi de P contenant le tore T . On se place dans le cas où $Z \setminus \{y\}$ ne contient aucun point fixe du tore T , en effet, dans le cas contraire, il apparaît clairement que le rang de G est égal à celui du stabilisateur générique.

Soit $\pi : Z \rightarrow Z//T$ le quotient géométrique de Z par T ; π est T -invariant et $T \cdot z \subset \pi^{-1}\pi(z)$ pour $z \in Z$. Les fibres de π sont donc de dimension au moins 1, sur une partie dense de $Z//T$, donc sur $Z//T$ tout entier ; en particulier, $\dim(\pi^{-1}\pi(y)) \geq 1$. On notera exceptionnellement ici par Adh l'adhérence dans la variété Z et non pas dans X . Comme $\pi^{-1}\pi(y) = \{z \in Z : y \in \text{Adh}(T \cdot z)\}$, il existe $z \in Z \setminus \{y\}$ tel que $y \in \text{Adh}(T \cdot z)$. Les T -orbites étant affines, si $\dim(T \cdot z) > 1$, on obtient de même un élément $z' \in \text{Adh}(T \cdot z) \setminus T \cdot z$ tel que $\dim(T \cdot z') \geq 1$ et $y \in \text{Adh}(T \cdot z')$. En répétant cet argument suffisamment de fois, on finit par obtenir un élément $u \in Z \setminus \{y\}$ tel que $\dim(T \cdot u) = 1$ et $y \in \text{Adh}(T \cdot u)$. On obtient alors le résultat escompté : $\text{rang } G \leq 1 + \text{rang } G_u$. \square

Définition 7. — Une variété-à-deux-orbites sera dite variété de type I (resp. de type II) si le rang du stabilisateur générique est égal à (resp. différent de) celui du groupe G . De même, le stabilisateur générique sera dit de type I ou II suivant les cas.

Lemme 4. — Soit G un groupe algébrique complexe réductif connexe et H un sous-groupe algébrique de G . Désignons par L le centralisateur dans G d'un tore algébrique S et par $(G/H)^S$ l'ensemble des points fixes de S dans G/H . Alors, les composantes connexes de $(G/H)^S$ sont données par ses L -orbites.

Démonstration. — Soit x un élément de $(G/H)^S$ de stabilisateur H . On considère l'espace tangent $T_x((G/H)^S)$ au point x . Le lemme résulte des isomorphismes suivants

$$T_x((G/H)^S) \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^S \cong \mathfrak{g}^S/\mathfrak{h}^S \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_x$$

pour $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ resp. \mathfrak{L} les algèbres de Lie des groupes G, H resp. L . \square

Lemme 5. — On considère une G -variété projective normale Z . Soient x et z deux éléments de Z tels que

$$\dim(T \cdot x) = \dim(T \cdot z) = 1 \quad \text{et} \quad T_x^\circ = T_z^\circ.$$

Si les points fixes de T dans $\text{Adh}(T \cdot x) \cup \text{Adh}(T \cdot z)$ sont contenus dans une même orbite fermée de G , alors ils sont au nombre de 2 ou 4.

Démonstration. — La variété Z étant projective, il existe un plongement G -équivariant $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ pour V un G -module. En identifiant Z à son image dans $\mathbb{P}(V)$, on peut écrire x comme la classe d'un vecteur v de V dont le support $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ n'est pas réduit à un seul élément car l'orbite $T \cdot x$ est supposée de dimension 1. On a alors :

$$T_x^\circ = \left(\bigcap_{i \neq j} \ker(\lambda_i - \lambda_j) \right)^\circ = \ker(\lambda_i - \lambda_j)^\circ.$$

Par conséquent, les poids du support de v appartiennent à une même droite affine D_x dans le réseau des poids \mathcal{X} . On considère de même la droite affine D_z associée à z .

Comme $T_x^\circ = T_z^\circ$ (par hypothèse), on a :

$$D_x \cap D_z = \emptyset \quad \text{ou} \quad D_x = D_z.$$

Dans le premier cas, $\text{Adh}(T \cdot x) \cup \text{Adh}(T \cdot z)$ contient exactement quatre points fixes de T . Dans le second cas, on va montrer que $\text{Adh}(T \cdot x) \cup \text{Adh}(T \cdot z)$ ne contient que deux points fixes de T . Ces points fixes de T étant supposés appartenir à une même orbite fermée (donc projective) de G , ils appartiennent, plus précisément, à une même orbite du groupe de Weyl W de G . De plus, si $[v_\mu] \in \text{Adh}(T \cdot x)$, le poids μ est un élément du support de v . Or,

$$|D_x \cap W \cdot \mu| = 2 \quad \text{et} \quad W_\mu = W_{[v_\mu]},$$

on ne peut donc avoir, dans ce cas, que deux points fixes de T . \square

Proposition 9. — Soit x un élément de l'orbite ouverte d'une G -variété-à-deux-orbites X . Si T_x° est un tore maximal de G_x alors T_x° est un tore régulier de G , i.e. de centralisateur égal au tore T .

Démonstration. — Si le tore T_x° est égal à T , l'assertion de la proposition est évidente ; on se place donc dans le cas où le rang de G et celui de G_x diffèrent. On procèdera à une démonstration par l'absurde. Soit L le centralisateur dans G de T_x° , on suppose alors que $L \neq T$; puisque le tore T_x° est de codimension 1 (cf. théorème 8), le sous-groupe de Levi L est de rang semi-simple 1.

On considère la variété $X_L = \text{Adh}(L \cdot x)$ qui est une composante connexe de $X^{T_x^\circ}$ l'ensemble des points fixes de T_x° dans X . Plus précisément, d'après le lemme 4, $X_L \setminus L \cdot x$ est contenue entièrement dans la G -orbite fermée de X et c'est une réunion non vide (sinon $L \cdot x$ serait fermée et $T \subset L$) d'un nombre fini de L -orbites fermées. De plus, $L \cdot x = (L, L) \cdot x$, l'orbite $L \cdot x$ est donc une SL_2 -orbite et par conséquent,

$$\dim(X_L \setminus L \cdot x) = 1 \quad \text{et} \quad \dim X_L = 2.$$

Soit $B_L = B \cap L$ un sous-groupe de Borel de L et U_L son radical unipotent. Si la variété X_L possède plus de deux L -orbites alors le sous-groupe U_L fixe des points de $L \cdot x$ (par les mêmes arguments que ceux utilisés dans le préambule) et il existe un élément $z \in (L \cdot x)^{U_L}$. On a de plus :

$$\text{Adh}(B_L \cdot z) = \text{Adh}(T \cdot z) \quad \text{et} \quad T_z^\circ = T_x^\circ \quad \text{car } z \in X^{T_x^\circ}.$$

Soient y_1 et y_2 les points fixes de T dans $\text{Adh}(T \cdot z)$, on a alors :

$$X_L = L \cdot \text{Adh}(B_L \cdot z) = L \cdot z \cup L \cdot y_1 \cup L \cdot y_2.$$

La variété X_L étant une variété projective de dimension 2, elle possède au moins trois points fixes du tore T ; par conséquent, y_1 et y_2 ne peuvent être simultanément des points fixes de L . Supposons, par exemple, $L \cdot y_1 \neq y_1$ et considérons y l'élément de $L \cdot y_1$ tel que $\text{Adh}(T \cdot y) = L \cdot y_1$. On obtient ainsi :

$$T_y^\circ = T_z^\circ, \quad \dim(T \cdot z) = \dim(T \cdot y) = 1 \quad \text{et} \quad y_1 \in \text{Adh}(T \cdot z) \cap \text{Adh}(T \cdot y).$$

On peut donc appliquer le lemme 5 ; il en résulte que $y_2 \in L \cdot y_1$, *i.e.* que X_L est nécessairement une L -variété-à-deux-orbites — ce qui est tout aussi absurde —, car dans ce dernier cas, X_L n'aurait que deux points T -fixes. On en déduit que $L = T$, autrement dit, que T_x° est un sous-tore régulier de G . \square

Corollaire 4. — *Soit x et y deux éléments de l'orbite ouverte d'une G -variété-à-deux-orbites tels que T_x° (resp. T_y°) soit un tore maximal de G_x (resp. G_y). Alors, $y \in N_G(T) \cdot x$. En particulier, si x et y sont dans une même B -orbite, ils sont conjugués par le tore T .*

Démonstration. — Soit $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$, on a alors : $gT_x^\circ g^{-1} \subset G_y$. Le tore T_x° (resp. T_y°) étant supposé maximal pour G_x (resp. G_y), il en est de même de $gT_x^\circ g^{-1}$ pour G_y , par conséquent, il existe un élément h de G_y tel que $hgT_x^\circ g^{-1}h^{-1} = T_y^\circ$. D'après la proposition 9, ces tores sont réguliers, on a donc :

$$hgTg^{-1}h^{-1} = hgC_G(T_x^\circ)g^{-1}h^{-1} = C_G(hgT_x^\circ g^{-1}h^{-1}) = C_G(T_y^\circ) = T.$$

D'où : $hg \in N_G(T)$ et $y \in N_G(T) \cdot x$.

Si $y \in B \cdot x \setminus T \cdot x$ alors $y = b \cdot x$ pour $b \in B$, $b = tu$ ($t \in T$, $u \in B^u$) et nécessairement $u \cdot x \neq x$. D'où, en particulier : $\text{supp } y \supsetneq \text{supp } x$. Or, d'après ce qui vient d'être montré, on a aussi : $y \in N_G(T) \cdot x$ et donc les supports de x et y ont même cardinal, ce qui contredit l'inclusion stricte précédente ; par conséquent, si $y \in B \cdot x$ alors $y \in T \cdot x$. \square

2.2 Inductions simples

Afin de motiver ce qui va suivre, considérons les variétés-à-deux-orbites suivantes. Soit G un groupe réductif, $V(\lambda)$ un G -module irréductible, λ poids dominant générique (*i.e.* dans l'intérieur de la chambre de Weyl positive) et v_μ un vecteur de poids $\mu = \lambda - \alpha$ pour α une racine simple de G telle que $(\lambda, \alpha^\vee) > 1$. La variété

$$Z = \text{Adh}(P \cdot [v_\mu]) \subset \mathbb{P}(V)$$

est alors à deux orbites pour P le sous-groupe parabolique associé à $\{\alpha\}$. On a en fait :

$$Z = \text{Adh}(P \cdot [v_\mu]) = \text{Adh}(SL_2(\alpha) \cdot [v_\mu])$$

$SL_2(\alpha)$ étant le sous-groupe de Levi de P contenant le tore T . Le produit fibré $G \times_P Z$ est alors une G -variété-à-deux-orbites — les G -orbites de $G \times_P Z$ sont données par les P -orbites de Z . Il en est de même de la variété

$$X = \text{Adh}(G \cdot [v_\mu]) = G \cdot \text{Adh}(P \cdot [v_\mu]) = G \cdot Z.$$

De plus le plongement de Z dans $\text{Adh}(G \cdot [v_\mu])$ induit un morphisme birationnel de $G \times_P Z$ dans X . On construit ainsi toute une série de G -variété-à-deux-orbites.

De cet exemple ressort la nécessité de réduire le problème de classification des variétés-à-deux-orbites à une « certaine classe ». Pour cela, en reprenant la notion d'*induction simple* introduite par D. LUNA dans [27] (*voir* aussi [31]) et en l'adaptant à notre contexte, on pose :

Définition 8. — *On dit que X s'obtient par induction à partir d'une paire (P, Y) , dite induction simple, si P est un sous-groupe parabolique de G et Y une P -variété à deux orbites tels que :*

- (i) *le radical de P opère trivialement sur Y ;*
- (ii) *il existe un morphisme injectif P -équivariant $\varphi : Y \rightarrow X$ qui induit un morphisme $\psi : G \times_P Y \rightarrow X$ birationnel.*

On dit que la variété X est cuspidale si elle n'est obtenue par aucune induction simple.

Remarques. — *a) Le morphisme birationnel ψ est G -équivariant pour l'action de G dans $G \times_P Y$ donnée par :*

$$g \cdot \overline{(h, y)} = \overline{(gh, y)}, \quad \text{où } g \in G \text{ et } \overline{(h, y)} \in G \times_P Y.$$

- b) Le stabilisateur $G_{\varphi(x)}$ est un sous-groupe de P .*
- c) On peut mettre un ordre (noté \leq) sur l'ensemble des inductions simples de X défini de la façon suivante pour deux paires d'induction simple*

$$(P_1, Y_1) \leq (P_2, Y_2) \quad \text{si } P_1 \subseteq P_2 \text{ et } \varphi_1(Y_1) \subseteq \varphi_2(Y_2).$$

L'objet de ce qui suit consistera donc à montrer qu'on peut effectivement se restreindre à l'étude des variétés-à-deux-orbites cuspidales.

Proposition 10. — *Si la variété X s'obtient par induction à partir d'une paire (P, Y) , sa géométrie est alors complètement déterminée par celle de son orbite fermée et celle de Y .*

Démonstration. —

On suppose que le sous-groupe parabolique P contient B . Soit B^- le sous-groupe de Borel de G tel que $B \cap B^- = T$. D'après le théorème 5 de D. LUNA et T. VUST, la variété X est déterminée par ses diviseurs premiers G -stables et ceux de l'orbite ouverte qui sont B^- -stables et dont l'adhérence dans X contient l'orbite fermée de X . Mais si l'orbite fermée de X est un diviseur, le morphisme birationnel de $G \times_P Y$ dans X est en fait un isomorphisme; on peut donc supposer, pour la suite, que nous ne nous trouvons pas dans cette situation.

Soit L le sous-groupe de Levi de P tel que $T \subset L$, on note B_L^- le sous-groupe de Borel de L égal à $B^- \cap P$. Considérons le morphisme G -équivariant $\pi : G \times_P Y \rightarrow G/P$. Si D est un diviseur B^- -stable de l'orbite ouverte de X (ou de $G \times_P Y$) alors son image par π est dense ou contenue dans un diviseur de G/P stable par B^- . Pour résoudre le premier cas, il suffit de noter les faits suivants: le diviseur D contient un sous-ensemble de la forme $B^- \cdot D_Y$ où D_Y est un diviseur stable par B_L^- dans la P -orbite ouverte de Y et, l'adhérence de D dans X contient la G -orbite fermée de X si et seulement si l'adhérence de D_Y dans Y contient la P -orbite fermée de Y . Dans le second cas, l'adhérence du diviseur D dans $G \times_P Y$ est l'image réciproque par π d'un diviseur stable par B^- dans G/P et l'intersection de cette adhérence avec l'orbite fermée de $G \times_P Y$ est un diviseur D' . En outre, l'image de l'adhérence de D dans X contient l'orbite fermée si et seulement si l'image de D' dans X est l'orbite fermée. \square

Théorème 8. — *L'ensemble des inductions simples de X (muni de l'ordre \geq) possède un unique élément minimal.*

En fait, on va construire (explicitement) l'élément minimal de l'ensemble des inductions simples pour une variété-à-deux-orbites X donnée.

Considérons alors une induction simple (P, Y) de X et deux éléments x, z de l'orbite dense de X tels que $B \cdot x$ (resp. $B \cdot z$) est fermée dans $G \cdot x$. On suppose de plus que $z \in \varphi(Y)$. Il convient de noter que x et z peuvent être choisis de sorte que T_x° (resp. T_z°) soit un tore maximal de G_x (resp. G_z). D'après le corollaire 4, x et z sont conjugués par un élément n de $N_G(T)$: $x = n \cdot z$.

Rappelons ensuite que si H est un sous-groupe algébrique de G alors BgH est fermé dans G/H si et seulement si $B \cap g^{-1}Hg$ contient un sous-groupe de Borel de $g^{-1}Hg$ — g est un élément de G . Il s'ensuit que B_x (resp. B_z) contient un sous-groupe de Borel de G_x (resp. G_z). On a donc :

$$P^u \subset R^u(G_z) \subset B_z \quad \text{et} \quad R^u(G_x) \subset B_x$$

d'où

$$nP^un^{-1} \subset B_x \subset B \quad \text{et} \quad nP^un^{-1} \subset P^u.$$

On en déduit que $n \in N_G(P^u)$, *i.e.* $n \in P$, et on a ainsi montré :

Lemme 6. — *Si (P, Y) est une induction simple de X alors toutes les B -orbites fermées dans l'orbite ouverte de X sont contenues dans une même P -orbite de X . En particulier, de telles orbites sont, en fait, dans $\varphi(Y)$.*

Dorénavant, on pose $H = G_x$ et on considère le sous-groupe parabolique P_1 de G engendré par H , B et les éléments n de $N_G(T)$ tels que $B \cdot n \cdot x$ est fermée dans G/H . Par définition, P_1 est le sous-groupe parabolique minimal de G contenant H et tel que toutes les B -orbites fermées dans l'orbite dense de X sont dans une même orbite de P_1 . On a donc pour toutes les inductions simples (P, Y) :

$$P_1 \subset P \quad \text{et} \quad X_1 = \text{Adh}(P_1 \cdot x) \subset \varphi(Y).$$

Notons que $P_1 \cdot x$ est la seule P_1 -orbite de X_1 contenue dans $G \cdot x$. Soit P_H le sous-groupe parabolique de G engendré par P_1 et les éléments w de W tels que $w \cdot y$ appartient à X_1 , y étant l'unique point fixe de B dans X_1 . On obtient alors que la variété $\text{Adh}(P_H \cdot x)$ — aussi égale à $\text{Adh}(P_H \cdot X_1)$ — possède exactement deux P_H -orbites. De plus, pour toutes les inductions simples (P, Y) :

$$P_H \subset P \quad \text{et} \quad X_H = \text{Adh}(P_H \cdot x) \subset \varphi(Y).$$

Notons \tilde{X}_H la normalisée de la variété X_H .

