Thèse de doctorat

Imad Kédim

6 juin 2000

Introduction

Soient G un groupe algébrique semi-simple sur un corps $\Bbbk$ algébriquement clos, T un tore maximal, B un sous-groupe de Borel et W le groupe de Weyl de G relatif à T. Soient P un sous-groupe parabolique, W_P son groupe de Weyl et W^P le quotient W/W_P muni de l'ordre de Bruhat. Soient w un élément de W^P et $X(w)$ la variété de Schubert associée à w, c'est-à-dire la fermeture de Zariski dans G/P de la B-orbite $B \cdot w \cdot e_P$, e_P étant l'image de P dans G/P.

Le présent travail est constitué principalement de deux parties. Dans la première, nous construisons une variété projective Y_w (réunion de variétés toriques) telle que pour tout poids dominant λ, associé à P, il existe un fibré en droite ample sur Y_w, dont le polynôme de Hilbert est égal à au polynôme de Hilbert de L_λ restreint à la variété de Schubert $X(w)$. Dans la seconde partie, nous construisons une déformation plate de $X(w)$ lorsque P est classique (*voir* tableau) dont la fibre speciale est égale à Y_w. Ce résultat nous permet de répondre à plusieurs questions concernant les variétés de Schubert et ce en étudiant la fibre spéciale qui est plus simple. Voici quelques exemples : la propriété de Cohen-Macaulay qui est préservée par déformation plate ; la normalité qui est une conséquence de la propriété de Cohen-Macaulay et le fait que les variétés de Schubert sont non singulières en codimension 1 ; le théorème de semi-continuité nous dit que la caractéristique d'Euler est invariante, ainsi que le polynôme de Hilbert (*voir* [15, 33, 37]).

Commençons par donner un survol de l'historique de la théorie des monômes standard, dans le but de rappeler les déformations construites par le passé.

Soient R un anneau commutatif, H un ensemble partiellement ordonné et R^H une R-algèbre engendrée par des éléments x_τ, $\tau \in H$. Un monôme $m = x_{\tau_1} \cdots x_{\tau_r}$ est dit standard si $\tau_1 \geq \cdots \geq \tau_r$. On dit que R^H est une algèbre de Hodge, ou algèbre munie de relations de redressement, si R^H est un R-module libre et l'ensemble des monômes standard forme une base de R^H ; une autre condition technique doit être vérifiée. Les anneaux des coordonnées des grassmaniennes et leurs variétés de Schubert, des variétés déterminantales et des variétés de complexes en sont des exemples.

De Concini, Eisenbud et Procesi [7] ont formulé l'axiomatique des algèbres de Hodge et ils en ont montré plusieurs propriétés en utilisant la fibre spéciale d'une déformation plate. En s'inspirant de la théorie des monômes standard développée par Lakshmibai, Musili et Seshadri (*voir* [26, 27]), De Concini et Lakshmibai ont généralisé la notion d'algèbre de Hodge en Doset algèbre. Ensuite, en adaptant la déformation utilisée dans [7], ils ont montré que les variétés de Schubert dans G/P, P classique, sont de Cohen-Macaulay et normales (*voir* [8]).

Soit X le réseau des poids de G. Fixons un poids dominant λ et soit P le sous-groupe parabolique associé à λ.

Dans [29], LITTELMANN a introduit la définition des chemins de Lakshmibai-Seshadri (L-S) de type λ ; c'est un ensemble de chaînes dans W^P, qu'on note $\mathbb{B}(\lambda)$. Puis dans [30], il a construit un ensemble de vecteurs p_π, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ qui forment une base de l'espace des sections globales $H^0\big(X(w), L_\lambda\big)$. Ainsi, il a établi la théorie des monômes standard de G/P en toute généralité, en particulier, il montre que l'idéal de l'homomorphisme surjectif

$$\bigoplus_{n\geq 0} S^n H^0\big(X(w), L_\lambda\big) \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} H^0\big(X(w), L_\lambda^{\otimes n}\big)$$

est engendré par des éléments de degré 2, qui s'écrivent sous la forme

$$g_{\pi,\pi'} = p_\pi p_{\pi'} - \sum a_{\eta,\eta'} p_\eta p_{\eta'},$$

où π et π' sont incomparables pour un certain ordre $>$ sur $\mathbb{B}(\lambda)$ et $\eta \geq \eta'$.

En s'inspirant de ces résultats, CHIRIVI [6] a défini des L-S algèbres généralisant la notion de Doset algèbre. Puis, à l'aide d'une déformation généralisant celle de DE CONCINI et LAKSHMIBAI, il a donné une nouvelle preuve de la propriété de Cohen-Macaulay et de la normalité des variétés de Schubert dans G/P pour P quelconque.

L'anneau de coordonnées homogènes de G/P est une L-S algèbre sur W^P, c'est-à-dire $H = W^P$. La fibre spéciale obtenue dans ces précédentes déformations est une réunion de variétés toriques. L'anneau de coordonnées homogènes de chacune des composantes irréductibles est une L-S algèbre sur une chaîne maximale dans W^P.

Par ailleurs, dans [42], STURMFELS a construit une déformation plate des grassmaniennes en variétés toriques. En suite, GONCIULEA et LAKSHMIBAI ont montré que les variétés de Schubert dans G/P, P minuscule, et les variétés de Kempf dans $SL(n)/B$, se déforment en variétés toriques (*voir* [13]).

Les arguments utilisés dans [13, 42] sont basés essentiellement sur la théorie des monômes standard, définie en terme de coordonnées de Plücker, qui décrit les anneaux des coordonnées homogènes des variétés de Schubert dans G/P, P minuscule, comme des algèbres de Hodge sur des treillis distributifs, à savoir W^P est un treillis distributif.

En général, si P est quelconque, l'ensemble W^P est loin d'être un treillis.

Pour généraliser le résultat de GONCIULEA et LAKSHMIBAI, il y a deux considérations possibles.

— La première consiste à dire que toute variété de Schubert se déforme en une variété torique.

— La deuxième dit que toute variété de Schubert se déforme en une réunion de variétés toriques telles que les anneaux de coordonnées homogènes de ces variétés soient des L-S algèbres sur des treillis distributifs. De plus, on demande que cette déformation soit compatible avec celle des deux derniers auteurs, c'est-à-dire que par restriction au cas minuscule, on obtient une déformation en variété torique.

C'est cette deuxième généralisation qui nous concerne.

L'idée principale a été inspirée de STEMBRIDGE [41]. Dans cet article, il a considéré une relation d'équivalence sur un ensemble de chaînes dans W^P, qui lui a permis de caractériser les quotients W^P qui sont des treillis distributifs (c'est-à-dire W^P est un treillis distributif si et seulement si cet ensemble de chaînes forme un seule classe d'équivalence).

Avec un peu plus d'efforts, nous étendons cette relation d'équivalence à $\mathcal{C}$ l'ensemble de toute les chaînes maximales de W^P. Soit

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_r$$

la décomposition de $\mathcal{C}$ en réunion de classe d'équivalence. Cette décomposition induit d'une façon naturelle un recouvrement de W^P par des treillis distributifs,

$$W^P = \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_r,$$

où $\mathcal{U}_i$ est l'ensemble des éléments de W^P qui appartiennent aux chaînes de la classe $\mathcal{C}_i$.

À chaque treillis distributif $\mathcal{U}_i$, nous associons une variété torique $X(\mathcal{U}_i)$ dont l'anneau des coordonnées homogènes est une L-S algèbre sur $\mathcal{U}_i$.

Le recouvrement de W^P par les $\mathcal{U}_i$, induit d'une façon naturelle un recollement des $X(\mathcal{U}_i)$. On dispose ainsi d'une variété projective Y^P. Soit w un élément de W^P, en remplaçant W^P par $\{\tau \leq w\}$, la même construction nous donne une réunion de variétés toriques qu'on note Y^P_w. Le théorème principal que nous démontrons est le suivant :

Théorème 0.1. — *Si P est un sous-groupe parabolique classique, alors pour tout w élément de W^P, il existe une famille plate sur Spec$\big(\mathbb{k}[t]\big)$ telle que la fibre en $(t-u)$, $u \neq 0$, est isomorphe à $X(w)$ et la fibre en (t) (la fibre spéciale) est égale à Y^P_w.*

D'une part, dans le cas particulier où P est minuscule, nous retrouvons les résultats de Goncuilea, Lakshmibai et Sturmfels. D'autre part, dans le cas où G égal à $SP(n)$ et P égal à P_n (le sous-groupe parabolique associé au poids fondamental ω_n), ou G quelconque, P quasi-minuscule et la dimension de $X(w)$ inférieure à $\frac{1}{2}(\dim G/P{+}1)$, alors Y^P_w est une variété torique. Plus précisément :

Corollaire 0.1. — *Soit w un élément de W^P, vérifiant la propriété suivante : pour tout $\delta \leq w$ et α une racine positive, $X(s_\alpha\delta)$ est un diviseur de $X(\delta)$ seulement si α est une racine simple.*

Alors $X(w)$ se déforme en une variété torique. En particulier, si W^P est un treillis distributif, toute variété de Schubert dans G/P se déforme en une variété torique.

Naturellement, nous nous sommes aussi intéressés aux variétés toriques de la fibre spéciale, ceci fait l'objet du chapitre 1. Tous les résultats de ce chapitre ont été démontrés sans la restriction classique.

Soit P un sous-groupe parabolique quelconque et fixons $\mathcal{U}$ parmi les $\mathcal{U}_i$. Par le théorème de structure de Birkhoff, on sait qu'à isomorphisme près, il existe un unique ensemble partiellement ordonné $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{U}$ est isomorphe à l'ensemble des idéaux de $\mathcal{A}$, ordonnés par l'inclusion.

À l'aide d'une relation d'équivalence sur les arêtes de $\mathcal{U}$, nous réalisons $\mathcal{A}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des arêtes de $\mathcal{U}$. Pour tout w élément de $\mathcal{U}$, on note $\mathcal{A}_w$ l'idéal de $\mathcal{A}$ obtenu comme image de w par cet isomorphisme.

Cette façon de définir $\mathcal{A}$ permet d'associer à chaque plongement projectif $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$ des multiplicités aux éléments de $\mathcal{A}$ qu'on note a_γ, $\gamma \in \mathcal{A}$. Avec ces données, nous construisons un polytope $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$, défini comme l'enveloppe convexe des points

$$u_w = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_w} a_\gamma e_\gamma, \qquad w \in \mathcal{U},$$

où les e_γ ce sont les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$.

Plus généralement, pour toute intersection $\mathcal{U}_I = \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$, $I \subset \{1, \dots, r\}$, nous associons un polytope $\mathcal{P}(\mathcal{U}_I^\lambda)$ et pour tout $w \in \mathcal{U}$, nous notons $\mathcal{P}_w(\mathcal{U}_I^\lambda)$ l'enveloppe convexe des points u_δ, $\delta \leq w$ et $\delta \in \mathcal{U}_I$. En utilisant, la formule caractère de Weyl et le modèle des chemins de LITTELMANN, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 0.2. — *Le polynôme de Hilbert de $X(w)$, associé au fibré L_λ est une somme alternée de polynômes d'Ehrhart. Plus précisément,*

$$\dim H^0\big(X(w), L_\lambda^{\otimes n}\big) = \sum_{I \subset \{1,\dots,r\}} (-1)^{|I|+1} \operatorname{Card}\big(n\mathcal{P}_w(\mathcal{U}_I^\lambda) \cap \mathbb{Z}^{\mathcal{A}_{\mathcal{I}}}\big).$$

Ensuite, nous décrivons l'éventail de la variété torique $X_w(\mathcal{U})$ associée au polytope $\mathcal{P}_w(\mathcal{U}^\lambda)$, à l'aide duquel on montre le résultat suivant : soit $\mathbb{U}^\lambda$ l'ensemble des L-S chemins de type λ à support dans $\mathcal{U}$ (*voir* définition 1.2), alors

Théorème 0.3. — i) *Le fibré en droite associé au polytope $\mathcal{P}_w(\mathcal{U}^\lambda)$ est très ample ;*

ii) *le groupe de Picard de $X_w(\mathcal{U})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^c$, où c est le nombre des composantes connexes de $\mathcal{A}_w$;*

iii) *l'idéal homogène qui définit $X_w(\mathcal{U})$ est engendré par des éléments de degré 2,*

$$f_{\pi,\pi'} = x_\pi x_{\pi'} - x_\eta x_{\eta'}, \qquad \pi, \pi \in \mathbb{U}^\lambda,$$

où π et π' sont incomparables et $\eta \geq \eta'$;

iv) $H^i\big(Y_w^P, O(m)\big) = 0$, *pour $i \geq 1$ et $m \geq 0$.*

Dans la deuxième partie, pour construire la déformation, nous utilisons la méthode exposée dans [11], chap.15,8 et nous réduisons la preuve du théorème principal aux deux assertions suivantes :

i) *il existe une fonction de poids ψ satisfaisant la condition suivante : pour tout couple (η, η') de L-S chemins de type λ, tel que le coefficient $a_{\eta,\eta'}$ de $p_\eta p_{\eta'}$ dans $g_{\pi,\pi'}$ est différent de zero, on a*

$$\psi(\pi) + \psi(\pi') \leq \psi(\eta) + \psi(\eta')$$

et on a égalité seulement si $f_{\pi,\pi'} = x_\pi x_{\pi'} - x_\eta x_{\eta'}$;

ii) *si* $f_{\pi,\pi'} = x_\pi x_{\pi'} - x_\eta x_{\eta'}$, *alors le coefficient* $a_{\eta,\eta'}$ *dans* $g_{\pi,\pi'}$ *est égal à* 1.

Pour montrer ces deux assertions, on a eu besoin d'étudier les propriétés combinatoires des variétés de Schubert dans G/P. Ceci fait l'objet du chapitre 2.

Soit α une racine positive et notons $\operatorname{supp}\alpha$ l'ensemble des racines simples figurant dans l'expression $\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} n_\gamma\gamma$ avec un coefficient non nul, où Δ est l'ensemble des racines simples. Le résultat principal que nous obtenons dans ce chapitre est une classification des configurations des diviseurs des variétés de Schubert dans G/P, P classique.

Proposition 0.1. — *Soient* α, β *deux racines positives et* w *un élément de* W^P *tels que :* $X(s_\alpha w)$ *et* $X(s_\beta w)$ *sont des diviseurs de* $X(w)$, *alors chacun des ensembles* $\operatorname{supp}\alpha$ *et* $\operatorname{supp}\beta$ *est constitué de racines simples de même norme, formant un segment dans le graphe de Dynkin de* G. *De plus, on a l'une des trois situations suivantes :*

i) *pour tout couple de racines simples* (γ,γ') *dans le produit* $\operatorname{supp}\alpha\times\operatorname{supp}\beta$, *on a* $\langle\gamma',\gamma^\vee\rangle = 0$. *Dans ce cas,*

$$X(s_\alpha w)\cap X(s_\beta w) = X(s_\alpha s_\beta w),$$

$$\dim X(s_\alpha s_\beta w) = \dim X(w) - 2\,;$$

ii) *l'intersection des ensembles* $\operatorname{supp}\alpha$ *et* $\operatorname{supp}\beta$ *est vide et il existe un couple* (γ,γ') *dans le produit* $\operatorname{supp}\alpha\times\operatorname{supp}\beta$ *tel que* $\langle\gamma',\gamma^\vee\rangle\neq 0$. *Dans ce cas,*

$$X(s_\alpha w)\cap X(s_\beta w) = X(s_\alpha s_\beta w)\cup X(s_\beta s_\alpha w),$$

$$\dim x(s_\alpha s_\beta w) = \dim X(s_\beta w) - \operatorname{Card}\big(\operatorname{supp}\alpha\big),$$
$$\dim x(s_\beta s_\alpha w) = \dim X(s_\alpha w) - \operatorname{Card}\big(\operatorname{supp}\beta\big)\,;$$

iii) *l'intersection des ensembles* $\operatorname{supp}\alpha$ *et* $\operatorname{supp}\beta$ *est non vide. Dans ce cas,*

$$X(s_\alpha w)\cap X(s_\beta w) = X(s_\alpha s_\beta w),$$

$$\dim X(s_\alpha s_\beta w) = \dim X(w) - \operatorname{Card}\big(\operatorname{supp}\alpha\cap\operatorname{supp}\beta\big) - 2.$$

Dans le troisième chapitre, nous construisons des bases des modules de Weyl $V_{n\lambda}$, λ classique (ceci a été réalisé à l'aide d'une extention de la méthode de Lakshmibai et Seshadri dans [26], ainsi que la méthode des groupes quantiques introduite par Littelmann dans [30]) à l'aide desquelles nous effectuons le calcul des coefficients $a_{\eta,\eta'}$. Ensuite, nous montrons que la fonction de poids donnée dans le cas classique par

$$\psi(\tau) = \sum N^{n^\tau_\gamma}, \qquad \text{pour } \tau(\lambda) = \lambda - \textstyle\sum_{\gamma\in\Delta} n^\tau_\gamma\gamma$$

et

$$\psi(\pi) = \frac{1}{2}\psi(\tau') + \frac{1}{2}\psi(\tau), \qquad \text{pour } \pi = (\tau,\tau')\in\mathbb{B}(\lambda)$$

vérifie la condition (i), pour N un entier positif assez grand, ce qui achève la preuve.

Finalement, il nous semble essentiel de rappeler que Dehy [9] avait construit une famille de polytopes associés aux chaînes maximales de W^P qui lui ont permis de donner une nouvelle formule de la dimension de l'espace des sections globales

$H^0\big(X(w), L_\lambda\big)$. On peut remarquer que les variétés toriques obtenues par la déformation de CHIRIVI correspondent aux polytopes de DEHY, que chaque polytope $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ est un recollement des polytopes de DEhy associés aux chaînes maximales de $\mathcal{U}^\lambda$, et que la fibre spéciale de la déformation de DE CONCINI et LAKSHMIBAI s'obtient par déformation plate de la fibre spéciale que nous construisons.

Rappelons aussi que dans un travail commun, DEHY et YU [10] ont construit les polytopes des variétés toriques obtenues par la déformation de GONCUILEA et LAKSHMIBAI et que dans [20], KARSHON et GROSSBERG ont démontré que toute variété de Schubert se déforme en une variété torique, mais celle-ci n'est pas en général munie d'un plongement projectif, ils en ont donné un exemple.

Tableau des poids dominants classiques

	poids minuscules	poids classiques non minuscules
A_n	$\omega_1, \dots, \omega_n$	$\omega_i + \omega_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$
B_n	ω_n	$\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$
C_n	ω_1	$\omega_2, \dots, \omega_n$
D_n	$\omega_1,\ \omega_n,\ \omega_{n-1}$	$\omega_2, \dots, \omega_{n-2},\ \omega_1 + \omega_{n-1},\ \omega_1 + \omega_n,\ \omega_{n-1} + \omega_n$
E_6	$\omega_1,\ \omega_6$	$\omega_2,\ \omega_3,\ \omega_5,\ \omega_1 + \omega_6$
E_7	ω_7	$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_6$
E_8		$\omega_1,\ \omega_8$
F_4		$\omega_1,\ \omega_4$
G_2		ω_1

Table des matières

Chapitre 1

Variétés toriques

1.1 Définitions et notations

Soit G un groupe algébrique semi-simple, B un sous-groupe de Borel et Δ l'ensemble des racines simples relatif à B. Considérons Y le réseau des racines, X le réseau des poids et W le groupe de Weyl. Fixons un poids dominant λ, désignons par W^λ le quotient de W par le stabilisateur du poids λ et notons w_0 le plus grand élément de W^λ. Une *chaîne maximale* dans W^λ est une suite $\tau_1 > \cdots > \tau_{r+1}$ telle que $\tau_1 = w_0$, $\tau_{r+1} = \mathrm{Id}$ et $\ell(\tau_i) = \ell(\tau_{i+1}) + 1$ pour $1 \leq i \leq r$, où ℓ désigne la fonction longueur sur le quotient W^λ.

Tous les résultats que nous allons obtenir dans ce chapitre restent valables si on remplace W^λ par un sous-ensemble contenant un unique élément maximal, un unique élément minimal et toute chaîne reliant ces deux éléments.

Soit $\mathcal{C}^\lambda$ l'ensemble des chaînes maximales de W^λ. Comme tout élément de W^λ appartient à une chaîne maximale, $\mathcal{C}^\lambda$ donne un recouvrement de W^λ. Toute relation d'équivalence sur $\mathcal{C}^\lambda$ induit une partition en réunion de classes d'équivalence, donc un nouveau recouvrement dont les composantes sont les classes d'équivalence des chaînes maximales. Nous allons définir une relation d'équivalence, qui nous permettra de déduire que chaque classe d'équivalence couvre un treillis distributifs dans W^λ.

Soient $u = (\tau_1 > \cdots > \tau_r > \tau_{r+1})$ une chaîne maximale et $\beta_u = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ l'unique r-uplet de racines positives (ou d'une façon équivalente l'unique expression) vérifiant $s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r} = \tau_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. De même, à tout r-uplet $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ de racines positives vérifiant

$$s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r} = w_0 \qquad \text{et} \qquad \ell(s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r}) = \ell(w_0) - i + 1 \tag{1.1}$$

on associe l'unique chaîne maximale constituée de l'élément Id et $\tau_i = s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r}$ pour $i = 1, \ldots, r$. Donc on a une bijection entre l'ensemble des chaînes maximales et l'ensemble des r-uplets de racines positives vérifiant (1.1).

Pour tout ν dans Y, on définit le support de ν, qu'on note $\operatorname{supp} \nu$, comme étant l'ensemble des racines simples qui figurent dans l'expression $\sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$, où $n_\alpha \neq 0$. En particulier, pour τ et τ' dans W^λ, on appelle support de (τ, τ'), qu'on note $\operatorname{supp}(\tau, \tau')$ le support de l'expression $\tau(\lambda) - \tau'(\lambda)$.

Deux suites de racines positives sont dites *équivalentes* si l'une est obtenue à partir de l'autre à l'aide d'une suite de transformations élémentaires

$$(\dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots) \sim (\dots, \beta_{i+1}, \beta_i, \dots)$$

si les supports de β_i et β_{i+1} sont orthogonaux (c'est-à-dire que pour tout couple (α, α') dans le produit $\operatorname{supp}\beta_i \times \operatorname{supp}\beta_{i+1}$, on a $\langle\alpha, \alpha'\rangle = 0$, où $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire W invariant sur $Y_{\mathbb{R}} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$). Il convient de remarquer que l'ensemble des suites vérifiant (1.1) est stable par ces transformations.

Définition 1.1. — *Deux chaînes maximales dans W^λ sont dites* équivalentes *si les deux r-uplets de racines positives correspondants sont équivalents. Pour toute chaîne maximale u, on note $\mathcal{U}^\lambda$ l'ensemble des éléments de W^λ qui figurent dans les chaînes équivalentes à u.*

Lemme 1.1. — *Soient S_r le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ et θ_j la transposition qui échange j et $j+1$, pour $j = 1, \dots, r-1$. Deux chaînes maximales u et u' sont équivalentes si et seulement si il existe σ un élément de S_r vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) $\beta_u = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ et $\beta_{u'} = (\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(r)})$;

(ii) il existe une expression $\sigma = \theta_{k_p} \cdots \theta_{k_1}$ vérifiant la propriété suivante : pour $i = 1, \dots, p$, $\sigma_i = \theta_{k_i} \cdots \theta_{k_1}$ et $\sigma_0 = \mathrm{Id}$, la transposition $\theta_{k_{j+1}}$ est égale à θ_{k_j} seulement si les supports de $\beta_{\sigma_i(j)}$ et $\beta_{\sigma_i(j+1)}$ sont orthogonaux.

Démonstration. — C'est une reformulation (directe) de la définition. □

Propriété d'orthogonalité. — On dit qu'un couple d'éléments (τ, τ') de W^λ possède la propriété d'orthogonalité, s'il existe w supérieur à τ et à τ' tel que les supports de (τ, w) et (τ', w) sont orthogonaux. Dans ce cas (*voir* chap. 2 corollaire 2.4), il existe w' tel que w et w' sont respectivement l'unique borne supérieure et l'unique borne inférieure de τ et τ' dans W^λ. En particulier, le support de (w, w') est la réunion des supports de (τ, w) et (τ', w) et on a l'égalité des poids

$$\tau(\lambda) + \tau'(\lambda) = w(\lambda) + w'(\lambda). \tag{1.2}$$

Un sous-ensemble $\mathcal{U}$ de W^λ possède la propriété d'orthogonalité si tout couple d'éléments de $\mathcal{U}$ possède cette propriété.

On rappelle qu'un *treillis* est un ensemble partiellement ordonné tel que tout couple d'éléments possède une unique borne supérieure est une unique borne inférieure. Comme conséquence de cette dernière propriété, on a le résultat suivant :

Corollaire 1.1. — *Pour tout ensemble $\mathcal{U}^\lambda$, tout couple (τ, τ') d'éléments de $\mathcal{U}^\lambda$ possède la propriété d'orthogonalité et $\mathcal{U}^\lambda$ est un treillis.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{U}^\lambda$ contient un unique élément maximal, il existe δ une borne supérieure de τ et τ' dans $\mathcal{U}^\lambda$, telle que $\ell(\delta)$ est minimal. On procède par récurrence sur $\ell(\delta)$. Si $\ell(\delta) = 1$, alors il n'y a rien à démontrer.

Supposons que $\ell(w) > 1$ et fixons u et u' deux chaînes maximales dans $\mathcal{U}^\lambda$ telles que τ (resp. τ', $\delta \in u \cap u'$) est un élément de u (resp. u', $u \cap u'$). On peut aussi considérer que u et u' contiennent les mêmes éléments supérieurs à δ. Supposons en outre que :

$$\beta_u = (\beta_1, \dots, \beta_r), \qquad \beta_{u'} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \qquad \text{et} \qquad \delta = s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r} = s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_r}.$$

Par le choix de u et u', on a $\alpha_j = \beta_j$, pour $j = 1, \dots, i-1$. Par définition de la relation d'équivalence, il existe une permutation σ dans S_r et vérifiant le lemme 1.1 telle que :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = (\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(r)}).$$

Il en résulte que $\beta_j = \beta_{\sigma(j)}$, pour $1 \leq j < i$, et

$$s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_r} = s_{\beta_{\sigma(i)}} \cdots s_{\beta_{\sigma(k-1)}} s_{\beta_i} s_{\beta_{\sigma(k+1)}} \cdots s_{\beta_{\sigma(r)}}.$$

En appliquant une récurrence sur $\ell(\sigma)$, on déduit que le support de β_i est orthogonal aux supports des racines $\beta_{\sigma(j)}$ pour $i \leq j \leq k-1$. Donc par définition de la relation d'équivalence, on obtient

$$(\beta_1, \dots, \beta_r) \sim (\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(j)}, \beta_i, \beta_{\sigma(j+1)}, \dots, \beta_{\sigma(k-1)}, \beta_{\sigma(k+1)}, \dots, \beta_{\sigma(r)}). \qquad (1.3)$$

Rappelons que, par construction de u on a , $s_{\beta_i}\delta \geq \tau$ et $s_{\beta_i}\delta \in \mathcal{U}^\lambda$, donc de la minimalité de δ dans $\mathcal{U}^\lambda$, on déduit que $s_{\beta_i}\delta$ et τ' sont incomparables. Comme

$$s_{\beta_i}\delta = s_{\beta_{\sigma(i)}} \cdots s_{\beta_{\sigma(k-1)}} s_{\beta_{\sigma(k+1)}} \cdots s_{\beta_{\sigma(r)}},$$

qui est supérieur à $s_{\beta_{\sigma(k+1)}} \cdots s_{\beta_{\sigma(r)}}$ et que τ' et ce dernier élément appartiennent à la même chaîne, il en résulte que $s_{\beta_i} s_{\beta_{\sigma(k+1)}} \cdots s_{\beta_{\sigma(r)}} \leq \tau'$, ce qui induit que le support de (τ', δ) est un sous-ensemble de la réunion des supports des $\beta_{\sigma(j)}$ pour $i \leq j \leq k-1$. Puisque ces derniers supports sont orthogonaux au support de β_i, on déduit que le couple $(s_{\beta_i}\delta, \tau')$ possède la propriété d'orthogonalité. De plus δ est l'unique borne supérieure et $s_{\beta_i}\tau'$ est l'unique borne inférieure de $s_{\beta_i}\delta$ et τ'.

Remarquons que, d'après 1.3, l'élément $s_{\beta_i}\tau'$ est dans $\mathcal{U}^\lambda$. Si $\tau = s_{\beta_i}\delta$, alors il n'y a plus rien à prouver. Sinon, par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_{\beta_i}\delta)$, le couple $(s_{\beta_i}\tau', \tau)$ possède la propriété d'orthogonalité, et l'unique borne supérieure (resp. inférieure) de $s_{\beta_i}\tau'$ et τ est dans $\mathcal{U}^\lambda$. En particulier, l'unique borne inférieure de $s_{\beta_i}\tau'$, τ est égale à la borne inférieure de τ et τ'. En effet, pour voir cela il suffit de prouver que tout élément κ inférieur à τ et à τ' est aussi inférieur à $s_{\beta_i}\tau'$. Puisque $s_{\beta_i}\delta > \tau$, donc $s_{\beta_i}\delta > \kappa$ et $\tau' > \kappa$. Comme $s_{\beta_i}\tau'$ est l'unique borne inférieure de $s_{\beta_i}\tau'$ et $s_{\beta_i}\delta$, on déduit que $\kappa \leq s_{\beta_i}\tau'$. Pour conclure que $\mathcal{U}^\lambda$ est un treillis, il suffit de montrer que δ est l'unique borne supérieure de τ et τ' dans W^λ.

Notons par η l'unique borne supérieure de $s_{\beta_i}\tau'$ et τ. Comme $s_{\beta_i}\delta$ est supérieur à $s_{\beta_i}\tau'$ et à τ, on a $\eta \leq s_{\beta_i}\delta$. Considérons une chaîne maximale u'' dans $\mathcal{U}^\lambda$ contenant la chaîne $s_{\beta_i}\tau' < \eta < s_{\beta_i}\delta < \delta$. Supposons que $\beta_{u''} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ et soient $t > j \geq 1$ tels que $\gamma_i = \beta_i$ et

$$\delta = s_{\gamma_i} \cdots s_{\gamma_r}, \qquad \eta = s_{\gamma_j} \cdots s_{\gamma_r} \qquad \text{et} \qquad s_{\beta_i}\tau' = s_{\gamma_t} \cdots s_{\gamma_r}.$$

Rappelons que la réunion des supports des racines $\gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_t$ est égale au support du couple $(s_{\beta_i}\delta, s_{\beta_i}\tau')$, qui est orthogonal au support de β_i. Par conséquent $\beta_{u''}$ est équivalente à la suite

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_{t-1}, \beta_i, \gamma_t, \ldots, \gamma_r),$$

de plus $s_{\beta_i}\eta = s_{\gamma_j} \cdots s_{\gamma_{t-1}} s_{\beta_i} s_{\gamma_t} \cdots s_{\gamma_r}$. Il en résulte donc que $s_{\beta_i}\eta$ est supérieur à τ et à τ' et $s_{\beta_i}\eta$ appartient à $\mathcal{U}^\lambda$.

Étant donné que $\delta \geq s_{\beta_i}\eta$, par minimalité de la longueur de δ, on conclut que $s_{\beta_i}\eta = \delta$ et $s_{\beta_i}\delta = \eta$. Notons que le support de (δ, τ) est égal à la réunion du support de β_i et $(s_{\beta_i}\delta, \tau)$, ainsi que les supports de (δ, τ') et $(s_{\beta_i}\delta, s_{\beta_i}\tau')$ sont égaux. Puisque les supports de β_i et $(s_{\beta_i}\delta, \tau)$ sont orthogonaux au support de $(s_{\beta_i}\delta, s_{\beta_i}\tau')$, on déduit que (τ, τ') possède la propriété d'orthogonalité et que δ est l'unique borne supérieure de τ et τ' dans W^λ. □

Dans toute la suite, pour tout couple (τ, τ') d'éléments incomparables qui possède la propriété d'orthogonalité, on note respectivement $\tau \vee \tau'$ et $\tau \wedge \tau'$ l'unique borne supérieure et l'unique borne inférieure de τ et τ'.

Corollaire 1.2. — *Soit (τ, τ') un couple d'éléments de W^λ possèdant la propriété d'orthogonalité. Alors, pour que τ et τ' soient dans $\mathcal{U}^\lambda$ il faut et il suffit que $\tau \vee \tau'$ et $\tau \wedge \tau'$ soient dans $\mathcal{U}^\lambda$.*

Démonstration. — La condition nécessaire est triviale puisque nous avons montré que $\mathcal{U}^\lambda$ est un treillis. Montrons la condition suffisante. Notons $\delta = \tau \vee \tau'$ et $\delta' = \tau \wedge \tau'$.

Soient $\beta_u = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ et i, j deux entiers positifs tels que :

$$\delta = s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r} \qquad \text{et} \qquad \delta' = s_{\beta_j} \cdots s_{\beta_r}.$$

D'après les hypothèses, on peut construire une chaîne u' équivalente à u telle que $w'_u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ et il existe un entier p entre i et j vérifiant :

$$\delta = s_{\alpha_i} \cdots s_{\alpha_r} \qquad \text{et} \qquad \delta' = s_{\alpha_j} \cdots s_{\alpha_r}$$

avec la réunion des supports des α_k, $i \leq k \leq p$ est égale au support de (δ, τ) ; et la réunion des support des α_h, $p < h < j$ est égale au support de (δ, τ'). De plus de l'équation des poids 1.2, on a

$$\delta(\lambda) - s_{\alpha_{p+1}} \cdots s_{\alpha_r}(\lambda) + s_{\alpha_{p+1}} \cdots s_{\alpha_r}(\lambda) - \delta'(\lambda) = \tau(\lambda) - \delta'(\lambda) + \tau'(\lambda) - \delta'(\lambda).$$

Puisque les supports de (τ, δ') et (τ', δ') sont orthogonaux, de la dernière égalité on déduit que $\tau'(\lambda) = s_{\alpha_{p+1}} \cdots s_{\alpha_r}(\lambda)$. Ce qui implique que $\tau' = s_{\alpha_{p+1}} \cdots s_{\alpha_r}$, donc τ' est un élément de $\mathcal{U}^\lambda$. Les mêmes arguments montrent que τ appartient à $\mathcal{U}^\lambda$. □

Soit $\mathbf{T}(W^\lambda)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de W^λ qui sont des treillis et possèdent la propriété d'orthogonalité. Considérons l'ordre partiel sur $\mathbf{T}(W^\lambda)$ donné par l'inclusion.

Proposition 1.1. — *Les ensembles $\mathcal{U}^\lambda$ sont les treillis maximaux de $\mathbf{T}(W^\lambda)$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 1.1, les treillis $\mathcal{U}^\lambda$ sont dans $\mathbf{T}(W^\lambda)$. Soit $\mathcal{U}$ un treillis de $\mathbf{T}(W^\lambda)$ et c une chaîne maximale dans $\mathcal{U}$. Si c n'est pas maximale dans W^λ on la complète en une chaîne maximale u dans W^λ. Soit $\mathcal{U}^\lambda$ le treillis correspondant à la classe d'équivalence de u. Nous allons montrer que $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{U}^\lambda$.

Soit δ un élément de $\mathcal{U}$. Montrons par récurrence sur $\ell(\delta)$ que δ est dans $\mathcal{U}^\lambda$. Si $\ell(\delta) = 0$, alors $\delta = \mathrm{Id}$ qui appartient à toute chaîne maximale de W^λ, donc Id est dans $\mathcal{U}^\lambda$.

Si $\ell(\delta) > 0$, supposons que $c = (\delta_1 > \cdots > \delta_p)$, $u = (\tau_1 > \cdots \tau_r)$ et que δ n'est pas dans c. Comme u contient l'unique élément maximal de $\mathcal{U}^\lambda$, soit i maximal tel que $\tau_i \geq \delta$. Si $\tau_i = \delta$, alors $\delta \in u$ et donc $\delta \in \mathcal{U}^\lambda$. Sinon, du fait que δ_p est l'unique borne inférieure de $\mathcal{U}$, on voit que $\delta > \delta_p$. Soit j minimal tel que $\delta_j < \tau_i$. Puisque c est une chaîne maximale dans $\mathcal{U}$ et que $\delta_{j+1} \geq \tau_i$, on déduit que δ n'est pas supérieur à δ_j et par la minimalité de i, on conclut que δ et δ_j sont incomparables. Il en résulte donc que $\ell(\delta \wedge \delta_j) < \ell(\delta)$, et par hypothèse de récurrence, on déduit que $\delta \wedge \delta_j$ est dans $\mathcal{U}$.

L'élément $\delta_j \vee \delta \geq \delta_j$, de plus $\delta \leq \tau_i$ et $\delta_j \leq \tau_i$, donc $\delta_j \leq \delta_j \vee \delta \leq \tau_i$, comme c est une chaîne maximale dans $\mathcal{U}$, on déduit que $\delta_j \vee \delta$ est dans c, donc dans u. Ce qui implique que $\delta \vee \delta_j$ et $\delta \wedge \delta_j$ sont des éléments de $\mathcal{U}^\lambda$, puis grâce au corollaire 1.2, on conclut que δ est dans $\mathcal{U}^\lambda$. □

Soient L_1 et L_2 deux treillis. Une injection ψ de L_1 dans L_2 est une injection de treillis si elle respecte l'ordre et vérifie les égalités

$$\psi(\tau \vee \tau') = \psi(\tau) \vee \psi(\tau') \qquad \text{et} \qquad \psi(\tau \wedge \tau') = \psi(\tau) \wedge \psi(\tau').$$

Un treillis est dit *distributif* s'il satisfait les deux conditions supplémentaires suivantes

$$\delta \wedge (\tau \vee \tau') = (\delta \wedge \tau) \vee (\delta \wedge \tau)$$

et

$$\delta \vee (\tau \wedge \tau') = (\delta \vee \tau) \wedge (\delta \vee \tau)$$

Le théorème de structure de Birkhoff (*voir* [3], page 59) assure que tout treillis distributif est isomorphe à l'ensemble des idéaux ordonnés par l'inclusion, d'un ensemble partiellement ordonné, où un idéal I est un sous-ensemble vérifiant

$$x \in I \qquad \text{et} \qquad y < x \Rightarrow y \in I.$$

Le but du reste de cette section est de démontrer que $\mathcal{U}^\lambda$ est un treillis distributif. Pour cela on va construire l'ensemble partiellement ordonné dont l'existence est assurée par le théorème de structure, puis on va donner l'isomorphisme en question.

Considérons l'ensemble des arêtes de $\mathcal{U}^\lambda$, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(\tau, s_\beta\tau)$ d'éléments de $\mathcal{U}^\lambda$ tels que $\ell(\tau) = \ell(s_\beta\tau) + 1$, et θ un élément abstrait. On définit une action du monoïde libre engendré par les réflexions de W sur l'ensemble des arêtes et θ, de la manière suivante :

$$s_\alpha.(\tau, s_\beta\tau) = \begin{cases} (s_\alpha\tau, s_\alpha s_\beta\tau) & \text{si } \operatorname{supp}\alpha \perp \operatorname{supp}\beta \text{ et } \ell(s_\alpha\tau) = \ell(\tau) \pm 1, \\ \theta & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette action définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des arêtes de la façon suivante : deux arêtes $(\tau, s_\alpha\tau)$ et $(\kappa, s_\beta\kappa)$ sont dites équivalentes si $\alpha = \beta$ et s'il existe une suite de racines positives $\beta_1, \dots, \beta_t$ telle que :

$$s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_t}(\tau, s_\alpha\tau) = (\kappa, s_\alpha\kappa).$$

Soit $\mathcal{A}^\lambda$ l'ensemble des classes d'équivalence des arêtes de $\mathcal{U}^\lambda$.

Lemme 1.2. — *Pour toute chaîne maximale u, l'ensemble des arêtes de u forme un système minimal de représentants des classes d'équivalences des arêtes.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que toute arête $(\kappa, s_\beta\kappa)$ est équivalente à une arête de u. On procède par récurrence sur $\ell(\kappa)$.

