TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Cette thèse est consacrée à l'étude de divers problèmes concernant l'observabilité frontière, la contrôlabilité exacte et la stabilisation de l'équation des ondes et du système général d'élasticité. Dans cette étude, on généralise et on améliore divers résultats antérieurs.

Dans la suite de cette introduction, on donnera une brève analyse du contenu de la thèse, qui a été divisée en dix chapitres.

Chapitre 1. Soient Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de frontière Γ de classe C^2 et ν le vecteur unitaire normal extérieur à Γ. Soit $A = \partial_i(a_{ij}\partial_j)$ un opérateur elliptique différentiel de deuxième ordre avec des coefficients $a_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ vérifiant les conditions de symétrie et coercivité suivantes:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{et} \quad a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ où, $\alpha > 0$ est un nombre fixé. (Dans toute la thèse, on utilise la convention de sommation sur les indices répétés, et tout indice ouvert désigne la répétition de cet indice de 1 à n.) Puis l'on considère l'équation des ondes avec la condition au bord du type Dirichlet suivante:

$$(P1) \qquad \begin{cases} y'' - Ay = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y = v & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = y_1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

où, v est le contrôle cherché.

Le système $(P1)$ est dit exactement contrôlable si, pour un temps suffisamment grand $T > 0$ et pour toutes données (y_0, y_1) et $(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)$ dans un espace à définir, il existe un contrôle v tel que la solution y du système $(P1)$ vérifie la condition finale

$$(1.0) \qquad y(T) = \tilde{y}_0 \quad \text{et} \quad y'(T) = \tilde{y}_1.$$

La contrôlabilité exacte du système $(P1)$ a été étudié par plusieurs auteurs, parmi eux: Avellaneda et Lin [8], Ho [35, 36], Komornik [45], Lasiecka, Triggiani et Yao [53] et Lions [54, 55] dans le cas où les coefficients ne dépendent pas du temps t, Muñoz Rivera [61] dans le cas $a_{ij} = \delta_{ij}a(t)$ où $a(t)$ est une fonction donnée, Miranda [60] dans le cas $a_{ij} = (\delta_{ij} - k'(t)^2 x_i x_j)k(t)^{-2}$ pour une fonction donnée $k(t)$ avec la présence des termes ∇y et $\nabla y'$ dans la première équation du système $(P1)$. Récemment, Liu et Williams [58] ont obtenu des résultats de contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec condition au bord du type Neumann similaires à ceux que nous allons présenter dans ce chapitre.

Dans tous ces travaux, la méthode des multiplicateurs, développée par exemple par Lagnese [48], Lions [55, 56], Komornik [42] ou Komornik et Zuazua [47], a été appliquée pour obtenir les inégalités d'observabilité (dites directe et inverse). Ensuite les résultats de contrôlabilité exacte ont été conclus en appliquant la méthode d'unicité Hilbertienne (HUM) introduite par Lions [55].

La dépendance des coefficients a_{ij} de t cause en général le manque de la conservativité et la dissipativité du système considéré, c'est la difficulté principale par rapport aux autres cas. On se place dans le cadre général et, sous des conditions convenables sur les dérivées des coefficients par rapport aux variables de l'espace et du temps et à l'aide de multiplicateurs adaptés au système, on montre les inégalités d'observabilité du système $(P1)$ avec $v = 0$. Ensuite, en appliquant la méthode (HUM), on montre que le système $(P1)$ est exactement contrôlable.

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et posant $m(x) = x - x^0$. Soient Γ_0 et Γ_1 deux parties de Γ telles que

$$\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \Gamma_0 : \ m(x) \cdot \nu(x) \leq 0. \tag{1.1}$$

On suppose que les coefficients a_{ij} vérifient l'une des trois hypothèses suivantes:

(H1) Il existe γ, $\beta > 0$ et $\lambda \geq 0$ trois réels tels que

$$(2a_{ij} - m_k \partial_k a_{ij})\xi_i\xi_j \geq \gamma a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

$$(m_k\xi_k)^2 \leq \beta a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.3}$$

et

$$|a'_{ij}\xi_i\xi_j| \leq \lambda a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.4}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ où, $\partial_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$. On suppose que

$$\gamma \leq 2n \tag{1.5}$$

et

$$\frac{4\lambda\sqrt{\beta}}{\gamma} < 1. \tag{1.6}$$

On pose $T_0 = -\frac{1}{\lambda}\log\left(1 - \frac{4\lambda\sqrt{\beta}}{\gamma}\right)$. Si $\lambda = 0$, alors on pose $T_0 = \frac{4\sqrt{\beta}}{\gamma}$.

(H2) On suppose que les conditions (1.2), (1.3) et (1.5) sont satisfaites et qu'il existe une fonction $\lambda \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$|a'_{ij}\xi_i\xi_j| \leq \lambda(t)a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.7}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. On pose $T_0 = \frac{2\sqrt{\beta}}{\gamma}(1+e^{\bar{\lambda}})e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\lambda} = \int_0^\infty \lambda(t)\,dt$.

Si de plus on a:

$$a'_{ij}\xi_i\xi_j \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.8}$$

ou

$$a'_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.9}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, alors on pose, respectivement, $T_0 = \frac{4\sqrt{\beta}}{\gamma}e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.8) et $T_0 = \frac{2\sqrt{\beta}}{\gamma}(1+e^{\bar{\lambda}})$ si on a (1.9).

(H3) Supposons (1.3) et (1.7) et qu'il existe une fonction γ avec $|\gamma| \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$m_k\partial_k a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \gamma(t)a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.10}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. On pose $T_0 = (\bar{\gamma}e^{\bar{\lambda}} + \sqrt{\beta}(1+e^{\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\gamma} = \int_0^\infty |\gamma(t)|\,dt$.

Si de plus, on a (1.8) ou (1.9), alors on pose, respectivement, $T_0 = (\bar{\gamma} + 2\sqrt{\beta})e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.8), et $T_0 = (\bar{\gamma} + \sqrt{\beta}(1+e^{-\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.9).

Donc, on a le résultat d'observabilité suivant: soit $T > T_0$, alors il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour toute solution y du système $(P1)$ avec $v = 0$, l'énergie de la solution y définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((y')^2 + a_{ij}\partial_i y \partial_j y)\,dx, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

vérifie les estimations

$$c_1 E(0) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i y\partial_j y\,d\Gamma dt \leq c_2 E(0).$$

La méthode des multiplicateurs adaptée dans ce chapitre sera utilisée dans le ch. 2 pour obtenir les inégalités d'observabilité du système général d'élasticité. Toutefois, on peut aussi l'appliquer à des problèmes non conservatifs où l'énergie n'est pas une fonction constante.

En appliquant la méthode HUM, on conclut le résultat de contrôlabilité exacte suivant: soit $T > T_0$. Pour toutes données

$$(y_0, y_1),\ (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega),$$

il existe un contrôle $v \in L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+)$ tel que la solution du système $(P1)$ vérifie (1.0).

Ce travail fait l'objet d'un article accepté pour publication au Israel. J. Math.

Chapitre 2. Les chapitres 2-7 seront consacrés à l'étude de l'observabilité frontière avec la condition au bord du type Dirichlet, la contrôlabilité exacte et la stabilisation du système général d'élasticité.

Le problème de stabilisation consiste à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie qu'on note $E(t)$, étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas, et, si cette limite est nulle, donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro.

Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs pour divers systèmes. Dans notre étude, on obtient trois types de stabilisation:

1. Stabilisation forte: $E(t) \to 0$, lorsque $t \to \infty$.
2. Stabilisation polynomiale: $E(t) \leq ct^{-\delta}$, $\forall t > 0$, $(c,\ \delta > 0)$
3. Stabilisation uniforme: $E(t) \leq ce^{-\delta t}$, $\forall t > 0$, $(c,\ \delta > 0)$.

Le système d'élasticité a attiré l'intention de nombreux mathématiciens dans les dernières années. Un vrai progrès a été réalisé dans ce domaine, notamment dans les travaux de Lagnese [49, 50], Komornik [39], Martinez [59], Aassila [2], Alabau et Komornik [5, 6] et Horn [37, 38].

Dans [49], Lagnese prouve des résultats de stabilisation uniforme du système d'élasticité soumis à un feedback linéaire, sous certaines conditions techniques sur le tenseur d'élasticité. En particulier, ces résultats ne s'appliquent pas au cas linéaire homogène isotrope, pour lequel le tenseur d'élasticité dépend de deux paramètres appelés constantes de Lamé. Dans [50], il obtient des estimations de stabilisation uniforme pour des systèmes d'élasticité homogènes, isotropes, linéaires et bidimensionnels, soumis à un feedback linéaire frontière artificiel.

Komornik [39] a montré les mêmes estimations pour le système homogène isotrope en dimension 2 et 3, soumis à un feedback linéaire frontière. Ces estimations sur le taux de décroissance de l'énergie sont même optimales lorsque le domaine est une boule de $\mathbb{R}^3$. Martinez [59] a généralisé les résultats de [39] au système d'élasticité relatif aux cristaux cubiques, et soumis à un feedback frontière non linéaire. Pour ces systèmes, le tenseur d'élasticité dépend de trois paramètres.

Aassila [2] a montré la stabilisation forte du système homogène isotrope d'élasticité soumis à un feedback interne non linéaire dans un domaine de mesure finie, mais sans donner aucune estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

Alabau et Komornik [5, 6] ont étudié un système d'élasticité non isotrope avec des coefficients constants. Ils ont obtenu des résultats de contrôlabilité exacte et, sous certaines hypothèses géométriques, des résultats de stabilisation uniforme par un feedback frontière linéaire, avec la précision du taux de décroissance de l'énergie. Leur démonstration est basée sur la méthode des multiplicateurs en donnant deux identités nouvelles cruciales.

Horn [37, 38] a obtenu des résultats de stabilisation du système homogène isotrope d'élasticité sous des hypothèses géométriques faibles en combinant la méthode des multiplicateurs et les techniques d'analyse micro-locale développées par Bardos, Lebeau et Rauch [11] et appliquées par Lasiecka et Triggiani [52] dans l'étude de la stabilisation de l'équation des ondes, en simplifiant les preuves de [11]. Les résultats de stabilisation de [37, 38] ne précisent pas le taux de décroissance de l'énergie: elle est donnée sous la forme

$$E(t) \leq S(t), \quad \forall t > 0,$$

où, $S(t)$ est la solution de l'équation différentielle

$$S'(t) + q(S(t)) = 0,$$

q étant une fonction dépendant de la fonction qui représente le feedback, par l'intermédiaire d'un certain algorithme.

Le but de notre étude est d'atteindre les résultats de [5, 6] au cas non linéaire avec des coefficients dépendants des variables de l'espace et du temps et affaiblir certaines hypothèses.

Dans le ch. 2, on traite le problème d'observabilité frontière avec la condition au bord du type Dirichlet et la contrôlabilité exacte du système général d'élasticité.

Soient Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^2 et

$$a_{ijkl} \in C^1(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$$

un ensemble des fonctions vérifiant les conditions de symétrie et coercivité suivantes:

$$(2.0) \qquad a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \quad \text{et} \quad a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

pour un nombre $\alpha > 0$ fixé et pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. Puis l'on considère le système suivant:

$$(P2) \qquad \begin{cases} y_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_i = v_i & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y_i(0) = y_i^0 \ \text{ et } \ y_i'(0) = y_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

où, $v = (v_1, \cdots, v_n)$ est le contrôle cherché, $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(y_{k,l} + y_{l,k})$ et $y_{l,k} = \frac{\partial y_l}{\partial x_k}$, $y_{k,l} = \frac{\partial y_k}{\partial x_l}$.

Fixons un point $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et posons $m(x) = x - x^0$, $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$. Soient Γ_0 et Γ_1 deux parties de Γ telles que (1.1).

On suppose que les coefficients a_{ijkl} vérifient l'une des hypothèses suivantes:

(H1) Il existe $\gamma > 0$ et $\lambda \geq 0$ deux constantes telles que

$$(2a_{ijkl} - m_p \partial_p a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \gamma a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

et

$$|a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}| \leq \lambda a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij} où, $\partial_p a_{ijkl} = \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_p}$. On suppose que

$$\gamma \leq 2n \tag{2.3}$$

et

$$\frac{4\lambda}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R < 1. \tag{2.4}$$

On pose $T_0 = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - \frac{4\lambda}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R)$. Si $\lambda = 0$, alors on pose $T_0 = \frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R$.

(H2) On suppose que les conditions (2.1) et (2.3) sont satisfaites et qu'il existe une fonction $\lambda \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$|a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}| \leq \lambda(t) a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.5}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. On pose $T_0 = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R(1 + e^{\bar{\lambda}})e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\lambda} = \int_0^\infty \lambda(t)\, dt$.

Si de plus, on a:

$$a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.6}$$

ou

$$a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2.7}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}, alors on pose, respectivement, $T_0 = \frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, Re^{\bar{\lambda}}$ si on a (2.6), et $T_0 = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R(1 + e^{\bar{\lambda}})$ si on a (2.7).

(H3) Supposons (2.5) et qu'il existe une fonction γ avec $|\gamma| \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$(2.8) \qquad m_p \partial_p a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \leq \gamma(t) a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. On pose $T_0 = (\bar{\gamma} e^{\bar{\lambda}} + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R(1 + e^{\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\gamma} = \int_0^\infty |\gamma(t)|\, dt$.

Si de plus, on a (2.6) ou (2.7), alors on pose, respectivement, $T_0 = (\bar{\gamma} + 2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R)e^{\bar{\lambda}}$ si on a (2.6), et $T_0 = (\bar{\gamma} + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, R(1 + e^{-\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ si on a (2.7).

Donc on a le résultat d'observabilité suivant: soit $T > T_0$. Alors il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour toute solution y du système $(P2)$ avec $v = 0$, l'énergie de la solution y, définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (y_i' y_i' + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij})\, dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

vérifie les estimations

$$c_1 E(0) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}\, d\Gamma dt \leq c_2 E(0).$$

En appliquant la méthode (HUM), on conclut le résultat de contrôlabilité exact suivant: soit $T > T_0$. Pour toutes données

$$(y^0, y^1),\ (\tilde{y}^0, \tilde{y}^1) \in (L^2(\Omega))^n \times (H^{-1}(\Omega))^n,$$

il existe un contrôle $v \in (L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+))^n$ tel que la solution du système $(P2)$ vérifie

$$y(T) = \tilde{y}^0 \quad \text{et} \quad y'(T) = \tilde{y}^1.$$

Chapitre 3. On considère dans ce chapitre le système linéaire d'élasticité suivant:

$$(P3) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij} \nu_j + a u_i + b u_i' = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \ \text{ et } \ u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \ \ \Omega, \\ i = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

avec les mêmes notations qu'au ch. 2 et sous la condition (2.0). Ici, $b > 0$, $a \geq 0$ sont deux constantes fixées. On étudie le comportement asymptotique de l'énergie de la solution du système $(P3)$, définie par

$$(3.1) \qquad E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u_i' u_i' + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij})\, dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} a u_i u_i\, d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Supposons que la condition (2.1) est satisfaite et que

$$a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij},

$$a < \frac{\gamma\alpha}{4R} \tag{3.2}$$

(avec γ assez petit s'il existe i, j, k, l tels que $a'_{ijkl} \neq 0$) et

$$\forall x \in \Gamma_1 : \;\; |x - x^0| = R. \tag{3.3}$$

Alors on montre le résultat de stabilisation uniforme suivant: il existe deux constantes ω, $M > 0$ telles que, pour toute donnée initiale

$$(u^0, u^1) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n,$$

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.4}$$

Dans le cas a_{ijkl} =const ($\gamma = 2$), (3.2) donne une condition plus faible que celle supposée dans [5]. La condition (3.2) sera éliminée dans le ch. 4.

Les résultats des ch. 2 et 3 font l'objet de deux articles parus aux Kyushu J. of Math. et Acta Sci. Math. (Szeged).

Chapitre 4. On s'intéresse dans ce chapitre au problème d'existence, de régularité et de stabilisation non linéaire du système étudié dans le ch. 3. Soient $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, croissantes et $g_i(0) = 0$ telles que

$$|g_i(x)| \leq c(1 + |x|) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

où, $c > 0$ est un nombre fixé. On considère le système suivant:

$$(P4) \qquad \begin{cases} u''_i - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}\nu_j + au_i + g_i(u'_i) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u^0_i \;\text{ et }\; u'_i(0) = u^1_i & \text{dans} \;\; \Omega, \\ i = 1, \cdots, n, & \end{cases}$$

avec les mêmes notations qu'au ch. 3. Ici, on prend des coefficients $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant la condition (2.0).

Premièrement, on applique la théorie des semi-groupes non linéaires, on montre l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du système $(P4)$:

1. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$, le système $(P4)$ admet une solution globale unique (faible)

$$u \in C(\mathbb{R}^+; (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n).$$

De plus, l'énergie de la solution u définie par (3.1) est une fonction décroissante.

2. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n$ telle que

$$\sigma_{ij}(u^0) + au_i^0 + g_i(u_i^1) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

la solution u (dite forte) vérifie

$$u,\ u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n), \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n).$$

Si de plus, les fonctions g_i sont globalement Lipschitz, alors on a:

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n), \quad g(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n).$$

Puis on traite le problème de stabilisation. Grâce au résultat de stabilisation uniforme obtenu au ch. 3, et par l'intermédiaire d'un principe général de Russell [69] et une méthode introduite par Liu [57] dans le cadre d'un système linéaire de thermoélasticité, on se débarasse de la condition $a < \frac{\gamma\alpha}{4R}$ supposée dans le ch. 3 et on obtient des résultats de stabilisation pour toute valeur positive de a avec des estimations précises sur le taux de décroissance de l'énergie.

On suppose que les conditions (2.1) et (3.3) sont satisfaites.

1. Supposons qu'il existe des constantes $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4 > 0$ et $p \in [1, \infty)$ telles que

$$c_1|x|^p \leq |g_i(x)| \leq c_2|x|^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad |x| \leq 1; \tag{4.1}$$

$$c_3|x| \leq |g_i(x)| \leq c_4|x| \quad \text{if} \quad |x| > 1. \tag{4.2}$$

Alors toute solution faible du système $(P4)$ vérifie, pour trois constantes $M_0,\ M_1,\ \omega > 0$,

$$E(t) \leq M_1(1+t)^{-\frac{2}{p-1}} \quad \forall t > 0, \quad \text{si} \ \ p > 1 \tag{4.3}$$

et

$$E(t) \leq M_0 E(0) e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0, \quad \text{si} \ \ p = 1. \tag{4.4}$$

2. Supposons que les fonctions g_i vérifient (4.1) avec

$$p \geq 1 \text{ si } n = 1, \quad p > 1 \text{ si } n = 2 \quad \text{et} \quad p \geq n-1 \text{ si } n \geq 3$$

et qu'il existe $c_5 > 0$ tel que

$$|g_i(x)| \leq c_5 |x|^\lambda \quad \text{si} \quad |x| > 1$$

où, $\lambda = \frac{p+1}{p}$ ($\lambda \geq 1$ si $p = 1$). Alors toute solution forte du système $(P4)$ vérifie les estimations (4.3) et (4.4) pour des constantes M_0, M_1, $\omega > 0$ dépendantes de la solution u.

La condition (3.3) est très restrictive, elle signifie que Γ_1 est une sphère. Horn [37, 38] a affaibli cette condition pour le système d'élasticité homogène isotrope sans préciser le taux de décroissance de l'énergie.

La bornitude de Ω permet d'utiliser des résultats d'injection compacte sur les espaces de Sobolev, et la croissance polynomiale des fonctions g_i aux voisinages de 0 et $\pm\infty$ permet l'utilisation des inégalités intégrales (voir par exemple, Komornik [40, 43], Nakao [65] ou Zuazua [73, 74]) dans le but d'obtenir des estimations sur le taux de décroissance de l'énergie.

Ce type d'estimations est connu, notamment pour l'équation des ondes. On présentra des estimations analogues dans les ch. 6 et 7 et dans le ch. 9 où on va étudier un système de Petrovsky.

Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article paru au journal Portugaliae Math.

Chapitres 5, 6 et 7. On considère dans ces trois chapitres le système d'élasticité, soumis à un feedback interne non linéaire, suivant:

$$(P5) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + l_i(x, u_i') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}\nu_j + a u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \text{ et } u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans } \Omega, \\ i = 1, \cdots, n & \end{cases}$$

où, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2 avec $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ (on peut prendre $\Gamma_0 = \emptyset$ ou $\Gamma_1 = \emptyset$), $a > 0$ pour simplifier (on peut considérer le cas où $a := a(x)$ est une fonction positive et bornée), $l_i(x, u_i') = b_i(x) g_i(u_i')$, $b_i \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction positive, $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant (2.0).

Dans le ch. 5, on suppose que $b_i(x) \geq b_0 > 0$ pour tout $x \in \Omega$, Ω est de mesure finie et que les fonctions g_i vérifient les hypothèses suivantes:

$(H1)$ $\qquad g_i$ est continue, localement Lipschitz et $g_i(0) = 0$;

$$(H2) \qquad xg_i(x) > 0, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^*;$$

il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que

$$(H3) \qquad c_1|x| \leq |g_i(x)| \leq c_2|x|, \quad \text{pour tout} \quad |x| > 1.$$

Alors on a, pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$, le système $(P5)$ admet une solution globale unique (faible)

$$u \in C(\mathbb{R}^+; (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n)$$

vérifiant

$$(5.1) \qquad E(t) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

où, E est l'énergie de la solution u définie par

$$(5.2) \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i'u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au_iu_i\,d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Si le domaine Ω est borné ou $\Gamma_1 = \emptyset$, on peut montrer (5.1) par l'application directe du principe d'invariance de LaSalle en utilisant des injections compactes sur les espaces de Sobolev. Or, ce principe tombe en défaut quand le domaine Ω est seulement de mesure finie et $\Gamma_0 = \emptyset$, en l'absence de compacité: d'après Adams [4, corollary 6.41], l'existence d'une injection compacte $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, $q \geq p \geq 1$, implique que

$$\forall k : \ e^{kr}\mu(\Omega_r) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad r \to \infty$$

où, $\Omega_r = \{x \in \Omega : \ |x| > r\}$ et μ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. La démonstration de (5.1) est basée sur une approche introduite par Aassila [1], cette méthode ne fournit aucune estimation sur le taux de décroissance de l'énergie et elle n'est plus applicable dans le cas d'un feedback frontière.

Dans le ch. 6, on suppose que $\Gamma_1 = \emptyset$ (pour simplifier), $b_i(x) \geq b_0 > 0$ pour tout $x \in \Omega$, Ω est borné et que les fonctions g_i vérifient les hypothèses suivantes:

$$(H4) \qquad g_i \text{ est continue, croissante et } g_i(0) = 0;$$

il existe des constantes $c_i' > 0$ et $q_i \in [1, \infty)$ avec $(n-2)q_i \leq n$ telles que

$$(H5) \qquad |g_i(x)| \leq c_i'(1 + |x|^{q_i}), \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la théorie des semi-groupes non linéaires (voir Ball [9], Barbu [10], Brezis [14], Conrad et Pierre [17], Komornik [42]), on montre que notre système $(P5)$ est bien posé, plus précisement on a:

1. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in (H_0^1(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$, le système $(P5)$ admet une solution globale unique (faible)

$$u \in C(\mathbb{R}^+; (H_0^1(\Omega))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n).$$

L'énergie de la solution u définie par (5.2) est une fonction décroissante.

2. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$, la solution u (dite forte) vérifie

$$u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n), \quad u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (H_0^1(\Omega))^n)$$

et

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n), \quad g(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n).$$

Ensuite, on montre le résultat de stabilisation suivant:

1. Supposons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3, $c_4 > 0$ et p, $q \in [1, \infty)$ avec $(n-2)q \leq n$ telles que

$$c_1|x|^p \leq |g_i(x)| \leq c_2|x|^{1/p} \quad \text{si} \quad |x| \leq 1, \tag{5.3}$$

$$|g_i(x)| \leq c_3|x|^q \quad \text{si} \quad |x| > 1 \tag{5.4}$$

et

$$c_4|x| \leq |g_i(x)| \quad \text{si} \quad |x| > 1. \tag{5.5}$$

Alors, toute solution faible su système $(P5)$ vérifie, pour deux constantes c, $\omega > 0$,

$$E(t) \leq c\, t^{\frac{-2}{p-1}} \quad \forall t > 0, \quad \text{si } p > 1 \tag{5.6}$$

et

$$E(t) \leq E(0) e^{1-\omega_0 t} \quad \forall t \geq 0, \quad \text{si } p = 1. \tag{5.7}$$

2. Supposons que les fonctions g_i vérifient (5.3) et (5.4) avec

$$p \geq 1 \text{ si } n = 1, \quad p > 1 \text{ si } n = 2 \quad \text{et} \quad p \geq \frac{n}{2} \text{ si } n \geq 3. \tag{5.8}$$

Alors toute solution forte u du système $(P5)$ vérifie les estimations (5.6) et (5.7) pour des constantes c et $\omega_0 > 0$ dépendantes de u.

Dans ces deux chapitres, on peut supposer que $b_i(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$ sans perte de généralité. Si Ω est borné ou $\Gamma_1 = \emptyset$, le principe d'invariance de LaSalle nous garantit le résultat (5.1) obtenu au ch. 5 même si b_i vérifie seulement $b_i(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Dans le ch. 7, on suppose que Ω est borné, $\Gamma_1 = \emptyset$ (pour simplifier), les fonctions g_i vérifient les hypothèses (H4) et (H5), et les fonctions b_i sont exercées sur une partie ω de Ω. On note alors que notre système est bien posé exactement comme au ch. 6.

Concernant l'équation des ondes, le problème de stabilisation avec un feedback interne localement distribué a été étudié par de nombreux auteurs, des résultats de stabilisation uniforme et polynomiale ont été obtenus sous différentes hypothèses.

Dans le cas non dégénéré (c'est à dire les dissipations ne tendent pas vers zéro dans ω) où, ω est un voisinage du bord de Ω, Zuazua [75] a montré que, si le feedback est linéaire, l'énergie décroît uniformément vers zéro. Nakao [66] a étendu ce résultat au cas d'un feedback donné par $a(x)|u'|^r u'$ avec $r > -1$ et ω est un voisinage de

$$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma : \; m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \tag{5.9}$$

(par un voisinage de Γ_+, nous entendons l'intersection de Ω et d'un voisinage de Γ_+ dans $\mathbb{R}^n$) où, $m(x) = x - x^0$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$ un point fixé, et a montré qu'alors l'énergie décroît polynomialement. Nakao [66] a étudié aussi le cas dégénéré (les dissipations tendent vers zéro dans ω). Dans ce cas, l'auteur a consideré seulement un feedback linéaire et a montré la décroissance polynomiale de l'énergie pour des données initiales dans

$$(H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

où, $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2m > n$. Les preuves de [75] et [66] sont basées sur la méthode des multiplicateurs et sur un argument de compacité. Dans le cas dégénéré, dans [66] l'auteur a utilisé aussi le fait que la solution a la régularité suivante:

$$\bigcap_{k=0}^{k=m} C^k(\mathbb{R}^+; H^{m+k-1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^{m+1}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)). \tag{5.10}$$

Tcheugoué Tébou [72] a éliminé la condition $2m > n$ en simplifiant les preuves de [66]. Dans le cas non linéaire, la régularité (5.10) utilisée dans [66] et [72] n'est pas satisfaite en général, ce qui fait que, dans le cas dégénéré, la question de la stabilisation par un feedback non linéaire reste ouverte.

Concernant le système général d'élasticité, aucun résultat n'est connu dans cette direction. On considère dans ce chapitre les deux cas: dégénéré et non dégénéré, avec un feedback non linéaire dans les deux cas. Nos résultats généralisent et améliorent dans un certain sens les résultats mentionés ci-dessus. On donne une réponse positive à la question notée ci-dessus où on prend seulement des données initiales dans $(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$. De plus, si le feedback est linéaire et $n \geq 2$, on obtient un taux de décroissance plus grand que celui obtenu dans [72] et [66], et sans aucune condition sur la dégénérence de b_i. Notre méthode de démonstration est basée sur la technique des multiplicateurs et sur des inégalités intégrales dûes à Haraux et Komornik; nous utilisons aussi une idée de [72] pour nous débarasser des termes d'ordres inférieurs génants.

Soient c_1, $c_2 > 0$ et p, $r \geq 1$ quatre constantes telles que les fonctions g_i vérifient la condition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$c_1 \min\{|x|, |x|^r\} \leq |g_i(x)| \leq c_2 \max\{|x|, |x|^{1/p}\}. \tag{5.11}$$

Soit ω un voisinage de la partie Γ_+ définie par (5.9) tel que

$$b_i(x) \geq b_0 > 0 \quad \text{sur} \quad \omega \tag{5.12}$$

ou

$$b_i(x) > 0 \quad \text{sur} \quad \omega \quad \text{et} \quad \int_\omega b_i^{-p'}(x)\, dx < \infty \tag{5.13}$$

pour une constante $p' > 0$ telle que

$$p'(p-1) > 2 \quad \text{et} \quad p'(p-1) \geq n. \tag{5.14}$$

Alors on a les résultats suivants:

1. Supposons que la condition (2.1), (5.12) et (5.11) avec $r = p$ sont satisfaites. Alors toute solution faible du système $(P5)$ vérifie les estimations (5.6) et (5.7).

2. Supposons que les conditions (2.1), (5.13), (5.14) et (5.11) avec $r = 1$ sont satisfaites. Alors toute solution forte u du système $(P5)$ vérifie l'estimation (5.6) pour une constante $c > 0$ dépendante de u.

Les résultats des ch. 5, 6 et 7 font l'objet de trois articles parus aux PanAmerican Math. Journal, Portugaliae Math. et Asymptotic Analysis.

Chapitre 8. On présente dans ce chapitre un résultat de décroissance uniforme de l'énergie de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire. Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2 avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Soient $k : \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $b : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions données de $C^2(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Gamma_1))$ et $L^\infty(\Gamma_1)$, respectivement, et considérons le système suivant:

$$(P8) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + \int_0^t k(t-s)u'(s)\, ds + bu' = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0 \ \text{ et } \ u'(0) = u_1 & \text{dans} \ \ \Omega. \end{cases}$$

Propst et Prüss [68] ont montré, dans un cadre plus général, que le système $(P8)$ est bien posé au sens standard. Par contre, aucun résultat de stabilisation n'a été annoncé. En adaptant la méthode des multiplicateurs et en utilisant des inégalités particulières, on montre que le système $(P8)$ est uniformément stable.

On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on pose $m(x) = x - x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que

$$\Gamma \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \inf_{\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+} k \neq 0$$

et qu'il existe trois réels α, β, $\delta > 0$ tels que

$$m \cdot \nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad m \cdot \nu \geq \delta \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$

$$b \geq \beta \quad \text{sur} \quad \Gamma_1$$

$$k' \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+,$$

$$k'' \geq -\alpha k' \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \alpha \inf_{\Gamma_1} k(0) > -2 \inf_{\Gamma_1} k'(0).$$

Alors pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, la solution du système $(P8)$ vérifie, pour une constante $\omega > 0$,

$$E(t) \leq E(0) e^{1-\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

où, l'énergie E de la solution u est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega ((u')^2 + |\nabla u|^2)\, dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} k u^2\, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \int_0^t k'(t-s)(u(t)-u(s))^2\, ds d\Gamma.$$

Le résultat de ce chapitre fait l'objet d'un article paru au journal Afrika Math.

Chapitre 9. On considère dans ce chapitre un système de Petrovsky avec des conditions au bord du type Dirichlet et Neumann, soumis à un feedback interne non linéaire:

$$(P9) \qquad \begin{cases} u'' + \Delta^2 u + qu + g(u') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0 \ \text{ et } \ u'(0) = u_1 & \text{dans} \ \ \Omega \end{cases}$$

où, Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^4, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante telle que $g(0) = 0$ et $q : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de $L^\infty(\Omega)$. On définit l'énergie de la solution par la formule

$$(9.1) \qquad E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega ((u')^2 + (\Delta u)^2 + qu^2)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Premièrement, en appliquant la théorie des semi-groupes non linéaires, on montre que notre système $(P9)$ est bien posé au sens suivant:

1. Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, le système $(P9)$ admet une solution globale unique (faible)

$$u \in C(\mathbb{R}^+; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

L'énergie de la solution u définie par (9.1) est une fonction décroissante.

2. Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ telle que

$$g(u_1) \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \Delta u_0 = \partial_\nu \Delta u_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \tag{9.2}$$

la solution u (dite forte) vérifie

$$u,\, u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^2(\Omega)), \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

Si de plus, g est globalemet Lipschitz, alors on a:

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \quad g(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)).$$

Ensuite, on montre le résultat de stabilisation suivant:

1. Supposons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3, $c_4 > 0$ et p, $p' \in [1, \infty)$ avec $(n-2)p' \leq n+2$ telles que

$$c_1|x|^p \leq |g(x)| \leq c_2|x|^{1/p} \quad \text{si} \quad |x| \leq 1, \tag{9.3}$$

$$|g(x)| \leq c_3|x|^{p'} \quad \text{si} \quad |x| > 1 \tag{9.4}$$

et

$$c_4|x| \leq |g(x)| \quad \text{si} \quad |x| > 1. \tag{9.5}$$

Alors toute solution faible du système $(P9)$ vérifie, pour deux constantes c, $\omega > 0$,

$$E(t) \leq c\, t^{\frac{-2}{p-1}} \quad \forall t > 0, \quad \text{si } \ p > 1 \tag{9.6}$$

et

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t} \quad \forall t \geq 0, \quad \text{si } \ p = 1. \tag{9.7}$$

2. Supposons que la fonction g vérifie (9.3) et (9.4) avec

$$p \geq 1 \ \text{ si } \ n = 1, \quad p > 1 \ \text{ si } \ n = 2 \quad \text{et} \quad p \geq \frac{n}{2} \ \text{ si } \ n \geq 3.$$

Alors toute solution forte du système $(P9)$ vérifie les estimations (9.6) et (9.7) pour des constantes c et $\omega > 0$ dépendantes de la solution u.

Le système composé de la première équation de $(P9)$ avec $q = 0$ et $-g(\Delta u')$ au lieu de $g(u')$, la condition au bord

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+$$

et la condition initiale a été étudié par Komornik et Kouémou-Patcheu [46] et Komornik [40]. Dans [46], la méthode de Faedo-Galerkin a été appliquée dans la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution, ce qui a exigé des conditions sur g plus fortes que celles supposées dans notre travail, de plus les estimations (9.6) et (9.7) se montrent seulement pour les solutions fortes. Dans [40], l'auteur a utilisé la théorie des semi-groupes non linéaires qui a permis d'affaiblir les conditions sur g et de montrer les estimations (9.6) et (9.7) pour toute solution faible. Dans notre travail, et avec les mêmes conditions supposées sur g que dans [40], nous montrons ces résultats pour le système $(P9)$. De plus, nous montrons que les estimations (9.6) et (9.7) restent vraies pour les solutions fortes sans que $|g(x)|$ ne tende vers l'infini lorsque $|x| \to \infty$ ce qui permet de considérer les feedbacks bornés.

Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article paru au Bulletin of the Belgian Math. Soc.

Chapitre 10. Dans ce chapitre, on présente un résultat de stabilisation uniforme de l'équation des ondes dans un domaine ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ avec la condition de Dirichlet sur une partie Γ_0 du bord et la condition de Neumann sur l'autre partie Γ_1 du bord, avec deux feedbacks non linéaires, interne et frontière:

$$(P10) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u + f(u') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + (m \cdot \nu)(au + g(u')) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u_1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

où, $m(x) = x - x_0$, f, g sont deux fonctions continues croissantes telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $a \geq 0$ est une constante fixée.

Dans le cas $f = 0$ ou $\Gamma_1 = \emptyset$, le système $(P10)$ a été étudié par nombreux auteurs depuis les travaux de Russell [69], par exemple, Komornik [41, 43], Nakao [65] et Zuazua [74]. Des résultats de stabilisation ont été obtenus. Le but de ce travail est d'obtenir la stabilisation uniforme avec un meilleur taux de décroissance de l'énergie, en supposant des conditions convenables sur les fonctions f et g et sur la constante a.

On définit l'énergie de la solution par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega ((u')^2 + |\nabla u|^2)\, dx + \frac{a}{2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) u^2 \, d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Sous certaines hypothèses géométriques, on montre le résultat suivant: supposons qu'il existe des constantes c_1, $c_2 >$ telles que

$$c_1|x| \leq |g(x)| \leq c_2|x| \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2}(3aR^2 - n)c_1|x| \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2}(3aR^2 - n)c_2|x| \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$R^{-2}\max\{n-2, \frac{n}{3}\} \leq a < nR^{-2}$$

où, $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$. Alors pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, la solution du système $(P10)$ vérifie l'estimation

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t} \quad \forall t \geq 0 \tag{10.1}$$

avec $\omega = (n - aR^2)(2R + R^2c_2 + \frac{1}{c_1})^{-1}$.

Si on choisit $a = R^{-2}\max\{n-2, \frac{n}{3}\}$ et $c_1 = c_2 = 1/R$ (i.e. $g(x) = x/R$ et $f(x) = \frac{3aR^2-n}{2R}x$) alors on obtient un taux de décroissance

$$\omega = \frac{1}{2R} \text{ si } n \geq 3, \quad \omega = \frac{1}{3R} \text{ si } n = 2 \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{6R} \text{ si } n = 1,$$

ce qui donne, dans le cas $n = 2$, un taux de décroissance plus grand que celui obtenu par Komornik [44]. Tcheugoué Tébou [71] a obtenu un résultat similaire en considérant des feedbacks linéaires, et Martinez [59] a amélioré ce taux de décroissance dans des domaines polygonaux particuliers.

Le résultat de ce chapitre fait l'objet d'un article paru au journal Annal. Polonici Math.

CHAPITRE 1

OBSERVABILITÉ FRONTIÈRE ET CONTRÔLABILITÉ EXACTE DE L'ÉQUATION DES ONDES

1. Introduction et résultats principaux

Soient Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de frontière Γ de classe C^2 et ν le vecteur unitaire normal extérieur à Γ. Soit $A = \partial_i(a_{ij}\partial_j)$ un opérateur elliptique différentiel de deuxième ordre avec des coefficients $a_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ vérifiant les conditions de symétrie et coercivité suivantes:

$$
a_{ij} = a_{ji} \quad \text{et} \quad a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.0}
$$

pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ où, $\alpha > 0$ est un nombre fixé. (Dans toute la suite, on utilise la convention de sommation sur les indices répétés et tout indice ouvert désigne la répétition de cet indice de 1 à n). Puis l'on considère l'équation générale des ondes avec la condition au bord du type Dirichlet suivante:

$$
(P1) \qquad \begin{cases} y'' - Ay = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y = v & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = y_1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}
$$

où, v est le contrôle cherché.