Proposition 11. — *La paire (P_H, \tilde{X}_H) est une induction simple ; c'est l'unique élément minimal de l'ensemble des inductions simples de la variété X .*

La démonstration de cet énoncé repose sur

Proposition 12. — *On considère Y une variété-à-deux-orbites pour un sous-groupe parabolique Q de G contenant le sous-groupe de Borel B . Soit z un élément de l'orbite ouverte tel que $B \cdot z$ est fermée dans $Q \cdot z$ et tel que le tore T_z° est un tore maximal de Q_z . L'orbite $L \cdot z$ est complète si le radical de Q n'opère pas trivialement sur Y , L étant le sous-groupe de Levi de Q contenant le tore T .*

Commençons par la

Démonstration de la proposition 11. — D'après ce qui a déjà été fait, il ne reste qu'à montrer que le radical de P_H opère trivialement sur \tilde{X}_H , \tilde{X}_H étant une P_H -variété-à-deux-orbites, d'après les arguments utilisés dans le préambule de ce chapitre.

On considère un élément z de l'orbite ouverte de \tilde{X}_H tel que $B \cdot z$ est fermée dans $P_H \cdot z$ et tel que T_z° est un tore maximal de G_z . Si \tilde{X}_H est de type II, l'orbite $L \cdot z$ ne peut être complète (fermée), il résulte immédiatement de la proposition ci-dessus que le radical de P_H opère trivialement sur \tilde{X}_H .

Supposons donc \tilde{X}_H de type I. Si α est une racine simple de P_H dont le sous-groupe unipotent associé n'est pas contenu dans le stabilisateur générique alors, d'après les hypothèses faites sur l'élément z , $s_\alpha B s_\alpha \cap G_z$ contient un sous-groupe de Borel de G_z . Il en découle que $B s_\alpha \cdot z$ est fermée dans $P_H \cdot z$ et, par définition de P_H , que s_α appartient au groupe de Weyl de P_H ou encore que le sous-groupe unipotent associé à $-\alpha$ est inclus dans P_H . Ainsi, si on considère le sous-groupe de Levi L de P_H contenant le tore T , la variété $\text{Adh}(U_\alpha \cdot z)$ est incluse dans $\text{Adh}(L \cdot z)$. Or $\text{Adh}(U_\alpha \cdot z)$ contient un point de l'orbite fermée fixé par le tore T , sinon l'adhérence de $U_\alpha \cdot z$ serait incluse dans la B -orbite de z , $B \cdot z$ étant supposée fermée dans $P_H \cdot z$ mais d'après le corollaire 4, ceci n'est pas possible. Il s'ensuit que l'orbite $L \cdot z$ n'est pas fermée et par conséquent, que le radical de P_H opère trivialement sur \tilde{X}_H . \square

Démonstration de la proposition 12. — Avant tout, il convient de noter pour la suite que le radical $R(Q)$ du groupe parabolique Q opère trivialement sur l'orbite fermée de Y . La proposition repose donc essentiellement sur l'orbite dense.

On considère z un élément de l'orbite ouverte tel que l'orbite $B \cdot z$ est fermée dans $Q \cdot z$ et tel que T_z° est un tore maximal de Q_z .

On suppose, dans un premier temps, que $T_z^\circ \neq T$ ($L \cdot z$ n'est donc pas complète). Soit $\beta \in \Phi^+$ telle que $U_\beta \not\subset Q_z$ (une telle racine existe sinon l'orbite fermée contiendrait deux points fixés par le sous-groupe de Borel B , donnés par les points fixes de T dans $\text{Adh}(T \cdot z)$), et soit la variété de dimension 2

$$X_\beta = \text{Adh}(U_\beta T \cdot z).$$

Cette variété possède une T -orbite ouverte (la T -orbite de l'élément $\varepsilon_\beta(1) \cdot z$); on note T_{X_β} le stabilisateur générique dans T associé de codimension 2. On montrera alors que la composante neutre $Z(L)^\circ$ du centre de L est contenue dans $T_{X_\beta}^\circ$, donc dans $\ker \beta$. Ceci impliquera que U_β n'est pas contenu dans Q^u et que le radical $R(Q)$ opère trivialement sur Y .

On note y_1 et y_2 les points fixes du tore T dans $\text{Adh}(T \cdot z)$. Si y_i ($i = 1, 2$) n'est pas un point fixe de U_β , on note y'_i l'autre point fixe de T dans $\text{Adh}(U_\beta \cdot y_i)$, sinon on pose $y'_i = y_i$.

Affirmation 1. — *Les points y'_1 et y'_2 sont distincts.*

En effet, si ce n'était pas le cas, d'après le lemme 5, on aurait $y'_1 = y'_2 = y_2$ (resp. $y'_1 = y'_2 = y_1$) et donc y_1, y_2 seraient les deux points fixes de T dans $\text{Adh}(U_\beta \cdot y_1)$ (resp. $\text{Adh}(U_\beta \cdot y_2)$), ce qui est absurde car, T_z° étant régulier, il ne peut être contenu dans $\ker \beta$.

On considère ensuite la sous-variété $X_\beta^{U_\beta}$ constituée des points fixes de U_β dans X_β . D'après ce qui précède, $X_\beta^{U_\beta}$ contient au moins deux points distincts, y'_1 et y'_2 , et étant de plus connexe, c'est donc une variété de dimension 1.

Affirmation 2. — *Il existe des éléments z_1, \dots, z_r et $\rho_1, \dots, \rho_{r+1}$ ($r \geq 1$) dans $X_\beta^{U_\beta}$ tels que $\dim(T \cdot z_i) = 1$ et ρ_i, ρ_{i+1} soient les points T -fixes de $\text{Adh}(T \cdot z_i)$. De plus, si $y_i = y'_i$ ($i = 1, 2$) alors $r \geq 2$.*

Pour montrer cette assertion, il suffit de considérer l'enveloppe convexe Λ du support de $\text{Adh}(U_\beta \cdot z)$. Les points z_i sont alors donnés par les points de $\text{Adh}(U_\beta \cdot z)$ dont le support est sur un côté de Λ , différent de celui porté par la droite D_z ou par la droite joignant le support de y_i et celui de y'_i si y_i n'est pas un point fixe de U_β . De tels points z_i appartiennent nécessairement à la Q -orbite fermée de Y , $B \cdot z$ étant supposée fermée dans $Q \cdot z$, ceci résulte essentiellement du corollaire 4, et du fait que les points z_i et z n'ont pas même support.

On dispose alors au moins de deux éléments u et v dans l'intersection de X_β avec l'orbite fermée de Y tels que

$$\dim(T \cdot u) = 1 = \dim(T \cdot v) \quad \text{et} \quad |\text{Adh}(T \cdot u) \cap \text{Adh}(T \cdot v)| = 1.$$

On note que si $r = 1$, il suffit de prendre pour u le point z_1 et pour v le point tel que $\text{Adh}(T \cdot v) = \text{Adh}(U_\beta \cdot y_i)$ (pour $y_i \neq y'_i$).

On en déduit que le tore $(T_u \cap T_v)^\circ$ est de codimension 2 et donc égal à $T_{X_\beta}^\circ$ (car le contenant). On rappelle que le centre $Z(L)$ de L opère trivialement sur l'orbite fermée d'où, en particulier, l'inclusion $Z(L) \subset (T_u \cap T_v)$ et le résultat annoncé : $Z(L)^\circ \subset T_{X_\beta}^\circ$.

Supposons maintenant que $T_z^\circ = T$ et que $L \cdot z$ n'est pas fermée. Il existe alors au moins une racine positive α dans le système de racines de (L, L) telle que le sous-groupe U_α ne soit pas contenu dans Q_z . Le centre $Z(L)$ de L étant contenu dans Q_z , pour montrer que $R(Q)$ opère trivialement sur Y , il suffit de montrer que Q^u est inclus dans Q_z . Pour montrer cela, on procèdera par l'absurde.

Considérons donc une racine positive β telle que $U_\beta \subset Q^u$ et $U_\beta \not\subset Q_z$. On note $X_{\beta,\alpha}$ la variété $\text{Adh}(U_\beta U_\alpha \cdot z)$ de dimension 2. La variété $X_{\beta,\alpha}$ possède une T -orbite ouverte (celle de l'élément $\varepsilon_\beta(1)\varepsilon_\alpha(1) \cdot z$) ; on désigne par T_{X_β} le stabilisateur générique associé de codimension 2.

Soient y_1 et y_2 les points (distincts de z) fixés par le tore T dans $\text{Adh}(U_\alpha \cdot z)$ et $\text{Adh}(U_\beta \cdot z)$ respectivement. Ces points sont nécessairement distincts car ils n'ont déjà pas le même support. Si U_β ne fixe pas le point y_1 alors on note par y'_1 l'autre point fixe de T dans $\text{Adh}(U_\beta \cdot y_1)$ sinon on pose : $y'_1 = y_1$. Les points y'_1 et y_2 sont de même distincts et, tout comme précédemment, la variété $X_{\beta,\alpha}^{U_\beta}$ est de dimension 1. De plus, $X_{\beta,\alpha}^{U_\beta}$ est contenue dans l'orbite fermée de Y car toutes les T -orbites de $B \cdot z$ contiennent l'élément z dans leur adhérence — les supports des éléments de $B \cdot z$ admettent tous le poids de z comme point extrémal. Si $X_{\beta,\alpha}$ contenait au moins trois points fixes de T dans l'orbite fermée alors, comme dans le premier cas, T_{X_β} contiendrait $Z(L)^\circ$ ce qui n'est pas vrai car $Z(L)^\circ$ n'opère pas trivialement sur $U_\beta \cdot z$. Les points y_1 et y_2 sont donc les seuls points fixes de ce type. En particulier, U_β fixe y_1 et il existe un élément u de l'orbite fermée de Y tel que $X_{\beta,\alpha}^{U_\beta} = \text{Adh}(T \cdot u)$.

On considère pour finir la sous-variété $\text{Adh}(U_{-\alpha} \cdot y_1)$; on rappelle que l'élément y_1 est par définition fixé par U_α . Cette dernière sous-variété est de dimension 1 car y_1 n'est pas un point fixe de $U_{-\alpha}$. En effet, sinon y_1 serait un point fixe de $L(\alpha)$, le sous-groupe de Levi associé à la racine α et $\text{Adh}(L(\alpha) \cdot z)$ serait une variété-à-deux-orbites de dimension 2 avec un point comme orbite fermée et comme orbite ouverte une variété affine ! Ainsi, on peut considérer y_3 l'autre point fixe de T dans $\text{Adh}(U_{-\alpha} \cdot y_1)$. Tout comme les points y_1 et y_2 , les points y_1 et y_3 sont distincts pour les mêmes raisons.

En résumé, on a construit deux sous-variétés de l'orbite fermée, de dimension 1,

$$X_{\beta,\alpha}^{U_\beta} = \text{Adh}(T \cdot u) \quad \text{et} \quad \text{Adh}(U_{-\alpha} \cdot y_1)$$

qui ont seulement comme point T -fixe commun l'élément y_1 . On en déduit, grâce au lemme 5, que $(T_u \cap \ker \alpha)^\circ = T_{X_\beta}^\circ$ — ce qui est impossible pour les mêmes raisons que celles avancées dans le premier cas et le fait que le centre de L ne soit pas contenu dans $\ker \alpha$. \square

Chapitre 3

Description des variétés de type I

Dans tout ce chapitre, X désignera une G -variété-à-deux-orbites (cuspidale, projective et normale), G un groupe algébrique semi-simple de rang supérieur ou égal à 2 et x un élément de l'orbite ouverte de X de stabilisateur H . Autrement dit,

$$X = \text{Adh}(G \cdot x) \quad \text{et} \quad \text{rang } H = \text{rang } G.$$

L'objet principal de cette section consiste à montrer le

Théorème 9. — *Les variétés-à-deux-orbites cuspidales de type I sont données dans le tableau 1 de l'introduction. En particulier, ces variétés sont sphériques.*

Pour ce faire, on commencera par se ramener au cas d'un groupe de rang 2, on déterminera ensuite les variétés-à-deux-orbites pour un groupe de rang 2 afin de conclure au cas général.

La variété X se plonge de façon G -équivariante dans un espace projectif $\mathbb{P}(V)$, V étant un G -module de dimension finie; on identifiera X à son image dans $\mathbb{P}(V)$ et on supposera que X «engendre» $\mathbb{P}(V)$ *i.e.* que V est le G -module minimal tel que $X \subset \mathbb{P}(V)$. Si l'élément x est fixé par le tore T , il s'écrit

$$x = [v_\mu] \quad \text{pour } \mu \in \mathcal{X}.$$

De plus,

$$V = V(\lambda) \oplus \bigoplus_{\nu} V(\nu)$$

pour λ et ν des poids dominants tels que $[v_\lambda]$ soit un point fixe de l'orbite fermée de X . Comme X ne comporte qu'une seule orbite projective, celle de l'élément $[v_\lambda]$, les poids ν sont tous distincts de λ et se trouvent dans l'enveloppe convexe de l'orbite $W \cdot \lambda$.

On considère alors une racine positive β telle que le sous-groupe unipotent associé U_β ne soit pas contenu dans le stabilisateur de x — une telle racine existe sinon le stabilisateur générique contiendrait un sous-groupe de Borel. On note z l'élément

$$\varepsilon_\beta(s) \cdot x = [v_\mu + v_{\mu+\beta} + \cdots + v_{\lambda'}], \quad s \in \mathbb{C}^*$$

où λ' est le poids $\mu + k\beta$ pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $[v_{\lambda'}]$ est l'autre point fixe du tore T dans la variété $X_\beta = \text{Adh}(U_\beta \cdot x)$.

On procédera, dans un premier temps, à plusieurs réductions afin de faciliter les calculs que l'on sera amené à faire par la suite.

On peut supposer pour commencer que μ est un poids dominant quitte à remplacer x et β par $w(x)$ et $w(\beta)$, pour w un élément du groupe de Weyl tel que $w(\mu)$ est dominant. Il devient alors évident que $[v_\lambda]$ n'est pas dans l'orbite dense de X . En effet, sinon λ' et μ seraient conjugués par un élément du groupe de Weyl et, plus précisément par s_β . On aurait alors

$$\lambda' = s_\beta(\mu) = \mu - (\mu, \beta^\vee)\beta, \quad \text{avec } (\mu, \beta) \geq 0.$$

On se ramène ensuite au poids dominant λ , on a alors le résultat suivant :

Proposition 13. — (i) Si X est une G -variété-à-deux-orbites cuspidale de type I alors le groupe G est simple.

(ii) Le support de la racine β est maximal.

Démonstration. — La première assertion est un corollaire du théorème 8 ou plutôt de sa preuve. Plus précisément, d'après la description de l'élément minimal des inductions simples d'une variété-à-deux-orbites, donnée dans la dite preuve, et le fait que X soit supposée cuspidale, le groupe G est engendré par le sous-groupe parabolique P_1 et les éléments w de W tels que $w.[v_\lambda] \in X_1$. On rappelle que P_1 est le sous-groupe parabolique engendré par H , B et les éléments n de $N_G(T)$ tels que $Bn \cdot x$ est fermé dans G/H et X_1 la P_1 -variété $\text{Adh}(P_1 \cdot x)$.

Si G est semi-simple, G s'écrit comme produit $G_1 \times \cdots \times G_r$ de groupes simples et la base Δ du système de racines est égale à $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_r$, Δ_i étant associée à G_i . Soit j , $1 \leq j \leq r$ tel que $\text{supp } \beta \subset \Delta_j$.

On commence par remarquer que si $\alpha \notin \text{supp } \beta$ alors $U_\alpha \subset G_x$. En effet, ceci vient du fait que les poids du support de $U_\alpha \cdot x$ ne peuvent être des poids de V puisque les premiers (hormis le poids de x bien sûr) ne peuvent s'écrire, quand $\alpha \notin \text{supp } \beta$, sous la forme $\lambda - \sum_{\gamma \in \Delta} n_\gamma \gamma$ (pour $n_\gamma > 0$) i.e. comme poids de V .

Soit α une racine simple, $\alpha \notin \Delta_j$, on a alors :

$$\begin{aligned} U_{-\alpha} \subset H &\iff (\mu, \alpha) = 0 \\ &\iff (\lambda, \alpha) = 0 \quad \text{car } \lambda = \mu + k\beta \text{ et } (\beta, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

On suppose que $U_{-\alpha} \not\subset H$ i.e. $(\lambda, \alpha) \neq 0$. D'après la description du groupe G rappelée ci-dessus, on doit avoir :

$$Bs_\alpha \cdot x \text{ fermé dans } G/H \quad \text{ou} \quad s_\alpha \cdot [v_\lambda] \in X_1.$$

Or, $s_\alpha Bs_\alpha \cap H$ ne contient pas de sous-groupe de Borel de H vu les hypothèses faites sur les sous-groupes U_α et $U_{-\alpha}$. De plus,

$$s_\alpha \cdot [v_\lambda] \in X_1 \iff s_\alpha w(\lambda) = \lambda \quad \text{pour } w \in W_{P_1},$$

W_{P_1} étant le groupe de Weyl du sous-groupe parabolique P_1 . Mais comme $s_\alpha \notin W_{P_1}$, on devrait avoir : $s_\alpha(\lambda) = \lambda$ i.e. $(\lambda, \alpha) = 0$ — ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ceci entraîne que

$$U_{\pm\alpha} \subset G_x \quad \text{pour } \alpha \in \Delta \setminus \Delta_j.$$

Par conséquent, le stabilisateur générique est de la forme

$$H_1 \times \cdots \times H_r \quad \text{avec } H_i = G_i \text{ pour } i \neq j .$$

Le groupe G peut donc être supposé simple.

Pour montrer la seconde assertion, considérons le sous-groupe parabolique P associé au support de β et la P -variété

$$Z = X \cap \mathbb{P} \left(\bigoplus_{\nu} V_{\nu} \right) \quad \text{pour } \nu = \lambda - \sum n_{\alpha} \alpha \quad \text{avec } \alpha \in \text{supp } \beta \text{ et } n_{\alpha} \in \mathbb{N}.$$

Alors si β n'était pas de support maximal, (P, Z) serait une induction simple et donc X ne serait pas cuspidale. En effet, par construction, le radical unipotent de P opère trivialement sur le P -module $\bigoplus_{\nu} V_{\nu}$ (ν comme ci-dessus). De plus, le centre du sous-groupe de Levi de P , associé au support de β , fixe les éléments de la forme

$$\left[\sum_{\nu} v_{\nu} \right] \quad (\nu \text{ de la forme donnée}).$$

On en déduit que le radical de P opère trivialement sur la variété Z qui est en fait une P -variété-à-deux-orbites incluse dans X et contenant l'élément x .