Si $\ell(\kappa) = 1$, alors, ou bien κ est un élément de u, ou bien, du fait que la chaîne u contient l'unique élément maximal de $\mathcal{U}^\lambda$, il existe τ_1 et τ_2 dans le support de u tels que

$$\kappa < \tau_2, \qquad \tau_1 \leq \tau_2, \qquad \ell(\tau_2) = \ell(\tau_1) + 1, \qquad \text{et} \qquad \kappa \text{ et } \tau_1 \text{ sont incomparables.}$$

Supposons que τ_1 est de longueur maximale, il en résulte que τ_2 est l'unique borne supérieure de κ et τ_1. Étant donné que ces deux éléments appartiennent à $\mathcal{U}^\lambda$, par le corollaire 1.1, on déduit que l'arête (κ, Id) est équivalente à l'arête (τ_2, τ_1).

Plus généralement, il existe τ unique dans u tel que $\tau \geq \kappa$ et $\ell(\tau)$ minimale. Soit α une racine positive telle que $(\tau, s_\alpha\tau)$ est une arête de u et supposons que $(\kappa, s_\beta\kappa)$ n'est pas une arête de u.

Par minimalité de τ, on conclut que κ et $s_\alpha\tau$ sont incomparables, et par le corollaire 1.1, il s'ensuit que les supports de α et (τ, κ) sont orthogonaux.

Ce qui induit que l'arête $(\kappa, s_\alpha\kappa)$ est équivalente à l'arête $(\tau, s_\alpha\tau)$. Ainsi, l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

a) $\alpha = \beta$, dans ce cas $(\kappa, s_\alpha\kappa) \sim (\tau, s_\alpha\tau)$;

b) $\alpha \neq \beta$, dans ce cas les supports des racines α et β sont orthogonaux et $(s_\alpha\kappa, s_\alpha s_\beta\kappa) \sim (\kappa, s_\beta\kappa)$.

Par hypothèse de récurrence, il existe une arête de u équivalente à $(s_\alpha\kappa, s_\alpha s_\beta\kappa)$, on conclut alors par transitivité. □

À chaque élément $\tau \in \mathcal{U}^\lambda$, on associe le sous-treillis

$$\mathcal{U}^\lambda_\tau = \{\delta \in \mathcal{U}^\lambda \mid \delta \leq \tau\},$$

et l'ensemble $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ de toutes les classes d'équivalence des arêtes de $\mathcal{U}^\lambda_\tau$.

Soit $\mathcal{P}(\mathcal{A}^\lambda)$ l'ensemble des parties de la réunion de $\mathcal{A}^\lambda$ et l'ensemble vide, ordonné par l'inclusion et muni de l'intersection et de la réunion ; qui est un treillis distributif. Considérons $\mathbf{P}$ l'application de $\mathcal{U}^\lambda$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{A}^\lambda)$ qui à τ associe $\mathcal{A}^\lambda_\tau$. pour montrer que $\mathcal{U}^\lambda$ est un treillis distributif, il suffit de monter que c'est un sous-treillis de $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$.

Théorème 1.1. — *L'application* $\mathbf{P}$ *est une injection de treillis. En particulier, $\mathcal{U}^\lambda$ est un treillis distributif.*

Démonstration. — Soient u une chaîne maximale et $(\tau, s_\alpha\tau)$, $(\kappa, s_\beta\kappa)$ deux arêtes distinctes de u. On peut supposer que $s_\alpha\tau \geq \kappa$. Pour que ces deux arêtes soient équivalentes, il faut que $\alpha = \beta$, et qu'il existe une suite de racines positives $\beta_1, \ldots, \beta_t$ telle que

$$s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_t}\tau = \kappa \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp}\alpha \perp \operatorname{supp}\{\beta_1, \ldots, \beta_t\}.$$

Cependant le support de α est inclus dans le support de (τ, κ), ce qui implique que les deux arêtes ne sont pas équivalentes et on conclut que

$$\tau > \kappa \Longrightarrow \mathcal{A}_\tau^\lambda \supsetneq \mathcal{A}_\kappa^\lambda,$$

par conséquent **P** est injective. Soient τ, κ deux éléments incomparables dans $\mathcal{U}^\lambda$, soit $\tau \wedge \kappa$ leur borne inférieure. D'après le corollaire 1.1, il existe $\beta_1, \ldots, \beta_t$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des racines positives telles que

$$\tau = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_t}(\tau \wedge \kappa) \qquad \text{et} \qquad \kappa = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_p}(\tau \wedge \kappa)$$

et les supports des racines $\beta_1, \ldots, \beta_t$ sont orthogonaux à ceux de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Par définition de la relation d'équivalence sur les arêtes, on sait qu'aucune des arêtes de la forme

$$\big(s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_t}(\tau \wedge \kappa), s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_t}(\tau \wedge \kappa)\big)$$

n'est équivalente à une arête de la forme

$$\big(s_{\alpha_j} \cdots s_{\alpha_p}(\tau \wedge \kappa), s_{\alpha_{j+1}} \cdots s_{\alpha_p}(\tau \wedge \kappa)\big)$$

pour $1 \leq i \leq t$ et $1 \leq j \leq p$. Ceci entraîne que

$$\mathcal{A}_\tau^\lambda \cap \mathcal{A}_\kappa^\lambda = \mathcal{A}_{\tau\wedge\kappa}^\lambda.$$

Par les mêmes arguments, on déduit que

$$\mathcal{A}_\tau^\lambda \cup \mathcal{A}_\kappa^\lambda = \mathcal{A}_{\tau\vee\kappa}^\lambda.$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 1.1. — *Le treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$, induit naturellement un ordre partiel sur l'ensemble des classes d'équivalence des arêtes $\mathcal{A}^\lambda$, où $\gamma \geq \gamma'$ si et seulement si pour tout τ dans $\mathcal{U}^\lambda$, la propriété suivante est satisfaite :*

$$\gamma \in \mathcal{A}_\tau^\lambda \Longrightarrow \gamma' \in \mathcal{A}_\tau^\lambda.$$

De cette façon, on voit que $\mathcal{U}^\lambda$ est isomorphe à l'ensemble des idéaux de $\mathcal{A}^\lambda$.

1.2 Polytopes associés aux modules de Demazure

Désignons par $\mathbb{B}(\lambda)$ l'ensemble des chemins de Lakshmibai-Seshadri (L-S) de type λ (*voir* [29, 36]). La définition qu'on va donner ici est légèrement différente de celle des précédents auteurs, elle est due aux travaux de Dehy (dans sa thèse) (*voir* [9]).

Soient $(\tau, s_\alpha\tau)$ une arête de W^λ et considérons $a_{(\tau,\tau')} = |\langle \tau(\lambda), \alpha^\vee \rangle|$ sa *multiplicité*.

Définition 1.2. — *Un* L-S chemin de type λ *est un couple*

$$\pi = (\tau_1 > \cdots > \tau_s, 0 < a_1 < \cdots < a_s = 1)$$

formé d'une chaîne dans W^λ *et d'une suite de nombres rationnels telle que pour tout* $i = 1, \ldots, s-1$ *et toute arête* $(\tau, s_\alpha\tau)$ *contenue dans une chaîne reliant* τ_i *à* τ_{i+1}, *on a*

$$a_{(\tau,s_\alpha\tau)} a_i \in \mathbb{Z}.$$

Pour tout treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$, *on désigne par* $\mathbb{U}^\lambda$ *l'ensemble des L-S chemins de type* λ *tels que les éléments* $\tau_1, \ldots, \tau_s$ *appartiennent à* $\mathcal{U}^\lambda$.

Fixons un treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$. De la définition de la relation d'équivalence sur l'ensemble des arêtes de $\mathcal{U}^\lambda$, on déduit que pour tout couple d'arêtes équivalentes $(\tau, s_\alpha\tau) \sim (\tau', s_\alpha\tau')$, on a

$$a_{(\tau,s_\alpha\tau)} = a_{(\tau',s_\alpha\tau')}.$$

Par conséquent, pour toute classe d'équivalence d'arêtes γ, on définit la *multiplicité*

$$a_\gamma = |\langle \tau(\lambda), \alpha^\vee \rangle|,$$

où $(\tau, s_\alpha\tau)$ est un représentant de la classe de γ.

Définition 1.3. — *Soient* $V = \mathbb{R}^{\mathrm{Card}\,\mathcal{A}^\lambda}$ *et les* e_γ, $\gamma \in \mathcal{A}^\lambda$ *la base canonique de* V. *On définit le polytope* $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ *comme l'enveloppe convexe des points*

$$u_\tau = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}^\lambda_\tau} a_\gamma e_\gamma \qquad \textit{avec} \qquad u_\tau = 0 \;\; \textit{si} \;\; \tau = \mathrm{Id}.$$

On rappelle que $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ *est l'ensemble des classes d'équivalence des arêtes* $(\delta, s_\alpha\delta)$ *dans* $\mathcal{U}^\lambda$ *telles que* $\delta \leq \tau$.

Pour toute chaîne maximale u, *on note* $\mathcal{P}_u(\mathcal{U}^\lambda)$ *l'enveloppe convexe des points* u_τ, τ *élément de la chaîne* u.

Proposition 1.2. — (i) $\dim \mathcal{P}_u(\mathcal{U}^\lambda) = \mathrm{Card}\,\mathcal{A}^\lambda$;

(ii) $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) = \bigcup_{\substack{\text{chaines-maximales} \\ \text{dans } \mathcal{U}^\lambda}} \mathcal{P}_u(\mathcal{U}^\lambda)$ *est une décomposition simpliciale ;*

(iii) *les sommets de* $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ *sont exactement les points* u_τ *pour* $\tau \in \mathcal{U}^\lambda$;

(iv) $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) \cap \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\,\mathcal{A}^\lambda}$ *est égal à l'ensemble des points*

$$u_\pi = \sum_{i=1}^{s} (a_i - a_{i-1}) u_{\tau_i}$$

où $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, a_1, \ldots, a_s = 1)$ *est un L-S chemin de type* λ *dans* $\mathbb{U}^\lambda$;

(v) *pour tout* $n > 0$, *on a* $n\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) = \mathcal{P}(\mathcal{U}^{n\lambda})$.

Démonstration. — La première assertion est une conséquence directe du lemme 1.2. D'après le théorème 1.1 et la définition des u_τ, on obtient les relations

$$u_\tau + u_{\tau'} = u_{\tau\vee\tau'} + u_{\tau\wedge\tau'}.$$

Pour montrer (ii), on considère un point v dans $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$,

$$v = \sum_{\tau\in\mathcal{U}^\lambda} a_\tau u_\tau, \qquad \sum_{\tau\in\mathcal{U}^\lambda} a_\tau = 1 \qquad \text{et} \qquad a_\tau \geq 0.$$

À l'aide des relation précédentent, on déduit qu'on peut écrire

$$v = \sum_{i=1}^{s} a_{\tau_i} u_{\tau_i} \qquad \text{pour} \qquad \tau_1 > \cdots > \tau_s.$$

Il en résulte que v appartient à l'un des polytopes $\mathcal{P}_u(\mathcal{U}^\lambda)$. Il reste à montrer que les intersections sont de dimension inférieure à $\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda$.

Notons que les polytopes $\mathcal{P}_u(\mathcal{U}^\lambda)$ sont simpliciaux, donc les facettes de $\mathcal{P}_u(\mathcal{U}^\lambda)$ sont indexées par les sous-chaînes de u. Plus précisément, pour toute sous-chaîne σ de u et F_σ la face correspondante, on a

$$F_\sigma = \left\{ v = \sum_{\tau\in\sigma} a_\tau u_\tau \ , \ a_\tau \geq 0, \ \sum_{\tau\in\sigma} a_\tau = 1 \right\}.$$

Considérons deux expressions

$$v = \sum_{i=1}^{s} a_{\tau_i} u_{\tau_i} = \sum_{i=1}^{t} a_{\delta_i} u_{\delta_i} \qquad \text{avec } \tau_1 > \cdots > \tau_s \text{ et } \delta_1 > \cdots > \delta_t.$$

Puisque l'application $\tau \mapsto \mathcal{A}^\lambda_\tau$ est une injection qui respecte l'ordre, on déduit que $\tau_1 = \delta_1$ et $a_{\tau_1} = a_{\delta_1}$. En utilisant une récurrence sur s, il vient que $\tau_i = \delta_i$ et $a_{\tau_i} = a_{\delta_i}$ pour tout i et $p = s$. En particulier, si v appartient à l'intersection de $\mathcal{P}_u(\mathcal{U}^\lambda)$ et $\mathcal{P}_{u'}(\mathcal{U}^\lambda)$, alors $\tau_1, \dots, \tau_s$ sont des éléments de l'intersection de u et u', ce qui implique que v appartient à la facette $F_{u\cap u'}$.

Démontrons (iii). Soit $\tau \in \mathcal{U}^\lambda$ tel que

$$u_\tau = \sum_{\delta\in\mathcal{U}^\lambda} a_\delta u_\delta, \qquad a_\delta \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{\delta\in\mathcal{U}^\lambda} a_\delta = 1.$$

Nous allons montrer que $a_\delta \neq 0$ si et seulement si $\delta = \tau$. Notons que

$$\sum_{\delta\in\mathcal{U}^\lambda} a_\delta u_\delta = \sum_{\gamma\in\mathcal{A}^\lambda} a_\gamma \Bigg(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}^\lambda_\delta} a_\delta \Bigg) e_\gamma.$$

Par conséquent,

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{A}^\lambda_\delta} a_\delta = 1 \qquad \text{pour } \gamma \in \mathcal{A}^\lambda_\tau \tag{1.4}$$

et

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_\delta^\lambda} a_\delta = 0 \qquad \text{pour tout } \gamma \notin \mathcal{A}_\tau^\lambda. \tag{1.5}$$

Comme $a_\delta \geq 0$ pour tout δ dans $\mathcal{A}^\lambda$, de (1.5) on déduit que $a_\delta = 0$ pour tout δ non inférieure ou égale à τ. Mais s'il existe $\delta < \tau$ tel que $a_\delta \neq 0$, alors pour γ élément de $\mathcal{A}_\tau^\lambda \setminus \mathcal{A}_\delta^\lambda$, on a $\sum_{\gamma\in\mathcal{A}_\kappa^\lambda} a_\kappa < 1$, ce qui contredit (1.4).

Montrons (iv). Supposons que n=1. D'après (ii), tout point dans $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ peut s'écrire sous la forme

$$v = \sum_{i=1}^{s} a_i u_{\tau_i} \qquad \text{pour} \qquad \tau_1 > \cdots > \tau_s,\ a_i \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i = 1.$$

En transformant cette écriture, on obtient

$$v = a_1(u_{\tau_1} - u_{\tau_2}) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{s-1})(u_{\tau_{s-1}} - u_{\tau_s}) + (a_1 + \cdots + a_s)u_{\tau_s}.$$

Par définition des points u_τ, il vient que $v \in \mathbb{Z}^{\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda}$ si et seulement si $a_\gamma(a_1+\cdots+a_i)$ est dans $\mathbb{Z}$ pour tout γ dans $\mathcal{A}_{\tau_i}^\lambda \setminus \mathcal{A}_{\tau_{i-1}}^\lambda$ et $i = 1, \ldots, s-1$. Par définition des L-S chemins de type λ, le couple $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, b_1, \ldots, 1)$, où $b_i = a_1 + \cdots + a_i$ est un L-S chemin de type λ et $v = u_\pi$.

En remplaçant le poids λ par $n\lambda$ dans la construction, tout coefficient a_γ se remplace par na_γ et $\mathcal{U}^\lambda = \mathcal{U}^{n\lambda}$. Le polytope $\mathcal{P}(\mathcal{U}^{n\lambda})$ est l'enveloppe convexe des points nu_τ, et par définition de $n\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$, on obtient l'égalité, ce qui complète la preuve. □

Considérons w dans W^λ et soit $\mathbb{B}_w(\lambda)$ l'ensemble des L-S chemins $\pi = (\tau_1, \ldots)$ tels que $\tau_1 \leq w$. Dans [29], Littelmann a montré la formule de caractère du module de Demazure $V_w(\lambda)$

$$\operatorname{Car} V_w(\lambda) = \sum_{\pi\in\mathbb{B}_w(\lambda)} e^{\pi(1)}, \tag{1.6}$$

où $\pi(1) = \sum_{i=1}^{s}(a_i - a_{i-1})\tau_i(\lambda)$.

Le recouvrement de W^λ par des treillis distributifs induit d'une façon naturelle un recouvrement de l'ensemble des L-S chemins de type λ. Plus précisement pour $W^\lambda = \mathcal{U}_1^\lambda \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n^\lambda$, où n est le nombre des classes d'équivalence des chaînes maximales dans W^λ, on a $\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{U}_1^\lambda \cup \cdots \cup \mathbb{U}_n^\lambda$.

Pour tout sous-ensemble I de $\{1, \ldots, n\}$, soit $\mathcal{U}_I^\lambda$ (resp. $\mathbb{U}_I^\lambda$) l'intersection des treillis $\mathcal{U}_i^\lambda$ (resp. $\mathbb{U}_i^\lambda$). Ainsi, le nombre des L-S chemins de type λ est donné par la formule combinatoire

$$\operatorname{Card}\mathbb{B}(\lambda) = \sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \operatorname{Card}\big(\mathbb{U}_I^\lambda\big).$$

D'après la formule de caractère $\dim V_w(\lambda)$ est égale au cardinal de $\mathbb{B}_w(\lambda)$. Nous allons interpréter cette dimension en terme de somme alternée de polynômes d'Ehrhart. Pour cela, pour chaque I dans $\{1,\ldots,n\}$, on construit un polytope P_I tel que le nombre des points à coordonnées entières de nP_I est égal au nombre des L-S chenims de $\mathbb{U}_I^{n\lambda}$.

Fixons $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $\{u_\tau^i,\ \tau \in \mathcal{U}_i^\lambda\}$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}(\mathcal{U}_i^\lambda)$. Pour toute partie I dans $\{1,\ldots,n\}$ et $i \in I$, on considère le polytope

$$\mathcal{P}_I(\mathcal{U}_i^\lambda) = \operatorname{conv}\{u_\tau^i,\ \tau \in \mathcal{U}_I^\lambda\}.$$

Lemme 1.3. — *Le cardinal des points entiers dans $\mathcal{P}_I(\mathcal{U}_i^\lambda)$ est égal à* $\operatorname{Card}\mathbb{U}_I^\lambda$. *De même,* $n\mathcal{P}_I(\mathcal{U}_i^\lambda) = P_I(\mathcal{U}_i^{n\lambda})$.

Démonstration. — Puisque $\mathcal{U}_I^\lambda$ est un sous-treillis distributif de $\mathcal{U}_i^\lambda$, il en résulte que tout point v de $\mathcal{P}_I(\mathcal{U}_i^\lambda)$ peut s'écrire

$$v = \sum_{i=1}^{p} a_j u_{\tau_j}^i \qquad \text{où} \qquad \sum_{i=1}^{p} a_j = 1 \quad \text{et} \quad \{\tau_1 < \ldots < \tau_p\} \subset \mathcal{U}_I^\lambda.$$

Puis le même raisonnement que celui de la preuve de la proposition 1.2 nous conduit au résultat. □

Pour chaque sous-ensemble $I \subset \{1,\ldots,n\}$, on fixe $i \in I$. Comme le cardinal de $P_I(\mathcal{U}_i^\lambda)$ est indépendant de i, on note P_I le polytope $P_I(\mathcal{U}_i^\lambda)$. Comme conséquence du dernier lemme on a :

Théorème 1.2. — *La dimension de $V_w(\lambda)$ est une somme alternée de polynômes d'Ehrhart. Plus précisément*

$$\dim V_w(\lambda) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \operatorname{Card}\big(P_I \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda}\big).$$

1.3 Variété torique associée à $\mathcal{U}^\lambda$

Soit P un polytope à sommets entiers dans $\mathbb{R}^k$ et $I(n)$ l'espace vectoriel engendré par X^u, où $u \in nP \cap \mathbb{Z}^k$. L'algèbre

$$\mathbb{C}[P] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I(n),$$

où la multiplication est donnée par $X^u X^v = X^{u+v}$, est une algèbre $\mathbb{N}$-graduée. D'après [14] (chap. 7, §3), il existe une variété torique projective X et un fibré ample $\mathcal{L}$ tels que $\mathbb{C}[P] = \Gamma\big(X,\mathcal{L}\big)$. L'éventail de X est donné par l'ensemble des cônes

$$\sigma_F = \{v \in \mathbb{R}^k \text{ tel que } \langle v, u' - u\rangle \geq 0 \text{ pour tous } u \text{ dans } F \text{ et } u' \text{ dans } P\} \tag{1.7}$$

où F décrit l'ensemble des faces propres et impropres de P. Si on suppose de plus que $\mathcal{L}$ est très ample, alors l'homomorphisme de $\mathbb{C}[X_u, u \in P \cap \mathbb{Z}^k]$ dans $\mathbb{C}[P]$ qui à X_u associe X^u est surjective et son noyau est engendré par des relations binômiales.

Soit $X(\mathcal{U}^\lambda)$ la variété torique projective associée au polytope $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ et $\Delta(\mathcal{U}^\lambda)$ son éventail. Nous allons déterminer les cônes de $\Delta(\mathcal{U}^\lambda)$, montrer que le fibré en droite associé au polytope $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ est très ample, calculer le groupe de picard de $X(\mathcal{U}^\lambda)$ et ensuite déterminer l'idéal de $X(\mathcal{U}^\lambda)$. Dans le cas où toutes les multiplicités a_γ sont égales à 1, ces variétés, coïncident avec celles qui ont été étudiées dans [16, 43].

1.3.1 Éventail de $X(\mathcal{U}^\lambda)$

Le graphe de Hasse d'un ensemble partiellement ordonné A est le graphe dont les sommets sont les éléments de A et les arêtes sont les couples d'éléments (γ,γ') tels que $\gamma > \gamma'' \geq \gamma'$ implique que $\gamma''=\gamma'$. Soit $\mathcal{H}^\lambda$ le graphe de Hasse de $\mathcal{A}^\lambda$.

Théorème 1.3. — *Les générateurs minimaux de l'éventail $\Delta(\mathcal{U}^\lambda)$ sont les suivants :*

1) les vecteurs $D_{(\gamma,\gamma')} = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(a_\gamma,a_{\gamma'})}(a_{\gamma'}e_\gamma - a_\gamma e_{\gamma'})$, (γ,γ') une arête de $\mathcal{H}^\lambda$;

2) les vecteurs e_γ, γ une borne supérieure de $\mathcal{A}^\lambda$;

3) les vecteurs $-e_\gamma$, γ borne inférieure de $\mathcal{A}^\lambda$.

Démonstration. — D'après la décomposition simpliciale, les faces propres (c'est-à-dire que les faces de dimension $r = \mathrm{Card}\,\mathcal{A}^\lambda - 1$) sont en bijection avec certaines chaînes à r éléments. Pour obtenir les générateurs minimaux de $\Delta(\mathcal{U}^\lambda)$, on détermine pour chaque chaîne de taille r le vecteur orthogonal à la face correspondante à cette chaîne, puis on teste si ce vecteur vérifie l'équation (1.7). Si c'est le cas, alors ce vecteur est un générateur minimal. De plus, tout générateur minimal s'obtient de cette façon.

Soit $c = (\tau_1,\dots,\tau_r)$, F la face correspondante et $c_i = \mathcal{A}^\lambda_{\tau_i} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau_{i+1}}$ pour $i = 1,\dots,r-1$. Notons que d'après la taille de la chaîne, on a l'un des deux cas suivants :

1) $\tau_1 = w_0$ et $\tau_r = \mathrm{Id}$;

2) $\tau_1 = w_0$ ou $\tau_r = \mathrm{Id}$.

Dans le premier cas, il existe un unique i tel que $|c_i| = 2$ et $|c_j| = 1$ pour $j \neq i$. Supposons que $c_i = \{\gamma,\gamma'\}$. Alors le vecteur $v = (a_\gamma e_{\gamma'} - a_{\gamma'} e_\gamma)$ est orthogonal à la face F, de plus $\langle v,u\rangle = 0$ pour tout $u \in F$. Donc, si v est dans σ_F, alors $\langle v,u'\rangle \geq 0$ pour tout $u' \in \mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$. Si γ et γ' sont incomparables, alors il existe τ dans $\mathcal{U}^\lambda$ tel que γ appartient à $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ et γ' n'appartient pas à $\mathcal{A}^\lambda_\tau$. Par conséquent $\langle v,u_\tau\rangle < 0$. De même, il existe τ' tel que $\mathcal{A}^\lambda_{\tau'}$ contient γ' mais ne contient pas γ. Donc $\langle -v,u_{\tau'}\rangle < 0$, ce qui implique que ni v ni $-v$ n'est un générateur minimal de $\Delta(\mathcal{U}^\lambda)$. Sinon, on peut supposer que $\gamma > \gamma'$. Dans ce cas, du fait que γ dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ implique que γ' est dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$, on voit que $\langle v,u_\tau\rangle \geq 0$ pour tout τ dans $\mathcal{U}^\lambda$, donc v satisfait (1.7). Remaquons que c_i contient tout γ'' vérifiant $\gamma > \gamma'' > \gamma'$, donc du fait que $|c_i| = 2$, il vient que (γ,γ') est une arête de $\mathcal{H}^\lambda$.

Dans le second cas, si $\tau_r \neq \mathrm{Id}$, alors $\ell(\tau_r) = 1$ et $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_r}$ est réduit à un élément noté γ. Puisque γ dans $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_i}$ pour tout i, donc $\langle e_\gamma,u_{\tau_i}\rangle = a_\gamma$ pour tout i, ce qui induit que $\langle e_\gamma,u\rangle = a_\gamma$ pour tout u dans F. Il en résulte que pour tout u' dans $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ tel que $u' = \sum_{\tau\in\mathcal{U}^\lambda} a_\tau u_\tau$ avec $a_\tau \geq 0$ et $\sum a_\tau = 1$, on a

$$\begin{aligned}\langle -e_\gamma, u'-u\rangle &= a_\gamma - \sum_{\tau\in\mathcal{U}^\lambda} a_\tau\langle -e_\gamma,u_\tau\rangle \\ &= a_\gamma(1 - \sum_{\gamma\in\mathcal{A}^\lambda_\tau} a_\tau) \geq 0\end{aligned}$$

ce qui prouve que $-e_\gamma$ satisfait (1.7).

Si $\tau_1 \neq w_0$ et γ l'unique élément de $\mathcal{A}^\lambda$ qui n'appartient pas à $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_1}$, alors $\langle e_\gamma,u\rangle = 0$ pour tout u dans F et $\langle e_\gamma,u'\rangle \geq 0$ pour tout u' dans $\mathcal{U}^\lambda$; ceci montre clairement que ce vecteur vérifie (1.7). □

Les cônes maximaux de $\Delta(\mathcal{U}^\lambda)$ sont en bijection avec les sommets de $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$. Il en résulte qu'on peut les indexer par les éléments de $\mathcal{U}^\lambda$. D'après (1.7), on a

$$\sigma_\tau = \{v \in \mathbb{R}^{\mathrm{Card}\,\mathcal{A}^\lambda},\ \langle v, u' - u_\tau\rangle \geq 0, \forall\, u' \in \mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)\}.$$

Corollaire 1.3. — *Pour tout τ dans $\mathcal{U}^\lambda$, le cône σ_τ est engendré par les vecteurs suivants :*

1) les vecteurs $D_{(\gamma,\gamma')}$, avec γ et γ' dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ ou aucune des deux n'est dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$;

2) les vecteurs e_γ, γ maximal dans $\mathcal{A}^\lambda$ et γ n'appartient pas à $\mathcal{A}^\lambda_\tau$;

3) les vecteurs $-e_\gamma$, γ minimal dans $\mathcal{A}^\lambda$ et γ dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$.

Démonstration. — Si $D_{(\gamma,\gamma')}$ est un générateur de σ_τ, alors du fait que $u_{\mathrm{Id}} = 0$, on déduit que $\langle D_{(\gamma,\gamma')}, u_\tau\rangle = 0$, ce qui implique que γ et γ' sont dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$, ou bien $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ ne contient ni γ ni γ' ; en particulier $D_{(\gamma,\gamma')}$ est dans σ_τ.

Supposons que σ_τ contient un générateur de la forme e_γ, alors on doit avoir $-\langle e_\gamma, u_\tau\rangle \geq 0$, mais ceci n'est possible que si γ n'appartient pas à $\mathcal{A}^\lambda_\tau$. De même, supposons γ est minimal dans $\mathcal{A}^\lambda$ et que $-e_\gamma$ est un générateur de σ_τ. Alors, ou bien γ n'est pas dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$, dans ce cas il existe δ dans $\mathcal{U}^\lambda$ tel que γ dans $\mathcal{A}^\lambda_\delta$ tel que $\langle -e_\gamma, u_\delta - u_\tau\rangle < 0$, ce qui donne une contradiction, ou bien γ est dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ et dans ce cas on vérifie directement que $-e_\gamma$ satisfait (1.7). □

Corollaire 1.4. — *Soient τ et ϕ deux éléments de $\mathcal{U}^\lambda$. Alors*

$$\sigma_\tau \cap \sigma_\phi = \sigma_{\tau\vee\phi} \cap \sigma_{\tau\wedge\phi}.$$

Démonstration. — Grâce au précédent corollaire, on vérifie que dans les deux cas l'intersection est engendrée par les vecteurs $D_{(\gamma,\gamma')}$ où γ et γ' sont simultanément dans l'un des ensembles suivants : $\mathcal{A}^\lambda \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau\vee\phi}$, ou $\mathcal{A}^\lambda_{\tau\vee\phi} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau\wedge\phi}$, ou $\mathcal{A}^\lambda_{\tau\wedge\phi}$; les vecteurs e_γ, γ maximal dans $\mathcal{A}^\lambda$ et $\gamma \notin \mathcal{A}^\lambda_{\tau\vee\phi}$, ainsi que les vecteurs $-e_\gamma$ pour γ minimal dans $\mathcal{A}^\lambda$ et $\gamma \notin \mathcal{A}^\lambda_{\tau\vee\phi}$. □

1.3.2 Groupe de Picard de $X(\mathcal{U}^\lambda)$

Le graphe de Hasse $\mathcal{H}^\lambda$ est dit *connexe* si tout couple de sommets est relié par une suite d'arêtes. Un sous-ensemble A de $\mathcal{A}^\lambda$ est dit connexe, si le graphe, dont les sommets sont les éléments de A et les arêtes sont les arêtes (γ,γ') de $\mathcal{H}^\lambda$ telles que γ et γ' appartiennent à A, est connexe. Notons par V_A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathrm{Card}\,\mathcal{A}^\lambda}$ engendré par les e_γ pour γ dans A et D_A le sous-espace de V_A engendré par les vecteurs $D_{(\gamma,\gamma')}$.

Lemme 1.4. — *Le sous-espace $D_A^\perp$ est engendré par les vecteurs*

$$u_B = \sum_{\gamma\in B} a_\gamma e_\gamma,$$

où B décrit l'ensemble des composantes connexes de A.

Démonstration. — On se restreint au cas connexe et on vérifie que D_A est l'hyperplan défini par l'équation $\sum_{\gamma\in A} a_\gamma x_\gamma = 0$. □

Par construction de la variété torique $X(\mathcal{U}^\lambda)$, le fibré en droite $\mathcal{L}(\mathcal{U}^\lambda)$ associé au polytope $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)$ est ample. Pour montrer qu'il est très ample (*voir* [12], chap. 3, §4), il suffit de montrer que pour tout cône maximal σ_τ, le semi-groupe $\sigma_\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda}$ est engendré par $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$. Comme conséquence du lemme qui va suivre, on a :

Corollaire 1.5. — *Le fibré en droite $\mathcal{L}(\mathcal{U}^\lambda)$ est très ample.*

Lemme 1.5. — *Les générateurs du cône $\sigma_\tau^\vee$ sont les vecteurs*

$$u_{\delta,\tau} = u_\delta - u_\tau \qquad \textit{tels que } \mathcal{A}^\lambda_{\delta\vee\tau} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\delta\wedge\tau} \textit{ est connexe.}$$

De plus $\sigma_\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda}$ est engendré par $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$.

Démonstration. — Rappelons que les générateurs de $\sigma_\tau^\vee$ sont en bijection avec les faces de codimension 1 de σ_τ. Toute face de codimension 1 de σ_τ est l'intersection de σ_τ avec un autre cône maximal σ_δ de $\Delta(\mathcal{U}^\lambda)$. D'après le lemme 1.4, on voit que $\sigma_\delta \cap \sigma_\tau$ ne peut être de codimension 1 que si $\mathcal{A}^\lambda_{\delta\vee\tau} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\delta\wedge\tau}$ est connexe. Dans ce cas, la droite orthogonale à cette face est engendrée par le vecteur

$$v_{\delta,\tau} = \sum_{\gamma\in\mathcal{A}^\lambda_{\delta\vee\tau}\setminus\mathcal{A}^\lambda_{\delta\wedge\tau}} a_\gamma e_\gamma.$$

Puisque,

$$\mathcal{A}^\lambda_\tau \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau\wedge\delta} \cup \mathcal{A}^\lambda_\delta \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau\wedge\delta} = \mathcal{A}^\lambda_{\delta\vee\tau} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\delta\wedge\tau}$$

et que tout γ dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau\wedge\delta}$ est incomparable avec les éléments de $\mathcal{A}^\lambda_\delta \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau\wedge\delta}$, on déduit que l'ensemble $\mathcal{A}^\lambda_{\delta\vee\tau} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\delta\wedge\tau}$ ne peut être connexe que si τ est δ sont ordonnés. Si $\tau > \delta$, alors $v_{\delta,\tau} = -u_{\delta,\tau}$ et $\langle u_{\delta,\tau}, D_{(\gamma,\gamma')}\rangle = 0$ pour tout γ et γ' appartenant simultanément à l'un des trois ensemble suivants : $\mathcal{A}^\lambda_\tau \setminus \mathcal{A}^\lambda_\delta$, ou $\mathcal{A}^\lambda \setminus \mathcal{A}^\lambda_\tau$, ou $\mathcal{A}^\lambda_\delta$. Remarquons que $\langle u_{\delta,\tau}, e_\gamma\rangle = 0$ pour γ maximal dans $\mathcal{A}^\lambda$ et γ n'appartient pas à $\mathcal{A}^\lambda_\tau$; de plus $\langle u_{\delta,\tau}, D_{(\gamma,\gamma')}\rangle > 0$ pour γ dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$ et γ' dans $\mathcal{A}^\lambda_\delta$, ainsi que $\langle u_{\delta,\tau}, -e_\gamma\rangle > 0$ pour γ minimal dans $\mathcal{A}^\lambda_\tau$. Il en résulte donc que $u_{\delta,\tau}$ est un générateur de $\sigma_\tau^\vee$. De même, si $\delta > \tau$, alors, en utilisant les même arguments, on montre que $u_{\delta,\tau}$ est un générateur de $\sigma_\tau^\vee$.

Notons par $\sigma^\vee_{\tau,+}$ (resp. $\sigma^\vee_{\tau,-}$) le cônes engendrés par les vecteurs $u_{\delta,\tau}$ pour $\delta > \tau$ (resp. $\delta < \tau$). Remarquons que le cône $\sigma_\tau^\vee$ est le produit de $\sigma^\vee_{\tau,+}$ et $\sigma^\vee_{\tau,-}$. Donc, pour voir que $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$ engendre le semi-groupe $\sigma_\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda}$, il suffit de voir que $\sigma^\vee_{\tau,+} \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda}$ est engendré par

$$\{u_\pi - u_\tau,\ \pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, \ldots, 1),\ \pi \in \mathbb{U}^\lambda \text{ et } \tau_s \geq \tau\},$$

ainsi que $\sigma^\vee_{\tau,-} \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card}\mathcal{A}^\lambda}$ est engendré par

$$\{u_\pi - u_\tau,\ \pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, \ldots, 1),\ \pi \in \mathbb{U}^\lambda \text{ et } \tau_s \leq \tau\}.$$

En effet, tous les générateurs du cône $\sigma_\tau^\vee$ sont dans $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$ et que chacun des deux cônes $\sigma_{\tau,+}^\vee$ et $\sigma_{\tau,-}^\vee$ admet une décomposition simpliciale induite par l'ensemble des chaînes maximales dans $\{\delta \geq \tau\}$ et $\{\delta \leq \tau\}$ respectivement.

Soit $u \in \sigma_{\tau,+}^\vee \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card} \mathcal{A}^\lambda}$ et $u = \sum_{i=1}^s a_i u_{\tau_i,\tau}$ et $a_i > 0$. Considérons l'expression

$$u = a_1(u_{\tau_1} - u_{\tau_2}) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{s-1})(u_{\tau_{s-1}} - u_{\tau_s}) + (a_1 + \cdots + a_s)(u_{\tau_s} - u_\tau).$$

Notons que $(a_1 + \cdots + a_s)a_\gamma$ est dans $\mathbb{Z}$, pour tout $\gamma \in \mathcal{A}_{\tau_s}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\tau^\lambda$, il en résulte que $(a_1 + \cdots + a_s) \operatorname{pgcd}_{\gamma \in \mathcal{A}_{\tau_s}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\tau^\lambda}(a_\gamma)$ est dans $\mathbb{N}$. Pour montrer que u est dans le semi-groupe engendré par $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$, on va utiliser une récurrence sur cet entier.

Remarquons tout d'abord que si $(a_1 + \cdots + a_s) \leq 1$, alors $u = u_\pi - u_\tau$, pour

$$\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, \tau, 0, a_1, \ldots, a_1 + \cdots + a_s, 1)$$

où on enlève τ si $(a_1 + \cdots + a_s) = 1$. En particulier, l'hypothèse de récurrence est vérifié.

Si $a_1 \geq 1$, alors $u = u_{\tau_1,\tau} + u'$, où

$$u' = (a_1 - 1)(u_{\tau_1} - u_{\tau_2}) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_s - 1)(u_{\tau_s} - u_\tau)$$

et $u' \in \sigma_{\tau,+}^\vee \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card} \mathcal{A}^\lambda}$. Par hypothèse de récurrence, il vient que u' est dans le semi-groupe engendré par $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$ et puisque $u_{\tau_1,\tau}$ appartient à ce semi-groupe, donc u aussi.

Si $a_1 < 1$, soit i l'unique entier vérifiant $a_1 + \cdots + a_i < 1$ et $a_1 + \cdots + a_{i+1} \geq 1$. De ce choix, on déduit que u s'écrit $u = u_\pi - u_\tau + u'$, où

$$\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_{i+1}, 0, a_1, \ldots, a_1 + \cdots + a_i, 1)$$

et

$$u' = (a_1 + \cdots + \cdots + a_{i+1} - 1)u_{\tau_{i+1},\tau} + a_{i+2}u_{\tau_{i+2},\tau} + \cdots + a_s u_{\tau_s,\tau}.$$

Comme u' appartient à $\sigma_{\tau,+}^\vee \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card} \mathcal{A}^\lambda}$, par l'hypothèse de récurrence, on sait que u' est dans le semi-groupe engendré par $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$, ce qui implique que u est dans ce semi-groupe. Pour montrer que $\sigma_{\tau,-}^\vee \cap \mathbb{Z}^{\operatorname{Card} \mathcal{A}^\lambda}$ est dans le semi-groupe $\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda) - u_\tau$, on procède de la même façon. □

Soit $\mathcal{H}^\lambda = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ une décomposition en composantes connexes. D'après ce qui précède, tout cône σ_τ est le produit de n cônes $\sigma_\tau^1 \times \cdots \times \sigma_\tau^n$, σ_τ^i étant le cône engendré par les générateurs minimaux de $X(\mathcal{U}^\lambda)$ appartenant au sous-espace engendré par les e_γ, $\gamma \in C_i$. Pour tout i l'ensemble des cônes σ_τ^i, $\tau \in \mathcal{U}^\lambda$, forme un éventail $\Delta_i(\mathcal{U}^\lambda)$ et on a : $\Delta(\mathcal{U}^\lambda) = \Delta_1(\mathcal{U}^\lambda) \times \cdots \times \Delta_n(\mathcal{U}^\lambda)$. Par conséquent, le groupe de Picard de la variété $X(\mathcal{U}^\lambda)$ est la somme directe des groupes de Picard des variétés toriques associées aux éventails $\Delta_i(\mathcal{U}^\lambda)$.