Le système $(P1)$ est dit exactement contrôlable si, pour un temps suffisamment grand $T > 0$ et pour toutes données (y_0, y_1) et $(\tilde{y_0}, \tilde{y_1})$ dans un espace à définir, il existe un contrôle v tel que la solution y du système $(P1)$ vérifie la condition finale

$$
y(T) = \tilde{y}_0 \quad \text{et} \quad y'(T) = \tilde{y}_1. \tag{1.1}
$$

La contrôlabilité exacte du système $(P1)$ a été étudié par plusieurs auteurs, parmi eux: Avellaneda et Lin [8], Ho [35, 36], Komornik [45], Lasiecka, Triggiani et Yao [53], et Lions [54, 55] dans le cas où les coefficients ne dependent pas du temps t, Muñoz Rivera [61] dans le cas $a_{ij} = \delta_{ij}a(t)$ où, $a(t)$ est une fonction donnée, Miranda [60] dans le cas

$$a_{ij} = (\delta_{ij} - k'(t)^2 x_i x_j)k(t)^{-2}$$

pour une fonction donnée $k(t)$ avec la présence des termes ∇y et $\nabla y'$ dans la première équation du système $(P1)$. Récemment, Liu et Williams [58] ont obtenus des résultats de contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec condition au bord du type Neumann, similaires à ceux que nous allons présenter dans ce chapitre.

Dans tous ces travaux, la méthode des multiplicateurs, développée par exemple par Lagnese [48], Lions [55, 56], Komornik [42] ou Komornik et Zuazua [47], a été appliquée pour obtenir les inégalités d'observalibilité (dites directe et inverse). Ensuite, les résultats de contrôlabilité exacte ont été conclus en appliquant la méthode d'unicité Hilbertienne (HUM) introduite par Lions [55].

La dépendance des coefficients a_{ij} de t cause en général le manque de la conservativité et la dissipativité du système considéré; c'est la difficulté principale par rapport aux autres cas. On se place dans le cadre général et, sous des conditions convenables sur les dérivées des coefficients par rapport aux variables de l'espace et de temps et à l'aide de multiplicateurs adaptés au système on montre les inégalités d'observabilité du système $(P1)$ avec $v = 0$. Ensuite, en appliquant la méthode HUM, on montre que le système $(P1)$ est excatement contrôlable.

On considère alors le système homogène associé à $(P1)$

$$(P2) \qquad \begin{cases} u'' - Au = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0, \quad \text{et} \quad u'(0) = u_1 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

L'existence et la régularité des solutions du problème $(P2)$ découle d'un résultat de la théorie des systèmes d'évolution (voir par exemple, Pazy [67, Ch. 5]). Le principe est de se ramener à un problème écrit sous la forme d'un système d'évolution abstrait du premier ordre

$$U'(t) - \mathcal{A}(t)U(t) = 0.$$

On note par H, V et W les espaces de Hilbert suivants:

$$H = L^2(\Omega), \quad \|v\|_H^2 = \int_\Omega v^2 \, dx,$$

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \text{ on } \Gamma\}, \quad \|v\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx$$

et

$$W = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_W^2 = \int_\Omega ((\Delta v)^2 + |\nabla v|^2)\, dx.$$

L'inégalité de Poincaré nous assure que $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ définissent bien des normes euclidiennes sur V et W, respectivement, équivalentes à la structure euclidienne classique. Soient:

$$z := u', \quad U := (u, z), \quad \mathcal{A}(t)U := (z, A(t)u)$$

et A l'opérateur défini par (on notera $\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k}$)

$$A(t)u = \partial_i(a_{ij}(t)\partial_j u).$$

Alors le problème $(P2)$ se réécrit sous la forme:

$$\begin{cases} U'(t) - \mathcal{A}(t)U(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = (u_0, u_1). \end{cases}$$

On remarque que si u est une solution suffisamment régulière de $(P2)$, alors U et $\mathcal{A}(t)U$ sont des éléments de $V \times H$. Ceci nous amène à définir le domaine de $\mathcal{A}(t)$ par

$$D(\mathcal{A}(t)) = \{U = (u, z) \in V \times V : \; A(t)u \in H\}.$$

On peut prouver facilement que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$D(\mathcal{A}(t)) = W \times V.$$

En effet, il est clair que $W \times V \subset D(\mathcal{A}(t))$. D'autre part, si $(u, z) \in D(\mathcal{A}(t))$, alors $u \in V$ et $\partial_i(a_{ij}(t)\partial_j u) \in H$, ce qui implique que $a_{ij}\partial_{i,j}u \in H$ où $\partial_{i,j}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. Or, (1.0) implique que $a_{ij} \geq \alpha$ pour tout $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, donc $\partial_{i,j}u \in H$, et par conséquent $u \in W$. Donc le domaine de $\mathcal{A}(t)$ est dense et s'injecte de façon continue dans $V \times H$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, l'opérateur linéaire $\mathcal{A}(t)$ engendre un semi-groupe continu de contraction sur $V \times H$ (c'est facile de voir que $\mathcal{A}(t)$ est un opérateur maximal monotone). D'autre part, et grâce à la régularité des coefficients a_{ij} on a pour tout $U \in W \times V$, l'application:

$$h : t \mapsto \mathcal{A}(t)U$$

de $\mathbb{R}^+$ dans $V \times H$ est continûment différentiable. En effet, pour tout $U = (u, z) \in W \times V$ et t_1, $t_2 \in \mathbb{R}^+$, on a:

$$\begin{aligned} \|h(t_1) - h(t_2)\|_{V \times H} &= \|\mathcal{A}(t_1)U - \mathcal{A}(t_2)U\|_{V \times H} = \|A(t_1)u - A(t_2)u\|_H \\ &= \|(a_{ij}(t_1) - a_{ij}(t_2))\partial_{i,j}u - \partial_i(a_{ij}(t_1) - a_{ij}(t_2))\partial_j u\|_H \\ &\leq c \left(\sum_{i,j} \|a_{ij}(t_1) - a_{ij}(t_2)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \|u\|_W \\ &\leq c \left(\sum_{i,j} \|a_{ij}(t_1) - a_{ij}(t_2)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right) \|U\|_{W \times V} \end{aligned}$$

où, c est une constante positive dépendante seulement de Ω. Grâce à la régularité suposée sur a_{ij}, on déduit de l'inégalité précédente que h est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée h' est définie comme h où on remplace les a_{ij} par les a'_{ij}. Donc notre problème $(P2)$ est bien posé au sens suivant (voir Pazy [67, Ch. 5]):

1. Étant donné $(u_0, u_1) \in V \times H$, le problème $(P2)$ admet une unique solution faible:

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H).$$

De plus, l'énergie de u, définie par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega ((u')^2 + a_{ij}\partial_i u \partial_j u)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.2}$$

(remarquer que d'après (1.0), $E(t) \sim \|(u(t), u'(t))\|^2_{V\times H}$) vérifie l'identité:

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega a'_{ij}\partial_i u \partial_j u\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.3}$$

2. De plus, si $(u_0, u_1) \in W \times V$, alors la solution u (appelée solution forte) du problème $(P2)$ est plus régulière:

$$u \in C(\mathbb{R}^+; W) \cap C^1(\mathbb{R}^+; V) \cap C^2(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.4}$$

Remarque. Pour montrer l'identité (1.3), il suffit de multiplier la première équation dans $(P2)$ par u' et intégrer par parties sur Ω. La formule (1.3) implique que notre problème $(P2)$ n'est pas conservatif en général. Cette formule sera essentielle dans la suite.

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et posons $m(x) = x - x^0$, $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$. Soient Γ_0 et Γ_1 deux parties de Γ telles que

$$\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \Gamma_0 : \; m(x) \cdot \nu(x) \leq 0. \tag{1.5}$$

On suppose que les coefficients a_{ij} vérifient l'une des trois hypothèses suivantes:

(H1) Il existe γ, $\beta > 0$ et $\lambda \geq 0$ trois réels tels que

$$(2a_{ij} - m_k \partial_k a_{ij})\xi_i\xi_j \geq \gamma a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{1.6}$$

$$(m_k\xi_k)^2 \leq \beta a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.7}$$

et

$$|a'_{ij}\xi_i\xi_j| \leq \lambda a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.8}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ où, $\partial_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$. On suppose que

$$\gamma \leq 2n, \tag{1.9}$$

$$\frac{4\lambda\sqrt{\beta}}{\gamma} < 1. \tag{1.10}$$

On pose $T_0 = -\frac{1}{\lambda} \log \left(1 - \frac{4\lambda\sqrt{\beta}}{\gamma}\right)$. Si $\lambda = 0$, on pose $T_0 = \frac{4\sqrt{\beta}}{\gamma}$.

(H2) On suppose que les conditions (1.6), (1.7) et (1.9) sont satisfaites et qu'il existe une fonction $\lambda \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$|a'_{ij}\xi_i\xi_j| \leq \lambda(t) a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.11}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. On pose $T_0 = \frac{2\sqrt{\beta}}{\gamma}(1 + e^{\bar{\lambda}})e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\lambda} = \int_0^\infty \lambda(t)\, dt$.

Si de plus on a:

$$a'_{ij}\xi_i\xi_j \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.12}$$

ou

$$a'_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.13}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, alors on pose, respectivement, $T_0 = \frac{4\sqrt{\beta}}{\gamma} e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.12), et $T_0 = \frac{2\sqrt{\beta}}{\gamma}(1 + e^{\bar{\lambda}})$ si on a (1.13).

(H3) Supposons (1.7), (1.11) et qu'il existe une fonction γ avec $|\gamma| \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$m_k \partial_k a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \gamma(t) a_{ij}\xi_i\xi_j \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.14}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. On pose $T_0 = (\bar{\gamma} e^{\bar{\lambda}} + \sqrt{\beta}(1 + e^{\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\gamma} = \int_0^\infty |\gamma(t)|\, dt$.

Si de plus, on a (1.12) ou (1.13), alors on pose, respectivement, $T_0 = (\bar{\gamma} + 2\sqrt{\beta})e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.12), et $T_0 = (\bar{\gamma} + \sqrt{\beta}(1 + e^{-\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.13).

Remarques. 1. Grâce à la condition (1.0), la condition (1.7) est toujours satisfaite. Les autres conditions peuvent être obtenues en choisissant les dérivées des coefficients a_{ij} par rapport aux variables de l'espace et de temps plus petites par rapport à a_{ij}.

2. La condition (1.6) a été supposée pour la première fois dans [45] dans le cadre de l'équation des ondes avec la condition au bord du type Neumann et $a'_{ij} = 0$. La question concernant le cas général reste ouverte.

Donc on a le résultat d'observabilité suivant:

Théorème 1. *Supposons que les hypothèses (1.0), (1.5) et l'une des hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites et soit $T > T_0$. Alors il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour toute solution u du problème $(P2)$, l'énergie de la solution u définie par (1.2) vérifie les estimations*

$$\frac{c''}{c'}c_1 E(0) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt \leq \frac{c'}{c''}c_2 E(0) \tag{1.15}$$

où, c' et c'' sont les deux constantes positives vérifiant

$$c''\|(v,v')\|^2_{V\times H} \leq E(v,v') \leq c'\|(v,v')\|^2_{V\times H}, \quad \forall (v,v') \in V \times H. \tag{1.16}$$

Remarques. 1. Si $\lambda = 0$ (c'est à dire $a'_{ij} = 0$), alors $T_0 = \frac{4\sqrt{\beta}}{\gamma}$. Dans ce cas là, on tombe sur un temps de contrôlabilité plus petit que celui obtenu dans [35].

2. Dans [45], l'auteur a montré que $T_0 = \frac{4\sqrt{\beta}}{\gamma}$ est le temps optimal si $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < 1\}$ et $A = \Delta$ (c'est à dire $a_{ij} = \delta_{ij}$). On ne sais pas si le temps T_0, donné dans les hypothèses (H1)-(H3), est optimal dans le cas général.

En appliquant la méthode HUM, on conclut le résultat de contrôlabilité exacte suivant:

Théorème 2. *Supposons satisfaites les hypothèses du théorème 1. Pour toutes données (y_0, y_1), $(\tilde{y_0}, \tilde{y_1}) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+)$ tel que la solution du problème $(P1)$ vérifie (1.1).*

2. Observabilité: preuve du théorème 1

Il suffit de prouver les estimations (1.15) pour les solutions fortes: on déduit alors le résultat pour les solutions faibles à l'aide d'un argument de densité. On supposera donc que u est une solution forte de $(P2)$; la régularité de u donnée par (1.4) permet alors de justifier tous les calculs.

On commence par donner une relation entre $E(t)$ et $E(0)$ qui nous permet d'estimer le premier par rapport au second.

Lemme 2.1. *On a:*

$$-\lambda E(t) \leq E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

$$e^{-\lambda t}E(0) \leq E(t) \leq e^{\lambda t}E(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

si (1.8) est satisfaite, et

$$-\lambda(t)E(t) \leq E'(t) \leq \lambda(t)E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

$$e^{-\bar{\lambda}}E(0) \leq E(t) \leq e^{\bar{\lambda}}E(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4}$$

si (1.11) est satisfaite.

Preuve. D'après (1.2) et (1.3) on a (2.1) et (2.3). Par le lemme de Gronwall, on déduit (2.2) et (2.4) de (2.1) et (2.3) respectivement.

On montre maintenant (1.15). On fixe une fonction arbitraire $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$ et un nombre $T > 0$. On multiplie la première équation de $(P2)$ par $h_k\partial_k u$ et on intègre par parties sur $\Omega \times [0, T]$:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega (h_k\partial_k u)(u'' - \partial_i(a_{ij}\partial_j u))\, dxdt$$

$$= \left[\int_\Omega h_k\partial_k u u'\, dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Gamma h_k\partial_k u a_{ij}\partial_j u\nu_i\, d\Gamma dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (\partial_i h_k a_{ij}\partial_j u\partial_k u + h_k a_{ij}\partial_j u\partial_i\partial_k u - \frac{1}{2}h_k\partial_k|u'|^2)\, dxdt.$$

Or (en utilisant la symétrie de a_{ij})

$$a_{ij}\partial_j u\partial_i\partial_k u = \frac{1}{2}\partial_k(a_{ij}\partial_j u\partial_i u) - \frac{1}{2}(\partial_k a_{ij})\partial_i u\partial_j u,$$

donc on intègre les deux derniers termes du membre de droite de l'identité précédente et on multiplie par 2, on obtient:

$$\int_0^T \int_\Gamma (2h_k\partial_k u a_{ij}\partial_j u\nu_i + (h\cdot\nu)(|u'|^2 - a_{ij}\partial_i u\partial_j u))\, d\Gamma dt \tag{2.5}$$

$$= \left[\int_\Omega 2h_k\partial_k u u'\, dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega h_k\partial_k a_{ij}\partial_i u\partial_j u\, dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (2\partial_i h_k a_{ij}\partial_j u\partial_k u + (\mathrm{div} h)(|u'|^2 - a_{ij}\partial_i u\partial_j u))\, dxdt.$$

Comme l'énergie définit une norme sur $V \times H$ équivalente à la norme usuelle alors, en utilisant l'estimation (2.2) ou (2.4) et le fait que $h_k \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, le membre de droite de (2.5) peut-être facilement majoré par $cE(0)$ où c est une constante positive (dépendante de T). D'autre part, on déduit de la condition au bord de $(P2)$ que:

$$u' = 0 \quad \text{et} \quad \partial_k u \nu_i = \partial_\nu u \nu_k \nu_i = \partial_i u \nu_k \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

ce qui implique

$$h_k \partial_k u a_{ij} \partial_j u \nu_i = (h \cdot \nu) a_{ij} \partial_i u \partial_j u.$$

Donc le membre de gauche de (2.5) se réduit à

$$\int_0^T \int_\Gamma (h \cdot \nu) a_{ij} \partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt.$$

On choisit la fonction h telle que $h = \nu$ sur Γ (concernant l'existence d'une telle fonction, voir [42, lemme 2.1]), on obtient l'inégalité directe (l'inégalité de droite) de (1.15) avec $c_2 = c$. L'inégalité directe de (1.15) est satisfaite sans aucune condition sur le temps T.

On choisit maintenant $h(x) = m(x)$, l'identité (2.5) devient:

$$\int_0^T \int_\Gamma (m \cdot \nu) a_{ij} \partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt$$

$$= \left[\int_\Omega 2 m_k \partial_k u u' \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega ((2-n) a_{ij} \partial_i u \partial_j u + n|u'|^2) \, dx dt$$

$$- \int_0^T \int_\Omega m_k \partial_k a_{ij} \partial_i u \partial_j u \, dx dt.$$

Ensuite on multiplie la première équation de $(P2)$ par u et on intégre par parties sur $\Omega \times [0, T]$, on obtient:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega u(u'' - \partial_i(a_{ij} \partial_j u)) \, dx dt$$

$$= \left[\int_\Omega u u' \, dx \right]_0^T - \int_0^T \int_\Gamma u a_{ij} \partial_j u \nu_i \, d\Gamma dt + \int_0^T \int_\Omega (a_{ij} \partial_i u \partial_j u - |u'|^2) \, dx dt$$

$$= \left[\int_\Omega u u' \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega (a_{ij} \partial_i u \partial_j u - |u'|^2) \, dx dt.$$

En multipliant cette égalité par $n - \frac{\delta}{2}$ où, $0 < \delta \leq 2n$ et en combinant avec la précédente, on trouve:

$$\int_0^T \int_\Gamma (m \cdot \nu) a_{ij} \partial_i \partial_j u \, d\Gamma dt$$

$$= \left[\int_\Omega (2m_k\partial_k u + (n-\delta/2)u)u'\,dx\right]_0^T - \int_0^T\int_\Omega m_k(\partial_k a_{ij})\partial_i u\partial_j u\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega ((2-\delta/2)a_{ij}\partial_i u\partial_j u + \delta/2|u'|^2)\,dxdt.$$

Alors, en utilisant (1.5) et la définition (1.2) de l'énergie, on déduit que:

$$R\int_0^T\int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u\partial_j u\,d\Gamma dt \geq \delta\int_0^T E(t)\,dt \tag{2.6}$$

$$+\int_0^T\int_\Omega ((2-\delta)a_{ij} - m_k\partial_k a_{ij})\partial_i u\partial_j u\,dxdt$$

$$-\left|\left[\int_\Omega (2m_k\partial_k u + (n-\delta/2)u)u'\,dxdt\right]_0^T\right|.$$

On estime maintenant le dernier terme de (2.6). En appliquant la méthode de Komornik [45] on a:

$$\|2m_k\partial_k u + (n-\delta/2)u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|2m_k\partial_k u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega ((n-\delta/2)^2u^2 + 4(n-\delta/2)m_k\partial_k uu)\,dx$$

$$= \int_\Omega ((n-\delta/2)^2u^2 - 2(n-\delta/2)nu^2)\,dx + \int_\Gamma 2(n-\delta/2)m_k\nu_k u^2\,d\Gamma$$

$$= (\delta^2/4 - n^2)\int_\Omega u^2\,dx \leq 0.$$

(Remarquer qu'on a supposé que $\delta\ \in]0,2n]$.) En utilisant (1.7), grâce à l'inégalité de Young, on a:

$$\left|\int_\Omega (2m_k\partial_k u + (n-\delta/2)u)u'\,dx\right| \tag{2.7}$$

$$\leq \frac{1}{4\sqrt{\beta}}\int_\Omega (2m_k\partial_k u)^2 + \sqrt{\beta}\int_\Omega |u'|^2\,dx$$

$$\leq \sqrt{\beta}\int_\Omega (a_{ij}\partial_i u\partial_j u + |u'|^2)\,dx = 2\sqrt{\beta}E(t).$$

En substituant (2.7) dans (2.6), on voit donc que:

$$R\int_0^T\int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u\partial_j u\,d\Gamma dt \geq \delta\int_0^T E(t)\,dt - 2\sqrt{\beta}(E(0)+E(T)) \tag{2.8}$$

$$+\int_0^T\int_\Omega ((2-\delta)a_{ij}-m_k(\partial_k a_{ij}))\partial_i u\partial_j u\,dxdt.$$

On termine la preuve de l'inégalité inverse (l'inégalité de gauche) de (1.15) par distinguer trois cas.

Cas 1. Supposons satisfaite (H1) et $T>T_0$. On choisit $\delta=\gamma$, donc grâce à (1.6), le dernier terme de (2.8) est positif.

Supposons que $E(T)\geq E(0)$. D'après (2.1), on a

$$E(t)\geq \frac{1}{\lambda}((1-e^{-\lambda t})E(t))',\quad \forall t\geq 0.$$

Donc l'estimation (2.8) nous donne:

$$R\int_0^t\int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u\partial_j u\,d\Gamma dt$$

$$\geq \left(\frac{\gamma}{\lambda}(1-e^{-\lambda T})-4\sqrt{\beta}\right)E(T)\geq \left(\frac{\gamma}{\lambda}(1-e^{-\lambda T})-4\sqrt{\beta}\right)E(0)$$

d'où on obtient l'inégalité inverse de (1.15) avec $c_1=\frac{\gamma}{R\lambda}(1-e^{-\lambda T})-\frac{4}{R}\sqrt{\beta}$ qui est une constante positive, grâce a (1.10) et la définition de T_0 dans (H1).

Si $E(T)\leq E(0)$, alors en utilisant (2.2), on déduit de (2.8) que:

$$R\int_0^T\int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u\partial_j u\,d\Gamma dt\geq \gamma E(0)\int_0^T e^{-\lambda t}\,dt-4\sqrt{\beta}E(0)$$

$$\geq \left(\frac{\gamma}{\lambda}(1-e^{-\lambda T})-4\sqrt{\beta}\right)E(0),$$

d'où, on obtient l'inégalité inverse de (1.15) avec la même constante c_1 qu'auparavant.

Si $\lambda=0$, donc (1.3) et (1.8) impliquent que $E=\text{const}=E(0)$. Dans ce cas, (2.8) implique que:

$$R\int_0^T\int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u\partial_j u\,d\Gamma dt\geq (\gamma T-4\sqrt{\beta})E(0),$$

ce qui nous donne l'inégalité inverse de (1.15) avec $c_1=\frac{1}{R}(\gamma T-4\sqrt{\beta})$.

Cas 2. Supposons satisfaite (H2) et $T>T_0$. On choisit ici aussi $\delta=\gamma$, donc grâce à (1.6), le dernier terme de (2.8) est positif, et par suite d'après (2.4)

$$R\int_0^T\int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u\partial_j u\,d\Gamma dt\geq (\gamma e^{-\bar{\lambda}}T-2\sqrt{\beta}(1+e^{\bar{\lambda}}))E(0),$$

d'où on obtient l'inégalité inverse de (1.15).

De plus, si la propriété (1.12) est satisfaite, alors $E'(t) \leq 0$. Et par conséquent $E(t) \leq E(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Donc (2.8) devient (en utilisant aussi (2.4)):

$$R\int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt \geq \gamma T E(T) - 4\sqrt{\beta}E(0) \geq (\gamma T e^{-\bar{\lambda}} - 4\sqrt{\beta})E(0).$$

Si la propriété (1.13) est satisfaite, alors $E'(t) \geq 0$. Et par conséquent, $E(t) \geq E(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Donc, en utilisant (2.4), on conclut de (2.8) que:

$$R\int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt \geq (\gamma T - 2\sqrt{\beta}(1 + e^{\bar{\lambda}}))E(0).$$

Cas 3. Supposons satisfaite (H3) et $T > T_0$. On choisit dans ce cas $\delta = 2$, grâce à (1.14) et (2.4), on déduit de (2.8) que:

$$R\int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt \geq 2\int_0^T E(t)\, dt - 2\bar{\gamma} \sup_{t\in[0,T]} E(t) - 2\sqrt{\beta}(1 + e^{\bar{\lambda}})E(0)$$

$$\geq 2(Te^{-\bar{\lambda}} - \bar{\gamma}e^{\bar{\lambda}} - \sqrt{\beta}(1 + e^{\bar{\lambda}}))E(0).$$

De plus, si la propriété (1.12) est satisfaite, alors $E'(t) \leq 0$, et par conséquent $E(t) \leq E(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Donc (2.8) devient (en utilisant aussi (2.4)):

$$R\int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt \geq 2TE(T) - 2\bar{\gamma}E(0) - 4\sqrt{\beta}E(0)$$

$$\geq 2(Te^{-\bar{\lambda}} - \bar{\gamma} - 2\sqrt{\beta})E(0).$$

Si la propriété (1.13) est satisfaite, alors $E'(t) \geq 0$. Et par conséquent $E(t) \geq E(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Donc, en utilisant (2.4), on conclut de (2.8) que:

$$R\int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u \partial_j u \, d\Gamma dt \geq 2TE(0) - 2\bar{\gamma}E(T) - 2\sqrt{\beta}(1 + e^{\bar{\lambda}})E(0)$$

$$\geq 2(T - \bar{\gamma}e^{\bar{\lambda}} - \sqrt{\beta}(1 + e^{\bar{\lambda}}))E(0).$$

Grâce à la définition de T_0 dans (H1)-(H3), on obtient chaque fois l'inégalité inverse de (1.15) avec une constante positive c_1. Ceci termine donc la preuve de (1.15) pour les solutions fortes.

On montre à l'aide d'un argument de densité que (1.15) reste vraie pour toute solution faible u: soit $(u_0, u_1) \in V \times H$, et u la solution faible associée. Le sous-espace vectoriel $W \times V$ est dense dans l'espace d'énergie $V \times H$. On en déduit qu'il existe une suite $\{(u_0^n, u_1^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W \times V$ qui converge dans l'espace d'énergie vers (u_0, u_1). Soit u^n la solution forte du problème $(P2)$ associée à la donnée initiale (u_0^n, u_1^n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'énergie E_n de la solution u^n vérifie les estimations (1.15):

$$c_1 E_n(0) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} a_{ij}\partial_i u_n \partial_j u_n \, d\Gamma dt \leq c_2 E_n(0). \tag{2.9}$$

Or, par construction, la suite $\{(u_0^n, u_1^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie:

$$E_n(0) \sim \|(u_0^n, u_1^n)\|^2_{V\times H} \to \|(u_0, u_1)\|^2_{V\times H} \sim E(0) \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

où, E est l'énergie de la solution faible u. D'autre part, l'inégalité directe de (1.15) nous permet de définir la trace de $a_{ij}\partial_i u \partial_j u$ sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$ comme un élément de $L^2_{loc}(\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+)$, aussi pour toute solution faible. Ainsi, en passant à la limite en n dans (2.9), on obtient (1.15). La preuve de (1.15) est donc terminée.

On termine ce paragraphe par donner une formule équivalente à (1.15).

Lemme 2.2. *On suppose (1.0) et on pose*

$$\eta = \sum_{i,j} \|a_{ij}\|^2_{L^\infty(\Gamma\times\mathbb{R}^+)}.$$

Alors, chaque solution de $(P2)$ vérifie sur $\Gamma \times \mathbb{R}^+$ les inégalités suivantes:

$$\frac{c''}{c'}\alpha a_{ij}\partial_j u \partial_i u \leq |a_{ij}\partial_j u \nu_i|^2 \leq \frac{c'}{c''}\frac{\eta}{\alpha} a_{ij}\partial_j u \partial_i u \tag{2.10}$$

où, c' et c'' sont les deux constantes positives définies par (1.16).

Preuve. Il suffit de montrer (2.10) pour les solutions fortes où les calculs sont justifiés. Un argument de densité, exactement comme on a fait pour les estimations (1.15) nous permet de déduire le résultat pour les solutions faibles.

La preuve de la deuxième inégalité de (2.10) ne nécéssite pas la condition au bord dans $(P2)$:

$$|a_{ij}\partial_j u \nu_i| \leq \sum_i |a_{ij}\partial_j u|^2 \leq (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)(\sum_j |\partial_j u|^2) \leq \frac{\eta}{\alpha} a_{ij}\partial_j u \partial_i u.$$

Concernant la preuve de la première inégalité de (2.10), on remarque tout d'abord que la condition au bord dans $(P2)$ implique que:

$$a_{ij}\partial_j u \partial_i u = (a_{ij}\partial_j u \nu_i)\partial_\nu u \leq |a_{ij}\partial_j u \nu_i||\partial_\nu u|$$

$$\leq |a_{ij}\partial_j u\nu_i|(|\nabla u|^2)^{1/2} \leq |a_{ij}\partial_j u\nu_i| \left(\frac{1}{\alpha} a_{ij}\partial_j u\partial_i u\right)^{1/2},$$

donc

$$(\alpha a_{ij}\partial_j u\partial_i u)^{1/2} \leq |a_{ij}\partial_j u\nu_i|$$

d'où on trouve la première inégalité de (2.10).

3. Contrôlabilité: preuve du théorème 2

On commence par regarder le problème d'existence et d'unicité de la solution du problème non homogène $(P1)$. Multipliant la première équation de $(P1)$ par une solution arbitraire u du problème $(P2)$ et en intégrant par parties sur $\Omega \times [0, T]$, on a donc:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega u(y'' - \partial_i(a_{ij}\partial_j y))\, dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (u'' - \partial_i(a_{ij}\partial_j u)) y\, dxdt + \left[\int_\Omega (uy' - u'y)\, dx\right]_0^T$$

$$+ \int_0^T \int_\Gamma (-u a_{ij}\partial_j y\nu_i + y a_{ij}\partial_j u\nu_i)\, d\Gamma dt,$$

et par suite, en utilisant les conditions au bord dans $(P1)$ et $(P2)$,

$$\left[\int_\Omega (uy' - u'y)\, dx\right]_0^T = -\int_0^T \int_\Gamma v a_{ij}\partial_j u\nu_i\, d\Gamma dt.$$

Alors, posons

$$\mathcal{H} = V \times H, \quad \mathcal{H}' = H^{-1}(\Omega) \times H,$$

donc l'identité précédente peut-être donnée sous la forme

$$(3.1) \qquad \langle (y'(T), -y(T)), (u(T), u'(T))\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}}$$

$$= \langle (y_1, -y_0), (u_0, u_1)\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}} - \int_0^T \int_\Gamma v a_{ij}\partial_j u\nu_i\, d\Gamma dt.$$

ce qui nous amène à la définition suivante:

Définition. *Une solution y du problème $(P1)$ est une fonction continue telle que*

$$(y', -y) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{H}'$$

vérifie l'identité (3.1) pour tout $T \in \mathbb{R}^+$ et pour toute solution (faible) du problème $(P2)$

Cette définition est justifiée par le théorème suivant:

Théorème 3. *Supposons satisfaite (1.0). Alors pour toute donnée initiale*

$$(y_1, y_0) \in \mathcal{H}' \quad et \quad v \in L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+)$$

le problème non homogène $(P1)$ admet une solution unique

$$y \in C(\mathbb{R}^+; H) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\Omega)).$$

De plus, l'application linéaire $(y_0, y_1, v) \to y$ est continue pour les topologies correspondantes.

Preuve. D'après l'inégalité directe de (1.15) et la deuxième inégalité de (2.10), le membre de droite de (3.1) définit une forme linéaire bornée pour $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$. Donc l'application linéaire

$$(u_0, u_1) \to (u(T), u'(T))$$

est un automorphisme sur $\mathcal{H}$. D'autre part, le membre de gauche de (3.1) peut-être considéré comme une forme linéaire bornée pour $(u(T), u'(T)) \in \mathcal{H}$. Donc on déduit l'existence d'un élément unique $(y'(T), -y(T)) \in \mathcal{H}'$ vérifiant (3.1).

D'autre part, la forme linéaire bornée définie par le membre de droite de (3.1) est continue par rapport à $t \in \mathbb{R}^+$ et aussi par rapport au (y_0, y_1, v), donc l'application $(y_0, y_1, v) \to y$ est continue pour les topologies correspondantes et la solution $(y'(t), -y(t))$ est continue dans $\mathcal{H}'$, d'où la régularité requise pour y dans le théorème 3.

On montre maintenant le théorème 2. La preuve découle de la méthode (HUM). Premièrement on remarque que, par linéarité, il suffit de montrer qu'on peut ramener la solution $(y(t), y'(t))$ à l'état de repos (0,0) en temps T. En effet, une fois que (1.1) est prouvé pour $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_1 = 0$, il suffit de prendre $y = z + w$, où z est la solution du problème

$$\begin{cases} z'' - Az = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ z(T) = \tilde{y}_0 \quad \text{et} \quad z'(T) = \tilde{y}_1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

et w est la solution du problème

$$\begin{cases} w'' - Aw = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w = v & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w(0) = y_0 - z(0) \;\; \text{et} \;\; w'(0) = y_1 - z'(0) & \text{dans} \quad \Omega, \\ w(T) = 0 \;\; \text{et} \;\; w'(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

d'où $(P1)$ et (1.1).

L'idée de démonstration de (1.1) est de choisir le contrôle v sous la forme

$$v = \begin{cases} a_{ij}\partial_j u\nu_i & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,T[\\ 0 & \text{sur} \quad \Gamma\times\mathbb{R}^+ \setminus \Gamma_1\times]0,T[\end{cases} \tag{3.2}$$

où, u est la solution du problème $(P2)$ correspondant à une donnée initiale (u_0, u_1) à définir. Soit $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ arbitraire. On considère la solution z du problème rétrograde

$$(P3) \qquad \begin{cases} z'' - Az = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ z = v & \text{sur} \quad \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ z(T) = z'(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

où, v est le contrôle défini par (3.2). Grâce à (1.15) et (2.10), le contrôle v vérifie, pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, la régularité requise dans le théorème 1: $v \in L^2(\Gamma\times\mathbb{R}^+)$, donc notre problème $(P3)$ admet une solution unique (car c'est un problème réversible par rapport au temps)

$$z \in C(\mathbb{R}^+; H) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\Omega)).$$

On remplace y par z dans (3.1) et on note que

$$\Lambda(u_0, u_1) = (z'(0), -z(0)),$$

on obtient

$$\langle \Lambda(u_0, u_1), (u_0, u_1)\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}} = \int_0^T \int_{\Gamma_1} |a_{ij}\partial_j u\nu_i|^2 \, d\Gamma dt. \tag{3.3}$$

Il est clair que, d'après (1.15) et (2.10), $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ est une application linéaire bornée. Appliquant (HUM), il suffit de montrer que Λ est surjective. En effet, pour tout $(y_0, y_1) \in H \times H^{-1}(\Omega)$, il suffit de choisir le contrôle v défini par (3.2) où, u est la solution du problème $(P2)$ correspondante aux données initiales

$$(u_0, u_1) = \Lambda^{-1}(y_1, -y_0).$$

Par conséquent la solution z du problème $(P3)$ vérifie (par définition de Λ)

$$(z(0), z'(0)) = (y_0, y_1),$$

prenons donc dans $(P1)$ le contrôle v défini par (3.2). Comme la solution du problème $(P1)$ est unique, alors $z = y$. Donc, d'après $(P3)$, on déduit que $y(T) = y'(T) = 0$.

On montre alors que l'application Λ est surjective. En effet, Λ est un isomorphisme. Grâce à l'inégalité inverse de (1.15) et la première inégalité de (2.10), on déduit de (3.3) que Λ est coercif. Appliquant le théorème de Lax-Milgram, on conclut que Λ est un isomorphisme, ce qui termine la preuve du théorème 2.

CHAPITRE 2

OBSERVABILITÉ FRONTIÈRE ET CONTRÔLABILITÉ EXACTE DU SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉLASTICITÉ

1. Introduction et résultats principaux

En utilisant la méthode des multiplicateurs adaptée dans le ch. 1, on montre dans ce chapitre les inégalités d'observabilité frontière avec la condition au bord du type Dirichlet et la contrôlabilité exacte du système général d'élasticité avec des coefficients dépendants des variables de l'espace et du temps. Des résultats analogues ont été obtenus par Alabau et Komornik [5, 6] dans le cas des coefficients constants.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de frontière Γ de classe C^2 et

$$a_{ijkl} \in C^1(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$$

un ensemble de fonctions vérifiant les conditions de symétrie et coercivité suivante:

$$(1.0) \qquad a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \quad \text{et} \quad a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

pour un nombre $\alpha > 0$ fixé et pour tout tenseur symétrique ε_{ij}.

Dans tous les chapitres 2-7, et pour une fonction donnée $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ on utilise les notations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

où, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et $u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. En cas de nécéssité de précision, on note $\varepsilon_{ij}(u)$ et $\sigma_{ij}(u)$ au lieu de ε_{ij} et σ_{ij}. Puis l'on considère le système général d'élasticité avec la condition au bord du type Dirichlet non homogène suivant:

$$(P1) \qquad \begin{cases} y_i'' - \sigma_{ij,j}(y) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y_i = v_i & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ y_i(0) = y_i^0 \quad \text{et} \quad y_i'(0) = y_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

où, $v = (v_1, \cdots, v_n)$ est le contrôle cherché.

Notre objectif est de montrer que pour un temps suffisamment grand $T > 0$ et pour toutes données initiales (y^0, y^1) et $(\tilde{y}^0, \tilde{y}^1)$ dans un espace à définir, il existe un contrôle v tel que la solution y du système $(P1)$ vérifie la condition finale

$$y(T) = \tilde{y}^0 \quad \text{et} \quad y'(T) = \tilde{y}^1.$$

Comme notre système $(P1)$ est linéaire, il suffit de montrer qu'on peut ramener $(y(t), y'(t))$ à l'état de repos (0,0) en temps T (voir ch. 1, §3); c'est à dire

$$y(T) = 0 \quad \text{et} \quad y'(T) = 0. \tag{1.1}$$

On considère tout d'abord le système général d'élasticité avec la condition au bord du type Dirichlet homogène suivant:

$$(P2) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

Premièrement, on peut montrer exactement comme on l'a fait au ch. 1, que $(P2)$ est bien posé au sens standard. En effet, on introduit les trois espaces de Hilbert H, V et W définis par

$$H = (L^2(\Omega))^n, \quad \|v\|_H^2 = \int_\Omega v_i v_i \, dx,$$

$$V = (H_0^1(\Omega))^n, \quad \|v\|_V^2 = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v) \, dx,$$

l'inégalité de Korn nous assure que $\|\cdot\|_V$ définit une norme sur V équivalente à la norme usuelle, et

$$W = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n, \quad \|v\|_W^2 = \int_\Omega (\Delta v_i \Delta v_i + \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)) \, dx$$

et on écrit $(P2)$ comme étant un système d'évolution d'ordre un dans l'espace de Hilbert $V \times H$ pour le vecteur $U(t) = (u(t), u'(t))$:

$$\begin{cases} U'(t) - \mathcal{A}(t)U(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = (u^0, u^1) \end{cases}$$

où, $\mathcal{A}(t)U(t) = (u'(t), A(t)u(t))$ et A est l'opérateur linéaire défini par

$$A(t)u(t) = (A_1(t)u(t), \cdots, A_n(t)u(t)) = (\sigma_{1j,j}, \cdots, \sigma_{nj,j}).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, l'opérateur linéaire $\mathcal{A}(t)$ engendre un semi-groupe continu de contraction sur $V \times H$ et son domaine de définition

$$D(\mathcal{A}(t)) = W \times V$$

(voir Lagnese [49]). D'autre part, pour tout $U \in W \times V$, l'application

$$h : t \to \mathcal{A}(t)U$$

de $\mathbb{R}^+$ dans $V \times H$ est continûment différentiable. En effet, pour tout $U = (u, z) \in W \times V$ et t_1, $t_2 \in \mathbb{R}^+$, on a (comme au ch. 1, §1)

$$\begin{aligned}
\|h(t_1) - h(t_2)\|_{V\times H} &= \|\mathcal{A}(t_1)U - \mathcal{A}(t_2)U\|_{V\times H} = \|A(t_1)u - A(t_2)u\|_H \\
&= \|(a_{ijkl}(t_1) - a_{ijkl}(t_2))\partial_j(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}) - \partial_j(a_{ijkl}(t_1) - a_{ijkl}(t_2))\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\|_H \\
&\leq c\left(\sum_{i,j}\|a_{ijkl}(t_1) - a_{ijkl}(t_2)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)\|u\|_W \\
&\leq c\left(\sum_{i,j}\|a_{ijkl}(t_1) - a_{ijkl}(t_2)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)\|U\|_{W\times V}
\end{aligned}$$

où, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ et c est une constante positive dépendante seulement de Ω. Grâce à la régularité supposée sur a_{ijkl}, on déduit de l'inégalité précédente que h est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée h' est définie comme h où on remplace les a_{ijkl} par les a'_{ijkl}. Donc, notre problème $(P2)$ est bien posé au sens suivant (voir Pazy [67, Ch. 5]):

1. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in V \times H$, le problème $(P2)$ admet une unique solution faible

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H).$$

De plus, l'énergie de u, définit par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u'_i u'_i + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.2}$$

est une fonction positive vérifiant l'identité (remarquer aussi que, grâce à (1.0), $E(t) \sim \|(u, u')\|^2_{V\times H}$)

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega a'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.3}$$

2. De plus, si $(u^0, u^1) \in W \times V$, alors la solution u (dite solution forte) du problème $(P2)$ a la régularité suivante:

$$u \in C(\mathbb{R}^+; W) \cap C^1(\mathbb{R}^+; V) \cap C^2(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.4}$$

Remarque. Pour montrer l'identité (1.3), on multiplie la première équation dans $(P2)$ par u_i' et on intégre par parties sur Ω. Cette formule jouera un rôle important dans la suite.