La proposition est ainsi entièrement démontrée. \square

En résumé, on travaillera dans le reste de ce chapitre avec G groupe simple et $x = [v_{\mu}]$, $\mu \in \mathcal{X}$, $\beta \in \Phi^+$ telle que $\text{supp } \beta = \Delta$, $U_{\beta} \not\subset G_x$, $z = \varepsilon_{\beta}(s) \cdot x = [v_{\mu} + \cdots + v_{\lambda}]$, où $\lambda = \mu + k\beta \in \mathcal{X}^+$, $\lambda \notin W \cdot \mu$ et k est un entier minimal pour de telles conditions. De plus, si $[v_{\mu'}]$ est un autre point fixe de l'orbite ouverte qui vérifie les mêmes conditions (celles qui viennent d'être énoncées) que x alors $\mu > \mu'$ si μ et μ' sont comparables. .

On considère une seconde racine positive γ , distincte de β telle que le sous-groupe unipotent U_{γ} ne soit pas inclus dans G_x (il existe au moins une racine simple qui vérifie cette condition). On désigne par L le sous-groupe de Levi attaché aux racines β et γ ; autrement dit,

$$L = C_G(S) \quad \text{pour } S = (\ker \beta \cap \ker \gamma)^{\circ}.$$

Lemme 7. — *La L -variété $\text{Adh}(L \cdot x)$ possède deux orbites.*

Démonstration. — La variété $\text{Adh}(L \cdot x)$ est incluse dans l'ensemble X^S des points fixes de S dans X . D'après le lemme 4, $\text{Adh}(L \cdot x)$ est une composante connexe de X^S et plus précisément

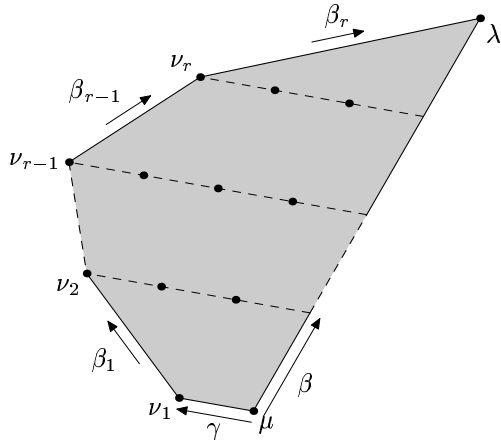
$$L \cdot x = \text{Adh}(L \cdot x) \cap G \cdot x.$$

La variété $\text{Adh}(L \cdot x) \setminus L \cdot x$ est donc incluse dans la G -orbite fermée de X . Les L -orbites de cette dernière variété étant des composantes connexes de $(G \cdot y)^S$, elles sont en nombre fini et de plus fermées dans $(G \cdot y)^S$ donc fermées dans X .

Ainsi, si $\text{Adh}(L \cdot x)$ n'était pas une variété-à-deux-orbites, le stabilisateur de x dans L contiendrait un sous-groupe unipotent maximal de L et l'orbite $L \cdot x$ serait fermée. Or, ceci ne peut se produire car $[v_{\lambda}] \in \text{Adh}(L \cdot x) \setminus L \cdot x$. \square

Remarque. — La variété $\text{Adh}(L \cdot x)$ n'est pas nécessairement cuspidale, par conséquent le système engendré par β et γ peut être de type $A_1 \times A_1$ même si dans ce cas il n'y a pas de variété-à-deux-orbites cuspidale.

Soit Λ l'enveloppe convexe du support de la variété $\text{Adh}(U_\gamma U_\beta \cdot x)$ — cet ensemble est constitué de poids de \mathcal{X} de la forme $\mu + p\beta + q\gamma$ pour $p, q \in \mathbb{N}$. Les points extrémaux de Λ , hormis μ et λ , seront notés ν_i de sorte que le segment $[\nu_i, \nu_{i+1}]$ soit une face de Λ .



En considérant des sous-groupes à un paramètre appropriés, on peut montrer que les points $[v_{\nu_i}]$ et les points $[v_i]$ dont le support est constitué des poids de Λ qui appartiennent au segment $[\nu_i, \nu_{i+1}]$ sont des éléments de la variété $\text{Adh}(U_\gamma U_\beta \cdot x)$. On a de plus

Lemme 8. — (i) *Le tore $T_{[v_i]}^\circ$ est singulier.*

(ii) *Les points extrémaux de Λ , excepté μ , sont conjugués à λ par le groupe de Weyl.*

Démonstration. — Le tore $T_{[v_i]}^\circ$ est égal à $\ker(\nu_i - \nu_{i+1})^\circ$. Soit T' un tore maximal de $G_{[v_i]}$ contenant $T_{[v_i]}^\circ$; T' est toujours un tore maximal pour le groupe G dans le cas d'une G -variété-à-deux-orbites de type I. Si le tore $T_{[v_i]}^\circ$ était régulier alors son centralisateur serait égal au tore T' mais le tore T est inclus dans ce centralisateur, on a donc

$$T = T' \subset G_{[v_i]} \quad \text{et} \quad T = \ker(\nu_i - \nu_{i+1}).$$

Cette dernière égalité ne peut avoir lieu car les points ν_i et ν_{i+1} sont distincts par définition.

Montrons maintenant la seconde assertion. Pour cela, on commence par remarquer que si l'enveloppe convexe Λ a plus de trois points extrémaux, les points $[v_i]$ ont un support de cardinal strictement inférieur à celui du support de x ; grâce à la minimalité de ce dernier cardinal, on conclut que les points $[v_i]$ (donc aussi les points $[v_{\nu_i}]$) sont dans l'orbite fermée. Considérons donc le cas où Λ n'a que trois points extrémaux. Le poids $\nu_1 > \mu$ ne peut être conjugué à μ car sinon l'élément $[v_{\nu_1}]$ serait dans l'orbite ouverte et vérifierait les conditions du préambule et par là même contredirait l'hypothèse de « maximalité » du poids μ — ceci achève la démonstration du lemme.

□

Corollaire 5. — Soit δ une racine positive telle que $[v_{s_{\gamma'}(\lambda)}] \in \text{Adh}(U_\delta \cdot x)$, pour γ' une racine simple. Supposons de plus, que s'il existe un entier $r > 0$ tel que le poids $\mu + r\gamma'$ soit extrémal comme poids de V , $\mu + r\gamma'$ est égal à $s_\alpha(\lambda)$ pour une racine simple α . On a alors :

$$\begin{cases} U_{\gamma'} \subset G_x & \text{si } (\mu, \gamma'^\vee) \geq 0, \\ U_{-\gamma'} \subset G_x & \text{si } (\mu, \gamma'^\vee) \leq 0. \end{cases}$$

Démonstration. — On a en fait deux situations à considérer : quel que soit $r \geq 0$, le poids $\mu + r\gamma'$ n'est jamais extrémal ou il existe un entier $r > 0$ tel que $\mu + r\gamma'$ est extrémal et donc égal, par hypothèse, à $s_\alpha(\lambda)$ pour $\alpha \in \Delta$.

Plaçons-nous, tout d'abord, dans la première situation. Si $(\mu, \gamma'^\vee) \geq 0$ alors d'après le lemme précédent, on a : $U_{\gamma'} \subset G_x$. Si $(\mu, \gamma'^\vee) \leq 0$ et $U_{-\gamma'} \not\subset G_x$ alors $\text{Adh}(U_{-\gamma'} \cdot x)$ contient un point T -fixe de l'orbite fermée. Il en est donc de même de $\text{Adh}(U_{\gamma'} \cdot x)$, ce qui est contraire au cas considéré.

Supposons alors que $\mu + r\gamma' = s_\alpha(\lambda)$ pour $\alpha \in \Delta$ et que $(\mu, \gamma'^\vee) \geq 0$. Procédons par l'absurde. Soit l'élément x' égal à $\varepsilon_\delta(1) \cdot x$, on a donc par hypothèse :

$$x' = [v_\mu + \cdots + v_{s_{\gamma'}(\lambda)}].$$

Considérons l'enveloppe convexe \mathcal{C} du support de l'élément $\varepsilon_\beta(1) \cdot x'$. Les poids λ et $s_{\gamma'}(\lambda)$ sont des points extrémaux de \mathcal{C} et le segment $[\lambda, s_{\gamma'}(\lambda)]$ est un côté de \mathcal{C} car γ' est une racine simple. On a de plus

$$[\lambda, s_{\gamma'}(\lambda)] \cap \mathcal{C} \cap \text{supp } V = [\lambda, s_{\gamma'}(\lambda)] \cap \text{supp } V.$$

Il en résulte, en particulier, qu'il existe un entier $j > 0$ tel que le vecteur

$$\frac{Y_\beta^{n_j}}{n_j!} \cdot v_{\mu+j\delta}$$

soit de poids $\gamma' + s_{\gamma'}(\lambda)$. Rappelons que Y_β désigne le vecteur radiciel de \mathfrak{g}_β . Comme la dimension de $V_{\gamma'+s_{\gamma'}(\lambda)}$ (sous-espace de $V(\lambda)$) est égale à 1, on a :

$$-\frac{Y_\beta^{n_j}}{n_j!} \cdot v_{\mu+j\delta} = sY_{\gamma'} \cdot v_{s_{\gamma'}(\lambda)} \quad \text{pour } s \in \mathbb{C}^*.$$

Considérons ensuite l'élément

$$z' = \exp(Y_\beta + sY_{\gamma'}) \cdot x' = \left[\sum_\nu z'_\nu \right] \quad \text{pour } z'_\nu \in V_\nu.$$

Si $U_{\gamma'} \not\subset G_x$, comme $(\mu, \gamma'^\vee) \geq 0$ on a :

$$[v_{s_\alpha(\lambda)}] \in \text{Adh}(U_{\gamma'} \cdot x)$$

et donc

$$\frac{Y_{\gamma'}^\ell}{\ell!} \cdot v_\mu = cv_{s_\alpha(\lambda)} \quad \text{pour } c \in \mathbb{C}^* \text{ et } \ell \in \mathbb{N}.$$

L'étude des poids de z' conduit à :

$$z'_{s_\alpha(\lambda)} = s^\ell \frac{Y_{\gamma'}^\ell}{\ell!} \cdot v_\mu \neq 0$$

et à

$$z'_{\gamma'+s_{\gamma'}(\lambda)} = \frac{Y_\beta^{n_j}}{n_j!} \cdot v_{\mu+j\delta} + sY_{\gamma'} \cdot v_{s_{\gamma'}(\lambda)} = 0. \quad (3.1)$$

Pour finir, analysons le support \mathcal{S} de la variété $\text{Adh}(T \cdot \exp(Y_\beta + sY_{\gamma'}) \cdot x')$. Les poids $s_\alpha(\lambda)$ et $s_{\gamma'}(\lambda)$ sont des points extrémaux de ce support. Mais comme le poids $\gamma' + s_{\gamma'}(\lambda)$ ne figure pas dans \mathcal{S} (d'après (3.1)), le poids λ ne peut en être un point extrémal. Or, les racines α et γ' étant supposées simples, il n'existe aucun W -conjugué à λ dans le triangle $(\lambda, s_\alpha(\lambda), s_{\gamma'}(\lambda))$ ce qui signifie que le segment $[s_\alpha(\lambda), s_{\gamma'}(\lambda)]$ doit être un côté de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} ; ceci n'est pas possible, d'après le lemme 8, puisque $s_\alpha(\lambda) - s_{\gamma'}(\lambda)$ n'est pas une racine. En conclusion, l'enveloppe convexe du support de cette dernière variété est réduite au segment $[\mu, s_{\gamma'}(\lambda)]$ ce qui entraîne, entre autre, que $U_{\gamma'} \subset G_x$.

Si $(\mu, \gamma'^\vee) \leq 0$, on peut se ramener au cas précédent en considérant l'élément $s_{\gamma'} \cdot x$ qui vérifie les hypothèses du lemme et, qui est tel que $(s_{\gamma'}(\mu), \gamma'^\vee) \geq 0$. On a donc : $U_{\gamma'} \subset G_{s_{\gamma'} \cdot x}$ et $U_{-\gamma'} \subset G_x$. \square

Une fois cette combinatoire établie, on peut déterminer quels sont les stabilisateurs génériques de G -variétés-à-deux-orbités pour G un groupe de rang 2 afin de décrire grâce au lemme 7 les stabilisateurs génériques de variétés-à-deux-orbités dans le cas général.

3.1 Cas des groupes de rang 2

Le groupe algébrique G est supposé de rang 2. Après avoir décrit les G -variétés-à-deux-orbités (non cuspidales) pour G de type $A_1 \times A_1$, on montrera

Proposition 14. — *Dans le cas d'un groupe algébrique G de rang 2, les paires cuspidales (G, \mathfrak{g}_x) de type I sont données dans la liste suivante. En particulier, les stabilisateurs génériques sont sphériques.*

- (SL_3, \mathfrak{gl}_2)
- (SO_5, \mathfrak{so}_4)
- $(SO_5, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\pm\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2})$
- $(SO_5, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2})$
- $(G_2, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{sl}_3)$
- $(G_2, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2})$
- $(G_2, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2})$
- $(G_2, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\pm\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2})$.

Il découle de cette proposition que, dans le cas présent, le stabilisateur générique n'est pas forcément connexe et à la paire (G, \mathfrak{g}_x) correspondent deux stabilisateurs génériques G_x° et $N_G(G_x^\circ)$.

Pour commencer, on pourra noter la

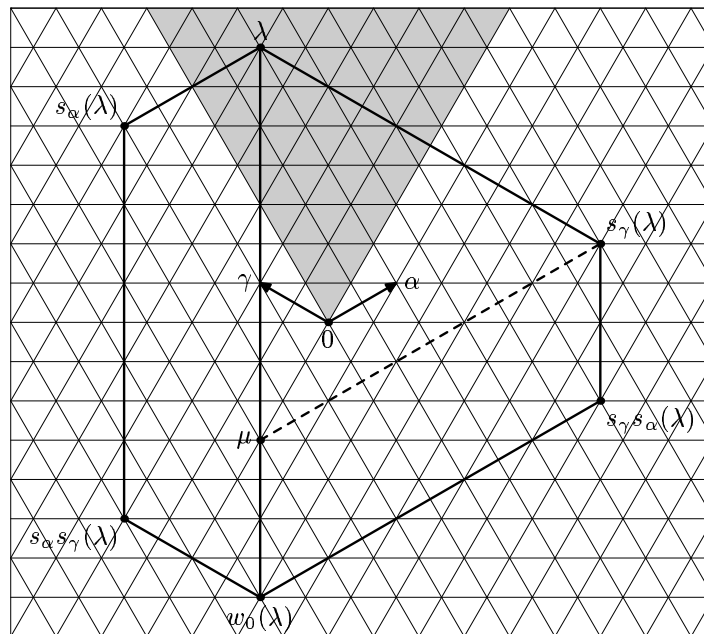
Remarque. — Le stabilisateur générique contient au moins un sous-groupe unipotent radiciel sinon l'orbite dense serait affine et l'orbite fermée de codimension 1. Un calcul rapide sur les dimensions nous montre que le stabilisateur générique ne peut être un tore.

D'après la remarque précédente, on peut tout de suite conclure, pour le cas de type $A_1 \times A_1$, aux deux possibilités suivantes pour G_x

$$G_x = \mathbb{C}^* \times B' \quad \text{ou} \quad G_x = \mathbb{C}^* \times SL_2$$

pour un B' sous-groupe de Borel de SL_2 .

Démonstration de la proposition 14. — Dans le cas du type A_2 , si α et γ désignent les racines simples, alors la racine β est égale à $\alpha + \gamma$.

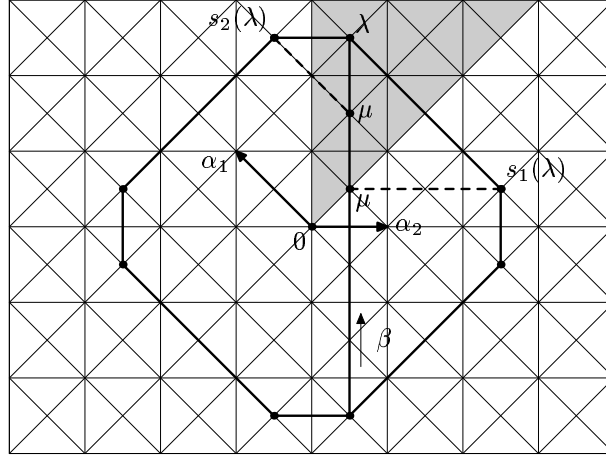


On suppose que $U_\alpha \not\subset G_x$, le cas où $U_\gamma \not\subset G_x$ étant symétrique. Alors, d'après le lemme 8, le poids μ de x doit appartenir à la droite $D_{\alpha, s_\gamma(\lambda)}$ passant par $s_\gamma(\lambda)$ et de direction α . Or μ appartient aussi à la droite $D_{\beta, \lambda}$, par conséquent, en considérant l'intersection de ces deux droites, on obtient que

$$\mu = ((\lambda, \alpha^\vee) - (\lambda, \gamma^\vee))\omega_\alpha \quad \text{et} \quad (\mu, \gamma) = 0.$$

D'après le corollaire précédent, $U_{\pm\gamma} \subset G_x$. On obtient donc uniquement la paire (SL_3, \mathfrak{gl}_2) déjà obtenue par D. AHIEZER.

Dans le cas du type B_2 , il y a deux possibilités pour la racine β : $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$ ou $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$.