Théorème 1.4. — *Le groupe de Picard de $X(\mathcal{U}^\lambda)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, où n est le nombre des composantes connexes de $\mathcal{H}^\lambda$.*

Pour tout cône σ, soit $M(\sigma) = \sigma^{\perp} \cap \mathbb{Z}^{\mathrm{Card}\,\mathcal{A}^{\lambda}}$. Rappelons que, par construction, les cônes maximaux de $\Delta(\mathcal{U}^{\lambda})$ sont tous de dimension $\mathrm{Card}\,\mathcal{A}^{\lambda}$. De [12] (page 64), on a le lemme suivant :

Lemme 1.6. — *Le groupe de Picard de $\mathcal{U}^{\lambda}$ vérifie*

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{U}^{\lambda}) \cong \ker\left(\bigoplus_{i<j} \mathrm{M}(\sigma_i \cap \sigma_j) \xrightarrow{d} \bigoplus_{i<j<k} \mathrm{M}(\sigma_i \cap \sigma_j \cap \sigma_k)\right)$$

où pour tout i, σ_i est un cône maximal, et d est la différentielle $(u_{ij})_{i<j} \longmapsto (u_{ij} + u_{jk} - u_{ik})_{i<j<k}$.

Démonstration du théorème 1.4. — Fixons une extension de l'ordre de Bruhat en un ordre total, indexons les éléments de $\mathcal{U}^{\lambda}$ du plus petit au plus grand et notons σ_i le cône maximal σ_{τ_i}, pour $1 \leq i \leq m$, où m est le nombre des cônes maximaux. On suppose que $\mathcal{H}^{\lambda}$ est connexe et on va montrer que $\mathrm{Pic}(\mathcal{U}^{\lambda})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En effet, de la connexité de $\mathcal{A}^{\lambda}$ et du lemme 1.4, il vient que

$$M(\sigma_1 \cap \sigma_m) = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\mathrm{pgcd}_{\gamma \in \mathcal{A}^{\lambda}}(a_\gamma)} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}^{\lambda}} a_\gamma e_\gamma\right), \qquad \text{où } \sigma_1 = \sigma_{\mathrm{Id}} \text{ et } \sigma_m = \sigma_{w_0}.$$

Soit $u \in \bigoplus_{i<j} \mathrm{M}(\sigma_i \cap \sigma_j)$, $u = (u_{ij})_{i<j}$ et $\tau_i \in \mathcal{U}^{\lambda}$ tels que

$$\mathcal{A}^{\lambda} \setminus \mathcal{A}^{\lambda}_{\tau_i} = C_i^1 \cup \cdots \cup C_i^{h_i} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}^{\lambda}_{\tau_i} = B_i^1 \cup \cdots \cup B_i^{k_i}.$$

D'après le lemme 1.4, on a

$$u_{im} = \sum_{k=1}^{h_i} c_k u_{C_i^k} \qquad \text{et} \qquad u_{1i} = \sum_{k=1}^{k_i} b_k u_{B_i^k},$$

où on rappelle que pour tout sous-ensemble connexe A de $\mathcal{A}^{\lambda}$, le vecteur u_A désigne le facteur

$$\frac{1}{\mathrm{pgcd}_{\gamma \in A}(a_\gamma)} \sum_{\gamma \in A} a_\gamma e_\gamma.$$

Si $u \in \ker d$, alors de l'équation $u_{im} - u_{1m} + u_{1i} = 0$, on déduit que

$$(u_{im}, u_{1m}, u_{1i}) \in \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\mathrm{pgcd}_{\gamma \in \mathcal{A}^{\lambda}}(a_\gamma)} \left(\sum_{k=1}^{h_i} u_{C_i^k},\, u_{\mathcal{A}}^{\lambda},\, \sum_{k=1}^{k_i} u_{B_i^k}\right)\right).$$

Maintenant considérons $i < j$ et supposons que

$$\mathcal{A}^{\lambda}_{\tau_j} \setminus \mathcal{A}^{\lambda}_{\tau_i} = B_{ji}^1 \cup \cdots \cup B_{ji}^{h_{ji}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}^{\lambda}_{\tau_i} \setminus \mathcal{A}^{\lambda}_{\tau_j} = B_{ij}^1 \cup \cdots \cup B_{ij}^{h_{ij}}.$$

Alors,

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{h_{ji}} b_k u_{B_{ji}^k} + \sum_{k=1}^{h_{ij}} u_{B_{ij}^k}.$$

Si $u \in \ker d$, de l'équation $u_{ij} - u_{1j} + u_{1i} = 0$, on déduit que

$$u \in \mathbb{Z}\left(\frac{1}{\operatorname{pgcd}_{\gamma\in\mathcal{A}^\lambda}(a_\gamma)}\left(\sum_{k=1}^{h_{ji}} u_{B^k_{ji}} - \sum_{k=1}^{h_{ij}} u_{B^k_{ij}}\right)\right)_{i<j}.$$

Il reste à vérifier que $\ker d \neq 0$, or ceci découle du fait que pour tout $i < j < l$, l'élément

$$\sum_{k=1}^{h_{lj}} u_{B^k_{lj}} - \sum_{k=1}^{h_{jl}} u_{B^k_{jl}} - \sum_{k=1}^{h_{li}} u_{B^k_{li}} + \sum_{k=1}^{h_{il}} u_{B^k_{il}} + \sum_{k=1}^{h_{ji}} u_{B^k_{ji}} - \sum_{k=1}^{h_{ij}} u_{B^k_{ij}}$$

est nul.

1.3.3 Monômes standard et idéal de $X(\mathcal{U}^\lambda)$

Rappelons que $\mathbb{U}^\lambda$ désigne l'ensemble des L-S chemins de type λ dont les supports sont dans $\mathcal{U}^\lambda$. Soit $\mathbb{C}[\mathbb{U}^\lambda] = \mathbb{C}[x_\pi, \pi \in \mathbb{U}^\lambda]$, puisqu'il a été montré que $\mathcal{L}$ est très ample, l'application canonique de $\mathbb{C}[\mathbb{U}^\lambda]$ dans $\mathbb{C}[\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)]$, qui à x_π associee X^{u_π} est donc surjective. Soit $\mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$ le noyau de cet homomorphisme. Nous allons préciser les relations qui engendrent l'idéal $\mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$.

Définition 1.4. — *Soient $\pi_1, \dots, \pi_r$ un ensemble de L-S chemins de type λ. On appelle le r-uplet $(\pi_1, \dots, \pi_r)$* enchaînement de chemins *et on le note $\pi_1 * \cdots * \pi_r$. Un enchaînement est dit* standard *si, pour tout $i = 1, \dots, r-1$ et tout L-S chemin $\pi_i = (\tau^i_1, \dots \tau^i_{s_i}, 0, \dots, 1)$, on a $\tau^i_s \geq \tau^{i+1}_1$. Un enchaînement est dit standard dans $\mathbb{U}^\lambda$, s'il est standard et si pour tout i, le chemin π_i est dans $\mathbb{U}^\lambda$. Un monôme $x_{\pi_1} \cdots x_{\pi_r}$ dans $\mathbb{C}[\mathbb{U}^\lambda]$ est* standard *si l'enchaînement $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ est standard.*

Soit $\leq$ l'ordre sur $\mathbb{U}^\lambda$ défini par $(\tau_1, \dots, \tau_s, 0, a_1, \dots, 1) \geq (\delta_1, \dots, \delta_t, 0, b_1, \dots, 1)$ si $\tau_1 > \delta_1$ ou $\tau_1 = \delta_1$ et $a_1 > b_1$, ou $\tau_1 = \delta_1$, $a_1 = b_1$ et $\tau_2 > \delta_2$, *etc.*

Ainsi, on définit l'ordre lexicographique sur les enchaînements par : $\pi_1 * \cdots * \pi_r > \eta_1 * \cdots * \eta_q$ si $r > q$, ou bien $r = q$ et il existe $j \leq r$ tel que $\pi_i = \eta_i$ pour $i < j$ et $\pi_j \leq \eta_j$.

Pour tout L-S chemin π de type $n\lambda$, on considère l'unique enchaînement standard $\pi_1 * \cdots * \pi_n$ de chemins de type λ, donné de la manière suivante.

Notons $\pi = (\tau_1, \dots, \tau_s, 0, a_1, \dots, a_s = 1)$ et i l'unique entier tel que $a_j \leq \frac{1}{n}$ pour $j \leq i$ et $a_{i+1} > \frac{1}{n}$. Considérons le chemin rationnel

$$\pi_1 = (\tau_1, \dots, \tau_{i+1}, 0, na_1, \dots, na_i, 1),$$

comme π est un L-S chemin de type $n\lambda$, donc $a_j n a_\gamma$ dans $\mathbb{Z}$ pour tout γ dans $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_j} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau_{j+1}}$ et $j = 1, \dots, i$, par conséquent π_1 est un L-S chemin de type λ. De même, on a $(na_j - 1)a_\gamma$ est dans $\mathbb{Z}$ pour tout γ dans $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_j} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau_{j+1}}$ et $j = i+1, \dots, s-1$. Puisque

$$\frac{na_{i+1} - 1}{n-1} < \cdots < \frac{na_{s-1} - 1}{n-1} < 1,$$

on déduit que le chemin rationnel

$$\pi' = \left(\tau_{i+1}, \ldots, \tau_s, 0, \frac{na_{i+1}-1}{n-1}, \ldots, 1\right)$$

est un L-S chemin de type $(n-1)\lambda$. En appliquant le même procédé à π', de proche en proche, on détermine les π_i. Ainsi, on a une bijection entre les enchaînements standard $\pi_1 * \cdots * \pi_n$ de L-S chemins de type λ et les L-S chemins de type $n\lambda$.

Soit π et π' deux L-S chemins de type λ tels que $\pi * \pi'$ est non standard. Comme $u_\pi + u_{\pi'}$ est un point entier de $\mathcal{P}(\mathcal{U}^{2\lambda})$. De la décomposition simpliciale de $\mathcal{P}(\mathcal{U}^{2\lambda})$, on déduit qu'il existe un unique L-S chemin η de type 2λ tel que $u_\eta = u_\pi + u_{\pi'}$. À l'aide du précédent procédé, on détermine l'unique enchaînement standard $\eta_1 * \eta_2$ de L-S chemins de type λ, tel que $u_\eta = u_{\eta_1} + u_{\eta_2}$. Notons η_1 par $\pi \vee \pi'$ et η_2 par $\pi \wedge \pi'$.

Lemme 1.7. — $\pi \vee \pi' \leq \pi$.

Démonstration. — Soient $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, a_1, \ldots, 1)$, $\pi' = (\tau'_1, \ldots, \tau_t, 0, b_1, \ldots, 1)$ et supposons que $\pi \vee \pi' = (\delta_1, \ldots, 0, c_1, \ldots)$. Remarquons que pour tout κ dans $\mathcal{U}^\lambda$, l'ensemble $\{\delta \leq \kappa\}$ est stable par les opérations $\vee$ et $\wedge$. Donc, en utilisant la relation $u_{\tau_1} + u_{\tau'_1} = u_{\tau_1 \vee \tau'_1} + u_{\tau_1 \wedge \tau'_1}$, on obtient

$$u_\pi + u_{\pi'} = d_1 u_{\tau_1 \vee \tau'_1} + \sum_{\kappa < \tau_1 \vee \tau'_1} d_\kappa u_\kappa, \qquad d_\kappa \geq 0.$$

Par conséquent, $\delta_1 = \tau_1 \vee \tau'_1$ et $c_1 \geq d_1$. Donc, ou bien $\pi \vee \pi' < \pi$ et dans ce cas il n'y a plus rien à prouver, ou bien $\tau_1 = \delta_1$ et $d_1 = a_1 = c_1$ et dans ce cas-là on considère i maximal tel que $\tau_j \geq \tau'_1$ pour $1 \leq j \leq i$. Si $\tau_s \geq \tau'_1$, alors $\pi \vee \pi' = \pi$. Sinon,

$$u_\pi + u_{\pi'} = a_1 u_{\tau_1 \vee \tau'_1} + \cdots + (a_{i+1} - a_i) u_{\tau_{i+1}} + b_1 u_{\tau'_1} + \left(\sum_{\kappa < \tau_i} d_\kappa u_\kappa\right).$$

Il en résulte donc, que

$$\begin{aligned} u_\pi + u_{\pi'} &= a_1 u_{\tau_1} + \cdots + (a_i - a_{i-1}) u_{\tau_i} \\ &+ \min(a_{i+1} - a_i, b_1) u_{\tau_{i+1} \vee \tau'_1} + \sum_{\delta \leq \tau_{i+1} \vee \tau'_1} d_\delta u_\delta. \end{aligned}$$

Par définition de $\pi \vee \pi'$ et de la dernière expression, on déduit que

$$\pi \vee \pi' = (\tau_1, \ldots, \tau_i, \tau_{i+1} \vee \tau'_1, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_i, a_i + \min(a_{i+1} - a_i, b_1), \ldots),$$

où on enlève a_i si $\tau_i = \tau'_1 \vee \tau_{i+1}$. Remarquons que $\tau'_1 \vee \tau_{i+1} > \tau_{i+1}$, donc $\pi \vee \pi' < \pi$. □

Théorème 1.5. — *L'ensemble des monômes standard forme une base du quotient $\mathbb{C}[\mathbb{U}^\lambda]/\mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$ et $\mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$ est engendré par les binômes de degré 2*

$$f_{\pi,\pi'} = x_\pi x_{\pi'} - x_{\pi \vee \pi'} x_{\pi \wedge \pi'}.$$

Démonstration. — Soit $X = x_{\eta_1} \cdots x_{\eta_n}$ un monôme standard de degré n, l'image de X dans $\mathbb{C}[\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)]$ est un monôme X^{u_π}, où π un L-S chemin de type $n\lambda$. Donc pour l'unique enchaînement standard $\pi_1 * \cdots * \pi_n$ vérifiant

$$u_\pi = u_{\pi_1} + \cdots + u_{\pi_n},$$

on a $X = x_{\pi_1} \cdots x_{\pi_n} \mod \mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$. Ainsi l'ensemble des monômes standard engendre $\mathbb{C}[\mathbb{U}^\lambda]/\mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$. Montrons, à présent, l'indépendance linéaire.

Dire que les monômes standard sont linéairement dépendants implique qu'il existe $F = \sum_{X_i \text{ standard}} a_i X_i$ non nul dans $\mathbb{C}[\mathbb{U}^\lambda]$ et tel que son image dans $\mathbb{C}[\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)]$ est nulle. Notons $\bar{X}_i$ l'image de X_i , donc dans $\mathbb{C}[\mathcal{P}(\mathcal{U}^\lambda)]$ on a

$$0 = \sum_\pi \Big(\sum_{\bar{X}_i = X^{u_\pi}} a_i \Big) X^{u_\pi}.$$

Comme les X^{u_π} sont linéairement indépendants, on a $\sum_{\bar{X}_i = X^{u_\pi}} a_i = 0$. Or $X_i \neq X_j$ pour $i \neq j$, d'où $\bar{X}_i \neq \bar{X}_j$, donc la somme des a_i tel que $\bar{X}_i = X^{u_\pi}$ est réduite à un seul terme, ce qui veut dire que $a_i = 0$ pour tout i.

Il reste à montrer que les éléments $f_{\pi,\pi'}$ engendrent $\mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$, pour cela on va montrer que modulo ces éléments tout monôme de $\mathbb{C}[\mathbb{U}^\lambda]$ est équivalent à un monôme standard. Remarquons tout d'abord que, par définition de $\pi \vee \pi'$, tous les $f_{\pi,\pi'}$ sont dans $\mathcal{I}(\mathbb{U}^\lambda)$.

Supposons que $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ n'est pas standard. Par définition des monômes standard, il existe i maximal tel que $\pi_1 * \cdots * \pi_i$ est standard et $\pi_i * \pi_{i+1}$ est non standard. Alors

$$x_{\pi_1} \cdots x_{\pi_r} = x_{\pi_1} \cdots x_{\pi_{i-1}} x_{\pi_i \vee \pi_{i+1}} x_{\pi_i \wedge \pi_{i+1}} x_{\pi_{i+2}} \cdots x_{\pi_r}.$$

Du lemme précédent, il résulte que nous avons remplacé l'enchaînement $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ par un enchaînement plus petit pour l'ordre lexicographique. Comme l'ensemble des enchaînements à r éléments est fini, on conclut que le procédé de remplacement s'arrête et que l'élément minimal obtenu de cette façon est standard. □

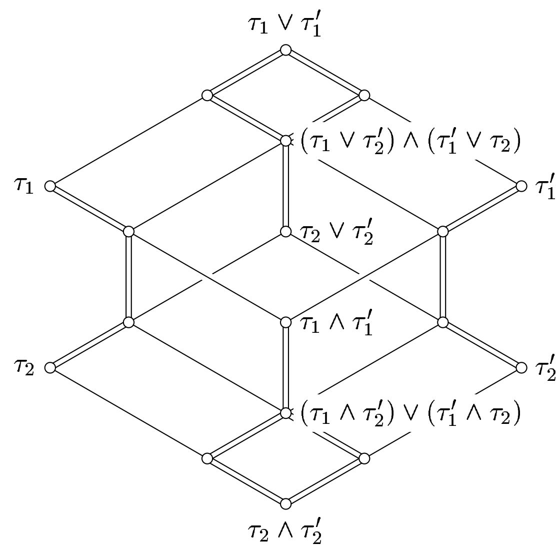
Exemple 1.1 (cas classique). — *Supposons que λ est un poids classique (c'est-à-dire $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \leq 2$, pour tout racine positive α). Dans ce cas, tout L-S chemin de type λ est de la forme $(\tau, \tau', 0, \frac{1}{2}, 1)$ avec $\tau \geq \tau'$, où on enlève le $\frac{1}{2}$ si $\tau = \tau'$ (voir [26]).*

Si $\pi = (\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $\pi' = (\tau_1', \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$, alors

$$\pi \vee \pi' = \big(\tau_1 \vee \tau_1', (\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2'), 0, \frac{1}{2}, 1\big)$$

et

$$\pi \wedge \pi' = \big((\tau_1 \wedge \tau_1') \wedge (\tau_2 \vee \tau_2'), \tau_2 \wedge \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1\big)$$



En effet, pour suivre les notations, le lecteur pourra s'aider de la figure, qui représente le plus petit sous-treillis de $\mathcal{U}^\lambda$ contenant les éléments τ_1, $\tau_1^{'}$, τ_2 et $\tau_2^{'}$. Les traits doubles sont des suites d'arêtes de multiplicité 2. Notons que

$$\mathcal{A}^\lambda_{\tau_1 \vee \tau_1'} = \mathcal{A}^\lambda_{\tau_1 \vee \tau_2'} \cup \mathcal{A}^\lambda_{\tau_1'} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau_2'}.$$

En particulier, pour tout γ dans $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_1 \vee \tau_1'} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau_1 \vee \tau_2'}$, on a $a_\gamma = 2$. De même, pour tout γ dans $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_1 \vee \tau_1'} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{\tau_2 \vee \tau_1'}$, $a_\gamma = 2$. Cela implique que pour tout γ dans $\mathcal{A}^\lambda_{\tau_1 \vee \tau_1'} \setminus \mathcal{A}^\lambda_{(\tau_2 \vee \tau_1') \wedge (\tau_1 \vee \tau_2')}$ on a $a_\gamma = 2$. En utilisant le fait que $\mathcal{U}^\lambda$ est un treillis distributif, on déduit que

$$(\tau_2 \vee \tau_1') \wedge (\tau_1 \vee \tau_2') = (\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2').$$

Et il s'ensuit que le chemin rationnel $\pi \vee \pi'$ est un L-S chemin dans $\mathbb{U}^\lambda$. Le même argument montre que $\pi \wedge \pi'$ est un L-S chemin dans $\mathbb{U}^\lambda$. De plus $\pi * \pi'$ est standard. De plus, en utilisant les relations $u_\delta + u_\kappa = u_{\delta \vee \kappa} + u_{\delta \wedge \kappa}$, on déduit que $u_\pi + u_{\pi'} = u_{\pi \vee \pi'} + u_{\pi \wedge \pi'}$.

1.4 Une famille de variétés

Le paragraphe suivant est motivé par la déformation qu'on décrira plus tard. Par la suite, notre but est de démontrer un théorème d'annulation de cohomologie sur une classe de variétés projectives, obtenues comme réunion de variétés toriques projectives. La méthode utilisée a été inspirée de Seshadri (*voir* [40]).

Considérons la décomposition

$$W^\lambda = \mathcal{U}_1^\lambda \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n^\lambda$$

où n est le nombre des classes d'équivalence des chaînes maximales de W^λ. Comme dans la section 2, à tout sous-ensemble I de $\{1, \ldots, n\}$, on associe le treillis distributif $\mathcal{U}_I^\lambda = \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i^\lambda$. Notons que $\mathcal{U}_I^\lambda$ est un treillis distributif de même nature que $\mathcal{U}^\lambda$, dans le sens où tout couple d'éléments de $\mathcal{U}_I^\lambda$ possède la propriété d'orthogonalité. Ainsi, on peut adapter la construction de la première section pour définir $\mathcal{A}_I^\lambda$ l'ensemble partiellement ordonné donné par le théorème de structure de Birkhoff. De plus, pour tout τ dans $\mathcal{U}_I^\lambda$, soit $\mathcal{A}_{I,\tau}^\lambda$ l'image de τ dans le treillis des idéaux ordonnés de $\mathcal{A}_I^\lambda$. Soit $\mathbb{U}_I^\lambda$ l'ensemble des L-S chemins $\pi = (\tau_1, \dots)$ tels que τ_i dans $\mathcal{U}_I^\lambda$ pour tout i. Remarquons que par définition des L-S chemins, π est de type λ si, et seulement si pour tout i, le chemin $(\tau_i, \tau_{i+1}, 0, a_i, 1)$ est de type λ. La condition nécessaire et suffisante pour que ce dernier chemin soit de type λ est que le nombre rationnel $a_i \operatorname{pgcd}_{\gamma \in \mathcal{A}_{\tau_i}^\lambda \setminus \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}^\lambda}(a_\gamma)$ soit en fait un entier.

À chaque arête (τ, τ') dans $\mathcal{U}_I^\lambda$, on associe sa multiplicité $a_{(\tau,\tau')} = \operatorname{pgcd}_{\gamma \in \mathcal{A}_\tau^\lambda \setminus \mathcal{A}_{\tau'}^\lambda}(a_\gamma)$ et à tout élément γ dans $\mathcal{A}_I^\lambda$, une classe d'équivalence d'arêtes de $\mathcal{U}_I^\lambda$, on définit l'entier b_γ égal à la multiplicité de ses représentants. Soient $\{e_\gamma,\ \gamma \in \mathcal{A}_I^\lambda\}$ une base canonique de $\mathbb{Z}^{\operatorname{Card} \mathcal{A}_I^\lambda}$ et $V_{\mathcal{A}_I^\lambda} = \mathbb{Z}^{\operatorname{Card} \mathcal{A}_I^\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Pour tout τ dans $\mathcal{U}^\lambda$, on considère le point

$$v_\tau = \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_{I,\tau}^\lambda} b_\gamma e_\gamma$$

et P_I l'enveloppe convexe des points v_τ. Soient Y_I et L_I respectivement la variété torique et le fibré en droite associés à P_I, ainsi que $R_I = \mathbb{C}[x_\pi, \pi \in \mathbb{U}_I^\lambda]$ et J_I l'idéal engendré par les éléments

$$f_{\pi,\pi'} = x_\pi x_{\pi'} - x_{\pi \vee \pi'} x_{\pi \wedge \pi'}, \qquad \text{pour } \pi \text{ et } \pi' \text{ dans } \mathbb{U}_I^\lambda.$$

En utilisant les mêmes arguments qu'aux sections précédentes, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.6. — *1) Le plongement projectif associé à L_I est fermé;*

2) le groupe de Picard de Y_I est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, où n est le nombre des composantes connexes du graphe de Hasse associé à $\mathcal{A}_I^\lambda$;

3) l'ensemble des monômes standard forme une base de $\Gamma(X_I, L_I)$ et le noyau de l'homomorphisme surjectif de R_I dans $\Gamma(X_I, L_I)$ est égal à J_I.

À tout sous-ensemble de parties $\tilde{I}$ de $\{1, \dots, n\}$, on associe l'ensemble

$$\mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda = \bigcup_{I \in \tilde{I}} \mathbb{U}_I^\lambda.$$

Soients $R_{\tilde{I}} = \mathbb{C}[x_\pi, \pi \in \mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda]$ et $J_{\tilde{I}}$ l'idéal engendré par les éléments

$$\begin{cases} x_\pi x_{\pi'} - x_{\pi \vee \pi'} x_{\pi \wedge \pi'} & \text{s'il existe } I \in \tilde{I} \text{ tel que } \pi,\ \pi' \in \mathbb{U}_I^\lambda \\ x_\pi x_{\pi'} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $S_{\tilde{I}} = R_{\tilde{I}} / J_{\tilde{I}}$ et $Y_{\tilde{I}} = \operatorname{Proj} S_{\tilde{I}}$. Pour tout monôme x_π, $\pi \in \mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda$, on note p_π son image dans $S_{\tilde{I}}$. Un monôme $p_{\pi_1} \cdots p_{\pi_r}$ dans $S_{\tilde{I}}$ est dit *standard* si l'enchaînement $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ est standard dans $\mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda$.

Lemme 1.8. — *L'ensemble des monômes standard dans $\mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda$ forme une base de $S_{\tilde{I}}$.*

Démonstration. — Soit $p_{\pi_1}\cdots p_{\pi_r}$ un monôme dans $S_{\tilde{I}}$. Nous allons montrer qu'il est équivalent à un monôme standard dans $S_{\tilde{I}}$.

En effet, supposons que $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ n'est pas standard. Soit i l'entier maximal tel que $\pi_j * \pi_{j+1}$ est standard pour $j < i$ et $\pi_i * \pi_{i+1}$ est non standard. Si aucun des ensembles $\mathbb{U}_I^\lambda$, I dans $\tilde{I}$ ne contient simultanément π_i et π_{i+1}, alors $p_{\pi_1}\cdots p_{\pi_r} = 0$. Sinon

$$p_{\pi_1}\cdots p_{\pi_r} = p_{\pi_1}\cdots p_{\pi_{i-1}} p_{\pi_i\vee\pi_{i+1}} p_{\pi_i\wedge\pi_{i+1}} p_{\pi_{i+2}}\cdots p_{\pi_r}.$$

Donc, nous avons remplacé l'enchaînement $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ par un enchaînement plus petit pour l'ordre lexicographique. Comme l'ensemble des enchaînements à r éléments est fini, on conclut que le procédé de remplacement s'arrête et que l'élément minimal obtenu de cette façon est standard.

Il reste à montrer l'indépendance linéaire. Considérons une expression de $S_{\tilde{I}}$

$$f = \sum_{\substack{\pi_1 * \cdots * \pi_r \\ \text{standard dans } \mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda, r\geq 0}} a_{\pi_1 * \cdots * \pi_r} p_{\pi_1}\cdots p_{\pi_r}.$$

Soit I une partie de $\tilde{I}$ et $S_{\tilde{I}} \to S_I$ donné par $p_\pi \mapsto p_\pi$ si π dans $\mathbb{U}_I^\lambda$, et 0 sinon.

Par construction de $\mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda$ et d'après la définition des monômes standard de $S_{\tilde{I}}$, l'image de f dans S_I est égale à

$$\bar{f} = \sum_{\substack{\pi_1 * \cdots * \pi_r \\ \text{standard dans } \mathbb{U}_I^\lambda, r\geq 0}} a_{\pi_1 * \cdots * \pi_r} p_{\pi_1}\cdots p_{\pi_r}.$$

Mais les monômes standard dans S_I forment une base, donc $f = 0$ si et seulement si, $a_{\pi_1 * \cdots * \pi_r} = 0$ pour tout $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ standard dans $\mathbb{U}_I^\lambda$. Ceci étant vrai pour toute partie I de $\tilde{I}$, il s'ensuit que $a_{\pi_1 * \cdots * \pi_r} = 0$, pour tout $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ standard dans $S_{\tilde{I}}$. □

Pour considérer toutes ces variétés dans un même espace projectif. Soit $R = \mathbb{C}[x_\pi, \pi \in \mathbb{B}(\lambda)]$, pour tout $\tilde{I}$ un ensemble de parties de $\{1, \ldots, n\}$, on note aussi $\tilde{J}_I$ l'image réciproque de l'idéal $\tilde{J}_I$ dans R par l'application restriction de R sur $R_{\tilde{I}}$, qui à x_π associe x_π si π dans $\mathbb{U}_I^\lambda$ et 0 sinon.

Lemme 1.9. — *Soit $\tilde{I} = \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$ une décomposition en réunion disjointe. Alors :*

(i) *Le noyau de l'application $\theta_i \ : S_{\tilde{I}} \to S_{\tilde{I}_i}$, ($p_\pi \mapsto p_\pi$ si π dans $\mathbb{U}_{\tilde{I}_i}^\lambda$ et 0 sinon) est engendré par*

$$\{p_\pi \mid \pi \in \mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda \setminus \mathbb{U}_{\tilde{I}_i}^\lambda\}$$

(ii) $\ker\theta_1 \cap \ker\theta_2 = 0$.

Démonstration. — La première assertion découle du fait que les monômes standard dans $\mathbb{U}_{\tilde{I}_i}$ forment une base de $S_{\tilde{I}_i}$. Pour (ii), remarquons que $\ker\theta_1$ et $\ker\theta_2$ sont des idéaux monômiaux, donc leur intersection est un idéal monômial. Comme pour tout monôme standard $p_{\pi_1}\cdots p_{\pi_r}$ dans $S_{\tilde{I}}$, il existe $I \in \tilde{I}$ tel que $\pi_1 * \cdots * \pi_r$ est standard dans $\mathbb{U}_I^\lambda$, l'image d'un monôme standard non nul de $S_{\tilde{I}}$ est nulle dans $S_{\tilde{I}_1}$ seulement si son image dans $S_{\tilde{I}_2}$ est non nulle. □

Lemme 1.10. — *Pour tout* $\tilde{I} = \{I_1, \dots, I_r\}$, *on a* $J_{\tilde{I}} = \bigcap_{p=1}^{r} J_{I_p}$.

Démonstration. — Rappelons que $J_{\tilde{I}}$ est engendré par les éléments

$$\begin{cases} x_\pi x_{\pi'} - x_{\pi\vee\pi'} x_{\pi\wedge\pi'} & \text{s'il existe } I \in \tilde{I} \text{ tel que } \pi, \pi' \in \mathbb{U}_I^\lambda \,; \\ x_\pi x_{\pi'} & \text{si pour tout } I \in \tilde{I} \text{ on a } \pi \in \mathbb{U}_I^\lambda \text{ ou } \pi' \notin \mathbb{U}_I^\lambda \,; \\ x_\pi & \text{si } \pi \notin \mathbb{U}_{\tilde{I}}^\lambda. \end{cases}$$

Il est clair que les deux derniers types d'éléments appartiennent à J_{I_p}, pour tout $p = 1, \dots, r$.

Soit $f_{\pi,\pi'} = x_\pi x_{\pi'} - x_{\pi\vee\pi'} x_{\pi\wedge\pi'}$ un élément de $J_{\tilde{I}}$. Comme $\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'$ est standard, il existe I dans $\tilde{I}$ tel que $\pi \vee \pi'$ et $\pi \wedge \pi'$ sont dans $\mathbb{U}_I^\lambda$. Par construction, les chemins $\pi \vee \pi'$ et $\pi \wedge \pi'$ sont obtenus à partir de π et π' en appliquant un suite d'opérations $\vee$, $\wedge$ aux supports de π et π'. Du fait que

$$\tau \vee \tau' \text{ et } \tau \wedge \tau' \text{ dans } \mathcal{U}^\lambda \iff \tau \text{ et } \tau' \text{ sont dans } \mathcal{U}^\lambda,$$

(*voir* corollaire 1.2). De là, on déduit que

$$\pi \vee \pi' \text{ et } \pi \wedge \pi' \text{ dans } \mathbb{U}_{I_p}^\lambda \iff \pi \text{ et } \pi' \text{ sont dans } \mathbb{U}_{I_p}^\lambda.$$

Ainsi, si $\pi \vee \pi'$ et $\pi \wedge \pi'$ sont dans $\mathbb{U}_{I_p}^\lambda$, alors $f_{\pi,\pi'}$ est un générateur de J_{I_p}, et si $\pi \vee \pi'$ ou $\pi \wedge \pi'$ n'est pas dans $\mathbb{U}_{I_p}^\lambda$, alors π ou π' n'est pas dans $\mathbb{U}_{I_p}^\lambda$, et donc $f_{\pi,\pi'}$ est dans J_{I_p}.

Pour l'inclusion inverse, considérons les applications surjectives

$$R \xrightarrow{\varphi} S_{\tilde{I}} \xrightarrow{\psi} S_{I_p}.$$

Soient $f \in R$ et $\varphi(f) = \sum a_i m_i$ non nul. Par définition de $S_{\tilde{I}}$, pour tout m_i tel que $a_i \neq 0$, il existe I_{p_i} tel que $\psi\phi(f) \neq 0$ dans $S_{I_{p_i}}$, ce qui donne l'inclusion inverse. □

Lemme 1.11. — *Pour tout* I *une partie de* $\{1, \dots, n\}$, *on a*

$$J_I = \sum_{i \in I} J_i.$$

Démonstration. — L'inclusion de J_I dans $\sum_{i\in I} J_i$ est triviale. Pour l'inclusion inverse, on fixe u dans I, et on montre que $J_i \subset J_I$.

En effet, si $\pi \notin \mathbb{U}_i^\lambda$, alors par définition de $\mathbb{U}_I^\lambda$ le chemin π n'appartient pas à $\mathbb{U}_I^\lambda$, donc $x_\pi \in J_I$. Et comme dans la preuve du lemme précédent, l'élément $f_{\pi,\pi'}$ est dans J_I. □

Lemme 1.12. — *Soient* $\tilde{I}_1 = \{I_{p_1}, \dots, I_{p_r}\}$ *et* $\tilde{I}_2 = \{I_{k_1}, \dots, I_{k_s}\}$. *Alors on a:*

$$J_{\tilde{I}_1} + J_{\tilde{I}_2} = \bigcap_{i,j} J_{I_i \cup I_j},$$

où $i \in \{p_1, \cdots, p_r\}$ *et* $j \in \{k_1, \cdots, k_s\}$.

Démonstration. — Rappelons que d'après le lemme précédent on a :

$$J_{I_i \cup I_j} = J_{I_i} + J_{I_j}.$$

Comme

$$J_{\tilde{I}_1} \subset J_{I_i} \qquad \text{et} \qquad J_{\tilde{I}_2} \subset J_{I_j},$$

pour tout $i \in \{p_1, \cdots, p_r\}$ et $j \in \{k_1, \cdots, k_s\}$. Il en résulte que

$$J_{\tilde{I}_1} + J_{\tilde{I}_2} \subseteq \bigcap_{i,j} J_{I_i \cup I_j}.$$

L'inclusion inverse vient du fait que l'algèbre $R/(J_{\tilde{I}_1} + J_{\tilde{I}_2})$ est engendrée par les monômes standard dans $\mathbb{U}^\lambda_{\tilde{I}_1} \cap \mathbb{U}^\lambda_{\tilde{I}_2}$. En effet, considérons les projections

$$R \xrightarrow{\varphi} R/(J_{\tilde{I}_1} + J_{\tilde{I}_2}) \xrightarrow{\psi} S_{I_i \cup I_j}.$$

Soient f un élément de R^λ et $\varphi(f) = \sum a_{\pi_1 * \cdots * \pi_r} p_{\pi_1} \cdots p_{\pi_r}$ non nul. Alors il existe i et j et $\pi_1 * \cdots * \pi_r \in \mathbb{U}^\lambda_{I_i} \cap \mathbb{U}^\lambda_{I_j}$ tels que $\psi\varphi(f)$ est non nul, ce qui donne l'inclusion inverse. □

Soient R un anneau commutatif et J_1 et J_2 deux idéaux de R. L'homomorphisme

$$R \longrightarrow R/J_1 \oplus R/J_2$$

donné par $a \mapsto (a \mod J_1, a \mod J_2)$ induit une suite exacte

$$0 \to R/(J_1 \cap J_2) \to R/J_1 \oplus R/J_2 \xrightarrow{j} R/(J_1 + J_2) \to 0 \tag{1.8}$$

où $j(a_1, a_2) = a_1 - a_2 \mod (J_1 + J_2)$ et (a_1, a_2) dans $R \oplus R$ un représentant d'un élément de $R/J_1 \oplus R/J_2$.

Si $J_1 \cap J_2 = 0$, alors de (1.8), on déduit la suite exacte

$$0 \to R \to R/J_1 \oplus R/J_2 \xrightarrow{j} R/(J_1 + J_2) \to 0. \tag{1.9}$$

Soit $Z = \mathrm{Spec}(R)$ et Z_i le sous-schéma fermé de Z , $Z_i = \mathrm{Spec}(R/J_i)$, i=1,2. Ainsi $Z = Z_1 \cup Z_2$ et $\mathrm{Spec}\big(R/(J_1 + J_2)\big) = Z_1 \cap Z_2$. Et ceci induit la suite exacte

$$0 \to O_Z \to O_{Z_1} \oplus O_{Z_2} \to O_{Z_1 \cap Z_2} \to 0. \tag{1.10}$$

Soit $\tilde{I} = \{I_1, \ldots, I_r\}$ un ensemble de parties de $\{1, \ldots, n\}$ et $\tilde{I}_1$ l'ensemble des parties $I_1 \cup I_j$ pour $j = 2, \ldots, r$.

Par abus de notations, pour tout sous-ensemble $\tilde{K}$ de $\tilde{I}$, on note aussi $J_{\tilde{K}}$ l'image de $J_{\tilde{K}}$ dans $S_{\tilde{I}}$ par la projection de R sur $S_{\tilde{I}}$. Soient $\tilde{I} = \{I_1, \ldots, I_r\}$ un ensemble de parties de $\{1, \ldots, n\}$, $\tilde{I}_1$ l'ensemble des parties $I_1 \cup I_j$ pour $j = 2, \ldots, r$ et $\tilde{I}_2 = \{I_1, \ldots, I_r\}$.

Du lemme 1.12, on déduit que $J_{\tilde{I}_1} = J_{I_1} + J_{\tilde{I}_2}$. D'après le lemme 1.9 et la remarque précédente, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow S_{\tilde{I}} \longrightarrow S_{I_1} \oplus S_{\tilde{I}_2} \longrightarrow S_{\tilde{I}_1} \longrightarrow 0.$$

Grâce au lemme 1.11, on a $J^{\lambda}_{I_1\cup I_j} = J^{\lambda}_{I_1} + J^{\lambda}_{I_j}$, de là il résulte que $Y_{\tilde{I}_1} = Y_{I_1} \cap Y_{\tilde{I}_2}$, ce qui nous donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{Y_{\tilde{I}}} \longrightarrow O_{Y_{I_1}} \oplus O_{Y_{\tilde{I}_2}} \longrightarrow O_{Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}} \longrightarrow 0.$$

En tensorisant avec le faisceau $O(m)$, on obtient

$$0 \longrightarrow O_{Y_{\tilde{I}}}(m) \longrightarrow O_{Y_{I_1}}(m) \oplus O_{Y_{\tilde{I}_2}}(m) \longrightarrow O_{Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}}(m) \longrightarrow 0,$$

ce qui induit la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0\big(Y_{\tilde{I}}, O_{Y_{\tilde{I}}}(m)\big) &\longrightarrow H^0\big(Y_{I_1}, O_{Y_{I_1}}(m)\big) \oplus H^0\big(Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big) \\ &\longrightarrow H^0\big(Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big) \longrightarrow H^1\big(Y_{\tilde{I}}, O_{Y_{\tilde{I}}}(m)\big) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Théorème 1.7. — (i) *Pour tout* $m \geq 0$, $H^0\big(Y_{\tilde{I}}, O_{Y_{\tilde{I}}}(m)\big)$ *est engendré par les monômes standard dans* $\mathbb{U}^{\lambda}_{\tilde{I}}$ *;*

(ii) $H^i\big(Y_{\tilde{I}}, O_{Y_{\tilde{I}}}(m)\big) = 0$ *pour* $m \geq 0$ *et* $i > 0$.