Fixons un point $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et posons $m(x) = x - x^0$, $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$. Soient $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que

$$\forall x \in \Gamma_0 : \ m(x) \cdot \nu(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0 \tag{1.5}$$

où, ν est le vecteur unitaire normal extérieur à Γ. (On peut toujours choisir $\Gamma_0 = \emptyset$ et $\Gamma_1 = \Gamma$).

Remarque. Comme un exemple sur l'existence d'un tel x^0, on peut prendre $\Omega = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_0$, $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$ et $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ où, Ω_0 et Ω_1 sont deux domaines étoilés par rapport à x^0 tels que $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$.

On suppose que les coefficients a_{ijkl} vérifient l'une des hypothèses suivantes:

(H1) Il existe $\gamma > 0$ et $\lambda \geq 0$ deux constantes telles que

$$(2a_{ijkl} - m_p\partial_p a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \gamma a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.6}$$

et

$$|a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}| \leq \lambda a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.7}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. On suppose que

$$\gamma \leq 2n \tag{1.8}$$

et

$$\frac{4\lambda}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R < 1. \tag{1.9}$$

On pose $T_0 = -\frac{1}{\lambda}\log\left(1 - \frac{4\lambda}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R\right)$. Si $\lambda = 0$, alors on pose $T_0 = \frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R$.

(H2) On suppose que les conditions (1.6) et (1.8) sont satisfaites et qu'il existe une fonction $\lambda \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$|a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}| \leq \lambda(t) a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.10}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. On pose $T_0 = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R(1 + e^{\bar{\lambda}})e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\lambda} = \int_0^\infty \lambda(t)\,dt$.

Si de plus on a

$$a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.11}$$

ou

$$a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.12}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}, alors on pose $T_0 = \frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}Re^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.11), et $T_0 = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R(1+e^{\bar{\lambda}})$ si on a (1.12), respectivement.

(H3) Supposons (1.10) et qu'il existe une fonction γ avec $|\gamma| \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$m_p\partial_p a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq \gamma(t)a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{1.13}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. On pose $T_0 = (\bar{\gamma}e^{\bar{\lambda}} + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R(1+e^{\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ où, $\bar{\gamma} = \int_0^\infty |\gamma(t)|\,dt$.

Si de plus, on a (1.11) ou (1.12), alors on pose, respectivement, $T_0 = (\bar{\gamma} + 2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R)e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.11), et $T_0 = (\bar{\gamma} + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R(1+e^{-\bar{\lambda}}))e^{\bar{\lambda}}$ si on a (1.12). On montre alors les inégalités d'observabilité suivantes:

Théorème 1. *On suppose que (1.0), (1.5) et l'une des hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites et soit $T > T_0$. Alors il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour toute solution u du système $(P2)$, l'énergie de la solution u définie par (1.2) vérifie les estimations:*

$$\frac{c''}{c'}c_1E(0) \leq \int_0^T\int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Gamma dt \leq \frac{c'}{c''}c_2E(0) \tag{1.14}$$

où, c' et c'' sont définies comme dans (1.16), ch. 1.

Remarques. 1. Dû à la propriété de propagation finie du système d'élasticité, l'inégalité inverse de (1.14) n'est pas satisfaite pour un temps $T > 0$ arbitrairement petit. Si $(P2)$ est isotropique, c'est à dire

$$a_{ijkl} = \lambda_0\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_0(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

(donc $\lambda = 0$ et $\gamma = 2$) où, λ_0 et μ_0 sont les deux constantes positives de Lamé, alors $T_0 = 2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,R$ est optimal (voir [39]). La question reste ouverte pour le cas général.

2. Le théorème 1 montre que si deux solutions de $(P2)$ coïncident sur Γ_1 pour un temps suffisamment grand T, alors elles sont identiques; il suffit d'appliquer l'inégalité inverse de (1.14) sur leur différence qui est aussi une solution de $(P2)$, d'où on obtient que l'énergie initiale de leur différence est égale à zéro, et comme la solution de $(P2)$ est unique, alors ces deux solutions sont identiques.

En appliquant la méthode HUM, on montre que le système $(P1)$ est exactement contrôlable.

Théorème 2. *Sous les hypothèses du théorème 1 on a: pour toute donnée initiale* $(y^0, y^1) \in (L^2(\Omega))^n \times (H^{-1}(\Omega))^n$, *il existe un contrôle*

$$v \in (L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+))^n$$

tel que la solution y *du système* $(P1)$ *vérifie (1.1).*

Remarque. Dans la démonstration du théorème 1, on va voir qu'on peut supposer que le contrôle v est nul à l'extérieur de $\Gamma_1 \times]0, T[$.

2. Observabilité: preuve du théorème 1

Il suffit de prouver les estimations (1.14) pour les solutions fortes: on déduit alors le résultat pour les solutions faibles à l'aide d'un argument de densité (voir ch.1, §2). On supposera donc que u est une solution forte de $(P2)$, la régularité de u donnée par (1.4) permet alors de justifier tous les calculs. Dans la preuve du théorème 1, on suivra la même démarche que dans la preuve du théorème 1 du ch. 1.

On commence par montrer le lemme suivant:

Lemme 2.1. *On a:*

$$-\lambda E(t) \leq E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+; \tag{2.1}$$

$$e^{-\lambda t} E(0) \leq E(t) \leq e^{\lambda t} E(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

si (1.7) est satisfaite, et

$$-\lambda(t) E(t) \leq E'(t) \leq \lambda(t) E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+; \tag{2.3}$$

$$e^{-\bar{\lambda}} E(0) \leq E(t) \leq e^{\bar{\lambda}} E(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

si (1.10) est satisfaite.

Preuve. D'après (1.2) et (1.3) on a (2.1) et (2.3). Par le lemme de Gronwall, on déduit (2.2) et (2.4) de (2.1) et (2.3), respectivement.

Montrons maintenant (1.14). Soient $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$ et $T > 0$. D'après $(P2)$ on a

$$0 = \int_0^T \int_\Omega (h_m u_{i,m})(u_i'' - \sigma_{ij,j})\, dx dt$$

$$= \left[\int_\Omega h_m u_{i,m} u_i' \, dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Gamma h_m u_{i,m} \sigma_{ij} \nu_j \, d\Gamma dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (h_{m,j} \sigma_{ij} u_{i,m} + h_m \sigma_{ij} u_{i,jm} - \frac{1}{2} h_m (u_i' u_i')_m) \, dx dt.$$

Or (par la symétrie de a_{ijkl})

$$\sigma_{ij} u_{i,jm} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,m} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})_m - \frac{1}{2}(\partial_m a_{ijkl}) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij},$$

on intègre les deux derniers termes de l'identité précédente et on multiplie par 2, on trouve:

$$\int_0^T \int_\Gamma (2 h_m u_{i,m} \sigma_{ij} \nu_j + (h \cdot \nu)(u_i' u_i' - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij})) \, d\Gamma dt \tag{2.5}$$

$$= \left[\int_\Omega 2 h_m u_{i,m} u_i' \, dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega h_m (\partial_m a_{ijkl}) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \, dx dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (2 h_{m,j} \sigma_{ij} u_{i,m} + (\mathrm{div} h)(u_i' u_i' - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij})) \, dx dt.$$

Remarquer qu'on n'a pas utilisé la condition au bord de $(P2)$ dans la preuve de l'identité (2.5).

Il est clair que, d'après l'estimation (2.2) ou (2.4) et les hypothèses $h_m \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$, le second membre de (2.5) est majoré par $c_2 E(0)$ avec une constante positive c_2 dépendante de T. D'autre part, en utilisant la condition au bord dans $(P2)$,

$$u_i' = 0 \quad \text{et} \quad u_{i,m} \nu_j = u_{i,\nu} \nu_m \nu_j = u_{i,j} \nu_m \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

et par suite

$$h_m u_{i,m} \sigma_{ij} \nu_j = (h \cdot \nu) \sigma_{ij} u_{i,j} = (h \cdot \nu) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Donc le premier membre de (2.5) se réduit à

$$\int_0^T \int_\Gamma (h \cdot \nu) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, d\Gamma dt.$$

En choisissant la fonction h telle que $h = \nu$ sur Γ, on déduit l'inégalité directe de (1.14).

On choisit maintenant $h(x) = m(x)$, l'identité (2.5) devient:

$$\int_0^T \int_\Gamma (h \cdot \nu) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, d\Gamma dt = \left[\int_\Omega 2 h_m u_{i,m} u_i' \, dx\right]_0^T$$

$$+\int_0^T\int_\Omega((2-n)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+nu_i'u_i')\,dxdt-\int_0^T\int_\Omega h_m(\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dxdt.$$

D'autre part, on a aussi d'après $(P2)$

$$0=\int_0^T\int_\Omega u_i(u_i''-\sigma_{ij,j})\,dxdt$$

$$=\left[\int_\Omega u_iu_i'\,dx\right]_0^T-\int_0^T\int_\Gamma u_i\sigma_{ij}\nu_j\,d\Gamma dt+\int_0^T\int_\Omega(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i'u_i')\,dxdt$$

$$=\left[\int_\Omega u_iu_i'\,dx\right]_0^T+\int_0^T\int_\Omega(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i'u_i')\,dxdt.$$

On multiplie cette égalité par $n-\delta/2$ où, $0<\delta\leq 2n$ et on combine avec la précédente, on obtient:

$$\int_0^T\int_\Gamma(h\cdot\nu)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Gamma dt$$

$$=\left[\int_\Omega(2h_mu_{i,m}+(n-\delta/2)u_i)u_i'\,dx\right]_0^T-\int_0^T\int_\Omega h_m(\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega((2-\delta/2)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+\delta/2\,u_i'u_i')\,dxdt.$$

En utilisant (1.5) et la définition (1.2) de l'énergie, on déduit de la dernière égalité que

$$R\int_0^T\int_{\Gamma_1}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Gamma dt\geq\int_0^T\int_\Omega((2-\delta)a_{ijkl}-h_m\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dxdt \tag{2.6}$$

$$+\delta\int_0^T E(t)\,dt-\left|\left[\int_\Omega(2h_mu_{i,m}+(n-\delta/2)u_i)u_i'\,dxdt\right]_0^T\right|.$$

Majorons le dernier terme de (2.6). Comme au ch. 1, on a pour tout $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,

$$\|2h_mu_{i,m}+(n-\delta/2)u_i\|^2_{L^2(\Omega)}-\|2h_mu_{i,m}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$=\int_\Omega((n-\delta/2)^2u_i^2+4(n-\delta/2)h_mu_{i,m}u_i)\,dx$$

$$=\int_\Omega((n-\delta/2)^2u_i^2-2(n-\delta/2)nu_i^2)\,dx+\int_\Gamma 2(n-\delta/2)h_m\nu_mu_i^2\,d\Gamma$$

$$= (\delta^2/4 - n^2) \int_\Omega u_i^2 \, dx \le 0.$$

Et par suite, en fixant $\epsilon > 0$ et en utilisant l'inégalité de Young, on a:

$$\left| \int_\Omega (2h_m u_{i,m} + (n - \frac{\delta}{2}) u_i) u_i' \, dx \right| \tag{2.7}$$

$$\le 2R \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_\Omega |\nabla u_i|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega (u_i')^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le R\epsilon \int_\Omega u_{i,m} u_{i,m} \, dx + R\epsilon^{-1} \int_\Omega u_i' u_i' \, dx.$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green et la condition au bord dans $(P2)$, on trouve (comme dans [6])

$$\int_\Omega u_{i,m} u_{i,m} \, dx = \int_\Omega 2\varepsilon_{im} u_{i,m} \, dx - \int_\Omega u_{m,i} u_{i,m} \, dx$$

$$= \int_\Omega (2\varepsilon_{im}\varepsilon_{im} - u_{m,m} u_{i,i} \, dx,$$

et par conséquent

$$\int_\Omega 2\varepsilon_{im}\varepsilon_{im} \, dx = \int_\Omega u_{i,m} u_{i,m} \, dx + \int_\Omega (\mathrm{div} u)^2 \, dx. \tag{2.8}$$

Donc, d'après (1.0) et (2.8), on a

$$\int_\Omega u_{i,m} u_{i,m} \, dx \le \frac{2}{\alpha} \int_\Omega \sigma_{im}\varepsilon_{im} \, dx.$$

En substituant cette inégalité dans (2.7) et en choisissant $\epsilon = \sqrt{\alpha/2}$, on obtient:

$$\left| \int_\Omega (2h_m u_{i,m} + (n - \delta/2) u_i) u_i' \, dx \right| \le 2\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \, RE(t).$$

Donc, on conclut de l'inégalité (2.6) que

$$R \int_0^T \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \, d\Gamma dt \ge \delta \int_0^T E(t) \, dt - 2\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \, R(E(0) + E(T)) \tag{2.9}$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega ((2-\delta) a_{ijkl} - h_m \partial_m a_{ijkl}) \varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} \, dx dt.$$

L'inégalité (2.9) est similaire à l'inégalité (2.8) du ch. 1, et la preuve se termine de la même façon en utilisant le lemme (2.1) et les hypothèses (H1)-(H3).

On montre ici une formule équivalente à (1.14).

Lemme 2.2. *Supposons (1.0) et posons*

$$\beta = \sum_{i,j,k,l} \|a_{ijkl}\|^2_{L^\infty(\Gamma\times\mathbb{R}^+)}.$$

Alors toute solution de $(P2)$ *vérifie sur* $\Gamma\times\mathbb{R}^+$ *les deux estimations suivantes:*

$$\frac{c''}{c'}\frac{\alpha}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n} |\sigma_{ij}\nu_j|^2 \leq \frac{c'}{c''}\frac{\beta}{\alpha}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{2.10}$$

où, c' *et* c'' *sont définies comme dans (1.16), ch.1.*

Remarque. Dans le cas où a_{ijkl}=const, la formule (2.10) a été démontrée dans [6].

On montre (2.10) seulement pour les solutions fortes, la preuve reste vraie pour les solutions faibles en utilisant un argument de densité (voir ch. 1, §2).

Preuve. On a:

$$\sum_i |\sigma_{ij}\nu_j|^2 \leq \sum_{i,j} |\sigma_{ij}|^2 = \sum_{i,j} |a_{ijkl}\varepsilon_{kl}|^2$$

$$\leq \sum_{i,j}\left(\sum_{k,l} \|a_{ijkl}\|^2_{L^\infty(\Gamma\times\mathbb{R}^+)} \sum_{k,l} |\varepsilon_{kl}|^2\right) = \beta\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl} \leq \frac{\beta}{\alpha}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

d'où la deuxième inégalité de (2.10).

En utilisant la condition au bord dans $(P2)$, on trouve:

$$u_{i,j}u_{i,j} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(u_{i,j}+u_{j,i})^2 - u_{i,j}u_{j,i}$$

$$= 2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - u_{i,\nu}\nu_j u_{j,\nu}\nu_i = 2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - u_{i,i}u_{j,i},$$

et par conséquent

$$u_{i,j}u_{i,j} = 2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - (\operatorname{div} u)^2 \leq 2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Grâce à cette inégalité, on obtient:

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}u_{i,j} = \sigma_{ij}\nu_j u_{i,\nu} \leq \left(\sum_i |\sigma_{ij}\nu_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} (u_{i,\nu}, u_{i,\nu})^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_i |\sigma_{ij}\nu_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} (2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_i |\sigma_{ij}\nu_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} (2\alpha^{-1}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})^{\frac{1}{2}}$$

d'où la première inégalité de (2.10).

3. Contrôlabilité: preuve du théorème 2

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème non homogène $(P1)$, on applique la méthode utilisée dans le ch. 1, §3: multipliant la première équation de $(P1)$ par une solution arbitraire du problème $(P2)$, en intégrant par parties sur $\Omega \times [0, T]$ et en utilisant les conditions au bord dans $(P1)$ et $(P2)$, on obtient:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega u_i(y_i'' - \sigma_{ij,j}(y))\, dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (u_i'' - \sigma_{ij,j}(u))y_i\, dxdt + \left[\int_\Omega (u_i y_i' - u_i' y_i)\, dx\right]_0^T$$

$$+ \int_0^T \int_\Gamma (-u_i\sigma_{ij}(y)\nu_j + \sigma_{ij}(u)\nu_j y_i)\, d\Gamma dt$$

$$= \left[\int_\Omega (u_i y_i' - u_i' y_i)\, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)\nu_j v_i\, d\Gamma dt.$$

Donc, posant

$$\mathcal{H}' = (H^{-1}(\Omega))^n \times H, \quad \mathcal{H} = V \times H$$

pour simplifier, on a:

$$(3.1) \qquad \langle (y'(T), -y(T)), (u(T), u'(T))\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}}$$

$$= \langle (y_{i1}, -y_{i0}), (u_{i0}, u_{i1})\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}} - \int_0^T \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)\nu_j v_i\, d\Gamma dt.$$

Le problème $(P1)$ est bien posé au sens suivant:

Théorème 3. *Supposons que la condition (1.0) est satisfaite. Alors, pour toute donnée initiale*

$$(y^1, y^0) \in \mathcal{H}' \quad et \quad v \in (L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^+))^n$$

le problème non homogène $(P1)$ admet une solution unique

$$y \in C(\mathbb{R}^+; H) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (H^{-1}(\Omega))^n).$$

De plus, l'application linéaire $(y^0, y^1, v) \to y$ est continue pour les topologies correspondantes.

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 3 du ch. 1, §3.

La grande partie de la preuve du théorème 1 est déjà faite en montrant (1.14) et (2.10); il nous reste maintenant à appliquer la méthode HUM pour déduire (1.1). On prend le contrôle $v = (v_1, \cdots, v_n)$ sous la forme

$$v_i = \begin{cases} \sigma_{ij}(u)\nu_j & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]0, T[\\ 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \setminus \Gamma_1 \times]0, T[\end{cases} \tag{3.2}$$

où, u est la solution du problème $(P2)$ correspondante à une donnée initiale (u^0, u^1) à définir. Soit $(u^0, u^1) \in \mathcal{H}$ arbitraire et u est la solution de $(P2)$ correspondante à (u^0, u^1). On définit le contrôle v par (3.2) (remarquer que, grâce à (1.14) et (2.10), le contrôle v a la régularité requise dans le théorème 1) et on considère la solution z du problème rétrograde

$$\begin{cases} z_i'' - \sigma_{ij,j}(z) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ z_i = v_i & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ z_i(T) = z_i'(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{$P3$}$$

(ce problème est réversible par rapport au temps, donc il est bien posé comme le problème $(P1)$). Notons

$$\Lambda(u^0, u^1) = (z'(0), -z(0)).$$

Appliquant HUM, il suffit de montrer que $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ est surjective (voir ch. 1, §3). On remplace y par z dans (3.1), on trouve:

$$\langle \Lambda(u^0, u^1), (u^0, u^1) \rangle_{\mathcal{H}', \mathcal{H}} = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \sum_i |\sigma_{ij}(u)\nu_j|^2 \, d\Gamma dt. \tag{3.3}$$

Grâce à l'inégalité inverse de (1.14) et la première inégalité de (2.10), on déduit de (3.3) que Λ est coercif. Appliquant le théorème de Lax-Milgram, on conclut que Λ est un isomorphisme.

CHAPITRE 3

STABILISATION FRONTIÈRE LINÉAIRE DU SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉLASTICITÉ

1. Introduction et résultat principal

On considère dans ce chapitre le système d'élasticité suivant:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}\nu_j + au_i + bu_i' = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

où, Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de frontière Γ de classe C^2, a_{ijkl}, $i, j, k, l = 1, \cdots, n$ est un ensemble de fonctions de

$$C^1(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$$

et $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est une partition de la frontière Γ telle que les conditions (1.0) et (1.5) du ch. 2 soient satisfaites. Ici, $b > 0$, $a > 0$ sont deux constantes fixées. On étudie le comportement asymptotique de l'énergie de la solution du système (P), définie par

$$(1.1) \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i'u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au_iu_i\,d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

quand $t \to \infty$.

Dans le cas $a_{ijkl} = \text{const}$, Alabau et Komornik [5, 6] ont montré, sous certaines hypothèses géométriques, que le système (P) est uniformément stable. Notre objectif est d'atteindre ce résultat au cas des coefficients variables en précisant le taux de décroissance de l'énergie. La démonstration est basée sur la méthode des multiplicateurs et sur deux identités nouvelles cruciales obtenues dans [5, 6].

Premièrement on peut montrer, exactement comme on a fait pour le système $(P2)$ du ch. 2, que le problème (P) est bien posé: on écrit (P) comme étant le système dévolution d'ordre 1 dans l'espace de Hilbert $V\times H = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$, muni par la norme usuelle de $(H^1(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$, pour le vecteur $U(t) = (u(t), u'(t))$:

$$\begin{cases} U'(t) - \mathcal{A}(t)U(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = (u^0, u^1) \end{cases}$$

où, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \ \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$, $\mathcal{A}(t)U(t) = (u'(t), A(t)u(t))$ et A est l'opérateur linéaire défini par

$$A(t)u(t) = (A_1(t)u(t), \cdots, A_n(t)u(t)) = (\sigma_{1j,j}, \cdots, \sigma_{nj,j})$$

avec

$$D(\mathcal{A}(t)) =$$

$$\{(u,z) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n : \ \sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i + bz_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Il est clair que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $D(\mathcal{A}(t))$ est dense dans $V \times H$ (il suffit de remarquer que $D(\mathcal{A}(t))$ contient $(H^2_0(\Omega))^n \times (H^1_0(\Omega))^n$. Donc, en appliquant un résultat de Pazy [67, Ch. 5], on obtient que notre problème (P) est bien posé au sens suivant:

1. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in V \times H$, le problème (P) admet une unique solution faible

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H).$$

2. De plus, si $(u^0, u^1) \in (H^2_0(\Omega))^n \cap (H^1_0(\Omega))^n$, alors la solution u (dite solution forte) du problème (P) est plus régulière:

$$u \in C(\mathbb{R}^+; (H^2_0(\Omega))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (H^1_0(\Omega))^n) \cap C^2(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.2}$$

Sous certaines hypothèses sur la constante a et la partie Γ_1 du bord, on va montrer que les solutions de (P) tendent vers zéro uniformément, avec une estimation précise du taux de décroissance.

On suppose satisfaite les hypothèses suivantes:

$$a'_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{1.3}$$

il existe une constante $\gamma > 0$ (et γ assez petite s'il existe i, j, k, l tels que $a'_{ijkl} \neq 0$) telle que

$$(2a_{ijkl} - m_p\partial_p a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \gamma a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.4}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij},

$$a < \frac{\gamma\alpha}{4R} \tag{1.5}$$

et

$$\forall x \in \Gamma_1 : \quad |x - x^0| = R, \tag{1.6}$$

alors on a le résultat de stabilisation uniforme suivant:

Théorème 1. *Il existe deux constantes $\omega, M > 0$ telles que pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$, l'énergie définie par (1.1) vérifie*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.7}$$

Remarques. 1. La condition (1.3) nous garantit la dissipativité de (P) (voir lemme 2.1).

2. Si la mesure de Γ_0 est strictement positive, alors on peut prendre $a = 0$ et le résultat (1.7) reste vrai car, grâce au théorème de trace, on a encore $E(t) \sim \|(u(t), u'(t))\|^2_{(H^1(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n}$.

3. Le théorème 1 reste vrai si on remplace la condition au bord sur Γ_1 par la suivante:

$$\sigma_{ij}\nu_j + a_i(x)u_i + b_i(x)u_i' = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

où, les a_i et les b_i sont des fonctions positives dans $C^1(\bar{\Gamma}_1)$ telles que

$$\max_i \{\|a_i\|_{L^\infty(\Omega)}\} < \frac{\gamma\alpha}{4R}.$$

4. Dans le cas où a_{ijkl} =const ($\gamma = 2$), la condition (1.5) devient $a < \frac{\alpha}{2R}$ qui est une condition plus faible que celle supposée dans [5]: $a < \frac{\alpha}{4R}$. La condition (1.5) sera éliminée dans le chapitre suivant.

2. Stabilisation uniforme: preuve du théorème 1

On commencera par prouver l'estimation (1.7) pour des données initiales régulières, c'est à dire $(u^0, u^1) \in (H^2_0(\Omega))^n \times (H^1_0(\Omega))^n$ et, comme les constantes ω et M sont indépendantes de $E(0)$, on conclura avec un argument de densité. Lorsqu'on considère des données initiales régulières, la validité des calculs est acquise à l'aide de la régularité de la solution u donnée par (1.2).

Pour montrer l'estimation (1.7), il suffit de montrer que l'énergie E vérifie (voir [42, theorem 8.1])

$$\int_0^\infty E(t)\,dt \le \frac{1}{\omega}E(0). \tag{2.1}$$

Premièrement, on montre la dissipativité de (P).

Lemme 2.1. *L'énergie $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante vérifiant*

$$E(0) - E(T) \tag{2.2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega a'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} bu'_iu'_i\,d\Gamma dt, \quad 0 \le T < \infty.$$

Preuve. En dérivant l'énergie E définie par (1.1) et en utilisant les conditions au bord dans (P), on a:

$$E' = \int_\Omega (u'_iu''_i + \sigma_{ij}\varepsilon'_{ij} + \frac{1}{2}a'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij})\,dx + \int_{\Gamma_1} au_iu'_i\,d\Gamma$$

$$= \int_\Omega (u'_i\sigma_{ij,j} + \sigma_{ij}u'_{i,j})\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dx + \int_{\Gamma_1} au_iu'_i\,d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_1} u'_i\sigma_{ij}\nu_j\,d\Gamma + \frac{1}{2}\int_\Omega a'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dx + \int_{\Gamma_1} au_iu'_i\,d\Gamma$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega a'_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dx - \int_{\Gamma_1} bu'_iu'_i\,d\Gamma \le 0;$$

d'où E est décroissante (voir (1.3)). Intégrant entre 0 et T on trouve (2.2).

Soient (u^0, u^1) une donnée initiale régulière, u la solution de (P) et $0 < T < \infty$, on a:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega u_i(u''_i - \sigma_{ij,j})\,dxdt$$

$$= \left[\int_\Omega u_iu'_i\,dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Gamma u_i\sigma_{ij}\nu_j\,d\Gamma dt + \int_0^T \int_\Omega (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - u'_iu'_i)\,dxdt,$$

et par suite

$$\int_0^T \int_\Gamma u_i\sigma_{ij}\nu_j\,d\Gamma dt = \left[\int_\Omega u_iu'_i\,dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - u'_iu'_i)\,dxdt. \tag{2.3}$$

Multipliant (2.3) par $n - \frac{\gamma}{2} + \frac{2aR}{\alpha}$ et combinant avec l'identité (2.5) du ch. 2 avec $h(x) = x - x^0$, posons

$$M_i = 2(x_m - x_m^0)u_{i,m} + \left(n - \frac{\gamma}{2} + \frac{2aR}{\alpha}\right)u_i$$

pour simplifier, on obtient:

$$\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{2aR}{\alpha}\right)\int_0^T\int_\Omega(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i'u_i')\,dxdt+\left[\int_\Omega M_iu_i'\,dx\right]_0^T$$

$$=\int_0^T\int_\Gamma(M_i\sigma_{ij}\nu_j+(h\cdot\nu)(u_i'u_i'-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}))\,d\Gamma dt-\frac{4aR}{\alpha}\int_0^T\int_\Omega\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega(x_m-x_m^0)(\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,dxdt+(\gamma-2)\int_0^T\int_\Omega\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dxdt,$$

d'après (1.4), la dernière partie de cette égalité est négative; en utilisant la définition de l'énergie, on peut réécrire cette égalité sous la forme suivante:

$$\left(\gamma-\frac{4aR}{\alpha}\right)\int_0^T E(t)\,dt+\left[\int_\Omega M_iu_i'\,dx\right]_0^T$$

$$\leq\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{2aR}{\alpha}\right)\int_0^T\int_{\Gamma_1}au_iu_i\,d\Gamma dx-\frac{4aR}{\alpha}\int_0^T\int_\Omega\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_\Gamma(M_i\sigma_{ij}\nu_j+(h\cdot\nu)(u_i'u_i'-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}))\,d\Gamma dt.$$

Maintenant, on utilise les conditions au bord dans (P), on obtient:

$$\left(\gamma-\frac{4aR}{\alpha}\right)\int_0^T E(t)\,dt+\left[\int_\Omega M_iu_i'\,dx\right]_0^T \tag{2.4}$$

$$\leq\int_0^T\int_{\Gamma_0}(h\cdot\nu)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Gamma dt-\frac{4aR}{\alpha}\int_0^t\int_\Omega\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Gamma dt$$

$$+\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left(\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{2aR}{\alpha}\right)au_iu_i-M_i(au_i+bu_i')+(h\cdot\nu)(u_i'u_i'-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\right)\,d\Gamma dt.$$

(Le terme sur Γ_0 est obtenu comme dans la démonstration du théorème 1, ch. 2).

Maintenant, on transforme l'intégrale sur Γ_1. Comme dans [6], appliquant la formule de Green deux fois et utilisant la condition au bord sur Γ_0, on obtient:

$$\int_\Omega u_{m,i}u_{i,m}\,dx=\int_\Gamma(u_{m,i}u_i\nu_m-u_{m,m}u_i\nu_i)\,d\Gamma+\int_\Omega u_{m,m}u_{i,i}\,dx$$

$$=\int_{\Gamma_1}(2\varepsilon_{mi}u_i\nu_m-u_{i,m}u_i\nu_m-\varepsilon_{mm}u_i\nu_i)\,d\Gamma+\int_\Omega\varepsilon_{mm}\varepsilon_{ii}\,dx.$$

D'autre part,

$$\int_\Omega u_{m,i}u_{i,m}\,dx = \int_\Omega (2\varepsilon_{mi}u_{i,m} - u_{i,m}u_{i,m})\,dx = \int_\Omega (2\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - u_{i,m}u_{i,m})\,dx$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad & \int_\Omega (2\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - u_{i,m}u_{i,m} - \varepsilon_{mm}\varepsilon_{ii})\,dx \\ &= \int_{\Gamma_1} (2\varepsilon_{mi}u_i\nu_m - u_{i,m}u_i\nu_m - \varepsilon_{mm}\nu_i u_i)\,d\Gamma.\end{aligned}$$

On multiplie (2.5) par $2aR$ et on utilise la relation $h = R\nu$ sur Γ_1 on déduit l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}(2.6)\qquad & \int_0^T \int_{\Gamma_1} (-2ah_m u_{i,m}u_i)\,d\Gamma dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (4aR\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - 2aRu_{i,m}u_{i,m} - 2aR(\operatorname{div} u)^2)\,dxdt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (2aR(\operatorname{div} u)(\nu\cdot u) - 4aR\varepsilon_{mi}u_i\nu_m)\,d\Gamma dt.\end{aligned}$$

Par la même manière on a:

$$\begin{aligned}& \int_0^T \int_\Omega u_{m,i}u'_{i,m}\,dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Gamma (u_{m,i}u'_i\nu_m - u_{m,m}\nu_i u'_i)\,d\Gamma dt + \int_0^T \int_\Omega u_{m,m}u'_{i,i}\,dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} (2\varepsilon_{mi}u'_i\nu_m - u_{i,m}u'_i\nu_m - \varepsilon_{mm}\nu_i u'_i)\,d\Gamma dt + \left[\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)^2\,dx\right]_0^T.\end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega u_{m,i}u'_{i,m}\,dxdt &= \int_0^T \int_\Omega (2\varepsilon_{mi}\varepsilon'_{mi} - u_{i,m}u'_{i,m})\,dxdt \\ &= \left[\int_\Omega (\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - \frac{1}{2}u_{i,m}u_{i,m})\,dx\right]_0^T.\end{aligned}$$

En utilisant encore une fois la relation $h = R\nu$ sur Γ_1, on obtient:

$$(2.7)\qquad \int_0^T \int_{\Gamma_1} (-2bh_m u_{i,m}u'_i)\,d\Gamma dt$$

$$= \left[\int_\Omega (2bR\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - bRu_{i,m}u_{i,m} - bR(\operatorname{div} u)^2)\,dx\right]_0^T$$

$$+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} (2bR(\operatorname{div} u)(\nu\cdot u') - 4bR\varepsilon_{mi}u_i'\nu_m)\,d\Gamma dt,$$

((2.6) et (2.7) sont les deux identités cruciales du travail d'Alabau et Komornik [6]). En substituant les égalités (2.6) et (2.7) dans (2.4) et en utilisant la relation $h\cdot\nu = R$ sur Γ_1 et $h\cdot\nu \leq 0$ sur Γ_0 on trouve:

$$\left(\gamma - \frac{4aR}{\alpha}\right)\int_0^T E(t)\,dt \tag{2.8}$$

$$\leq \left[\int_\Omega (-M_iu_i' + 2bR\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - bR(\operatorname{div} u)^2)\,dx\right]_0^T$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega (4aR\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - 2aRu_{i,m}u_{i,m} - 2aR(\operatorname{div} u)^2 - 4aR/\alpha\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\,dxdt$$

$$+ \int_0^t \int_{\Gamma_1} ((\frac{\gamma}{2} - \frac{2aR}{\alpha})au_iu_i - (n - \frac{\gamma}{2} + \frac{2aR}{\alpha})(au_i + bu_i')u_i + R(u_i'u_i' - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$$

$$+2aR(\operatorname{div} u)(\nu\cdot u) - 4aR\varepsilon_{mi}u_i\nu_m + 2bR(\operatorname{div} u)(\nu\cdot u') - 4bR\varepsilon_{mi}u_i'\nu_m)\,d\Gamma dt.$$

Estimons les termes du membre de droite de (2.8). En utilisant la définition de l'énergie et l'inégalité de Korn,

$$\left|\int_\Omega (-M_iu_i' + 2bR\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi} - bRu_{i,m}u_{i,m} - bR(\operatorname{div} u)^2)\,dx\right| \leq c_1E(t)$$

et

$$\left|-b(n - \frac{\gamma}{2} + \frac{2aR}{\alpha})\int_0^T \int_{\Gamma_1} u_iu_i'\,d\Gamma dt\right| = \left|\frac{b}{4}(2n - \gamma + \frac{4aR}{\alpha})\left[\int_{\Gamma_1} u_iu_i\right]_0^T\right|$$

$$\leq c_2E(0)$$

avec deux constantes c_1 et c_2 indépendantes de $E(0)$ et de T.

D'après la condition (1.0) du ch. 2, on a:

$$\int_\Omega (4aR\varepsilon ij\varepsilon_{ij} - 2aRu_{i,m}u_{i,m} - 2aR(\operatorname{div} u)^2 - \frac{4aR}{\alpha}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\,dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(\frac{4aR}{\alpha}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{4aR}{\alpha}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)dx = 0.$$

En appliquant le lemme 2.1 et en utilisant (1.3) on conclut que

$$R\int_0^T\int_{\Gamma_1} u_i'u_i'\,d\Gamma dt \leq \frac{R}{b}(E(0)-E(T)) \leq \frac{R}{b}E(0).$$

Donc, à l'aide de ces quatres dernières estimations (on utilise aussi la condition (1.0) du ch. 2 sur $-R\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$), on déduit à partir de l'inégalité (2.8) que

$$\left(\gamma-\frac{4aR}{\alpha}\right)\int_0^T E(t)\,dt \tag{2.9}$$

$$\leq c_3E(0)+(\gamma-n-\frac{4aR}{\alpha})\int_0^T\int_{\Gamma_1} au_iu_i\,dx+\int_0^T\int_{\Gamma_1}(-R\alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$+2aR(\operatorname{div}u)(u\cdot\nu)-4aR\varepsilon_{mi}u_i\nu_m+2bR(\operatorname{div}u)(u'\cdot\nu)-4bR\varepsilon_{mi}u_i'\nu_m)\,d\Gamma dt.$$

Ici $c_3=2c_1+2c_2+R/b$. Reste à examiner l'intégrale sur Γ_1. Pour tout $\delta>0$ on a (on note par $|\operatorname{div}u|^2=\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii}$)

$$2aR(\operatorname{div}u)u\cdot\nu \leq \delta|\operatorname{div}u|^2+na^2R^2\delta^{-1}|u|^2,$$

$$2bR(\operatorname{div}u)u'\cdot\nu \leq \delta|\operatorname{div}u|^2+nb^2R^2\delta^{-1}|u'|^2,$$

$$-4aR\varepsilon_{mi}u_i\nu_m \leq \delta\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi}+4a^2R^2\delta^{-1}|u|^2,$$

$$-4bR\varepsilon_{mi}u_i'\nu_m \leq \delta\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi}+4b^2R^2\delta^{-1}|u'|^2.$$

On substitue ces quatres inégalités dans (2.9) et on utilise l'inégalité triviale $|\operatorname{div}u|^2\leq\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi}$, on obtient:

$$\left(\gamma-\frac{4aR}{\alpha}\right)\int_0^T E(t)\,dt \leq c_3E(0)$$

$$+\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left((\gamma-n-\frac{4aR}{\alpha}+(4+n)aR^2\delta^{-1}\right)a|u|^2$$

$$+(4\delta-\alpha R)\varepsilon_{mi}\varepsilon_{mi}+(4+n)bR^2\delta^{-1}b|u'|^2)\,d\Gamma dt.$$

En utilisant (1.3) et (2.2) on trouve:

$$(4+n)bR^2\delta^{-1}\int_0^T\int_{\Gamma_1} b|u'|^2\,d\Gamma dt \leq (4+n)bR^2\delta^{-1}(E(0)-E(T))$$

$$\leq (4+n)bR^2\delta^{-1}E(0).$$

En substituant cette inégalité dans la précédente et en choisissant $\delta = \alpha R/4$, on déduit donc que

$$(2.10) \qquad (\gamma - \frac{4aR}{\alpha}) \int_0^T E(t)\,dt \le c_4 E(0)$$

$$+(\gamma - n + 4(3+n)\frac{aR}{\alpha}) \int_0^T \int_{\Gamma_1} a|u|^2\,d\Gamma dt$$

où, $c_4 = c_3 + 4(4+n)\frac{bR}{\alpha}$.