Supposons d'abord la racine β égale à $\alpha_1 + \alpha_2$. Si $U_{\alpha_1} \not\subset G_x$ alors la racine α_2 vérifie les conditions du corollaire 5 et est telle que

$$(\mu, \alpha_2^\vee) \geq 0 \quad \text{d'où} \quad U_{\alpha_2} \subset G_x.$$

Montrons ensuite que $U_{\alpha_1+2\alpha_2} \subset G_x$. S'il n'existe pas de $r \geq 0$ tel que $\mu + r(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ soit extrémal, cette inclusion est donnée par le lemme 8. Supposons donc que ce n'est pas le cas, on a alors: $\mu + r(\alpha_1 + 2\alpha_2) = s_1(\lambda)$ pour un $r \geq 0$. Un simple calcul conduit à l'égalité: $2(\lambda, \alpha_1^\vee) = (\lambda, \alpha_2^\vee)$. Mais alors, μ ne vérifie pas les conditions du préambule, en particulier, « k » n'est pas minimal. On obtient ainsi la paire (obtenue par D. FELMÜLLER)

$$(SO_5, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2}).$$

Si $U_{\alpha_1} \subset G_x$ alors $U_{\alpha_2} \not\subset G_x$ (sinon G_x serait parabolique) et la racine α_1 vérifie les conditions du corollaire avec

$$(\mu, \alpha_1^\vee) = 0 \quad \text{d'où} \quad U_{\pm\alpha_1} \subset G_x.$$

L'inclusion $U_{\alpha_1+2\alpha_2} \subset G_x$ découle du lemme 8. On obtient ainsi les paires (obtenues par D. AHIEZER)

$$(SO_5, \mathfrak{so}_4) \quad \text{et} \quad (SO_5, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\pm\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2}).$$

On notera qu'on ne peut rajouter aucune autre racine, sinon on obtiendrait un sous-groupe de Borel dans le stabilisateur générique.

Supposons ensuite la racine β égale à $\alpha_1 + 2\alpha_2$. On procède de la même façon. Si $U_{\alpha_1} \not\subset G_x$ alors la racine vérifie les conditions du corollaire avec

$$(\mu, \alpha_2^\vee) = 0 \quad \text{d'où} \quad U_{\pm\alpha_2} \subset G_x.$$

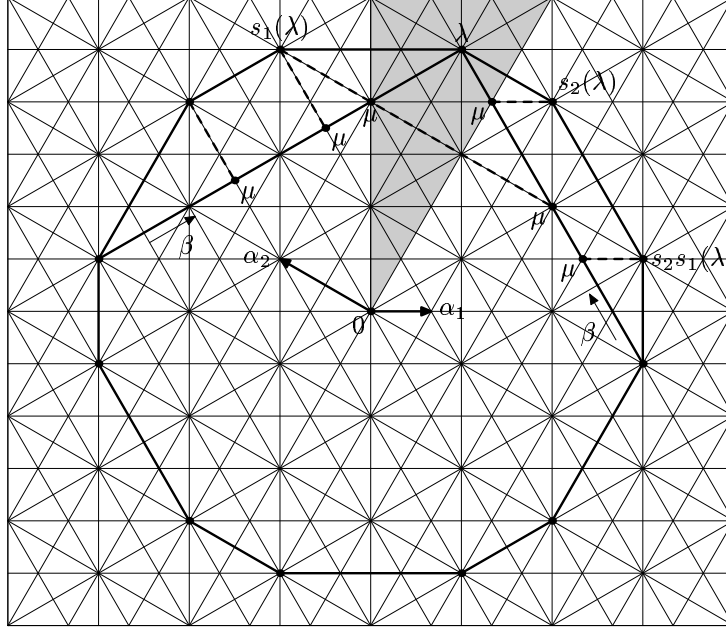
On montre ensuite que $U_{\alpha_1+\alpha_2}$ est nécessairement inclus dans G_x en notant que si le poids $\mu+r(\alpha_1+\alpha_2)$ est extrémal (pour un $r \geq 0$) alors il est égal à s_{α_2} et nécessairement $(\lambda, \alpha_1^\vee) = (\lambda, \alpha_2^\vee)$. Mais alors le conjugué de x par s_{α_2} vérifie aussi les conditions du préambule, ce qui est contraire à l'hypothèse de « maximalité » du poids μ de x . Ainsi: $U_{\pm\alpha_2} \subset G_x$ et $U_{\alpha_1+\alpha_2}$ et on aboutit alors à une absurdité, ce cas n'est donc pas

envisageable. Si $U_{\alpha_1} \subset G_x$ alors $U_{\alpha_2} \not\subset G_x$ et $U_{\alpha_1+\alpha_2} \subset G_x$, ce qui conduit à la paire (obtenue par D. FELDMÜLLER)

$$(SO_5, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}).$$

On obtient ainsi les trois paires (à conjugaison près) annoncées pour le groupe SO_5 .

Finalement, considérons le type G_2 .



Il y a *a priori* quatre possibilités pour la racine β :

$$\beta \in \{\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}.$$

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas générique, à savoir lorsque le poids λ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl positive. Si β est la racine $\alpha_1 + \alpha_2$, on commence par supposer que $U_{\alpha_1} \not\subset G_x$, on obtient toujours par les mêmes arguments

$$\Phi(G_x) = \{\pm\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}.$$

Si $U_{\alpha_1} \subset G_x$ alors $U_{\alpha_2} \not\subset G_x$ et on aboutit à

$$\Phi(G_x) = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}.$$

Si la racine β est égale à $3\alpha_1 + \alpha_2$, toujours par les mêmes considérations, si $U_{\alpha_1} \not\subset G_x$ on montre que :

$$\Phi(G_x) = \{\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$$

et si $U_{\alpha_1} \subset G_x$

$$\Phi(G_x) = \{\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}.$$

Les deux autres racines (β égale à $2\alpha_1 + \alpha_2$ ou $3\alpha_1 + 2\alpha_2$) ne conduisent à aucun nouveau cas.

Supposons pour finir que $(\lambda, \alpha_1^\vee) \cdot (\lambda, \alpha_2^\vee) = 0$ (avec bien sûr $\lambda \neq 0$). Seul le cas où $(\lambda, \alpha_2^\vee) = 0$, avec β la racine $2\alpha_1 + \alpha_2$, conduit à une autre paire, à savoir la paire (G_2, \mathfrak{sl}_3) .

$$\Phi(G_x) = \{\pm\alpha_2, \pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2), \pm(3\alpha_1 + \alpha_2)\}.$$

On obtient ainsi les paires de type I du groupe G_2 . Les paires 5 et 8 (resp. 6 et 7) ont été obtenues par D. AHIEZER (resp. D. FELDMÜLLER).

La proposition 14 est ainsi entièrement démontrée. \square

3.2 Cas général

Une fois les stabilisateurs génériques obtenus pour les groupes de rang 2, on travaille avec un groupe G de rang strictement supérieur à 2. On considèrera alors les racines de G deux par deux — l'une d'entre elles sera fixée et notée β et telle que $\text{supp } \beta = \Delta$. Puis, grâce au lemme 7, on obtiendra des conditions nécessaires sur le système de racines $\Phi(G_x)$ du groupe G_x° . Il ne nous restera alors qu'à vérifier si de tels sous-systèmes de racines génèrent effectivement des stabilisateurs génériques de variétés-à-deux-orbites cuspidales.

Pour des raisons pratiques, on pourra reformuler une partie de la proposition 14 en ces termes :

Lemme 9. — *Soit α une racine de Φ et $\langle \alpha, \beta \rangle$ le système de racines engendré par α et β . On a alors*

- 1) *si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ alors $-\alpha \in \Phi(G_x)$ et/ou $\alpha \in \Phi(G_x)$;*
- 2) *si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de type A_2 , alors, ou bien $\pm\alpha \in \Phi(G_x)$, ou bien $\pm s_\alpha(\beta) \in \Phi(G_x)$;*
- 3) *si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de type B_2 avec $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_j$, alors $\Phi(G_x) \cap \langle \alpha, \beta \rangle = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_j, \varepsilon_1\}$;*
- 4) *si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de type B_2 avec $\beta = \varepsilon_1$, alors, ou bien $\Phi(G_x) \cap \langle \alpha, \beta \rangle \supset \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j, \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_j)\}$, ou bien $\Phi(G_x) \cap \langle \alpha, \beta \rangle = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_j, \varepsilon_j\}$.*

3.2.1 Cas des groupes classiques

Commençons donc par considérer le cas de type A_n , la seule racine de support maximal est alors la racine la plus longue $\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Le système de racines $\langle \beta, \alpha_1 \rangle$ étant de type A_2 , on a deux cas :

$$\pm\alpha_1 \in \Phi(G_x) \quad \text{ou} \quad \pm(\beta - \alpha_1) \in \Phi(G_x).$$

On considère les racines $\alpha^i = \alpha_2 + \dots + \alpha_i$ ($2 \leq i \leq n-1$) pour montrer que $\Phi(G_x)$ est engendré par $\Delta \setminus \{\alpha_n\}$. En effet, $\langle \beta, \alpha^i \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ donc $-\alpha_i \in \Phi(G_x)$ et/ou $\alpha_i \in \Phi(G_x)$. De plus, comme $\langle \beta, \alpha_1 + \alpha^i \rangle$ est de type A_2 , on obtient : $\pm\alpha^i \in \Phi(G_x)$. Le second cas se traite de la même façon et aboutit au même résultat (par symétrie).

Conclusion 1. — *On obtient la paire $(SL_{n+1}, \mathfrak{gl}_n)$.*

Afin de déterminer les G -variétés-à-deux-orbites cuspidales de type I pour G de type B_n , C_n ou D_n , les deux lemmes qui suivent nous seront utiles.

Lemme 10. — *Si $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_j$, $j \geq 2$, est de support maximal, alors :*

- (i) $\pm\alpha_i \in \Phi(G_x)$, $i \notin \{1, j-1, j\}$, lorsque G est de type C_n ou de type D_n ;
(ii) $\pm\alpha_i \in \Phi(G_x)$, $i \notin \{1, j-1, j, n\}$, et $-\alpha_n \in \Phi(G_x)$ et/ou $\alpha_n \in \Phi(G_x)$, lorsque G est de type B_n .

Démonstration. — On considère les racines

$$\begin{aligned}\alpha^i &= \alpha_2 + \cdots + \alpha_i && \text{pour } 2 \leq i \leq j-2 \\ \gamma^i &= \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_i && \text{pour } j+1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Alors les systèmes $\langle \beta, \alpha^i \rangle$ et $\langle \beta, \gamma^i \rangle$ sont de type $A_1 \times A_1$. On a donc :

$$\begin{aligned}-\alpha^i \in \Phi(G_x) && \text{et/ou} && \alpha^i \in \Phi(G_x), \\ -\gamma^i \in \Phi(G_x) && \text{et/ou} && \gamma^i \in \Phi(G_x).\end{aligned}$$

De plus, les systèmes de racines $\langle \beta, \alpha_1 + \alpha^i \rangle$ et $\langle \beta, \alpha_j + \gamma^i \rangle$ sont de type A_2 sauf pour γ^n (ou α^n) si G est de type B_n . On en déduit que les racines $\pm\alpha^i$ et $\pm\gamma^i$ appartiennent à $\Phi(G_x)$ sauf dans le cas venant d'être mentionné. Le système $\langle \beta, \alpha_n \rangle$ étant de type $A_1 \times A_1$ pour $j \neq n$, on a : $-\alpha_n \in \Phi(G_x)$ et/ou $\alpha_n \in \Phi(G_x)$. \square

Lemme 11. — Si $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_j$, $j \geq 2$, est de support maximal alors $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \notin \Phi(G_x)$.

Démonstration. — On suppose que $-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \in \Phi(G_x)$ et/ou $\varepsilon_1 - \varepsilon_j \in \Phi(G_x)$. On distinguera trois cas selon que $j = 2$, $j = n$ ou $j \notin \{1, 2, n\}$.

Affirmation 3. — Si $j = 2$, alors $\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\} \subset \Phi(G_x)$ ou $\{\pm\alpha_1, \pm(\beta - \alpha_2)\} \subset \Phi(G_x)$.

Ceci résulte essentiellement du fait que $\langle \beta, \alpha_2 \rangle$ et $\langle \beta, \alpha_1 + \alpha_2 \rangle$ sont de type A_2 . En effet,

1) si $\pm(\alpha_1 + \alpha_2) \in \Phi(G_x)$ alors $\pm\alpha_2 \in \Phi(G_x)$ (sous notre hypothèse) et donc $\pm\alpha_1 \in \Phi(G_x)$;

2) si $\pm(\alpha_1 + \alpha_2) \notin \Phi(G_x)$, i.e. $\pm(\beta - \alpha_1 - \alpha_2) \in \Phi(G_x)$, alors $\pm(\beta - \alpha_2) \in \Phi(G_x)$ et donc $\pm\alpha_1 \in \Phi(G_x)$.

En conclusion, si $j = 2$ alors $\Phi(G_x)$ contient une base (d'après le lemme 10), ce qui est absurde.

Affirmation 4. — Si $j \notin \{1, 2, n\}$ les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\pm\alpha_1 \in \Phi(G_x)$;
- (ii) $\pm\alpha_{j-1} \in \Phi(G_x)$;
- (iii) $\pm\alpha_j \in \Phi(G_x)$.

Le système $\langle \beta, \alpha_k \rangle$ étant de type A_2 pour $\alpha_k \in \{\alpha_1, \alpha_{j-1}, \alpha_j\}$, la racine $-\alpha_k \in \Phi(G_x)$ si et seulement si $\alpha_k \in \Phi(G_x)$.

Pour montrer l'équivalence des deux premières assertions, il suffit de considérer la racine α égale à $\varepsilon_1 - \varepsilon_j = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1}$. Par hypothèse, $\alpha \in \Phi(G_x)$ et/ou $-\alpha \in \Phi(G_x)$ d'où (en utilisant le lemme 10) : $\alpha_1 \in \Phi(G_x) \Leftrightarrow \alpha_{j-1} \in \Phi(G_x)$.

Pour montrer l'équivalence des deux dernières assertions, on considère cette fois la racine $\alpha_{j-1} + \alpha_j$, en notant que $\alpha_{j-1} + \alpha_j \in \Phi(G_x)$ et/ou $-(\alpha_{j-1} - \alpha_j) \in \Phi(G_x)$. On aboutit alors à la même conclusion que pour le cas où $j = 2$.

La racine $\varepsilon_1 + \varepsilon_n$ n'étant pas de support maximal pour le type D_n , l'affirmation précédente, adaptée au cas où $j = n$, donne pour G de type B_n ou de type C_n :

Affirmation 5. —

- (i) $\pm\alpha_1 \in \Phi(G_x) \iff \pm\alpha_n \in \Phi(G_x)$;
- (ii) $\pm\alpha_{n-1} \in \Phi(G_x) \implies \alpha_n \in \Phi(G_x)$ et/ou $-\alpha_n \in \Phi(G_x)$.

Ceci résulte du fait que :

- $\langle \beta, \alpha_{n-1} + \alpha_n \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ si G de type B_n ;
- $\langle \beta, 2\alpha_{n-1} + \alpha_n \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ si G de type C_n .

Or,

- $\langle \varepsilon_1 - \varepsilon_n, \varepsilon_n \rangle \cap \Phi(G_x) = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_n, \varepsilon_1\}$ pour G de type B_n ;
- $\langle \varepsilon_1 - \varepsilon_n, 2\varepsilon_n \rangle \cap \Phi(G_x) = \{2\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_n\}$ pour G de type C_n (sous notre hypothèse).

Donc $\pm\alpha_n \notin \Phi(G_x)$ et on a $\pm\alpha_1 \notin \Phi(G_x)$, i.e. $\pm(\beta - \alpha_1) \in \Phi(G_x)$, ce qui conduit à :

- $\pm(\alpha_{n-1} + 2\alpha_n) \in \Phi(G_x)$ pour G de type B_n ;
- $\pm(\alpha_{n-1} + \alpha_n) \in \Phi(G_x)$ pour G de type C_n .

D'où finalement : $\alpha_n \in \Phi(G_x)$ et/ou $-\alpha_n \in \Phi(G_x)$, ce qui n'est pas possible.

L'hypothèse de départ : $-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \in \Phi(G_x)$ et/ou $\varepsilon_1 - \varepsilon_j \in \Phi(G_x)$ était donc erronée. Le lemme est ainsi entièrement démontré. \square

Conclusion 2. — *Il n'existe aucune G -variété-à-deux-orbites de type I lorsque G est de type D_n .*

Ceci résulte du lemme 11 et du fait que les racines de support maximal sont, dans ce cas, toutes de la forme $\varepsilon_1 + \varepsilon_j$ ($j \neq n$) avec $\varepsilon_1 - \varepsilon_j$ et/ou $-(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) \in \Phi(G_x)$ car $\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_j, \varepsilon_1 - \varepsilon_j \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$.

Lorsque G est de type B_n , d'après les lemmes 9 et 11, la seule possibilité pour β est d'être égale à ε_1 .

Considérons donc le cas où $\beta = \varepsilon_1$. On notera tout d'abord que :

- 1) $\{\varepsilon_1 + \varepsilon_i : i \geq 2\} \subset \Phi(G_x)$;
- 2) $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_i) \in \Phi(G_x)$ ou $\varepsilon_i \in \Phi(G_x)$ pour tout $i \geq 2$.

Affirmation 6. — (i) Si $\pm\alpha_1 \in \Phi(G_x)$, on a : $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_i) \in \Phi(G_x)$, pour tout $i \geq 2$.

(ii) Si $\pm\alpha_1 \notin \Phi(G_x)$ alors $\varepsilon_i \in \Phi(G_x)$, pour tout $i \geq 2$.

On considère, comme précédemment (cf. preuve du lemme 10) les racines α^i pour $2 \leq i \leq n-1$. Dans le premier cas de l'affirmation, il en résulte que

$$\{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} + 2\alpha_n\} \subset \Phi(G_x).$$

On obtient alors les deux paires (obtenues par D. AHIEZER) de type I du groupe SO_{2n+1}

$$(SO_{2n+1}, \mathfrak{so}_{2n}) \quad \text{et} \quad \left(SO_{2n+1}, \mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t} \right)$$

où $\Psi = \langle \pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} + 2\alpha_n \rangle$.

Pour le second cas, on considère en plus l'ensemble $I = \{i > 2 : \varepsilon_i \notin \Phi(G_x)\}$; si l'ensemble I n'est pas vide, on note i_0 son élément minimal. On a alors: $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_{i_0}) \in \Phi(G_x)$. Le système $\langle \beta, \alpha_{i_0-1} \rangle$ étant de type $A_1 \times A_1$, on a $\alpha_{i_0-1} \in \Phi(G_x)$ et/ou $-\alpha_{i_0-1} \in \Phi(G_x)$. Tout ceci implique que $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_{i_0-1}) \in \Phi(G_x)$, i.e. $\varepsilon_{i_0-1} \notin \Phi(G_x)$, on a donc une contradiction.