Démonstration. — Supposons que $\tilde{I} = \{I_1, \dots, I_r\}$. Procèdons par récurrence sur r.

Si $r = 1$, alors remarquons que $L_{I_1} = \varphi^*(O_{\mathbb{P}})$, où φ est le plongement projectif de $Y_{\tilde{I}_1}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P} = \operatorname{Proj} S_{\tilde{I}_1}$. Comme le fibré $L_{\tilde{I}_1}$ est associé à une fonction linéaire par morceaux, d'après [14, 12] (*ii*) est vérifié, du théorème 1.6, on déduit que (i) est vérifié.

Plus généralement, étant donné que le nombre des composantes irréductibles de $Y_{\tilde{I}_1}$, $Y_{\tilde{I}_2}$ et Y_{I_1} est inférieur à r, par hypothèse de récurrence, on sait que $H^0\big(Y_{I_1} \cap Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big)$, $H^0\big(Y_{I_1}, O_{Y_{I_1}}(m)\big)$ et $H^0\big(Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big)$ sont engendrés par les monômes standard. En particulier, les applications restriction de $H^0\big(\mathbb{P}, O_{\mathbb{P}}(m)\big)$ dans ces derniers espaces sont surjectives. Donc, l'application restriction

$$H^0\big(Y_{I_1}, O_{Y_{I_1}}(m)\big) \oplus H^0\big(Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big) \longrightarrow H^0\big(Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big).$$

est surjective. En utilisant la suite exacte de cohomologie, on obtient l'assertion (ii). De plus, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0\big(Y_{\tilde{I}}, O_{Y_{\tilde{I}}}(m)\big) \longrightarrow H^0\big(Y_{I_1}, O_{Y_{I_1}}(m)\big) &\oplus H^0\big(Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big) \\ &\longrightarrow H^0\big(Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} \dim H^0\big(Y_{\tilde{I}}, O_{Y_{\tilde{I}}}(m)\big) = \dim H^0\big(Y_{I_1}, O_{Y_{I_1}}(m)\big) &+ \dim H^0\big(Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big) \\ &- \dim H^0\big(Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}, O_{Y_{I_1}\cap Y_{\tilde{I}_2}}(m)\big). \end{aligned}$$

Remarquons que le second membre est égal au cardinal des monômes standard de degré m dans $S_{\tilde{I}}$. Étant donné que les monômes standard sont linéairement indépendants (*voir* lemme 1.8), on obtient (i). □

Chapitre 2

Configuration des variétés de Schubert dans G/P

2.1 Préliminaires

Soient G un groupe algébrique semi-simple, B un sous-groupe de Borel, λ un poids dominant, V_λ la représentation irréductible de plus haut poids λ, et v_λ un vecteur de plus haut poids. Soit P_λ le stabilisateur de la droite engendrée par v_λ. Considérons la décomposition de Bruhat $G/P_\lambda = \bigcup_{w \in W^\lambda} Bwe_\lambda$, où e_λ est l'image de P_λ dans G/P_λ, et $X(w) = \bigcup_{\tau \leq w} B\tau e_\lambda$ la variété de Schubert associée à w.

Définition 2.1. — *Soient w et w' deux éléments de W^λ et α est une racine positive tels que : $w' = s_\alpha w$, $\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle < 0$ et $\ell(w) = \ell(s_\alpha w) + 1$. On dit dans ce cas que $X(w')$ est un* diviseur de Schubert *de $X(w)$* associé à α. *On appelle l'entier $|\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle|$ la* multiplicité *de $X(s_\alpha w)$ dans $X(w)$. En particulier, si α est une racine simple, on dit que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur* double *(resp.* simple*) si $|\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle| = 2$ (resp. 1).*

Rappelons les résultats suivants (*voir* [26]) :

Lemme 2.1. — *Soient w et w' deux éléments de W^λ tels que $X(w') \subset X(w)$, et α une racine simple telle que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Alors l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :*

(i) $X(w') \subset X(s_\alpha w)$;

(ii) $X(s_\alpha w') \subset X(s_\alpha w)$.

Lemme 2.2. — *Soient γ une racine simple, α une racine positive et w un élément de W^λ tels que : $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\gamma w)$ sont des diviseurs de $X(w)$. Alors pour $\beta = s_\gamma(\alpha)$, on a $X(s_\gamma s_\alpha w) = X(s_\beta s_\gamma w)$.*

Lemme 2.3 (cas classique). — *Soient α une racine positive et w dans W^λ tels que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur double de $X(w)$. Alors α est simple.*

2.1.1 Diviseurs d'une variété de Schubert

Dans toute cette sous-section, le poids λ sera supposé *classique*, c'est-à-dire que $\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle \leq 2$ pour toute racine positive α, et on dira diviseur à la place de diviseur de Schubert.

Comme dans le chapitre 1, pour tout $\nu = \sum_{\gamma\in\Delta} n_\gamma\gamma$ un élément du réseau des racines Y, on associe l'ensemble des racines simples

$$\operatorname{supp}\nu = \{\gamma \in \Delta \mid n_\gamma \neq 0\}.$$

En particulier, pour τ, w deux éléments de W^λ et $\nu = \tau(\lambda) - w(\lambda)$, on note $\operatorname{supp}(w, \tau)$ l'ensemble $\operatorname{supp}\nu$.

Le but de cette sous-section est d'étudier les liens entre les racines positives qui peuvent apparaître comme des racines associées à des diviseurs d'une variété de Schubert donnée dans G/P_λ. Plus précisément, soit α une racine positive et w un élément de W^λ tels que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Les questions que nous nous proposons d'étudier dans ce qui suit, sont les suivantes :

1. que peut-on dire sur $\operatorname{supp}\alpha$?
2. Si β est une racine positive telle que $X(s_\beta w)$ est un diviseur de $X(w)$, quelle est l'intersection des supports de α et β?

Notons que, dans le cas minuscule tout diviseur d'une variété de Schubert est associé à une racine simple et pour tout couple de racines simples (γ, γ') tel que $X(s_\gamma w)$ et $X(s_{\gamma'} w)$ sont des diviseurs de $X(w)$, les deux racines γ et γ' sont orthogonales. Par contre, dans le cas quasi-minuscule, les diviseurs sont donnés par les racines positives qui s'écrivent au plus comme somme de deux racines simples, de même norme (*voir* [25]).

Par la suite, sauf mention du contraire, les lettres $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha_i, \beta_i$ désigneront des racines positives, et les lettres $\gamma, \gamma', \gamma_i$, seront réservées aux racines simples.

Lemme 2.4. — *Soient λ un poids classique, α une racine positive et w un élément de W^λ tel que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Alors* $\operatorname{supp}\alpha$ *est constitué de racines simples de même norme.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\ell(w)$.

Si $\ell(w) = 1$, alors α est une racine simple, donc il n'y a rien à prouver.

Supposons que $\ell(w) > 1$, on considère γ une racine simple telle que $s_\gamma w < w$ et on suppose que α n'est pas simple. Considérons la racine positive $\beta = s_\gamma(\alpha)$ donnée par lemme 2.2, du lemme 2.3, on a

$$\langle w(\lambda), \alpha^\vee\rangle = \langle s_\gamma w(\lambda), \beta^\vee\rangle = -1.$$

Soit n_γ et m_γ des entiers positifs tels que

$$\langle w(\lambda), \gamma^\vee\rangle = -n_\gamma \qquad \text{et} \qquad \langle s_\alpha w(\lambda), \gamma^\vee\rangle = -m_\gamma,$$

par des considérations de poids, il s'ensuit que

$$\alpha = (n_\gamma - m_\gamma)\gamma + \beta.$$

Si $n_\gamma \leq m_\gamma$, on en déduit que $\operatorname{supp}\alpha$ est un sous-ensemble du $\operatorname{supp}\beta$, puis on conclut par récurrence sur $\ell(s_\gamma w)$.

Dans le cas contraire, si $n_\gamma > m_\gamma$, et β et γ ne possèdent pas la même norme, d'après les planches de [4], on a

$$\langle \beta, \gamma^\vee \rangle = -2 \,\text{ou}\, -3 \qquad \text{ou} \qquad \langle \gamma, \beta^\vee \rangle = -2 \,\text{ou}\, -3.$$

Du lemme 2.1, on tire que $\langle s_\alpha w(\lambda), \gamma^\vee \rangle < 0$. De l'expression $\alpha = s_\gamma(\beta)$, on a $s_\alpha = s_\gamma s_\beta s_\gamma$ et de l'invariance du produit scalaire par l'action de W, on déduit que

$$\langle s_\alpha w(\lambda), \gamma^\vee \rangle = -\langle s_\beta s_\gamma w(\lambda), \gamma^\vee \rangle$$

et

$$\langle s_\beta s_\gamma w(\lambda), \beta^\vee \rangle = \langle s_\alpha w(\lambda), \alpha^\vee \rangle,$$

ce qui implique que

$$\langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle = \langle s_\beta s_\gamma w(\lambda), \beta^\vee \rangle - \langle \gamma, \beta^\vee \rangle = 3 \,\text{ou}\, 4$$

ou

$$\langle s_\gamma w(\lambda), \gamma^\vee \rangle = \langle s_\beta s_\gamma w(\lambda), \gamma^\vee \rangle - \langle \beta, \gamma^\vee \rangle = 3 \,\text{ou}\, 4,$$

d'où une contradiction. □

Lemme 2.5. — *Soient λ un poids classique, α une racine positive et w un élément de W^λ tels que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Alors* $\operatorname{supp}\alpha$ *est un segment, c'est-à-dire* $\operatorname{supp}\alpha = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$, *avec* $\langle \gamma_i, \gamma_{i+1}^\vee \rangle \neq 0$.

Démonstration. — Par récurrence sur $\ell(w)$. Cette propriété est satisfaite pour $\ell(w)$ $=1$, puisque $w = s_\gamma$, où γ est une une racine simple.

Supposons que α n'est pas une racine simple, soient γ une racine simple telle que $s_\gamma w < w$ et $\beta = s_\gamma(\alpha)$ l'unique racine positive telle que $s_\beta s_\gamma w = s_\gamma s_\alpha w$.

Par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_\gamma w)$, il vient que $\operatorname{supp}\beta$ est un segment. Ceci induit que, soit $\operatorname{supp}\alpha$ est un segment, soit on peut se restreindre au cas D_n ou E_n. De la classification de [4], on déduit que α s'écrit comme la somme $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \alpha_0$, où les γ_i sont des racines simples et α_0 est une racine positive vérifiant :

a) $\langle \alpha, \gamma_i^\vee \rangle = 1$, pour $1 \leq i \leq 3$;

b) $\gamma_i + \alpha_0$ et $\gamma_i + \gamma_j + \alpha_0$ sont des racines positives, pour $1 \leq i \neq j \leq 3$.

Étant donné que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$, il s'ensuit que

$$\langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle \neq 0 \qquad \text{pour } i = 1,\ 2 \text{ ou } 3.$$

En effet, si $\langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle = 0$, alors on considère $\alpha' = \alpha - \gamma_i$ et on a $s_\alpha w < s_{\alpha'} w < w$, ce qui induit que $X(s_\alpha w)$ est de codimension 2 dans $X(w)$.

Par conséquent, il existe $\{i, j\}$ un sous-ensemble de $\{1, 2, 3\}$ tel que

$$\langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle < 0 \qquad \text{et} \qquad \langle w(\lambda), \gamma_j^\vee \rangle < 0$$

ou

$$\langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle > 0 \qquad \text{et} \qquad \langle w(\lambda), \gamma_j^\vee \rangle > 0.$$

Supposons que $\langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle < 0$ et $\langle w(\lambda), \gamma_j^\vee \rangle < 0$. Comme $s_{\gamma_i} w$ est incomparable avec $s_\alpha w$, il en résulte que $X(s_{\gamma_i} s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(s_\alpha w)$, en particulier

$$0 > \langle s_\alpha w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle - \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \gamma_i^\vee \rangle > \langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle \geq -2,$$

ainsi

$$\langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle = -2 \qquad \text{et} \qquad \langle w(\lambda), \gamma_j^\vee \rangle = -2$$

ce qui induit que $\langle w(\lambda), \alpha_0^\vee + \gamma_k^\vee \rangle = 3$, où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

De même, si

$$\langle w(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle > 0 \qquad \text{et} \qquad \langle w(\lambda), \gamma_j^\vee \rangle > 0,$$

alors $\langle w(\lambda), \alpha_0 + \gamma_k^\vee \rangle \leq -3$. Donc dans les deux cas, on obtient une contradiction avec l'hypothèse λ classique. □

Définition 2.2. — *Soit α une racine positive, on appelle* frontière *de α l'ensemble des racines simples*

$$F(\alpha) = \{\gamma \in \Delta \mid \langle \alpha, \gamma \rangle > 0\},$$

et intérieur *de α l'ensemble des racines simples*

$$Int(\alpha) = \{\gamma \in \operatorname{supp} \alpha \mid \langle \alpha, \gamma \rangle = 0\}.$$

On dit que γ est une frontière *de α si γ appartient à $F(\alpha)$; et γ est* dans l'intérieure *de α si γ appartient à $Int(\alpha)$*

Le lemme suivant peut être vu comme un corollaire du lemme 2.5.

Lemme 2.6. — *Soient λ un poids classique, α une racine positive non simple et w un élément de W^λ tels que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Alors il existe γ dans $F(\alpha)$ telle que $X(s_\gamma w)$ est un diviseur double de $X(w)$.*

Démonstration. — Du lemme 2.5, il vient que $F(\alpha)$ est constitué de deux racines simples γ et γ'. Si

$$\langle w(\lambda), \gamma^\vee \rangle > 0 \qquad \text{et} \qquad \langle w(\lambda), \gamma'^\vee \rangle > 0,$$

alors pour $\alpha' = \alpha - \gamma - \gamma'$, on a $\langle w(\lambda), \alpha'^\vee \rangle \leq -3$; or λ est classique ce qui nous donne une contradiction. Supposons que $\langle w(\lambda), \gamma^\vee \rangle < 0$ et considérons l'égalité

$$\langle w(\lambda), \gamma^\vee \rangle = \langle s_\alpha w(\lambda), \gamma^\vee \rangle + \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \gamma^\vee \rangle.$$

Comme $X(s_\alpha w) \not\subset X(s_\gamma w)$, le lemme 2.1 induit que $\langle s_\gamma w(\lambda), \gamma^\vee \rangle < 0$ et comme $\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle > 0$, il en résulte que $\langle w(\lambda), \gamma^\vee \rangle = -2$. □

Proposition 2.1. — *Soient λ un poids classique, α une racine positive non simple et w un élément de W^λ tels que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Alors pour $\alpha = \gamma_1 + \cdots + \gamma_t$, avec $\langle \gamma_i, \gamma_{i+1} \rangle \neq 0$ et $\langle w(\lambda), \gamma_1^\vee \rangle = -2$, on a :*

(i) *la suite*

$$X(w) \supsetneq X(s_{\gamma_1} w) \supsetneq \cdots \supsetneq X(s_{\gamma_{t-1}} \cdots s_{\gamma_1} w),$$

est une suite de diviseurs doubles ;

(ii) *la suite*

$$X(s_\alpha w) \supsetneq X(s_{\gamma_1} s_\alpha w) \supsetneq \cdots \supsetneq X(s_{\gamma_{t-1}} \cdots s_{\gamma_1} s_\alpha w),$$

est une suite de diviseurs simples.

En particulier $s_{\gamma_{t-1}} \cdots s_{\gamma_1} s_\alpha w = s_{\gamma_t} \cdots s_{\gamma_1} w$, et $X(s_{\gamma_t} \cdots s_{\gamma_1} w)$ est un diviseur simple de $X(s_{\gamma_{t-1}} \cdots s_{\gamma_1} w)$ (voir *fig.1).*

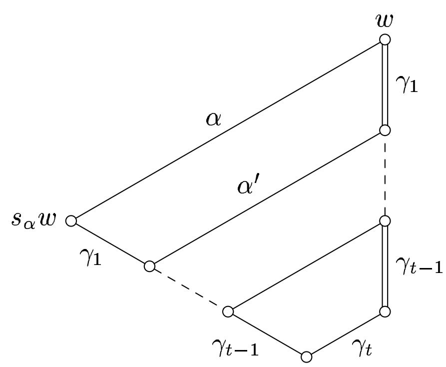


Figure 1

Démonstration. — Grâce au lemme 2.6, on peut supposer que $\langle w(\lambda), \gamma_1^\vee \rangle = -2$. Du lemme 2.2, on a $X(s_{\gamma_1} s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(s_{\gamma_1} w)$ (resp. $X(s_\alpha w)$) associé à $\alpha' = s_\gamma(\alpha)$ (resp. γ).

Observons que γ_2 appartient à la frontière de α', puisque $X(s_{\alpha'} s_{\gamma_1} w)$ est un diviseur de $X(s_{\gamma_1} w)$; on en déduit que $\langle s_{\gamma_1} w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle \neq 0$. Le lemme 2.4 nous dit que tous les γ_i sont de même norme, donc $(\gamma_1 + \gamma_2)^\vee = \gamma_1^\vee + \gamma_2^\vee$. Par conséquent

$$\langle s_{\gamma_1} w(\lambda), (\gamma_1 + \gamma_2)^\vee \rangle = 2 + \langle s_{\gamma_1} w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle.$$

Comme λ est classique, il en résulte que $\langle s_{\gamma_1} w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle < 0$.

Du fait que $X(s_{\alpha'} s_{\gamma_1} w) \not\subset X(s_{\gamma_2} s_{\gamma_1} w)$, le lemme 2.1 induit que $X(s_{\gamma_2} s_{\alpha'} s_{\gamma_1} w)$ est un diviseur de $X(s_{\alpha'} s_{\gamma_1} w)$, donc $\langle s_{\alpha'} s_{\gamma_1} w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle < 0$ et puisque $\langle s_{\gamma_1} w(\lambda), \alpha'^\vee \rangle = -1$, on a

$$\langle s_{\alpha'} s_{\gamma_1} w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle - 1 < 0. \tag{2.1}$$

De plus, $\langle w(\lambda), (\gamma_1 + \gamma_2)^\vee \rangle = -2 + \langle w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle$, or λ est classique, donc $\langle w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle \geq 0$. En comparant ceci avec l'inégalité 2.1, on déduit que $\langle w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle = 0$ et il en résulte que $\langle s_{\gamma_1} w(\lambda), \gamma_2^\vee \rangle = -2$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à la racine positive α' et à l'élément $s_{\gamma_1} w$, on obtient le résultat désiré. $\square$

Remarque 2.1. — *Soient w_0 le plus grand élément de W, λ un poids dominant et $\lambda' = -w_0(\lambda)$. Fixons un système de représentants minimaux de W^λ dans W et considérons l'application de W dans lui-même donnée par $(\tau \mapsto \tau w_0)$. Comme $\langle \tau w_0(\lambda'), \alpha^\vee \rangle = -\langle \tau(\lambda), \alpha^\vee \rangle$ pour toute racine α, on déduit que w_0 réalise une bijection donnée par la composition*

$$W^\lambda \hookrightarrow W \to W^{\lambda'},$$

où l'injection est donnée par le choix d'un système de représentants minimaux de W^λ dans W. Cette bijection inverse l'ordre. En particulier, si $X(s_\alpha \tau)$ est un diviseur de $X(\tau)$ dans G/P_λ, alors $X(\tau w_0)$ est un diviseur de $X(s_\alpha \tau w_0)$ dans $G/P_{\lambda'}$. Ainsi, on peut voir qu'il existe une suite de diviseurs doubles croissante partant de $X(s_\alpha w)$ et associée à la suite de racines simples $\gamma_t, \ldots, \gamma_1$. De même qu'une suite de diviseurs simples croissante partant de $X(w)$ et associée à la suite $\gamma_t, \ldots, \gamma_2$.

Lemme 2.7. — *Soient w un élément de W^λ et α une racine positive tels que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Si γ est une racine simple appartenant à l'intérieur de* $\operatorname{supp} \alpha$*, alors $X(s_\gamma w) = X(w)$.*

Démonstration. — Observons que, par définition de l'intérieur, $\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle = 0$; supposons que $s_\gamma w < w$ et que $\alpha = \gamma_1 + \cdots + \gamma_t$ avec $\langle w(\lambda), \gamma_1^\vee \rangle = -2$ et $\gamma = \gamma_j$.

En tenant compte de la proposition 2.1, on peut voir que $X(s_{\gamma_{j-2}} \ldots s_{\gamma_1} w)$ contient un diviseur double associé à γ_{j-1}. Grâce au lemme 2.1, on sait que $X(s_{\gamma_{j-2}} \ldots s_{\gamma_1} w)$ contient un diviseur associé à γ_j et puisque γ_j et γ_{j-1} sont de même norme, on obtient

$$\langle s_{\gamma_{j-2}} \ldots s_{\gamma_1} w(\lambda), (\gamma_j + \gamma_{j-1})^\vee \rangle \leq -3$$

Ce qui montre que λ ne peut être un poids classique. □

Corollaire 2.1. — *Soient α, β deux racines positives et w un élément de W^λ tels que $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ soient des diviseurs de $X(w)$. Alors, ou bien l'intersection de* $\operatorname{supp} \alpha$ *et* $\operatorname{supp} \beta$ *est vide, ou bien il existe une frontière commune à α et β. En particulier, si* $\operatorname{supp} \alpha$ *est contenu dans* $\operatorname{supp} \beta$*, alors α est une racine simple.*

Démonstration. — Supposons que $\operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} \beta \neq \varnothing$ et que les deux supports n'ont pas de frontière commune. Du lemme 2.4, on déduit que $\operatorname{supp} \alpha \cup \operatorname{supp} \beta$ est constitué de racines simples de même longueur. Grâce aux diagrammes de Dynkin, on constate qu'on peut supposer qu'il existe γ une frontière de α dans à l'intérieur du support de β. Le lemme 2.7 induit que $\langle w(\lambda), \gamma^\vee \rangle = 0$ et ceci implique que

$$\langle w(\lambda), s_\gamma(\alpha)^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle = -1 \qquad \text{et} \qquad \langle s_{s_\gamma(\alpha)} w(\lambda), \gamma^\vee \rangle = -\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle = -1$$

par conséquent

$$s_\alpha w = s_\gamma s_{s_\gamma(\alpha)} w < s_{s_\gamma(\alpha)} w < w.$$

Or, on a supposé que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$, ce qui donne une contradiction.

Si $\operatorname{supp} \alpha \subset \operatorname{supp} \beta$, alors, ou bien α est une racine simple, ou bien il existe une frontière de α dans l'intérieur de β, mais par ce qui précède, ceci est impossible. □

2.2 Intersection des variétés de Schubert

Le lemme suivant et son corollaire (*voir* [25]) seront utilisés continuellement dans tout le reste de ce chapitre.

Lemme 2.8. — *Soient ϕ, ϕ_1 et ϕ_2 des éléments du groupe de Weyl W tels que $\ell(\phi_i\phi) = \ell(\phi_i) + \ell(\phi)$ pour $i = 1, 2$. Alors pour tout $\eta \in W$, on a*

$$(\eta \leq \phi_1\phi \textit{ et } \eta \leq \phi_2\phi) \iff \eta \leq \phi_0\phi$$

pour un élément ϕ_0 bien choisi tel que $\phi_0 \leq \phi_1$, $\phi_0 \leq \phi_2$ et $\ell(\phi_0\phi) = \ell(\phi) + \ell(\phi_0)$.

L'idée principale est de considérer deux éléments incomparables τ et τ', puis de chercher un élément ϕ tel qu'il existe deux suites de diviseurs qui sont associées à des racines simples l'une reliant $X(\tau)$ à $X(\phi)$ et l'autre reliant $X(\tau')$ à $X(\phi)$. Si on suppose que $\tau = s_{\gamma_1} \cdots s_{\gamma_t}\phi$ et $\tau' = s_{\gamma'_1} \cdots s_{\gamma'_r}\phi$, alors trouver l'intersection de $X(\tau)$ et $X(\tau')$ revient à trouver les bornes inférieures de $s_{\gamma_1} \cdots s_{\gamma_t}$ et $s_{\gamma'_1} \cdots s_{\gamma'_r}$ dans W, qui vérifie les conditions du lemme.

Corollaire 2.2. — *Soient γ, γ' deux racines simples distinctes et $\phi \in W$ tels que $s_\gamma\phi > \phi$ et $s_{\gamma'}\phi > \phi$. Alors pour tout $\eta \in W$, on a*

$$(\eta \leq s_\gamma\phi \qquad \textit{et} \qquad \eta \leq s_{\gamma'}\phi) \iff \eta \leq \phi.$$

Si s_γ et $s_{\gamma'}$ ne commutent pas, ainsi que $s_\gamma s_{\gamma'}\phi > s_{\gamma'}\phi > \phi$ et $s_{\gamma'}s_\gamma\phi > s_\gamma\phi > \phi$, alors

$$(\eta \leq s_\gamma s_{\gamma'}\phi \qquad \textit{et} \qquad \eta \leq s_\gamma s_{\gamma'}\phi) \iff (\eta \leq s_\gamma\phi \qquad \textit{ou} \qquad \eta \leq s_{\gamma'}\phi).$$

Lemme 2.9. — *Soient λ un poids dominant, w un élément de W^λ et α une racine positive telle que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$. Alors il existe γ un élément du support de α telle que $X(s_\gamma w)$ est un diviseur de $X(w)$.*

Démonstration. — Soit $\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} n_\gamma\gamma$ où $n_\gamma \geq 0$. Comme $\langle w(\lambda), \alpha^\vee\rangle < 0$, il en résulte qu'au moins un des termes $\langle w(\lambda), \gamma^\vee\rangle$ est strictement négatif. □

Corollaire 2.3. — *Soient λ un poids dominant, w un élément de W^λ et α, β deux racines positives telles que $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ sont des diviseurs de $X(w)$ et tel que les supports de α et β sont orthogonaux. Alors*

$$X(s_\alpha w) \cap X(s_\beta w) = X(s_\alpha s_\beta w).$$

Démonstration. — Pour $\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} n_\gamma\gamma$ et $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} n'_\gamma\gamma$, on pose $\ell(\alpha) = \sum_{\gamma\in\Delta} n_\gamma$ et $\ell(\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} n'_\gamma$. On va montrer le résultat par récurrence sur $\ell(\alpha) + \ell(\beta)$ et $\ell(w)$ simultanément.

Si $\ell(\alpha)+\ell(\beta) = 2$, alors α et β sont des racines simples et on conclut en appliquant le corollaire 2.2 aux éléments $\phi = s_\alpha s_\beta w$, $s_\alpha w = s_\beta\phi$ et $s_\beta w = s_\alpha\phi$.

Si $\ell(\alpha)+\ell(\beta)>2$, on peut supposer que α n'est pas simple. D'après le lemme 2.9, il existe une racine simple γ dans le support de α telle que $X(s_\gamma w)$ est un diviseur de $X(w)$. Comme $\ell(\gamma)+\ell(\beta)<\ell(\alpha)+\ell(\beta)$, par hypothèse de récurrence, on a

$$X(s_\gamma w)\cap X(s_\beta w)=X(s_\beta s_\gamma w).$$

Grâce au lemme 2.1, on sait que $X(s_\gamma s_\alpha w)\subset X(s_\gamma w)$.

Du lemme 2.2, on a

$$X(s_\gamma s_\alpha w)=X(s_{s_\gamma(\alpha)}s_\gamma w)$$

et par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_\gamma w)$, on obtient

$$X(s_\beta s_\gamma w)\cap X(s_{s_\gamma(\alpha)}s_\gamma w)=X(s_\gamma s_\alpha s_\beta w). \tag{2.2}$$

Considérons $\eta<s_\alpha w$ et $\eta<s_\beta w$, du lemme 2.1, on déduit que $\min(\eta,s_\gamma\eta)$ est inférieur à $s_\gamma s_\alpha w$ et $s_\beta w$. Puis à l'aide de 2.2, on voit que $\min(\eta,s_\gamma\eta)\leq s_\gamma s_\alpha s_\beta w$. En utilisant encore une fois le lemme 2.1, et le fait que $s_\gamma s_\alpha s_\beta w<s_\alpha s_\beta w$, on conclut que $\eta\leq\max(\eta,s_\gamma\eta)\leq s_\alpha s_\beta w$. □

Le corollaire qui va suivre est la preuve de la propriété d'orthogonalité énoncée à la section 1.1 du chapitre 1.

Corollaire 2.4. — *Soient τ, ϕ et w trois éléments de W^λ tels que :*

(i) *w est supérieur à τ et ϕ ;*

(ii) supp(τ,w) *est orthogonal au* supp(ϕ,w). *Alors $X(\tau)\cap X(\phi)$ est irréductible et $X(\kappa)$ contient $X(w)$ si $X(\tau)$ et $X(\phi)$ appartiennent à $X(\kappa)$.*

Démonstration. — Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s$ deux suites de racines positives telles que

$$\tau=s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}w \qquad \text{et} \qquad \phi=s_{\beta_1}\cdots s_{\beta_s}w,$$

avec

$$\ell(s_{\alpha_i}\cdots s_{\alpha_r}w)=\ell(w)-r+i-1 \qquad et \qquad \ell(s_{\beta_j}\cdots s_{\beta_s}w)=\ell(w)-s+j-1,$$

pour $1\leq i\leq r$ et $1\leq j\leq s$. On démontre le résultat par récurrence sur $r+s$. En utilisant le corollaire 2.3, le résultat est vrai pour $s+r=2$.

Si $r+s>2$, on suppose que $r>1$. Comme supp α_r est orthogonal au supp(ϕ,w), il en résulte que les trois éléments τ, $\phi'=s_{\alpha_r}\phi$ et $s_{\alpha_r}w$ vérifient les hypothèses du corollaire et par récurrence sur $r+s-1$, on sait que

$$X(\tau)\cap X(\phi')=X(s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}s_{\beta_1}\cdots s_{\beta_s}w) \tag{2.3}$$

et

$$X(\kappa)\supset(X(\tau)\cup X(\phi'))\iff X(\kappa)\supset X(s_{\alpha_r}w). \tag{2.4}$$

De même $s+1<r+s$ et les trois éléments w, $s_\gamma w$ et ϕ vérifient les hypothèses du corollaire. Par hypothèse de récurrence, on a

$$X(\kappa) \supset (X(s_\gamma w) \cup X(\phi)) \iff X(\kappa) \supset X(w) \tag{2.5}$$

et

$$X(s_\gamma w) \cap X(\phi) = X(\phi'). \tag{2.6}$$

Rappelons que $s_{\alpha_r} w \geq \tau$, donc $X(\tau) \cap X(\phi) = X(\tau) \cap \big(X(s_\gamma w) \cap X(\phi)\big)$. À l'aide de 2.6 et 2.3, on conclut que $X(\tau) \cap X(\phi)$ est irréductible

Soit $\eta > \tau$ et $\eta > \phi$, comme $\phi > \phi'$, l'équivalence (2.4), implique que $\eta \geq s_{\alpha_r} w$, mais $\eta > \phi$, donc (2.5) induit que $\kappa \geq w$. □

2.2.1 Le cas classique

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Proposition 2.2. — *Soient λ un poids classique, α, β deux racines positives et w un élément de W^λ, tels que $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ soient des diviseurs de $X(w)$ dans G/P_λ. Alors :*

(i) *si $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \geq 0$, alors l'intersection de $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ est égale à $X(s_\alpha s_\beta w)$. De plus si $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$, alors la dimension de $X(s_\alpha s_\beta w)$ est égal à $\dim X(w) - 2$. Sinon*

$$\dim X(s_\beta s_\alpha w) = \dim X(w) - \mathrm{Card}\big(\mathrm{supp}\, \alpha \cap \mathrm{supp}\, \beta\big) - 2\,;$$

(ii) *si $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$, alors l'intersection de $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ est réunion des deux composantes irréductibles, $X(s_\beta s_\alpha w)$ et $X(s_\alpha s_\beta w)$. En particulier, on a :*

$$\dim X(s_\beta s_\alpha w) = \dim X(w) - \mathrm{Card}\big(\mathrm{supp}\, \beta\big) - 1$$

$$\dim X(s_\alpha s_\beta w) = \dim X(w) - \mathrm{Card}\big(\mathrm{supp}\, \alpha\big) - 1;$$

$$w(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_\alpha w(\lambda) + s_\alpha s_\beta w(\lambda)\big) = s_\alpha w(\lambda) + s_\beta w(\lambda)$$

et

$$w(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_\beta w(\lambda) + s_\beta s_\alpha w(\lambda)\big) = s_\alpha w(\lambda) + s_\beta w(\lambda).$$

La démonstration de cette proposition se présentera sous la forme d'une suite de lemmes et de corollaires.

Lemme 2.10. — *Soient α une racine positive, γ une racine simple et w un élément de W^λ, tels que $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\gamma w)$ sont des diviseurs de $X(w)$, et γ est une frontière de α. Alors l'intersection de $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\gamma w)$ est égale à $X(s_\gamma s_\alpha w)$.*

Démonstration. — Supposons que $\alpha = \gamma_1 + \cdots + \gamma_t$ et que $\gamma = \gamma_1$. D'après la proposition 2.1, on a

$$\phi = s_{\gamma_t} \cdots s_{\gamma_1} w, \qquad \phi_1 = s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_t} \qquad \text{et} \qquad \phi_2 = s_{\gamma_1} \cdots s_{\gamma_{t-1}},$$

et aussi

$$s_\alpha w = \phi_2 \phi \qquad \text{et} \qquad s_\gamma w = \phi_1 \phi \qquad \text{avec } \ell(\phi_2\phi) = \ell(\phi_1\phi) = \ell(w) - 1.$$

Soit $\kappa \in W^\lambda$ inférieur à $s_\alpha w$ et à $s_\gamma w$. En choisissant des représentants minimaux de κ et de ϕ dans W, et en appliquant le lemme 2.8, on déduit qu'il existe ϕ_0 inférieur à ϕ_1 et à ϕ_2 tel que

$$\kappa \leq \phi_0 \phi \qquad \text{et} \qquad \ell(\phi_0\phi) = \ell(\phi) + \ell(\phi_0).$$

Comme la réflexion s_{γ_1} ne figure pas dans l'expression de ϕ_1 et que s_{γ_t} ne figure pas dans l'expression de ϕ_2, on en déduit que l'élément ϕ_0 du lemme 2.8 est inférieur à $s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_{t-1}}$.

Étant donné que $\ell(s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_{t-1}}\phi) = \ell(\phi) + t - 2$ et que toute expression réduite de ϕ_0 est une sous expression de $s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_{t-1}}$, on déduit que $\phi_0\phi \leq s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_{t-1}}\phi$, mais

$$s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_{t-1}}\phi = s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w = s_\gamma s_\alpha w \mod W^\lambda$$

et $s_\gamma s_\alpha w$ est inférieur à $s_\gamma w$ et $s_\alpha w$. Donc, $\phi_0 = s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_{t-1}}$ et $\phi_0 \phi = s_\gamma s_\alpha w$. □

Lemme 2.11. — *Soient α, β deux racines positives et w un élément de W^λ vérifiant :*
(i) $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$;
(ii) *$X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ sont des diviseurs de $X(w)$.*
Alors $X(s_\alpha w) \cap X(s_\beta w) = X(s_\alpha s_\beta w)$. Et si γ est à l'intersection des frontières de α et β, alors :

$$X(s_\gamma w) \supset X(s_\alpha s_\beta w)$$

et

$$\dim X(s_\alpha s_\beta w) = \ell(w) - \mathrm{Card}\big(\mathrm{supp}\,\alpha \cap \mathrm{supp}\,\beta\big) - 2.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur $r = \mathrm{Card}\big(\mathrm{supp}\,\alpha \cap \mathrm{supp}\,\beta\big)$.

Si $r = 0$, alors (i) implique que les deux supports sont orthogonaux et on conclut par le corollaire 2.3. Sinon, en appliquant la proposition 2.1, on déduit que α et β admettent une frontière commune.

Soient $\alpha = \gamma_1 + \cdots + \gamma_t$ et $\beta = \gamma'_1 + \cdots + \gamma'_s$ avec $\gamma_i = \gamma'_i$ pour $1 \leq i \leq p$ pour un certain $p \geq 1$. D'après le lemme 2.6, ou bien $X(s_{\gamma_1} w)$ est un diviseur double de $X(w)$, ou bien $X(s_{\gamma_t} w)$ et $X(s_{\gamma_s} w)$ sont des diviseurs doubles de $X(w)$. Dans le second cas :

d'un côté

$$\big\langle s_{\gamma'_{p+1}} \cdots s_{\gamma'_s} s_{\gamma_{p+1}} \cdots s_{\gamma_t} w(\lambda), \gamma_p^\vee \big\rangle = \langle w(\lambda), \gamma_p^\vee \rangle - 4.$$

Comme λ est supposé classique , il en résulte que $X(w)$ est un diviseur double de $X(s_{\gamma_p} w)$.

D'un autre côté, grâce à la remarque 2.1 et la proposition 2.1, on constate que

$$X(w) \subsetneq X(s_{\gamma_1}w) \subsetneq \cdots \subsetneq X(s_{\gamma_{p-1}} \cdots s_{\gamma_1} w)$$

est une suite de diviseurs simples. Etant donné que γ_p est orthogonale à l'ensemble des racines simples $\gamma_1, \dots, \gamma_{p-2}$ et du fait que toutes les γ_i sont de même norme, on déduit que

$$\langle s_{\gamma_{p-2}} \cdots s_{\gamma_1} w(\lambda), (\gamma_p + \gamma_{p-1})^\vee \rangle = 3,$$

ce qui donne une contradiction. Il en résulte donc que $X(s_{\gamma_1}w)$ est un diviseur double de $X(w)$.

Observons que dans cette situation, l'élément $s_\gamma w$ et les deux racines $\alpha' = \alpha - \gamma$ et $\beta' = \beta - \gamma$, vérifient les hypothèses du lemme et

$$\mathrm{Card}\big(\mathrm{supp}\,\alpha' \cap \mathrm{supp}\,\beta'\big) < \mathrm{Card}\big(\mathrm{supp}\,\alpha \cap \mathrm{supp}\,\beta\big).$$

Par hypothèse de récurrence, il vient que

$$X(s_{\alpha'} s_{\gamma_1} w) \cap X(s_{\beta'} s_{\gamma_1} w) = X(s_{\alpha'} s_{\beta'} s_{\gamma_1} w), \tag{2.7}$$

mais on remarque que

$$\begin{aligned} \langle s_{\alpha'} s_{\beta'} s_\gamma w(\lambda), \gamma_1^\vee \rangle &= \langle w(\lambda), \gamma_1^\vee \rangle + 2\langle \gamma_1, \gamma_1^\vee \rangle + \langle \alpha', \gamma_1^\vee \rangle + \langle \beta', \gamma_1^\vee \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$s_\gamma s_{\alpha'} s_{\beta'} s_\gamma w = s_{\alpha'} s_{\beta'} s_\gamma w = s_\alpha s_\beta w \mod W_\lambda. \tag{2.8}$$

Considérons $\eta < s_\alpha w, s_\beta w$. Grâce aux lemme 2.1 et l'égalité (2.7), on constate que

$$\min(\eta, s_\gamma \eta) \leq s_{\alpha'} s_{\beta'} s_\gamma w,$$

puis en utilisant le lemme 2.1 et (2.8), on déduit que $\eta \leq s_\alpha s_\beta w$. La formule de dimension s'obtient par hypothèse de récurrence à partir de celle de $X(s_{\alpha'} s_{\beta'} w)$. $\square$

Corollaire 2.5. — *Soient α, β deux racines positives et w un élément de W^λ tels que $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ soient des diviseurs de $X(w)$ et $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle < 0$. Alors*

$$X(s_\alpha w) \cap X(s_\beta w) = X(s_\alpha s_\beta w) \cup X(s_\beta s_\alpha w).$$

Démonstration. — Puisque λ est un poids classique, que

$$\langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \beta^\vee \rangle + \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \leq -1 + \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$$

et que

$$\langle s_\beta w(\lambda), \alpha^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle + \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq -1 + \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$$

il vient que $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -1$. Puisqu'on a montré que les supports de α et β sont des segments et que l'intersection des deux supports est vide ou contient une frontière, à l'aide des diagrammes de Dynkin et le fait que $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle = \langle\beta,\alpha^\vee\rangle = -1$, on déduit que l'intersection est vide.