Nous arrivons maintenant à la dernière étape de la démonstration du théorème 1; il s'agit de majorer l'intégrale sur Γ_1 dans (2.10).

S'il existe i, j, k, l tels que $a'_{ijkl} \neq 0$, on choisit la constante $\gamma > 0$ assez petite telle que (1.4) est satisfaite et $(\gamma - n + 4(3+n)\frac{aR}{\alpha})a \le 0$: grâce à (1.5), il suffit de prendre $\gamma > 0$ telle que $((n+4)\gamma - n)a \le 0$. Donc on voit que le dernier terme de (2.10) est négatif.

Si $a'_{ijkl} = 0$, on choisit, dans le lemme 2.2, $\epsilon > 0$ tel que

$$(\gamma - n + 4(3+n)\frac{aR}{\alpha})a\epsilon < \gamma - \frac{4aR}{\alpha}.$$

On déduit donc de (2.10) l'inégalité

$$\int_0^T E(t)\,dt \le cE(0), \quad \text{pour tout} \quad T \ge 0$$

où, $c = \frac{c_4 + c_6 c_5}{c_7 - \epsilon c_6}$, $c_7 = \gamma - \frac{4aR}{\alpha}$ et $c_6 = \max\{0, (\gamma - n + 4(3+n)\frac{aR}{\alpha})a\}$. Comme la constante c est indépendante de T et de $E(0)$, donc on fait tendre T vers ∞, on voit que l'énergie E vérifie (2.1) avec $\omega = 1/c$. D'où on obtient (1.7) avec $M \ge e$.

En appliquant la méthode de Conrad et Rao [18] (voir aussi [6]), on montre le lemme suivant:

Lemme 2.2. *Supposons que $a'_{ijkl} = 0$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe une constante $c_5 > 0$ telle que*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma dt \le c_5 E(0) + \epsilon \int_0^T E(t)\,dt$$

pour tout $T \ge 0$.

Preuve du lemme 2.2. Pour tout $t \ge 0$, on note par $\eta(t)$ la solution du problème elliptique suivant:

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j}(\eta) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \eta_i = u_i & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Alors, on a d'après la théorie de la régularité elliptique (voir [6] ou Ciarlet [16]),

$$\|\eta\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq c\|u\|_{(L^2(\Gamma))^n} \leq c\sqrt{E(t)} \tag{2.11}$$

où, c est une constante positive indépendante de u. D'autre part, en dérivant par rapport à t, on voit donc que η' est la solution du problème

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j}(\eta') = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \eta_i' = u_i' & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\|\eta'\|_{(L^2(\Omega))^n} \leq c\|u'\|_{(L^2(\Gamma))^n} \leq c\sqrt{|E'|}. \tag{2.12}$$

On remarque aussi que

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\eta)\varepsilon_{ij}(u-\eta)\,dx = -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(\eta)(u_i-\eta_i)\,dx + \int_\Gamma \sigma_{ij}(\eta)\nu_j(u_i-\eta_i)\,d\Gamma = 0;$$

et par conséquent

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\eta)\varepsilon_{ij}(u)\,dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(\eta)\varepsilon_{ij}(\eta)\,dx \geq 0. \tag{2.13}$$

Ensuite on multiplie la première équation de (P) par η_i, on intègre par parties sur $\Omega \times [0,T]$ et on utilise les conditions au bord sur u et sur η on obtient:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega \eta_i(u_i'' - \sigma_{ij,j}(u))\,dxdt$$

$$= \left[\int_\Omega \eta_i u_i'\,dx\right]_0^T + \int_0^T\int_\Omega (-\eta_i'u_i' + \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(\eta))\,dxdt + \int_0^t\int_{\Gamma_1} u_i(au_i + bu_i')\,d\Gamma dt.$$

Donc, en utilisant (2.13)

$$a\int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2\,d\Gamma dt \tag{2.14}$$

$$\leq -\left[\int_\Omega \eta_i u_i'\,dx + \frac{b}{2}\int_{\Gamma_1} |u|^2\,d\Gamma\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \eta_i'u_i'\,dxdt.$$

D'abord en utilisant (2.11), on remarque que

$$\left|\left[\int_\Omega \eta_i u_i'\,dx + \frac{b}{2}\int_{\Gamma_1} |u|^2\,d\Gamma\right]_0^T\right| \leq cE(0).$$

Ensuite, fixons $\epsilon > 0$:

$$\int_0^T \int_\Omega \eta_i' u_i' \, dxdt \leq \int_0^T \|\eta'\|_{(L^2(\Omega))^n} \|u'\|_{(L^2(\Omega))^n} \, dt$$

$$\leq c \int_0^T \sqrt{|E'|}\sqrt{E} \, dt \leq \int_0^T (a\epsilon E + \frac{c^2}{4a\epsilon}(-E')) \, dt$$

$$\leq a\epsilon \int_0^T E(t) \, dt + c' E(0).$$

Enfin, substituant ces deux dernières inégalités dans (2.14) d'où le lemme (2.2). Ceci termine donc la preuve de l'estimation annoncée dans le théorème 1 pour les solutions à données initiales régulières.

On prouve à l'aide d'un argument de densité que cette estimation reste vraie pour toute solution faible u: soit $(u^0, u^1) \in V \times H$, et u la solution faible associée. Le sous espace vectoriel $(H_0^2(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$ est dense dans l'espace d'énergie $V \times H$. On en déduit qu'il existe une suite $\{u^{0,n}, u^{1,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(H_0^2(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$ qui converge dans l'espace d'énergie vers (u^0, u^1).

Soit u^n la solution forte du problème (P) associée à la donnée initiale $(u^{0,n}, u^{1,n})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'énergie E_n de la solution u^n vérifie l'estimation:

$$E_n(t) \leq E_n(0) e^{1-\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.15}$$

Or, par construction, la suite $\{(u^{0,n}, u^{1,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$E_n(0) \sim \|(u^{0,n}, u^{1,n})\|^2_{V\times H} \to \|(u^0, u^1)\|^2_{V\times H} \sim E(0) \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

où E est l'énergie de la solution faible u. D'autre part, en utilisant la décroissance de l'énergie du problème linéaire:

$$E(u^n - u)(t) \leq E(u^n - u)(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+;$$

on en déduit que:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ : \quad E_n(t) \to E(t) \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Ainsi, en passant à la limite en n à t fixé dans (2.15), on obtient (1.7) avec $M = \frac{c'}{c''} e$ où, c' et c'' sont définies comme dans (1.16), ch. 1. Ceci achève la preuve du théorème 1.

CHAPITRE 4

EXISTENCE GLOBALE ET STABILISATION FRONTIÈRE DU SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉLASTICITÉ

1. Introduction et résultats principaux

On s'intéresse dans ce chapitre au problème d'existence, de régularité et de stabilisation non linéaire du système étudié dans le ch. 3.

Soit Ω un ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de frontière Γ de classe C^2 et soit a_{ijkl}, $i, j, k, l = 1, \cdots, n$ un ensemble de fonctions dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ (indépendantes de t) telles que

$$(1.1) \qquad a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \text{et} \quad a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} \quad \text{sur} \quad \Omega$$

pour un nombre $\alpha > 0$ fixé et pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. On fixe un point $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ et on note

$$(1.2) \qquad h(x) = x - x_0, \quad R = \|h\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition du bord Γ telle que

$$(1.3) \qquad \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_0 = \emptyset.$$

Soient $a \geq 0$ et $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$ des fonctions continues croissantes telles que $g_i(0) = 0$.

Considérons le système suivant:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}\nu_j + au_i + g_i(u_i') = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

On définit l'énergie de la solution par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i' u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} a u_i u_i d\Gamma, \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.4}$$

On observe que E est une fonction positive, et par la formule de Green on obtient, formellement,

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma \leq 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.5}$$

(remarquer que $x g_i(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et par suite l'énergie est décroissante.

L'existence et la régularité des solutions découlent d'un résultat standard de théorie des semi-groupes non linéaires (voir [9], [17] et [42]). On suppose que

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad a > 0 \tag{1.6}$$

et

$$\left|g_i(x)\right| \leq \hat{c}_i(1 + \left|x\right|), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

pour des constantes $\hat{c}_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$.

On définit trois espaces de Hilbert H, V et W par

$$H = (L^2(\Omega))^n, \quad \|u\|_H^2 = \int_\Omega u_i u_i dx,$$

$$V = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n, \quad \|u\|_V^2 = \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dx + \int_{\Gamma_1} a u_i u_i d\Gamma$$

où, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\}$ et

$$W = (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n, \quad \|u\|_W^2 = \int_\Omega (\Delta u_i \Delta u_i + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dx + \int_{\Gamma_1} a u_i u_i d\Gamma.$$

On identifie H avec son dual H'. On obtient donc

$$W \hookrightarrow V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow W',$$

avec injection compacte et dense.

Remarques. 1. D'après les conditions (1.1), (1.6), l'inégalité de Korn et le théorème de trace, on constate que les quantités $\|.\|_V$ et $\|.\|_W$ définissent des normes sur V et W équivalentes à la norme usuelle de $(H^1(\Omega))^n$ et $(H^2(\Omega))^n$, respectivement.

2. On peut affaiblir la condition (1.7) en admettant des nonlinéarités surlinéaires, comme cela a été fait auparavant pour l'équation des ondes (voir [42]): on suppose qu'il existe des constantes $c_i' > 0$ et $q_i \in [1, +\infty)$, $i = 1, \cdots, n$ telles que $q_i(n-2) \leq n$ et

$$|g_i(x)| \leq c_i'(1 + |x|^{q_i}), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

en utilisant l'injection continue $V \hookrightarrow (L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\Gamma))^n$ si $n \geq 3$, $V \hookrightarrow (L^s(\Gamma))^n$ pour tout $s \in [2, \infty[$ si $n = 2$ et $V \hookrightarrow (L^\infty(\Gamma))^n$ si $n = 1$.

On a alors le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème 1. *On suppose que les conditions (1.1), (1.3), (1.6) et (1.7) sont satisfaites. Pour toute donnée initiale* $(u^0, u^1) \in V \times H$, *le système* (P) *admet une solution (au sense faible) unique* u *vérifiant*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H).$$

L'énergie de la solution, définie par (1.4) est décroissante. D'autre part, si z *est une autre solution du système* (P) *correspondante à* $(z^0, z^1) \in V \times H$, *alors on a l'estimation suivante:*

$$\|E(u-z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq E(u-z)(0). \tag{1.8}$$

Pour la régularité de la solution on a le

Théorème 2. *Sous les conditions du théorème 1 on a: pour toute donnée initiale* $(u^0, u^1) \in W \times V$ *telle que*

$$\sigma_{ij}(u^0)\nu_j + a u_i^0 + g_i(u_i^1) = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_1 \tag{1.9}$$

la solution u *(dite forte) du système* (P) *vérifie*

$$u,\, u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), \quad \textit{et} \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.10}$$

Si de plus, les fonctions g_i *sont globalement Lipschitz alors on a:*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W). \tag{1.11}$$

On étudie maintenant la stabilité du système (P). Grâce au résultat de stabilisation uniforme obtenu dans le ch. 3 et par l'intermédiaire d'un principe général de Russell [69] et une méthode introduite par Liu [57] dans le cadre d'un système linéaire de thermoélasticité, on s'affranchit de la condition

$a < \frac{\gamma\alpha}{4R}$ supposée dans le ch. 3 et d'obtenir des résultats de stabilisation pour toute valeur positive de a avec des estimations précises sur le taux de décroissance de l'énergie.

On suppose que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : h(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} \quad \text{et} \quad \left|x - x_0\right| = R \quad \forall x \in \Gamma_1 \tag{1.12}$$

où, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ est le vecteur normal extérieur à Γ. On désigne par γ le plus grand nombre positif tel que

$$(2a_{ijkl} - h_m \partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \gamma a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{sur} \quad \Omega, \tag{1.13}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij} où, $h_m(x) = x_m - x_m^0$ et $\partial_m a_{ijkl} = \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_m}$.

Remarque. La condition (1.12) est vérifiée pour tout domaine Ω où la partie Γ_1 de sa frontière est une sphère; par exemple

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : r < \left|x - x_0\right| < R\}$$

où, $0 < r < R$ et $\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : \left|x - x^0\right| = R\}$ ou $r = 0$ et $\Gamma_0 = \emptyset$. Horn [37, 38] a affaibli la condition (1.12) pour le système d'élasticité homogène isotrope sans préciser le taux de décroissance de l'énergie.

On a alors le résultat de stabilisation suivant:

Théorème 3. *On suppose que les conditions (1.1), (1.6), (1.12) et (1.13) sont satisfaites. Supposons que les fonctions g_i vérifient, pour une constante $p \in [1, +\infty)$ et pour des constantes $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$,*

$$c_1\left|x\right|^p \leq \left|g_i(x)\right| \leq c_2\left|x\right|^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad \left|x\right| \leq 1 \tag{1.14}$$

et

$$c_3\left|x\right| \leq \left|g_i(x)\right| \leq c_4\left|x\right| \quad \text{si} \quad \left|x\right| > 1. \tag{1.15}$$

Alors, pour tout $(u^0, u^1) \in V \times H$, la solution du système (P) vérifie les estimations

$$E(t) \leq M_0 E(0) e^{-\omega_0 t} \quad \forall t > 0, \quad \text{si} \quad p = 1 \tag{1.16}$$

et

$$E(t) \leq M_1 (1 + t)^{-\frac{2}{p-1}} \quad \forall t > 0, \quad \text{si} \quad p > 1 \tag{1.17}$$

où, ω_0, $M_0 > 0$ sont des constantes indépendantes de $E(0)$, et $M_1 > 0$ est une constante dépendante de $E(0)$.

La condition (1.15) implique que g_i n'est pas bornée. Le résultat suivant montre qu'on peut affaiblir cette condition pour les solutions plus régulières.

Théorème 4. *Sous les conditions (1.1), (1.6), (1.12) et (1.13). Si les fonctions g_i vérifient (1.14) telles que*

$$\begin{cases} p \geq 1 & si \quad n=1, \\ p > 1 & si \quad n=2, \\ p \geq n-1 & si \quad n \geq 3 \end{cases} \tag{1.18}$$

et la condition suivante, pour $\lambda = \frac{p+1}{p}$ (et $\lambda \geq 1$ si $p=1$) et $c_5 > 0$,

$$\left|g_i(x)\right| \leq c_5 \left|x\right|^\lambda \quad si \quad \left|x\right| > 1. \tag{1.19}$$

Alors, pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in W \times V$ vérifiant (1.9), la solution du système (P) vérifie les estimations (1.16) et (1.17) avec des constantes M_0, M_1 et ω_0 dépendantes de u.

Remarques. 1. Dans le cas linéaire $g_i(x) = bx$, $b > 0$, on a donné dans le ch. 3 une estimation du taux de décroissance en fonction des paramètres γ, α, b et R. De même, on donnera dans la démonstration du théorème 3 une estimation de ω_0 et M_0.

2. Les résultats de stabilisation des théorèmes 3 et 4 restent vrais dans le cas où on remplace la condition au bord sur Γ_1 par la suivante:

$$\sigma_{ij}\nu_j + a_i(x)u_i + b_i(x)g_i(u_i') = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

où les a_i et les b_i sont des fonctions positives dans $C^1(\bar{\Gamma}_1)$ telles que $a_i > 0$ sur Γ_1 si $\Gamma_0 = \emptyset$, et $b_i \geq b_0 > 0$ sur Γ_1.

3. Dans le cas linéaire et pour une constante a assez petite, Alabau et Komornik [6] ont montré que (P) est uniformément stable pour des domaines où, Γ_1 est proche d'une sphère:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \, 1 < \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i x_i^2 < 4\}$$

et

$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \, \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i x_i^2 = 4\}$$

où, $\beta_i \in]0, 1[$. En utilisant ce résultat, la méthode appliquée dans ce chapitre montre que les théorèmes 3 et 4 restent vrais pour ce type de domaines sans aucune restriction sur la constante a.

4. La bornitude de Ω permet d'utiliser des résultats d'injection compacte sur les espaces de Sobolev, et la croissance polynomiale des fonctions g_i aux

voisinages de 0 et $\pm\infty$ permet l'utilisation des inégalités intégrales (voir par exemple, Komornik [40, 43], Nakao [65] ou Zuazua [73, 74]) dans le but d'obtenir des estimations précises sur le taux de décroissans de l'énergie. Ce type des estimations est connu, notamment pour l'équation des ondes. On présentra des estimations analogues dans les ch. 6, 7, et dans le ch. 9 où on va étudier un système de Petrovsky.

2. Existence et unicité: preuve du théorème 1

On prend l'application du dual $A : V \to V'$:

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = \langle u, v\rangle_V = \int_\Omega a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Gamma_1} au_iv_id\Gamma, \quad u, v \in V.$$

La formule:

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} := \int_{\Gamma_1} g_i(u_i)v_id\Gamma, \quad u, v \in V$$

définit une application $B : V \to V'$ (non linéaire en général). En effet, on utilise (1.7) et l'injection continue

$$V \subset (H^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^2(\Gamma_1))^n.$$

On trouve, pour une constante positive c indépendante de u et de v,

$$\Big|\int_{\Gamma_1} g_i(u_i)v_id\Gamma\Big| \le \Big(\int_{\Gamma_1} g_i(u_i)g_i(u_i)d\Gamma_1\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\Gamma_1} v_iv_id\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le c(1 + \|u\|_V)\|v\|_V < \infty.$$

D'où $Bu \in V'$ pour tout $u \in V$.

On multiplie la première équation dans (P) par $v \in V$, on intègre par parties sur Ω et on utilise les conditions au bord pour obtenir une formulation faible du problème, on obtient:

$$0 = \int_\Omega (u_i'' - \sigma_{ij,j}(u))v_idx = \int_\Omega (u_i''v_i + \sigma_{ij}(u)v_{i,j})dx - \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)\nu_jv_id\Gamma$$
$$= \int_\Omega (u_i''v_i + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(v))dx + \int_{\Gamma_1} (au_iv_i + g_i(u_i')v_i)d\Gamma$$
$$= \langle u'' + Au + Bu', v\rangle_{V',V},$$

donc

$$u'' + Au + Bu' = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

On pose

$$u' := z, \quad U := (u, z) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}U := (-z, Au + Bz).$$

On peut écrire le système (P) sous la forme:

$$\begin{cases} U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = (u^0, u^1). \end{cases} \tag{2.2}$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = V \times H$ et on considère l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans $\mathcal{H}$, de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \{U = (u, z) \in V \times V : Au + Bz \in H\}.$$

Ceci nous amène à définir les solutions faibles de (P) comme la première composante des solutions de (2.2). Le lemme suivant justifie cette définition.

Lemme 2.1. *$\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. La croissance des fonctions g_i donne la monotonie de $\mathcal{A}$. En effet, pour U, $\tilde{U} \in D(\mathcal{A})$ on a:

$$\langle \mathcal{A}U - \mathcal{A}\tilde{U}, U - \tilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \tilde{z} - z, u - \tilde{u}\rangle_V + \langle Au - A\tilde{u} + Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z}\rangle_H$$

$$= -\langle z - \tilde{z}, u - \tilde{u}\rangle_V + \langle A(u - \tilde{u}) + Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z}\rangle_{V',V}$$

$$= \langle Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z}\rangle_{V',V} = \int_{\Gamma_1} (g_i(z_i) - g_i(\tilde{z}_i))(z_i - \tilde{z}_i)d\Gamma \geq 0.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc monotone.

On montre maintenant le caractère maximal de l'opérateur $\mathcal{A}$. Cela revient à montrer que l'opérateur $I + \mathcal{A}$ est surjectif de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$. Soit $(u^0, z^0) \in \mathcal{H}$, on cherche $(u, z) \in D(\mathcal{A})$ tel que $(I + \mathcal{A})(u, z) = (u^0, z^0)$, c'est à dire

$$u - z = u^0 \quad \text{et} \quad z + Au + Bz = z^0.$$

On remplace u dans la deuxième équation en utilisant la première équation, on voit que (u, z) satisfait

$$u = z + u^0 \quad \text{et} \quad z + Az + Bz = z^0 - Au^0.$$

Donc il suffit de montrer que l'opérateur $I + A + B : V \to V'$ est surjectif et de prendre $u = z + u^0$ et $z \in V$ tel que $(I + A + B)z = z^0 - Au^0$. Soit $f \in V'$, on pose $F : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|_V^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma} G_i(u_i)d\Gamma - \langle f, u\rangle_{V',V}, \quad \forall u \in V$$

où, $G_i(t) = \int_0^t g_i(s)ds, t \in \mathbb{R}$ (remarquer que G_i est une fonction positive). Grâce à la condition (1.7), on voit que F est une fonction bien définie, continue et différentiable. De plus on a:

$$F'(u)v = \langle (I + A + B)u - f, v\rangle_{V',V}, \quad \forall u, v \in V.$$

D'autre part, la monotonie des g_i implique la convexité de F, et comme $F(v) \to \infty$ quand $\|v\|_V \to \infty$ (car $F(v) \geq (\frac{1}{2}\|v\|_V - \|f\|_{V'})\|v\|_V$), alors F atteint son minimum en un point u. Donc $F'(u) = 0$, c'est à dire $(I + A + B)u = f$, d'où la surjectivité de l'opérateur $I + A + B$.

On applique la théorie des semi-groupes non linéaires, on obtient que (2.2) admet une solution faible unique, et par suite on prouve l'existence d'une solution faible unique de (P).

On en déduit que l'énergie de la solution est décroissante, car $E(t) = \frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathcal{H}}$.

3. Régularité: preuve du théorème 2

La preuve du théorème 2 s'achève en montrant le lemme suivant:

Lemme 3.1. *1. On a:*

$$\{(u, z) \in W \times V : \sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i + g_i(z_i) = 0 \quad sur \quad \Gamma_1\} \subset D(\mathcal{A}).$$

Donc $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

2. Si, pour tout $i = 1, \cdots, n$, g_i est globalement Lipschitz, alors on a l'égalité, et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_W \leq c(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V), \quad \forall (u, z) \in D(\mathcal{A}). \tag{3.1}$$

La première partie de ce lemme prouve la première partie du théorème 2 en appliquant toujours un résultat standard de la théorie des semi-groupes non linéaires (voir [42]). Les propriétés (1.10) et (2.1) impliquent que $u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ et $Au + Bu' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$. En appliquant (3.1) pour $(u, z) = (u, u')$, on obtient (1.11).

Preuve du lemme 3.1. Soit $(u, z) \in W \times V$ tel que

$$\sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i + g_i(z_i) = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1.$$

Pour que $(u, z) \in D(\mathcal{A})$, il nous reste à montrer que $Au + Bz \in H$. Pour cela, il suffit de prouver l'estimation:

$$\left|\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V}\right| \leq c\|v\|_H, \quad \forall v \in V \tag{3.2}$$

pour une constante c. On utilise la définition de A et de B, on trouve:

$$\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Gamma_1} (au_i v_i + g_i(z_i)v_i)d\Gamma.$$

Comme $u \in W$, en appliquant la formule de Green au terme $\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v) = \sigma_{ij}(u)v_{i,j}$, on obtient donc:

$$\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V}$$

$$= -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)v_i dx + \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i + g_i(z_i))v_i d\Gamma$$

$$= -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)v_i dx \leq \|\sigma_{.j,j}(u)\|_H \|v\|_H.$$

Comme $u \in W$, alors $(\sigma_{1j,j}, \cdots, \sigma_{nj,j})(u) \in H$, et par suite on trouve (3.2). Cette inclusion montre que $(H_0^2(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n \subset D(\mathcal{A})$. Il est clair que $(H_0^2(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$ dense dans $\mathcal{H}$, et par conséquent $D(\mathcal{A})$ est aussi.

D'autre part, soit $(u, z) \in D(\mathcal{A})$, c'est à dire: $u, z \in V$ et $Au + Bz \in H$, donc pour tout $v \in V$ on a:

$$\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V} = \langle Au + Bz, v\rangle_H,$$

et par suite:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Gamma_1} au_i u_i d\Gamma = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} \phi_i v_i d\Gamma$$

où, $f := (f_1, \cdots, f_n) = Au + Bz$ et $\phi_i = -g_i(z_i)$. Cette égalité implique que u est la solution faible du système suivant:

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j} = f_i & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \sigma_{ij}\nu_j + au_i = \phi_i & \text{sur} \quad \Gamma_1, \\ i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

On a $f \in H$ et $\phi := (\phi_1, \cdots, \phi_n) \in V$, en effet, $f \in H$, $z \in V$ par hypothèse, et comme g_i est globalement Lipschitz (remarquer aussi que $g_i(0) = 0$), alors

$$\int_\Omega g_i(z_i)g_i(z_i)dx \leq c\int_\Omega z_i z_i \leq c\|z\|_V^2 < \infty$$

et

$$\int_\Omega |\nabla g_i(z_i)||\nabla g_i(z_i)|dx = \int_\Omega |g_i'(z_i)|^2 |\nabla z_i|^2 dx$$

$$\leq c \int_\Omega |\nabla z_i||\nabla z_i| dx \leq c\|z\|_V^2 < \infty.$$

Et par conséquent

$$\|g(z)\|_V \leq c\|z\|_V. \tag{3.3}$$

Donc on applique la théorie de la régularité elliptique (remarquer que $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ par l'hypothèse (1.3)), on conclut que $u \in W$,

$$\sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i + g_i(z_i) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1$$

et

$$\|u\|_W \leq c'(\|Au+Bz\|_H + \|(g_1(z_1), \cdots, g_n(z_n))\|_V) \leq c(\|Au+Bz\|_H + \|z\|_V).$$

D'où (3.1). L'inégalité (3.3) implique aussi que, en posant $z = u'$,

$$g(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V). \tag{3.4}$$

La preuve du lemme 3.1 est donc terminée.

4. Preuve d'un résultat de contrôlabilité

On va prouver les estimations (1.16) et (1.17) en suppposant que les fonctions g_i sont globalement Lipschitz. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on montrera comment éliminer cette hypothèse.

On suppose donc que les fonctions g_i sont globalement Lipschitz. Il suffit alors de montrer les estimations (1.16) et (1.17) pour les solutions fortes. Par arguments de densité (voir ch. 3, §2), le résultat se généralise aux solutions faibles. On prend alors la donnée initiale (u^0, u^1) dans $W \times V$ telle que (1.9) est satisfaite; donc la solution du système (P) a la régularité (1.10)-(1.11) qui justifie tous les calculs.

On commence d'abord par vérifier que l'énergie est décroissante en donnant une identité importante pour la suite. On montre le lemme suivant:

Lemme 4.1. *L'énergie $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par (1.4) est décroissante, localement absolument continue et*

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma dt = E(S) - E(T) \leq E(S) \tag{4.1}$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

Preuve. On fixe $0 \leq S < T < \infty$, d'après (P) et (1.4) on a:

$$0 = \int_S^T \int_\Omega (u_i'' - \sigma_{ij,j}) u_i' dx dt$$

$$= \int_S^T \int_\Omega (u_i'' u_i' + \sigma_{ij} u_{i,j}') dx dt - \int_S^T \int_\Gamma \sigma_{ij} \nu_j u_i' d\Gamma dt$$

$$= \int_S^T \int_\Omega (u_i'' u_i' + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{'}) dx dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} (a u_i u_i' + u_i' g_i(u_i')) d\Gamma dt$$

$$= E(T) - E(S) + \int_S^T \int_{\Gamma_1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma dt.$$

Et par suite

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma dt. \tag{4.2}$$

Or $x g_i(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, donc le terme de droite de (4.2) est positif; alors E est décroissante. L'identité (4.2) implique aussi que E est localement absolument continue, et par conséquent elle est dérivable presque partout et

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3}$$

De plus, comme E est positive alors (4.1) est satisfaite.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer le résultat de contrôlabilité suivant: on fixe $T > 0$. Pour tout $(y^0, y^1) \in \mathcal{H}$, cherchons un contrôle $\phi \in (L^2(\Gamma_1 \times [0,T]))^n$ tel que la solution du système

$$\begin{cases} y_i'' - \sigma_{ij,j}(y) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ y_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times [0,T], \\ \sigma_{ij}(y)\nu_j + a_0 y_i = \phi_i & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \\ y_i(0) = 0 \quad \text{et} \quad y_i'(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{4.4}$$

vérifie

$$y(T) = y^0, \quad y'(T) = y^1 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{4.5}$$

où, $0 < a_0 < \frac{\gamma\alpha}{4R}$ si $a \geq \frac{\gamma\alpha}{4R}$ et $a_0 = a$ sinon. Soit $(v^0, v^1) \in \mathcal{H}$, on considère le système suivant:

$$\begin{cases} v_i'' - \sigma_{ij,j}(v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ v_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times [0,T], \\ \sigma_{ij}(v)\nu_j + a_0 v_i - v_i' = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \\ v(T) = v^0 \quad \text{et} \quad v'(T) = v^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{4.6}$$

qui admet une solution unique $(v(t), v'(t)) \in C([0,T];\mathcal{H})$. (Il suffit de faire le changement de variable $\varphi(t) = v(T-t)$, $t \in [0,T]$ et appliquer le théorème 1). D'après le théorème 1 du ch. 3 on a: il existe deux constantes positives ω et M telles que

$$E_0(v(t)) \leq M E_0(v(T)) e^{-\omega(T-t)}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{4.7}$$

pour tout $(v^0, v^1) \in \mathcal{H}$ où, $E_0(v)$ est définie par (1.4) en remplaçant u par v et a par a_0.

On prend la solution v du système (4.6) et on considère le système

$$\begin{cases} w_i'' - \sigma_{ij,j}(w) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T], \\ w_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times [0,T], \\ \sigma_{ij}(w)\nu_j + a_0 w_i + w_i' = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \\ w(0) = v(0) \quad \text{et} \quad w'(0) = v'(0) & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{4.8}$$

qui admet une solution unique $(w(t), w'(t)) \in C([0,T];\mathcal{H})$ car $(v(0), v'(0)) \in \mathcal{H}$ (voir théorème 1).

On pose $y = w - v$. D'après (4.6) et (4.8), on a y vérifie (4.4) avec $\phi = -(w' + v')$. Il suffit donc de bien choisir $T > 0$ et $(v^0, v^1) \in \mathcal{H}$ pour avoir la condition finale (4.5) requise sur y. Pour cela, on choisit $T > \frac{1}{\omega}\ln(\frac{a}{a_0}M)$ et on note $d = \frac{a}{a_0} M e^{-\omega T}$; donc $d \in]0,1[$. On définit alors l'opérateur linéaire $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ par

$$\Lambda(v^0, v^1) = (w(T), w'(T)).$$

Montrons que $\Lambda - I$ est inversible, il suffit donc de montrer que $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} < 1$. D'après (4.7), on a:

$$E_0(v(0)) \leq \frac{a_0}{a} d E_0(v(T)).$$

D'autre part, les fonctions E et E_0 définies par (1.4) correspondant à a et a_0, respectivement, vérifient, pour toute fonction $(z(t), z'(t)) \in C(\mathbb{R}^+;\mathcal{H})$,

$$E_0(z) \leq E(z) \leq \frac{a}{a_0} E_0(z).$$

En utilisant ces deux dernières propriétés, et en remarquant que $E_0(w(0)) = E_0(v(0))$ et $E_0(w)$ est décroissante, on voit que:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(v^0, v^1)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(w(T), w'(T))\|_{\mathcal{H}}^2 = 2E(w(T)) \leq \frac{2a}{a_0} E_0(w(T)) \\ &\leq \frac{2a}{a_0} E_0(w(0)) = \frac{2a}{a_0} E_0(v(0)) \leq 2d E_0(v(T)) \\ &\leq 2d E(v(T)) = d \|(v^0, v^1)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq \sqrt{d} < 1.$$

Donc $\Lambda - I$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Alors pour toute donnée $(y^0, y^1) \in \mathcal{H}$, il existe $(v^0, v^1) \in \mathcal{H}$ tel que

$$(4.9)\quad (y^0, y^1) = (\Lambda - I)(v^0, v^1) = (w(T), w'(T)) - (v^0, v^1) = (y(T), y'(T)).$$

D'où le résultat cherché (4.5).

Il nous reste maintenant à vérifier que le contrôle

$$\phi := -(w' + v') \in (L^2(\Gamma_1 \times [0, T]))^n.$$

On multiplie la première équation de (4.6) par v_i' et la première équation de (4.8) par w_i', on intègre par parties sur $\Omega \times [0, T]$, on obtient (comme au lemme 4.1):

$$(4.10)\qquad \int_0^T \int_{\Gamma_1} v_i' v_i' d\Gamma dt = E_0(v(T)) - E_0(v(0));$$

$$(4.11)\qquad \int_0^T \int_{\Gamma_1} w_i' w_i' d\Gamma dt = E_0(w(0)) - E_0(w(T)).$$

D'autre part, comme $(y^0, y^1) = (\Lambda - I)(v^0, v^1)$ et $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq \sqrt{d}$, on a:

$$\|(v^0, v^1)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{1 - \sqrt{d}} \|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{H}}.$$

Donc on voit que:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \phi_i \phi_i d\Gamma dt \leq 2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} (v_i' v_i' + w_i' w_i') d\Gamma dt$$

$$= 2(E_0(v(T)) - E_0(v(0)) + E_0(w(0)) - E_0(w(T))) = 2(E_0(v(T)) - E_0(w(T)))$$

$$\leq 2E_0(v(T)) \leq 2E(v(T)) = \|(v^0, v^1)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

et par conséquent

$$(4.12)\qquad \int_0^T \int_{\Gamma_1} \phi_i \phi_i d\Gamma dt \leq \frac{1}{(1 - \sqrt{d})^2} \|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

D'où $\phi \in (L^2(\Gamma_1 \times [0, T]))^n$.

5. Preuve de la stabilisation forte

On applique ici le principe d'invariance de La Salle et on montre que le système (P) est fortement stable; c'est à dire l'énergie $E(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Comme les fonctions g_i sont globalement Lipschitz et les données innitiales $(\mathrm{u}^0, u^1) \in W \times V$ telles que (1.9) est satisfaite, alors le théorème 2 montre que la trajectoire $\{u(t), u'(t)\}_{t\geq 0}$ est bornée dans $W \times V$ qui injecte dans $\mathcal{H}$ de façon compacte, donc elle est relativement compacte dans $\mathcal{H}$. Appliquant le principe d'invariance de La Salle, il suffit de montrer que l'ensemble ω-limite contient seulement le point $(0,0)$:

$$\omega\{u^0, u^1\} = \{0, 0\}. \tag{5.1}$$

Soit $(z^0, z^1) \in \omega\{u^0, u^1\}$ et soit z la solution du système (P) correspondante à (z^0, z^1). Comme $\omega\{u^0, u^1\}$ contient seulement les donnés initiales où l'énergie est constante, on déduit de (4.3) que $z' = 0$ sur Γ_1, donc on dérive le système (P) par rapport à t, on voit que $w := z'$ est la solution du système suivant:

$$\begin{cases} w'' - \sigma_{ij,j}(w) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}(w)\nu_j = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

On applique sur w le théorème 1 et le lemme 2.2 du ch. 2 on obtient $E(w(0)) = 0$. Or, $E(w(t)) =$const$= E(w(0))$, et par conséquent $w := z' = 0$. Alors (P) implique que:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(z) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ z_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}(z)\nu_j + az_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ z_i(0) = z_i^0 \quad \text{et} \quad z_i'(0) = z_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n. \end{cases} \tag{5.2}$$

Multiplions la première équation de (5.2) par z_i et intégrons par parties, on obtient:

$$0 = \int_\Omega \sigma_{ij,j}(z) z_i dx = -\int_\Omega \sigma_{ij}(z)\varepsilon_{ij}(z) dx - \int_{\Gamma_1} a z_i z_i d\Gamma = -\|z\|_V^2,$$

ce qui implique que $z = 0$, et par conséquent $(z^0, z^1) = (z(0), z'(0)) = (0, 0)$ d'où (5.1).

Remarques. 1. Ce résultat de stabilité forte sera utilisé dans la preuve de l'estimation (1.17).

2. Ce résultat de stabilité forte du système (P) est satisfait sans la condition géométrique supposée sur la partie Γ_1 du bord et sans les conditions (1.14), (1.15) et (1.19) supposées sur les fonctions g_i.

3. On a utilisé le théorème 1 du ch. 2 sans supposer la condition $\gamma \leq 2n$ comme dans l'hypothèse (H1) où son intérêt réside seulement dans l'obtention d'une meilleure estimation sur le temps de contrôlabilité T_0. Ceci est justifié par le fait que ce théorème est vrai sans la condition $\gamma \leq 2n$ mais a priori pour un temps de contrôlabilité plus grand que celui obtenu dans l'hypothèse (H1) du ch. 2.

6. Cas des feedbacks non bornés: preuve du théorème 3

On montre maintenant les estimations (1.16) et (1.17). On choisit

$$(y^0, y^1) = (u(T), u'(T)),$$

donc le système (4.4) admet une solution unique $(y, y') \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$ telle que

$$(y(T), y'(T)) = (u(T), u'(T)). \tag{6.1}$$

D'après (P), (4.4) et (6.1) et par intégration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega \big[y_i'(u_i'' - \sigma_{ij,j}(u)) + u_i'(y_i'' - \sigma_{ij,j}(y)) \big] dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (u_i' y_i' + a_{ijkl} u_{i,j} y_{k,l})' dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (y_i'(a u_i + g_i(u_i')) + u_i'(a_0 y_i - \phi_i)) d\Gamma dt \\ &= \int_\Omega (u_i'(T) u_i'(T) + a_{ijkl} u_{i,j}(T) u_{k,l}(T)) dx + \int_{\Gamma_1} a u_i(T) u_i(T) d\Gamma \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} ((a_0 - a) u_i' y_i + y_i' g_i(u_i') - u_i' \phi_i) d\Gamma dt \\ &= 2E(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} ((a_0 - a) u_i' y_i + y_i' g_i(u_i') - u_i' \phi_i) d\Gamma dt, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$E(T) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} ((a - a_0) u_i' y_i + u_i' \phi_i - y_i' g_i(u_i')) d\Gamma dt. \tag{6.2}$$

D'après la démonstration de (4.5) et (4.12), on a $y = w - v$, $\phi = -(w' + v')$ où, v et w sont les solutions des systèmes (4.6) et (4.8), respectivement, et

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} (w_i' w_i' + v_i' v_i') d\Gamma dt \tag{6.3}$$

$$\leq \frac{1}{2(1-\sqrt{d})^2}\|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}E(T).$$

On note par δ la constante positive (dépendante seulement de Ω, α, a et de $\|a_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}$) telle que

$$\|z\|_{(L^2(\Gamma))^n}^2 \leq \delta\|z\|_V^2, \quad \forall z \in V. \tag{6.4}$$

Cas $p = 1$. On a, d'après (1.14)-(1.15), (4.1) et (6.2)-(6.3),

$$E(T) \leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}(|u_i'| + |g_i(u_i')|)((a-a_0)|y_i| + |y_i'| + |\phi_i|)d\Gamma dt$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\int_0^T\int_{\Gamma_1}(u_i'u_i' + 2u_i'g_i(u_i') + g_i(u_i')g_i(u_i'))d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\Big(\int_0^T\int_{\Gamma_1}((a-a_0)^2 y_iy_i + y_i'y_i' + \phi_i\phi_i)d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq b_1\Big(\int_0^T\int_{\Gamma_1}u_i'g_i(u_i')d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\int_{\Gamma_1}(w_i'w_i' + v_i'v_i')d\Gamma dt$$

$$+\delta(a-a_0)^2\int_0^T(\|v\|_V^2 + \|w\|_V^2)dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq b_1(E(0) - E(T))^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\Big(\frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}E(T) + 2\delta T\frac{a}{a_0}(a-a_0)^2(E_0(v(T)) + E_0(w(0)))\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq b_1(E(0) - E(T))^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}E(T) + 2\delta T\frac{a}{a_0}(a-a_0)^2(1+\frac{a_0}{a}d)E_0(v(T))\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq b_2(E(0) - E(T))^{\frac{1}{2}}(E(T))^{\frac{1}{2}}$$

où,

$$b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2 + \max\{c_2, c_4\} + \max\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_3}\}};$$

$$b_2 = \frac{b_1}{1-\sqrt{d}}\sqrt{1 + 2\delta T(a-a_0)^2(\frac{a}{a_0} + d)}.$$

Et par conséquent

$$E(T) \leq \frac{1}{1+b_3}E(0) \tag{6.5}$$

où, $b_3 = \frac{1}{b_2^2}$. Par la même manière que dans la démonstration de (6.5) (on remplace l'intervalle $[0,T]$ par $[(m-1)T, mT]$), on obtient:

$$E(mT) \leq \frac{1}{1+b_3} E((m-1)T) \leq \cdots \leq \frac{1}{(1+b_3)^m} E(0), \quad m = 1, 2, \cdots,$$

ce qui implique que $E(t) \leq M_0 E(0) e^{-\omega_0 t}$ avec $M_0 = 1 + b_3$ et $\omega_0 = \frac{1}{T} \ln(1 + b_3)$. D'où (1.16).