Après avoir noté que $\langle \beta, \alpha \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ pour $\alpha \in \langle \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$, on obtient dans le second cas :

Conclusion 3. — *Si G est de type B_n , les sous-groupes*

$$H_I = P_I \cap \sigma P_{\sigma^{-1}(I)} \sigma^{-1} \quad \text{pour } \sigma = s_1 s_2 \cdots s_n$$

indiqués par les sous-ensembles I de $\Delta \setminus \{\alpha_1, \alpha_n\}$ pourraient être les stabilisateurs génériques de variété-à-deux-orbites.

Remarque. — Pour $I \subset \Delta \setminus \{\alpha_1, \alpha_n\}$, $\sigma^{-1}(I)$ est inclus dans $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}\}$, donc l'écriture $P_{\sigma^{-1}(I)}$ a un sens.

Si G est de type C_n , on a pour β les possibilités suivantes (d'après les lemmes 9 et 11) :

- 1) $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_j$ avec $2\varepsilon_1, \pm 2\varepsilon_j \in \Phi(G_x)$ et $j \geq 2$;
- 2) $\beta = 2\varepsilon_1$ avec $\varepsilon_1 + \varepsilon_i, 2\varepsilon_i \in \Phi(G_x)$ pour $i \geq 2$.

On commence par considérer le premier cas.

a) si $\pm\alpha_1 \in \Phi(G_x)$, par les mêmes arguments que ceux utilisés pour montrer l'affirmation 4, en notant que $\varepsilon_1 - \varepsilon_j \notin \Phi(G_x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \pm(\beta + \alpha_{j-1}) \in \Phi(G_x) & \quad \text{et} \quad \pm(\beta - \alpha_j) \in \Phi(G_x) & \quad \text{pour } j \neq 2, n, \\ \pm(\beta + \alpha_{n-1}) \in \Phi(G_x) & \quad \text{et} \quad \pm(2\alpha_{n-1} + \alpha_n) \in \Phi(G_x) & \quad \text{pour } j = n. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Phi(G_x) \supset \{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_{j-2}, \pm(\alpha_{j-1} + \alpha_j), \pm\alpha_{j+1}, \dots, \pm\alpha_n, \pm 2\varepsilon_j\} & \quad \text{pour } j \neq 2, n, \\ \Phi(G_x) \supset \{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_{n-2}, \pm(2\alpha_{n-1} + \alpha_n), \pm\alpha_n\} & \quad \text{pour } j = n. \end{aligned}$$

b) si $\pm(\beta - \alpha_1) \in \Phi(G_x)$ alors en utilisant le lemme 10,

$$\pm\alpha_{j-1} \in \Phi(G_x) \quad \text{et} \quad \pm\alpha_j \in \Phi(G_x) \quad \text{pour } j \neq 2.$$

On a donc dans ce cas :

$$\Phi(G_x) \supset \{2\varepsilon_1, \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_n\}.$$

On considère enfin le cas où $j = 2$. Selon que $\pm\alpha_2 \in \Phi(G_x)$ ou pas, on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(G_x) & \supset \{2\varepsilon_1, \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_n\} \\ \Phi(G_x) & \supset \{\pm 2\varepsilon_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm\alpha_i : i \geq 3\}. \end{aligned}$$

Tout ce qui précède conduit aux deux paires de type I (obtenues par D. AHIEZER) du groupe Sp_{2n} :

$$(Sp_{2n}, \mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_{2n}) \quad \text{et} \quad \left(Sp_{2n}, \mathfrak{g}_x = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{t} \right) \quad \text{où } \Psi = \langle \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_n, 2\varepsilon_1 \rangle.$$

Si $\beta = 2\varepsilon_1$, on a :

$$\langle \varepsilon_1 - \varepsilon_i, 2\varepsilon_i \rangle \cap \Phi(G_x) = \{ \varepsilon_1 + \varepsilon_i, 2\varepsilon_i \} \quad \text{pour tout } i \neq 1. \quad (3.2)$$

Pour déterminer $\Phi(G_x)$, il suffit de remarquer que

- 1) $\langle \beta, \alpha \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ pour tout $\alpha \in \langle \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$,
- 2) $\varepsilon_i + \varepsilon_j \in \Phi(G_x)$ pour $1 < i < j \leq n$,

car $\langle \beta, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ donc $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \in \Phi(G_x)$ et/ou $-(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \in \Phi(G_x)$; or $-(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \notin \Phi(G_x)$ car sinon $-2\varepsilon_i \in \Phi(G_x)$, ce qui contredit la condition (3.2).

On obtient comme pour le cas B_n la

Conclusion 4. — *Si G est de type C_n , les sous-groupes*

$$H_I = P_I \cap \sigma P_{\sigma^{-1}(I)} \sigma^{-1} \quad \text{pour } \sigma = s_1 s_2 \cdots s_n$$

indiqués par les sous-ensembles I de $\Delta \setminus \{ \alpha_1, \alpha_n \}$ pourraient être les stabilisateurs génériques de variété-à-deux-orbites.

Étude de la famille (G, H_I) pour G de type B_n ou C_n .

Le but de ce paragraphe est de montrer que G/H_I peut se plonger dans une variété-à-deux-orbites. Pour cela, on montrera que G/H_I est sphérique et on utilisera, pour conclure, la combinatoire des variétés sphériques rappelée dans le chapitre 1.

Rappelons que, pour I un sous-ensemble de $\Delta \setminus \{ \alpha_1, \alpha_n \}$ et σ l'élément $s_1 s_2 \cdots s_n$ du groupe de Weyl de G ,

$$H_I = P_I \cap \sigma P_{\sigma^{-1}(I)} \sigma^{-1}. \quad (3.3)$$

Notons que $\sigma^{-1}(I) \subset \Delta$ puisque $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$, pour $1 < i < n$. Les sous-groupes paraboliques P_I et $\sigma P_{\sigma^{-1}(I)} \sigma^{-1}$ ont comme sous-groupe de Levi commun le groupe L_I , L_I est donc un sous-groupe de Levi de H_I .

On a donc pour $I = \{ \alpha_{k_1+1}, \dots, \alpha_{k_1+n_1-1}, \dots, \alpha_{k_p+1}, \dots, \alpha_{k_p+n_p-1} \}$:

$$\begin{aligned} L_I &\simeq (\mathbb{C}^*)^{k_1} \times GL_{n_1} \times \cdots \times (\mathbb{C}^*)^{k_p} \times GL_{n_p} \\ P/H_I &\simeq \mathbb{C}^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{k_p} \oplus \mathbb{C}^{n_p} \quad \text{en tant que } L_I\text{-modules.} \end{aligned}$$

La variété \mathbb{C}^k étant sphérique de rang k (resp. de rang 1) pour l'action de $(\mathbb{C}^*)^k$ (resp. GL_k), on en déduit que P/H_I est sphérique de rang $n - |I|$. Grâce à la proposition 2 et au corollaire 2, on conclut de même pour G/H_I .

L'espace homogène G/H_I est sphérique de rang $n - |I|$.

Lemme 12. — *L'espace homogène G/H_I possède $2(n - |I|)$ couleurs. Les couleurs de G/H_I sont alors données par les fonctions de $\mathbb{C}[G]^{(B \times H_I)}$ qui suivent :*

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(g) &= \langle v_{\omega_\alpha}^*, gv_{\omega_\alpha} \rangle && \text{pour } \alpha \in \Delta \setminus I \\ \varphi'_\alpha(g) &= \langle v_{\sigma\omega_\alpha}^*, gv_{\sigma\omega_\alpha} \rangle && \text{pour } \alpha \in \Delta \setminus \sigma^{-1}(I),\end{aligned}$$

ou encore, en reprenant les notations du chapitre 1 et en posant $\tilde{I} = \{i : \alpha_i \in \Delta \setminus (I \cup \{\alpha_1, \alpha_n\})\}$, on a pour tout $i \in \tilde{I}$

$$\begin{aligned}\varphi_i &= [\omega_i, \omega_i] && \text{et} && \varphi'_i &= [\omega_{i-1}, \omega_i - \omega_1] \\ \varphi_1 &= [\omega_1, \omega_1] && \text{et} && \varphi_n &= [\omega_n, \omega_n] \\ \varphi'_1 &= [\omega_n, \omega_n - \omega_1] && \text{et} && \varphi'_n &= [\omega_{n-1}, 2\omega_n - \omega_1] && \text{si } G = SO_{2n+1} \\ \varphi'_1 &= [\omega_n, \omega_n - 2\omega_1] && \text{et} && \varphi'_n &= [\omega_{n-1}, \omega_n - \omega_1] && \text{si } G = Sp_{2n}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Afin de déterminer les couleurs des espaces homogènes (G/H_I), commençons par considérer le cas où $I = \emptyset$. On pose $H = H_\emptyset$. L'espace homogène G/H a $2n$ couleurs (car H est résoluble connexe et G/H de rang n , voir [9]). Or, $H = B \cap \sigma B \sigma^{-1}$, on obtient donc n couleurs qui proviennent de G/B , et n autres qui proviennent de $G/\sigma B \sigma^{-1}$. Donc, toutes les couleurs de G/H sont obtenues ainsi.

De l'écriture (3.3) de H_I , ressort que les vecteurs propres de H_I sont donnés par ceux de P_I et ceux de $\sigma P_{\sigma^{-1}(I)} \sigma^{-1}$, désignés ci-après par v_{ω_α} . *A priori*, on sait seulement que les vecteurs propres de P_I et $\sigma P_{\sigma^{-1}(I)} \sigma^{-1}$ sont des vecteurs de H_I ; il se pourrait que H_I ait d'autres vecteurs propres, H_I a donc au moins $2(n - |I|)$ vecteurs propres. Mais, d'après la proposition 4, les couleurs de G/H_I sont des couleurs de G/H ; plus précisément, l'ensemble des couleurs de G/H_I est égal à l'ensemble des couleurs D de G/H telles que $\varphi_I(D) \neq G/H_I$, pour φ_I l'application naturelle de G/H dans G/H_I . Les couleurs de G/H qui ne sont pas des couleurs de G/H_I sont donc associées aux fonctions

$$f = \langle v^*, gv \rangle$$

telles que v soit un vecteur propre de H mais pas de H_I , *i.e.* v vecteur propre de T mais pas de L_I ou encore v vecteur propre de B (ou de $\sigma B \sigma^{-1}$) mais pas de P_I (ni de $\sigma P_{\sigma^{-1}(I)} \sigma^{-1}$). De tels vecteurs sont au nombre de $2|I|$. Ce qui permet de conclure. \square

Lemme 13. — *Le cône des valuations \mathcal{V} est la chambre de Weyl anti-dominante du système de racines de type $B_{n-|I|}$ (resp. $C_{n-|I|}$) si G est de type B_n (resp. de type C_n), dont une base est donnée par les poids des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned}\varphi_1 \varphi'_{i_1} (\varphi_{i_1})^{-1} &= [\varepsilon_1 - \varepsilon_{i_1}] \\ \varphi_{i_k} (\varphi'_{i_k})^{-1} (\varphi_{i_{k+1}})^{-1} \varphi'_{i_{k+1}} &= [\varepsilon_{i_k} - \varepsilon_{i_{k+1}}] \\ \varphi_{i_p} (\varphi'_{i_p})^{-1} (\varphi_n)^{-2} \varphi'_n &= [\varepsilon_{i_p} - \varepsilon_n] && \text{et} && \varphi'_1 \varphi_n (\varphi'_n)^{-1} &= [\varepsilon_n] && \text{si } G = SO_{2n+1} \\ \varphi_{i_p} (\varphi'_{i_p})^{-1} (\varphi_n)^{-1} \varphi'_n &= [\varepsilon_{i_p} - \varepsilon_n] && \text{et} && \varphi'_1 \varphi_n (\varphi'_n)^{-2} &= [2\varepsilon_n] && \text{si } G = Sp_{2n}\end{aligned}$$

pour $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$.

Démonstration. — Commençons par déterminer le cône des valuations de G/H , pour $H = H_\emptyset$. Le groupe H est résoluble connexe, d'indice fini dans son normalisateur, et G/H est de rang n égal à celui de G . Le dual du cône des valuations est donc engendré par n arêtes, associées à des espaces homogènes G/H' sphériques de rang 1 tels que H' soit résoluble (voir [9]). Mais alors l'espace homogène G/H' est induit de SL_2/T , et le dual du cône des valuations de G/H' est engendré par l'opposé d'une racine simple donc le dual du cône des valuations de G/H est engendré par n opposés de racines simples: le cône des valuations est la chambre négative.

En ce qui concerne le cône des valuations de (G/H_I) , pour $I \subset \Delta \setminus \{\alpha_1, \alpha_n\}$ quelconque, on fera les remarques suivantes. Le cône des valuations de G/H_I est l'image de celui de G/H par l'application linéaire définie dans [24] et rappelée dans le premier chapitre. De plus, les fonctions φ_i du lemme 12 engendrent librement le monoïde $\mathbb{C}[G]^{(B \times H_I)}$; le groupe abélien libre $\mathcal{X}(G/H_I)$ est donc engendré par les poids des fonctions données dans l'énoncé de ce lemme. Soit φ_* l'application de $V(G/H)$ dans $V(G/H_I)$ (voir chapitre 1), on a :

$$\varphi_* \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^* \right) = \sum_{k \in \bar{I}} \varepsilon_k^*$$

où ε_k^* est le vecteur dual du poids ε_k de \mathcal{X} . D'où le résultat annoncé. \square

Afin d'obtenir la combinatoire des espaces homogènes G/H_I , il nous faut encore déterminer les images dans $\text{Hom}(\mathcal{X}(G/H_I), \mathbb{Q})$ des fonctions φ_i et φ'_i , par le morphisme ρ défini dans le chapitre 1. Un calcul direct amène les égalités suivantes :

$$\rho(\varphi_i) : \begin{array}{ll} \varepsilon_1 - \varepsilon_{i_1} & \longmapsto \delta_{i,1} - \delta_{i,i_1} \\ \varepsilon_{i_k} - \varepsilon_{i_{k+1}} & \longmapsto \delta_{i,i_k} - \delta_{i,i_{k+1}} \\ \varepsilon_{i_p} - \varepsilon_n & \longmapsto \delta_{i,i_p} - k\delta_{i,n} \\ \varepsilon_n & \longmapsto \delta_{i,n} \end{array}$$

avec $k = 2$ ou 1 selon que $G = SO_{2n+1}$ ou Sp_{2n} ,

$$\rho(\varphi'_i) : \begin{array}{ll} \varepsilon_1 - \varepsilon_{i_1} & \longmapsto \delta_{i,i_1} \\ \varepsilon_{i_k} - \varepsilon_{i_{k+1}} & \longmapsto \delta_{i,i_{k+1}} - \delta_{i,i_k} \\ \varepsilon_{i_p} - \varepsilon_n & \longmapsto \delta_{i,n} - \delta_{i,i_p} \\ \varepsilon_n & \longmapsto \delta_{i,1} - l\delta_{i,n} \end{array}$$

avec $k = 1$ ou 2 selon que $G = SO_{2n+1}$ ou Sp_{2n} . D'où :

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_i) = \varepsilon_i \quad \text{pour } i \neq n, \quad \text{et} \quad \rho(\varphi_n) = c \left(-\varepsilon_1 + \varepsilon_n - \sum_{k=1}^p \varepsilon_{i_k} \right) \\ \rho(\varphi'_i) = -\varepsilon_i \quad \text{pour } i \neq 1, \quad \text{et} \quad \rho(\varphi'_1) = c \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_n + \sum_{k=1}^p \varepsilon_{i_k} \right) \end{aligned}$$

où c vaut 1 ou 2 selon que G soit de type B_n ou C_n . Il apparaît alors que l'intérieur relatif du cône engendré par $\rho(\varphi_n)$ et $\rho(\varphi'_n)$ dans $V(G/H_I)$ rencontre le cône des valuations de G/H_I . De plus, le cône colorié $(\emptyset, \{\varphi_n, \varphi'_n\})$ possède exactement deux faces coloriées donc est associé à un plongement à deux orbites d'après la proposition 7.

En résumé, on a obtenu :

Proposition 15. — (i) *L'espace homogène G/H_I est sphérique de rang $n - |I|$, sa combinatoire est donnée par*

- son cône des valuations qui est l'image dans $V(G/H_I)$ de la chambre de Weyl négative

- $2(n - |I|)$ couleurs :

$$\begin{array}{ccc} [\omega_1, \omega_1] & [\omega_n, \omega_n - \omega_1] & [\omega_i, \omega_i] \\ [\omega_n, \omega_n] & [\omega_{n-1}, 2\omega_n - \omega_1] & [\omega_{i-1}, \omega_i - \omega_1] \end{array} \quad \text{pour } G \text{ de type } B_n$$

$$\begin{array}{ccc} [\omega_1, \omega_1] & [\omega_n, \omega_n - 2\omega_1] & [\omega_i, \omega_i] \\ [\omega_n, \omega_n] & [\omega_{n-1}, \omega_n - \omega_1] & [\omega_{i-1}, \omega_i - \omega_1] \end{array} \quad \text{pour } G \text{ de type } C_n.$$

où i est différent de 1 et n et tel que $\alpha_i \in \Delta \setminus I$.