Pour le reste de la preuve, on procède par récurrence sur r, le cardinal de la réunion des deux supports. Si $r=2$, alors α et β sont des racines simples et on conclut par le corollaire 2.2.

Si $r>2$, d'après le lemme 2.6, il existe γ une frontière de α telle que $X(s_\gamma w)$ est un diviseur double de $X(w)$. De plus, γ est orthogonal au supp β.

Soit $\eta < s_\alpha w, s_\beta w$. D'après les corollaires 2.10 et 2.3, il vient que

$$\min(\eta, s_\gamma\eta) < s_\gamma s_\alpha w \qquad \text{et} \qquad \min(\eta, s_\gamma\eta) < s_\gamma s_\beta w.$$

Observons que $s_\gamma s_\alpha w = s_{\alpha'} s_\gamma w$, où $\alpha' = \alpha - \gamma$; par hypothèse de récurrence, il résulte que

$$\min(\eta, s_\gamma\eta) < s_{\alpha'} s_\beta s_\gamma w \qquad \text{ou} \qquad \min(\eta, s_\gamma\eta) < s_\beta s_{\alpha'} s_\gamma w,$$

mais

$$s_\gamma s_{\alpha'} s_\beta s_\gamma w = s_{\alpha'} s_\beta s_\gamma w = s_\alpha s_\beta w \mod W_\lambda,$$

$$s_\beta s_{\alpha'} s_\gamma w = s_\gamma s_\beta s_\alpha w \mod W_\lambda \qquad \text{et} \qquad s_\gamma s_\beta s_\alpha w < s_\beta s_\alpha w$$

ce qui implique que, ou bien $\eta < s_\beta s_\alpha w$, ou bien $\eta < s_\alpha s_\beta w$. Et ceci achève la démonstration. □

À l'aide d'un calcul direct, on peut vérifier que sous les hypothèses du dernier corollaire, on a le diagramme suivant :

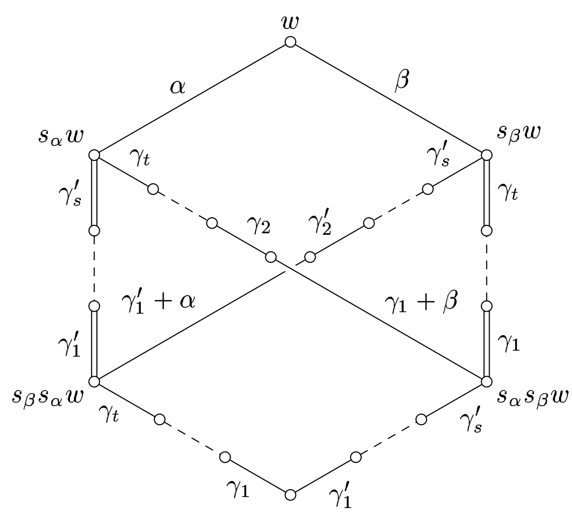


Figure 2 : $\alpha = \gamma_1 + \cdots + \gamma_t$ *et* $\beta = \gamma'_1 + \cdots + \gamma'_s$ *et* $\langle\gamma'_1, \gamma_1^\vee\rangle = -1$

Ce qui prouve l'exactitude des formules de dimension et les équations des poids énoncées dans la proposition 2.2.

Remarque 2.2. — (i) *En appliquant la remarque 2.1 à la proposition 2.1, on voit aisément que la variété* $X(s_{\gamma_2}\cdots s_{\gamma_t} w)$ *contient deux diviseurs associés respectivement aux racines simples* γ_1 *et* γ_2*, ainsi l'intersection des deux variétés de Schubert* $X(s_{\gamma_2}\cdots s_{\gamma_t} w)$ *et* $X(s_{\gamma_2} s_{\gamma_1}\cdots s_{\gamma_t} w)$ *n'est pas irréductible, et donc* W^λ *n'est pas un treillis.*

(ii) *Si tout diviseur d'une variété de Schubert quelconque dans G/P_λ est associé à une racine simple, alors pour tout w dans W^λ et pour tout $X(s_\gamma w)$ et $X(s_{\gamma'} w)$ deux diviseurs de $X(w)$, les deux racines simples γ et γ' sont orthogonales (sinon $X(s_{s_\gamma(\gamma')} s_\gamma w)$ serait un diviseur de $X(s_\gamma w)$ associé à $s_\gamma(\gamma')$, qui n'est pas une racine simple). De là, on peut déduire que tout couple (τ, τ') d'éléments incomparables dans W^λ et w une borne supérieure de τ et τ', les supports de (τ, w) et (τ', w) sont orthogonaux. Ainsi par le corollaire 2.4, on déduit que W^λ est un treillis possédant la propriété d'orthogonalité, donc W^λ est un treillis distributif associé à une classe d'équivalence de chaînes* (voir *proposition 1.1).*

2.2.2 Applications

Le but de cette section est d'étendre les résultats trouvés dans la section précédente à une situation plus générale. En particulier, on dégagera les outils nécessaires pour prouver la déformation qu'on va décrire. Sauf mention du contraire le poids λ sera supposé classique. Considérons trois éléments τ, τ' et w de W^λ tels que

1. w est une borne supérieure de τ et τ' ;
2. $\mathrm{supp}(\tau, w) \cap \mathrm{supp}(\tau', w) = \varnothing$.

Considérons l'entier

$$d(\tau, \tau') = \mathrm{Card}\{(\gamma, \gamma') \in \mathrm{supp}(\tau, w) \times \mathrm{supp}(\tau', w) \mid \langle \gamma, \gamma' \rangle \neq 0\}.$$

Alors on a le résultat suivant :

Proposition 2.3. — *Soient τ et τ' deux éléments incomparables dans W^λ tels que l'intersection des supports de (τ, w) et (τ', w) est vide. Alors $X(\tau) \cap X(\tau')$ est réunion de $2^{d(\tau,\tau')}$ composantes irréductibles.*

Pour démontrer cette proposition, on procède en deux étapes. Dans la première, on généralise le résultat de la proposition 2.2 (ii) au cas $d(\tau, \tau') = 1$, puis on simplifie le problème par une réduction qui nous ramène à la première étape. On commence donc par donner quelques lemmes techniques.

Lemme 2.12. — *Soient α, β deux racines positives, λ un poids dominant et w un élément de W^λ, tels que $X(w) \supset X(s_\alpha w) \supset X(s_\beta s_\alpha w)$. Si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \geq 0$ *;*

(ii) $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$ *et* $\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle > \langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle$ *;*

(iii) $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -1$ *et* $\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle < \langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle$.

Alors il existe κ dans W^λ tel que

$$X(s_\beta s_\alpha w) \subset X(\kappa) \subset X(w) \qquad \text{et} \qquad \kappa \neq s_\alpha w.$$

En particulier, si α et β sont de même norme, alors l'élément κ existe sauf dans le cas où $\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle = \langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle$ et $\alpha + \beta$ est une racine.

Démonstration. — Considérons l'expression

$$\langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \beta^\vee \rangle - \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, \beta^\vee \rangle < 0. \tag{2.9}$$

De cette inégalité et de la condition (i), on déduit que $\langle w(\lambda), \beta^\vee \rangle < 0$ et il en résulte que

$$s_\beta s_\alpha w = s_{s_\beta(\alpha)} s_\beta w \mod W_\lambda \qquad \text{et} \qquad s_\beta s_\alpha w < s_\beta w < w,$$

on peut donc considérer que $\kappa = s_\beta w$.

Si (ii) est vérifié, alors (2.9) implique que $\langle w(\lambda), \beta^\vee \rangle < 0$, de plus

$$s_{s_\beta(\alpha)} s_\beta w = s_\beta s_\alpha w \mod W_\lambda$$

ainsi $\kappa = s_\beta w$.

Si (iii) est satisfaite, on obtient

$$\begin{aligned} \langle s_{s_\alpha(\beta)} w(\lambda), \alpha^\vee \rangle &= \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle - \langle w(\lambda), s_\alpha(\beta)^\vee \rangle \langle s_{s_\alpha(\beta)}, \alpha^\vee \rangle \\ &= \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle - \langle w(\lambda), s_\alpha(\beta)^\vee \rangle \\ &= \langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle - \langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle < 0, \end{aligned}$$

de plus, $s_\alpha s_{s_\alpha(\beta)} w = s_\beta s_\alpha w \mod W_\lambda$, donc $\kappa = s_{s_\alpha(\beta)} w$. En particulier, si α et β sont de même norme et $\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle \neq \langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle$, alors ou bien

$$\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle < \langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle \qquad \text{et} \qquad s_\beta s_\alpha w = s_{s_\alpha(\beta)} s_\beta w < s_\beta w,$$

ou bien

$$\langle w(\lambda), \alpha^\vee \rangle > \langle s_\alpha w(\lambda), \beta^\vee \rangle \qquad \text{et} \qquad s_\beta s_\alpha w = s_\alpha s_{s_\alpha(\beta)} w < s_{s_\alpha(\beta)} w,$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 2.6. — *Soient $\tau < w$ deux éléments de W^λ, β_0 et β_1 deux racines positives tels que :*

(i) *les supports de β_0 et (w, τ) sont d'intersection vide et $\langle \beta_0, \beta_1 \rangle = -1$;*

(ii) *$X(s_{\beta_0} w)$ est un diviseur de $X(w)$ et $X(s_{\beta_1} w)$ est l'unique diviseur de $X(w)$ contenant $X(\tau)$.*

Alors il existe une unique chaîne entre τ et w. En particulier $\tau = s_\beta w$, où $\beta = \tau(\lambda) - w(\lambda)$.

Démonstration. — Supposons que $\tau = s_{\beta_r} \cdots s_{\beta_1} w$, $\tau_k = s_{\beta_k} \cdots s_{\beta_1} w$ et $\ell(\tau_k) = \ell(w) - k$ pour $k \leq r$.

Soit j maximal tel que $X(\tau_k)$ est l'unique diviseur de $X(\tau_{k-1})$ contenant $X(\tau)$ pour $k \leq j$. D'après les hypothèses, on a $j \geq 1$.

Supposons que $j < r$, donc $X(\tau_j)$ contient deux diviseurs associés à deux racines positives qu'on note α et α' avec $\tau \leq s_\alpha \tau_j$, $s_{\alpha'} \tau_j$.

Assertion 2.1. — *Les racines α, α', β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_j$ sont de même norme.*

Démonstration. — Le fait que β_1 et β_0 sont de même norme est une conséquence de l'hypothèse faite sur λ. En effet, dans le cas contraire on a

$$\langle \beta_1, \beta_0^\vee \rangle \in \{-2, -3\} \qquad \text{ou} \qquad \langle \beta_0, \beta_1^\vee \rangle \in \{-2, -3\},$$

ceci implique que

$$\langle s_{\beta_1} w(\lambda), \beta_0^\vee \rangle \in \{-3, -4\} \qquad \text{ou} \qquad \langle s_{\beta_0} w(\lambda), \beta_1^\vee \rangle \in \{-3, -4\},$$

ce qui est impossible.

Soit p minimal tel que la norme de β_p est différente de celle de β_1. Par hypothèse sur j, on déduit que $X(\tau_k)$ est l'unique diviseur de $X(\tau_{k-1})$ contenu dans $X(\tau_{k-2})$ pour tout $k \leq j$. D'après le lemme 2.12 et le fait que toutes les racines β_i pour $1 \leq i < p$ sont de même norme, ainsi que de (i), on déduit que l'expression $\beta' = \beta_0 + \cdots + \beta_{p-1}$ est une racine positive.

Etant donné que $\langle \tau_{p-1}(\lambda), \beta'^\vee \rangle < 0$, on considère $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ une suite de racines positives telles que $s_{\alpha_s} \cdots s_{\alpha_1} \tau_{p-1} = s_{\beta'} \tau_{p-1}$ et $X(s_{\alpha_j} \cdots s_{\alpha_1} \tau_{p-1})$ est un diviseur de $X(s_{\alpha_{j-1}} \cdots s_{\alpha_1} \tau_{p-1})$ pour $1 \leq j \leq s-1$. De là, on déduit que, ou bien le support de β_p est orthogonal au support de β', dans ce cas $X(w)$ contient un deuxième diviseur contenant $X(\tau)$, ce qui contredit les hypothèses, ou bien il existe k, $1 \leq k \leq s$ tel que

$$\langle \beta_p, \alpha_k^\vee \rangle < 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \beta_p, \alpha_q^\vee \rangle = 0 \qquad \text{pour } 1 \leq q < k.$$

Comme la norme de α_k est égale à celle de β_1, il s'ensuit que

$$\langle \beta_p, \alpha_k^\vee \rangle \in \{-2, -3\} \qquad \text{ou} \qquad \langle \alpha_k, \beta_p^\vee \rangle \in \{-2, -3\},$$

et donc pour $\kappa = s_{\alpha_{k-1}} \cdots s_{\alpha_1} \tau_{p-1}$, on a

$$\langle s_{\beta_p} \kappa(\lambda), \alpha_k^\vee \rangle \in \{-3, -4\} \qquad \text{ou} \qquad \langle s_{\alpha_k} \kappa(\lambda), \beta_p^\vee \rangle \in \{-3, -4\},$$

ce qui donne une contradiction. □

Retour à la preuve du corollaire. — Grâce à (i), on déduit que $\alpha'' = \beta_0 + \beta_1$ est une racine positive. Comme λ est classique et que

$$\langle w(\lambda), \alpha''^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \beta_0^\vee \rangle + \langle w(\lambda), \beta_1^\vee \rangle,$$

la condition (ii) implique que $\langle w(\lambda), \beta_0^\vee \rangle = \langle w(\lambda), \beta_1^\vee \rangle = -1$. De plus, à l'aide du lemme 2.12 et du fait que tous les β_k sont de même norme, il vient que $\langle \beta_k, \beta_{k+1}^\vee \rangle = -1$ pour tout $1 \leq k < j$, donc $\beta' = \beta_0 + \cdots + \beta_j$ est une racine positive.

Supposons que $\operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} \alpha' \neq \varnothing$. Du lemme 2.11, il s'ensuit que $X(\tau_j)$ contient un diviseur double $X(s_\gamma \tau_j)$ contenant $X(\tau)$ où γ est la frontière commune à α et β, de plus γ et β_{j-1} sont de même norme. En appliquant le lemme 2.12 à la suite

$$X(s_\gamma \tau_j) \subset X(\tau_j) \subset X(\tau_{j-1}),$$

on déduit que $X(\tau_{j-1})$ contient un diviseur différent de $X(\tau_j)$ qui contient $X(\tau)$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur j.

Supposons que les supports de α et α' ne se rencontrent pas. Alors, des diagrammes de Dynkin et lu fait que $\langle \alpha, \beta'^{\vee} \rangle = -1$ et $\langle \alpha', \beta'^{\vee} \rangle = -1$, on déduit que $\alpha'' = \alpha + \alpha' + \beta'$ est une racine positive et on a

$$\langle \tau_j(\lambda), \alpha''^{\vee} \rangle = \langle \tau_j(\lambda), \alpha^{\vee} \rangle + \langle \tau_j(\lambda), \alpha'^{\vee} \rangle + \langle \tau_j(\lambda), \beta'^{\vee} \rangle.$$

Remarquons que $\beta' = s_{\beta_j} \cdots s_{\beta_1}(\beta_0)$, donc de l'invariance de la forme de Killing par W, on conclut que

$$\langle \tau_j(\lambda), \beta'^{\vee} \rangle = \langle w(\lambda), \beta_0^{\vee} \rangle = -1 \qquad \text{et} \qquad \langle \tau_j(\lambda), \alpha''^{\vee} \rangle = -3,$$

ce qui contredit l'hypothèse λ classique.

□

Lemme 2.13. — *Soient τ, τ' deux éléments incomparables de W^{λ} et w une borne supérieure de τ et τ' tels que l'intersection des supports de (τ, w) et (τ', w) est vide. Supposons qu'il existe une racine $\gamma \in \Delta$ telle que τ et $s_\gamma w$ (resp. τ' et $s_\gamma w$) sont incomparables. Alors γ est orthogonale à l'un des deux supports.*

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que $\langle w(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle = -2$ et que γ n'est pas orthogonale au $\mathrm{supp}(w, \tau)$. Soit $\beta_1, \ldots, \beta_s$ une suite de racines positives telles que $\tau_j = s_{\beta_j} \cdots s_{\beta_1} w$, $\tau = \tau_s$ et $X(\tau_j)$ est un diviseur de $X(\tau_{j-1})$.

Considérons k minimal tel que γ est orthogonale au support de β_j, pour $1 \leq j < k$ et $\langle \beta_k, \gamma \rangle \neq 0$. Si γ n'est pas dans le support de β_k, alors

$$\langle \gamma, \beta_k^{\vee} \rangle < 0 \qquad \text{et} \qquad \langle s_{\beta_k} \cdots s_{\beta_1} w(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle \leq -3,$$

mais λ est classique, d'où une contradiction. On peut donc supposer que γ appartient au $\mathrm{supp}(w, \tau)$. De même, si γ n'est pas orthogonale au $\mathrm{supp}(w, \tau')$, on montre comme précédemment que γ est dans $\mathrm{supp}(w, \tau')$, il en résulte donc que l'intersection des supports est non vide , ce qui contredit les hypothèses du lemme.

Supposons maintenant que $\langle w(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle = -1$. Quitte à remplacer τ et τ' par $\delta > \tau$ et $\delta' > \tau'$, on peut supposer que

$$\gamma \notin \mathrm{supp}(\tau, w) \cup \mathrm{supp}(\tau', w). \tag{2.10}$$

Le reste de la preuve est montrée par l'absurde. Supposons que γ n'est orthogonale à aucun des deux supports. Étant donné que $s_\gamma w$ est incomparable avec τ, le lemme 2.1 nous permet de déduire que $s_\gamma \tau < \tau$. Mais

$$\langle \tau(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle = \langle w(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle + \langle \tau(\lambda) - w(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle$$

et d'après (2.10), on a $\langle \tau(\lambda) - w(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle < 0$, d'où $\langle \tau(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle = -2$.

Soit κ une borne inférieure de τ et τ'. Remarquons que

$$\mathrm{supp}(w, \kappa) \supset \mathrm{supp}(w, \tau) \cup \mathrm{supp}(w, \tau'),$$

donc $\mathrm{supp}(\tau, \kappa)$ contient $\mathrm{supp}(w, \tau')$ et ne contient pas γ. Comme on a supposé que γ n'est pas orthogonal au $\mathrm{supp}(w, \tau')$, il en résulte qu'il existe δ tel que $\kappa \leq \delta < \tau$ et $\langle \delta(\lambda), \gamma^{\vee} \rangle = -3$, ce qui contredit l'hypothèse λ classique. □

Lemme 2.14. — *Soient τ, τ' deux éléments incomparables de W^λ et w une borne supérieure de τ et τ' tels que l'intersection des supports de (τ, w) et (τ', w) est vide. Alors pour tout (γ, γ') dans $\operatorname{supp}(\tau, w) \times \operatorname{supp}(\tau', w)$ tel que $\langle \gamma, \gamma' \rangle \neq 0$, on a :*

(i) $\tau(\lambda) - w(\lambda) = \gamma + \nu$, *où* $\gamma \notin \operatorname{supp} \nu$ *;*

(ii) $\tau'(\lambda) - w(\lambda) = \gamma' + \mu$, *où* $\gamma' \notin \operatorname{supp} \mu$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\ell(w)$.

Si $\ell(w) \leq 3$, alors $\tau = s_\gamma w$ et $\tau' = s_{\gamma'} w$, où γ et γ' sont des racines simples, donc il n'y a rien à démontrer.

Si $\ell(w) > 3$, on considère une racine simple γ telle que $s_\gamma w < w$. Si $s_\gamma w$ est incomparable avec τ et τ', alors d'après le lemme 2.13 on peut supposer que γ est orthogonale à l'un des deux supports. En considérant les éléments $s_\gamma \tau$, $s_\gamma \tau'$ et $s_\gamma w$, on déduit que l'intersection des supports de $(s_\gamma \tau, s_\gamma w)$ et $(s_\gamma \tau', s_\gamma w)$ est vide, et comme les couples (γ, γ') dans $\operatorname{supp}(\tau, s_\gamma w) \times \operatorname{supp}(\tau', s_\gamma w)$ tels que $\langle \gamma', \gamma^\vee \rangle \neq 0$ sont les mêmes que ceux de $\operatorname{supp}(s_\gamma \tau, s_\gamma w) \times \operatorname{supp}(s_\gamma \tau', s_\gamma w)$, le résultat découle de l'hypothèse de récurrence. Sinon, on peut supposer que $\tau \leq s_\gamma w < w$.

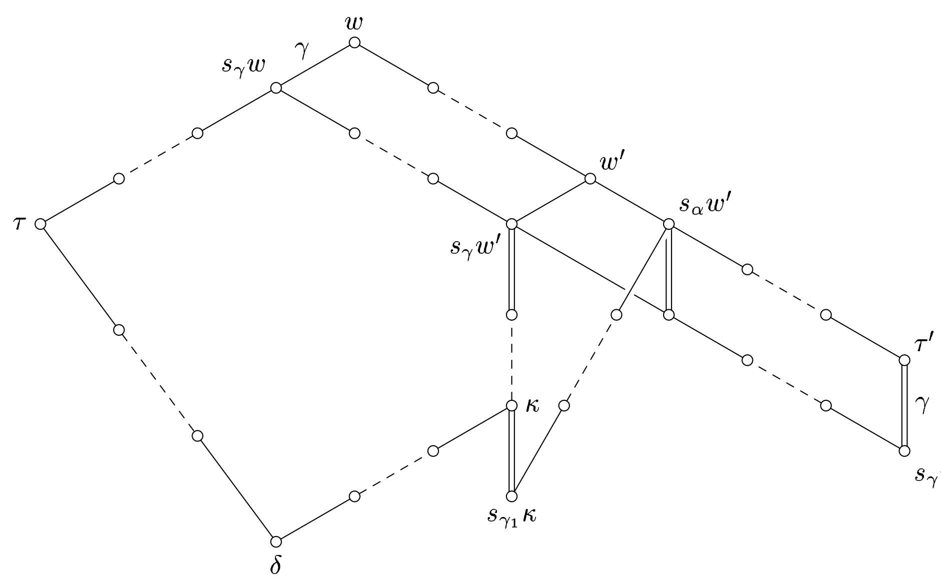


Figure 3

Pour le reste de la preuve, le lecteur pourra s'aider de la figure 3. On considère un élément w' minimal tel que $\tau' \leq w' < w$ et tel que le support de (w', w) est orthogonal à γ. Si $w' = \tau'$, alors on conclut par hypothèse de récurrence sur les éléments τ, $s_\gamma \tau'$ et $s_\gamma w$. Sinon, on considère α une racine positive telle que $\tau' \leq s_\alpha w' < w'$ et on remarque que $X(s_\gamma w)$ est un diviseur de $X(w')$. Puisque γ n'est pas dans le support de α, on en déduit que $\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle < 0$. Ainsi $X(s_\gamma s_\alpha w')$ est un diviseur double de $X(s_\alpha w')$.

Supposons que $\alpha = \gamma_1 + \cdots + \gamma_t$ et que $\langle \gamma_1, \gamma^\vee \rangle \neq 0$. Comme γ n'appartient pas au support de $(s_\alpha w', \tau')$, il s'ensuit que γ est orthogonale à ce support (sinon λ ne serait pas classique), en particulier γ_1 n'appartient pas au support de $(s_\alpha w', \tau')$. Étant donné que γ est orthogonale au support de (w, w'), on voit que γ' n'est pas dans le support de (w, w') et comme le support de α est un segment constitué de racines simples de même longueur (*voir* lemmes 2.4 et 2.5), il vient que γ_1 figure avec multiplicité 1 dans l'expression de α et γ_1 n'appartient pas à $\mathrm{supp}\big(w(\lambda)-\tau(\lambda)-\gamma_1\big)$.

Soient $\kappa = s_{\gamma_2}\cdots s_{\gamma_t}s_\gamma w'$ et δ une borne inférieure de τ et κ. Remarquons que grâce à la proposition 2.1 et au lemme 2.1, on sait que pour tout τ et w dans W^λ tels que $w > \tau$ et $X(s_\alpha w)$ un diviseur de $X(w)$, ou bien $s_\alpha w \geq \tau$, ou bien il existe une suite de racines simples $\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_r}$ dans le support de α telle que $s_{\gamma_{i_1}}\cdots s_{\gamma_{i_r}}\tau \leq s_\alpha w$.

Étant donné que γ_1 n'appartient pas à la réunion des supports $\mathrm{supp}(s_\gamma w,\kappa)$ et $\mathrm{supp}(s_\gamma w,\tau)$, de la dernière remarque, il résulte que γ_1 n'appartient pas au support de (δ,κ) et que le support de $(\tau, s_\gamma w)$ est sous-ensemble du support de (κ,δ). Mais $X(\kappa)$ contient un diviseur double associé à γ_1, par conséquent, pour tout ϕ tel que $\kappa \geq \phi \geq \delta$, $X(\phi)$ contient un diviseur double associé à γ_1. Ainsi tout diviseur de $X(\phi)$ est associé à γ_1 ou à une racine de support orthogonal à γ_1, donc γ_1 est orthogonale au support de (κ,δ). Puisque le support(w,δ) est indépendant de la chaîne choisie pour aller de w à δ et que le support de $(w, s_{\gamma_1}\kappa)$ ne contient pas γ, on déduit que γ n'appartient pas au support de $(\tau, s_\gamma w)$. Étant donné que

$$\mathrm{supp}(\tau, s_\gamma w) = \mathrm{supp}(\tau, w)\setminus\{\gamma\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{supp}(s_\gamma\tau', s_\gamma w) = \mathrm{supp}(\tau', w)\cup\{\gamma\}$$

et que tout couple de racines simples (γ',γ'') dans $\mathrm{supp}(\tau,w)\times\mathrm{supp}(\tau',w)$ tel que

$$\langle\gamma',\gamma''^\vee\rangle \neq 0 \qquad \text{et} \qquad (\gamma',\gamma'') \neq (\gamma,\gamma_1)$$

appartient à $\mathrm{supp}(\tau, s_\gamma w)\times\mathrm{supp}(s_\gamma\tau', s_\gamma w)$, on conclut par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_\gamma w)$. □

Lemme 2.15. — *Soient $\tau,\tau' \in W^\lambda$ et w une borne supérieure de τ et τ', tels que l'intersection des supports de (w,τ) et (w,τ') est vide. Alors w est unique.*

Démonstration. — On donnera la preuve par récurrence sur $\ell(w)$.

Si $\ell(w) \leq 3$, alors il existe γ et γ' deux racines simples $\tau = s_\gamma w$ et $\tau' = s_{\gamma'}w$. À l'aide de la remarque 2.1, on voit qu'il suffit de considérer les éléments $s_\gamma w w_0$, $s_{\gamma'}ww_0$ dans $W^{-w_0(\lambda)}$ et de montrer que

$$\kappa < s_\gamma w w_0 \qquad \text{et} \qquad \kappa < s_{\gamma'}ww_0 \iff \kappa \leq ww_0,$$

mais ce résultat correspond à l'énoncé du corollaire 2.2.

Si $\ell(w) > 3$, on consière une racine simple γ telle que $s_\gamma w < w$ et on distingue deux situations possibles :

a) $\tau \leq s_\gamma w < w$ et τ' et $s_\gamma w$ sont incomparables ;

b) τ et $s_\gamma w$ sont incomparables, ainsi que τ' et $s_\gamma w$.

Dans la situation *a*), on distingue deux cas possibles :

Premier cas : γ est orthogonale au support de (w,τ'). Dans ce cas-là, les éléments τ, $s_\gamma\tau'$, $s_\gamma w$ vérifient les hypothèses du lemme. Par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_\gamma w)$, il s'ensuit que $s_\gamma w$ est l'unique borne supérieure pour τ et $s_\gamma\tau'$. Si on considère $\eta \geq \tau,\ \tau'$, il est clair que $\eta \geq \tau,\ s_\gamma\tau'$, d'où $\eta \geq s_\gamma w,\ \tau'$. Rappelons que γ et le support de $(s_\gamma w, s_\gamma\tau')$ sont orthogonaux, donc par le corollaire 2.4, on conclut que $\eta \geq w$.

Deuxième cas: γ n'est pas orthogonale au support de (w, τ'). Dans ce cas, du lemme 2.14, on déduit que γ n'appartient pas au support de $(s_\gamma w, \tau)$. De plus, on a:

$$\operatorname{supp}(s_\gamma w, s_\gamma \tau') = \operatorname{supp}(w, \tau') \cup \{\gamma\}$$

et

$$\operatorname{supp}(s_\gamma w, \tau) = \operatorname{supp}(w, \tau) \setminus \{\gamma\}.$$

Donc les éléments τ, $s_\gamma \tau'$, $s_\gamma w$ vérifient les hypothèses du lemme et par hypothèse de récurrence, $s_\gamma w$ est l'unique borne supérieure pour τ et $s_\gamma \tau'$. Choisissons $\eta \geq \tau$, τ' et montrons que $\eta \geq w$. Pour le reste de la preuve le lecteur pourra se laisser guider de la figure 4.

Comme $s_\gamma \tau' \leq \tau'$, donc $\eta \geq s_\gamma w$, τ'. Notons $\tau' = s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1} w$ et $\tau'_p = s_{\alpha_p} \cdots s_{\alpha_1} w$, où $X(\tau_p)$ est un diviseur de $X(\tau_{p-1})$ et $1 \leq p \leq r$.

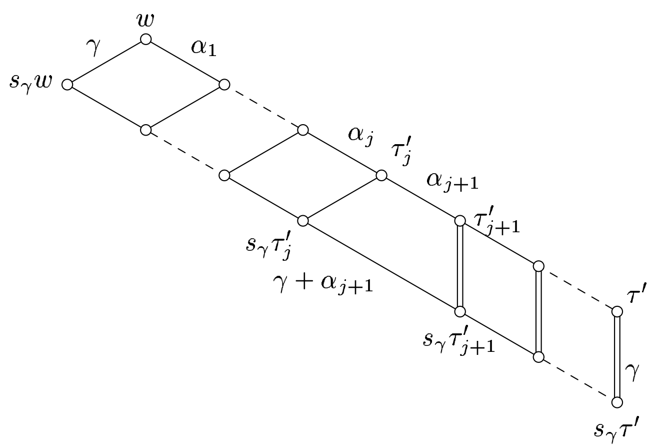


Figure 4

Soit j maximal tel que le support de α_j est orthogonal à γ. Grâce au lemme 2.14, on voit que α_{j+1} est l'unique racine dans le support de (w, τ') qui n'est pas orthogonale à γ.

En utilisant de nouveau la remarque 2.1, on déduit qu'il suffit de montrer que ww_0 est l'unique borne inférieure de $s_\gamma ww_0$ et $\tau' w_0$ dans $W^{w_0(\lambda)}$.

Comme γ est orthogonale à la réunion des supports de (w, τ'_j) et (τ_{j+1}, τ'), le corollaire 2.4 nous dit que

$$X(s_\gamma \tau'_{j+1} w_0) \cap X(\tau' w_0) = X(\tau'_{j+1} w_0) \tag{2.11}$$

$$X(s_\gamma ww_0) \cap X(\tau_j w_0) = X(ww_0) \tag{2.12}$$

et à l'aide du lemme 2.6, on a

$$X(\tau'_{j+1} w_0) \cap X(s_\gamma \tau_j w_0) = X(\tau'_j w_0). \tag{2.13}$$

Puisque $s_\gamma ww_0 < s_\gamma \tau'_j w_0 < s_\gamma \tau'_{j+1} w_0$, il vient que

$$X(s_\gamma ww_0) \cap X(\tau' w_0) = X(s_\gamma ww_0) \cap \big(X(\tau' w_0) \cap X(s_\gamma \tau'_{j+1} w_0) \cap X(s_\gamma \tau'_j w_0)\big).$$

En utilisant (2.11), (2.12), puis (2.13), on conclut que

$$X(s_\gamma w w_0) \cap X(\tau' w_0) = X(w w_0).$$

Ainsi, si $\eta \geq s_\gamma w$ et $\eta \geq \tau'$, on a $\eta w_0 \leq w w_0$, ce qui est équivalent à $\eta \geq w$.

Dans la situation b), on distingue aussi deux cas :

Premier cas : γ est orthogonale à la réunion des supports de (w, τ) et (w, τ'). Dans ce cas, le triplet $(s_\gamma \tau,\ s_\gamma \tau',\ s_\gamma w)$ vérifie les hypothèses du lemme. Par hypothèse de récurrence, $s_\gamma w$ est l'unique borne supérieure de $s_\gamma \tau$ et $s_\gamma \tau'$. Puisque γ est orthogonale aux deux supports, on déduit aisément à l'aide du lemme 2.1, que w est l'unique borne supérieure de τ et τ'.

Second cas : γ non orthogonal au support de (w, τ). D'après le lemme 2.13, dans ce cas, γ est orthogonale au support de (w, τ'). Par conséquent, les éléments $s_\gamma \tau$, $s_\gamma \tau'$ et $s_\gamma w$ vérifient les hypothèses du lemme, et par hypothèse de récurrence, on en déduit que $s_\gamma w$ est l'unique borne supérieure de $s_\gamma \tau$, $s_\gamma \tau'$. Si on considère $\eta \geq \tau, \tau'$, il est clair que $\eta \geq s_\gamma \tau', \tau$, donc $\eta \geq s_\gamma w$. Mais rappelons que γ est orthogonale au support de (w, τ'), donc du corollaire 2.4, on déduit que $\eta \geq w$. □

Lemme 2.16. — *Soient α, β deux racines positives et w un élément de W^λ vérifiant $s_\alpha w$, $s_\beta w \leq w$. Supposons de plus que l'intersection du support de α avec celui de β est vide et qu'on a la propriété suivante : toute racine positive α' telle que $s_\alpha w < s_{\alpha'} w < w$ (resp. $s_\beta w < s_{\alpha'} w < w$) est non orthogonale au support de β (resp. au support de α). Alors*

$$X(s_\alpha w) \cap X(s_\beta w) = X(s_\alpha s_\beta w) \cup X(s_\beta s_\alpha w).$$

En particulier, on a les équations des poids suivantes :

$$s_\alpha w(\lambda) + s_\beta w(\lambda) = w(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_\alpha w(\lambda) + s_\beta s_\alpha w(\lambda)\big)$$

et

$$s_\alpha w(\lambda) + s_\beta w(\lambda) = w(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_\beta w(\lambda) + s_\alpha s_\beta w(\lambda)\big).$$

Démonstration. — Rappelons que le support d'une racine positive est connexe. Des graphes de Dynkin, on déduit qu'il existe un unique couple (γ, γ') dans $\operatorname{supp} \alpha \times \operatorname{supp} \beta$ tel que $\langle \gamma, \gamma' \rangle \neq 0$.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ deux suites de racines positives telles que

$$S_1 := X(w) \supsetneq X(s_{\alpha_1} w) \supsetneq \cdots \supsetneq X(s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1} w = s_\alpha w)$$

et

$$S_2 := X(w) \supsetneq X(s_{\beta_1} w) \supsetneq \cdots \supsetneq X(s_{\beta_s} \cdots s_{\beta_1} w = s_\beta w),$$

sont des suites de diviseurs.

En vertu de la propriété énoncée dans les hypothèses du lemme, $\langle \alpha_1, \beta_1^\vee \rangle < 0$ et $X(s_{\alpha_1} w)$ (resp. $X(s_{\beta_1} w)$) est l'unique diviseur de $X(w)$ contenant $X(s_\alpha w)$ (resp. $X(s_\beta w)$). Grâce au corollaire 2.6, on voit que S_1 (resp. S_2) est l'unique suite de diviseurs entre $X(w)$ et $X(s_\alpha w)$ (resp. $X(s_\beta w)$). De plus, les deux supports sont constitués de racines simples de même norme.

On donnera la preuve par récurrence sur $\ell(w)$. Si $\ell(w) \leq 3$ ou $r+s=2$, alors $X(s_\alpha w)$ et $X(s_\beta w)$ sont des diviseurs de $X(w)$ et $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1$, puis on conclut par la proposition 2.2.

Sinon, on suppose que $\ell(w) > 3$, $r > 1$ et on considère une racine simple γ telle que $s_\gamma w < w$. Comme dans le lemme précédent, on distingue deux cas.

Premier cas : $\gamma = \alpha_1$. Dans ce cas, $s_\alpha w = s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w$ et $s_\gamma s_\beta w = s_{s_\gamma(\beta)} s_\gamma w$ dans W^λ. Ainsi, du fait que γ n'est pas orthogonale au support de β, du lemme 2.14, on déduit que γ n'appartient pas au support de $s_\gamma(\alpha)$. Donc, les supports de $s_\gamma(\alpha)$ et $s_\gamma(\beta)$ sont d'intersection vide, de plus, on a

$$\langle s_\gamma(\alpha), s_\gamma(\beta^\vee) \rangle = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = -1.$$

Pour conclure, par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_\gamma w)$ que

$$X(s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w) \cap X(s_{s_\gamma(\beta)} s_\gamma w) = X(s_{s_\gamma(\alpha)} s_{s_\gamma(\beta)} s_\gamma w) \cup X(s_{s_\gamma(\beta)} s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w), \tag{2.14}$$

il suffit de voir que $s_\alpha w$, $s_\gamma w$ et $s_\gamma s_\beta w$ vérifient la propriété énoncée dans les hypothèses, c'est ce qu'on va montrer. D'après ce qui précède

$$X(s_\gamma w) \supset X(s_{\alpha_2} s_\gamma w) \supset \cdots \supset X(s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_2} s_\gamma w = s_\alpha w)$$

et

$$X(s_\gamma w) \supset X(s_{s_\gamma(\beta_1)} s_\gamma w) \supset \cdots \supset X(s_{\beta_s} \cdots s_{\beta_2} s_{s_\gamma(\beta_1)} s_\gamma w = s_\gamma s_\beta w)$$

sont des suites de diviseurs. Remarquons que $\langle s_\gamma(\beta_1), \alpha_2^\vee \rangle < 0$. On sait déjà que $X(s_{\alpha_2} s_\gamma w)$ est l'unique diviseur de $X(s_\gamma w)$ contenant $X(s_\alpha w)$ et que $X(s_{s_\gamma(\beta_1)} s_\gamma w)$ est un diviseur de $X(s_\gamma w)$ qui contient $X(s_\gamma s_\beta w)$, donc les supports de α_2 et $(s_\gamma s_\beta w, s_\gamma w)$ ne sont pas orthogonaux. Il reste à voir que $X(s_{s_\gamma(\beta_1)} s_\gamma w)$ est l'unique diviseur de $X(s_\gamma w)$ contenant $X(s_\gamma s_\beta w)$. En effet, soit $X(\kappa)$ un diviseur de $X(s_\gamma w)$ contenant $X(s_\gamma s_\beta w)$, donc $X(s_\gamma \kappa)$ contient $X(s_\beta w)$, de plus

$$X(s_\gamma \kappa) \subset X(w) \qquad \text{et} \qquad \ell(s_\gamma \kappa) = \ell(w) - 1.$$

Puisque $X(s_{\beta_1} w)$ est l'unique diviseur de $X(w)$ qui contient $X(s_\beta w)$, il en résulte donc que $s_\gamma \kappa = s_{\beta_1} w$ et par conséquent $\kappa = s_{s_\gamma(\beta_1)} s_\gamma w$. Ce qui prouve que (2.14) est satisfaite.