Cas $p > 1$. On fixe $t \in \mathbb{R}^+$, soient

$$\Gamma_i^+ = \{x \in \Gamma_1 : |u_i'| > 1\} \quad \text{et} \quad \Gamma_i^- = \{x \in \Gamma_1 : |u_i'| \leq 1\}. \tag{6.6}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (1.14), (1.15) et (4.1), on obtient (dans toute la suite, c désigne une constante positive dépendante de $E(0)$ et de T)

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} |u_i'||\phi_i| d\Gamma dt \leq \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} u_i' u_i' d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} \phi_i \phi_i d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} |u_i'|^{p+1} d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} (v_i' v_i' + w_i' w_i') d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c(E(0) - E(T))^{\frac{1}{p+1}} (E(T))^{\frac{1}{2}};$$

de même, en utilisant (6.4),

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} (a - a_0)|u_i'||y_i| d\Gamma dt \leq c\Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} u_i' u_i' d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} y_i y_i d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} |u_i'|^{p+1} d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(\int_0^T (\|v\|_V^2 + \|w\|_V^2) dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c(E(0) - E(T))^{\frac{1}{p+1}} (E(T))^{\frac{1}{2}};$$

et par la même manière, on a:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} |y_i'||g_i(u_i')| d\Gamma dt$$

$$\leq c\Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} g_i(u_i') g_i(u_i') d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} y_i' y_i' d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} |g_i(u_i')|^{p+1} d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{p+1}} \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} (v_i' v_i' + w_i' w_i') d\Gamma dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c(E(0) - E(T))^{\frac{1}{p+1}} (E(T))^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, et comme dans le cas $p = 1$, on voit que:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} ((a-a_0)u_i' y_+ u_i' \phi_i - y_i' g_i(u_i')) d\Gamma dt \leq c(E(0)-E(T))^{\frac{1}{2}}(E(T))^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, on substitut ces trois inégalités dans (6.2), on obtient:

$$(E(T))^{\frac{1}{2}} \leq c\Big((E(0)-E(T))^{\frac{1}{2}} + (E(0)-E(T))^{\frac{1}{p+1}}\Big),$$

ce qui implique que

$$E(0) \leq c\Big(E(0)-E(T) + (E(0)-E(T))^{\frac{2}{p+1}}\Big).$$

Comme l'énergie $E(t) \to 0$ quand $t \to \infty$, on peut choisir $T > \frac{1}{\omega}\ln(\frac{a}{a_0}M)$ assez grand tel que $E(T) \leq 1$ (donc T est dépendant de $E(0)$). Soit $t \geq T$, par le même raisonnement qu'avant (on remplace l'intervalle $[0,T]$ par $[t, t+T]$), on obtient l'inégalité similaire à la précédente

$$E(t) \leq c\Big(E(t)-E(t+T) + (E(t)-E(t+T))^{\frac{2}{p+1}}\Big) \leq c(E(t)-E(t+T))^{\frac{2}{p+1}}.$$

Et par suite

$$(E(t))^{\frac{p+1}{2}} \leq c(E(t)-E(t+T)), \quad \forall t \geq T, \tag{6.7}$$

ce qui donne (1.17) (voir [63, lemma 1.1]).

7. Cas des feedbacks bornés: preuve du théorème 4

Dans la démonstration du théorème 4, on utilise la régularité (1.10) qui est satisfaite pour les solutions fortes, et dans ce cas là, les constantes M_0, M_1 et ω_0 dans (1.16) et (1.17) sont dépendantes de la solution u, ce qui ne nous permet pas de généraliser ces dernières pour les solutions faibles. On note aussi qu'on suppose toujours, comme dans le paragraphe précédent, que les fonctions g_i sont globalement Lipschitz. A la fin de ce chapitre on montrera comment éliminer cette hypothèse.

D'après la preuve du théorème 3, il suffit de montrer l'inégalité

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} (u_i' u_i' + g_i(u_i') g_i(u_i')) d\Gamma dt \tag{7.1}$$

$$\leq c\Big(E(0)-E(T) + (E(0)-E(T))^{\frac{2}{p+1}}\Big)$$

sous les conditions (1.14), (1.18)-(1.19). On définit Γ_i^+ et Γ_i^- par (6.6). Comme dans la preuve du théorème 3, en utilsant (1.14) on a:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^-} (u_i' u_i' + g_i(u_i') g_i(u_i')) d\Gamma dt \leq c(E(0) - E(T))^{\frac{2}{p+1}}. \tag{7.2}$$

D'autre part, on a:

Cas $n = 1$. On observe que (1.14) et la croissance de g_i impliquent que

$$\inf\{|g_i(x)| : |x| > 1\} > 0.$$

Donc on utilise (1.10), (4.1) et l'injection

$$V \subset (H^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^\infty(\Gamma))^n,$$

on obtient:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} u_i' u_i' d\Gamma dt \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_i^+} |u_i'| u_i' g_i(u_i') d\Gamma dt \tag{7.3}$$

$$\leq c \int_0^T \|u'\|_{(L^\infty(\Gamma))^n} (-E'(t)) dt \leq c(E(0) - E(T));$$

de même, en utilsant (1.19) et (4.3) (remarquer que $\lambda \geq 1$),

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} g_i(u_i') g_i(u_i') d\Gamma dt \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_i^+} |u_i'|^{\lambda - 1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma dt \tag{7.4}$$

$$\leq c \int_0^T (\|u'\|_{(L^\infty(\Gamma))^n})^{\lambda - 1} (-E'(t)) dt \leq c(E(0) - E(T)).$$

Donc on déduit que:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} (u_i' u_i' + g_i(u_i') g_i(u_i')) d\Gamma dt \leq c(E(0) - E(T)). \tag{7.5}$$

Cas $n \geq 2$. En utisant l'inégalité de Hölder on trouve:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} u_i' u_i' d\Gamma dt \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_i^+} |u_i'|^{\frac{2p}{p+1}} (u_i' g_i(u_i'))^{\frac{2}{p+1}} d\Gamma dt$$

$$\leq c \int_0^T \|u'\|^{\frac{2p}{p+1}}_{(L^{\frac{2p}{p-1}}(\Gamma))^n} \left(\int_{\Gamma_1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma \right)^{\frac{2}{p+1}} dt.$$

On utilise (1.18) et on applique le théorème de trace, on obtient:

$$V \subset (H^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^{\frac{2p}{p-1}}(\Gamma))^n.$$

Donc par l'utilisation du (1.10), on voit que:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} u_i' u_i' d\Gamma dt \leq c(E(0) - E(T))^{\frac{2}{p+1}}; \tag{7.6}$$

par la même manière, en utilisant (1.19), (4.3) et l'inégalité de Hölder,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} g_i(u_i') g_i(u_i') d\Gamma dt \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_i^+} |u_i'|^{\frac{2p}{p+1}} (u_i' g_i(u_i'))^{\frac{2}{p+1}} d\Gamma dt$$

$$\leq c \int_0^T \Big(\int_{\Gamma_1} |u_i'|^{\frac{2p}{p-1}} d\Gamma \Big)^{\frac{p-1}{p+1}} \Big(\int_{\Gamma_1} u_i' g_i(u_i') d\Gamma \Big)^{\frac{2}{p+1}} dt$$

$$\leq c \int_0^T \|u'\|^{\frac{2p}{p+1}}_{(L^{\frac{2p}{p-1}}(\Gamma))^n} (-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} dt \leq c(E(0) - E(T))^{\frac{2}{p+1}}.$$

Cette inégalité et (7.6) donnent

$$\int_0^T \int_{\Gamma_i^+} (u_i' u_i' + g_i(u_i') g_i(u')) d\Gamma dt \leq c(E(0) - E(T))^{\frac{2}{p+1}}. \tag{7.7}$$

Alors grâce aux (7.2), (7.5) et (7.7), on trouve (7.1) pour tout $n \in \{1, 2, \cdots\}$. Donc on termine la démonstration par le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 3, d'où on obtient les estimations (1.16)-(1.17).

On termine ce paragraphe par montrer comment éliminer l'hpothèse: les g_i sont globalement Lipschitz, supposée durant la preuve des estimations (1.16) et (1.17). On applique une méthode générale utilisée par Komornik [42]: pour toute fonction g_i on peut construire une suite de fonctions $\{g_i^k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ continues, croissantes, s'annulant en zéro, globalement Lipschitz telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_i^k(x) \to g_i(x) \quad \text{quand} \quad k \to \infty. \tag{7.8}$$

Pour cela il suffit de considérer

$$g_i^k(x) := g_i((Id_{\mathbb{R}} + \frac{1}{k} g_i)^{-1}(x)). \tag{7.9}$$

On vérifie alors que les fonctions g_i^k vérifient les conditions (1.14) et (1.15) dans le cas du théorème 3, et (1.14) et (1.19) dans le cas du théorème 4, avec des constantes positives c'_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (qui sont dépendantes seulement de c_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, et de p, λ) au lieu de c_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (voir [40]).

On peut alors appliquer les théorèmes 3 et 4 au problème (P_k) obtenu en remplaçant les g_i par les g_i^k. Soient $(u^0, u^1) \in \mathcal{H}$ et u la solution du problème (P) et z^k la solution du problème (P_k). D'après le théorème 3, l'énergie de la solution z^k vérifie les estimations (1.16) et (1.17) où les constantes M_0, M_1 et ω_0 sont indépendantes de k. Dans le cas du théorème 4, on prend $(u^0, u^1) \in W \times V$ vérifiant (1.9), on obtient que la solution z^k vérifie (1.16) et (1.17) où dans ce cas là les constantes M_0, M_1 et ω_0 sont dépendantes (de manière continue) de $\|z'^k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, V)}$. Pour conclure, il suffit de montrer que la suite $(z^k(t), z'^k(t))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{H}$ vers $(u(t), u'(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. D'après [42, théorème 7.3], il suffit de montrer que

$$(I + \mathcal{A}_k)^{-1} U \to (I + \mathcal{A})^{-1} U, \text{ dans } \mathcal{H} \quad \text{quand} \quad k \to \infty \tag{7.10}$$

pour tout $U = (v, w) \in \mathcal{H}$, où $\mathcal{A}_k$ désigne le générateur du semi-groupe associé au problème (P_k). Soit (v^0, w^0) et (v^k, w^k) les éléments de $D(\mathcal{A})$ tels que

$$(I + \mathcal{A})^{-1} U = (v^0, w^0) \quad \text{et} \quad (I + \mathcal{A}_k)^{-1} U = (v^k, w^k).$$

On note par B_k l'opérateur analogue à B correspondant aux fonctions g_i^k, $i = 1, \cdots, n$, donc par définition,

$$v = v^0 - w^0 = v^k - w^k \quad \text{et} \quad w = w^0 + Av^0 + Bw^0 = w^k + Av^k + B_k w^k. \tag{7.11}$$

L'objectif est donc de montrer que

$$v^k \to v^0 \quad \text{dans} \quad V, \quad \text{quand} \quad k \to \infty;$$

$$w^k \to w^0 \quad \text{dans} \quad H, \quad \text{quand} \quad k \to \infty.$$

Or $v^k = v^0 + w^k - w^0$. Donc tout revient à prouver que

$$w^k \to w^0 \quad \text{dans} \quad V, \quad \text{quand} \quad k \to \infty.$$

D'après (7.11), on a:

$$(I + A + B_k)(w^k - w^0) = (B - B_k) w^0. \tag{7.12}$$

Par définition de B_k (voir la preuve du lemme 2.1),

$$\|w^k - w^0\|_V^2 = \langle A(w^k - w^0), w^k - w^0 \rangle_{V', V}$$

$$\leq \langle (I + A + B_k)(w^k - w^0), w^k - w^0 \rangle_{V', V} = \langle (B - B_k) w^0, w^k - w^0 \rangle_{V', V}$$

$$= \int_{\Gamma_1} (g_i(w_i^0) - g_i^k(w_i^0))(w_i^k - w_i^0) d\Gamma$$

$$\leq \Big(\int_{\Gamma_1}(g_i(w_i^0)-g_i^k(w_i^0))^2 d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}\|w^k-w^0\|_V.$$

Ainsi

$$\|w^k-w^0\|_V \leq \Big(\int_{\Gamma_1}(g_i(w_i^0)-g_i^k(w_i^0))^2 d\Gamma\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut à l'aide du thérème de convergence dominée de Lebegue:

$$g_i(w_i^0)-g_i^k(w_i^0)\to 0 \quad \text{quad} \quad k\to\infty$$

et, d'après (1.7),

$$\left|g_i(w_i^0)-g_i^k(w_i^0)\right|^2 \leq c(1+\left|w^0\right|^2).$$

Donc on a la convergence, pour tout $U\in\mathcal{H}$,

$$(I+\mathcal{A}_k)^{-1}U\to(I+\mathcal{A})^{-1}U \text{ dans } V\times V, \quad \text{quand} \quad k\to\infty.$$

Et par suite, si $(u^0,u^1)\in W\times V$ comme dans le théorème 4, alors on a la convergence, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$,

$$(z^k(t),z'^k(t))\to(u(t),u'(t)), \text{ dans } V\times V, \quad \text{quand} \quad k\to\infty.$$

Donc

$$\|z'^k(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;V)}\to\|u'(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;V)}, \quad \text{quand} \quad k\to\infty.$$

Ceci nous permet d'éliminer l'hypothèse: g_i globalement Lipschitz, de la preuve du théorèmes 3 et 4.

CHAPITRE 5

STABILISATION FORTE DU SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉLASTICITÉ DANS DES DOMAINES NON NÉCESSAIREMENT BORNÉS

1. Introduction et résultats principaux

On considère dans ce chapitre le système d'élasticité soumis à un feedback interne non linéaire suivant:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + l_i(x, u_i') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma_{ij}\nu_j + a u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n & \end{cases}$$

où, Ω est un ouvert non vide de mesure finie de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2 avec $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$, $a > 0$, $l_i(x, u_i') = b_i(x) g_i(u_i')$ et $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Le terme général du tenseur d'élasticité σ_{ij} est défini comme dans le ch. 2 où, $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant les conditions de symétrie et coercivité habituelles:

$$(1.0) \qquad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} \quad \text{et} \quad a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \alpha \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \text{dans} \quad \Omega$$

pour un nombre $\alpha > 0$ fixé et pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. On utilise dans ce chapitre et dans les deux chapitres suivants les même notations que dans les ch. 2 et 3.

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'existence d'une solution unique du système (P) tendant vers zéro quand le temps t tend vers l'infini.

On considère sur les fonctions g_i et b_i les hypothèses suivantes:

$$(H0) \qquad b_i \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad b_i \geq b_0 > 0;$$

$$(H1) \qquad g_i \text{ est continue, localement Lipschitz, } \; g_i(0) = 0;$$

$$(H2) \qquad xg_i(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*;$$

il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que

$$(H3) \qquad c_1|x| \leq |g_i(x)| \leq c_2|x|, \quad \text{pour tout} \quad |x| \geq 1.$$

On montre alors les résultats d'existence, d'unicité et de stabilisation suivants:

Théorème 1. *Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in V \times H$, le système (P) admet une unique solution globale (faible)*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$$

où, $V = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n$ et $H = (L^2(\Omega))^n$.

Théorème 2. *L'énergie de la solution u, définie par*

$$(1.1) \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i' u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} a u_i u_i \, d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

vérifie

$$(1.2) \qquad E(t) \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad t \to \infty.$$

Si le domaine Ω est borné ou $\Gamma_1 = \emptyset$, le résultat de stabilité forte (1.2) peut être démontré en appliquant le principe d'invariance de LaSalle et en utilisant des injections compactes sur les espaces de Sobolev. Or, ce principe n'est plus applicable dans des domaines seulement de mesure finie avec $\Gamma_0 = \emptyset$, en l'absence de compacité.

Les fonctions non linéaires g_i qui représentent le terme d'amortissement ne sont pas nécessairement monotones et elles n'ont pas un comportement précis au voisinage de zéro. La monotonie de g_i joue un rôle essentiel dans l'existence de la solution du problème, et la croissance polynômiale de g_i à l'origine permet de construire une fonction standard de Lyapounov et d'utiliser des inégalitées intégrales pour obtenir un taux de décroissance de l'énergie (voir ch. 6).

La démonstration de (1.2) est basée sur une approche introduite par Aassila [1]. L'existence d'un taux de décroissance explicite est une question ouverte même si les fonctions g_i sont monotones et ont une croissance polynômiale près de zéro.

2. Existence et unicité: preuve du théorème 1

On munit les espaces de Hilbert $H = (L^2(\Omega))^n$ et $V = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n$, respectivement, par les normes suivantes:

$$\|v\|_H^2 = \int_\Omega v_i v_i dx \quad \text{et} \quad \|v\|_V^2 = \int_\Omega \sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx + \int_{\Gamma_1} a v_i v_i \, d\Gamma.$$

Le problème (P) peut être réécrit sous la forme abstraite

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U + F(U) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = U_0 := (u^0, u^1) \end{cases}$$

où, $U = (u, z)$, $z = u'$,

$$\mathcal{A}U = (z, Au) \quad \text{et} \quad Au = (\sigma_{1j,j}(u), \cdots, \sigma_{nj,j}(u)).$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, z) \in W \times V : \, \sigma_{ij}(u)\nu_j + a u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

où, $W = (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n$ muni de la norme

$$\|v\|_W^2 = \int_\Omega (\Delta v_i \Delta v_i + \sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v))\, dx + \int_{\Gamma_1} a v_i v_i \, d\Gamma.$$

L'application

$$F : V \times H \to V \times H$$

est définie par

$$F(u, z) = (0, -bg(z))$$

où, $bg(z) = (b_1 g_1(z_1), \cdots, b_n g_n(z_n))$.

L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $V \times H$. En effet, soit $U = (u, z)$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{z}) \in D(\mathcal{A})$, on a:

$$\langle \mathcal{A}U - \mathcal{A}\tilde{U}, U - \tilde{U}\rangle_{V\times H} = \langle z - \tilde{z}, u - \tilde{u}\rangle_V + \langle A(u - \tilde{u}), z - \tilde{z}\rangle_H$$

$$= \int_\Omega a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(z - \tilde{z})\varepsilon_{ij}(u - \tilde{u})\, dx$$

$$+ \int_{\Gamma_1} a(u_i - \tilde{u}_i)(z_i - \tilde{z}_i)\, d\Gamma + \int_\Omega \sigma_{ij,j}(u - \tilde{u})(z_i - \tilde{z}_i)\, dx$$

$$= \int_{\Gamma_1} a(u_i - \tilde{u}_i)(z_i - \tilde{z}_i)\, d\Gamma + \int_\Gamma \sigma_{ij}(u - \tilde{u})(z_i - \tilde{z}_i)\nu_j \, d\Gamma = 0$$

d'où $\mathcal{A}$ est monotone. Maintenant on montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal, c'est à dire $I+\mathcal{A}$ est surjectif de $D(\mathcal{A})$ dans $V\times H$. Soit $U_0 = (u^0, z^0) \in V\times H$, cherchons un élément $U = (u, z) \in D(\mathcal{A})$ vérifiant

$$U + \mathcal{A}U = U_0,$$

ce qui est équivalent à dire

$$u_i + z_i = u_i^0 \quad \text{et} \quad z_i + \sigma_{ij,j}(u) = z_i^0.$$

Donc il suffit de trouver un élément $u \in W$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ll} u_i - \sigma_{ij,j}(u) = f_i & \text{dans} \quad \Omega, \\ \sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où, $f = u^0 - z^0$, et prendre $z = u^0 - u$. Pour cela, on multiplie la première équation de (2.1) par une fonction test $v \in V$ et on intègre par parties, on trouve:

$$\int_\Omega (u_i v_i + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(v))dx + \int_{\Gamma_1} au_i v_i \, d\Gamma = \int_\Omega f_i v_i dx. \tag{2.2}$$

Grâce à la condition (1.0), on voit que le membre de gauche de (2.2) définit une forme bilinéaire bornée et coercive de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$. Et comme $f \in H$ par hypothèse, le membre de droite de (2.2) définit une forme linéaire bornée de V dans $\mathbb{R}$. Appliquant le théorème de Lax-Milgram, on déduit l'existence d'un élément $u \in V$ vérifiant (2.2) pour tout $v \in V$. Intégrons (2.2) par parties, on obtient que u vérifie, pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)v_i dx = \int_\Omega (u_i - f_i)v_i dx + \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i)v_i \, d\Gamma.$$

En particulier, pour $v \in (H_0^1(\Omega))^n$, on a

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)v_i dx = \int_\Omega (u_i - f_i)v_i dx.$$

Donc on applique la théorie de la régularité elliptique, on conclut que $u \in W$,

$$\|u\|_W \leq \|u - f\|_H$$

et la première équation de (2.1) est satisfaite. Et par suite, pour tout $v \in V$,

$$\int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij}(u)\nu_j + au_i)v_i \, d\Gamma = 0,$$

ce qui implique la deuxième équation de (2.1). D'où $\mathcal{A}$ est maximal. Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un C_0-groupe d'isométrie sur $V \times H$ et son domaine est dense dans $V \times H$. D'autre part, et d'après $(H0)-(H3)$, on a: l'application F est localement Lipschitz vérifiant, pour tout $U=(u,z) \in V \times H$,

$$\langle F(U), U\rangle_{V\times H} = -\int_\Omega b_i z_i g_i(z_i)dx \leq 0. \tag{2.3}$$

En effet, les hypothèses $(H1)$ et $(H3)$ impliquent qu'il existe une constante $c>0$ indépendante de x telle que

$$\big|g_i(x)\big| \leq c\big|x\big|, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Donc, pour tout $U=(u,z)$, $U_0=(u^0,z^0) \in V \times H$,

$$\|F(U-U_0)\|_{V\times H} = \|-bg(z-z^0)\|_H$$

$$\leq c\|b\|_{(L^\infty(\Omega))^n}\|z-z^0\|_H \leq c\|b\|_{(L^\infty(\Omega))^n}\|U-U_0\|_{V\times H},$$

d'où F est localement Lipschitz. On déduit donc l'existence globale d'une solution faible unique de (P) en utilisant le résultat général de Ball [9] suivant:

Theorem 2.1. *Soit $\mathcal{A}$ un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $e^{\mathcal{A}t}$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $F:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ vérifiant*

$$F \textit{ est localement Lipschitz,}$$

$$\langle F(U),U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \quad \textit{pour tout} \quad U \in \mathcal{H}.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U + F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

admet une unique solution faible $U(t)$ sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$.

3. Stabilisation forte: preuve du théorème 2

On montre tout d'abord la dissipativité du problème (P). En multipliant la première équation dans (P) par u_i' et en utilisant la définition (1.1) de l'énergie, on obtient facilement:

$$E'(t) = -\int_\Omega b_i u_i' g(u_i')dx, \tag{3.1}$$

d'après (H0) et (H2), le membre de droite de (3.1) est négatif, donc l'énergie est décroissante. On intègre (3.1) sur $[0,t]$, on obtient:

$$\int_0^t \int_\Omega b_i u_i' g(u_i') dx ds = E(0) - E(t) \leq E(0). \tag{3.2}$$

La preuve de (1.2) est basée sur le lemme suivant:

Lemme 3.1. *On a, pour tout $t > 0$,*

$$\int_0^t \int_\Omega \left| b_i u_i g_i(u_i') \right| dx\, ds \leq c E(0) \sqrt{t}, \tag{3.3}$$

et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c_\epsilon > 0$ tel que

$$\int_0^t \int_\Omega u_i' u_i'\, dx\, ds \leq n\epsilon t + c_\epsilon E(0)\sqrt{t}. \tag{3.4}$$

Preuve. Dans toute la suite on désigne par c une constante positive indépendante de t, et qui peut changer d'une ligne à l'autre.

Montrons (3.3). Grâce aux hypothèses $(H1)$ et $(H3)$, on voit que:

$$|g_i(x)| \leq c|x| \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

donc, en utilisant le fait que b_i est bornée, on obtient:

$$\int_\Omega \left| b_i u_i g_i(u_i') \right| dx \leq c \int_\Omega (b_i u_i' g_i(u_i'))^{\frac{1}{2}} \left| u_i \right| dx$$

$$\leq c \left(\int_\Omega b_i u_i' g_i(u_i') dx \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_H.$$

Donc on applique l'inégalité de Hölder, on trouve:

$$\int_0^t \int_\Omega \left| b_i u_i g_i(u_i') \right| dx ds \leq c \left(\int_0^t \int_\Omega b_i u_i' g_i(u_i') dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} \sup_{[0,t]} \|u(s)\|_H.$$

Comme l'énergie est décroissante, alors

$$\|u(s)\|_H \leq c\sqrt{E(s)} \leq c\sqrt{E(0)}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Et par suite, en utilisant (3.2),

$$\int_0^t \int_\Omega \left| b_i u_i g_i(u_i') \right| dx ds \leq c E(0) \sqrt{t}.$$

D'où (3.3).

On montre maintenant l'estimation (3.4). Soit $\epsilon > 0$. Posons:

$$M_i(\epsilon) = \sup\{\frac{x}{g_i(x)},\ \left|x\right| \geq \sqrt{\frac{\epsilon}{\left|\Omega\right|}}\} \quad \text{et} \quad M(\epsilon) = \max_{i=1}^{i=n} M_i(\epsilon)$$

où, $\left|\Omega\right|$ est la mesure de Lebegue de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Grâce aux hypothèses $(H1)$, $(H2)$ et $(H3)$, on a $M(\epsilon) < +\infty$. Alors il est clair que:

$$\int_{\left|u_i'\right| < \sqrt{\frac{\epsilon}{\left|\Omega\right|}}} u_i' u_i'\, dx \leq n\epsilon. \tag{3.5}$$

D'autre part, en utilisant (H0) et la décroissance de l'énergie,

$$\int_{\left|u_i'\right| \geq \sqrt{\frac{\epsilon}{\left|\Omega\right|}}} u_i' u_i' dx \tag{3.6}$$

$$= \left(\int_{\left|u_i'\right| \geq \sqrt{\frac{\epsilon}{\left|\Omega\right|}}} u_i' u_i' dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\left|u_i'\right| \geq \sqrt{\frac{\epsilon}{\left|\Omega\right|}}} \frac{u_i'}{g_i(u_i')} u_i' g_i(u_i') dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{2E(0)}\left(M(\epsilon)\int_\Omega u_i' g_i(u_i') dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{2}{b_0}E(0)M(\epsilon)}\left(\int_\Omega b_i u_i' g_i(u_i') dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit de (3.5) et (3.6) que

$$\int_\Omega u_i' u_i'\, dx \leq n\epsilon + \sqrt{\frac{2}{b_0}E(0)M(\epsilon)}\Big(\int_\Omega u_i' g_i(u_i') dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

et par suite, en utilisant l'inégalité de Hölder et (3.2), on obtient:

$$\int_0^t \int_\Omega u_i' u_i' dx ds \leq n\epsilon t + \sqrt{\frac{2}{b_0}E(0)M(\epsilon)}\left(\int_0^t \int_\Omega u_i' g_i(u_i')\, dx ds\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t}$$

$$\leq n\epsilon t + \sqrt{\frac{2}{b_0}M(\epsilon)}E(0)\sqrt{t} = n\epsilon t + c_\epsilon E(0)\sqrt{t}.$$

D'où (3.4).

La grande partie de la preuve du théorème 2 est déjà faite en montrant les estimations (3.3) et (3.4). Pour terminer la preuve, on multiplie la première équation de (P) par u_i et on intègre par parties, on trouve facilement:

$$\phi(t) - \phi(0) = 2\int_0^t \int_\Omega u_i' u_i' dx ds - 2\int_0^t E(s)\, ds - \int_0^t \int_\Omega b_i u_i g_i(u_i') dx ds$$

où on note

$$\phi(t) = \int_{\Omega} u_i u_i' dx.$$

Comme E est une fonction positive et décroissante, alors il existe $l \geq 0$ tel que

$$l = \lim_{t \to \infty} E(t).$$

Supposons que $l > 0$, donc, en utilisant (3.3) et (3.4), l'égalité précédente implique que:

$$\phi(t) \leq 2(n\epsilon - l)t + c_\epsilon' E(0)\sqrt{t} + \phi(0),$$

et par conséquent, en choisissant $\epsilon > 0$ assez petit,

$$\phi(t) \to -\infty \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

ce qui est impossible car

$$\big|\phi(t)\big| = \Big|\int_{\Omega} u_i u_i' dx\Big| \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_i' u_i' + u_i u_i) dx \leq cE(t) \leq cE(0).$$

Donc

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0.$$

Remarques. 1. Si Ω est borné ou $\Gamma_1 = \emptyset$, on peut prendre $b_i \in L^\infty(\Omega)$ tel que $b_i > 0$ au lieu de (H0) et montrer que le théorème 2 reste vrai en appliquant le principe d'invariance de LaSalle.

2. Les résultats de ce chapitre se généralisent au cas où on remplace la première équation de (P) par

$$u_i'' - \sigma_{ij,j} + l_i(x, u_i') + q_i u_i = 0$$

où, $q_i \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$\min_i \{\inf_{\Omega} q_i\} > -\frac{1}{c_0} \tag{3.7}$$

où, c_0 est la constante (dépendante seulement de Ω, a et α) qui vérifie

$$\int_{\Omega} v_i v_i \, dx \leq c_0 \Big(\int_{\Omega} \sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\, dx + \int_{\Gamma_1} a v_i v_i \, d\Gamma\Big), \quad \forall v \in V.$$

La condition (3.7) garantit que l'énergie, définie dans ce cas là par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_i' u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + q_i u_i u_i)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} a u_i u_i \, d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

définit une norme sur l'espace de Hilbert $V \times H$ pour le vecteur (u, u').

CHAPITRE 6

EXISTENCE GLOBALE ET STABILISATION INTERNE DU SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉLASTICITÉ

1. Introduction et résultats principaux

On s'intéresse dans ce chapitre au problème de stabilisation du système d'élasticité étudié (dans un cadre plus général) dans le chapitre précédent:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + b_i g_i(u_i') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

Dans le ch. 5, on a obtenu la stabilisation forte du système (P) dans un domaine Ω de mesure finie et sous certaines conditions sur les fonctions g_i et b_i sans aucune estimation sur le taux de décroissance de l'énergie. Notre objectif ici est d'obtenir des estimations précises sur le taux de décroissance de l'énergie vers zéro en supposant sur le domaine Ω et les fonctions g_i des hypothèses plus fortes que celles supposées précédemment.

On suppose que Ω est borné et que les fonctions b_i, g_i vérifient les conditions suivantes:

$$(H0) \qquad b_i \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad b_i \geq b_0 > 0;$$

$$(H1) \qquad g_i \, \text{est continue, croissante,} \quad g_i(0) = 0;$$

il existe des constantes $c_i' > 0$ et $q_i \in [1, \infty)$ avec $(n-2)q_i \leq n$ telles que

$$(H2) \qquad |g_i(x)| \leq c_i'(1 + |x|^{q_i}), \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Définissons l'énergie de la solution par la formule

$$(1.1) \qquad E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u_i' u_i' + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) dx, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

on remarque que E est une fonction positive et on a, formelement,

$$E'(t) = -\int_\Omega b_i u_i' g_i(u_i') dx \le 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.2}$$

(remarquer que $(H1)$ implique que $xg_i(x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$); alors notre système (P) est dissipatif.

On s'intéresse tout d'abord au problème d'existence et d'unicité de la solution. On définit les espaces de Hilbert H, V et W comme dans le ch. 5 $(\Gamma_1 = \emptyset)$ munis par les mêmes normes. On identifie H avec son dual H' on obtient:

$$W \hookrightarrow V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow W'$$

avec injection compacte et dense.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème 1. *Supposons que la condition (1.0) du ch. 5 et les hypothèses (H0)-(H2) sont satisfaites. Pour toute donnée initiale $(u^0, u^1) \in V \times H$, le système (P) admet une unique solution globale (faible)*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.3}$$

Si z est une autre solution de (P) correspondante à $(z^0, z^1) \in V \times H$, alors la fonction

$$E(u-z,t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\left|u' - z'\right|^2 + \sigma_{ij}(u-z)\varepsilon_{ij}(u-z) \Big) dx, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

est décroissante.

Remarque. Le deuxième résultat de ce théorème implique, premièrement, que $E(u-z)$ est bornée:

$$\|E(u-z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \le E(u-z,0). \tag{1.4}$$

Deuxièmment, on choisit $z = 0$ (il est possible car $g_i(0) = 0$) on obtient la décroissance de l'énergie de la solution.

Pour la régularité de la solution on a le résultat suivant:

Théorème 2. *Supposons que les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites. Soit*

(1.5). $$(u^0, u^1) \in W \times V.$$

Alors la solution u (dite forte) du système (P) vérifie

$$u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H), \quad u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V) \tag{1.6}$$

et

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W). \tag{1.7}$$

On étudie maintenant la stabilité du système (P) sous des conditions convenables sur les fonctions g_i. Supposons qu'il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3, $c_4 > 0$ et p, $q \in [1, \infty)$ telles que

$$c_1|x|^p \le |g_i(x)| \le c_2|x|^{1/p} \quad \text{si} \quad |x| \le 1, \tag{1.8}$$

$$c_3|x| \le |g_i(x)| \quad \text{si} \quad |x| > 1, \tag{1.9}$$

$$|g_i(x)| \le c_4|x|^q \quad \text{si} \quad |x| > 1 \tag{1.10}$$

et

$$(n-2)q \le n. \tag{1.11}$$

Remarque. On remarque que, si l'inégalité (1.8) (resp. (1.9) et (1.10)) est satisfaite dans un voisinage de zéro (resp. $\pm\infty$), alors elle est satisfaite (peut-être pour des constantes c_i différentes) pour $\big|x\big| \le 1$ (resp. $\big|x\big| > 1$).

Théorème 3. *Sous les hypothèses du théorème 1 on a: si les fonctions g_i vérifient (1.8)-(1.11), alors toute solution faible du système (P) vérifie*

$$E(t) \le ct^{\frac{-2}{p-1}} \quad \forall t > 0, \quad \textit{si} \quad p > 1 \tag{1.12}$$

et

$$E(t) \le E(0)e^{1-\omega t} \quad \forall t > 0, \quad \textit{si} \quad p = 1 \tag{1.13}$$

où, c et ω sont deux constantes positives dépendantes (de manière continue) de $E(0)$.

La condition (1.9) implique que les fonctions g_i ne sont pas bornées, le théorème suivant montre que les estimations (1.12) et (1.13) restent vraies pour les solutions fortes du système (P) même si les fonctions g_i sont bornées; ce qui nous permet de considérer les feedbacks bornés.

Théorème 4. *Supposons satisfaites les hypothèses du théorème 1. Si les fonctions g_i vérifient (1.8), (1.10) et (1.11) telles que*

$$\begin{cases} p \ge 1 & \textit{si} \quad n{=}1, \\ p > 1 & \textit{si} \quad n{=}2, \\ p \ge \frac{n}{2} & \textit{si} \quad n \ge 3, \end{cases} \tag{1.14}$$

alors toute solution forte u du système (P) vérifie les estimations (1.12) et (1.13) pour des constantes positives c et ω dépendantes de la solution u.

On va montrer les théorèmes 1 et 2 par l'application de la théorie des semi-groupes non linéaires en suivant les mêmes étapes que dans la preuve des théorèmes 1 et 2 du ch. 4. La démonstration des estimations de stabilité est basée sur les inégalités d'intégrales appliquées dans les ch. 3 et 4.

2. Existence et unicité: preuve du théorème 1

Soient

$$G_i(t) = \int_0^t g_i(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$\varphi(v) = \int_\Omega b_i(x)G_i(v_i(x))dx, \quad v \in V.$$

On prend l'application du dual $A : V \to V'$:

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = \langle u, v\rangle_V = \int_\Omega a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx, \quad u, v \in V.$$

On va écrire le système (P) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} u_i'' + A_iu_i + B_iu_i' = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ (u_i(0), u_i'(0)) = (u_i^0, u_i^1), \\ i = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où, $B = [B_i]_{i=1,\cdots,n} : V \to V'$ est un opérateur à définir.

On remarque premièrement que la condition au bord dans (P) est incluse dans la définition de V. De plus, pour $u \in W$ on a $A_iu_i = -\sigma_{ij,j}(u)$. En effet, pour tout $v \in V$ on a:

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = \langle u, v\rangle_V = \int_\Omega a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)v_{i,j}dx$$

$$= \int_\Gamma \sigma_{ij}(u)v_i\nu_j d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)v_idx = -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(u)v_idx$$

$$= \langle -\sigma_{.j,j}(u), v\rangle_H = \langle -\sigma_{.j,j}(u), v\rangle_{H',H} = \langle -\sigma_{.j,j}(u), v\rangle_{V',V}$$

d'où $A_iu_i = -\sigma_{ij,j}(u)$.