(ii) L'espace homogène G/H_I possède un unique plongement à deux orbites dont le cône colorié est

$$(\emptyset, \{[\omega_n, \omega_n], [\omega_{n-1}, 2\omega_n - \omega_1]\}) \quad \text{pour } G \text{ de type } B_n,$$

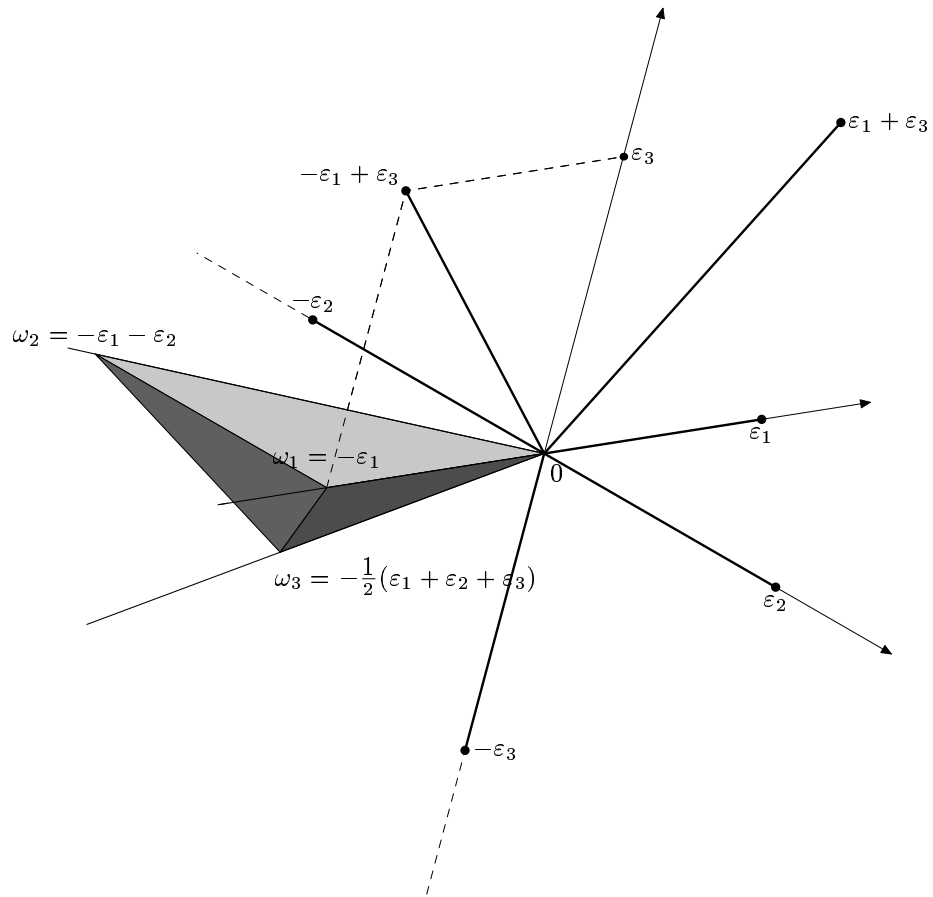
$$(\emptyset, \{[\omega_n, \omega_n], [\omega_{n-1}, \omega_n - \omega_1]\}) \quad \text{pour } G \text{ de type } C_n.$$

Corollaire 6. — Seul l'espace homogène G/H_I pour I maximal i.e. $I = \Delta \setminus \{\alpha_1, \alpha_n\}$ possède un plongement à deux orbites complet.

Démonstration. — Ceci résulte essentiellement de la proposition ci-dessus et du théorème 7 appelé au chapitre premier. \square

Ceci termine la démonstration du théorème 9 pour le cas classique.

La figure ci-dessous représente la combinatoire de (SO_7, H_\emptyset) ; en ombragé est représenté le cône des valuations et en traits gras les couleurs.



3.2.2 Cas des groupes exceptionnels

Lorsque G est de type E_6 , E_7 ou E_8 , les racines sont toutes de même longueur donc conjuguées par le groupe de Weyl, on peut donc supposer la racine β égale à la racine la plus longue. On utilisera comme précédemment le lemme 8.

Le système $\langle \beta, \alpha \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ pour toutes les racines simples sauf une (extrémale) notée α_{i_0} (voir les planches de [5]). On considère alors $\alpha_i \in \Delta$ telle que $(\alpha_i, \alpha_{i_0}) \neq 0$, on a donc $\langle \beta, \alpha_{i_0} + \alpha_i \rangle$ de type A_2 et $\pm \alpha_i \in \Phi(G_x)$. De proche en proche, on obtient de même : $\Delta \setminus \{\alpha_{i_0}\} \subset \Phi(G_x)$ avec $\pm \alpha_{i_0} \in \Phi(G_x)$ ou bien $\pm(\beta - \alpha_{i_0}) \in \Phi(G_x)$. Le système $\Phi(G_x)$ contient donc une base, ce qui est absurde ; par conséquent, *il n'existe aucune G -variété-à-deux-orbites de type I pour G de type E_6 , E_7 ou E_8 .*

Pour G de type F_4 , il y a deux possibilités pour la racine β (à conjugaison près) à savoir $\beta = \tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ou $\beta = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$.

Commençons par considérer le cas où $\beta = \tilde{\alpha}$; le système $\langle \beta, \alpha \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$ pour tout $i \neq 1$ et $\langle \beta, \alpha_1 \rangle$ est de type A_2 . Tout comme pour le type E_6 , E_7 ou E_8 , on aboutit à une absurdité.

Considérons donc le cas où β est égale à $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$. Les systèmes $\langle \beta, \alpha \rangle$ sont de type $A_1 \times A_1$ (resp. de type A_2) pour $\alpha = \alpha_1$ ou α_2 (resp. $\alpha = \alpha_3$ ou α_4). On peut donc supposer $\pm \alpha_3 \in \Phi(G_x)$ (l'autre cas étant symétrique). On obtient alors : $\pm \alpha_1, \pm \alpha_2 \in \Phi(G_x)$ et nécessairement $\pm(\beta + \alpha_4) \in \Phi(G_x)$. Le système de racines engendré par $\{\pm \alpha_1, \pm \alpha_2, \pm \alpha_3, \pm(\beta + \alpha_4)\}$ est de type B_4 et contient toutes les racines de Φ dont le coefficient en α_4 est égal à 0 ou 2. Les racines α dont le coefficient en α_4 est égal à 1 sont telles que $\langle \beta, \alpha \rangle$ est de type A_2 et $\pm(\beta - \alpha) \in \Phi(G_x)$ (pour $\alpha \neq \beta, \alpha_4$). On a donc :

$$\Phi(G_x) = \langle \pm \alpha_1, \pm \alpha_2, \pm \alpha_3, \pm(\beta + \alpha_4) \rangle,$$

on obtient ainsi la paire (déjà obtenue par D. AHIEZER) ($F_4, Spin_9$).

Chapitre 4

Description des variétés de type II

Dans tout ce qui va suivre, X désignera une G -variété-à-deux-orbites de type II (projective, normale et cuspidale), G un groupe algébrique semi-simple et V un G -module tel que X se plonge de façon G -équivariante dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. On identifie la variété X à son image dans $\mathbb{P}(V)$ et on suppose que X « engendre » $\mathbb{P}(V)$.

Ce chapitre suit les grandes lignes du précédent. On commence par choisir convenablement un élément x de la G -orbite ouverte de X , on réduit ensuite notre étude au cas où G est simple ou de type $A_1 \times A_1$. On considère alors le sous-groupe de Levi L associé à deux racines données de façon naturelle par les propriétés de x , de la structure de la L -variété $\text{Adh}(L \cdot x)$, on tire, par des méthodes combinatoires, des propriétés du stabilisateur générique. Après quoi, on peut décrire les variétés-à-deux-orbites de type II pour un groupe de rang 2 puis de rang supérieur.

Théorème 10. — *Les variétés-à-deux-orbites cuspidales de type II sont données uniquement par les paires du tableau 2 de l'introduction. En particulier, les variétés-à-deux-orbites de type II sont sphériques de rang inférieur ou égal à 2.*

On considère un élément x de l'orbite ouverte de X tel que T_x° soit un tore maximal de G_x , x s'écrit

$$x = [v] = [v_{\lambda_0} + \cdots + v_{\lambda_i} + \cdots + v_{\lambda_{r+1}}] \quad \text{pour } r \geq 0$$

où les poids λ_i appartiennent à une même droite affine D_x de \mathcal{X} ; cette droite n'est pas portée par une racine car

$$T_x^\circ = \left(\bigcap_{i \neq j} \ker(\lambda_i - \lambda_j) \right)^\circ$$

et T_x° est régulier de codimension 1.

Si λ_0 et λ_{r+1} désignent les poids extrémaux du support de v alors

$$\text{Adh}(T \cdot x) = T \cdot x \cup \{[v_{\lambda_0}], [v_{\lambda_{r+1}}]\}.$$

Les points $[v_{\lambda_0}]$ et $[v_{\lambda_{r+1}}]$ sont alors des points de l'orbite fermée fixés par le tore T , donc conjugués par un élément w du groupe de Weyl W . Quitte à considérer un conjugué de x par W , on peut choisir l'élément x de sorte que λ_0 soit dominant, λ_0

sera noté par λ et λ_{r+1} par $w(\lambda)$. Parmi les éléments x vérifiant toutes les conditions précédentes, on en prendra un tel que w soit *minimal* (pour l'ordre de Bruhat) : si $x' = [v'_\lambda + \cdots + v'_{w(\lambda)}]$ est aussi un élément de l'orbite ouverte tel que $T_{x'}^\circ$ est un tore maximal de $G_{x'}$ alors $w < w'$, pour w et w' comparables.

En résumé, on considèrera, tout au long de ce chapitre, un élément x de l'orbite ouverte tel que $x = [v] = [v_\lambda + \cdots + v_{\lambda_i} + \cdots + v_{w(\lambda)}]$, pour λ et $w(\lambda)$ les points extrémaux du support de v tels que $\lambda \in \mathcal{X}^+$, le tore T_x° est un tore maximal de G_x , w minimal pour de telles conditions sur x .

Soit α une racine simple telle que $s_\alpha w < w$ et $U_\alpha \not\subset G_x$. Une telle racine α est donnée (par exemple) de la façon suivante : il suffit de considérer une racine simple α telle que $(w(\lambda), \alpha) < 0$ (une telle racine existe puisque $w(\lambda)$ n'est pas dominant contrairement à λ). On a alors :

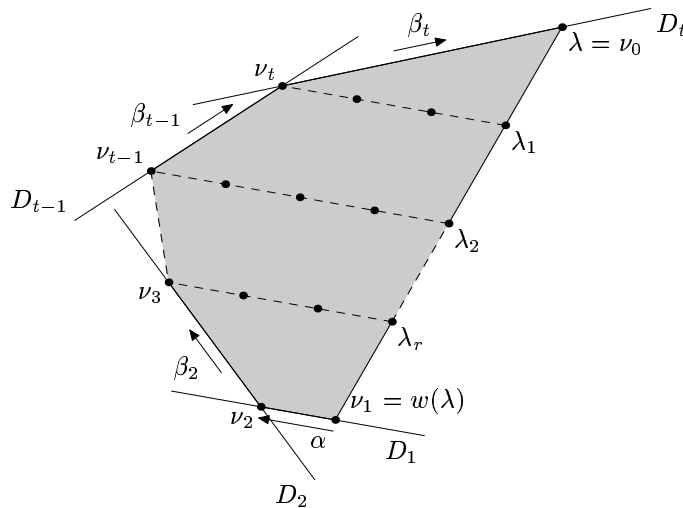
$$s_\alpha w < w \quad \text{et} \quad U_\alpha \cdot [v_{w(\lambda)}] \neq [v_{w(\lambda)}].$$

Le sous-groupe U_α ne peut donc fixer l'élément x . On considère alors la variété $X_\alpha = \text{Adh}(TU_\alpha \cdot x)$ de support

$$\text{supp } X_\alpha = \bigcup_{z \in \text{Adh}(U_\alpha) \cdot x} \text{supp } z.$$

Les éléments de $\text{supp } X_\alpha$ sont tous de la forme $\lambda_i + k\alpha$, pour λ_i un poids du support de v et k un entier positif.

On note Λ l'enveloppe convexe de $\text{supp } X_\alpha$; on désigne par ν_i ($0 \leq i \leq t$) ses points extrémaux de sorte que ν_0 et ν_1 correspondent respectivement aux poids λ et $w(\lambda)$, par D_i les droites affines qui passent par ν_i et ν_{i+1} . Les poids ν_i sont, bien sûr, ordonnés de façon à ce que ces droites soient des faces du polygone Λ .



Lemme 14. — *Si y_i est un point de la variété X_α dont le support est sur la droite D_i alors y_i est un point de l'orbite fermée de X . Les directions des droites D_i sont alors données par des racines β_i de Φ . En particulier, les points extrémaux ν_i sont W -conjugués et les points y_i ont pour support l'ensemble des poids de \mathcal{X} qui sont contenus dans le segment $[\nu_i, \nu_{i+1}]$.*

Démonstration. — Une fois qu'on aura montré que le segment $[\nu_i, \nu_{i+1}]$ est porté par une racine, il résultera de la théorie des SL_2 -modules que

$$y_i = [v_{\nu_i} + \cdots + v_{\nu_i+l\beta_i} + \cdots + v_{\nu_{i+1}}] \quad \text{avec } v_{\nu_i+l\beta} \neq 0, \forall \nu_i + l\beta \in [\nu_i, \nu_{i+1}].$$

On note l'intersection de la droite D_i avec le support de X_α par S_i . Il y a alors deux cas de figure pour S_1 :

- 1) $S_1 = \{\nu_1, \nu_1 + \alpha, \dots, \nu_2 = \nu_1 + k_1\alpha\}$ si $(w(\lambda), \alpha) < 0$
- 2) $S_1 = \{\nu_1, \lambda_p + k_p\alpha, \dots, \lambda_q + k_q\alpha\}$ si $(w(\lambda), \alpha) = 0$.

Pour montrer que les points y_i sont dans l'orbite fermée, on fait ensuite les remarques suivantes. Si on se trouve dans le premier cas, le stabilisateur de l'élément y_1 contient le noyau de la racine α , par conséquent, cet élément est toujours dans l'orbite fermée, d'après la proposition 9. Le second cas amène à la même conclusion ; en effet, si le point y_1 était dans l'orbite ouverte, il serait conjugué à x par un élément de $N_G(T)$ (corollaire 4) puisque le tore $T_{y_i}^\circ = \ker(\nu_i - \nu_{i+1})^\circ$ est de codimension 1. Le cardinal du support S_1 de y_1 , serait donc égal à celui de x , ce qui n'est pas vrai dans cette situation car le cardinal de S_1 est strictement inférieur à celui du support de x , le poids λ étant supposé dominant. Puis, si le nombre des points extrémaux de Λ est supérieur ou égal à 4 ou si on se trouve dans le second cas, on utilise le même argument sur la cardinalité de S_i pour conclure que les points y_i correspondants sont dans l'orbite fermée. Il ne nous reste donc qu'à considérer la première éventualité dans le cas où le nombre des points extrémaux de Λ est égal à 3. Le support de l'élément y_2 possède alors comme points extrémaux les poids λ et $s_\alpha w(\lambda)$. Si l'élément y_2 était dans l'orbite ouverte, l'hypothèse $s_\alpha w < w$ contredirait la minimalité de w . On a donc bien le résultat annoncé. Il en découle, de plus, que les poids ν_i sont dans l'orbite $W \cdot \lambda$. \square

Les racines β_i ($1 \leq i \leq t$) engendrent un système de racines de rang 2 ; on considère une racine positive β telle que $\{\alpha, \beta\}$ soit une base de ce système.

Corollaire 7. — *L'élément w est égal à $s_\alpha s_\beta$.*

Démonstration. — On sait que $s_\alpha w < w$ et que $\lambda - w(\lambda)$ n'est pas égal à une racine (à une constante multiplicative près) ; pour montrer la seconde assertion, on peut donc déjà exclure les cas où w est une réflexion associée à une racine et, par conséquent, la seconde assertion est évidente lorsque le système engendré par α et β est de type $A_1 \times A_1$ ou A_2 .

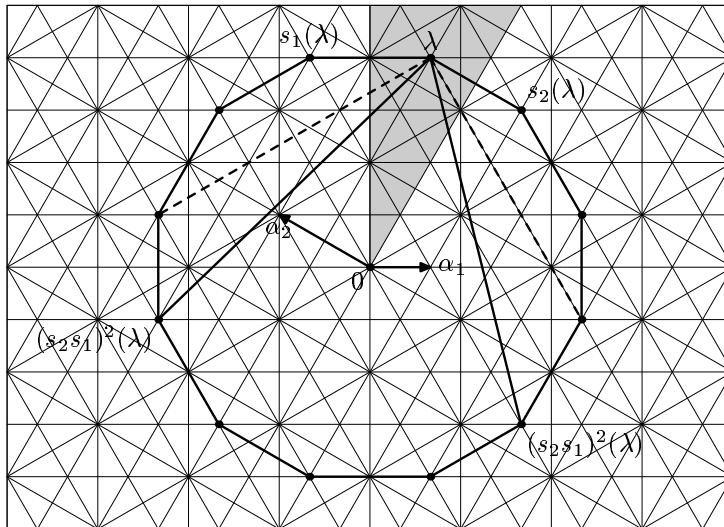
On considère donc les cas où le système $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de type B_2 ou G_2 . On note ensuite que l'élément w ne peut être l'élément le plus long du groupe de Weyl à cause du fait que si le sous-groupe unipotent U_γ est inclus dans le stabilisateur générique, il doit être à la fois dans le stabilisateur de $[v_\lambda]$ et de $[v_{w(\lambda)}]$! Il ne nous reste donc qu'à considérer le cas où $w = (s_\alpha s_\beta)^2$ pour G de type G_2 . Pour résoudre ce cas de figure, on considère l'enveloppe convexe Λ de la variété $X_\alpha = \text{Adh}(G \cdot x)$. On rappelle (lemme 14) que les points y_i sont de support maximal, ce qui implique en particulier, qu'il existe un poids ν sur la droite D_x tel que $\lambda - \beta_t = \nu + k\alpha$. Si $D_{\alpha, \lambda - \beta_t}$ désigne la droite de direction α passant par $\lambda - \beta_t$, on doit avoir :

$$D_x \cap D_{\alpha, \lambda - \beta_t} \cap \mathcal{X} \neq \emptyset.$$

Cette condition amène l'égalité

$$\nu = \lambda + sw(\lambda) = \lambda - \beta_t - k\alpha \quad \text{pour } 0 < s < 1 \text{ et } k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Si $w = (s_\alpha s_\beta)^2$, il y a deux possibilités pour l'enveloppe convexe du support de X_α , à savoir l'enveloppe convexe de sommets λ , $s_\beta(\lambda)$, $s_\beta s_\alpha(\lambda)$, $s_\beta s_\alpha s_\beta(\lambda)$, $w(\lambda)$ et celle de sommets λ , $s_\beta s_\alpha s_\beta(\lambda)$, $w(\lambda)$.