Notons que

$$s_{s_\gamma(\alpha)} s_{s_\gamma(\beta)} s_\gamma w = s_\alpha s_\beta w \mod W_\lambda, \tag{2.15}$$
$$s_{s_\gamma(\beta)} s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w = s_\gamma s_\beta s_\alpha w \mod W_\lambda. \tag{2.16}$$

Ainsi, si on considère η tel que $\eta < s_\alpha w$ et $\eta < s_\beta w$, alors

$$\min(\eta, s_\gamma \eta) \leq s_\gamma s_\alpha w \qquad \text{et} \qquad \min(\eta, s_\gamma \eta) \leq s_\gamma s_\beta w,$$

et donc

$$\min(\eta, s_\gamma \eta) \leq s_{s_\gamma(\beta)} s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w \qquad \text{ou} \qquad \min(\eta, s_\gamma \eta) \leq s_{s_\gamma(\alpha)} s_{s_\gamma(\beta)} s_\gamma w.$$

À l'aide des égalités (2.15) et (2.16), et du fait que

$$s_\gamma s_\beta s_\alpha w < s_\beta s_\alpha w \qquad \text{et} \qquad s_\gamma s_\alpha s_\beta w = s_\alpha s_\beta w \mod W_\lambda,$$

on conclut que $\eta < s_\alpha s_\beta w$ ou $\eta < s_\beta s_\alpha w$.

Second cas : $s_\alpha w$ et $s_\gamma w$ sont incomparables, ainsi que $s_\beta w$ et $s_\gamma w$. Dans ce cas, le lemme 2.13 nous autorise à supposer que γ est orthogonale au support de β. D'après le lemme 2.1, $s_\gamma s_\alpha w$ et $s_\gamma s_\beta w$ sont inférieurs à $s_\gamma w$. De plus,

$$s_\gamma s_\alpha w = s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w \mod W_\lambda$$

$$s_\gamma s_\beta w = s_\beta s_\gamma w \mod W_\lambda,$$

l'intersection des supports de $s_\gamma(\alpha)$ et β est vide et $\langle s_\gamma(\alpha), \beta_1 \rangle < 0$.

Montrons que les éléments $s_\gamma s_\alpha w$, $s_\gamma s_\beta w$ et $s_\gamma w$ vérifient les hypothèses du lemme. Comme γ est orthogonale au support de β, il en résulte que les suites de diviseurs entre $X(w)$ et $X(s_\beta w)$ sont en bijection avec les suites de diviseurs entre $X(s_\gamma w)$ et $X(s_\gamma s_\beta w)$. D'après ce qui précède, il n'existe donc qu'une seule suite de diviseurs entre $X(s_\gamma w)$ et $X(s_\gamma s_\beta w)$, en particulier $X(s_{\beta_1} s_\gamma w)$ est l'unique diviseur de $X(s_\gamma w)$ qui contient $X(s_\gamma s_\beta w)$.

De même, si $s_\gamma s_\alpha w \leq s_{\beta'} s_\gamma w < s_\gamma w$, alors, ou bien $s_{\beta'} s_\gamma w = s_\gamma s_\alpha w$, dans ce cas il n'y a rien à prouver, ou bien $s_\gamma s_\alpha w$ et $s_{\beta'} s_\gamma w$ sont incomparables. Dans ce cas, $X(s_{s_\gamma(\beta')} w)$ est un diviseur de $X(w)$ qui contient $X(s_\alpha w)$. Donc le support de $s_\gamma(\beta')$ n'est pas orthogonale au support de β, mais γ est orthogonal au support de β, d'où les supports de β est β' ne sont pas orthogonaux. Par conséquent, par hypothèse de récurrence, on obtient

$$X(s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w) \cap X(s_\beta s_\gamma w) = X(s_{s_\gamma(\alpha)} s_\beta s_\gamma w) \cup X(s_\beta s_{s_\gamma(\alpha)} s_\gamma w).$$

Ainsi, en utilisant les mêmes arguments que dans le premier cas, on montre que tout η inférieur à $s_\alpha w$ et à $s_\beta w$ est inférieur à $s_\alpha s_\beta w$ ou à $s_\beta s_\alpha w$. □

Corollaire 2.7. — *Soient τ, τ', $w \in W^\lambda$ tels que :*

a) les supports de (τ, w) et (τ', w) sont d'intersection vide ;

b) il existe un unique couple $(\gamma, \gamma') \in \mathrm{supp}(\tau, w) \times \mathrm{supp}(\tau', w)$ tel que $\langle \gamma, \gamma'^\vee \rangle \neq 0$.

Alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ deux suites de racines positives et deux entiers k et l tels que :

(i) *$\alpha' = \alpha_r + \cdots + \alpha_{l+1}$ et $\beta' = \beta_s + \cdots + \beta_{k+1}$ sont deux racines positives non orthogonales et aussi $\tau = s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1} w$ et $\tau' = s_{\beta_s} \cdots s_{\beta_1} w$ avec $\ell(\tau) = \ell(w) + r$ et $\ell(\tau') = \ell(w) + s$;*

(ii) *on a les trois égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
X(\tau) \cap X(\tau') &= X(s_{\alpha'} s_{\beta'} \kappa) \cup X(s_{\beta'} s_{\alpha'} \kappa) \\
\tau(\lambda) + \tau'(\lambda) &= w(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_{\alpha'}\kappa(\lambda) + s_{\beta'} s_{\alpha'} \kappa(\lambda)\big) \qquad (2.17) \\
\tau(\lambda) + \tau'(\lambda) &= w(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_{\beta'}\kappa(\lambda) + s_{\alpha'} s_{\beta'} \kappa(\lambda)\big) \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

où $\kappa = s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1} s_{\beta_k} \cdots s_{\beta_1} w = s_{\beta_k} \cdots s_{\beta_1} s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1} w$.

Démonstration. — Considérons toutes les chaînes maximales entre w et τ. Pour chaque chaîne u, on considère $w' \in u$ de longueur minimale tel que les supports de (w, w') et (τ', w) sont orthogonaux, $l_u = \ell(w) - \ell(w')$ et $l = max_u\{l_u\}$. De même, en considérant les chaînes entre w et τ', on définit les entiers k_u et k. Soient u et u' deux chaînes maximales telles que $k = k_{u'}$, $l = l_u$,

$$u = (w > s_{\alpha_1}w > \cdots > w_l = s_{\alpha_l}\cdots s_{\alpha_1}w > \cdots > \tau),$$

et

$$u' = (w > s_{\beta_1}w > \cdots > w'_k = s_{\beta_k}\cdots s_{\beta_1}w > \cdots > \tau').$$

D'après le corollaire 2.4, $X(w_l) \cap X(\tau') = X(s_{\alpha_l}\cdots s_{\alpha_1}\tau')$ et

$$w_l(\lambda) + \tau'(\lambda) = w(\lambda) + s_{\alpha_l}\cdots s_{\alpha_1}\tau'(\lambda). \tag{2.19}$$

De même, on a $X(w'_k) \cap X(\tau) = X(s_{\beta_k}\cdots s_{\beta_1}\tau)$ et

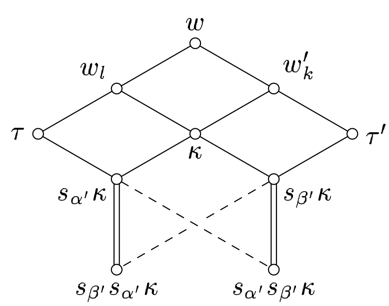
$$w'_k(\lambda) + \tau(\lambda) = w(\lambda) + s_{\beta_k}\cdots s_{\beta_1}\tau(\lambda). \tag{2.20}$$

Comme $X(w_l)$ contient $X(\tau)$ et $X(w'_k)$ contient $X(\tau')$, alors

$$\begin{aligned} X(\tau)\cap X(\tau') &= \big(X(\tau)\cap X(w'_k)\big)\cap\big(X(\tau')\cap X(w'_l)\big) \\ &= X(s_{\beta_k}\cdots s_{\beta_1}\tau)\cap X(s_{\alpha_l}\cdots s_{\alpha_1}\tau'). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Remarquons que pour $\kappa = s_{\beta_k}\cdots s_{\beta_1}s_{\alpha_l}\cdots s_{\alpha_1}w$, on a

$$s_{\beta_s}\cdots s_{\beta_{k+1}}\kappa = s_{\alpha_l}\cdots s_{\alpha_1}\tau' \qquad \text{et} \qquad s_{\alpha_r}\cdots s_{\alpha_{l+1}}\kappa = s_{\beta_k}\cdots s_{\beta_1}\tau$$



Il en résulte que $X(\tau)\cap X(\tau') = X(s_{\alpha_r}\cdots s_{\alpha_{l+1}}\kappa)\cap X(s_{\beta_s}\cdots s_{\beta_{k+1}}w)$.

De la maximalité des entiers k et l, on déduit que $\langle\alpha_{l+1}, \beta_{k+1}\rangle = -1$ (sinon β_{k+1} ou α_{l+1} est orthogonal au support de (τ, w) ou de (τ', w)). De plus, $X(s_{\alpha_{l+1}}\kappa)$ (resp. $X(s_{\beta_{k+1}}\kappa)$) est l'unique diviseur de $X(\kappa)$ qui contient $X(s_{\alpha_r}\cdots s_{\alpha_{l+1}}\kappa)$ (resp. $X(s_{\beta_s}\cdots s_{\beta_{k+1}}w)$). À l'aide du corollaire 2.6, on voit qu'il n'existe qu'une seule suite de diviseurs entre $X(\kappa)$ et $X(s_{\alpha_r}\cdots s_{\alpha_{l+1}}\kappa)$ (resp. $X(s_{\beta_s}\cdots s_{\beta_{k+1}}\kappa)$).

Grâce au lemme 2.12, on constate que α' et β' sont des racines positives, puis on conclut par le lemme 2.16 et l'égalité (2.21) pour obtenir

$$X(\tau)\cap X(\tau') = X(s_{\alpha'}s_{\beta'}\kappa)\cup X(s_{\beta'}s_{\alpha'}\kappa).$$

Par ailleurs, on a :

$$s_{\alpha'}\kappa(\lambda) + s_{\beta'}\kappa(\lambda) = \kappa(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_{\alpha'}\kappa(\lambda) + s_{\beta'}s_{\alpha'}\kappa(\lambda)\big) \tag{2.22}$$

$$s_{\alpha'}\kappa(\lambda) + s_{\beta'}\kappa(\lambda) = \kappa(\lambda) + \frac{1}{2}\big(s_{\beta'}\kappa(\lambda) + s_{\alpha'}s_{\beta'}\kappa(\lambda)\big). \tag{2.23}$$

Notons que par le choix de w_l et w'_k, on a que le $\mathrm{supp}(w_l, \kappa)$ est orthogonal au $\mathrm{supp}(w_l, \tau)$ et que $\mathrm{supp}(w'_k, \kappa)$ est orthogonal au $\mathrm{supp}(w'_k, \tau')$, donc on a

$$\tau(\lambda) + \kappa(\lambda) = s_{\alpha'}\kappa(\lambda) + w_l(\lambda) \tag{2.24}$$

$$\tau'(\lambda) + \kappa(\lambda) = s_{\beta'}\kappa(\lambda) + w'_k(\lambda). \tag{2.25}$$

En additionnant (2.22), (2.24) et (2.19), ainsi que (2.23), (2.25) et (2.20), on obtient (2.17) et (2.18). $\square$

Lemme 2.17. — *Soient τ, τ' deux éléments incomparables et w un élément maximal pour τ et τ' tels que :*

(i) *l'intersection des supports de (τ, w) et (τ', w) est vide ;*

(ii) *toute racine positive α telle que $X(s_\alpha w)$ est un diviseur de $X(w)$ et $X(\tau)$ dans $X(s_\alpha w)$ (resp. $X(\tau')$ dans $X(s_\alpha w)$) est non orthogonale au support de (τ', w) (resp. non orthogonale au support de (τ', w)).*

Notons

$$\mathrm{supp}(\tau, w) = \bigcup_{i=1}^{r} I_i^{(w,\tau)} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{supp}(\tau', w) = \bigcup_{j=1}^{s} I_j^{(w,\tau')}$$

des décompositions en réunion disjointe des composantes connexes. Alors $r = s$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe un unique j tel que $I_i^{(w,\tau)}$ n'est pas orthogonale à $I_j^{(w,\tau')}$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que s'il existe une composante connexe dans le support de (τ, w) qui soit orthogonale au support de (τ', w), alors la condition (ii) n'est pas satisfaite.

On donne la preuve par récurrence sur $\ell(w)$. Si $\ell(w) \leq 3$, alors $\tau = s_\gamma w$ et $\tau' = s_{\gamma'} w$, où γ et γ' sont deux racines simples, dans ce cas le résultat est trivial.

Si $\ell(w) > 3$, alors il existe une racine simple γ vérifiant l'une des deux configurations suivantes :

1) il existe une racine positive α non simple telle que $X(\tau)$ dans $X(s_\alpha w)$ ou $X(\tau')$ dans $X(s_\alpha w)$, avec $X(s_\alpha w)$ un diviseur de $X(w)$ et γ dans le support de α ;

2) $\tau \leq s_\gamma w < w$ ou $\tau' \leq s_\gamma w < w$.

Dans (1), grâce au lemme 2.6, on sait que $\langle w(\lambda), \gamma^\vee \rangle = -2$. Comme λ est classique et que γ n'est pas dans le support de (τ', w), il s'ensuit que γ est orthogonale au support de (τ', w). De l'hypothèse (ii), on voit que $s_\gamma w$ n'est pas supérieur à τ. Du lemme 2.1, on déduit que $s_\gamma \tau < s_\gamma w$ et $s_\gamma \tau' < s_\gamma w$, d'où

$$\mathrm{supp}(s_\gamma \tau', s_\gamma w) = \mathrm{supp}(\tau', w) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{supp}(s_\gamma \tau, s_\gamma w) \supseteq \mathrm{supp}(\tau, w) \setminus \{\gamma\},$$

et donc, l'intersection des supports de $(s_\gamma \tau', s_\gamma w)$ et $(s_\gamma \tau, s_\gamma w)$ est vide.

Comme on à montré dans la preuve du lemme 2.16, les éléments $s_\gamma\tau$, $s_\gamma\tau'$ et $s_\gamma w$ vérifient les hypothèses du lemme. Par conséquent, on conclut par hypothèse de récurrence.

Si tout diviseur de $X(w)$ contenant $X(\tau)$ ou $X(\tau')$ est associé à une racine simple. alors, on est dans le second cas

a) si toute composante connexe est réduite à une racine simple, alors, du fait que λ le cas classique, on voit que si trois diviseurs d'une variété de Schubert associés à des racines simples, alors l'une des trois racines est orthogonale aux deux autres (*voir* lemme 2.13). Ainsi par l'hypothèse (ii), on conclut qu'il y a une bijection entre les racines simples du supports de (τ, w) et celles du support de (τ', w).

b) il existe une composante connexe non réduite à une racine simple, ainsi que γ une racine simple dans cette composante telle que $s_\gamma w < w$ et on peut supposer que $\tau \leq s_\gamma w < w$. Dans ce cas les éléments τ, $s_\gamma\tau'$ et $s_\gamma w$ satisfont (i) et (ii).

En effet, (i) est vérifié puisque, d'après le lemme 2.14 la racine γ n'est pas dans le support de $(s_\gamma w, \tau)$; de plus, puisque γ n'est pas dans le support de (w, τ'), on voit facilement que le support de $(s_\gamma w, s_\gamma\tau')$ est la réunion du support de (w, τ') et γ.

Montrons (ii). Soit $X(s_\beta s_\gamma w)$ un diviseur de $X(s_\gamma w)$ qui contient $X(\tau)$. Si le support de β n'est pas orthogonal à γ, alors du fait que γ est un élément du support de $(s_\gamma w, s_\gamma\tau')$, il s'ensuit que le support de β n'est pas orthogonal au support de $(s_\gamma w, s_\gamma\tau')$.

Sinon, $\langle\beta, \gamma^\vee\rangle = 0$. Dans ce cas $X(s_\beta w)$ est un diviseur de $X(w)$ et il contient $X(\tau)$. Donc, par l'hypothèse (ii) sur τ, τ' et w, on déduit que le support de β n'est pas orthogonal au support de (τ', w), et comme ce dernier est contenu dans le support de $(s_\gamma w, s_\gamma\tau')$, on déduit que β n'est pas orthogonale au support de $(s_\gamma w, s_\gamma\tau')$.

Supposons que $X(s_\beta s_\gamma w)$ est un diviseur de $X(s_\gamma w)$ et qu'il contient $X(s_\gamma\tau')$. Étant donné que $s_\beta s_\gamma w \geq s_\gamma\tau'$, il vient que $X(\tau')$ est contenue dans $X(s_{s_\gamma(\beta)}w)$ qui est un diviseur de $X(w)$, par hypothèse sur l'intersection des supports, on voit que γ n'est pas dans le support de $s_\gamma(\beta)$.

Si γ n'est pas dans le support de β, alors γ est orthogonale au support de β, ce qui nous permet de conclure par (ii) que β n'est pas orthogonale au support de $(s_\gamma w, \tau)$.

Si γ est dans le support de β, comme on a choisi γ dans une composante connexe du support de (w, τ) non réduite à une racine simple, alors il existe donc une racine simple dans le support de $(s_\gamma w, \tau)$ non orthogonal à γ. De là, il en résulte que le support de β est non orthogonal au support de $(s_\gamma w, \tau)$.

Ceci montre donc que τ, $s_\gamma\tau'$ et $s_\gamma w$ vérifient (i) et (ii). Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que les deux supports ont le même nombre de composantes connexes et que $I_i^{(s_\gamma w, \tau)}$ est non orthogonal à $I_j^{(s_\gamma w, s_\gamma\tau')}$ si et seulement si $i = j$.

Soit $I_{i_0}^{(s_\gamma w, s_\gamma\tau')}$ l'unique composante contenant γ, donc

$$\mathrm{supp}(\tau, w) = \bigcup_{i \neq i_0} I_i^{(s_\gamma w, \tau)} \bigcup \big(I_{i_0}^{(s_\gamma w, \tau)} \cup \{\gamma\}\big)$$

et

$$\mathrm{supp}(\tau', w) = \bigcup_{i \neq i_0} I_i^{(s_\gamma w, s_\gamma\tau')} \bigcup \big(I_{i_0}^{(s_\gamma w, s_\gamma\tau')} \setminus \{\gamma\}\big).$$

Pour conclure, il suffit de voir que $I_{i_0}^{(s_\gamma w, s_\gamma \tau')} \setminus \{\gamma\}$ est connexe. En effet, comme λ est classique, $X(s_\gamma w)$ est un diviseur de $X(w)$, et γ n'appartient pas au support de (w, τ'), on déduit qu'il n'existe qu'une seule racine simple dans $I_{i_0}^{(s_\gamma w, s_\gamma \tau')}$, qui ne soit pas orthogonale à γ, ce qui implique que $I_{i_0}^{(s_\gamma w, s_\gamma \tau')} \setminus \{\gamma\}$ est connexe. $\square$

Preuve de la proposition 2.3. — Comme dans le corollaire 2.7, soient w' et w'' minimaux tels que

$$X(\tau) \subset X(w') \subset X(w) \supset X(w^{''}) \supset X(\tau')$$

et tels que le support de (w, w') est orthogonal au support de (w, τ'), et le support de $(w^{''}, w)$ est orthogonal au support de (w, τ).

Du corollaire 2.4, il vient que les intersections suivantes sont irréductibles

$$X(w') \cap X(w^{''}) = X(\kappa),$$

$$X(w') \cap X(\tau') = X(\delta'),$$

et

$$X(w^{''}) \cap X(\tau) = X(\delta).$$

Par le choix de w' et $w^{''}$, les éléments δ, δ' et κ vérifient les hypothèses du lemme 2.17. De là, on déduit qu'il existe $\delta_1, \ldots, \delta_r, \delta'_1, \ldots, \delta'_r$ dans W^λ tels que $\delta \leq \delta_i \leq \kappa$, $\delta' \leq \delta'_i \leq \kappa$ pour $i = 1, \ldots, r$ et que

$$X(\delta) = \bigcap_{i=1}^{r} X(\delta_i) \qquad \text{et} \qquad X(\delta') = \bigcap_{i=1}^{r} X(\delta'_i).$$

Donc, $X(\delta \cap X(\delta') = \bigcap_{i=1}^{r} \big(X(\delta_i) \cap X(\delta'_i)\big)$, avec δ_i et δ'_i vérifiant les hypothèses du corollaire 2.7 pour tout i, il en résulte que

$$X(\delta) \cap X(\delta') = \bigcap_{i=1}^{r} \big(X(\theta_i) \cup X(\theta'_i)\big).$$

Comme le support de (κ, θ_i) est orthogonal aux supports de (κ, θ_j) et (κ, θ'_j) pour tout $j \neq i$, il vient que $X(\delta) \cap X(\delta')$ est la réunion de 2^r composantes connexes.

Chapitre 3

Déformation des variétés de Schubert

3.1 Rappels

Nous commençons par rappeler la méthode exposée dans [11] (chap.15) pour la construction des déformations plates.

Soit $R = \mathbb{k}[x_1, \dots , x_n]$, où $\mathbb{k}$ est un corps algébriquement clos, et soit ψ une fonction de poids de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{Z}$ (*i.e.* ψ est la restriction d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$). À ψ, on associe un ordre monomial sur R défini par

$$x^u > x^v \iff \psi(u) > \psi(v) \qquad \text{où } u, v \in \mathbb{Z}^n.$$

Soit g un élément de R, on définit le terme initial de g, qu'on note $\mathrm{in}_\psi(g)$ de la manière suivante : si

$$g = \sum a_u x^u \qquad \text{et} \qquad b_g = \min\{\psi(u) \mid a_u \neq 0\},$$

on pose $\mathrm{in}_\psi(g) = \sum_{\psi(u)=b_g} a_u x^u$.

Pour tout idéal J de R, on définit $\mathrm{In}_\psi(J)$ l'idéal initial de J relativement à ψ, comme étant l'idéal engendré par les éléments $\mathrm{in}_\psi(g)$, g dans J. Considérons $R[t]$ la $\mathbb{k}[t]$-algèbre engendrée par R. Désignons par $\tilde{g}$ l'élément de $R[t]$, donné par

$$\tilde{g}(t, x_1, \dots , x_n) = t^{b_g} g(t^{\psi(x_1)}x_1, \dots , t^{\psi(x_n)}x_n),$$

et considérons l'idéal $\tilde{J}$, engendré par les éléments $\tilde{g}$, pour g dans J. Rappelons le théorème suivant (*voir* [11]) :

Théorème 3.1. — *Pour tout idéal J de R, la $\mathbb{k}[t]$-algèbre $R[t]/\tilde{J}$ est libre, en particulier c'est un $\mathbb{k}[t]$-module plat. De plus*

$$R[t]/\tilde{J} \otimes_{\mathbb{k}[t]} \mathbb{k}[t, t^{-1}] \cong R/J[t, t^{-1}]$$

et

$$R[t]/\tilde{J} \otimes_{\mathbb{k}[t]} \mathbb{k}[t]/(t) \cong R/\mathrm{In}_\psi(J).$$

Donc $R[t]/\tilde{J}$ est une famille plate sur $\mathbb{k}[t]$, la fibre en $t = 0$ est $R/\mathrm{In}_\psi(J)$ et la fibre en $t \neq 0$ est isomorphe à R/J.

Soit G un groupe algébrique semi-simple, B un sous-groupe de Borel et X^+ la chambre dominante relative à B. Considérons λ un poids dominant, P_λ le sous-groupe parabolique associé à λ et W^λ le quotient du groupe de Weyl de G par celui de P_λ.

Considérons w dans W^λ et désignons par p le nombre des classes d'équivalence des chaînes maximales dans $\{\tau \leq w\}$ (voir chap.1, section 1). Rappelons qu'à chaque classe d'équivalence u_i, on a associé un treillis distributif $\mathcal{U}_i^\lambda$, ensuite, on a construit une variété torique projective $X(\mathcal{U}_i^\lambda)$ (voir chap.1, section 2). Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3.2. — *Soit G un groupe algébrique semi-simple et λ un poids classique. Alors pour tout w dans W^λ, il existe une famille plate sur $\Bbbk[t]$ telle que la fibre en $(t-a)$, $a \neq 0$ est isomorphe à $X(w)$ et la fibre en (t) est la variété $Y_w = \bigcup_{i=1}^{p} X(\mathcal{U}_i^\lambda)$.*

Comme corollaire de ce théorème, on obtient une extension du résultat obtenu par Lakshmibai et Goncuila dans le cas minuscule.

Corollaire 3.1. — *Soit w un élément de W^λ, vérifiant la propriété suivante : pour tout $\tau \leq w$ et α une racine positive, on a*

$$X(s_\alpha \tau) \text{ est un diviseur de } X(\tau) \Longrightarrow \alpha \text{ est une racine simple.}$$

Alors $X(w)$ se déforme en une variété torique. En particulier, si W^λ est un treillis distributif, alors toute variété de Schubert dans G/P_λ se déforme en une variété torique.

Démonstration. — On a vu dans la remarque 2.2, que la propriété énoncée dans ce corollaire implique que $\{\tau \leq w\}$ est un treillis satisfaisant la propriété d'orthogonalité, ainsi par la proposition 1.1, on voit que $\{\tau \leq w\}$ est un treillis associé à une classe d'équivalence de chaînes maximales, et on conclut par le théorème 3.2. □

Remarque 3.1. — *L'ensemble des poids domimants tels que tout élément de W^λ satisfait les hypothèses du précédent corollaire a été classifié par Stembridge dans [41]. Cet ensemble des poids est égal à l'ensemble des poids minuscules, les poids ω_1 et ω_n dans les cas B_n et C_n et les deux poids fondamentaux du cas G_2, les notations sont celles de [4]. Soit λ un poids quasi-minuscules. Grâce à [25] ou [21], on sait que tout élément w dans W^λ tel que $\ell(w) \leq \frac{1}{2}(\dim G/P_\lambda - 1)$, vérifie les hypothèses du corollaire.*

Le reste de ce chapitre est consacré à la preuve du théorème 3.2.

3.2 Preuve du théorème

Désignons par L_λ le fibré en droite $G \times_{P_\lambda} \Bbbk_\lambda$ et $G/P_\lambda \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$ le plongement projectif correspondant. Considérons w un élément de W^λ et soit $V_\lambda(w)$ le module de Demazure associé à w. Par abus de notation, on note aussi L_λ la restriction de L_λ à $X(w)$. Les résultats suivants ont été démontrés par plusieurs auteurs (*voir par exemple* [2, 23, 35])

Théorème 3.3. — (i) $V_\lambda^* \cong H^0\big(X(w), L_\lambda\big)$;

(ii) $H^i\big(X(w), L_\lambda\big) = 0$, *pour* $i \geq 1$.

Soit $\Gamma(w) = \bigoplus_{n\geq 0} V^*_{n\lambda}(w)$ l'anneau des coordonnées homogènes de $X(w)$. Il est bien connu (*voir* [22, 39]) que le noyau de l'homomorphisme surjectif

$$R^\lambda_w = \bigoplus_{n\geq 0} S^n V^*_\lambda(w) \longrightarrow \Gamma(w)$$

est engendré par des éléments de degré 2.

Rappelons que $\mathbb{B}_w(\lambda)$ désigne l'ensemble des L-S chemins de type λ, $\pi = (\tau_1, \dots)$ tel que $\tau_1 \leq w$. Après avoir introduit le modèle des chemins dans [29, 31], dans [30] Peter Littelmann a construit une base du dual $V^*_\lambda(w)$ indexée par les chemins de $\mathbb{B}_w(\lambda)$, notons les éléments de cette base par les symboles p_π pour π dans $\mathbb{B}_w(\lambda)$. Dans [24], on trouve le résultat suivant :

Théorème 3.4. — *Le noyau de l'homomorphisme surjectif* $R^\lambda_w \to \Gamma(w)$, $p_\pi \mapsto p_\pi$ *est engendré par des éléments de degré 2, de la forme*

$$g_{\pi,\pi'} = p_\pi p_{\pi'} - \sum_{\eta*\eta' \text{ standard}} a_{\eta*\eta'} p_\eta p_{\eta'} \qquad \text{où } \pi * \pi' \text{ est non standard.}$$

L'énoncé de ce théorème n'est pas complet, nous le formulerons plus loin sous sa forme la plus précise.

Soit $\mathbb{B}(\lambda)$ l'ensemble des chemins de L-S de type λ et N un entier positif.

Définition 3.1. — *Soit* e_π, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ *une base canonique de* $\mathbb{Z}^{\sharp\mathbb{B}(\lambda)}$, *pour tout chemin trivial* $\pi = (\tau, \tau)$, *on note* e_τ *au lieu de* $e_{(\tau,\tau)}$. *On définit la fonction de poids* ψ *de* $\mathbb{Z}^{\sharp\mathbb{B}(\lambda)}$ *dans* $\mathbb{Z}$ *par :*

$$\psi(e_\tau) = \sum_{\alpha\in\Delta} N^{n^\tau_\alpha} \qquad \text{pour } \tau(\lambda) = \lambda - \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} n^\tau_\alpha \alpha$$

$$\psi(e_\pi) = \sum_{i=1}^{r} (a_i - a_{i-1})\psi(e_{\tau_i}) \qquad \text{où } \pi = (\tau_1, \dots, \tau_r, 0, a_1, \dots, 1),$$

où on rappelle que Δ *est l'ensemble des racines simples. Dans toute la suite, on écrira* $\psi(\pi)$ *à la place de* $\psi(e_\pi)$.

Soit u une classe d'équivalence de chaînes, $\mathcal{U}^\lambda$ le treillis distributif associé et $\mathbb{U}^\lambda$ l'ensemble des L-S chemins de type λ à support dans $\mathcal{U}^\lambda$. Dans le chapitre 1, section 2, nous avons associé à tout enchaînement $\pi * \pi'$ de chemins dans $\mathbb{U}^\lambda$ un chemin standard $\pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'$.

Proposition 3.1. — *Supposons que* λ *est un poids classique et* π, π', η, η' *des L-S chemins de type* λ, *tels que :*

(i) $\pi * \pi'$ *non standard ;*

(ii) $\eta * \eta'$ *standard ;*

(iii) *le coefficient* $a_{\eta*\eta'}$ *de* $p_\eta p_{\eta'}$ *dans l'element* $g_{\pi,\pi'}$ *est non nul. Alors pour* N *assez grand, on a*

$$\psi(\pi) + \psi(\pi) \leq \psi(\eta) + \psi(\eta'),$$

et on a égalité si et seulement s'il existe une classe d'équivalence de chaînes u telle que π, π', η, η' *appartiennent à l'ensemble* $\mathbb{U}^\lambda$ *et* $\eta = \pi \vee \pi'$, $\eta' = \pi \wedge \pi'$. *De plus, dans ce cas on a :* $a_{\eta*\eta'} = 1$.

Avec cette proposition, on voit que l'idéal initial associé à celui de la variété de Schubert $X(w)$ est engendré par les relations

$$\begin{cases} p_\pi p_{\pi'} - p_{\pi\vee\pi'} p_{\pi\wedge\pi'} & \text{s'il existe } \mathbb{U}^\lambda \text{ qui contient } \pi \text{ et } \pi' \\ p_\pi p_{\pi'} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le chapitre 1, nous avons vu que cet idéal est associé à la variété projective

$$Y_w = \bigcup_{i=1}^{p} X(\mathcal{U}_i^\lambda).$$

Donc le théorème 3.1 et la proposition 3.1 impliquent le théorème 3.2. Par conséquent pour terminer la preuve du théorème principal, il suffit de montrer la proposition précédente.

3.2.1 Bases des représentations

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Notons $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble des racines simples et X le réseau des poids de $\mathfrak{g}$. Désignons par $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{Q}$ et $\mathrm{U}_\mathbb{Z}$ la forme de Kostant définie sur $\mathbb{Z}$. Soit X_{α_i}, Y_{α_i}, H_{α_i} les générateurs de U, et $X_{\alpha_i}^{(n)} = \frac{X_{\alpha_i}^n}{n!}$ (resp. $Y_{\alpha_i}^{(n)} = \frac{Y_{\alpha_i}^n}{n!}$) les générateurs de $\mathrm{U}_\mathbb{Z}^+$ (resp. $\mathrm{U}_\mathbb{Z}^-$).

On considère un poids dominant λ et on suppose que $\lambda = n\omega$, ω un poids classique.

Définition 3.2. — *Soit* $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, a_1, \ldots, 1)$ *un L-S chemin de type* λ. *Une expression* $\tau_1 = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ *est dite* compatible *avec* π *si :*

(i) $\ell(s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r}) = \ell(\tau_1) - i + 1$ *pour* $i = 1, \ldots, r$ *;*

(ii) $\{\tau_1, \ldots, \tau_s\} \subset \{s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}, \ldots, s_{\beta_r}, id\}$.

La condition (i) implique que $X(s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r})$ est un diviseur de $X(s_{\beta_{i-1}} \cdots s_{\beta_r})$. Dans ce cas, les lemmes 2.5 et 2.4 nous disent qu'ils existent $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ des racines simples distinctes telles que $\beta_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$ et

$$\langle \alpha_i, \alpha_{i+1}^\vee \rangle = -1 \qquad \text{pour tout } i \leq s-1.$$

Et du lemme 2.6, on sait que $X(s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r})$ contient un diviseur double associé à α_1 ou α_t.

Définition 3.3. — *Fixons* v_λ *un vecteur de plus haut poids* λ *dans* V_λ, $v_{w_0(\lambda)}$ *un vecteur de poids* $w_0(\lambda)$ *et* $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, \ldots, a_s = 1)$ *un L-S chemin de type* λ.

1) *pour* $\tau_1 = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ *une expression compatible avec* π, *on définit :*

(i) *la suite des entiers* $S(\pi) = (n_1, \dots, n_r)$, *où* $n_j = \langle s_{\beta_{j+1}} \cdots s_{\beta_r}(\lambda), \beta_j^\vee \rangle a_k$, *pour* $\tau_k > s_{\beta_{j+1}} \cdots s_{\beta_r} \geq \tau_{k+1}$, $1 \leq j \leq r$ *et* $\tau_{s+1} = \mathrm{Id}$ *;*

(ii) *pour* $\beta_j = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$ *et* $\langle s_{\beta_j} \cdots s_{\beta_r}(\lambda), \alpha_1^\vee \rangle = -2$, *on considère l'opérateur*

$$Y_{\pi,j}^{(n)} = Y_{\alpha_1}^{(n)} \cdots Y_{\alpha_t}^{(n)}$$

et on définit le vecteur $v_\pi = Y_{\pi,1}^{(n_1)} \cdots Y_{\pi,r}^{(n_r)} v_\lambda$.

2) *De la même façon, pour* $w_0 = s_{\beta_r} \cdots s_{\beta_1} \tau_s$, $\ell(s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_1} \tau_s) = \ell(\tau_s) + i$ *et*

$$\{\tau_1, \dots, \tau_s\} \subset \{s_{\beta_r} \cdots s_{\beta_1} \tau_s, \dots, s_{\beta_1} \tau_s, \tau_s\},$$

on définit :

(i) *la suite des entiers*

$$S'(\pi) = (m_1, \dots, m_r),$$

où $m_j = \langle s_{\beta_{j-1}} \cdots s_{\beta_1}(\lambda), \beta_j^\vee \rangle (1 - \ a_{k-1}\ )$, *pour* $\tau_{k-1} > s_{\beta_{j-1}} \cdots s_{\beta_1} \geq \tau_k$, $1 \leq j \leq r$ *et* $\tau_0 = w_0$ *;*

(ii) *pour* $\beta_j = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$ *et* $\langle s_{\beta_j} \cdots s_{\beta_r}(\lambda), \alpha_1^\vee \rangle = -2$, *on considère l'opérateur*

$$X_{\pi,j}^{(n)} = X_{\alpha_t}^{(n)} \cdots X_{\alpha_1}^{(n)}$$

et on définit le vecteurs $u_\pi = X_{\pi,1}^{(m_1)} \cdots X_{\pi,r}^{(m_r)} v_{w_0(\lambda)}$.

Remarque 3.2. — *Soulignons que, pour tout* i, *le chemin*

$$\pi_i = (s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r}, \tau_{k+1}, \dots, \tau_s, 0, a_k, \dots, 1),$$

où $\tau_k \geq s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r} > \tau_{k+1}$ *et* $\pi_i = (s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r}, 0, 1)$ *si* $s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_r} \leq \tau_s$, *est un L-S chemin de type* λ *et par construction, on a :* $v_{\pi,i} = Y_{\pi,i}^{(n_i)} v_{\pi_{i+1}}$.

De même, on remarque que le chemin

$$\pi^i = (\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_1} \tau_s, 0, a_1, \dots, a_{k-1}, 1)$$

où $\tau_{k-1} > s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_1} \geq \tau_k$ *et* $\pi^i = (s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_1} \tau_s, 0, 1)$, *est un L-S chemin de type* λ, *de plus* $u_{\pi^i} = X_{\pi,i}^{(m_i)} u_{\pi^{i+1}}$.

Lemme 3.1. — *Soit* λ *un poids classique. Alors, les vecteurs extrémaux* $v_{(\tau,0,1)}$ *dans* V_λ *sont indépendants du choix des expressions compatibles.*

Remarquons que dans le cas où l'ensemble des expressions compatibles est réduit au expressions réduites, ce lemme est une conséquence directe de l'identité de Verma.

Démonstration. — Fixons une expression réduite $\tau = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ et considérons le vecteur $v_\tau = Y_{i_1}^{(n_1)} \cdots Y_{i_r}^{(n_r)}$. D'après l'identité de Verma, le vecteur v_τ ne dépend pas du choix de l'expression réduite. Soit $s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ une expression compatible avec le chemin trivial $(\tau, 0, 1)$, et supposons que $\beta_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$. On utilise deux récurrences une sur r et une sur t pour montrer que $v_{(\tau,0,1)} = v_\tau$.

Si $r = 1$, alors β_1 est simple et s_{β_1} est l'unique expression compatible, donc il n'y a rien à démontrer.