Finalement, on peut vérifier que l'application (non linéaire en général)

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} := \int_\Omega b_ig_i(u_i)v_idx, \quad u, v \in V$$

est bien définie. En effet, en utilisant (H0), (H2) et l'injection continue

$$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q_i+1}(\Omega),$$

on trouve:

$$\Big|\int_\Omega b_i g_i(u_i) v_i dx\Big| \le c' \Big(\int_\Omega \big|g_i(u_i)\big|^{\frac{q_i+1}{q_i}} dx\Big)^{\frac{q_i}{q_i+1}} \Big(\int_\Omega \big|v_i\big|^{q_i+1} dx\Big)^{\frac{1}{q_i+1}}$$

$$\le c' \Big(\int_\Omega (1+\big|u_i\big|^{q_i+1}) dx\Big)^{\frac{q_i}{q_i+1}} \Big(\int_\Omega \big|v_i\big|^{q_i+1} dx\Big)^{\frac{1}{q_i+1}}$$

$$\le c'(1+\|u\|_V^{q'})\|v\|_V < \infty$$

où, $q' = \max_i\{q_i\}$ et $c' > 0$ dépendant seulement de Ω et des constantes c_i' données par (H2). On multiplie l'équation dans (P) par $v \in V$, on intègre par parties sur Ω et on utilise la condition au bord pour obtenir une formulation faible du problème, on obtient aisément:

$$\langle u'' + Au + Bu', v\rangle_{V',V} = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+$$

d'où (2.1).

On pose

$$u' := z, \quad U := (u, z) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}U := (-z, Au + Bz).$$

On peut aussi écrire le système (P) sous la forme:

$$\begin{cases} U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = (u^0, u^1). \end{cases} \tag{2.2}$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = V \times H$ et on considère l'opérateur $\mathcal{A}$ défini dans $\mathcal{H}$, de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \{U = (u, z) \in V \times V : \ Au + Bz \in H\}.$$

Lemme 2.1. *$\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. La croissance des fonctions g_i donne la monotonie de $\mathcal{A}$. En effet, pour U, $\tilde{U} \in D(\mathcal{A})$ on a:

$$\langle \mathcal{A}U - \mathcal{A}\tilde{U}, U - \tilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \tilde{z} - z, u - \tilde{u}\rangle_V + \langle Au - A\tilde{u} + Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z}\rangle_H$$

$$= -\langle z - \tilde{z}, u - \tilde{u}\rangle_V + \langle A(u - \tilde{u}) + Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z}\rangle_{V',V}$$

$$= \langle Bz - B\tilde{z}, z - \tilde{z}\rangle_{V',V} = \int_\Omega b_i(g_i(z_i) - g_i(\tilde{z}_i))(z_i - \tilde{z}_i) dx \ge 0.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc monotone.

On montre maintenant que l'opérateur $I+\mathcal{A}$ est surjectif de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{H}$, ce qui signifie que $\mathcal{A}$ est maximal. Soit $(u^0, z^0) \in \mathcal{H}$, on cherche $(u, z) \in D(\mathcal{A})$ tel que $(I+\mathcal{A})(u, z) = (u^0, z^0)$, c'est à dire

$$u = z + u^0 \quad \text{et} \quad z + Az + Bz = z^0 - Au^0.$$

Donc il suffit de montrer que l'opérateur $I + A + B : V \to V'$ est surjectif et de prendre $u = z + u^0$ où, $z \in V$ tel que $(I + A + B)z = z^0 - Au^0$. Soit $f \in V'$, on pose $F : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u\|_V^2 + \varphi(u) - \langle f, u\rangle_{V',V}, \quad \forall u \in V.$$

Grâce aux hypothèses (H1) et (H2), la fonction F est bien définie, continue et différentiable. De plus on a:

$$F'(u)v = \langle (I + A + B)u - f, v\rangle_{V',V}, \quad \forall u, v \in V.$$

D'autre part, la monotonie des g_i implique la convexité de F, et comme $F(v) \to \infty$ quand $\|v\|_V \to \infty$ car $F(v) \geq (\frac{1}{2}\|v\|_V - \|f\|_{V'})\|v\|_V$ (remarquer que $0 \leq G_i(t) \leq tg_i(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$), alors F atteint son minimum en un point u. Donc $F'(u) = 0$, c'est à dire $(I + A + B)u = f$, d'où la surjectivité de l'opérateur $I + A + B$.

On applique la théorie des semi-groupes non linéaires, on trouve que le système (2.2) admet une solution faible unique U où la première composante est une solution de notre système (P). De plus on a $E(t) = \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2$, d'où la décroissance de l'énergie. Ceci termine la preuve du théorème 1.

3. Régularité: preuve du théorème 2

Le théorème 2 se déduit en montrant le lemme suivant:

Lemme 3.1. *On a:*

$$W \times V = D(\mathcal{A});$$

donc $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$. Et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_W \leq c(1 + \|Au + Bz\|_H + \|z\|_V^{q'}), \quad \forall (u, z) \in D(\mathcal{A}) \tag{3.1}$$

où, $q' = \max_i\{q_i\}$.

La première partie de ce lemme prouve la première partie du théorème 2 en appliquant toujours un résultat standard de la théorie des semi-groupes non linéaires (voir [42]). Les propriétés (1.6) et (2.1) impliquent que $u' \in$

$L^\infty(\mathbb{R}^+;V)$ et $Au + Bu' \in L^\infty(\mathbb{R}^+;H)$. En appliquant (3.1) pour $(u,z) = (u,u')$, on obtient (1.7).

Preuve du lemme 3.1. Soit $(u,z) \in W \times V$, montrons que $(u,z) \in D(\mathcal{A})$, pour cela, il faut montrer que $Au + Bz \in H$. Or $u \in W$, ce qui implique que $Au = \sigma_{ij,j}(u) \in H$, il suffit donc de vérifier l'estimation:

$$\left|\langle Bz, v\rangle_{V',V}\right| \leq c\|v\|_H, \quad \forall v \in V \tag{3.2}$$

pour une constante c. Comme dans le §2, en utilisant l'injection continue

$$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2q_i}(\Omega), \tag{3.3}$$

on a:

$$\left|\langle Bz, v\rangle_{V',V}\right| = \left|\int_\Omega b_i g_i(z_i) v_i dx\right| \leq c'\Big(\int_\Omega g_i(z_i) g_i(z_i) dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega v_i v_i dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c'\left(1 + \Big(\int_\Omega |z_i|^{q_i'} |z_i|^{q_i'} dx\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\|v\|_H$$

$$\leq c'\Big(1 + \|z\|_V^{q'}\Big)\|v\|_H = c\|v\|_H.$$

D'où (3.2). On sait que $W \times V$ dense dans $\mathcal{H}$, et par conséquent $D(\mathcal{A})$ est aussi.

D'autre part, soit $(u,z) \in D(\mathcal{A})$, montrons que $u \in W$. Comme $Au + Bz \in H$ alors, pour tout $v \in V$ fixé, on a:

$$\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V} = \langle Au + Bz, v\rangle_H,$$

et par suite:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v) dx = \int_\Omega f_i v_i dx$$

où, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ et $f_i = A_i u_i + B_i z_i - b_i g_i(z_i)$. Alors $f \in H$. En effet, $Au + Bz \in H$ par hypothèse, et grâce aux hypothèses (H0), (H2) et l'injection (3.3) on a:

$$\|bg(z)\|_H = \Big(\int_\Omega b_i^2 g_i^2(z_i) dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq c\left(1 + \int_\Omega |z_i|^{q_i} |z_i|^{q_i} dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

$$\leq c(1 + \|z\|_V^{2q'})^{\frac{1}{2}} \leq c(1 + \|z\|_V^{q'}) < \infty.$$

Donc on applique la théorie de la régularité elliptique on conclut que $u \in W$ et

$$\|u\|_W \leq c\|f\|_H \leq c(\|Au + Bz\|_H + \|bg(z)\|_H)$$

$$\leq c(1 + \|Au + Bz\|_H + \|z\|_V^{q'}).$$

D'où (3.1). La propriété (3.4) implique aussi que $bg(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$. La preuve du lemme 3.1 est donc terminée.

4. Cas des feedbacks non bornés: preuve du théorème 3

On va prouver les estimations (1.11) et (1.12) en considérant que les solutions fortes où la régularité (1.6)-(1.7) justifie tous les calculs. Le résultat se généralise aux solutions faibles en utilisant des arguments de densité (voir ch. 3, §2).

On commence par montrer l'inégalité suivante qui jouera un role fondamental dans la suite.

Lemme 4.1. *La fonction* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *définie par (1.1) est décroissante, localement absolument continue et*

$$\int_S^T \int_\Omega b_i g_i(u_i') u_i' dx dt = E(S) - E(T) \leq E(S) \tag{4.1}$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

Preuve. On fixe $0 \leq S < T < \infty$, d'après (P) et (1.1) on a:

$$0 = \int_S^T \int_\Omega (u_i'' - \sigma_{ij,j} + b_i g_i(u_i')) u_i' dx dt$$

$$= \int_S^T \int_\Omega (u_i'' u_i' + \sigma_{ij} u_{i,j}' + b_i g_i(u_i') u_i') dx dt - \int_S^T \int_\Gamma \sigma_{ij} \nu_j u_i' d\Gamma dt$$

$$= \int_S^T E'(t) dt + \int_S^T \int_\Omega b_i g_i(u_i') u_i' dx dt$$

$$= E(T) - E(S) + \int_S^T \int_\Omega b_i g_i(u_i') u_i' dx dt.$$

Et par suite

$$\int_S^T \int_\Omega b_i g_i(u_i') u_i' dx dt = E(S) - E(T) \leq E(S). \tag{4.2}$$

L'identité (4.2) implique aussi que E est localement absolument continue, et par conséquent elle est dérivable presque partout et vérifie (1.2).

Lemme 4.2. *On a:*

$$2 \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt = \left[E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u_i u_i' dx \right]_T^S \tag{4.3}$$

$$+\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega u_i u_i' dxdt+$$

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (2u_i'u_i' - b_i g_i(u_i')u_i)dxdt$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

Preuve. On a:

$$0 = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u_i'' - \sigma_{ij,j} + b_i g_i(u_i'))u_i dxdt$$

$$= \left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i u_i' dx\right]_S^T - \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega u_i u_i' dxdt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (-u_i'u_i' + \sigma_{ij}u_{i,j} + b_i g_i(u_i')u_i)dxdt.$$

On utilise la définition de l'énergie on obtient (4.3).

Lemme 4.3. *On a:*

$$2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (2u_i'u_i' - b_i g_i(u_i')u_i)dxdt \tag{4.4}$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

A partir de ce lemme, c désigne une constante positive indépendante de S et de T, et qui peut changer d'une ligne à l'autre.

Preuve du lemme 4.3. On utilise l'inégalité de Korn, la condition au bord dans (P) on obtient:

$$\left|E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i u_i' dx\right| \leq \frac{1}{2}E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u_i u_i + u_i'u_i')dx \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(t).$$

En utilisant la décroissance de l'énergie, on trouve:

$$\left|\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i u_i' dx\right]_T^S\right| \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(T) \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

De la même manière, on a:

$$\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega u_i u_i' dxdt$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)(-E'(t))\int_\Omega (u_i u_i + u_i'u_i')dxdt$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)(-E'(t))dt \leq c[E^{\frac{p+1}{2}}(t)]_T^S \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

On substitut ces deux dernières inégalités dans (4.3) on obtient (4.4).

Lemme 4.4. *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $c(\epsilon) > 0$ telle que*

$$(4.5)\quad 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i'u_i'dxdt \leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

Preuve. On fixe $t \in \mathbb{R}^+$, soient

$$(4.6)\qquad \Omega_i^+ = \{x \in \Omega : \left|u_i'\right| > 1\} \quad \text{et} \quad \Omega_i^- = \{x \in \Omega : \left|u_i'\right| \leq 1\}.$$

On utilise les hypothèses (H0), (1.8)-(1.9) et la propriété (1.2) on voit que:

$$\int_\Omega u_i'u_i'dx = \int_{\Omega_i^+} u_i'u_i'dx + \int_{\Omega_i^-} u_i'u_i'dx$$

$$\leq c\int_{\Omega_i^+} b_i g_i(u_i')u_i'dx + \int_{\Omega_i^-} \left|u_i'\right|^{\frac{2}{p+1}}\left|u_i'\right|^{\frac{2p}{p+1}}dx$$

$$\leq -cE'(t) + c\int_{\Omega_i^-}(b_i g_i(u_i')u_i')^{\frac{2}{p+1}}dx \leq -cE'(t) + c\Big(\int_\Omega b_i g_i(u_i')u_i'dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}$$

$$= -cE'(t) + c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}},$$

et par suite

$$2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i'u_i'dxdt$$

$$\leq -c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)E'(t)dt + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}dt.$$

En appliquant l'inégalité de Young sur le dernier terme de cette inégalité on trouve, pour tout $\epsilon > 0$,

$$2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i'u_i'dxdt \leq c[E^{\frac{p+1}{2}}(t)]_T^S - c(\epsilon)\int_S^T E'(t)dt + \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt$$

$$\leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

D'où l'inégalité (4.5).

Lemme 4.5. *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $c(\epsilon) > 0$ telle que*

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i g_i(u_i')dxdt\Big| \tag{4.7}$$

$$\leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)\Big(E(S)+E^{\frac{p+1}{2}}(S)\Big)$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

Preuve. On définit Ω_i^+ et Ω_i^- par (4.6). On utilise l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young on obtient:

$$\Big|\int_\Omega u_i g_i(u_i')dx\Big| \leq \Big|\int_{\Omega_i^+} u_i g_i(u_i')dx\Big| + \Big|\int_{\Omega_i^-} u_i g_i(u_i')dx\Big|$$

$$\leq \Big(\int_{\Omega_i^+}|u_i|^{q+1}dx\Big)^{\frac{1}{q+1}}\Big(\int_{\Omega_i^+}|g_i(u_i')|^{\frac{q+1}{q}}dx\Big)^{\frac{q}{q+1}}$$

$$+\frac{\epsilon_1}{2}\int_{\Omega_i^-}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dx + c(\epsilon_1)\int_{\Omega_i^-}b_i g_i^2(u_i')dx$$

où, $\epsilon_1 > 0$. En appliquant maintenant l'inégalité de Young sur le terme là où se trouve la constante q et on utilise (1.10) et l'injection continue (voir (1.11))

$$V \hookrightarrow (L^{q+1}(\Omega))^n,$$

et on majore le dernier terme en utilisant (H0) et (1.8) (comme au lemme 4.4), on trouve:

$$\Big|\int_\Omega u_i g_i(u_i')dx\Big|$$

$$\leq \epsilon_1 E^{\frac{q+1}{2}}(t) + c(\epsilon_1)\int_{\Omega_i^+}b_i g_i(u_i')u_i'dx + \epsilon_1 E(t) + c(\epsilon_1)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}$$

$$\leq \epsilon_1\Big(E^{\frac{q+1}{2}}(t)+E(t)\Big) + c(\epsilon_1)\Big((-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} - E'(t)\Big),$$

et par suite

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i g_i(u_i')dxdt\Big| \leq \epsilon_1\int_S^T\Big(E^{\frac{p+q}{2}}(t)+E^{\frac{p+1}{2}}(t)\Big)dt$$

$$+c(\epsilon_1)[E^{\frac{p+1}{2}}(t)]_T^S + c(\epsilon_1)\int_S^T\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}E^{\frac{p-1}{2}}(t)dt.$$

On applique encore une fois l'inégalité de Young sur le dernier terme, et comme l'énergie est décroissante et $q \geq 1$, alors

$$E^{\frac{p+q}{2}}(t) = E^{\frac{q-1}{2}}(t)E^{\frac{p+1}{2}}(t) \leq E^{\frac{q-1}{2}}(0)E^{\frac{p+1}{2}}(t),$$

on obtient, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i g_i(u_i')dxdt\Big| \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)\Big(E(S) + E^{\frac{p+1}{2}}(S)\Big).$$

D'où on trouve (4.7).

Lemme 4.6. *L'énergie E vérifie l'estimation suivante, pour une constante positive $\bar{c}$,*

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq \bar{c}E(S) \tag{4.8}$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

Preuve. Il suffit de substituer les inégalités (4.5) et (4.7) dans (4.4) en choisissant $\epsilon = \frac{1}{2}$, on conclut que

$$\begin{aligned}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt &\leq c\Big(E(S) + E^{\frac{p+1}{2}}(S)\Big) \\ &\leq c\Big(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(0)\Big)E(S) = \bar{c}E(S),\end{aligned} \tag{4.9}$$

ce qui implique (4.8).

Remarque. C'est dans la majoration de $E^{\frac{p+q}{2}}(t)$ dans le lemme 4.5 que la constante c de (4.9) devient dépendante de $E(0)$ sous la forme $c(E^{\frac{q-1}{2}}(0))$, cette dépendance est continue. Donc la constante $\bar{c}$ de (4.9) est continument dépendante de $E(0)$ ce qui nous permet de généraliser les résultats du théorème 3 aux solutions faibles en utilisant des arguments de densité. Si $p = q = 1$, la constante $\bar{c}$ de (4.9) devient indépendante de $E(0)$.

Les lemmes 4.1 et 4.6 impliquent que $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante vérifiant l'inégalité

$$\int_t^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(s)ds \leq \bar{c}E(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Alors on déduit les estimations (1.12) et (1.13) en appliquant [42, Theorem 9.1].

5. Cas des feedbacks bornés: preuve du théorème 4

On prend $(u^0, u^1) \in W \times V$, donc la solution u du système (P) à la régularité (1.6)-(1.7). On va voir dans la preuve que les constantes c et ω

sont dépendantes de u ce qui ne nous permet pas de généraliser les estimations (1.12) et (1.13) aux solutions faibles.

En choisissant $\epsilon = 1$ dans (4.7) et en substituant dans (4.4) (remarquer qu'on a pas utilisé la condition (1.9) dans la démonstration de ces deux estimations), on trouve:

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq c\Big(E(S) + E^{\frac{p+1}{2}}(S)\Big) + 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_i' u_i' dxdt. \tag{5.1}$$

Donc il nous reste à majorer le dernier terme de (5.1). Comme dans la preuve du lemme 4.4, on a:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_i^-} u_i' u_i' dxdt \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) \tag{5.2}$$

pour tout $\epsilon > 0$. D'autre part on a:

Cas: $n = 1$. On observe que (1.8) et la croissance de g_i impliquent que

$$\inf_{|x|\geq 1} |g_i(x)| > 0.$$

Alors on utilise (H0), (1.6), (1.2) et l'injection continue

$$V \subset (H^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^\infty(\Omega))^n,$$

on obtient:

$$\int_{\Omega_i^+} u_i' u_i' dx \leq c\int_{\Omega_i^+} |u_i'| b_i g_i(u_i') u_i' dx$$
$$\leq c\|u'\|_{(L^\infty(\Omega))^n}(-E'(t)) \leq -cE'(t),$$

et par conséquent

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_i^+} u_i' u_i' dxdt \leq -c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)E'(t)dt \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{5.3}$$

Cas: $n \geq 2$. En utilisant (H0) et l'inégalité de Hölder on constate que

$$\int_{\Omega_i^+} u_i' u_i' dx \leq c\int_{\Omega_i^+} |u_i'|^{\frac{2p}{p+1}} \Big(b_i g_i(u_i') u_i'\Big)^{\frac{2}{p+1}} dx \tag{5.4}$$

$$\leq c\Big(\int_\Omega |u_i'|^{\frac{2p}{p-1}} dx\Big)^{\frac{p-1}{p+1}} \Big(\int_\Omega b_i g_i(u_i') u_i' dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}$$

$$\leq c\|u'\|^{\frac{2p}{p+1}}_{(L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega))^n}\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}.$$

D'après (1.6) et l'injection continue (voir (1.14))

$$V \subset (H^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega))^n$$

on conclut à partir de (5.4)

$$\int_{\Omega_i^+} u_i' u_i' dx \leq c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}},$$

en utilisant l'inégalité de Young, on trouve:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_i^+} u_i' u_i' dxdt \leq c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}dt$$

$$\leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt - c(\epsilon)\int_S^T E'(t)dt,$$

donc

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_i^+} u_i' u_i' dxdt \leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S). \tag{5.5}$$

Les inégalités (5.3) et (5.5) impliquent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_i^+} u_i' u_i' dxdt \leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

On choisit $\epsilon \in]0, \frac{1}{4}[$ dans cette inégalité et dans (5.2), et on remplace par leur somme dans (5.1) on obtient (4.9). Ainsi les estimations (1.12) et (1.13) se déduisent en appliquant [42, Theorem 9.1].

Remarques. 1. Concernant les résultats de ce chapitre, la dernière remarque du ch. 5, §3 reste vraie.

2. Si les fonctions g_i vérifient (1.8) pour $p = 1$ alors cette condition est satisfaite pour tout $p \geq 1$. En choisissant p comme le plus petit nombre qui vérifie (1.14); c'est à dire

$$p = 1 \text{ si } n = 1, \quad p = 1 + \frac{1}{m},\ m \in \mathbb{N}^* \text{ si } p = 2 \quad \text{et} \quad p = \frac{n}{2} \text{ si } n \geq 3,$$

on constate que dans ce cas là l'énergie de toute solution forte du système (P) décroît exponentielement vers zéro si $n = 1$,

$$E(t) \leq ct^{-2m} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \text{si} \quad n = 2$$

et

$$E(t) \leq ct^{\frac{-4}{n-2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

CHAPITRE 7

STABILISATION INTERNE DU SYSTÈME GÉNÉRAL D'ÉLASTICITÉ PAR UN FEEDBACK LOCALEMENT DISTRIBUÉ

1. Introduction et résultats principaux

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de frontière Γ de classe C^2 et soit a_{ijkl} un ensemble des fonctions de $W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant les conditions de symétrie et coercivité (1.0) du ch. 5.

Dans toute la suite, on utilise les notations habituelles. On fixe un point $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, soit

$$m(x) = x - x^0, \quad R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On définit les espaces de Hilbert H, V et W comme dans le ch. 5 ($\Gamma_1 = \emptyset$) munis des mêmes normes.

On s'intéresse dans ce chapitre au problème de stabilisation du système d'élasticité étudié dans les deux chapitres précédents:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + l_i(x, u_i') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

où, $l_i(x, u_i') = b_i(x) g_i(u_i')$, $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions vérifiant les hypothèses (H1) et (H2) du ch. 6 et $b_i \in L^\infty(\Omega)$ sont des fonctions positives.

Notons tout d'abord que le système (P) est bien posé au sens des théorèmes 1 et 2 du ch. 6 où on a utilisé dans la preuve seulement la positivité et la bornitude des fonctions b_i. La condition

$$(1.1) \qquad b_i \geq b_0 > 0$$

a été utilisée dans le but d'obtenir les estimations de stabilisation.

Soient $(u^0, u^1) \in V \times H$ et u la solution unique de (P) de classe $u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$, alors l'énergie de la solution u définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u_i' u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}) dx, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.2}$$

satisfait (voir ch. 6, §4)

$$E'(t) = -\int_\Omega b_i u_i' g_i(u_i') dx \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+; \tag{1.3}$$

d'où la décroissance de l'énergie.

Dans ce chapitre, on considère le cas où les fonctions b_i sont exercées sur une partie ω de Ω au lieu de la condition (1.1) supposée dans le ch. 6.

Concernant l'équation des ondes, le problème de stabilisation avec un feedback interne localement distribué a été étudié par de nombreux auteurs, des résultats de stabilisation uniforme et polynomiale ont été obtenus sous différentes hypothèses.

Dans le cas non dégénéré (c'est à dire les dissipations ne tendent pas vers zéro dans ω) où, ω est un voisinage du bord de Ω, Zuazua [75] a montré que, si le feedback est linéaire, l'énergie décroît uniformément vers zéro. Nakao [66] a étendu ce résultat au cas d'un feedback donné par $a(x)|u'|^r u'$ avec $r > -1$ et ω est un voisinage de

$$\Gamma_+ = \{x \in \Gamma : \ m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \tag{1.4}$$

où, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ est le vecteur normal extérieur à Γ (par un voisinage de Γ_+, nous entendons l'intersection de Ω et d'un voisinage de Γ_+ dans $\mathbb{R}^n$) et a montré qu'alors l'énergie décroît polynomialement. Nakao [66] a étudié aussi le cas dégénéré (les dissipations tendent vers zéro dans ω). Dans ce cas, l'auteur a consideré seulement un feedback linéaire et a montré la décroissance polynomiale de l'énergie pour des données initiales dans

$$(H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

où, $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2m > n$. A l'aide de la méthode de multiplicateurs par morceaux, Martinez [59] a affaibli l'hypothèse géométrique sur la localisation de la dissipation, mais il a obtenu des estimations de décroissance plus faibles. Les preuves de [75] et [66] sont basées sur la méthode des multiplicateurs et sur un argument de compacité. Dans le cas dégénéré, dans [66] l'auteur a utilisé aussi le fait que la solution a la régularité suivante:

$$\bigcap_{k=0}^{k=m} C^k(\mathbb{R}^+; H^{m+k-1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^{m+1}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)). \tag{1.5}$$

Tcheugoué Tébou [72] a éliminé la condition $2m > n$ en simplifiant les preuves de [66]. Dans le cas non linéaire, la régularité (1.5) utilisée dans [66] et [72] n'est pas satisfaite en général, ce qui fait que, dans le cas dégénéré, la question de la stabilisation par un feedback non linéaire reste ouverte.

Concernant le système général d'élasticité, aucun résultat n'est connu dans cette direction. On considère dans ce chapitre les deux cas: dégénéré et non dégénéré, avec un feedback non linéaire dans les deux cas. Nos résultats généralisent et améliorent dans un certain sens les résultats mentionés ci-dessus. On donne une réponse positive à la question notée ci-dessus où on prend seulement des données initiales dans $W \times V$. De plus, si le feedback est linéaire et $n \geq 2$, on obtient un taux de décroissance plus grand que celui obtenu dans [72], sans aucune condition sur la dégénéréscence de b_i. Notre méthode de démonstration est basée sur la technique des multiplicateurs et sur des inégalités intégrales dûes à Haraux et Komornik; nous utilisons aussi une idée de [72] pour nous débarasser des termes d'ordres inférieurs génants.

Soient c_1, $c_2 > 0$ et p, $r \geq 1$ quatre constantes telles que les fonctions g_i vérifient la condition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$c_1 \min\{|x|, |x|^r\} \leq |g_i(x)| \leq c_2 \max\{|x|, |x|^{1/p}\}. \tag{1.6}$$

Remarque. La classe des fonctions qui vérifie (1.6) est très large; on peut prendre comme un exemple

$$g_i(x) = \begin{cases} a_i \big|x\big|^{r-1} x & \text{if} \quad \big|x\big| \leq 1, \\ a_i x & \text{if} \quad \big|x\big| \geq 1 \end{cases}$$

où, $a_i > 0$ et on prend $c_1 = \min_i\{a_i\}$, $c_2 = \max_i\{a_i\}$.

Soit ω un voisinage de la partie Γ_+ définie par (1.4) tel que

$$b_i(x) \geq b_0 > 0 \quad \text{sur} \quad \omega \tag{1.7}$$

ou

$$b_i(x) > 0 \quad \text{sur} \quad \omega \quad \text{et} \quad \int_\omega b_i^{-p'}(x)\, dx < \infty \tag{1.8}$$

pour une constante $p' > 0$ telle que

$$p'(p-1) > 2 \quad \text{et} \quad p'(p-1) \geq n. \tag{1.9}$$

Finalement, on suppose que les coefficients a_{ijkl} vérifient l'hypothèse suivante: il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$(2a_{ijkl} - m_p \partial_p a_{ijkl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \gamma a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1.10}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij} où, $\partial_p a_{ijkl} = \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_p}$.

Remarque. La condition (1.10) a été déjà supposée dans les ch. 3 et 4, cette condition peut être obtenue en choisissant les dérivées de a_{ijkl} assez petites par raport à a_{ijkl}. Si a_{ijkl} =const, alors on a $\gamma = 2$.

Alors on a les résultats de stabilité suivants:

Théorème 1. *Supposons satisfaites les conditions (1.10), (1.7) et (1.6) avec $r = p$. Alors pour toute donnée $(u^0, u^1) \in V \times H$, la solution du système (P) vérifie les estimations*

$$E(t) \leq ct^{\frac{-2}{p-1}} \quad t > 0, \quad si \quad p > 1 \tag{1.11}$$

et

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega_0 t} \quad t > 0, \quad si \quad p = 1 \tag{1.12}$$

où, $c > 0$ dépendante de $E(0)$ et $\omega_0 > 0$ est indépendante des donnés initiales.

Théorème 2. *Supposons que les conditions (1.10), (1.9), (1.8) et (1.6) avec $r = 1$ sont satisfaites. Alors pour toute donnée $(u^0, u^1) \in W \times V$, la solution u du système (P) vérifie l'estimation (1.11) pour une constante $c > 0$ dépendante de u.*

Remarques. 1. Dans le cas non dégénéré (1.7) et si les fonctions g_i vérifient les conditions (1.8) et (1.10) avec $q = 1$ du ch. 6, le théorème 4 du ch. 6 reste vraie, la preuve est identique.

2. Dans la démonstration, on considère seulement des données initiales $(u^0, u^1) \in W \times V$ où la solution u à la régularité (1.6)-(1.7) du ch. 6. Dans le cas non dégénéré (1.7), les constantes c et ω_0 données dans (1.11) et (1.12), respectivement, seront indépendantes de u, et donc des arguments de densité nous permeteront de généraliser (1.11) et (1.12) aux solutions faibles (voir ch. 3, §2). Dans le cas dégénéré (1.8) et comme les constantes c et ω_0 seront dépendantes de u dans ce cas là, (1.11) se montrera seulement pour les solutions fortes.

2. Cas non dégénéré: preuve du théorème 1

Comme dans le chapitre précédent, pour obtenir les estimations (1.11) et (1.12) il suffit de montrer que l'énergie vérifie l'inégalité suivante:

$$\int_S^{\infty} E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq cE(S) \tag{2.1}$$

pour tout $0 \leq S < +\infty$. Dans toute la suite, c désigne une constante positive indépendante de temps, et qui peut changer d'une ligne à l'autre.

Premièrement, on voit que l'énergie vérifie, pour tout $0 \leq S < T < \infty$,

$$\int_S^T \int_\Omega b_i u_i' g_i(u_i') dx dt = E(S) - E(T) \leq E(S). \tag{2.2}$$

(Voir ch. 6, lemme 4.1). On va montrer (2.1) dans plusieurs étapes.

Etape 1. On multiplie la première équation de (P) par $2E^{\frac{p-1}{2}}(t) h_m u_{i,m}$ avec $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$. En intégrant par parties on obtient (comme dans la preuve de l'identité (2.5) du ch. 2)

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega (2h_{m,j}\sigma_{ij}u_{i,m} + (\operatorname{div} h)(u_i'u_i' - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}))dxdt \tag{2.3}$$

$$= \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Gamma (h\cdot\nu)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} d\Gamma dt + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega h_m(\partial_m a_{ijkl})\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} dxdt$$

$$-2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega h_m u_{i,m} b_i g_i(u_i') dxdt$$

$$+\Big[2E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega h_m u_{i,m} u_i' dx\Big]_T^S + (p-1)\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t) \int_\Omega h_m u_{i,m} u_i' dxdt.$$

En utilisant la définition de l'énergie et les inégalités de Hölder et de Korn, on trouve:

$$\left|2E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega h_m u_{i,m} u_i' dx\right| \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(t)$$

et

$$\left|(p-1)E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t) \int_\Omega h_m u_{i,m} u_i' dx\right| \leq cE^{\frac{p-1}{2}}(t)(-E'(t)).$$

Comme l'énergie est décroissante, alors les deux derniers termes de (2.3) peuvent être facilement majorés par $cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$. Donc, en prenant $h = m$ dans (2.3) et en utilisant (1.10) et la définition de Γ_+, on conclut que

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega ((\gamma - n)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + nu_i'u_i')dxdt \tag{2.4}$$

$$\leq -2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega m_m u_{i,m} b_i g_i(u_i') dxdt + cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$$

$$+R\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Gamma_+} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} d\Gamma dt.$$

On prend maintenant dans (2.3) $h \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$ tel que

$$h = \nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_+; \quad h\cdot\nu \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{et} \quad h = 0 \quad \text{sur} \quad \tilde{\omega}^c$$

où, $\tilde{\omega}$ est un autre voisinage de Γ_+ strictement inclu dans ω (concernant l'existence d'un tel vecteur h, voir Zuazua [75] et ses références), on déduit:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_+}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\Gamma dt = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_+}(h\cdot\nu)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\Gamma dt \tag{2.5}$$

$$\leq \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Gamma}(h\cdot\nu)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\Gamma dt$$

$$\leq c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\tilde{\omega}}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i'u_i')dxdt + cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$$

$$+2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\tilde{\omega}}h_m u_{i,m}b_i g_i(u_i')dxdt.$$

D'autre part et pour tout $\epsilon > 0$ (noter que b_i est bornée),

$$\left|2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}m_m u_{i,m}b_i g_i(u_i')dxdt\right|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}b_i g_i^2(u_i')dxdt;$$

$$\left|2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\tilde{\omega}}h_m u_{i,m}b_i g_i(u_i')dxdt\right|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2R}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}b_i g_i^2(u_i')dxdt.$$

En combinant ces deux inégalités avec (2.4) et (2.5) on voit que

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}((\gamma-n)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+nu_i'u_i')dxdt \tag{2.6}$$

$$\leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}b_i g_i^2(u_i')dxdt + \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt$$

$$+c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\tilde{\omega}}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i'u_i')dxdt.$$

Etape 2. On va majorer maintenant le terme

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\tilde{\omega}}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dxdt.$$

On multiplie la première équation de (P) par $E^{\frac{p-1}{2}}(t)\eta(x)u_i$ où, $\eta\in W^{1,\infty}(\Omega)$ et on intègre par parties, on obtient l'identité suivante:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \eta(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i'u_i')dxdt+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(\partial_j\eta)\sigma_{ij}u_idxdt \tag{2.7}$$

$$=-\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \eta b_ig_i(u_i')u_idxdt$$

$$+\Big[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \eta u_iu_i'dx\Big]_T^S+\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega \eta u_iu_i'dxdt.$$

En utilisant la définition de l'énergie, les deux derniers termes de cette identité peuvent être aisément majorés par $cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$. Donc, en prenant $\eta=n-\frac{\gamma}{2}$ dans (2.7), on trouve:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(n-\frac{\gamma}{2})(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i'u_i')dxdt \tag{2.8}$$

$$\leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S)-(n-\frac{\gamma}{2})\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega b_ig_i(u_i')u_idxdt.$$

On prend maintenat dans (2.7) une fonction $\eta\in W^{1,\infty}(\Omega)$ telle que

$$\eta=1\quad\text{dans}\quad\tilde\omega;\quad 0\leq\eta\leq 1\quad\text{dans}\quad\Omega\quad\text{et}\quad\eta=0\quad\text{dans}\quad\omega^c$$

(concernant l'existence d'une telle fonction η, voir [75] et ses référence), on déduit:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\tilde\omega}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dxdt\leq\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \eta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dxdt \tag{2.9}$$

$$\leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S)-\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega(\partial_j\eta)\sigma_{ij}u_idxdt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega(u_i'u_i'+b_i\big|g_i(u_i')u_i\big|)dxdt.$$

On a:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega b_i\big|g_i(u_i')u_i\big|dxdt\leq c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega(u_iu_i+b_ig_i^2(u_i'))dxdt;$$

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega(\partial_j\eta)\sigma_{ij}u_idxdt\Big|$$

$$\leq\epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt+c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega u_iu_idxdt$$

et

$$\Big|(n-\frac{\gamma}{2})\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega b_i g_i(u_i')u_i dxdt\Big|$$

$$\leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega b_i g_i^2(u_i')dxdt$$

pour tout $\epsilon > 0$. En combinant ces trois dernières inégalités avec (2.6), (2.8) et (2.9) où, $\epsilon > 0$ est assez petit, on déduit (noter que $\tilde{\omega} \subset \omega$)

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega b_i g_i^2(u_i')dxdt \tag{2.10}$$

$$+c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega u_i'u_i'dxdt + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega u_i u_i dxdt.$$

Etape 3. Pour majorer le dernier terme de (2.10), on adapte à notre système une méthode donnée par Tcheugoué Tébou [72] dans le cadre de l'équation des ondes linéaire. On montre le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Pour tout $\epsilon > 0$, on a:*

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\omega u_i u_i dxdt \leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \tag{2.11}$$

$$+cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(\int_\omega u_i'u_i'dx + \int_\Omega b_i g_i^2(u_i')dx\Big)dt.$$

Preuve. On fixe $t \in \mathbb{R}^+$ et on pose $z(t)$ la solution du problème:

$$\begin{cases} -\sigma_{ij,j}(z) = \chi(\omega)u_i & \text{dans} \quad \Omega, \\ z_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{$P1$}$$

où, $\chi(\omega)$ est la fonction caractéristique de ω. On a:

$$\int_\omega u_i z_i dx = \int_\Omega \chi(\omega)u_i z_i dx = -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(z)z_i dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(z)\varepsilon_{ij}(z)dx = \|z\|_V^2.$$

Et par conséquent

$$\|z\|_V^2 \leq c\int_\omega u_i u_i dx \tag{2.12}$$

(la constante c dans (2.12) est indépendante de u). On dérive $(P1)$ par raport au temps et on déduit de (2.12) que

$$\|z'\|_V^2 \leq c\int_\omega u_i'u_i'dx. \tag{2.13}$$

D'autre part, on remarque que

$$\int_\omega u_i u_i dx = \int_\Omega \chi(\omega) u_i u_i dx \tag{2.14}$$

$$= -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(z) u_i dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(z)\varepsilon_{ij}(u) dx.$$

Multiplions la première équation de (P) par $z_i E^{\frac{p-1}{2}}(t)$, intégrons par parties et utilisons (2.14) on obtient:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\omega u_i u_i dx dt = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega (z_i' u_i' - z_i b_i g_i(u_i')) dx dt \tag{2.15}$$

$$+\Big[E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega z_i u_i' dx\Big]_T^S + \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega z_i u_i' dx dt.$$

En utilisant (2.12), on peut majorer les deux derniers termes de (2.15) par $cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$. D'autre part, en utilisant (2.12), (2.13) et en appliquant l'inégalité de Young, on a:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega z_i' u_i' dx dt$$

$$\le \epsilon' \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u_i' u_i' dx dt + c \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega z_i' z_i' dx dt$$

$$\le \epsilon' \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u_i' u_i' dx dt + c \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\omega u_i' u_i' dx dt;$$

$$-\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega z_i b_i g_i(u_i') dx dt$$

$$\le \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \Big(\epsilon' \int_\Omega z_i z_i dx dt + c \int_\Omega b_i g_i^2(u_i') dx\Big) dt$$

$$\le \epsilon' \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\omega u_i u_i dx dt + c \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega b_i g_i^2(u_i') dx dt$$

pour tout $\epsilon' \in]0,1[$. En substituant ces deux inégalités dans (2.15) et en choisissant $\epsilon = \frac{2\epsilon'}{1-\epsilon'}$ on obtient (2.11).