La racine β_t est donc respectivement égale à β et $\beta + \alpha$; après avoir substitué β_t à sa valeur dans l'égalité (4.1), on obtient la condition

$$\frac{(\lambda, \alpha)}{(\lambda, \alpha) + (\lambda, \beta)} \in \mathbb{N}.$$

Ceci n'est pas vrai car aucun des entiers (λ, α) , (λ, β) ne peut être nul, sinon $T_x^\circ = \ker(\lambda - w(\lambda))^\circ$ serait singulier. \square

Proposition 16. — (i) Si X est une G -variété-à-deux-orbites cuspidale de type II alors le groupe G est simple ou de type $A_1 \times A_1$.

(ii) On a l'égalité: $\text{supp } \beta \cup \{\alpha\} = \Delta$.

Démonstration. — Pour montrer la première partie de l'assertion (i), on reprend le même raisonnement que celui adopté dans la proposition 13. En particulier, ces mêmes arguments imposent :

$$U_{-\gamma} \subset G_x \iff (\lambda, \gamma) = 0 \quad \text{si } \gamma \in \Delta \setminus (\Delta_i \cup \Delta_{i'})$$

où $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_r$ et $\text{supp } \beta \subset \Delta_i$, $\alpha \in \Delta_{i'}$. Ceci implique que le stabilisateur générique est de la forme

$$H_1 \times \cdots \times H_r \quad \text{avec } H_j = G_j \text{ pour } j \neq i, i'.$$

Dans le cas où $i = i'$, i.e. si les racines α et β sont dans la même composante de Δ , alors le groupe G peut être supposé simple.

Il nous reste donc à montrer d'une part que si $i \neq i'$ alors G est nécessairement de type $A_1 \times A_1$ et d'autre part, la seconde assertion.

Commençons par la seconde assertion ; supposons que l'égalité : $\text{supp } \beta \cup \{\alpha\} = \Delta$ n'est pas vérifiée. Alors, dans ce cas, le sous-groupe parabolique P associé à $I_{\beta, \alpha} = \text{supp } \beta \cup \{\alpha\}$ et la P -variété-à-deux-orbités

$$Z = X \cap \mathbb{P}\left(\bigoplus_{\mu} V_{\mu}\right) \quad \text{pour} \quad \mu = \lambda - \sum_{\gamma \in I_{\beta, \alpha}} n_{\gamma} \gamma, \quad n_{\gamma} \in \mathbb{N}$$

donneraient une induction simple, le radical de P opérant trivialement sur la variété Z incluse dans X et contenant l'élément x .

On note pour finir qu'il existe une racine $\gamma \in \text{supp } \beta$ telle que $(w(\lambda), \gamma) < 0$. En effet, sinon $(w(\lambda), \beta) \geq 0$ et comme $w(\lambda) = s_{\alpha} s_{\beta}(\lambda)$, on aurait : $(s_{\beta}(\lambda), \beta) \geq 0$ et donc $(\lambda, \beta) = 0$, ce qui n'est pas possible d'après ce qu'on a déjà vu. Ainsi, $(w(\lambda), \gamma) < 0$ mais alors en appliquant le raisonnement qui a conduit à l'obtention de la racine β , on obtient qu'il existe une racine β' telle que : $\{\gamma\} \cup \text{supp } \beta' = \Delta$. Et, ceci n'est vrai que si $\beta' = \alpha$ et $\gamma = \beta$. Autrement dit, la racine β doit être de support maximal et simple à la fois donc G doit être de type $A_1 \times A_1$. \square

Dorénavant, le groupe G sera simple ou de type $A_1 \times A_1$.

Lemme 15. — *Soit δ la racine $s_{\alpha}(\beta)$. Le vecteur $Y_{\delta} + Y_{-\alpha}$ de l'algèbre de Lie de G est un élément de \mathfrak{g}_x contrairement à Y_{δ} , Y_{ν} étant un vecteur radiciel.*

Démonstration. — Le fait que le vecteur radiciel Y_{δ} n'appartienne pas à \mathfrak{g}_x est une conséquence directe de l'inégalité $s_{\alpha} < s_{\alpha} s_{\beta}$. En effet, les assertions

$$s_{\delta} w = s_{\delta} s_{\alpha} s_{\beta} = s_{\alpha} \quad \text{et} \quad s_{\delta} s_{\alpha} s_{\beta} < s_{\alpha} s_{\beta}$$

impliquent que $(s_{\alpha} s_{\beta}(\lambda), \delta^{\vee}) < 0$ et donc que $Y_{\delta} \notin \mathfrak{g}_{[v_{w(\lambda)}]}$.

On va ensuite montrer que

$$(\lambda, \alpha^{\vee}) = (\lambda, \beta^{\vee}). \tag{4.2}$$

Le poids dominant λ s'écrit $m\omega_{\alpha} + n\omega_{\beta}$ avec m et n entiers positifs non nuls car le tore $T_x^{\circ} = \ker(\lambda - w(\lambda))^{\circ}$ est régulier. On a alors :

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= s_{\alpha} s_{\beta}(\lambda) \\ &= \lambda - n\delta - m\alpha \\ &= \lambda - n\beta - (m + an)\alpha \quad \text{pour } a = (\alpha, \beta^{\vee}). \end{aligned}$$

On commence par considérer la variété X_{α} . D'après le lemme 14, les points extrémaux de l'enveloppe du support de cette variété sont conjugués à λ par le groupe de Weyl. Mais comme, la variété $\text{Adh}(U_{\alpha} \cdot [v_{w(\lambda)}])$ contient l'élément $[v_{s_{\beta}(\lambda)}]$ et que $\{\alpha, \beta\}$ est une base du système de racines $\langle \alpha, \beta \rangle$, les poids λ , $s_{\beta}(\lambda)$ et $w(\lambda)$ sont les seuls poids extrémaux de ce convexe. Toujours par les mêmes arguments (*voir* par exemple la preuve du corollaire 7), on a en outre que le poids $\lambda - \beta$ appartient au support de $\text{Adh}(U_{\alpha} \cdot x)$, *i.e.* qu'il existe un vecteur v_{λ_j} , intervenant dans l'écriture de

l'élément x , tel que le vecteur $Y_\alpha^r v_{\lambda_i}$ soit de poids $\lambda - \beta$ (pour $r \in \mathbb{N}$). Or, le poids λ_j appartient au segment $[\lambda, w(\lambda)]$, il est donc de la forme

$$\lambda_j = \lambda - s(n\beta + (m + an)\alpha) \quad \text{pour } 0 < s < 1.$$

On a donc l'égalité

$$\lambda - s(n\beta + (m + an)\alpha) + r\alpha = \lambda - \beta$$

puis

$$sn = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_j = \lambda - \beta - \left(\frac{m}{n} + a\right)\alpha.$$

D'où : $m/n \in \mathbb{N}$.

De même, en considérant la variété $\text{Adh}(U_\delta \cdot x)$, on montre que $n/m \in \mathbb{N}$. Les poids λ , $s_\alpha(\lambda)$ (et donc $\lambda - \alpha$) sont des éléments de son support, on obtient alors un vecteur v_{λ_i} tel que $Y_\alpha^{r'} v_{\lambda_i}$ soit de poids $\lambda - \alpha$ (pour $r' \in \mathbb{N}$), ce qui donne

$$\lambda_i = \lambda - \alpha - \frac{n}{m}\delta.$$

On a donc : $m = n$ et l'égalité (4.2) recherchée ; on a de plus ainsi montré que

$$\lambda_i = \lambda - \alpha - \delta \quad \text{et} \quad Y_{-\alpha} \cdot v_\lambda = -qY_\delta \cdot v_{\lambda_i} \quad \text{pour } q \in \mathbb{C}^*. \quad (4.3)$$

Considérons pour finir la variété

$$Z_t = \text{Adh}(T \exp t(Y_\delta + qY_{-\alpha}) \cdot x) \quad \text{pour } t \in \mathbb{C}.$$

Son support est entièrement contenu dans le triangle de sommets λ , $s_\alpha(\lambda)$ et $w(\lambda)$ puisque α et β sont supposées simples et que $(w(\lambda), \alpha) \leq 0$. D'après l'égalité (4.3), le poids $\lambda - \alpha$ n'est pas atteint, ce n'est pas un élément du support de Z_t , ce qui signifie qu'il en est de même de λ et $s_\alpha(\lambda)$. Par conséquent, le support de cette variété est réduit au support de x . On a donc nécessairement que $\exp(t(Y_\delta + qY_{-\alpha})) \in G_x$, pour tout $t \in \mathbb{C}$. \square

Corollaire 8. — (i) $(\lambda, \alpha^\vee) = (\lambda, \beta^\vee)$;

(ii) $T_x^\circ = \ker(\alpha + s_\alpha(\beta))^\circ$;

(iii) le stabilisateur générique est d'indice fini dans son normalisateur ;

(iv) la L -variété $\text{Adh}(L \cdot x)$ est à deux orbites.

Démonstration. — On a montré la première assertion dans la preuve, quant à la seconde, elle tient au fait que T_x° doit normaliser, en particulier, le groupe engendré par les éléments $\exp t(Y_\delta + qY_{-\alpha})$, $t \in \mathbb{C}^*$. On a donc $T_x^\circ \subset \ker(\alpha + s_\alpha(\beta))^\circ$ et, comme le tore T_x° est de codimension 1, on peut conclure à l'égalité. L'assertion (iii) résulte du fait que le normalisateur du stabilisateur générique ne peut contenir un tore maximal au vu de ce qui a été obtenu dans le lemme précédent, et la dernière, du fait que le stabilisateur de x dans L ne peut contenir un sous-groupe unipotent maximal puisque le stabilisateur générique contient les éléments $\exp(t(Y_\delta + qY_{-\alpha}))$. \square

4.1 Cas des groupes de rang 2

Le groupe G sera supposé de rang 2, tout au long de ce paragraphe, le groupe H sera le stabilisateur générique. On conservera les mêmes notations et hypothèses que dans le préambule, en particulier, en ce qui concerne les racines α et β . On a donc ici : $\Delta = \{\alpha, \beta\}$.

Proposition 17. — *Dans le cas des groupes simples de rang 2, les stabilisateurs génériques de type II ont pour algèbre de Lie*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t}' \oplus \mathbb{C}(Y_{-\alpha} + Y_{s_\alpha(\beta)}) \oplus \bigoplus_{\substack{\gamma \in \Phi^+ \\ \gamma \neq \alpha, s_\alpha(\beta)}} \mathfrak{g}_\gamma$$

où \mathfrak{t}' est le noyau de $\alpha + s_\alpha(\beta)$ vu comme élément de \mathfrak{t}^* .

Remarque. — $\alpha \in \Phi(G_x)$ signifiera (par abus de langage) que le sous-groupe U_α est inclus dans G_x .

Démonstration. — On commence par noter que $\Phi(G_x)$ ne contient aucune racine négative, du fait que le poids dominant λ est un point du support de x tel que $(\lambda, \alpha^\vee) \cdot (\lambda, \beta^\vee) \neq 0$.

On montre ensuite que toute racine γ de Φ^+ distincte de α et de β appartient à $\Phi(G_x)$. Pour cela, on considère la variété $X_\gamma = \text{Adh}(U_\gamma \cdot x)$ et on procède par l'absurde. Soit γ_s la racine qui porte le côté (différent du segment $[\lambda, w(\lambda)]$) du support de X_γ de sommet λ . En utilisant les droites $D_{\lambda-\gamma_s, \gamma}$ de direction γ passant par $\lambda - \gamma_s$ et en reprenant le même raisonnement que celui adopté pour montrer le corollaire 7, on doit aboutir à l'existence d'un poids ν dans le support de x tel que $\nu \in D_{\lambda-\gamma_s, \gamma}$, i.e. tel que

$$\nu = \lambda - \gamma_s - k\gamma \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}.$$

Or, le poids $\nu \in [\lambda, w(\lambda)]$, il s'écrit donc aussi (pour $0 < r < 1$)

$$\nu = \lambda - r(\lambda, \alpha^\vee)(\alpha + s_\alpha(\beta)) \quad \text{car } (\lambda, \alpha^\vee) = (\lambda, \beta^\vee).$$

On a donc :

$$\gamma_s + k\gamma = r(\lambda, \alpha^\vee)(\alpha + \beta - (\beta, \alpha^\vee)\alpha). \quad (4.4)$$

En particulier, si $\gamma = \beta$ (et donc $\gamma_s = \alpha$), on obtient :

$$\begin{cases} k = r(\lambda, \alpha^\vee) \\ 1 = r(\lambda, \alpha^\vee)(1 - (\beta, \alpha^\vee)) \end{cases}$$

ce qui donne : $k = 1/(1 - (\beta, \alpha^\vee)) \in \mathbb{N}$ — assertion incongrue puisque $1 - (\beta, \alpha^\vee) > 1$. On en déduit que

$$U_\beta \subset G_x.$$

Cette inclusion termine le cas où G est de type A_2 , tout comme celui où G est de type B_2 avec α la racine longue. En effet, dans ce dernier cas, $s_\alpha(\beta)$ est la racine $\alpha + \beta$ et

$$Y_{\alpha+2\beta} = [Y_{-\alpha} + Y_{s_\alpha(\beta)}, Y_\beta] \in \mathfrak{g}_x.$$

De même, lorsque G est de type G_2 , avec α la racine longue, on a

$$s_\alpha(\beta) = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad Y_{2\beta+\alpha}, Y_{3\beta+\alpha} \in \mathfrak{g}_x.$$

Il reste à montrer que $Y_{3\beta+2\alpha} \in \mathfrak{g}_x$. L'égalité (4.4), pour $\gamma = 3\beta+2\alpha$ et $\gamma_s = \alpha$, conduit à

$$\begin{cases} 3k = r(\lambda, \alpha^\vee) \\ 1 + 2k = r(\lambda, \alpha^\vee)(1 - (\beta, \alpha^\vee)) \end{cases}$$

et donc à $k = -1/(1 - 3(\beta, \alpha^\vee))$: cette contradiction montre le résultat escompté.

Supposons pour finir que G est de type B_2 ou G_2 avec α la racine courte. On considère la racine γ égale à $\alpha + \beta$, la racine γ_s est une fois de plus la racine α . On a dans ce cas :

$$\begin{cases} k = r(\lambda, \alpha^\vee) \\ 1 + k = r(\lambda, \alpha^\vee)(1 - (\beta, \alpha^\vee)) \end{cases}$$

D'où : $k = -1/(\beta, \alpha^\vee)$ mais alors k ne peut être entier car $(\beta, \alpha^\vee) \neq 1$ dans le cas présent. On a donc : $Y_{\beta+\alpha} \in \mathfrak{g}_x$. Le cas B_2 est donc achevé. Si G est de type G_2 , on a aussi

$$Y_{3\alpha+2\beta} = [Y_{-\alpha} + Y_{s_\alpha(\beta)}, Y_\beta] \in \mathfrak{g}_x.$$

Il reste à prouver que $Y_{2\alpha+\beta} \in \mathfrak{g}_x$, par le même procédé — procédé qui conduira à l'absurdité : $k = -1/(1 + (\beta, \alpha^\vee)) \in \mathbb{N}$.

Ensuite, il convient de noter qu'*a priori*, il y a deux possibilités pour l'algèbre de Lie \mathfrak{h} du stabilisateur générique, à savoir :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1 &= \ker(\alpha + s_\alpha(\beta))^\circ \oplus \mathbb{C}(Y_{-\alpha} + Y_{s_\alpha(\beta)}) \oplus \bigoplus_{\substack{\gamma \in \Phi^+ \\ \gamma \neq \alpha, s_\alpha(\beta)}} \mathfrak{g}_\gamma, \\ \mathfrak{h}_2 &= \ker(\alpha + s_\alpha(\beta))^\circ \oplus \mathbb{C}(Y_{-\alpha} + Y_{s_\alpha(\beta)}) \oplus \mathbb{C}(Y_\alpha + Y_{-s_\alpha(\beta)}) \oplus \bigoplus_{\substack{\gamma \in \Phi^+ \\ \gamma \neq \alpha, s_\alpha(\beta)}} \mathfrak{g}_\gamma. \end{aligned}$$

Pour conclure que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$, il suffit de remarquer que le poids $s_\beta(\lambda)$ appartient à l'enveloppe convexe du support de la variété $\text{Adh}(TU_\alpha \cdot x)$ — car $\text{Adh}(U_\alpha \cdot [v_w(\lambda)]) \ni [v_{s_\beta(\lambda)}]$ — sans pour cela appartenir à celle de la variété $\text{Adh}(TU_{-s_\alpha(\beta)} \cdot x)$. Par conséquent, si $z = (Y_\alpha + Y_{-s_\alpha(\beta)}) \cdot x$ alors $z_{s_\beta(\lambda)} \neq 0$ et donc $Y_\alpha + Y_{-s_\alpha(\beta)} \notin \mathfrak{g}_x$. Cette remarque achève la preuve de la proposition. \square

4.2 Cas général

On se place dans le cas où le groupe G est de rang strictement supérieur à 2. Avant tout, faisons une synthèse de tout ce que l'on sait sur les racines α et β du préambule. L'élément x de l'orbite ouverte est, en particulier, tel que $x = [v_\lambda + \dots + v_w(\lambda)]$, avec

- 1) $\lambda \in \mathcal{X}^+$
- 2) $\alpha \in \Delta$ telle que $(w(\lambda), \alpha) \leq 0$
- 3) $w = s_\alpha s_\beta$ pour $\beta \in \Phi^+$ telle que $\text{supp } \beta \cup \{\alpha\} = \Delta$
- 4) $\{\alpha, \beta\}$ une base de $\langle \alpha, \beta \rangle$.