Supposons que $r > 1$ et que β_1 n'est pas simple. Par hypothèse de récurrence sur r, on a $v_{(s_{\beta_1}\tau,0,1)} = v_{s_{\beta_1}\tau}$. Par définition du vecteur $v_{(\tau,0,1)}$, on a

$$v_{(\tau,0,1)} = Y_{\alpha_1}^{(n_1)} \cdots Y_{\alpha_t}^{(n_1)} v_{s_{\beta_1}\tau}.$$

Procèdons par récurrence sur t. Si $t = 1$, alors β_1 est une racine simple, dans ce cas, le résultat est une conséquence du fait que le vecteur v_τ est indépendant du choix de l'expression réduite considérée pour sa construction. Si $t > 1$, alors grâce au lemme 2.3, on sait que $\langle \tau(\omega), \beta_1^\vee \rangle = -1$. Du résultat de la proposition 2.1 et de l'identité de Verma, on déduit que

$$v_{s_{\beta_1}\tau} = Y_{\alpha_1} v_{s_{\alpha_1} s_{\beta_1}\tau},$$

ce qui implique que

$$v_{(\tau,0,1)} = Y_{\alpha_1} Y_{\alpha_2} Y_{\alpha_1} Y_{\alpha_3} \cdots Y_{\alpha_t} v_{s_{\alpha_1} s_{\beta_1}\tau}.$$

Rappelons aussi que dans cette situation, on a la relation de Serre :

$$Y_{\alpha_1}^{(2)} Y_{\alpha_2} - Y_{\alpha_1} Y_{\alpha_2} Y_{\alpha_1} + Y_{\alpha_1} Y_{\alpha_2}^{(2)} = 0,$$

par conséquent

$$v_{(\tau,0,1)} = Y_{\alpha_1}^{(2)} Y_{\alpha_2} Y_{\alpha_3} \cdots Y_{\alpha_t} v_{s_{\alpha_1} s_{\beta_1}\tau} + Y_{\alpha_2} Y_{\alpha_3} \cdots Y_{\alpha_t} Y_{\alpha_1}^{(2)} v_{s_{\alpha_1} s_{\beta_1}\tau}.$$

Comme $\langle s_{\beta_1}\tau(\lambda), \alpha_1^\vee \rangle = 1$, le deuxième terme est nul. Par hypothèse de récurrence et la proposition 2.1, le premier terme est égal à $Y_{\alpha_1}^{(2)} v_{s_{\alpha_1}\tau}$, mais puisque $\langle s_{\alpha_1}\tau(\lambda), \alpha_1^\vee \rangle = 2$, on a $v_{(\tau,0,1)} = v_\tau$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 3.2. — *Pour tout poids domimant $\lambda = n\omega$, où ω est un poids classique, les vecteurs extrémaux $v_{(\tau,0,1)}$ sont indépendants du choix des expressions compatibles.*

Démonstration. — Considérons le plongement de V_λ dans $V_\omega^{\otimes n}$ et soit $\tau = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ une expression compatible. Pour distinguer les vecteurs de V_λ de ceux de V_ω, notons u_τ ceux de V_ω. Comme dans le lemme précédent, par hypothèse de récurrence sur r, on peut supposer que $v_{(s_{\beta_1}\tau,0,1)} = u_{s_{\beta_1}\tau}^{\otimes n}$. Si β_1 est simple, alors le résultat découle de l'identité de Verma. Sinon $n = |\langle \tau(\lambda), \beta_1^\vee \rangle|$ et par définition de $v_{(\tau,0,1)}$, on a

$$v_{(\tau,0,1)} = Y_{\alpha_1}^{(n)} \cdots Y_{\alpha_t}^{(n)} u_{s_{\beta_1}\tau}^{\otimes n}.$$

Ce qui induit que

$$\begin{aligned} v_{(\tau,0,1)} &= Y_{\alpha_1} \cdots Y_{\alpha_t} u_{s_{\beta_1}\tau} \otimes \cdots \otimes Y_{\alpha_1} \cdots Y_{\alpha_t} u_{s_{\beta_1}\tau} + \sum a_\nu v_\nu \\ &= u_\tau^{\otimes n} + \sum a_\nu v_\nu. \end{aligned}$$

Étant donné que le vecteur $u_\tau^{\otimes n}$ est dans V_λ, que $Y_{\alpha_1}^{(n)} \cdots Y_{\alpha_t}^{(n)} u_\tau^{\otimes n}$ est aussi dans V_λ et que le poids $\tau(\lambda)$ est de multiplicité 1, on déduit que $\sum a_\nu v_\nu = 0$ et que $v_{(\tau,0,1)} = u_\tau^{\otimes n}$.
□

Soient $\mathcal{C}$ la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $d_1, \dots, d_n$ des entiers minimaux tels que la matrice $(d_i c_{ij})$ est symétrique. Soient d le plus petit multiple commun des d_i et

$$\hat{d}_i = \frac{d}{d_i}, \qquad \gamma_i = \frac{\alpha_i}{d_i} \qquad \text{et } \gamma_i^\vee = d_i \alpha_i^\vee.$$

Considérons $\mathfrak{g}^t$, l'algèbre de Lie associée à $\mathcal{C}^t$, la transposée de $\mathcal{C}$; et rappelons que $\gamma_i, \gamma_i^\vee$ est une réalisation de $\mathcal{C}^t$. Soient $X_\mathbb{Q}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $X \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ et

$$X^t = \{\mu \in X_\mathbb{Q} \mid \forall\, i \ \langle \mu, \gamma_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\},$$

le réseau des poids de $\mathfrak{g}^t$.

Le groupe quantique $\mathrm{U}_q(\mathfrak{g}^t)$ associé à $\mathfrak{g}^t$ et défini sur le corps $\mathbb{Q}(q)$ est engendré par les éléments $E_{\gamma_i}, F_{\gamma_i}$ et $K_{\gamma_i}^{\pm 1}$. Rappelons les coefficients binômiaux

$$[n]_i = \frac{q^{\hat{d}_i n} - q^{-\hat{d}_i n}}{q^{\hat{d}_i} - q^{-\hat{d}_i}} \qquad \text{et} \qquad [n]_i! = [1]_i \cdots [n]_i$$

et considérons $\mathrm{U}_{q,\mathcal{A}}(\mathfrak{g}^t)$ la forme de Lusztig définie sur l'anneau des polynômes de Laurent $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, ainsi que $\mathrm{U}^+_{q,\mathcal{A}}$ et $\mathrm{U}^-_{q,\mathcal{A}}$ engendrées respectivement par les éléments $E_{\gamma_i}^{(n)} = \frac{E_{\gamma_i}^n}{[n]_i!}$ et $F_{\gamma_i}^{(n)} = \frac{F_{\gamma_i}^n}{[n]_i!}$.

Fixons l un entier divisible par $2d$ et soit $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par le $2l$-ième polynôme cyclotomique. Pour $\mathcal{R} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$, soient $\mathrm{U}_{q,\mathcal{R}} = \mathrm{U}_{q,\mathcal{A}}(\mathfrak{g}^t) \otimes_\mathcal{A} \mathcal{R}$, ainsi que $\mathrm{U}_\mathcal{R} = \mathrm{U}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{R}$.

Soit λ un poids dominant, rappelons que le module de Weyl M_λ est l'unique quotient simple du module de Verma associé à λ (voir [19]). Pour m_λ un vecteur de plus haut poids λ, soit $\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{A}}$ le $\mathcal{A}$-réseau $\mathrm{U}^-_{q,\mathcal{A}} m_\lambda$, et $\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}} = \mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{A}} \otimes_\mathcal{A} \mathcal{R}$. Considérons le sous-espace propre

$$\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\frac{d}{l}} = \bigoplus_{\mu \in \frac{l}{d} X} \mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}(\mu),$$

alors on a le résultat suivant (*voir* [30]) :

Théorème 3.5. — *L'application*

$$X_{\alpha_i}^{(n)} \mapsto E_{\gamma_i}^{(nl_i)}{}_{|\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\frac{d}{l}}}, \qquad Y_{\alpha_i}^{(n)} \mapsto F_{\gamma_i}^{(nl_i)}{}_{|\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\frac{d}{l}}}, \qquad \binom{H_{\alpha_i} + m}{n} \mapsto \begin{bmatrix} K_{\gamma_i}, ml_i \\ nl_i \end{bmatrix}_{|\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\frac{d}{l}}}$$

est une représentation de $\mathrm{U}_\mathcal{R}$ *dans* $\mathrm{End}(\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\frac{d}{l}})$*, où* $l_i = \frac{l d_i}{d}$.

Soient V_λ le module de Weyl de plus haut poids λ et $V_{\lambda,\mathcal{R}} = V_{\lambda,\mathbb{Z}} \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{R}$. Pour construire une base de la représentation V_λ, on utilise les injections

$$V_{\lambda,\mathcal{R}} \hookrightarrow \left(\mathrm{M}_{\frac{l}{d}\lambda,\mathcal{R}}\right)^{\frac{d}{l}} \hookrightarrow \left(\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\bigotimes \frac{l}{d}}\right)^{\frac{d}{l}} \hookrightarrow \mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\bigotimes \frac{l}{d}} \hookrightarrow \mathrm{M}_{\omega,\mathcal{R}}^{\bigotimes \frac{nl}{d}}. \tag{3.1}$$

où la première et la deuxième flèches sont des injections de $\mathrm{U}_\mathcal{R}$-modules, la troisième est l'inclusion de $\mathcal{R}$-modules et la quatrième est une injection de $\mathrm{U}_{q,\mathcal{R}}$-modules.

Fixons m_ω un vecteur de plus haut poids ω dans M_ω. Pour tout $\tau \in W^\lambda$, on fixe une expression réduite $\tau = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ et on note $n_j = \langle s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_r}(\omega), \gamma_{i_j}^\vee \rangle$.

Soit $m_\tau = F_{\gamma_{i_1}}^{(n_1)} \cdots F_{\gamma_{i_r}}^{(n_r)} m_\omega$ et b_τ l'unique vecteur dans $\mathrm{M}^*_{\omega,\mathcal{R}}$ de poids $-\tau(\omega)$ tel que $b_\tau(m_\tau) = 1$.

Pour tout $\pi = (\tau_1, \cdots, \tau_r, 0, a_1, \cdots, a_r = 1)$ un L-S chemin de type λ, tel que $a_i \frac{l}{d} \in \mathbb{Z}$ pour tout i, on définit respectivement dans $\mathrm{M}_{\omega,\mathcal{R}}^{\otimes \frac{nl}{d}}$ et $(\mathrm{M}^*_{\omega,\mathcal{R}})^{\otimes \frac{nl}{d}}$ les vecteurs

$$m^\pi = \underbrace{m_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes m_{\tau_1}}_{a_1 \frac{nl}{d}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{m_{\tau_r} \otimes \cdots \otimes m_{\tau_r}}_{(1-a_{r-1})\frac{nl}{d}}$$

et

$$b_\pi = \underbrace{b_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes b_{\tau_1}}_{a_1 \frac{nl}{d}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{b_{\tau_r} \otimes \cdots \otimes b_{\tau_r}}_{(1-a_{r-1})\frac{nl}{d}}.$$

Pour tout $w \in W^\lambda$, soit $V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w)$ le module de Demazure $V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w) = \mathrm{U}_\mathbb{Z}^+ v_w$ et $V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w)^{opp} = \mathrm{U}_\mathbb{Z}^- v_w$.

Rappelons que $\mathbb{B}_w(\lambda)$ est l'ensemble des L-S chemins $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, \ldots, 1)$ tels que $\tau_1 \leq w$ et soit $\mathbb{B}^w(\lambda)$ l'ensemble des L-S chemins tels que $\tau_s \geq w$.

Théorème 3.6. — *L'ensemble des vecteurs u_π (resp. v_π), π dans $\mathbb{B}(\lambda)$ tels que $\tau_1 \leq w$ (resp $\tau_s \geq w$) forme une base de $V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w)$ (resp.$V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w)^{opp}$).*

Notons que dans le cas λ classique les bases qu'on vient de définir coïncident avec celles données dans [26] et que dans le cas général ce théorème a été conjecturé par Lakshmibai.

Supposons que pour tout π, $\frac{l}{d} a_i$ est dans $\mathbb{Z}$ et considérons $V_{\lambda,\mathcal{R}}$ comme un $\mathrm{U}_\mathcal{R}$-sous-module de $\left(\mathrm{M}_{\omega,\mathcal{R}}^{\otimes n\frac{l}{d}}\right)^{\frac{d}{l}}$. Soit $\geq$ l'ordre sur les vecteurs propres m_ν de M_ω, donnés par

$$m_\mu \geq\ m_\nu \iff\ m_\nu \text{ est dans } \mathrm{U}_q^+ m_\mu.$$

Considérons les ordres lexicographiques $>_g$ et l'ordre lexicographique inverse $>_d$ sur l'ensemble des tenseurs du module $\mathrm{M}_\omega^{\otimes n\frac{l}{d}}$, définis par

$$m_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes m_{\mu_{\frac{nl}{d}}} \geq_g m_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes m_{\nu_{\frac{nl}{d}}}$$

si et seulement si il existe un entier j tel que $m_{\mu_i} = m_{\nu_i}$ pour $1 \leq i < j$ et $m_{\mu_j} > m_{\nu_j}$.

De même

$$m_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes m_{\mu_{\frac{nl}{d}}} \geq_d m_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes m_{\nu_{\frac{nl}{d}}}$$

si et seulement si il existe un entier j tel que $m_{\mu_i} = m_{\nu_i}$ pour $j < i \leq n\frac{l}{d}$ et $m_{\mu_j} > m_{\nu_j}$. Pour simplifier les notations, nous écrirons $\nu \geq_g \nu'$ si $m^\nu \geq_g m^{\nu'}$ et $\nu \geq_d \nu'$ si $m^\nu \geq_d m^{\nu'}$. Rappelons que ces ordres sont les mêmes que ceux utilisés dans [24].

Soit $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, \ldots, 1)$ un L-S chemin de type λ et $\tau_1 = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ une expression compatible. D'après lemme 2.4, pour tout i, supp β_i est constitué de racines simples de même norme, donc pour tout α_k et α_j dans supp β_i, on a $l_k = l_j$, ce qui nous autorise à noter parfois l_β au lieu de l_i pour α_i une racine simple dans le support de β.

Rappelons que dans la remarque 3.2, on a défini les L-S chemins de type λ, π_i et π^i pour $1 \leq i \leq r$. Soit $F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})}$ et $E_{\pi,i}^{(m_i l_{\beta_i})}$les images respectives de $Y_{\pi,i}^{(n_i)}$ et $X_{\pi,i}^{(m_i)}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\frac{d}{l}})$.

Lemme 3.2. — *Pour tout i tel que $s_{\beta_i}\cdots s_{\beta_r} > \tau_s$, on a*

$$F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})} m^{\pi_{i+1}} = m^{\pi_i} + \sum_{\nu >_d \pi} a_\nu m^\nu \qquad \textit{et} \qquad E_{\pi,i}^{(m_i l_{\beta_i})} m^{\pi_{i+1}} = m^{\pi_i} + \sum_{\pi >_g \nu} a_\nu m^\nu.$$

Démonstration. — On ne donne la preuve que pour les $F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})} m^{\pi^{i+1}}$, la seconde égalité repose sur les mêmes arguments. Rappelons que la co-multiplication de $\mathrm{U}_{q,\mathcal{A}}(\mathfrak{g}^t)$ est donnée par (*voir* [32]) :

$$\Delta(F_\gamma^{(p)}) = \sum_{p'+p''=p} q^{\hat{d}_\gamma p' p''} F_\gamma^{(p')} \otimes K_\gamma^{-p'} F_\gamma^{(p'')}. \tag{3.2}$$

Supposons que $\beta_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$ et que $\langle s_{\beta_i}\cdots s_{\beta_r}(\omega), \alpha_1^\vee\rangle = -2$. Soit $\kappa_j = s_{\beta_j}\cdots s_{\beta_r}$ pour $j = 1, \ldots, r$ et rappelons que

$$m^{\pi_{i+1}} = m_{\kappa_{i+1}}^{\otimes a_k \frac{nl}{d}} \otimes m_{\tau_{k+1}}^{\otimes(a_{k+1}-a_k)\frac{nl}{d}} \otimes \cdots \otimes m_{\tau_s}^{\otimes(1-a_{s-1})\frac{nl}{d}},$$

où $\tau_k \geq \kappa_{i-1} > \tau_{k+1}$ et $m^{\pi_{i+1}} = m_{\kappa_{i+1}}^{\otimes \frac{nl}{d}}$ si $\kappa_{i-1} \leq \tau_s$. Par définition de $Y_{\pi,i}^{(n_i)}$, on a $F_{\pi,i}^{n_i l_i} = F_{\gamma_1}^{(n_i l_1)} \cdots F_{\gamma_t}^{(n_i l_t)}$. Donc, en appliquant 3.2, on déduit que le terme $F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})} m^{\pi_{i-1}}$ est égal à

$$\left(F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})} m_{\kappa_{i-1}}^{\otimes a_k \frac{nl}{d}}\right) \otimes K_{\gamma_1}^{-n_i l_1} \cdots K_{\gamma_t}^{-n_i l_t} \left(m_{\tau_{k+1}}^{\otimes(a_{k+1}-a_k)\frac{nl}{d}} \otimes \cdots \otimes m_{\tau_s}^{\otimes(1-a_{s-1})\frac{nl}{d}}\right) + \sum a_\nu m^\nu.$$

où pour tout tenseur $m^\nu = m_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes m_{\nu_{\frac{nl}{d}}}$ à coefficient non nul, il existe au moins deux entiers $j > a_k \frac{nl}{d}$ et $p \geq k+1$ tels que $m_{\nu_j} > m_{\tau_p}$, ce qui implique en particulier $m^\nu > m^\pi$.

Soit $\mu = \sum_{j=k+1}^{s} (a_j - a_{j-1})\tau_j(\lambda)$. Comme $\pi_i(1)$ est un poids entier et que le produit $a_k\langle\kappa_i(\lambda), \beta_i^\vee\rangle$ est dans $\mathbb{Z}$, on déduit que $\langle\mu, \beta_i^\vee\rangle$ est dans $\mathbb{Z}$. Rappelons que les l_i sont égaux et remarquons que $l \times l_i$ est divisible par $2l$, donc

$$\begin{aligned} K_{\gamma_1}^{-n_i l_1} \cdots K_{\gamma_t}^{-n_i l_t} m^{\frac{l}{d}\mu} &= u^{-n_i l_1 \frac{l}{d} \hat{d}_1 \langle\mu, \gamma_1^\vee + \cdots + \gamma_t^\vee\rangle} m_{\frac{l}{d}\mu} \\ &= u^{-n_i l l_1 \langle\mu, \beta_1^\vee\rangle} m_{\frac{l}{d}\mu} \\ &= 1, \end{aligned}$$

où u est l'image de q dans $\mathcal{R}$. Pour obtenir le résultat, il nous reste à calculer le terme $F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})} m_{\kappa_{i+1}}^{\otimes a_k \frac{nl}{d}}$.

Si $\langle\kappa_i(\omega), \beta_i^\vee\rangle = 1$, alors $n_i = a_k n$. Dans ce cas, considérons le $\mathrm{U}_{\mathcal{R}}$-module $V_{n_i\omega,\mathcal{R}}$ et soit v_{κ_i} le vecteur extrémal dans $V_{n_i\omega,\mathcal{R}}$ de poids $\kappa_i(n_i\omega)$. Remarquons que le vecteur $F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})} m_{\kappa_{i+1}}^{\otimes n_i \frac{l}{d}}$ est l'image du vecteur $Y_{\alpha_1}^{(n_i)} \cdots Y_{\alpha_t}^{(n_i)} v_{\kappa_{i+1}}$ dans $\mathrm{M}_{\omega,\mathcal{R}}^{\otimes n_1 \frac{l}{d}}$, et comme ce dernier est égal à v_{κ_i}, qui est indépendant du choix de l'expression compatible de κ_i (*voir* corollaire 3.2). En choisissant une expression réduite de κ_i et en utilisant le fait que

$$F_\gamma^{(n+m)} m_\kappa \otimes m_\delta = m_{s_\gamma \kappa} \otimes m_{s_\gamma \delta}, \tag{3.3}$$

chaque fois que $\langle \kappa(\omega), \gamma^\vee \rangle = n$ et $\langle \delta(\omega), \gamma^\vee \rangle = m$, on déduit que $F_{\pi,i}^{(n_i l_{\beta_i})} m_{\kappa_{i+1}}^{\otimes n_i \frac{l}{d}} = m_{\kappa_i}^{\otimes n_i \frac{l}{d}}$.

Supposons que $\langle \kappa_i(\lambda), \beta_i^\vee \rangle = -2$, du lemme 2.3, on déduit que β_i est une racine simple et on conclut par (3.3) □

Proposition 3.2. — *Pour tout π un L-S chemin de type λ, on a*

$$v_\pi = m^\pi + \sum_{\nu \geq_d \pi} a_\nu m^\nu \qquad \text{et} \qquad u_\pi = m^\pi + \sum_{\pi \geq_g \nu} a_\nu m^\nu.$$

Démonstration. — Par définition des vecteurs u_π et v_π, on a

$$v_\pi = F_{\pi,1}^{(n_1 l_1)} \cdots F_{\pi,r}^{(n_r l_r)} m_\omega^{\otimes \frac{nl}{d}} \qquad \text{et} \qquad u_\pi = E_{\pi,1}^{(m_1 l_1)} \cdots E_{\pi,r}^{(m_r l_r)} m_{w_0(\omega)}^{\otimes \frac{nl}{d}}.$$

Puisque $m^\pi <_d m^\nu <_d F_\gamma m^\nu$ et $m^\pi >_g m^\nu >_g E_\gamma m^\nu$, en appliquant successivement les opérateurs $F_{\pi,i}^{(n_i l_i)}$ (resp. $E_{\pi,i}^{(m_i l_i)}$) et en utilisant à chaque étape le lemme précédent, on obtient notre résultat. □

Démonstration du théorème 3.6. — Soit l un entier divisible par $2d$ et tel que pour tout $\pi = (\tau_1, \ldots \tau_s, 0, a_1, \ldots, 1)$, on a $\frac{l}{d} a_i$ dans $\mathbb{Z}$ et considérons le plongement de $V_{\lambda,\mathcal{R}}$ dans $\mathrm{M}_{\omega,\mathcal{R}}^{\otimes n \frac{l}{d}}$.

Fixons $>_d^t$ une extention de $>_d$ à un ordre total, soit $\pi_1, \ldots, \pi_r$ un sous-ensemble de $\mathbb{B}(\lambda)$ indexé dans l'ordre croissant et supposons que $\sum_{i=1}^r a_i v_{\pi_i} = 0$.

D'après la proposition précédente, on sait que m^{π_1} ne figure que dans v_{π_1}. Puisque les m^π sont linéairement indépendants sur $\mathcal{R}$ et que le coefficient de m^{π_1} dans v_{π_1} est égal à 1, on déduit que $a_1 = 0$, ensuite que tous les a_i sont nuls. Donc les v_π sont linéairement indépendants.

Grâce à la formule de caractère de Weyl et au modèle des chemins, les vecteurs v_π forment un $\mathcal{R}$ réseau de rang maximal dans $V_{\lambda,\mathcal{R}}$. Comme les coefficients des m^π sont tous égaux à 1, on conclut qu'il forment une base de $V_{\lambda,\mathcal{R}}$. Mais par construction les v_π sont dans $V_{\lambda,\mathbb{Z}}$, donc ils forment une base de $V_{\lambda,\mathcal{R}}$.

Rappelons que pour $s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ une expression compatible avec π et $h \geq 0$ tel que $\tau_s = s_{\beta_{h+1}} \cdots s_{\beta_r}$, on a

$$v_\pi = Y_{\pi,1}^{(n_1)} \cdots Y_{\pi,h}^{(n_h)} v_{(\tau_s,0,1)},$$

donc pour $\tau_s \geq w$, le vecteur v_π est dans le module $V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w)^{opp}$ et comme $\dim V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w)^{opp}$ est égal au nombre des L-S chemins dans $\mathbb{B}^w(\lambda)$, on en déduit que les vecteurs v_π, π dans $\mathbb{B}^w(\lambda)$ forment un $\mathbb{Z}$-sous-réseau de $V_{\lambda,\mathbb{Z}}(w)^{opp}$, comme ce réseau contient le vecteur $v_{(w,0,1)}$, pour voir qu'il est égal à $V_{\lambda,\mathcal{R}}(w)$, il suffit de montrer qu'il est stable par $\mathrm{U}_{\mathcal{R}}^-$. En effet, soit $Y_\alpha^{(n)} v_\pi = \sum a_\eta v_\eta$ et δ minimal pour $>_d$ tel que $a_\delta \neq 0$. De la proposition 3.2, on déduit que m^δ ne figure dans aucun vecteur v_η tel que $a_\eta \neq 0$, ce qui implique que m^η figure dans $Y_\alpha^{(n)} v_\pi$, mais ceci n'est possible que si $m^\eta \geq_d m^\pi$. Ceci est vrai pour tout δ minimal, donc $\eta \geq_d \pi$ pour tout $a_\eta \neq 0$. En particulier pour $\eta = (\dots, \eta_t, 0, \dots)$, on a $\eta_t \geq \tau_s \geq w$.

Remarque 3.3. — *Soient $\pi = (\tau_1, \dots)$, $s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_t}$ une expression compatible avec π et $p < q \leq t$ tels que $\tau_k = s_{\beta_p} \cdots s_{\beta_t}$ et $\tau_{k+1} = s_{\beta_{q+1}} \cdots s_{\beta_t}$ pour un entier $k \geq 1$.*

Rappelons que chaque fois que le support de β_i est orthogonal au support de β_{i+1}, on a

$$\langle s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_t}(\lambda), \beta_i^\vee \rangle = \langle s_{\beta_{i+2}} \cdots s_{\beta_t}(\lambda), \beta_i^\vee \rangle$$

et

$$\langle s_{\beta_{i+2}} \cdots s_{\beta_t}(\lambda), \beta_{i+1}^\vee \rangle = \langle s_{\beta_i} s_{\beta_{i+2}} \cdots s_{\beta_t}(\lambda), \beta_{i+1}^\vee \rangle,$$

donc si on change la suite $(\beta_p, \dots, \beta_q)$ par une suite équivalente $(\beta_{i_p}, \dots, \beta_{i_q})$ et $s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_t}$ par $s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_{i_p-1}} s_{\beta_p} \cdots s_{\beta_q} s_{\beta_{i_q+1}} \cdots s_{\beta_t}$, l'expression du vecteur v_π reste inchangée, puisque $Y_\alpha Y_{\alpha'} = Y_{\alpha'} Y_\alpha$ pour $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$. Par conséquent, v_π ne dépend que de la classe d'équivalence de l'expression compatible choisie.

Dans le lemme qui va suivre le poids λ est supposer classique, dans ce cas tout L-S chemin de type λ s'écrit $(\tau, \tau', 0, \frac{1}{2}, 1)$, où on enlève le $\frac{1}{2}$ si $\tau = \tau'$.

Lemme 3.3. — *Soit λ un poids classique. Alors, pour tout $\pi = (\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $\pi' = (\tau_1', \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$ dans $\mathbb{B}(\lambda)$ tels qu'il existe un treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$ qui contient τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2', le coefficient de $m^\pi \otimes m^{\pi'}$ dans $v_{\pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'}$ est égal à 1.*

Démonstration. — Rappelons que les chemins $\pi \vee \pi'$ et $\pi \wedge \pi'$ sont définis par

$$\pi \vee \pi' = \big(\tau_1 \vee \tau_1', (\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2')\big) \quad \text{et} \quad \pi \wedge \pi' = \big((\tau_1 \wedge \tau_1') \wedge (\tau_2 \vee \tau_2'), \tau_2 \wedge \tau_2'\big).$$

Dans le corollaire 2.4 nous avons montré la propriété suivante : pour tout δ et δ' dans W^λ et $\delta \vee \delta'$ une borne supérieure tels que $\mathrm{supp}(\delta, \delta \vee \delta')$ est orthogonal à $\mathrm{supp}(\delta', \delta \vee \delta')$, alors $\delta \vee \delta'$ est l'unique borne supérieure et il existe une unique borne inférieure $\delta \wedge \delta'$ de δ et δ' dans W^λ. De plus, dans le corollaire 1.2, nous avons montré que

$$\delta \vee \delta' \text{ et } \delta \wedge \delta' \text{ dans } \mathcal{U}^\lambda \iff \delta \text{ et } \delta' \text{ dans } \mathcal{U}^\lambda,$$

pour tout $\mathcal{U}^\lambda$ un treillis distributif associé à une classe d'équivalence de chaînes maximales. Par conséquent, tout treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$ qui contient les éléments

$$\tau_1 \vee \tau_1', \qquad (\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2'), \qquad (\tau_1 \wedge \tau_1') \wedge (\tau_2 \vee \tau_2') \qquad \text{et} \qquad \tau_2 \wedge \tau_2'$$

contient τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2', en particulier il contient la chaîne des éléments

$$\eta_1 = \tau_1 \vee \tau_1', \qquad \eta_2 = \tau_2' \vee \tau_1, \qquad \eta_3 = (\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2'), \qquad \eta_4 = \tau_1 \wedge (\tau_2 \vee \tau_1')$$

$$\eta_5 = \tau_2 \vee (\tau_1 \wedge \tau_2'), \qquad \eta_6 = (\tau_1 \wedge \tau_1') \wedge (\tau_2 \vee \tau_2'), \qquad \eta_7 = \tau_2 \wedge \tau_1'.$$

Pour suivre les notations, le lecteur pourra consulter la figure 6 qui se trouve à la fin de la démonstration. Soit $(\beta_1, \ldots, \beta_t)$ une suite de racines positives telles que $s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_t}$ est une expression compatible avec $\pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'$. D'après la remarque précédente, on peut supposer qu'il existe une suite $i_1 = 1 \leq \cdots \leq i_7 \leq r+1$ telle que $\eta_j = s_{\beta_{i_j}} \cdots s_{\beta_t}$ et $s_{\beta_{r+1}} \cdots s_{\beta_t} = \tau_2 \wedge \tau_2'$. Pour simplifier les notations, notons $F_{\beta_i}^{(n_i l_i)}$ l'image de $Y_{\pi,i}^{(n_i)}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}\left((\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\otimes \frac{l}{d}})^{\frac{d}{l}}\right)$ (tout en faisant attention dans les calculs à ne pas confondre le système de racines de $\mathfrak{g}$ avec celui $\mathfrak{g}^t$). Par définition, on a

$$v_{\pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'} = Y_{\beta_1}^{(n_1)} \cdots Y_{\beta_r}^{(n_r)} v_{\tau_2 \wedge \tau_2'},$$

où la suite des entiers n_i est donnée par :

$$n_i = \begin{cases} 3 & \text{si } \eta_6 \geq s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_t} > \tau_2 \wedge \tau_2' \\ \langle s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_t}(\lambda), \beta_i^\vee \rangle & \text{si } \eta_5 \geq s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_t} > \eta_6 \\ 2 & \text{si } \eta_4 \geq s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_t} > \eta_5 \\ \langle s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_t}(\lambda), \beta_i^\vee \rangle & \text{si } \eta_3 \geq s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_t} > \eta_4 \\ 1 & \text{si } \eta_1 \geq s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_t} > \eta_3. \end{cases}$$

Considérons les opérateurs suivants :

$$\begin{array}{ll} F_7^j = F_{\beta_{i_7}}^{(jl_{\beta_{i_7}})} \cdots F_{\beta_r}^{(jl_{\beta_r})} & F_6^j = F_{\beta_{i_6}}^{(jl_{\beta_{i_6}})} \cdots F_{\beta_{i_7-1}}^{(jl_{\beta_{i_7-1}})} \\ F_5 = F_{\beta_{i_5}}^{(n_{i_5} l_{\beta_{i_5}})} \cdots F_{\beta_{i_6-1}}^{(n_{i_6-1} l_{\beta_{i_6-1}})} & F_4^j = F_{\beta_{i_4}}^{(jl_{\beta_{i_4}})} \cdots F_{\beta_{i_5-1}}^{(jl_{\beta_{i_5-1}})} \\ F_3 = F_{\beta_{i_3}}^{(n_{i_3} l_{\beta_{i_3}})} \cdots F_{\beta_{i_4-1}}^{(n_{i_4-1} l_{\beta_{i_4-1}})} & F_2^j = F_{\beta_{i_2}}^{(jl_{\beta_{i_2}})} \cdots F_{\beta_{i_3-1}}^{(jl_{\beta_{i_3-1}})} \\ F_1^j = F_{\beta_1}^{(jl_{\beta_1})} \cdots F_{\beta_{i_2-1}}^{(jl_{\beta_{i_2-1}})} & \end{array}$$

Donc, si on plonge de $V_{2\lambda,\mathcal{R}}$ dans $\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\otimes \frac{2l}{d}}$, on obtient

$$v_{\pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'} = F_1^3 F_2^3 F_3 F_4^2 F_5 F_6^3 F_7^3 m_{\tau_2 \wedge \tau_2'}^{\otimes \frac{2l}{d}}.$$

Avant de commencer les calculs, nous allons citer quelques arguments qui seront utilisés continuellement dans le reste de la preuve.

(i) L'action de $K_{\gamma_i}^{l_i}$ sur m^μ est triviale pour tout μ dans $\frac{l}{d}X$.

(ii) Pour $\pi = (\tau, \tau', 0, \frac{1}{2}, 1)$ et α_i une racine simple telle que $\tau > s_{\alpha_i}\tau \geq \tau'$, l'expression $\frac{1}{2}\langle \tau'(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle$ est dans $\mathbb{Z}$, donc $l_i \frac{l}{2d}\langle \tau'(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle$ est dans $2l\mathbb{Z}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} K_{\gamma_i}^{l_i} m_{\tau'}^{\otimes \frac{l}{2d}} &= u^{\hat{d}_i l_i \frac{l}{2d}\langle \tau'(\lambda), \gamma_i^\vee \rangle} m_{\tau'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \\ &= u^{l_i \frac{l}{2}\langle \tau'(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle} m_{\tau'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \\ &= m_{\tau'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \end{aligned}$$

où on rappelle que u est l'image de q dans $\mathcal{R}$. De même si $s_\alpha \tau > \tau$ et $(s_\alpha \tau, \tau', 0, \frac{1}{2}, 1)$ est un L-S chemin de type λ, alors l'action de $K_{\gamma_i}^{l_i}$ sur $m_{\tau'}^{\otimes \frac{l}{2d}}$ est triviale.

(iii) Chaque couple d'éléments dans $\mathcal{U}^\lambda$ possède la propriété d'orthogonalité.

Grâce à (iii), on sait que $\mathrm{supp}(\eta_7, \tau_2 \wedge \tau_2')$ et $\mathrm{supp}(\tau_2', \tau_2 \wedge \tau_2')$ sont orthogonaux et rappelons que

$$m^\pi \otimes m^{\pi'} = m_{\tau_1}^{\otimes \frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2}^{\otimes \frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_1'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}},$$

donc l'opérateur F_7^3 ne doit pas affecter le quatrième facteur du produit tensoriel $m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}}$. Remarquons aussi que les β_i sont simples pour $i_7 \leq i \leq r$ et que $\langle s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_t}(\lambda), \beta_i^\vee \rangle = 2$, il en résulte que $F_{\beta_i}^h m_{s_{\beta_{i+1}} \cdots s_{\beta_t}}^{\otimes \frac{l}{2d}} = 0$ pour $h > l_i$. En utilisant la comultiplication et (i), on obtient

$$\begin{aligned} F_7^3 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{2l}{d}} &= F_7^2 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} \otimes F_7 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} \\ &+ \sum a F_{\beta_{i_7}}^{h_{i_7}} \cdots F_{\beta_r}^{h_r} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} \otimes F_{\beta_{i_7}}^{h'_{i_7}} \cdots F_{\beta_r}^{h'_r} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} \end{aligned}$$

où $h_i + h_i' = 3l_i$. Soit j minimal tel que $h_k = 2l_k$ pour $k > j$. Donc si $h_j > 2l_j$, alors $F_{\beta_j}^{h_j} F_{\beta_{j+1}}^{2l_{j-1}} \cdots F_{\beta_r}^{l_r} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} = 0$. Si $h_j < 2l_i$, alors $h_j' > l_j$, mais

$$F_{\beta_j}^{h_j'} \cdots F_{\beta_r}^{h_r'} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} = \sum a F_{\beta_j}^{k_j} \cdots F_{\beta_r}^{k_r} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}} \otimes F_{\beta_j}^{k_j'} \cdots F_{\beta_r}^{k_r'} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}}$$

donc de (iii), on déduit que, $k_i' = 0$ pour $j \leq i \leq r$ (sinon le terme $F_{\beta_j}^{k_j'} \cdots F_{\beta_r}^{k_r'} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}}$ ne peut pas donner le tenseur $m_{\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}}$). Par conséquent, l'unique tenseur dans la dernière égalité, qui est susceptible de donner $m^{\pi'}$ est

$$\left(F_{\beta_j}^{h_j'} F_{\beta_{j+1}}^{l_{j+1}} \cdots F_{\beta_r}^{l_r} m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}}\right) \otimes m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{2d}}.$$

Puisque $F_{\beta_j}^h m_{s_{\beta_{j+1}} \cdots s_{\beta_t}}^{\otimes \frac{l}{2d}} = 0$ pour $h > l_j$, et que $F_7^2 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} = m_{\eta_7}^{\otimes \frac{l}{d}}$, on déduit que

$$\begin{aligned} F_7^3 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{2l}{d}} &= m_{\eta_7}^{\otimes \frac{l}{d}} \otimes F_7 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} \\ &+ \text{ un terme qui ne peut plus donner le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}. \end{aligned}$$

De la propriété (iii), on déduit que $\mathrm{supp}(\eta_6, \eta_5)$ est orthogonal au $\mathrm{supp}(\eta_7, \eta_6)$, ce qui nous permet de permuter les opérateurs F_5 et F_6^3. Et puisque $\mathrm{supp}(\eta_6, \eta_5)$ est aussi orthogonal au $\mathrm{supp}(\tau_1', \tau_2 \wedge \tau_2')$, du fait que $K_{\gamma_i}^{l_i}$ opère trivialement sur m^μ pour μ dans $\frac{l}{d}X$ et que $F_5 m_{\eta_7}^{\otimes \frac{l}{d}} = m_{\tau_2}^{\otimes \frac{l}{d}}$, on déduit que

$$\begin{aligned} F_5 F_7^3 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{2l}{d}} &= m_{\tau_2}^{\otimes \frac{l}{d}} \otimes F_7 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes \frac{l}{d}} \\ &+ \text{ un terme qui ne peut plus donner le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}. \end{aligned}$$

Appliquant F_6^3, du fait que cet opérateur ne doit pas affecter la deuxième composante du dernier tenseur, que F_7 commute avec F_6, mais aussi $F_6 m_{\tau_2}^{\otimes \frac{l}{2d}} = m_{\eta_5}^{\otimes \frac{l}{2d}}$ et

$F_6^2 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}} = m_{\eta_6\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}}$, les mêmes arguments que ceux utilisés pour F_7 montrent que

$$\begin{aligned} F_5F_6^3F_7^3 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{2l}{d}} &= m_{\eta_5}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes F_7 m_{\eta_6\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}} \\ &+ \text{ un terme qui ne peut plus donner le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}. \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{supp}(\eta_5, \eta_4)$ est orthogonal au $\mathrm{supp}(\eta_6 \wedge \tau_2', \tau_2')$, pour obtenir le tenseur $m^\pi \otimes m^{\pi'}$, l'opérateur F_4^2 ne doit pas affecter le deuxième ni le quatrième facteurs du dernier tenseur. En utilisant (i), (ii) et le fait que $F_4 m_{\eta_5}^{\otimes\frac{l}{2d}} = m_{\eta_4}^{\otimes\frac{l}{2d}}$, on déduit que

$$\begin{aligned} F_4^2F_5F_6^3F_7^3 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{2l}{d}} &= m_{\eta_4}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes F_4F_7 m_{\eta_6\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}} \\ &+ \text{ un terme qui ne peut plus donner le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{supp}(\eta_4, \eta_3)$ est orthogonal au $\mathrm{supp}(\eta_4, \tau_1)$, on déduit que pour obtenir $m^\pi \otimes m^{\pi'}$, l'opérateur F_3 ne doit pas affecter le premier ni le deuxième facteur du dernier tenseur, en utilisant (i) on trouve

$$\begin{aligned} F_3F_4^2F_5F_6^3F_7^3 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{2l}{d}} &= m_{\eta_4}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes F_3F_4F_7 m_{\eta_6\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}} \\ &+ \text{ un terme qui ne peut plus donner le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}. \end{aligned}$$

Comme F_3 et F_4F_7 commutent et que $F_3 m_{\eta_6\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}} = m_{\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}}$, on déduit que

$$\begin{aligned} F_3F_4^2F_5F_6^3F_7^3 m_{\tau_2\wedge\tau_2'}^{\otimes\frac{2l}{d}} &= m_{\eta_4}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes F_4F_7 m_{\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}} \\ &+ \text{ un terme qui ne peut plus donner le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$F_4F_7 m_{\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}} = m_{\eta_2\wedge\tau_1'}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{2d}} + \sum_{m^{\nu_2} > m_{\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{d}}} a_{\nu_1,\nu_2} m^{\nu_1} \otimes m^{\nu_2}$$

où m^{ν_i} dans $\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\otimes\frac{l}{2d}}$. Par conséquent, étant donné que $\mathrm{supp}(\eta_3, \eta_2)$ est orthogonal au $\mathrm{supp}(\tau_1', \eta_2 \wedge \tau_1')$ et que $\mathrm{supp}(\eta_2, \eta_1)$ est orthogonal au $\mathrm{supp}(\eta_4, \tau_1)$, mais aussi en utilisant (i), on obtient

$$\begin{aligned} v_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'} &= F_2(m_{\eta_4}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2}^{\otimes\frac{l}{2d}}) \otimes F_1(m_{\eta_2\wedge\tau_1'}^{\otimes\frac{l}{2d}} \otimes m_{\tau_2'}^{\otimes\frac{l}{2d}}) \\ &+ \text{ un terme qui ne contient pas le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}. \end{aligned}$$