En prenant $\epsilon > 0$ assez petit, les estimations (2.10) et (2.11) impliquent que

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt \le cE^{\frac{p+1}{2}}(S) \tag{2.16}$$

$$+c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(\int_\omega u_i'u_i'dx+\int_\Omega b_ig_i^2(u_i')dx\Big)dt.$$

Etape 4. Il nous reste à estimer le dernier terme de (2.16). En utilisant les conditions (1.6) et (1.7), on montre le lemme suivant:

Lemme 2.2. *On a, pour tout* $t\in\mathbb{R}^+$,

$$\int_\Omega b_ig_i^2(u_i')dx\le -cE'(t)+c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}} \tag{2.17}$$

et

$$\int_\omega u_i'u_i'dx\le -cE'(t)+c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}. \tag{2.18}$$

Preuve. On fixe $t\ge 0$ et on pose (comme dans le ch. 6, §4)

$$\Omega_i^-=\{x\in\Omega:\ \big|u_i'(x)\big|\le 1\},\quad \Omega_i^+=\{x\in\Omega:\ \big|u_i'(x)\big|>1\}.$$

On utilise la condition (1.6) et l'inégalité de Hölder, on voit que (noter aussi que b_i est bornée)

$$\int_{\Omega_i^-} b_ig_i^2(u_i')dx\le c\int_{\Omega_i^-}\Big(b_iu_i'g_i(u_i')\Big)^{\frac{2}{p+1}}dx\le c\Big(\int_{\Omega_i^-} b_iu_i'g_i(u_i')dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}$$

$$\le c\Big(\int_\Omega b_iu_i'g_i(u_i')dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}\le c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}$$

(on a utilisé (1.3) dans la dernière majoration) et

$$\int_{\Omega_i^+} b_ig_i^2(u_i')dx\le c\int_{\Omega_i^+} b_iu_i'g_i(u_i')dx\le -cE'(t).$$

Ces deux dernières inégalitées donnent (2.17).

Montrons (2.18). D'après (1.7) on a:

$$\int_\omega u_i'u_i'dx\le\frac{1}{b_0}\int_\omega b_iu_i'u_i'dx\le\frac{1}{b_0}\int_\Omega b_iu_i'u_i'dx,$$

et par suite, en utilisant encore (1.6) (noter qu'on a dans ce cas $r=p$), on montre par la même manière l'estimation (2.18). La preuve du lemme 2.2 est donc terminée.

On substitue (2.17) et (2.18) dans le membre de droite de (2.16), on trouve:

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt\le cE^{\frac{p+1}{2}}(S)+c\int_S^T\Big(-E^{\frac{p-1}{2}}(t)E'(t)+E^{\frac{p-1}{2}}(t)(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}\Big)dt$$

$$\leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}dt.$$

Appliquant l'inégalité de Young, pour tout $\epsilon > 0$ on a:

$$E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}} \leq \epsilon E^{\frac{p+1}{2}}(t) + c\epsilon^{\frac{1-p}{2}}(-E'(t)).$$

Et par suite, en utilisant la décroissance de l'énergie,

$$(1-\epsilon)\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + c\epsilon^{\frac{1-p}{2}}\int_S^T(-E'(t))dt$$

$$\leq c(1+\epsilon^{\frac{1-p}{2}})\Big(1+E^{\frac{p-1}{2}}(S)\Big)E(S) \leq c(1+\epsilon^{\frac{1-p}{2}})\Big(1+E^{\frac{p-1}{2}}(0)\Big)E(S),$$

choisissant $0 < \epsilon < 1$ et laissant T tendre vers l'infini, on obtient:

$$\int_S^\infty E(t)^{\frac{p+1}{2}}dt \leq c\Big(1+E(0)^{\frac{p-1}{2}}\Big)E(S) = \bar{c}E(S) \tag{2.19}$$

d'où l'estimation cherchée (2.1). Ceci achève la preuve du théorème 1.

Remarque. La constante positive c de (2.19) est indépendante de $E(0)$, donc si $p = 1$, la constante positive $\bar{c}$ de (2.19) est aussi.

3. Cas dégénéré: preuve du théorème 2

Il suffit ici de montrer le lemme 2.2 sous les conditions (1.8) et (1.9). Or (2.17) se montre exactement comme dans le §2, montrons alors (2.18). On a, d'après (1.6), (noter qu'on a supposé que $r = 1$)

$$c_1|x| \leq |g_i(x)|, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Comme les données initiales $(u^0, u^1) \in W \times V$, alors la solution u du (P) vérifie (ch. 6, théorème 2)

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V). \tag{3.2}$$

On pose $q = 1 + \frac{4}{p'(p-1)-2}$, donc (1.9) implique que $q \in [1, \infty[$ et $(n-2)q \leq n+2$, d'où on a l'injection continue

$$V \hookrightarrow (L^{q+1}(\Omega))^n.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder et en utilisant (3.1), (3.2), on trouve:

$$\int_\omega u_i' u_i' dx = \int_\omega |u_i'|^{\frac{2(p-1)}{p+1}}|u_i'|^{\frac{4}{p+1}}dx$$

$$\le c\Big(\int_\omega |u_i'|^{q+1}dx\Big)^{\frac{2(p-1)}{(q+1)(p+1)}}\Big(\int_\omega |u_i'|^{\frac{4(q+1)}{(p+1)(q+1)-2(p-1)}}dx\Big)^{1-\frac{2(p-1)}{(p+1)(q+1)}}$$

$$\le c\|u'(t)\|_V^{\frac{2(p-1)}{p+1}}\Big(\int_\omega b_i^{-\frac{p'}{p'+1}}b_i^{\frac{p'}{p'+1}}|u_i'|^{\frac{4(q+1)}{(p+1)(q+1)-2(p-1)}}dx\Big)^{1-\frac{2(p-1)}{(p+1)(q+1)}}$$

$$\le c\Big[\Big(\int_\omega b_i^{-p'}dx\Big)^{\frac{1}{p'+1}}\Big(\int_\omega b_i|u_i'|^{\frac{p'+1}{p'}\frac{4(q+1)}{(p+1)(q+1)-2(p-1)}}dx\Big)^{\frac{p'}{p'+1}}\Big]^{1-\frac{2(p-1)}{(p+1)(q+1)}}$$

$$\le c\Big(\int_\Omega b_iu_i'g_i(u_i')dx\Big)^{\frac{2}{p+1}}\le c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}};$$

on a utilisé (1.3) dans la dernière étape et le fait que

$$\frac{p'+1}{p'}\frac{4(q+1)}{(p+1)(q+1)-2(p-1)}=2,\qquad \frac{p'}{p'+1}\Big(1-\frac{2(p-1)}{(p+1)(q+1)}\Big)=\frac{2}{p+1}.$$

D'où (2.18). Donc la preuve du théorème 2 se termine comme dans le paragraphe précédent.

Remarques. 1. Si la condition (1.6) est satisfaite pour $p=1$, par exemple les g_i sont linéaires, alors elle est satisfaite pour tout $p\in[1,\infty[$. On obtient donc, la stabilité exponentielle dans le cas non dégénéré (1.7). Et dans le cas dégénéré (1.8), en prenant

$$p=\frac{n}{p'}+1 \quad \text{si} \quad n\ge 3 \quad \text{et} \quad p=\frac{2+2\epsilon}{p'}+1 \quad \text{si} \quad n=1,\,2$$

où, $\epsilon\in]0,1[$ (donc (1.9) est vérifié), on obtient:

$$E(t)\le ct^{-\frac{2p'}{n}} \quad t>0, \quad \text{si} \quad n\ge 3 \tag{3.3}$$

et

$$E(t)\le ct^{-\frac{p'}{1+\epsilon}} \quad t>0, \quad \text{si} \quad n=1,\,2. \tag{3.4}$$

Pour $n\ge 2$, (3.3) et (3.4) donnent un taux de décroissance plus grand que celui obtenu dans [66] et [72]:

$$E(t)\le ct^{-\frac{p'}{n}} \quad t>0, \quad \text{si} \quad n\ge 3 \text{ et } p'\ge n-2,$$

$$E(t)\le ct^{-\frac{p'}{2}} \quad t>0, \quad \text{si} \quad n=2$$

et

$$E(t)\le ct^{-2p'} \quad t>0, \quad \text{si} \quad n=1.$$

De plus, on a aucune condition sur la dégénéréscence de b_i contrairement aux [66] et [72]. Dans le cas $n = 1$, notre résultat est moins bon que celui obtenu dans [66] et [72].

2. On considère le système d'élasticité suivant avec un potentiel de type

$$(P2) \qquad \begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + q_i u_i + l_i(x, u_i') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(0) = u_i^0 \quad \text{et} \quad u_i'(0) = u_i^1 & \text{dans} \quad \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

où, $q_i \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant la condition (3.7) du ch. 5 ($\Gamma_1 = \emptyset$). Si la quantité $\max_i\{\|q_i\|_{L^\infty(\Omega)}\}$ est suffisamment petite, alors des résultats analogues à ceux des théorèmes 1 et 2 peuvent être obtenus en utilisant la méthode développée dans ce chapitre où l'énergie du système $(P2)$ est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i' u_i' + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + q_i u_i^2)dx, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

CHAPITRE 8

STABILISATION UNIFORME DE L'ÉQUATION DES ONDES AVEC CONDITION AUX LIMITES DE TYPE MÉMOIRE

1. Introduction et résultat principal

On présente dans ce chapitre un résultat de décroissance uniforme de l'énergie de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire. Soit, dans toute la suite, Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2 où, Γ_0 et Γ_1 sont deux parties disjointes de Γ. Soient $k : \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $b : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions appartenant à $C^2(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Gamma_1))$ et $L^\infty(\Gamma_1)$, respectivement, vérifiant les conditions suivantes:

$$k' \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \tag{1.1}$$

et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$k'' \geq -\alpha k' \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+. \tag{1.2}$$

Remarque. On peut prendre comme exemple la fonction

$$k(t,x) = f(x)e^{-\alpha t} + g(x), \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \tag{1.3}$$

où, f, $g \in L^\infty(\Gamma_1; \mathbb{R}^+)$.

On considère le système suivant:

$$(P) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + \int_0^t k(t-s)u'(s)\,ds + bu' = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0 \ \text{ et } \ u'(0) = u_1 & \text{dans } \ \Omega. \end{cases}$$

Propst et Prüss [68] ont montré, dans un cadre plus général, que le système (P) est bien posé au sens standard, plus précisément, ils ont montré le théorème suivant:

Théorème (Propst et Prüss [68]). *Pour toute donnée initiale* $(u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *où,* $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \quad sur \quad \Gamma_0\}$*, le système* (P) *admet une solution unique* u *(définie au sens faible) vérifiant*

$$u \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)). \tag{1.4}$$

De plus, si $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \times H^1_0(\Omega)$*, alors la solution* u *(dite forte) a la régularité suivante:*

$$u \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega)). \tag{1.5}$$

Par contre, aucun résultat de stabilisation n'a été énoncé. En adaptant la méthode des multiplicateurs et en utilisant des inégalités particulières, on montre que le système (P) est uniformément stable.

On va transformer la condition au bord sur la partie Γ_1, on suppose que

$$u_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.6}$$

Par intégration par parties on voit qu'on a sur Γ_1:

$$\int_0^t k(t-s)u'(s)ds = [k(t-s)u(s)]_0^t + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds$$

$$= \int_0^t k'(t-s)u(s)ds + k(0)u(t) - k(t)u_0 = \int_0^t k'(t-s)u(s)ds + k(0)u(t),$$

donc sur la partie Γ_1 on a la condition

$$\partial_\nu u + \int_0^t k'(t-s)u(s)\, ds + k(0)u + bu' = 0. \tag{1.7}$$

On définit l'énergie associée à la solution u par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((u')^2 + |\nabla u|^2)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} ku^2\, d\Gamma \tag{1.8}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s)(u(t)-u(s))^2\, dsd\Gamma$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. D'après (1.1) on constate que E est une fonction positive.

On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on pose

$$m(x) = x - x_0,\ x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.9}$$

On suppose que

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \inf_{\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+} k \neq 0, \tag{1.10}$$

$$m \cdot \nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \tag{1.11}$$

et qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$m \cdot \nu \geq \delta \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \tag{1.12}$$

où, ν est le vecteur normal extérieur à Γ. Concernant la fonction b, on suppose qu'elle est minorée par une constante $\beta > 0$:

$$b \geq \beta \quad \text{sur} \quad \Gamma_1. \tag{1.13}$$

Notre résultat de stabilisation est le suivant:

Théorème 1. *Supposons satisfaites les conditions (1.1)-(1.2), (1.10)-(1.13). Si*

$$\alpha \inf_{\Gamma_1} k(0) > -2 \inf_{\Gamma_1} k'(0), \tag{1.14}$$

alors pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, l'énergie de la solution du système (P) vérifie, pour une constante $\omega > 0$ indépendante de (u_0, u_1),

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.15}$$

Remarques. 1. La condition (1.10) garantit que la quantité

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} k(s) u^2 \, d\Gamma$$

définit une norme sur $H^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ fixé.

2. Les conditions (1.11) et (1.12) impliquent que $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ et que le domaine Ω est étoilé par rapport à x_0, la condition (1.12) peut être affaiblie (voir [47]).

2. Stabilisation uniforme: preuve du théorème 1

Comme dans le chapitre précédent, on va montrer l'existence d'une constante strictement positive c dépendante seulement de Ω où l'énergie E vérifie, pour toute solution faible du système (P),

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq cE(S), \quad \forall S \in \mathbb{R}^+, \tag{2.0}$$

et l'estimation cherchée (1.15) se déduit en appliquant [42, Theorem 8.1]. Comme la constante c est indépendante de la solution u, il suffit de montrer (2.0) pour les solutions fortes, un simple argument de densité nous permet d'etendre le résultat aux solutions faibles (voir ch. 3, §2). On considère donc que les données initiales $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ où la solution u a la régularité (1.5), ce qui justifie tous les calculs qui suivent.

On commence ce paragraphe par démontrer les deux indentités fondamentales suivantes:

Lemme 2.1. *La fonction $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est décroissante et vérifie, pour tout $0 \leq S < T < \infty$,*

$$\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k''(t-s)[u(t)-u(s)]^2 ds d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} k'u^2 d\Gamma dt = E(S) - E(T).$$

Preuve. Soit $0 \leq S < T < \infty$. On dérive (1.8) par rapport à t et on intègre sur $[S, T]$ on obtient:

$$E(T) - E(S) = \int_S^T E'(t)dt$$

$$= \int_S^T \int_\Omega (u'u'' + \nabla u \cdot \nabla u')dxdt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} kuu' d\Gamma dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} k'u^2 d\Gamma dt - \int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k'(t-s)[u(t)-u(s)]u'(t) ds d\Gamma dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k''(t-s)[u(t)-u(s)]^2 ds d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} k'(0)[u(t)-u(t)]^2 d\Gamma dt.$$

On remplace u'' par Δu, on utilise la formule de Green et la condition au bord (1.7), on trouve:

$$\int_\Omega (u'u'' + \nabla u \cdot \nabla u')dx = \int_\Omega (u'\Delta u + \nabla u \cdot \nabla u')dx$$

$$= \int_{\Gamma} u' \partial_\nu u d\Gamma = -\int_{\Gamma_1} u' \Big(bu' + k(0)u + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds \Big) d\Gamma,$$

et par suite, les deux identités précédentes donnent:

$$E(T) - E(S) = -\int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} k' u^2 d\Gamma dt$$

$$-\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k''(t-s)[u(t) - u(s)]^2 ds d\Gamma dt$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_1} uu' \Big(k - k(0) - \int_0^t k'(t-s) ds \Big) d\Gamma dt,$$

et par conséquent

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k''(t-s)[u(t) - u(s)]^2 ds d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} k' u^2 d\Gamma dt.$$

D'où (2.1). D'après (1.1), (1.2) et (1.13), l'identité (2.2) implique aussi que E est décroissante.

Lemme 2.2. *On pose*

$$M = 2m \cdot \nabla u + (n-1)u. \tag{2.3}$$

Pour tout $0 \leq S < T < \infty$ *on a:*

$$\int_S^T \int_{\Omega} ((u')^2 + |\nabla u|^2) dx dt = \Big[\int_{\Omega} M u' dx \Big]_T^S \tag{2.4}$$

$$+ \int_S^T \int_{\Gamma_0} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma dt$$

$$+ \int_S^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu)((u')^2 - |\nabla u|^2) d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} M \partial_\nu u d\Gamma dt.$$

Preuve. Soit $0 \leq S < T < \infty$. En mulitipliant la première équation de (P) par $(n-1)u$, en intégrant sur $[S, T] \times \Omega$ et en utilisant la condition au bord sur Γ_0, on obtient:

$$(1-n) \int_S^T \int_{\Omega} ((u')^2 - |\nabla u|^2) dx dt \tag{2.5}$$

$$= (n-1)\int_S^T \int_{\Gamma_1} u\partial_\nu u d\Gamma dt + (n-1)\Big[\int_\Omega uu' dx\Big]_T^S.$$

D'autre part, en mulitipliant la première équation de (P) par $2m\cdot\nabla u$, en intégrant sur $[S,T]\times\Omega$ et en utilisant l'identité de Rellich:

$$2\int_\Omega (m\cdot\nabla u)\Delta u dx$$

$$= (n-2)\int_\Omega \big|\nabla u\big|^2 dx + 2\int_\Gamma (m\cdot\nabla u)\partial_\nu u d\Gamma - \int_\Gamma (m\cdot\nu)\big|\nabla u\big|^2 d\Gamma,$$

on obtient:

$$\int_S^T \int_\Omega (n(u')^2 - (n-2)\big|\nabla u\big|^2) dxdt \tag{2.6}$$

$$= -2\Big[\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u)dx\Big]_S^T + 2\int_S^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)((u')^2 - \big|\nabla u\big|^2)d\Gamma dt$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_0} (2\partial_\nu u(m\cdot\nabla u) - (m\cdot\nu)\big|\nabla u\big|^2)d\Gamma dt.$$

Or

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \Longrightarrow \nabla u = \partial_\nu u\nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_0,$$

donc la dernière intégrale de (2.6) est égale à

$$\int_S^T \int_{\Gamma_0} (m\cdot\nu)\big|\nabla u\big|^2 d\Gamma dt,$$

et par conséquent la somme de (2.5) et (2.6) donne (2.4).

Lemme 2.3. *On a, pour tout* $0\le S<T<\infty$,

$$\int_S^T \int_\Omega ((u')^2 + \big|\nabla u\big|^2) dxdt \tag{2.7}$$

$$\le cE(S) + \frac{R^2}{\delta}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt + (n-1)\int_S^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u u d\Gamma dt.$$

A partir de ce lemme, c désigne une constante positive indépendante de (u_0,u_1).

Preuve. D'après (1.10) et la définition (1.8) de l'énergie, on voit que:

$$\Big|\int_\Omega Mu'dx\Big| \le cE(t),$$

et par suite, en remarquant que l'énergie est décroissante,

$$\Big|\Big[\int_\Omega Mu'dx\Big]_T^S\Big| \le cE(S).$$

Les propriétés (1.13) et (2.1) impliquent que

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)(u')^2 d\Gamma dt \le \frac{R}{\beta}\int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt \le \frac{R}{\beta}E(S).$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Young, on trouve:

$$2\int_S^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt \le \delta\int_S^T \int_{\Gamma_1} \big|\nabla u\big|^2 d\Gamma dt + \frac{R^2}{\delta}\int_S^T \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt.$$

En substituant ces trois dernières inégalités dans (2.4) et en utilisant (1.11)-(1.12), on obtient (2.7).

Lemme 2.4. *On pose*

$$\gamma := \gamma(x) = \frac{\lambda}{k(0)} \quad \textit{et} \quad \lambda > \max\{\frac{n-1}{2}, \frac{R^2}{\delta}\|k(0)\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\}. \tag{2.8}$$

Alors on a:

$$\int_S^T E(t)dt \le cE(S) \tag{2.9}$$

$$+(\frac{1}{2}-\lambda)\int_S^T \int_{\Gamma_1} k(0)u^2 d\Gamma dt + 2\int_S^T \int_{\Gamma_1} \gamma\Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 d\Gamma dt$$

pour tout $0 \le S < T < \infty$.

Preuve. Grâce à (2.8) et la condition au bord (1.7) on a:

$$\frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2 + (n-1)u\partial_\nu u$$

$$\le \gamma[(\partial_\nu u)^2 + 2k(0)u\partial_\nu u] + (n-1-2\gamma k(0))u\partial_\nu u$$
$$= \gamma[(\partial_\nu u + k(0)u)^2 - k^2(0)u^2] + (n-1-2\gamma k(0))u\partial_\nu u$$
$$\le \gamma\Big(bu' + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 - \lambda k(0)u^2 + (n-1-2\lambda)u\partial_\nu u.$$

Donc

$$\frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2+(n-1)u\partial_\nu u \tag{2.10}$$

$$\leq 2\gamma b^2(u')^2+2\gamma\Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2-\lambda k(0)u^2+(n-1-2\lambda)u\partial_\nu u.$$

Or (1.1) et (1.14) impliquent que la fonction γ est bornée. Donc, en utilisant (2.1), on a:

$$2\int_S^T\int_{\Gamma_1}\gamma b^2(u')^2 d\Gamma dt\leq c\int_S^T\int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt\leq cE(S).$$

En intégrant (2.10) sur $\Gamma_1\times[S,T]$ et en utilisant l'inégalité précédente, on conclut d'après (2.7) que

$$\int_S^T\int_\Omega((u')^2+\left|\nabla u\right|^2)dxdt\leq cE(S)-\lambda\int_S^T\int_{\Gamma_1}k(0)u^2 d\Gamma dt \tag{2.11}$$

$$+2\int_S^T\int_{\Gamma_1}\gamma\Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 d\Gamma dt+(n-1-2\lambda)\int_S^T\int_{\Gamma_1}u\partial_\nu u d\Gamma dt.$$

D'autre part, d'après (1.2) et (2.1) on voit que:

$$-\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s)(u(t)-u(s))^2 dsd\Gamma dt$$

$$\leq\frac{\alpha}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 dsd\Gamma dt\leq\alpha E(S),$$

et (1.1) implique

$$\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}ku^2 d\Gamma dt\leq\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}k(0)u^2 d\Gamma dt.$$

En combinant ces deux dernières inégalités dans (2.11), on déduit que:

$$\int_S^T E(t)dt+\frac{1}{2}\int_S^T\int_\Omega(u')^2 dxdt\leq cE(S)+(\frac{1}{2}-\lambda)\int_S^T\int_{\Gamma_1}k(0)u^2 d\Gamma dt \tag{2.12}$$

$$+2\int_S^T\int_{\Gamma_1}\gamma\Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 d\Gamma dt+(n-1-2\lambda)\int_S^T\int_{\Gamma_1}u\partial_\nu u d\Gamma dt.$$

Pour obtenir (2.9), il suffit de combiner (2.12) avec (2.13) en choisissant $\epsilon>0$ tel que $(2\lambda+1-n)\epsilon=\frac{1}{2}$ dans le lemme suivant:

Lemme 2.5. *Soit $0 \leq S < T < \infty$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante positive $c(\epsilon)$ telle que*

$$(2.13) \qquad -\int_S^T \int_{\Gamma_1} u\partial_\nu u d\Gamma dt \leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dxdt + c(\epsilon)E(S).$$

Preuve. On applique la méthode introduite par Conrad et Rao [18]. On fixe $t \in \mathbb{R}^+$ et on note par $z(t)$ la solution du problème elliptique

$$(P1) \qquad \begin{cases} -\Delta z = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = u & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

On multiplie $(P1)$ une fois par z et une fois par u et on intègre par parties, on voit que la fonction z vérifie

$$(2.14) \qquad \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla u dx = \int_\Omega \left|\nabla z\right|^2 dx = \int_\Gamma u\partial_\nu z d\Gamma \geq 0$$

et, en appliquant la régularité elliptique, il existe une constante $c' > 0$ indépendante de u telle que

$$(2.15) \qquad \int_\Omega z^2 dx \leq c' \int_\Gamma u^2 d\Gamma.$$

En dérivant le système $(P1)$ par rapport au temps on constate que z' vérifie l'inégalité similaire:

$$(2.16) \qquad \int_\Omega (z')^2 dx \leq c' \int_\Gamma (u')^2 d\Gamma.$$

On multiplie la première équation de (P) par z et on intègre par parties sur $\Omega \times [S, T]$ on obtient:

$$-\int_S^T \int_\Gamma z\partial_\nu u d\Gamma dt = -\int_S^T \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla u dxdt + \int_S^T \int_\Omega z'u' dxdt - \Big[\int_\Omega zu' dx\Big]_S^T,$$

grâce aux (2.14) et les conditions au bord sur z, u on trouve:

$$(2.17) \qquad -\int_S^T \int_{\Gamma_1} u\partial_\nu u d\Gamma dt \leq \int_S^T \int_\Omega z'u' dxdt - \Big[\int_\Omega zu' dx\Big]_S^T.$$

D'après (2.15) on a:

$$\Big|\int_\Omega zu' dx\Big| \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (u')^2 dx + \frac{c'}{2}\int_{\Gamma_1} (u)^2 d\Gamma \leq cE(t),$$

et par suite, en utilisant la décroissance de l'énergie,

$$-\Big[\int_\Omega zu'dx\Big]_S^T \leq cE(S).$$

On utilise (1.13), (2.1) et (2.16) on trouve, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_S^T \int_\Omega z'u'dxdt \leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dxdt + \frac{1}{4\epsilon} \int_S^T \int_\Omega (z')^2 dxdt$$

$$\leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dxdt + \frac{c'}{4\beta\epsilon} \int_S^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 dxdt \leq \epsilon \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dxdt + c(\epsilon)E(S).$$

On substitut par ces deux dernières inégalités dans (2.17) on obtient (2.13).

On va maintenant majorer la dernière intégrale de (2.9). On montre le lemme suivant:

Lemme 2.6. *Soit $\epsilon > 0$ vérifiant*

$$\epsilon \inf_{\Gamma_1} k'(0) + 1 > 0. \tag{2.18}$$

Alors pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a:

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} \gamma\Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 d\Gamma dt \leq cE(S) + \frac{\lambda}{\epsilon\alpha} \int_S^T \int_{\Gamma_1} u^2 d\Gamma dt \tag{2.19}$$

où, γ et λ sont définis par (2.8).

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ vérifiant (2.18). On pose

$$h := h(x) = \frac{k(0)}{\alpha(1+\epsilon k'(0))}, \quad x \in \Gamma_1. \tag{2.20}$$

La condition (2.18) implique que $h \geq 0$ et $h \in L^\infty(\Gamma_1)$. Posons

$$I = \Big(\int_0^t k'(t-s)u(s)ds\Big)^2 - h\int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds + hk'u^2. \tag{2.21}$$

On a, en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$I \leq \Big(\int_0^t -k'(t-s)ds\Big)\Big(\int_0^t -k'(t-s)u^2(s)ds\Big) - h\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds$$

$$+2hu\int_0^t k''(t-s)u(s)ds + hk'(0)u^2 - hk'u^2 + hk'u^2$$

$$\leq (k-k(0))\int_0^t k'(t-s)u^2(s)ds - h\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds$$

$$+h(k'(0)+\frac{1}{\epsilon})u^2 + \epsilon h\Big(\int_0^t k''(t-s)u(s)ds\Big)^2.$$

Or (voir (1.1) et (1.2))

$$k\int_0^t k'(t-s)u^2(s)ds \leq 0 \quad \text{et} \quad \epsilon h k'\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds \leq 0,$$

donc, en appliquant l'inégalité de Hölder sur la dernière intégrale et en utilisant la condition (1.2),

$$I \leq [\frac{1}{\alpha}k(0) - h(1+\epsilon k'(0))]\int_0^t k''(t-s)u^2(s)ds + h(k'(0)+\frac{1}{\epsilon})u^2.$$

D'après la définition (2.20) de h on déduit que

$$I \leq \frac{1}{\epsilon\alpha}k(0)u^2,$$

et par conséquent

$$\int_S^T\int_{\Gamma_1}\gamma I d\Gamma dt \leq \frac{\lambda}{\epsilon\alpha}\int_S^T\int_{\Gamma_1} u^2 d\Gamma dt. \tag{2.22}$$

Comme h, $\gamma \in L^\infty(\Gamma_1)$ et grâce à (2.1), on a:

$$\int_S^T\int_{\Gamma_1} h\gamma\Big(\int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds - k'u^2\Big)d\Gamma dt$$

$$\leq \|h\gamma\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\Big(\int_0^t k''(t-s)(u(t)-u(s))^2 ds - k'u^2\Big)d\Gamma dt$$

$$\leq 2\|h\gamma\|_{L^\infty(\Gamma_1)}E(S).$$

On combine cette inégalité avec (2.22), d'où on obtient (2.19).

Les estimations (2.9) et (2.19) impliquent, pour tout $0 \leq S < T < \infty$ et $\epsilon > 0$ vérifiant (2.18),

$$\int_S^T E(t)dt \leq cE(S) + \int_S^T\int_{\Gamma_1}\Big((\frac{1}{2}-\lambda)k(0) + \frac{2\lambda}{\epsilon\alpha}\Big)u^2 d\Gamma dt. \tag{2.23}$$

La condition (1.14) implique qu'il existe $\epsilon' > 0$ tel que

$$\alpha \inf_{\Gamma_1} k(0) \geq -(2+\epsilon')\inf_{\Gamma_1} k'(0),$$

on choisit $\epsilon > 0$ tel que

$$-\epsilon \inf_{\Gamma_1} k'(0) = \frac{\epsilon' + 4}{2(\epsilon' + 2)}$$

(remarquer que ϵ vérifie (2.18)). On a:

$$(\frac{1}{2} - \lambda)k(0) + \frac{2\lambda}{\epsilon\alpha} = \frac{\lambda}{\epsilon\alpha}(2 - \epsilon\alpha k(0)) + \frac{1}{2}k(0)$$

$$\leq \frac{\lambda}{\epsilon\alpha}\Big(2 + \epsilon(2 + \epsilon')\inf_{\Gamma_1} k'(0)\Big) + \frac{1}{2}k(0) \leq -\frac{\epsilon'}{2\epsilon\alpha}\lambda + \frac{1}{2}\|k(0)\|_{L^\infty(\Gamma_1)}.$$

Et par suite, en choisissant

$$\lambda = \max\{n - 1, (\frac{R^2}{\delta} + \frac{\epsilon\alpha}{\epsilon'})\|k(0)\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\}$$

(remarque que (2.8) est satisfaite), on trouve:

$$(\frac{1}{2} - \lambda)k(0) + \frac{2\lambda}{\epsilon\alpha} \leq 0.$$

Donc, en laissant T tendre vers l'infini, on déduit de (2.23) que

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq cE(S)$$

d'où l'inégalité cherchée (2.0).

Remarque. Si $\inf_{\Gamma_1} k'(0) = 0$, alors (1.1) et (1.2) impliquent que $k' \equiv 0$; c'est à dire k est une fonction de x. Donc la condition au bord (1.7) devient

$$\partial_\nu u + ku + bu' = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1.$$

Dans ce cas là, le résultat de stabilisation (1.15) est déjà très connu.

CHAPITRE 9

EXISTENCE GLOBALE ET STABILISATION INTERNE D'UN SYSTÈME DE PETROVSKY

1. Introduction et résultats principaux

On considère dans ce chapitre un système de Petrovsky avec des conditions au bord du type Dirichlet et Neumann homogènes, soumis à un feedback interne non linéaire:

$$(P) \qquad \begin{cases} u'' + \Delta^2 u + qu + g(u') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0 \ \text{ et } \ u'(0) = u_1 & \text{dans} \ \ \Omega \end{cases}$$

où, Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de frontière Γ de classe C^4, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante telle que $g(0) = 0$ et $q : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de $L^\infty(\Omega)$. On définit l'énergie de la solution par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega ((u')^2 + (\Delta u)^2 + qu^2)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.1}$$

Le but de ce chapitre est de montrer que le système (P) est stable en donnant des estimations sur le taux de décroissance de l'énergie E sous des conditions convenables sur la fonction g.

Avant de définir la solution du système (P), on considère les espaces de Hilbert suivants:

$$H = L^2(\Omega), \quad \|v\|_H^2 = \int_\Omega v^2 dx,$$

$$V = H_0^2(\Omega), \quad \|v\|_V^2 = \int_\Omega ((\Delta v)^2 + qv^2) dx$$

et

$$W = \{v \in H^4(\Omega) \cap V : \ \Delta v = \partial_\nu \Delta v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma\}, \quad \|v\|_W^2 = \int_\Omega (\Delta^2 v)^2 dx.$$

On identifie H avec son dual H' on obtient:

$$W \hookrightarrow V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow W'$$

avec injection compacte et dense.

Remarque. Grâce à l'inégalité de Poincaré, la quantité $\int_\Omega (\Delta^2 v)^2 dx$ définit une norme sur l'espace W équivalente à la norme usuelle de $H^4(\Omega)$, et l'énergie E définit une norme pour le couple (u, u') équivalente à la norme usuelle de $H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

En appliquant la théorie des semi-groupes non linéaires, on montre que notre système (P) est bien posé au sens suivant:

Théorème 1. *Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$, le système (P) admet une solution globale unique (faible) u vérifiant*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H).$$

L'énergie de la solution u définie par (1.1) est une fonction décroissante. De plus, si z est une autre solution de (P) correspondante à $(z_0, z_1) \in V \times H$, alors l'énergie de $u - z$ vérifie l'estimation

$$\|E(u-z,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq E(u-z,0) = \frac{1}{2}\|(u_0 - z_0, u_1 - z_1)\|^2_{V\times H}. \tag{1.2}$$

Pour la régularité de la solution on a:

Théorème 2. *On suppose que*

$$(u_0, u_1) \in W \times V \quad et \quad g(u_1) \in H. \tag{1.3}$$

Alors la solution u (dite forte) du système (P) vérifie

$$u,\, u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.4}$$

Si de plus, g est globalemet Lipschitz, alors on a:

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W), \quad g(u') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)). \tag{1.5}$$

On va supposer, comme dans les ch. 6 et 7, des conditions convenables sur la fonction g dans le but d'obtenir la stabilité du système (P) en donnant des estimations précises sur le taux de décroissance de l'énergie. Supposons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3, $c_4 > 0$ et p, $p' \in [1, \infty)$ telles que

$$c_1|x|^p \leq |g(x)| \leq c_2|x|^{1/p} \quad \text{si} \quad |x| \leq 1, \tag{1.6}$$

$$c_3|x| \leq |g(x)| \quad \text{si} \quad |x| > 1, \tag{1.7}$$

$$|g(x)| \leq c_4|x|^{p'} \quad \text{si} \quad |x| > 1 \tag{1.8}$$

et

$$(n-2)p' \leq n+2. \tag{1.9}$$

On a les résultats de stabilisation uniforme et rationelle suivants:

Théorème 3. *On suppose que les conditions (1.6)-(1.9) sont satisfaites. Il existe deux constantes $c, \omega > 0$ telles que toute solution faible du système (P) vérifie*

$$E(t) \leq c\, t^{\frac{-2}{p-1}} \quad \forall t > 0, \quad \textit{si } p > 1 \tag{1.10}$$

et

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t} \quad \forall t \geq 0, \quad \textit{si } p = 1. \tag{1.11}$$

Théorème 4. *Supposons satisfaites les conditions (1.6), (1.8) et (1.9) avec*

$$p \geq 1 \;\; \textit{si } n = 1, \quad p > 1 \;\; \textit{si } n = 2 \quad \textit{et} \quad p \geq \frac{n}{2} \;\; \textit{si } n \geq 3. \tag{1.12}$$

Alors toute solution forte du système (P) vérifie les estimations (1.10) et (1.11) pour des constantes c et $\omega > 0$ dépendantes de la solution u.

Remarques. 1. Dans le théorème 3, les constantes c et ω sont dépendantes de manière continue de l'énergie initiale $E(0)$. Si $p = p' = 1$, la constante ω devient indépendante de $E(0)$.

2. Le théorème 4 montre que les estimations de stabilité (1.10) et (1.11) restent vraies pour les solutions fortes même si la fonction g est bornée. La démonstration est identique à celle du théorème 4 du ch. 6.

Le système composé de la première équation de (P) avec $q = 0$ et $-g(\Delta u')$ au lieu de $g(u')$, la condition au bord

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \tag{1.13}$$

et la condition initiale a été étudié par Komornik et Kouémou-Patcheu [46] et Komornik [40]. Dans [46], la méthode de Faedo-Galerkin a été appliquée dans la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution, ce qui a exigé des conditions sur g plus fortes que celles supposées dans notre travail, de plus les estimations (1.10) et (1.11) se montrent seulement pour les solutions fortes. Dans [40], l'auteur a utilisé la théorie des semi-groupes non linéaires qui a permis d'affaiblir les conditions sur g et de montrer les estimations (1.10) et (1.11) pour toute solution faible. Dans notre travail, et avec les mêmes conditions supposées sur g que dans [40], nous montrerons ces résultats pour le système (P). De plus, nous montrerons que les estimations (1.10) et (1.11) restent vraies pour les solutions fortes sans que $|g(x)|$ ne tende vers l'infini lorsque $|x| \to \infty$ ce qui permet de considérer les feedbacks bornés.

Dans la démonstration des théorèmes 1 et 2 on applique la théorie des semi-groupes non linéaires exactement comme dans le ch. 6. Pour la preuve des théorèmes 3 et 4 on utilise la méthode de Liapounov basée sur des inégalités d'intégrales (voir ch. 6 et 7).

2. Existence, unicité et régularité: preuve des théorèmes 1 et 2

Soient

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$\varphi(v) = \int_\Omega G(v)dx, \quad v \in V.$$

La fonction $\varphi : V \to]-\infty, \infty]$ (remarquer que $0 \leq G(t) \leq tg(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$) est propre, s.c.i, convexe et son sous-differentiel

$$B := \partial\varphi : V \to V'$$

est un opérateur maximal monotone (voir [40]).

On prend l'application du dual $A : V \to V'$ et on écrit le système (P) sous la forme

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} u'' + Au + Bu' = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ (u(0), u'(0)) = (u_0, u_1). \end{cases}$$

Pour justifier cette interprétation on note premièrement que la condition au bord dans (P) est incluse dans la définition de V. Pour $u \in W$ on a $Au = \Delta^2 u + qu$. En effet, soit $v \in V$ on a, en intégrant deux fois par parties,

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = \langle u, v\rangle_V = \int_\Omega (\Delta u \Delta v + quv)dx$$

$$= \int_\Gamma (\Delta u \partial_\nu v - \partial_\nu \Delta u v)d\Gamma + \int_\Omega (\Delta^2 u + qu)vdx = \int_\Omega (\Delta^2 u + qu)vdx$$

$$= \langle \Delta^2 u + qu, v\rangle_H = \langle \Delta^2 u + qu, v\rangle_{H',H} = \langle \Delta^2 u + qu, v\rangle_{V',V}$$

d'où $Au = \Delta^2 u + qu \in V'$.

Finalement, on peut vérifier que si g est globalement Lipschitz alors on a:

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega g(u) v dx \tag{2.2}$$

pour tout $v \in V$. En effet, comme g est globalement Lipschitz et $g(0) = 0$ alors g vérifie, pour une constante positive c',

$$\big|g(x)\big| \leq c'\big|x\big|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

donc pour tout $v \in V$ on trouve:

$$\big|\varphi(v)\big| = \Big|\int_\Omega G(v) dx\Big| \leq \int_\Omega \big|g(v)v\big| dx \leq c' \int_\Omega v^2 dx = c'\|v\|_H^2,$$

et par conséquent l'application φ est bien définie, continue et différentiable, d'où on trouve (2.2). L'inégalité (2.3) implique aussi, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\big|\langle Bu, v\rangle_{V',V}\big| \leq c'\|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in V. \tag{2.4}$$

On multiplie la première équation dans (P) par $v \in V$ et on intègre par parties sur Ω, on obtient:

$$\langle u'' + Au + Bu', v\rangle_{V',V} = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+$$

d'où (2.1).