De plus, on a aussi obtenu l'égalité

$$(\lambda, \beta^\vee) = (\lambda, \alpha^\vee). \quad (4.5)$$

Et finalement, on insistera sur le fait que

$$\lambda - w(\lambda) \in \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}}$$

où $\langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}}$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par les racines α et β ; on rappelle que la notation $\langle \alpha, \beta \rangle$ signifie système de racines engendré par α et β , i.e. $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}} \cap \Phi$.

Le but de cette section consiste alors essentiellement à déterminer les triplets possibles (G, α, β) , G étant (par abus de notation) le type de G , grâce à quoi, on obtiendra le théorème 10.

Soit δ une racine simple telle que $(\beta, \delta) > 0$ (en particulier, $\delta \in \text{supp } \beta$), on pose $\gamma = s_\alpha(\delta)$ et on considère $(w(\lambda), \gamma)$. On a alors :

$$(w(\lambda), \gamma) \leq 0. \quad (4.6)$$

Cette inégalité provient du fait que

$$\begin{aligned} (w(\lambda), \gamma) &= (\lambda, \delta) - (\lambda, \beta^\vee)(\beta, \delta) \\ &= (\lambda, \delta) - (\lambda, \beta)(\beta^\vee, \delta) \\ &\leq (\lambda, \delta) - (\lambda, \beta) \leq 0 \quad \text{car } \delta \in \text{supp } \beta. \end{aligned}$$

Remarque. — Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ trois racines de Φ qui engendrent un système Ψ de racines de rang 3. On suppose que Ψ vérifie la propriété suivante: *pour tout $\eta \in \Psi$, $\eta = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + n_3\gamma_3$, ($n_i \in \mathbb{Q}$), on a que $\eta - n_3\gamma_3$ est une racine (à une constante multiplicative près).* Alors, si η est une racine quelconque de Φ , l'intersection de $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ avec $\langle \gamma_3, \eta \rangle_{\mathbb{C}}$ est ou bien engendrée par une racine, ou bien se réduit à $\{0\}$.

Lemme 16. — *Si α, β, γ vérifient les conditions de la remarque précédente (avec γ jouant le rôle de γ_3) alors nécessairement, $(w(\lambda), \gamma) = 0$.*

Démonstration. — Si $(w(\lambda), \gamma) \neq 0$ alors $(w(\lambda), \gamma) < 0$ (d'après (4.6)) et il existe une racine $\eta \in \Phi$ telle que

$$\lambda - w(\lambda) \in \langle \gamma, \eta \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Il suffit pour montrer cela de reprendre pour γ les arguments qui ont conduit à l'obtention de la racine β à partir de α . On a alors

$$\lambda - w(\lambda) \in \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}} \cap \langle \gamma, \eta \rangle_{\mathbb{C}}.$$

L'inégalité $(w(\lambda), \gamma) \neq 0$ apparaît alors absurde d'après la remarque ci-dessus et le fait que T_x° est un sous-tore régulier. \square

Dans ce qui suit, on utilisera principalement ce corollaire qui en fait s'avèrera très restrictif: $\lambda - w(\lambda)$ n'appartient qu'à un nombre très réduit de plans engendrés par des racines vérifiant des conditions similaires à celles de α et β .

4.2.1 Cas des groupes classiques.

On procèdera en deux temps selon qu'il existe ou pas une racine simple δ telle que $(\alpha, \delta) = 0$ et supposée toujours vérifier $(\beta, \delta) > 0$. On suppose pour commencer qu'une telle racine existe. Considérons d'abord le cas où $\text{supp } \beta = \Delta$.

Affirmation 7. — *Sous ces hypothèses, α, β, δ engendrent un système de racines de type $A_1 \times A_2$, $A_1 \times B_2$ ou A_3 avec, dans ce dernier cas, $\langle \alpha, \beta \rangle$ de type A_2 .*

Démonstration. — On commence par noter que $\langle \alpha, \beta \rangle$ ne peut être de type B_2 si le support de β est maximal. En effet, si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de type B_2 , vu les hypothèses faites sur ces deux racines, la racine α est nécessairement extrémale et β de support égal à $\Delta \setminus \{\alpha\}$. De plus, l'inégalité $(\beta, \delta) > 0$ implique que le système $\langle \beta, \delta \rangle$ est de type A_2 ou B_2 (le cas G_2 étant définitivement exclus puisque G est dorénavant de rang strictement supérieur à 2). Il suffit donc, en fait, de montrer que si $\langle \alpha, \beta \rangle$ est de type A_2 , il en est de même pour $\langle \beta, \delta \rangle$.

Supposons donc $\langle \alpha, \beta \rangle$ de type A_2 et G de type B_n (resp. C_n), β étant supposée de support maximal, on a :

$$\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_j, \quad \alpha = \alpha_{j-1} \quad (j \geq 3) \quad \text{et} \quad \delta = \alpha_1.$$

Notre affirmation est donc justifiée. \square

Il apparaît alors clairement dans cette première situation que l'on peut appliquer le lemme 16 à $\alpha, \beta, \delta = \gamma$ pour obtenir :

$$(\lambda, \delta) = (\lambda, \beta)$$

ce qui est incompatible avec l'égalité (4.5) ; β ne peut donc être de support maximal.

Supposons donc $\text{supp } \beta = \Delta \setminus \{\alpha\}$. On notera que $\langle \alpha, \beta \rangle$ ne peut être de type $A_1 \times A_1$, dans ce cas. Les triplets (G, α, β) sont alors donnés par la liste suivante :

- $(A_n, \alpha_i (i = 1, n), \tilde{\alpha} - \alpha_i)$;
- $(G, \alpha_n, \varepsilon_1 - \varepsilon_n)$ pour $G = B_n, C_n$;
- $(G, \alpha_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_n)$ pour $G = B_n, C_n$;
- $(G, \alpha_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_j (2 < j < n))$ pour $G = B_n, C_n, D_n$;
- $(D_n, \alpha_{n-1}, \varepsilon_1 + \varepsilon_n)$;
- $(D_n, \alpha_n, \varepsilon_1 - \varepsilon_n)$.

Affirmation 8. — (i) *Pour tous les triplets (G, α, β) ci-dessus, excepté le second, $\alpha, \beta, \delta = \gamma$ vérifient la propriété donnée dans la remarque précédente ;*

(ii) *Dans le cas des trois premiers triplets, il existe $\delta' \in \Delta$ telle que $(\alpha, \delta') \neq 0$ et $(\beta, \delta') > 0$. De plus, les racines α, β et $s_\alpha(\delta')$ vérifient cette même propriété (citée ci-dessus).*

Grâce au lemme 16, on obtient :

$$(\lambda, \delta) = (\lambda, \beta) \quad (4.7)$$

$$(\lambda, \delta') = (\lambda, \beta) \quad (4.8)$$

La condition (4.7) exclut donc les triplets de la forme $(G, \alpha_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_j)$ où $2 < j < n$ et $G = B_n, C_n$ ou D_n . Les deux derniers cas sont rejetés d'emblée ; il suffit pour cela de noter qu'il existe deux valeurs possibles de δ , ce qui contredit l'égalité (4.7). En ce qui concerne les deux premiers cas, on note que les égalités (4.7) et (4.8) sont incompatibles. Considérons enfin le second triplet à savoir $(G, \alpha_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_n)$ pour $Y = B_n, C_n$. On a $\delta' = \alpha_2$ et $(w(\lambda), \alpha_n) < 0$, or quelle que soit la racine η considérée

$$\lambda - w(\lambda) = a(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_n) \notin \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}} \cap \langle \eta, \alpha_n \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Ce triplet est donc aussi à rejeter.

Supposons, pour finir, que toute racine simple δ telle que $(\beta, \delta) > 0$, vérifie nécessairement l'inégalité $(\alpha, \delta) < 0$. Les triplets (G, α, β) sont alors de la forme :

- $(A_3, \alpha_2, \tilde{\alpha})$;
- $(G, \alpha_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ pour $G = B_n, C_n$ ou D_n ;
- $(B_3, \alpha_3, \tilde{\alpha})$;
- $(B_n, \alpha_1, \varepsilon_2)$;
- $(C_n, \alpha_2, \tilde{\alpha})$;
- $(C_n, \alpha_1, 2\varepsilon_2)$;
- $(D_n, \alpha_1, \tilde{\alpha})$.

Affirmation 9. — $(w(\lambda), \gamma) < 0$.

Démonstration. — Si $(w(\lambda), \gamma) = 0$ alors on a :

$$(\lambda, \delta) = (\lambda, \beta) \quad (4.9)$$

ce qui exclut comme précédemment les cas où le coefficient de β est égal à 2. Il ne reste donc que les deux premiers triplets qui eux aussi sont à rejeter car, dans ce cas, le support de β étant maximal, on ne peut avoir simultanément les égalités $(\lambda, \alpha^\vee) = (\lambda, \beta^\vee)$ et $(\lambda, \delta) = (\lambda, \beta)$. \square

On considère alors le lemme 16 pour réduire la liste à :

- $(A_3, \alpha_2, \tilde{\alpha})$;
- $(C_3, \alpha_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$;
- $(B_3, \alpha_3, \tilde{\alpha})$;
- $(C_n, \alpha_2, \tilde{\alpha})$;
- $(D_n, \alpha_1, \tilde{\alpha})$.

On exclut enfin le quatrième triplet en considérant $(w(\lambda), \alpha_1)$. En effet, on a alors :

$$(w(\lambda), \alpha_1) = (\lambda, \alpha_2) - 2(\lambda, \beta^\vee) < 0.$$

Or, quelle que soit la racine η considérée,

$$\lambda - w(\lambda) = a(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \notin \langle \alpha_1, \eta \rangle_{\mathbb{C}}.$$

On obtient finalement la

Proposition 18. — *Dans le cas des groupes classiques, seuls les triplets*

- $(A_3, \alpha_2, \tilde{\alpha})$;
- $(C_3, \alpha_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$;
- $(B_3, \alpha_3, \tilde{\alpha})$;
- $(D_n, \alpha_1, \tilde{\alpha})$

gènèrent des variétés-à-deux-orbites cuspidales de type II.

Le triplet $(C_3, \alpha_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ donne la paire de C_3 (obtenue à partir des résultats de A. WASSERMANN). Les autres triplets gènèrent les paires cuspidales (obtenues par D. AHIEZER) $(D_n, \mathfrak{sp}_{2n})$ et (B_3, \mathfrak{g}_2) . Ceci achève la démonstration du théorème 10 pour le cas classique.

4.2.2 Cas des groupes exceptionnels.

On considère d'abord le cas où G est de type E_6, E_7 ou E_8 ; on notera par commodité les racines de G suivant le diagramme de Dynkin. On va montrer que dans ce cas, *il n'y a aucun candidat pour le stabilisateur générique.*

Affirmation 10. — *Il existe une racine simple δ telle que $(\beta, \delta) > 0$ et $\alpha, \beta, s_\alpha(\beta)$ vérifient la propriété de la dernière remarque, sauf dans les cas de type E_7 et E_8 pour respectivement les paires (α, β) suivantes :*

$$\left(\alpha_1, \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & & \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left(\alpha_1, \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & & \end{array} \right).$$

Démonstration. — Comme pour le cas classique, le seul cas où α, β et δ peuvent ne pas vérifier la propriété de la remarque précédente se produit lorsque (α, β) est de type $A_1 \times A_1$. Si tous les coefficients de β sont égaux à 1 alors, quelle que soit la racine α , on peut trouver $\delta \in \Delta$ telle que $(\alpha, \delta) = 0$ et $(\beta, \delta) > 0$. Les racines β dont au moins l'un des coefficients est supérieur ou égal à 2 sont décrites explicitement dans les planches V, VI ou VII de BOURBAKI (*voir* [5]). En procédant au cas par cas, il apparaît qu'on peut trouver une racine simple δ telle que $(\alpha, \delta) = 0$ et $(\beta, \delta) > 0$, excepté pour les paires mentionnées dans l'énoncé de l'affirmation. On en déduit le résultat annoncé. \square

On applique alors le lemme 16 aux racines α, β et δ (sauf pour les cas cités ci-dessus) et on obtient :

$$(\lambda, \delta) = (\lambda, \beta). \tag{4.10}$$

Et nécessairement d'après l'égalité (4.5), le support de β est égal à $\Delta \setminus \{\alpha\}$ et α est extrémale. Si tous les coefficients de β étaient égaux à 1, il existerait deux possibilités pour δ ce qui contredirait (4.10). Par conséquent, β a au moins un coefficient supérieur ou égal à 2 ; au lire des planches V, VI et VII de BOURBAKI (*voir* [5]), on constate qu'on peut choisir la racine δ telle que le coefficient de β en δ soit égal à 2 : ce qui est absurde d'après l'égalité (4.10).

Il ne nous reste donc plus qu'à considérer les paires

$$\left(\alpha_1, \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & & \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left(\alpha_1, \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & & \end{array} \right).$$

De telles paires (α, β) , ne peuvent être retenues ; pour montrer cela, il suffit de noter que

$$(w(\lambda), \alpha_1 + \alpha_3) < 0$$

et qu'il n'existe aucune racine η telle que $\lambda - w(\lambda) \in \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}} \cap \langle \alpha_1 + \alpha_3, \eta \rangle_{\mathbb{C}}$.

Il nous reste donc à considérer le type F_4 . Dans ce cas, toujours par les mêmes arguments, on montre que nécessairement :

$$\beta = 1231 \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha_4$$

et ainsi, le système de racines $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 \rangle$ doit être contenu dans le stabilisateur générique. L'égalité $(\lambda, \alpha^\vee) = (\lambda, \beta^\vee)$ donne de plus que :

$$(w(\lambda), \alpha_1) = (w(\lambda), \alpha_2) = 0 = (\lambda, \alpha_1) = (\lambda, \alpha_2)$$

d'où $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2 \in \Phi(G_x)$. Quant à l'inégalité : $(w(\lambda), \alpha_3 + \alpha_4) < 0$, elle conduit à

$$Y_{-\alpha_3-\alpha_4} + Y_{1222} \in \mathfrak{g}_x.$$

En notant pour finir que le système $\langle \alpha_3 + \alpha_4, 1222 \rangle$ est de type $A_1 \times A_1$, on aboutit ainsi à la paire de type II de F_4 .

On achève ainsi la démonstration du théorème 10 et donc la classification des variétés-à-deux-orbités.

Bibliographie

- [1] AHIEZER (D.), *Equivariant completion of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors*, Ann. Global Anal. Geom. **1** (1983), p. 49–78.
- [2] AHIEZER (D.), *Dense orbits with two endpoints*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), n° 2, p. 308–324.
- [3] BOREL (A.), *Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie*, Ann. of Math. **58** (1953), p. 443–457.
- [4] BIALYNICKI-BIRULA (A.), *On fixed point schemes of actions of multiplicative and additive groups*, Topology **12** (1973), p. 99–103.
- [5] BOURBAKI (N.), *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5 et 6, Masson (1981).
- [6] BRION (M.), LUNA (D.), VUST (T.), *Espaces homogènes sphériques*, Invent. Math. **84** (1986), n° 3, p. 617–632.
- [7] BRION (M.), LUNA (D.), *Sur la structure locale des variétés sphériques*, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), n° 2, p. 211–226.
- [8] BRION (M.), *Classification des espaces homogènes sphériques*, Compositio Math. **63** (1987), n° 2, p. 189–208.
- [9] BRION (M.), PAUER (F.), *Valuations des espaces homogènes sphériques*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), n° 2, p. 265–285.
- [10] BRION (M.), *On spherical varieties of rank one, Group actions and invariant theory*, (Montreal, PQ, 1988), CMS Conf. Proc., **10**, Amer. Math.Soc., Providence, RI (1989), p. 31–41.
- [11] BRION (M.), *Vers une généralisation des espaces symétriques*, J. Algebra **134** (1990), p. 115–143.
- [12] BRION (M.), *A note on two-orbit varieties*, Topology Hawaii (Honolulu, HI, 1990), World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1992), p. 35–40.
- [13] BRION (M.), *Invariants et covariants des groupes algébriques réductifs*, notes de l'école d'été « Théorie des invariants », Monastir (Tunisie) (1996).
- [14] BRION (M.), *Variétés sphériques*, notes de la session de la S. M. F. « Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques », Grenoble (1997).

- [15] FELDMÜLLER (D.), *Two-orbit varieties with smaller orbit of codimension two*, Arch. Math. (Basel) **54** (1990), n° 6, p. 582–593.
- [16] FULTON (W.), *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press (1993).
- [17] HARTSHORNE (R.), *Algebraic geometry*, Springer (1977).
- [18] HORROCKS (G.), *Fixed point schemes of additive group actions*, Topology **8** (1969), p. 233–242.
- [19] HUCKLEBERRY (A.), SNOW (D.), *Almost-homogeneous Kähler manifolds with hypersurface orbits*, Osaka J. Math. **19** (1982), n° 4, p. 763–786.
- [20] HUMPHREYS (J. E.), *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer (1972).
- [21] HUMPHREYS (J. E.), *Linear algebraic groups*, Springer (1981).
- [22] KEMPF (G.), NESS (L.), *Tensor products of fundamental representations*, Canad. J. Math. **40** (1988), n° 3, p. 633–648.
- [23] KNOP (F.), KRAFT (H.), LUNA (D.), VUST (T.), *Local properties of algebraic group actions*, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem. **13**, (1989), p. 63–75.
- [24] KNOP (F.), *The Luna-Vust theory of spherical embeddings*, Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989), Manoj Prakashan, Madras (1991), p. 225–249.
- [25] LUNA (D.), VUST (T.), *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. **58**, (1983), p. 186–245.
- [26] LUNA (D.), *Toute variété magnifique est sphérique*, Transform. Groups **1** (1996), n° 3, p. 249–258.
- [27] LUNA (D.), *Grosses cellules pour les variétés sphériques*, Algebraic groups and Lie groups, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., **9**, Cambridge Univ. Press (1997), p. 267–280.
- [28] ODA (T.), *Convex bodies and algebraic geometry: an introduction to the theory of toric varieties*, Springer (1988).
- [29] SHAFAREVICH (I.R.), *Basic algebraic geometry*, Springer (1974).
- [30] SUMIHIRO (H.), *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), p. 1–28.
- [31] WASSERMANN (B.), *Wonderful varieties of rank two*, Transform. Groups **1** (1996), p. 375–403.