On pose

$$u' := z, \quad U := (u, z) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}U := (-z, Au + Bz).$$

On peut aussi réécrire le système (P) sous la forme d'un système différentiel d'ordre un:

$$\begin{cases} U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ U(0) = (u_0, u_1). \end{cases} \tag{2.5}$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = V \times H$ et on considère $\mathcal{A}$ comme un opérateur défini dans $\mathcal{H}$ tel que

$$D(\mathcal{A}) = \{U = (u, z) \in V \times V : \, Au + Bz \in H\}.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $\mathcal{H}$: la preuve est similaire à celle donnée dans le ch. 6, §2 (voir aussi [14] pour des divers problèmes analogues à (2.1)). D'où on obtient l'existence d'une solution unique u de (P) comme étant la première composante de la solution de (2.5). Le fait que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone implique aussi (1.4). La régularité (1.5) découle directement du lemme suivant:

Lemme 2.1. *Si g est globalemlent Lipschitz alors*

$$D(\mathcal{A}) = W \times V$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_W \leq c(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V), \quad \forall (u, z) \in D(\mathcal{A}) \tag{2.6}$$

et

$$\|g(z)\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|z\|_V, \quad \forall z \in V. \tag{2.7}$$

Preuve. On montre premièrement que $W \times V \subset D(\mathcal{A})$. Soit $(u, z) \in W \times V$, il faut montrer que $Au + Bz \in H$. Or $u \in W$ implique que

$$Au = \Delta^2 u + qu \in H,$$

et (2.4) implique que

$$\left|\langle Bz, v\rangle_{V',V}\right| \leq c\|v\|_H, \quad \forall v \in V$$

avec $c = c'\|z\|_H$, donc $Bz \in H' = H$. D'où $Au + Bz \in H$.

D'autre part, soit $(u, z) \in D(\mathcal{A})$, montrons que $u \in W$. Comme $Au + Bz \in H$ alors, pour tout $v \in V$ on a:

$$\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V} = \langle Au + Bz, v\rangle_H,$$

et par suite:

$$\int_\Omega (\Delta u \Delta v + quv)dx = \int_\Omega fvdx$$

où, $f = Au + Bz - g(z)$. Par la formule de Green, on obtient:

$$\int_\Omega (\Delta^2 u + qu)vdx + \int_\Gamma (\Delta u \partial_\nu v - \partial_\nu \Delta u v)d\Gamma = \int_\Omega fvdx.$$

Comme $v = \partial_\nu v = 0$ sur Γ, donc

$$\int_\Omega (\Delta^2 u + qu)vdx = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in V.$$

Cette formulation variationelle montre que u est la solution faible du problème

$$\begin{cases} \Delta^2 u + qu = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{2.8}$$

Or (2.3) implique que

$$\|g(z)\|_H \leq c'\|z\|_H < \infty, \tag{2.9}$$

donc $g(z) \in H$, et comme $Au + Bz \in H$ par hypothèse, alors f l'est aussi. En appliquant la théorie de la régularité elliptique on conclut que $u \in H^4(\Omega)$ vérifiant la condition au bord de (2.8) et tel que

$$\|u\|_W \leq c\|f\|_H \leq c(\|Au + Bz\|_H + \|g(z)\|_H)$$

$$\leq c(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V)$$

avec une constante c indépendante de (u, z). D'où (2.6).

Les propriétés (1.4) et (2.1) impliquent que

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V) \quad \text{et} \quad Au + Bu' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H).$$

En appliquant (2.6) pour $(u, z) = (u, u')$, on obtient la première partie de (1.5).

Comme la fonction g est globalement Lipschitz, alors g' est bornée, et par suite

$$\|\nabla g(z)\|_H = \|g'(z)\nabla z\|_H \leq c\|z\|_V, \quad \forall z \in V. \tag{2.10}$$

Donc on trouve, d'après (2.9) et (2.10), que $\|g(z)\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|z\|_V$. Comme $g(0) = 0$, on déduit de (1.4) la deuxième partie de (1.5). Ceci termine la preuve du lemme 2.1.

3. Cas des feedbacks non bornés: preuve du théorème 3

On va montrer les estimations (1.10) et (1.11) sous la condition supplémentaire: g est globalement Lipschitz, cette condition peut être éliminée comme dans le ch. 4, §7.

En considérant les solutions fortes du système (P), la régularité (1.4)-(1.5) justifie tous les calculs qui suivent. Le résultat se généralise aux solutions faibles en utilisant des arguments de densité (voir ch. 3, §2).

On montre premièrement les deux inégalités fondamentales suivantes:

Lemme 3.1. *L'énergie* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est décroissante, localement absolument continue et*

$$E'(t) = -\int_\Omega u' g(u') dx dt \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Preuve. Pour tout $0 \leq S < T < \infty$, d'après (P) et (1.1), et par intégration par parties on voit que:

$$0 = \int_S^T \int_\Omega (u'' + \Delta^2 u + qu + g(u'))u' dx dt$$

$$= \int_S^T \int_\Omega (u''u' + \Delta u \Delta u' + quu' + g(u')u') dx dt$$

$$+ \int_S^T \int_\Gamma (\partial_\nu \Delta u u' - \Delta u \partial_\nu u') d\Gamma dt$$

$$= \int_S^T E'(t) dt + \int_S^T \int_\Omega g(u')u' dx dt$$

$$= E(T) - E(S) + \int_S^T \int_\Omega g(u')u' dx dt.$$

Et par suite

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_\Omega g(u')u' dx dt. \tag{3.2}$$

Par hypothèse sur g on a $xg(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc E est décroissante. L'identité (3.2) implique aussi que E est localement absolument continue et l'égalité (3.1) est satisfaite.

Lemme 3.2. *Pour tout* $0 \leq S < T < \infty$ *on a l'identité*

$$2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt = \left[E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega uu' dx \right]_T^S \tag{3.3}$$

$$+ \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega uu' dx dt + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega (2(u')^2 - g(u')u) dx dt.$$

Preuve. On a, en intégrant par parties sur $\Omega \times [S, T]$,

$$0 = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega (u'' + \Delta^2 u + qu + g(u')) u dx dt$$

$$= \Big[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega uu'dx\Big]_S^T - \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega uu'dxdt$$
$$+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(-(u')^2+(\Delta u)^2+qu^2+g(u')u)dxdt.$$

D'après la définition de l'énergie on trouve (3.3).

Lemme 3.3. *L'énergie E vérifie l'estimation*

$$(3.4)\quad 2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \le cE^{\frac{p+1}{2}}(S)+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(2(u')^2-g(u')u)dxdt$$

pour tout $0\le S<T<\infty$ où, c est une constante indépendante de S, T et de u.

Preuve. La condition au bord dans (P) implique que

$$(3.5)\qquad \int_\Omega u^2dx \le c\int_\Omega(\Delta u)^2dx.$$

On utilise (3.5) et la définition de l'énergie on voit que:

$$\Big|E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega uu'dx\Big| \le cE^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega((u')^2+(\Delta u)^2)dx \le cE^{\frac{p+1}{2}}(t).$$

Comme E est décroissance, on trouve:

$$\Big|\Big[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega uu'dx\Big]_T^S\Big| \le c(E^{\frac{p+1}{2}}(S)+E^{\frac{p+1}{2}}(T)) \le cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

D'autre part on a:

$$\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega uu'dxdt \le c\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)(-E'(t))E(t)dt$$
$$\le c[E^{\frac{p+1}{2}}(t)]_T^S \le cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

On substitut ces deux estimations dans (3.3) on obtient (3.4).

Lemme 3.4. *Soit $0\le S<T<\infty$, pour tout $\epsilon>0$ il existe une constante $c(\epsilon)>0$ telle que*

$$(3.6)\quad 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega(u')^2dxdt \le \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S)+cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

Preuve. Soit $t\in\mathbb{R}^+$ fixé, on pose (comme dans les ch. 6 et 7)

$$(3.7)\qquad \Omega_+ = \{x\in\Omega:\ |u'|>1\}\quad\text{et}\quad \Omega_- = \{x\in\Omega:\ |u'|\le 1\}.$$

On utilise l'inégalité de Hölder on voit que:

$$\int_\Omega (u')^2 dx = \int_{\Omega_-} (u')^2 dx + \int_{\Omega_+} (u')^2 dx$$

$$\leq c\Big(\int_{\Omega_-} \big|u'\big|^{p+1} dx\Big)^{\frac{2}{p+1}} + \int_{\Omega_+} (u')^2 dx,$$

donc, en utilisant les inégalités (1.6), (1.7) et l'identité (3.1), on trouve:

$$\int_\Omega (u')^2 dx = c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}} - cE'(t),$$

et par suite

$$2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega (u')^2 dx dt$$

$$\leq -c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) E'(t) dt + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}} dt,$$

en appliquant l'inégalité de Young sur le dernier terme de cette inégalité on trouve, pour tout $\epsilon > 0$,

$$2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega (u')^2 dx dt$$

$$\leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt - c(\epsilon)\int_S^T E'(t) dt - c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) E'(t) dt$$

$$\leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt + c(\epsilon) E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$$

d'où l'estimation (3.6).

Lemme 3.5. *Soit* $0 \leq S < T < \infty$, *on a:*

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u g(u') dx dt\Big| \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt + c(\epsilon) E(S) \tag{3.8}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Preuve. En considérant les notations (3.7), d'après (1.6) et (3.5) on a, pour tout $\epsilon' > 0$,

$$\Big|\int_{\Omega_-} u g(u') dx\Big| \leq \epsilon' \int_{\Omega_-} (\Delta u)^2 dx + c(\epsilon') \int_{\Omega_-} g^2(u') dx \tag{3.9}$$

$$\leq 2\epsilon' E(t) + c(\epsilon')\Big(\int_{\Omega_-} \big|g(u')\big|^{p+1} dx\Big)^{\frac{2}{p+1}} \leq 2\epsilon' E(t) + c(\epsilon')\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}.$$

Par la même manière, on utilise (1.8) et l'injection continue de Sobolev (voir (1.9))

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p'+1}(\Omega),$$

on a, en appliquant encore une fois l'inégalité de Hölder,

$$(3.10) \qquad \Big|\int_{\Omega_+} ug(u')dx\Big| \le \Big(\int_{\Omega_+} |u|^{p'+1} dx\Big)^{\frac{1}{p'+1}} \Big(\int_{\Omega_+} \big|g(u')\big|^{\frac{p'+1}{p'}} dx\Big)^{\frac{p'}{p'+1}}$$

$$\le c(E(t))^{\frac{1}{2}} \Big(-E'(t)\Big)^{\frac{p'}{p'+1}}.$$

D'après (3.9) et (3.10) on constate que

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega ug(u')dxdt\Big| \le 2\epsilon' \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt$$

$$+c(\epsilon') \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}} dt + c \int_S^T E^{\frac{p}{2}}(t)\Big(-E(t)\Big)^{\frac{p'}{p'+1}} dt.$$

On applique l'inégalité de Young sur les deux dernières intégrales, on obtient:

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega ug(u')dxdt\Big|$$

$$\le 3\epsilon' \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt - c(\epsilon') \int_S^T E'(t)dt + \epsilon' \int_S^T E^{\frac{p(p'+1)}{2}}(t)dt.$$

Le fait que p, $p' \ge 1$ et la décroissance de l'énergie donnent

$$E^{\frac{p(p'+1)}{2}}(t) = E^{\frac{pp'-1}{2}}(t)E^{\frac{p+1}{2}}(t) \le E^{\frac{pp'-1}{2}}(0)E^{\frac{p+1}{2}}(t),$$

donc, en prenant $\epsilon = \epsilon'(3 + E^{\frac{pp'-1}{2}}(0))$, on trouve (3.8).

Lemme 3.6. *On a l'estimation suivante:*

$$(3.11) \qquad \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \le c(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(0))E(S), \quad 0 \le S < T < \infty.$$

Preuve. Il suffit de substituer les inégalités (3.6) et (3.8) dans (3.4) en choisissant $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Les lemmes 3.1 et 3.6 impliquent que $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante vérifiant l'inégalité

$$\int_t^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(s)ds \le cE(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Donc on déduit les estimations (1.10) et (1.11) en appliquant [42, Theorem 8.1].

4. Cas des feedbacks bornés: preuve du théorème 4

On prend $(u_0, u_1) \in W \times V$ tel que $g(u_1) \in H$, donc la solution u du système (P) a la régularité (1.4). Les constantes ω et c de (1.10)-(1.11) seront dépendantes de u; c'est pourqoi les estimations de stabilité se montreront seulement pour les solutions fortes.

Dans la preuve du théorème 3, les inégalités (3.4) et (3.8) (remarquer qu'on a pas utilisé la condition (1.7) dans leur preuve) impliquent que, en choisissant $\epsilon = 1$ dans (3.8),

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq c\Big(E(S) + E^{\frac{p+1}{2}}(S)\Big) + 2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u')^2 dxdt. \tag{4.1}$$

Donc il nous reste à majorer le dernier terme de (4.1). Comme dans la preuve du lemme 3.4, on a:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_-}(u')^2 dxdt \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) \tag{4.2}$$

pour tout $\epsilon > 0$. D'autre part on a:

Cas: $n = 1$. On observe que (1.10) et la croissance de g impliquent que

$$\inf_{|x|\geq 1} |g(x)| > 0.$$

Alors, en utilisant (1.4), (3.1) et l'injection continue

$$V \subset H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

on obtient:

$$\int_{\Omega_+}(u')^2 dx \leq c\int_{\Omega_+}|u'|g(u')u'dx$$

$$\leq c\|u'\|_{L^\infty(\Omega)}(-E'(t)) \leq -cE'(t),$$

et par suite

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_+}(u')^2 dxdt \leq -c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)E'(t)dt \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{4.3}$$

Cas: $n \geq 2$. On a, en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\Omega_+} (u')^2 dx \leq c \int_{\Omega_+} \left|u'\right|^{\frac{2p}{p+1}} \Big(g(u')u'\Big)^{\frac{2}{p+1}} dx \tag{4.4}$$

$$\leq c\Big(\int_{\Omega} \left|u'\right|^{\frac{2p}{p-1}} dx\Big)^{\frac{p-1}{p+1}} \Big(\int_{\Omega} g(u')u' dx\Big)^{\frac{2}{p+1}} \leq c\|u'\|^{\frac{2p}{p+1}}_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)} \Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}}.$$

D'après (1.4) et l'injection continue (voir (1.12))

$$V \subset H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)$$

on déduit à partir de (4.4) que

$$\int_{\Omega_+} (u')^2 dx \leq c\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}},$$

en utilisant l'inégalité de Young, on trouve:

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_+} (u')^2 dx dt \leq c \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\Big(-E'(t)\Big)^{\frac{2}{p+1}} dt$$

$$\leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt - c(\epsilon) \int_S^T E'(t) dt,$$

donc

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_+} (u')^2 dx dt \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt + c(\epsilon) E(S). \tag{4.5}$$

Les inégalités (4.3) et (4.5) impliquent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega_+} (u')^2 dx dt \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt + c(\epsilon) E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

On choisit $\epsilon \in]0, \frac{1}{4}[$ dans cette inégalité et dans (4.2), et on remplace par leur somme dans (4.1) on obtient (3.11). Ainsi les estimations (1.10) et (1.11) se déduisent en appliquant [42, Theorem 8.1].

CHAPITRE 10

STABILISATION UNIFORME DE L'ÉQUATION DES ONDES AVEC DEUX FEEDBACKS: INTERNE ET FRONTIÈRE

1. Introduction et résultat principal

Dans ce chapitre on présente un résultat de stabilisation uniforme de l'équation des ondes dans un domaine ouvert borné non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ avec la condition de Dirichlet sur une partie Γ_0 du bord et la condition de Neumann sur l'autre partie Γ_1 du bord, avec deux feedbacks non linéaires, interne et frontière:

$$(P) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u + f(u') = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + (m \cdot \nu)(au + g(u')) = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u_1 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

où,

$$m(x) = x - x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pour un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé tel que

$$\Gamma_0 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad a > 0 \text{ et } \inf_{\Gamma_1}(m.\nu) > 0 \tag{1.1}$$

et

$$m \cdot \nu > 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad \text{et} \quad m \cdot \nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \tag{1.2}$$

avec $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$, f et g sont deux fonctions continues croissantes telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $a \geq 0$ est une constante fixée pour simplifier (on peut prendre a comme une fonction positive de $C(\bar{\Gamma}_1)$).

Dans le cas $f = 0$ ou $\Gamma_1 = \emptyset$, le système (P) a été étudié par nombreux auteurs depuis les travaux de Russell [69], par exemple, Komornik [41, 43], Nakao [65] et Zuazua [74]. Des résultats de stabilisation ont été obtenus. Le but de ce travail est d'obtenir la stabilisation uniforme avec un meilleur taux de décroissance de l'énergie, en supposant des conditions convenables sur les fonctions f et g et un choix particulier de la constante a.

On définit l'énergie de la solution par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((u')^2 + |\nabla u|^2)\,dx + \frac{a}{2}\int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)u^2\,d\Gamma, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.3}$$

L'existence et l'unicité de la solution du système (P) découle d'un résultat standard de la théorie des semi-groupes (voir [41, 43, 64, 65, 74] dans le cadre de l'équation des ondes avec un feedback interne ou frontière): considérons les espaces de Hilbert

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \quad \text{et} \quad W = H^2(\Omega)\cap V$$

où, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ et supposons qu'il existe une constante positive c' telle que

$$\left|f(x)\right| \le c'(1+\left|x\right|) \quad \text{et} \quad \left|g(x)\right| \le c'(1+\left|x\right|), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Théorème. *Soit $(u_0, u_1) \in V \times H$ donné, le système (P) a une unique solution faible u:*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V)\cap C^1(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.5}$$

Si $(u_0, u_1) \in W \times V$ tel que

$$\partial_\nu u_0 + (m\cdot\nu)(au_0 + g(u_1)) = 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_1, \tag{1.6}$$

alors la solution u est plus régulière:

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W), \tag{1.7}$$

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), \tag{1.8}$$

$$u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.9}$$

Notre résultat de stabilisation uniforme est le suivant:

Théorème 1. *Supposons qu'il existe deux constantes c_1, $c_2 > 0$ telles que*

$$c_1\left|x\right| \le \left|g(x)\right| \le c_2\left|x\right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{2}(3aR^2-n)c_1|x| \le |f(x)| \le \frac{1}{2}(3aR^2-n)c_2|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

et

$$\frac{1}{R^2}\max\{n-2,\ \frac{n}{3}\} \le a < \frac{n}{R^2} \tag{1.12}$$

où, $R = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$, alors pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$, l'énergie de la solution de (P) décroît exponentialement vers zéro:

$$E(t) \le E(0)e^{1-\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.13}$$

où, $\omega = (n - aR^2)(2R + R^2c_2 + \frac{1}{c_1})^{-1}$.

Remarques. 1. Si on choisit

$$a = R^{-2}\max\{n-2, \frac{n}{3}\} \quad \text{et} \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{R}$$

(c'est à dire $g(x) = \frac{1}{R}x$ et $f(x) = \frac{3aR^2-n}{2R}x$) alors on obtient un taux de décroissance

$$\omega = \frac{1}{2R} \text{ si } n \ge 3, \quad \omega = \frac{1}{3R} \text{ si } n = 2 \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{6R} \text{ si } n = 1,$$

ce qui donne dans le cas $n = 2$ un taux de décroissance plus grand que le taux $\omega = \frac{1}{4R}$ obtenu par Komornik [44]. Tcheugoué Tébou [71] a obtenu un résultat similaire en considérant des feedbacks linéaires, et Martinez [59] a amélioré ce taux de décroissance dans des domaines polygonaux particuliers.

2. Grâce à l'hypothése (1.1) et l'inégalité de Poincaré, l'expression

$$\|u\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2 d\Gamma$$

définit une norme sur V equivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$; et par conséquent V est un espace de Hilbert avec cette norme.

2. Stabilisation uniforme: preuve du théorème 1

On note tout d'abord qu'on va montrer que l'énergie E vérifie l'inégalité

$$\int_S^\infty E(t)dt \le \frac{1}{\omega}E(S), \quad \forall S \in \mathbb{R}^+. \tag{2.0}$$

Donc on déduit (1.13) en appliquant [42, theorem 8.1].

L'idée de la démonstration est d'utiliser des multiplicateurs adaptés au système (P) et qui donnent une meilleure estimation sur le taux de décroissance de l'énergie. On multiplie le système (P) par u' et $2m\cdot\nabla u + 2aR^2u$, respectivement, et on intègre par parties sur $\Omega\times[S,T]$ où, $[S,T]$ est un intervalle borné quelconque de $\mathbb{R}^+$. Dans les travaux antérieurs (voir par exemple: [18, 39, 43, 47, 74]), le multiplicateur $2m\cdot\nabla u + (n-1)u$ a été souvent utilisé.

Commençons par montrer la dissipativité de (P).

Lemme 2.1. *L'énergie $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par (1.3) est décroissante vérifiant*

$$E'(t) = -\int_\Omega u'f(u')dx - \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u'g(u')d\Gamma, \quad t\in\mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

Preuve. Fixons $0\le S<T<\infty$ arbitraire, on a:

$$0 = \int_S^T\int_\Omega u'(u''-\Delta u + f(u'))dxdt$$

$$= \int_S^T\int_\Omega (u'u''+\nabla u\cdot\nabla u' + u'f(u'))dxdt - \int_S^T\int_\Gamma u'\partial_\nu u d\Gamma dt$$

$$= \int_S^T\int_\Omega (u'u''+\nabla u\cdot\nabla u' + u'f(u'))dxdt + \int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(au+g(u'))u'd\Gamma dt,$$

et par suite

$$E(S)-E(T) = \int_S^T\int_\Omega u'f(u')dxdt + \int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u'g(u')d\Gamma dt. \tag{2.2}$$

Or $(m\cdot\nu)>0$ sur Γ_1, et $xf(x), xg(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, donc le membre de droite de (2.2) est positif; et par conséquent E est décroissante. L'égalité (2.2) implique aussi (2.1).

Lemme 2.2. *Posons*

$$M = 2m\cdot\nabla u + 2aR^2u, \tag{2.3}$$

pour tout $0\le S<T<\infty$ on a:

$$(2aR^2+2-n)\int_S^T\int_\Omega |\nabla u|^2dxdt + (n-2aR^2)\int_S^T\int_\Omega (u')^2dxdt \tag{2.4}$$

$$= -\Big[\int_\Omega Mu'dx\Big]_S^T - \int_S^T\int_\Omega Mf(u')dxdt + \int_S^T\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)(\partial_\nu u)^2d\Gamma dt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)((u')^2-\left|\nabla u\right|^2-M(au+g(u')))d\Gamma dt.$$

Preuve. On a:

$$0=\int_S^T\int_\Omega M(u''-\Delta u+f(u'))dxdt \tag{2.5}$$

$$=\Big[\int_\Omega u'Mdx\Big]_S^T+\int_S^T\int_\Omega Mf(u')dxdt-\int_S^T\int_\Omega(u'M'+M\Delta u)dxdt.$$

En intégrant par parties et en utilisant la relation div $m=n$, la dernière intégrale de (2.5) peut être transformée comme suivant:

$$\int_\Omega(u'M'+M\Delta u)dx$$

$$=\int_\Omega(m\cdot\nabla(u')^2+2aR^2(u')^2-\nabla u\cdot\nabla M)dx+\int_\Gamma M\partial_\nu ud\Gamma$$

$$=\int_\Omega(m\cdot\nabla(u')^2+2aR^2(u')^2-2\left|\nabla u\right|^2-m\cdot\nabla\left|\nabla u\right|^2-2aR^2\left|\nabla u\right|^2)dx$$

$$+\int_\Gamma M\partial_\nu ud\Gamma$$

$$=-(2aR^2+2-n)\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2dx-(n-2aR^2)\int_\Omega(u')^2dx$$

$$+\int_{\Gamma_0}(-(m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2+(2m\cdot\nabla u)\partial_\nu u)d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)((u')^2-\left|\nabla u\right|^2-M(au+g(u')))d\Gamma.$$

En substituant cette égalité dans (2.5) et en utilisant la propriété $\nabla u=\nu\partial_\nu u$ sur Γ_0, on obtient (2.4).

Lemme 2.3. *On a les deux estimations*

$$\Big|\int_\Omega Mu'dx\Big|\le 2RE(t) \tag{2.6}$$

et pour tout $\epsilon>0$,

$$\Big|\int_\Omega Mf(u')dx\Big|\le\epsilon\int_\Omega f^2(u')dx+\frac{R^2}{\epsilon}\Big(\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2dx+a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2d\Gamma\Big). \tag{2.7}$$

Preuve. En utilisant (1.12) on voit que

$$\int_\Omega \left|2m\cdot\nabla u + 2aR^2 u\right|^2 dx - \int_\Omega \left|2m\cdot\nabla u\right|^2 dx$$

$$= \int_\Omega (4a^2R^4u^2 + 8aR^2(m\cdot\nabla u)u)dx$$

$$= 4aR^2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2 d\Gamma + 4aR^2(aR^2-n)\int_\Omega u^2 dx \le 4aR^2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2 d\Gamma.$$

Et par suite, en utilisant la définition de l'énergie,

$$\left|\int_\Omega Mu'dx\right| \le \frac{1}{4R}\int_\Omega \left|2m\cdot\nabla u + 2aR^2u\right|^2 dx + R\int_\Omega (u')^2 dx$$

$$\le \frac{1}{4R}\int_\Omega \left|2m\cdot\nabla u\right|^2 dx + aR\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2 d\Gamma + R\int_\Omega (u')^2 dx$$

$$\le R\Big(\int_\Omega ((u')^2 + \left|\nabla u\right|^2)dx + a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2 d\Gamma\Big) = 2RE(t)$$

d'où on trouve (2.6).

Par la même manière, on applique l'inégalité de Young on trouve pour tout $\epsilon > 0$:

$$\left|\int_\Omega Mf(u')dx\right| \le \epsilon\int_\Omega f^2(u')dx + \frac{1}{4\epsilon}\int_\Omega \left|M\right|^2 dx$$

$$\le \epsilon\int_\Omega f^2(u')dx + \frac{1}{4\epsilon}\Big(\int_\Omega \left|2m\cdot\nabla u\right|^2 dx + 4aR^2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2 d\Gamma\Big)$$

$$\le \epsilon\int_\Omega f^2(u')dx + \frac{R^2}{\epsilon}\Big(\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + a\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2 dx\Big),$$

d'où (2.7).

Lemme 2.4. *Sur Γ_1 on a l'estimation*

$$-M(au+g(u')) - \left|\nabla u\right|^2 \le R^2g^2(u') - a^2R^2u^2. \tag{2.8}$$

Preuve. On a:

$$-M(au+g(u')) \le 2\left|m\cdot\nabla u\right|\left|au+g(u')\right| - 2a^2R^2u^2 - 2aR^2ug(u')$$

$$\le \left|\nabla u\right|^2 + R^2(a^2u^2 + g^2(u') + 2aug(u')) - 2a^2R^2u^2 - 2aR^2ug(u')$$

$$\le \left|\nabla u\right|^2 - a^2R^2u^2 + R^2g^2(u')$$

ce qui prouve (2.8).

On revient maintenant à l'identité (2.4). En combinant (2.6), (2.7) et (2.8) avec (2.4), et en utilisant les conditions (1.2), (1.10) et la définition (1.3) de l'énergie, on déduit facilement que pour tout $0 \leq S < T < \infty$ et pour tout $\epsilon > 0$:

$$(2.9) \qquad 2R^2(a - \frac{1}{\epsilon}) \int_S^T E(t)dt + (aR^2 + 2 - n) \int_S^T \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dxdt$$

$$\leq 2R(E(S) + E(T)) + \epsilon \int_S^T \int_\Omega f^2(u')dxdt$$

$$+(\frac{1}{c_1} + R^2 c_2) \int_S^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu)u' g(u')d\Gamma dt + (3aR^2 - n - \frac{R^2}{\epsilon}) \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dxdt.$$

D'après (1.12), le deuxième terme de (2.9) est positif. Donc, en choisissant $\epsilon = \frac{2R^2}{3aR^2 - n}$ (si $n = 3aR^2$, alors (1.11) implique que $f \equiv 0$, on fait dans ce cas là $\epsilon \to +\infty$ dans (2.9)), on trouve:

$$(n - aR^2) \int_S^T E(t)dt \leq 2R(E(S) + E(T)$$

$$+\frac{2R^2}{3aR^2 - n} \int_S^T \int_\Omega f^2(u')dxdt + \frac{1}{2}(3aR^2 - n) \int_S^T \int_\Omega (u')^2 dxdt$$

$$+(\frac{1}{c_1} + R^2 c_2) \int_S^T \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu)u' g(u')d\Gamma dt,$$

et par suite, en utilisant (1.11) et (2.2), on obtient:

$$(2.10) \qquad (n - aR^2) \int_S^T E(t)dt \leq 2R(E(S) + E(T))$$

$$+(R^2 c_2 + \frac{1}{c_1}) \int_S^T \Big(\int_\Omega u' f(u')dx + \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu)u' g(u')d\Gamma \Big) dt$$

$$= (2R + R^2 c_2 + \frac{1}{c_1})E(S) + (2R - R^2 c_2 - \frac{1}{c_1})E(T).$$

Or (voir (1.10))

$$2R - R^2 c_2 - \frac{1}{c_1} \leq 2R - R^2 c_1 - \frac{1}{c_1} = -(R\sqrt{c_1} - \frac{1}{\sqrt{c_1}})^2 \leq 0,$$

donc, en laissant $T \to +\infty$ dans (2.10) on obtient:

$$(2.11) \qquad \int_S^\infty E(t)dt \leq \frac{1}{n - aR^2}(2R + R^2 c_2 + \frac{1}{c_1})E(S), \quad \forall S \geq 0$$

ce qui prouve l'inégalité cherchée (2.0) avec $\omega = (n - aR^2)(2R + R^2 c_2 + \frac{1}{c_1})^{-1}$.

RÉFÉRENCES

[1] M. Aassila, Nouvelle approche à la stabilisation forte des systèmes distribués, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 324(1997), 43-48.

[2] M. Aassila, Strong asymptotic stability of isotropic elasticity systems with internal damping, Acta Sci. Math. (Szeged), 64(1998), 103-108.

[3] M. Aassila et A. Guesmia, Strong asymptotic stability of a nonlinear non-isotropic elastodynamic system, PanAmerican Math. J., 8(1998), 103-110.

[4] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[5] F. Alabau et V. Komornik, Observabilité, contrôlabilité et stabilisation frontière du système d'élasticité linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 324(1997), 519-524.

[6] F. Alabau et V. Komornik, Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems, SIAM J. Control Optim., 37(1999), 521-542.

[7] F. Ammar Khodja et A. Benabdallah, Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôleur dynamique, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 321(1995), 195-198.

[8] M. Avellaneda et F. H. Lin, Homogenization of Poisson's kernel and applications to boundary control, J. Math. Pures et Appl., 68(1989), 1-29.

[9] J. M. Ball, On the asymptotic behavior of generalized process with applications to nonlinear evolution equations, J. Diff. Equat., 27(1978), 224-265.

[10] V. Barbu, Analysis and control on nonlinear infinite dimensional systems, Academic Press, New York, 1993.

[11] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control Optim., 30(1992), 1024-1065.

[12] J. Bochenek, An abstract semilinear first order differential equation in the hyperbolic case, Annal. Polonici Math., 61(1995), 13-23.

[13] J. Bochenek et T. Winiarska, Evolution equations with parameter in the hyperbolic case, Annal. Polonici Math., 64(1996), 47-60.

[14] H. Brezis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures et Appl., 51(1972), 1-168.

[15] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North Holland, Amsterdam, 1973.

[16] P. G. Ciarlet, Mathematical elasticity, vol. 1: three dimensional elasticity, North Holland, Amsterdam, 1988.

[17] F. Conrad et M. Pierre, Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, Ann. Inst. Henri Poincaré, 11(1994), 485-515.

[18] F. Conrad et B. Rao, Decay of solution of the wave equations in a star shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Anal., 7(1993), 159-177.

[19] C. M. Dafermos, Asymptotic behavior of solutions of evolution equations, in Nonlinear Evolution Equations", M. G. Crandall Ed., Academic Press, New York, 1978, 103-123.

[20] G. Duvaut et J.-L. Lions, Les inégalités en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.

[21] A. Guesmia, Stabilisation frontière d'un système d'élasticité, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 324(1997), 1355-1360.

[22] A. Guesmia, On linear elasticity systems with variable coefficients, Kyushu J. Math., 52(1998), 227-248.

[23] A. Guesmia, Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système d'élasticité, Portug. Math., 55(1998), 333-347.

[24] A. Guesmia, Observability, controllability and boundary stabilization of a linear elasticity system, Acta Sci. Math. (Szeged), 64(1998), 109-119.

[25] A. Guesmia, On the nonlinear stabilization of the wave equation, Annal. Polonici Math., 68(1998), 191-198.

[26] A. Guesmia, Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de Petrovsky, Bull. Belgian Math. Soc., 5(1998), 583-594.

[27] A. Guesmia, Existence globale et stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité, Portug. Math., 56(1999), 361-379.

[28] A. Guesmia, Stabilisation de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire, Afrika Math., 10(1999), 14-25.

[29] A. Guesmia, On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipations, Asymptotic Analysis, 22(2000), 1-13.

[30] A. Guesmia, Exact controllability for the wave equation with variable coefficients, Israel. J. Math., to appear.

[31] T. Hara et R. Miyazaki, Equivalent condition for stability of a Volterra integro-differential equation, J. Math. Anal. Appl., 174(1993), 298-316.

[32] A. Haraux, Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires, preprint n: 78010, Laboratoire d'analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

[33] A. Haraux, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains, Mathematical Reports, J. Dieudonné Editor, Hardwood Academic Publishers, Gordon and Breach, 1987.

[34] A. Haraux et E. Zuazua, Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. Rational Mech. Anal., 100(1988), 191-206.

[35] L. F. Ho, Observabilité frontière de l'équation des ondes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 302(1986), 443-446.

[36] L. F. Ho, Exact controllability of second order hyperbolic systems with control in the Dirichlet boundary condition, J. Math. Pures et Appl., 66(1987), 363-368.

[37] M. A. Horn, Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity, J. Math. Anal. Appl., 223(1998), 126-150.

[38] M. A. Horn, Stabilization of the dynamic system of elasticity by nonlinear boundary feedback, Internat. Ser. Numer. Math., 133(1999), 201-210.

[39] V. Komornik, Boundary stabilization of linear elasticity systems, Lectute Notes in Pure ans Appl. Math., 174(1995), 135-146.

[40] V. Komornik, Well-posedness and decay estimates for a Petrovsky system by a semi-group approach, Acta Sci. Math. (Szeged), 60(1995), 451-466.

[41] V. Komornik, Decay estimates for the wave equation with internal damping, Proc. of the conf. on Control Theory, Vorau 1993, Inter. Series Num. Anal., vol. 118, Birkhauser Verlag, Basel, 1994, 253-266.

[42] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[43] V. Komornik, On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation, Chin. Annal. of Math., 14B:2(1993), 153-164.

[44] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of the wave equation, SIAM J. Control and Optim., 29(1991), 197-208.

[45] V. Komornik, Exact controllability in short time for the wave equation, Annal. Inst. H. Poincaré Anal. non Linéaire, 6(1989), 153-164.

[46] V. Komornik et S. Kouémou-Patcheu, Estimations d'énergie pour un système de Petrovsky avec amortissement interne, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 319(1994), 1185-1189.

[47] V. Komornik et E. Zuazua, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pures et Appl., 69(1990), 33-54.

[48] J. E. Lagnese, Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation, J. Diff. Equat., 50(1983), 163-182.

[49] J. E. Lagnese, Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, SIAM J. Control and Optim., 21(1983), 968-984.

[50] J. E. Lagnese, Uniform asymptotic energy estimates for solution of the equation of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, Nonlinear Anal. T.M.A., 16(1991), 35-54.

[51] I. Lasiecka et D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, Diff. and Integ. Equat., 6(1993), 507-533.

[52] I. Lasiecka et R. Triggiani, Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions, Appl. Math. Optim., 25(1992), 189-224.

[53] I. Lasiecka, R. Triggiani et P. F. Yao, Exact controllability for second order hyperbolic equations with variable coefficient-principal part and first-order terms, Nonlinear Anal. T.M.A., 30(1997), 111-122.

[54] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte des systèmes distribués, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 302(1986), 471-475.

[55] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilizability and perturbation for distributed systems, SIAM Rev., 30(1988), 1-68.

[56] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, collection RMA, Masson, Paris, 1988.

[57] W. J. Liu, Partial exact controllability and exponential stability of the higher dimensional linear thermoelasticity, ESAIM COCV, 3(1998), 23-48.

[58] W. J. Liu et G. H. Williams, Exact Neumann boundary controllability for second order hyperbolic equations, Colloquium Math., 76(1998), 117-142.

[59] P. Martinez, Stabilisation de systèmes distribués semi linéaires: domaines presque étoilés et inégalités intégrales généralisées, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, France, 1998.

[60] M. M. Miranda, HUM and the wave equation with variable coefficients, Asymptotic Anal., 11(1995), 317-341.

[61] J. E. Muñoz Rivera, Exact controllability: coefficient depending on the time, SIAM J. Control and Optim., 28(1990), 289-303.

[62] J. E. Muñoz Rivera, Global solution on a quasilinear wave equation with memory, Bolletino U.M.I., 7(1994), 289-303.

[63] M. Nakao, Asymptotic stability for some nonlinear evolution equations of second order with unbounded dissipative terms, J. Diff. Equat., 30(1978), 54-63.

[64] M. Nakao, On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions, Math. Z., 193(1986), 227-234.

[65] M. Nakao, Energy decay for the wave equation with a nonlinear weak dissipation, Diff. and Integ. Equat., 8(1995), 681-688.

[66] M. Nakao, Decay of solution of the wave equation with some localized dissipations, Nonlinear Anal. T.M.A., 30(1997), 3775-3784.

[67] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer, New York, 1983.

[68] G. Propst et J. Prüss, On the wave equations with boundary dissipation of memory type, J. Integ. Equat. Appl., 8(1996), 99-123.

[69] D. L. Russell, Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control - theoretic methods, J. Diff. Equat., 19(1975), 344-370.

[70] D. L. Russell, Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Rev., 20(1978), 639-739.

[71] L. R. Tcheugoué Tébou, Sur la stabilisation de l'éqaution des ondes en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 319(1994), 585-588.

[72] L. R. Tcheugoué Tébou, On the decay estimates for the wave equation with a local degenerate or nondegenerate dissipation, Portug. Math., 55(1998), 293-306.

[73] E. Zuazua, Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Anal., 1(1988), 161-185.

[74] E. Zuazua, Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, SIAM J. Control and Optim., 28(1990), 446-477.

[75] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, Comm. Partial Diff. Equat., 15(1990), 205-235.

[76] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains, J. Math. Pures et Appl., 70(1991), 513-529.