Puis à l'aide de (ii) et le fait que $F_2 m_{\eta_4}^{\otimes\frac{l}{2d}} = m_{\tau_1}^{\otimes\frac{l}{2d}}$ et $F_1 m_{\eta_2\wedge\tau_1'}^{\otimes\frac{l}{2d}} = m_{\tau_1'}^{\otimes\frac{l}{2d}}$, on conclut que

$$v_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'} = m^\pi \otimes m^{\pi'} \quad + \quad \text{un terme qui ne contient pas le tenseur } m^\pi \otimes m^{\pi'}.$$

$\square$

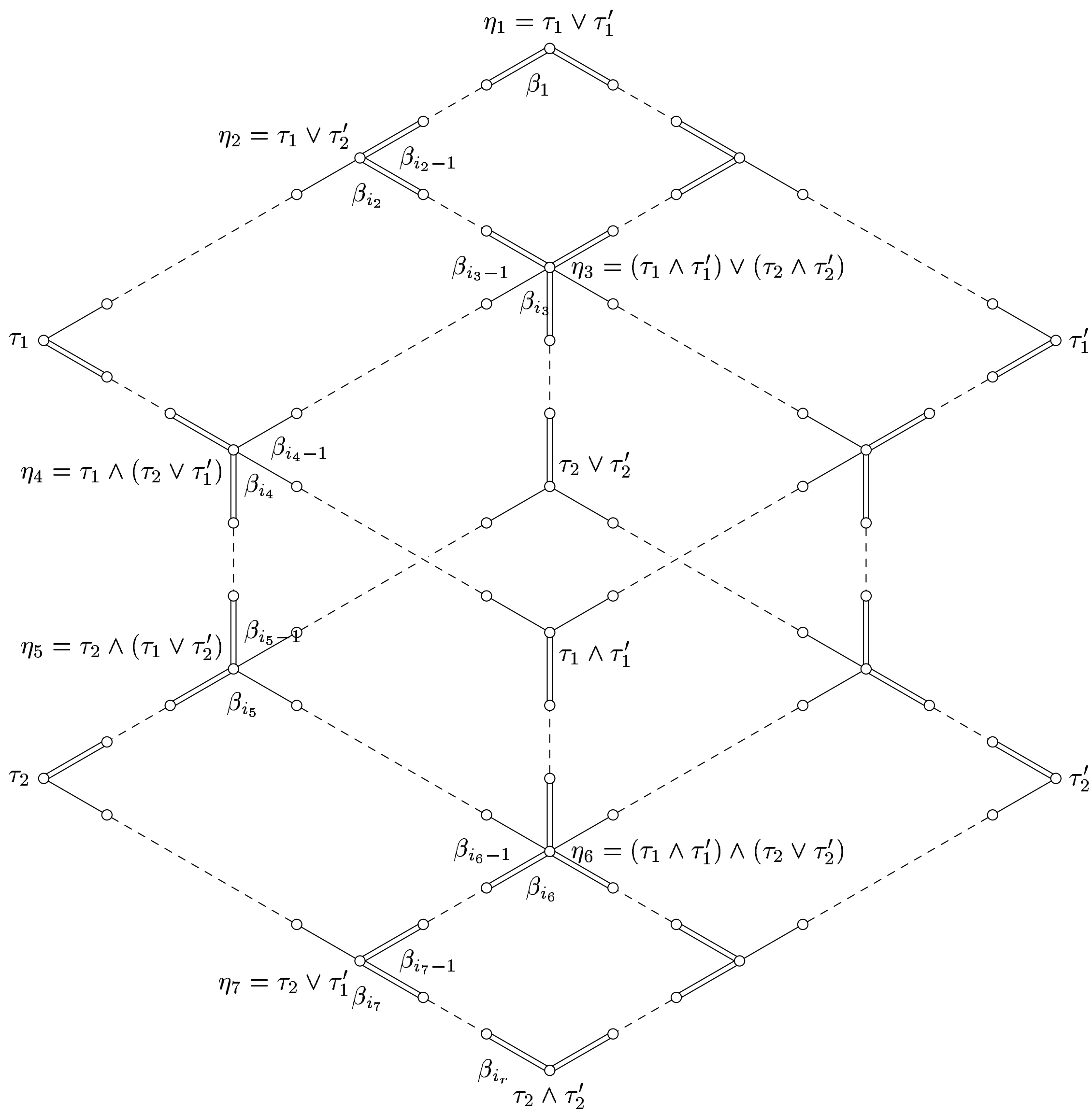


figure 6

3.2.2 Théorie des monômes standard

Soit $\tilde{\mathcal{R}}$ l'anneau sur $\mathbb{Z}$ engendré par toutes les racines de l'unité. Fixons une injection de $\mathcal{R}$ dans $\tilde{\mathcal{R}}$ et soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos. Si $\Bbbk$ est de caractéristique 0, alors on considère $\Bbbk$ comme un $\mathcal{R}$-module via l'inclusion de $\tilde{\mathcal{R}}$ dans $\Bbbk$. Si $\Bbbk$ est de caractéristique p, alors on considère $\Bbbk$ comme un $\mathcal{R}$-module par extension de la projection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et l'injection de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\Bbbk$ à un homomorphisme de $\tilde{\mathcal{R}}$ dans $\Bbbk$. Soit $V_{\lambda,\tilde{\mathcal{R}}} = V_{\lambda,\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{R}}$ et $V_{\lambda,\Bbbk} = V_{\lambda,\tilde{\mathcal{R}}} \otimes_{\tilde{\mathcal{R}}} \Bbbk$. Les injections 3.1, induisent des projections des espaces duaux

$$\big(\mathrm{M}_{\omega,\tilde{\mathcal{R}}}^{\otimes \frac{nl}{d}})\big)^* \to \big(\mathrm{M}_{\lambda,\tilde{\mathcal{R}}}^{\otimes \frac{l}{d}}\big)^* \to \left(\big(\mathrm{M}_{\lambda,\tilde{\mathcal{R}}}^{\otimes \frac{l}{d}}\big)^{\frac{d}{l}}\right)^* \to \left(\big(\mathrm{M}_{\frac{l}{d}\lambda,\tilde{\mathcal{R}}}\big)^{\frac{d}{l}}\right)^* \to V_{\lambda,\tilde{\mathcal{R}}}^*.$$

Soit p_π l'image de b_π dans $V_{\lambda,\mathcal{R}}^*$. Par abus de notations, on note aussi p_π son image dans $V_{\lambda,\Bbbk}^*$. Supposons que pour tout L-S chemin dans $\mathbb{B}(\lambda)$, $a_i \frac{l}{d}$ dans $\mathbb{Z}$, alors d'après

[30], on a

Théorème 3.7. — *Les vecteurs p_π forment une base de $V^*_{\lambda,\Bbbk}$ et le noyau de l'application canonique de R^λ_w dans $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X(w), L_{n\lambda})$ est engendré par des éléments de la forme*

$$p_\pi p'_\pi = \sum_{\eta*\eta' \geq_g \pi*\pi' \geq_d \eta*\eta'} a_{\eta*\eta'} p_\eta p_{\eta'} \qquad \text{pour } \pi, \pi' \in \mathbb{B}_w(\lambda).$$

où les enchaînements $\eta * \eta$ sont standard.

****

Lemme 3.4. — *Soient τ, τ' et w des éléments de W^λ, appartenant à un treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$, $w \geq \tau$ et $w \geq \tau'$ tels que :*

$$\tau'(\lambda) - \tau(\lambda) \geq 0$$

(i.e. une somme de racines simples à coefficients positifs). Alors $\tau \geq \tau'$.

Démonstration. — Nous allons montrer le résultat par récurrence sur $\ell(w)$. Si $\ell(w) = 1$, alors du fait que Id est l'unique élément de W^λ inférieur à w, il en résulte que $\tau = w$ et $\tau' = \mathrm{Id}$, ou $\tau = \tau'$.

Si $\ell(w) > 1$, soit $\beta_1, \dots, \beta_r$ une suite de racines positives telles que

$$\tau = s_{\beta_r} \cdots s_{\beta_1} w, \qquad s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_1} w \in \mathcal{U}^\lambda \qquad \text{et} \qquad \ell(s_{\beta_i} \cdots s_{\beta_1} w) = \ell(w) - i,$$

pour $1 \leq i \leq r$. Remarquons que, à cause de la structure de $\mathcal{U}^\lambda$, ou bien $\tau' < s_{\beta_1} w$, ou bien $\operatorname{supp} \beta_1$ est orthogonal au $\operatorname{supp}(w, \tau')$, mais par hypothèse, on sait que $\operatorname{supp} \beta_1$ est dans $\operatorname{supp}(w, \tau')$, donc $\tau' < s_{\beta_1} w$. Puis, par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_{\beta_1} w)$, on déduit que $\tau \geq \tau'$. □

Lemme 3.5. — *Soient λ un poids classique et τ et τ' deux éléments de W^λ, tels que $(\tau, \tau', 0, \frac{1}{2}, 1)$ est un L-S chemin de type λ. Alors toutes les chaînes maximales reliant τ et τ' sont équivalentes.*

Démonstration. — Le lemme 2.3 nous dit que tout diviseur double est associé à une racine simple. Comme toute suite de diviseurs entre $X(\tau)$ et $X(\tau')$ est double, il en résulte que pour tout élément δ dans W^λ et β une racine positive satisfaisant

$$\tau' \leq s_\beta \delta \leq \delta \leq \tau \qquad \text{et} \qquad \ell(s_\beta \delta) = \ell(\delta) - 1,$$

la racine β est simple.

Dans la remarque 2.2, nous avons vu que cette propriété est une condition suffisante pour que $\{\delta,\ \tau' \leq \delta \leq \tau\}$ vérifie la propriété d'orthogonalité. Par la maximalité des treillis distributifs associés aux classes d'équivalence des chaînes maximales parmi les treillis possédant la propriété d'orthogonalité (*voir* proposition 1.1), on déduit qu'il existe au moins un treillis $\mathcal{U}^\lambda$ contenant $\{\delta,\ \tau' \leq \delta \leq \tau\}$, ce qui prouve que toutes les chaînes maximales reliant τ et τ' sont équivalentes. □

Corollaire 3.3. — *Soit $(\tau, \tau', 0, \frac{1}{2}, 1)$ un L-S chemin de type λ et $\mathcal{U}^\lambda$ un treillis distributif qui contient τ et τ'. Alors $\mathcal{U}^\lambda$ contient tout élément δ tel que $\tau' \leq \delta \leq \tau$.*

Démonstration. — Par définition de $\mathcal{U}^\lambda$, on sait que $\mathcal{U}^\lambda$ contient une chaîne maximale reliant τ et τ', on conclut alors à l'aide du lemme précédent. □

Lemme 3.6. — *Soient $(\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $(\tau_1, \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$ deux L-S chemins de type λ. Alors il existe un treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$ qui contient τ_1, τ_2 et τ_2'.*

Démonstration. — Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $\beta_1, \ldots, \beta_s$ deux suites de racines simples telles que

$$\tau_2 = s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1} \tau_1 \qquad \text{et} \qquad \tau_2' = s_{\beta_s} \cdots s_{\beta_1} \tau_1,$$

ainsi que $\ell(\tau_2) = \ell(\tau_1) - r$ et $\ell(\tau_2') = \ell(\tau_1) - s$. Nous allons donner la preuve par récurrence sur $r + s$. Si $r = s = 1$, alors du fait que λ est classique, on déduit que α_1 est orthogonale à β_1, donc les quatre éléments $\tau, s_{\alpha_1}\tau$, $s_{\beta_1}\tau$ et $s_{\alpha_1}s_{\beta_1}\tau$ forment un treillis distributif possédant la propriété d'orthogonalité, comme les treillis $\mathcal{U}^\lambda$ sont maximaux parmi ceux qui possèdent cette propriété (*voir* proposition 1.1), il en résulte qu'il existe au moins un treillis $\mathcal{U}^\lambda$ qui contient ces éléments.

Sinon, soit i un entier maximal tel que α_k est orthogonale au $\mathrm{supp}(\tau_1, \tau_2')$. Si $i = r$ alors $\mathrm{supp}(\tau_1, \tau_2)$ et $\mathrm{supp}(\tau_1, \tau_2')$ sont orthogonaux, et on conclut comme précédemment. Dans le cas contraire, soit j un entier minimal tel que $\langle \alpha_i, \beta_j^\vee \rangle \neq 0$ et considérons l'élément $\kappa = s_{\beta_{j-1}} \cdots s_{\beta_1} s_{\alpha_{i-1}} \cdots s_{\alpha_1} \tau_1$, donc

$$\begin{array}{rcl} \langle s_{\beta_j}\kappa(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle & = & \langle \kappa(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle - \langle \kappa(\lambda), \beta_j^\vee \rangle \langle \beta_j, \alpha_i^\vee \rangle \\ & \leq & 2\langle \beta_j, \alpha_i^\vee \rangle - 2. \end{array}$$

Comme λ est classique, on déduit que $\alpha_i = \beta_j$, donc la racine simple α_i est orthogonale au $\mathrm{supp}(\tau_1, s_{\alpha_{i-1}} \cdots s_{\alpha_1} \tau_1)$, par conséquent $\tau_1 > s_{\alpha_i}\tau_1 \geq \tau_2$ et $s_{\alpha_i}\tau_1 \geq \tau_2$. Ce qui nous permet de conclure par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_{\alpha_i}\tau_1)$. □

Nous allons rappeler brièvement les bases construites dans [24], dans le but de les utiliser pour montrer certaines propriétés sur les enchaînements.

Soit $\pi = (\tau_1, \ldots, \tau_s, 0, a_1, \ldots, 1)$ et $\tau_1 = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ une expression réduite. On construit à l'aide de cette expression une suite de nombres positifs, définie par la procédure suivante : fixons j minimal tel que $s_{i_1}\tau_j > \tau_j$ et $j = r + 1$ si $s_{i_1}\tau_j < \tau_j$ pour tout j. Considérons le L-S chemin

$$\pi' = (s_{i_1}\tau_1, \ldots, s_{i_1}\tau_{j-1}, \tau_j, \ldots, \tau_s, 0, a_1, \ldots, 1)$$

et soit n_1 l'entier positif tel que $\pi'(1) - \pi(1) = n_1 \alpha_{i_1}$. En appliquant le même procédé au chemin π' et à la réflexion s_{i_2}, on obtient n_2, *etc.*

De la même façon si on fixe une expression réduite $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_t} \tau_s$, où w_0 est le plus grand élément de W^λ, on considère la suite d'entiers donnée par : pour j minimal tel que $s_{i_1}\tau_j < \tau_j$ et $j = 0$ si $s_{i_1}\tau_j > \tau_j$, on considère

$$\pi' = (\tau_1, \ldots, \tau_j, s_{i_t}\tau_{j+1}, \ldots, s_{i_t}\tau_s, 0, a_1, \ldots, 1)$$

et m_t l'entier positif tel que $\pi(1) - \pi'(1) = m_t\alpha_{i_t}$, *etc.* Les vecteurs de la base de Littelmann sont les suivants

$$w_\pi = Y_{\alpha_{i_1}}^{(n_1)} \cdots Y_{\alpha_{i_t}}^{(n_r)} v_\lambda \qquad \text{et} \qquad w'_\pi = X_{\alpha_{i_1}}^{(m_1)} \cdots X_{\alpha_{i_t}}^{(m_r)} v_\lambda.$$

Lemme 3.7. — *Pour tout π un L-S chemin de type λ. Dans $\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}^{\otimes \frac{l}{d}}$, on a*

$$w_\pi = m^\pi + \sum_{\pi >_g \nu} a_\nu m^\nu \qquad et \qquad w'_\pi = m^\pi + \sum_{\nu >_d \pi} a_\nu m^\nu.$$

En particulier, pour tout terme $m^\nu = m_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes m_{\nu_{\frac{l}{d}}}$ de w_π (resp. w'_π), les facteurs m_{ν_i} sont dans le module de Demazure $\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}(\tau_1)$ (resp. $U^-_{q,\mathcal{R}} m_{\tau_s}$).

Remarquons que les vecteurs v_π construits précédemment peuvent contenir des facteurs qui n'appartiennent pas à $\mathrm{M}_{\lambda,\mathcal{R}}(\tau_1)$, et ceci est dû au fait que généralement l'expression compatible n'est pas une expression réduite. C'est cette propriété des vecteurs w_π et w'_π qui nous sera utile. Comme nous avons supposé que λ est classique, pour simplifier les calculs, nous allons supposer dans tout ce qui suit que $l = 2d$.

Lemme 3.8. — *Soient $\pi = (\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\pi' = (\tau'_1, \tau'_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $\eta' = (\eta'_1, \eta'_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ des éléments dans $\mathbb{B}(\lambda)$ tels que :*

(i) *$\pi * \pi'$ non standard ;*

(ii) *$\eta * \eta'$ standard ;*

(iii) *$m^\pi \otimes m^{\pi'}$ figure dans l'expression du vecteur $w_{\eta*\eta'}$.*

Supposons que $\eta_2(\lambda) - \eta_1(\lambda) = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha \alpha$. Alors, si α est dans $\mathrm{supp}(\eta_1, \eta_2)$ et α n'est pas dans $\mathrm{supp}(\eta_1, \tau_1)$, on a les égalités des poids suivantes :

a) *$\tau_2(\lambda) - \tau_1(\lambda) = n'_\alpha \alpha + \nu$ avec $n'_\alpha \geq n_\alpha$ et $\alpha \notin \mathrm{supp}\, \nu$;*

b) *$\tau'_1(\lambda) - \eta_1(\lambda) = n''_\alpha \alpha + \nu'$ avec $n''_\alpha \geq n_\alpha$ et $\alpha \notin \mathrm{supp}\, \nu'$.*

En particulier, si l'intersection de $\mathrm{supp}(\eta_1, \tau_1)$ et $\mathrm{supp}(\eta_1, \tau'_1)$ est vide, alors $\eta_2 \geq \tau_2$ et $\eta_2 \geq \tau'_2$. De plus,

$$\tau_1(\lambda) - \eta_1(\lambda) = \sum_{\alpha \notin \mathrm{supp}(\tau'_1, \eta_1)} n_\alpha \alpha + \mu_1 \tag{3.4}$$

$$\tau_1(\lambda) - \eta_1(\lambda) = \sum_{\alpha \notin \mathrm{supp}(\tau_1, \eta_1)} n_\alpha \alpha + \mu_2 \tag{3.5}$$

$$\tau_2(\lambda) - \tau_1(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(\tau'_1, \eta_1)} n_\alpha \alpha + \mu_3 \tag{3.6}$$

$$\tau'_2(\lambda) - \tau'_1(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathrm{supp}(\tau_1, \eta_1)} n_\alpha \alpha + \mu_4 \tag{3.7}$$

où ν, ν' et μ_i, $i = 1, \ldots, 4$ sont des sommes de racines simples à coefficients positifs.

Démonstration. — Supposons que $\eta_1 = s_{i_1} \cdots s_{i_t}\eta_2$ avec $\ell(\eta_1) = \ell(\eta_2)+t$ et considérons le L-S chemin de type 2λ, $\eta_2 * \eta' = (\eta_2, 0, 1) * \eta'$. Comme $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_t}$ sont des racines simples, sans aucune restriction, on peut supposer que $w_{\eta*\eta'} = F_{\gamma_{i_1}}^{(l_{i_1})} \cdots F_{\gamma_{i_t}}^{(l_{i_t})} w_{\eta_2*\eta'}$.

Du fait que $m^\pi \otimes m^{\pi'}$ figure dans l'expression du vecteur $w_{\eta*\eta'}$, il existe un facteur $m_{\mu_1} \otimes m_{\mu_2} \otimes m_{\mu_3} \otimes m_{\mu_4}$ tel que

$$m^\pi \otimes m^{\pi'} = aF_{\gamma_{i_1}}^{(h^1_{i_1})} \cdots F_{\gamma_{i_t}}^{(h^1_{i_t})} m_{\mu_1} \otimes \cdots F_{\gamma_{i_1}}^{(h^4_{i_1})} \cdots F_{\gamma_{i_t}}^{(h^4_{i_t})} m_{\mu_4},$$

où $h^1_{i_P} + \cdots + h^4_{i_P} = l_{i_p}$ et a une racine $2l$-ième de l'unité. Comme m_{μ_j} dans $\mathrm{M}_\lambda(\eta_2)$ pour $j = 1, \ldots, 4$, on déduit que

$$\mu_1 \leq \eta_2(\lambda),\ \tau_1(\lambda), \quad \mu_2 \leq \eta_2(\lambda),\ \tau_2(\lambda), \quad \mu_3 \leq \eta_2(\lambda),\ \tau_1'(\lambda), \quad \mu_4 \leq \eta_2(\lambda),\ \tau_2'(\lambda).$$

Soit $\nu_j = h^j_{i_1}\gamma_! i_1 + \cdots + h^j_{i_t}\gamma_{i_t}$, donc

$$\mu_1 - \eta_1(\lambda) = \big(\mu_1 - \eta_2(\lambda)\big) + \big(\eta_2(\lambda) - \eta_1(\lambda)\big) = \nu_1 + \big(\tau_1(\lambda) - \eta_1(\lambda)\big).$$

Comme l'expression $\tau_1(\lambda) - \eta_1(\lambda)$ ne contient pas α dans son support, on conclut que le coefficient de α dans $\nu_1 = \mu_1 - \tau_1(\lambda)$ est égal à celui de α dans $\mu_1 - \eta_1(\lambda)$, donc est supérieur ou égal à n_α. En particulier, α n'est pas dans $\operatorname{supp}\nu_i$ pour $i = 2, 3, 4$.

Remarquons que $\nu_2 = \mu_2 - \tau_2$ et

$$\mu_2 - \eta_1(\lambda) = \big(\mu_2 - \eta_2(\lambda)\big) + \big(\eta_2(\lambda) - \eta_1(\lambda)\big) = \nu_2 + \big(\tau_2(\lambda) - \tau_1(\lambda)\big) + \big(\tau_1(\lambda) - \eta_1(\lambda)\big).$$

Comme α n'appartient pas à la réunion de $\operatorname{supp}\nu_2$ et de $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta_1)$, il en résulte que $\tau_2(\lambda) - \tau_1(\lambda) = n'_\alpha\alpha + \nu'$, où $n'_\alpha \geq n_\alpha$, et α n'est pas dans $\operatorname{supp}\nu'$. De plus, on a

$$\mu_3 - \eta_1(\lambda) = \big(\mu_3 - \eta_2(\lambda)\big) + \big(\eta_2(\lambda) - \eta_1(\lambda)\big) = \nu_3 + \big(\tau_1'(\lambda) - \eta_1(\lambda)\big),$$

et α n'appartient pas au $\operatorname{supp}\nu_3$, donc $\tau_1'(\lambda) - \eta_1(\lambda) = n''_\alpha\alpha + \nu''$ et $n''_\alpha \geq n_\alpha$.

En particulier, si $\operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1) \cap \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1') = \varnothing$, alors de ce qui précède, on déduit que

$$\nu_1 = \sum_{\alpha \in \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1')} n_\alpha \alpha \qquad \text{et} \qquad \nu_3 = \sum_{\alpha \in \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1)} n_\alpha \alpha.$$

Comme $\nu_1 + \cdots + \nu_4 = \sum_{\alpha \in \operatorname{supp}\eta} n_\alpha\alpha$, donc $\nu_2 = \nu_4 = 0$, et par conséquent $\mu_2 = \tau_2(\lambda)$ et $\mu_4 = \tau_2'(\lambda)$. Étant donné que les poids $\tau_2(\lambda)$ et $\tau_2(\lambda)$ sont de multiplicité 1 dans le module M_λ, on déduit que m_{τ_2} et $m_{\tau_2'}$ sont dans $\mathrm{M}_\lambda(\eta_2)$, ce qui induit que $\tau_2 \leq \eta_2$ et $\tau_2' \leq \eta_2$. Les égalités (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7), s'obtiennent dans ce cas à l'aide de (a) et (b). □

Proposition 3.3. — *Soient $\pi = (\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\pi' = (\tau_1', \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$ deux L-S chemins de type λ et $\mathcal{U}^\lambda$ un treillis distributif qui contient τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2'. Alors*

$$p_\pi p_{\pi'} = \sum_{\eta \geq_g \pi\vee\pi' \ et\ \pi\wedge\pi' \geq_d \eta'} a_{\eta*\eta'} p_\eta p_{\eta'}.$$

Démonstration. — Soient $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $\eta' = (\eta_1', \eta_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$ tels que $\eta * \eta'$ est standard et $a_{\eta*\eta'} \neq 0$. D'après le théorème 3.7, nous savons que $\eta_1 \geq \tau_1 \vee \tau_1'$. Donc, ou bien $\eta \geq_g \pi \vee \pi'$, ou bien $\eta_1 = \tau_1 \vee \tau_1'$.

Dans le second cas, supposons que $\eta * \eta'$ est minimal pour l'ordre $>_g$ tel que $a_{\eta*\eta'} \neq 0$. Par construction du vecteur $w_{\eta*\eta'}$, on a

$$w_{\eta*\eta'} = m^{\eta} \otimes m^{\eta'} + \sum_{\eta*\eta' >_g \nu} a_\nu m^\nu.$$

Puisque $\eta * \eta'$ est minimal, tel que $a_{\eta*\eta'} \neq 0$, on déduit que $p_{\eta''} p_{\eta'''}(w_{\eta*\eta'}) = 0$ chaque fois que $a_\eta'' * \eta''' \neq 0$ et $\eta'' * \eta''' \neq \eta * \eta'$, par conséquent $p_\pi p_{\pi'}(w_{\eta*\eta'}) = a_{\eta*\eta'}$, en particulier différent de 0, mais ceci n'est possible que si $m^\pi \otimes m^{\pi'}$ figure dans l'expression du vecteur $w_{\eta*\eta'}$. De plus, on rappelle que l'intersection de $\operatorname{supp}(\tau_1, \tau_1 \vee \tau_1')$ et de $\operatorname{supp}(\tau_1', \tau_1 \vee \tau_1')$ est vide, donc en utilisant le lemme 3.8, on voit que $\eta_2 \geq \tau_2 \vee \tau_2'$. Le même lemme nous dit aussi que

$$\operatorname{supp} \eta \subset \operatorname{supp}(\tau_1, \tau_1 \vee \tau_1') \cup \operatorname{supp}(\tau_1', \tau_1 \vee \tau_1').$$

Comme par hypothèse ces deux supports sont orthogonaux, de cette dernière inclusion on déduit qu'il existe deux suites de racines simples $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}$ et $\alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_q}$ telles que $\tau_1 \vee \tau_1' = s_{j_1} \cdots s_{j_p} s_{t_1} \cdots s_{t_q} \eta_2$, $\ell(\tau_1 \vee \tau_1') = \ell(\eta_2) + p + q$ et $\langle \alpha_{j_k}, \alpha_{t_h}^\vee \rangle = 0$ pour $1 \leq h \leq q$ et $1 \leq k \leq p$. De plus, on a

$$\operatorname{supp}\{\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}\} \subset \operatorname{supp}(\tau_1, \tau_1 \vee \tau_1') \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\{\alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_q}\} \subset \operatorname{supp}(\tau_1', \tau_1 \vee \tau_1').$$

À l'aide d'un calcul direct (*voir* aussi figure.6), on vérifie sans aucune difficulté que :

a) $s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1') \leq \tau_1 \vee \tau_1'$, $s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1') \leq \tau_1 \vee \tau_1'$ et

$$\eta_2 = s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1') \wedge s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1')\,;$$

b) τ_1 et $s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1')$ sont incomparables, et, de plus, de l'orthogonalité de $\operatorname{supp}(\tau_1, \tau_1 \vee \tau_1')$ et $\operatorname{supp}\{\alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_q}\}$, on déduit que

$$\tau_1 \wedge s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1') = s_{t_q} \cdots s_{t_1} \tau_1 \qquad \text{et} \qquad \tau_1 \vee s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1') = \tau_1 \vee \tau_1'\,;$$

c) de même τ_1' et $s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1')$ sont incomparables et de l'orthogonalité de $\operatorname{supp}(\tau_1', \tau_1 \vee \tau_1')$ au $\operatorname{supp}\{\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}\}$, on déduit que

$$\tau_1' \wedge s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1') = s_{j_p} \cdots s_{j_1} \tau_1' \qquad \text{et} \qquad \tau_1' \vee s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1') = \tau_1 \vee \tau_1'$$

d) les chemins $(\tau_1, s_{t_q} \cdots s_{t_1} \tau_1, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $(\tau_1', s_{j_p} \cdots s_{j_1} \tau_1', 0, \frac{1}{2}, 1)$ sont deux L-S chemins de type λ.

D'après le lemme 3.6, d) induit l'existence d'un treillis distributif qui contient τ_1, τ_2 et $s_{t_q} \cdots s_{t_1} \tau_1$. Puisque

$$s_{t_q} \cdots s_{t_1} \tau_1(\lambda) - \tau_1(\lambda) = s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1')(\lambda) - (\tau_1 \vee \tau_1')(\lambda)$$

grâce au lemme 3.8, égalité (3.6), on déduit que

$$\tau_2(\lambda) - \tau_1(\lambda) = s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1(\lambda) - \tau_1(\lambda) + \nu,$$

où ν est une somme de racines simples à coefficients positifs. De cette égalité, on déduit que les éléments $w = \tau_1$, $\tau' = \tau_2$ et $\tau = s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1$ vérifient les hypothèses du lemme 3.4, donc $\tau_2 \leq s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1 \leq \tau_1$.

De la même façon, on montre que $\tau_2' \leq s_{j_p} \cdots s_{j_1}\tau_1' \leq \tau_1'$.

Puisque τ_1, τ_1' τ_2 et τ_2' sont dans $\mathcal{U}^\lambda$, en utilisant le lemme 3.5, on voit que $s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1$ et $s_{j_p} \cdots s_{j_1}\tau_1'$ sont aussi dans $\mathcal{U}^\lambda$.

Considérons les trois éléments τ_1, $s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1$ et $\tau_1 \wedge \tau_1'$ et rappelons que

$$(\tau_1 \wedge \tau_1')(\lambda) - \tau_1(\lambda) = \tau_1'(\lambda) - \tau_1 \vee \tau_1'(\lambda). \tag{3.8}$$

Ainsi que b) nous donne

$$s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1')(\lambda) - (\tau_1 \vee \tau_1')(\lambda) = s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1(\lambda) - \tau_1(\lambda). \tag{3.9}$$

Grâce au lemme 3.8, égalité (3.4) et (3.5), on sait que

$$\tau_1'(\lambda) - \tau_1 \vee \tau_1'(\lambda) = s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1 \vee \tau_1'(\lambda) - \tau_1 \vee \tau_1'(\lambda) + \nu \tag{3.10}$$

où ν est une somme de racines simples à coefficients positifs. En utilisant les égalités (3.8) et (3.9) dans (3.10), on obtient

$$\tau_1 \wedge \tau_1'(\lambda) - \tau_1(\lambda) = s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1(\lambda) - \tau_1(\lambda) + \nu, \tag{3.11}$$

ce qui montre que les éléments $w = \tau_1$, $\tau = s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1$ et $\tau' = \tau_1 \wedge \tau_1'$ vérifient les hypothèses du lemme 3.4, par conséquent $s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1 \geq \tau_1 \wedge \tau_1'$. De la même façon, on montre que $s_{j_p} \cdots s_{j_1}\tau_1' \geq \tau_1 \wedge \tau_1'$. Puisque

$$s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1') \geq s_{t_q} \cdots s_{t_1}\tau_1 \qquad \text{et} \qquad s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1') \geq s_{j_p} \cdots s_{j_1}\tau_1,$$

on déduit que

$$s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1') \geq \tau_1 \wedge \tau_1' \qquad \text{et} \qquad s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1') \geq \tau_1 \wedge \tau_1'.$$

Mais η_2 est l'unique borne inférieure de $s_{j_p} \cdots s_{j_1}(\tau_1 \vee \tau_1')$ et $s_{t_q} \cdots s_{t_1}(\tau_1 \vee \tau_1')$, donc $\eta_2 \geq \tau_1 \wedge \tau_1'$ et comme $\eta_2 \geq \tau_2 \vee \tau_2'$, on conclut que $\eta_2 \geq (\tau_2 \vee \tau_2') \vee (\tau_1 \wedge \tau_1')$. Ce qui implique que $\eta \geq_g \pi \vee \pi'$. En utilisant les mêmes arguments à l'aide des vecteurs w_π', on montre que $\pi \wedge \pi' \geq_d \eta'$. □

Corollaire 3.4. — *Soient $\pi = (\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\pi' = (\tau_1', \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$ deux L-S chemins de type λ tels qu'il existe un treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$ qui contient τ_1, τ_1', τ_2 et τ_2'. Alors le coefficient de $p_{\pi\vee\pi'}p_{\pi\wedge\pi'}$ dans l'expression*

$$p_\pi p_{\pi'} = \sum_{\eta * \eta' \ standard} a_{\eta*\eta'} p_\eta p_{\eta'}$$

est égal à 1.

Démonstration. — D'après la proposition 3.2, on a

$$v_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'} = m^{\pi\vee\pi'} \otimes m^{\pi\wedge\pi'} + \sum_{\nu \geq_d \pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'} a^{\nu} m^{\nu},$$

il en résulte que pour tout enchaînement standard $\eta * \eta'$, $p_\eta p_{\eta'}(v_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'}) \neq 0$ seulement si $\eta * \eta' \geq_d \pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'$. Si on suppose que $a_{\eta*\eta'} \neq 0$, alors de la proposition précédente, on déduit que $\eta' = \pi \wedge \pi'$ et pour $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$, on a $\eta_2 \geq (\tau_2 \vee \tau_2') \vee (\tau_1 \wedge \tau_1')$. Rappelons que $\eta_1 \geq \tau_1 \vee \tau_1'$, par conséquent, ou bien $\eta = \pi \vee \pi'$, ou bien

$$\pi \vee \pi'(1) - \eta(1) \geq 0.$$

Mais $\pi(1) + \pi'(1) = \eta(1) + \eta'(1)$, donc $\eta(1) = \pi \vee \pi'(1)$, ce qui montre que $\eta = \pi \vee \pi'$. De là, on déduit que $p_\pi p_{\pi'}(v_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'}) = a_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'}$. Comme le coefficient de $m^\pi \otimes m^{\pi'}$ dans $v_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'}$ est égal à 1 (*voir* corollaire 3.3), on conclut que $a_{\pi\vee\pi' * \pi\wedge\pi'} = 1$. □

Lemme 3.9. — *Soient π, π', η et η' des L-S chemins de type λ tels que :*

(i) $\pi * \pi'$ non standard ;

(ii) $\eta * \eta'$ est standard ;

(iii) $p_\eta p_{\eta'}$ figure l'expression de $p_\pi p_{\pi'}$.

Alors $\psi(\pi) + \psi(\pi') \leq \psi(\eta) + \psi(\eta')$.

Démonstration. — Pour commencer, comme précédemment, on suppose que $\pi = (\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\pi' = (\tau_1', \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $\eta' = (\eta_1', \eta_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$, où on enlève le $\frac{1}{2}$ si les deux éléments qui figurent dans le chemin sont égaux.

De l'égalité des poids $\eta(1) + \eta'(1) = \pi(1) + \pi'(1)$, on déduit que pour toute racine simple α on a l'équation

$$n_\alpha^{\eta_1} + n_\alpha^{\eta_2} + n_\alpha^{\eta_1'} + n_\alpha^{\eta_2'} = n_\alpha^{\tau_1} + n_\alpha^{\tau_2} + n_\alpha^{\tau_1'} + n_\alpha^{\tau_2'}, \tag{3.12}$$

où on rappelle qu'on écrit $\tau(\lambda) = \lambda - \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha^\tau \alpha$. Grâce au théorème 3.7, de la condition (iii), nous savons que $p_\eta p_{\eta'}$ ne figure dans l'expression de $p_\pi p_{\pi'}$ que si $\eta_1 \geq \tau_1$ et $\eta_1 \geq \tau_1'$, ainsi que $\eta_2 \leq \tau_2$ et $\eta_2' \leq \tau_2'$, par conséquent

$$n_\alpha^{\eta_1} \geq \max(n_\alpha^{\tau_1}, n_\alpha^{\tau_1'}) \qquad \text{et} \qquad n_\alpha^{\eta_2'} \leq \min(n_\alpha^{\tau_2}, n_\alpha^{\tau_2'}). \tag{3.13}$$

Soit $\psi_\alpha(\pi) = \frac{1}{2}(N^{n_\alpha^{\tau_1}} + N^{n_\alpha^{\tau_2}})$. Il nous suffit donc de montrer que pour toute racine simple α, on a

$$\psi_\alpha(\pi) + \psi_\alpha(\pi') \leq \psi_\alpha(\eta) + \psi_\alpha(\eta').$$

Nous allons distinguer trois cas :

a) $\alpha \in \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1) \cap \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1')$;

b) $\alpha \notin \operatorname{supp} \eta$ et $\alpha \notin \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1) \cap \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1')$;

c) $\alpha \in \operatorname{supp} \eta$ et $\alpha \notin \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1) \cap \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1')$.

Dans le premier cas, on a $n_\alpha^{\eta_1} > \max(n_\alpha^{\tau_1}, n_\alpha^{\tau_2})$, donc pour N assez grand on a

$$\frac{1}{2} N^{n_\alpha^{\eta_1}} > \psi_\alpha(\pi) + \psi_\alpha(\pi^{'}),$$

ce qui donne le résultat.

Dans le deuxième cas, on a $n_\alpha^{\eta_1} = n_\alpha^{\eta_2}$. On peut supposer que α n'appartient pas au $\operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1)$, donc $n_\alpha^{\tau_1} = n_\alpha^{\eta_1}$ et $n_\alpha^{\eta_1} \geq \max(n_\alpha^{\tau_1^{'}}, n_\alpha^{\tau_2})$. Par conséquent, si $n_\alpha^{\eta_1} > \max(n_\alpha^{\tau_1^{'}}, n_\alpha^{\tau_2})$, alors en choisissant N assez grand, on déduit que

$$2N^{n_\alpha^{\eta_1}} > \psi_\alpha(\pi) + \psi_\alpha(\pi'),$$

ce qui nous donne le résultat. Sinon,

$$n_\alpha^{\tau_2} = n_\alpha^{\eta_1} \qquad \text{ou} \qquad n_\alpha^{\eta_1} = n_\alpha^{\tau_1^{'}}.$$

Dans ce cas, de (3.12), on obtient

$$n_\alpha^{\eta_1^{'}} + n_\alpha^{\eta_2^{'}} = n_\alpha^{\tau_2} + n_\alpha^{\tau_2^{'}} \qquad \text{ou} \qquad n_\alpha^{\eta_1^{'}} + n_\alpha^{\eta_2^{'}} = n_\alpha^{\tau_1^{'}} + n_\alpha^{\tau_2^{'}}.$$

Puis, à l'aide de (3.13), on voit que

$$n_\alpha^{\eta_1'} \geq \max(n_\alpha^{\tau_2}, n_\alpha^{\tau_2^{'}}) \qquad \text{ou} \qquad n_\alpha^{\eta_1'} \geq \max(n_\alpha^{\tau_1^{'}}, n_\alpha^{\tau_2^{'}}),$$

ce qui donne le résultat. Dans le troisième cas, on peut supposer que α n'est pas dans $\operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1)$. Donc d'après le lemme 3.8, on constate que $n_\alpha^{\eta_2} \geq n_\alpha^{\tau_1^{'}}$, $n_\alpha^{\tau_2}$, puis on conclut en procédant exactement comme dans le deuxième cas. □

Proposition 3.4. — *Soient* $\pi = (\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\pi^{'} = (\tau_1', \tau_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ *et* $\eta' = (\eta_1', \eta_2', 0, \frac{1}{2}, 1)$ *dans* $\mathbb{B}(\lambda)$ *vérifiant les hypothèses du lemme 3.9. Alors*

$$\psi(\pi) + \psi(\pi^{'}) = \psi(\eta) + \psi(\eta^{'})$$

si et seulement si il existe un treillis distributif $\mathcal{U}^\lambda$ *qui contient* τ_1*,* τ_2*,* τ_1' *et* τ_2' *et* $\eta * \eta' = \pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'$.

Démonstration. — Supposons tout d'abord que τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2' sont dans un treillis $\mathcal{U}^\lambda$ et montrons qu'on ne peut avoir l'égalité que si $\eta * \eta' = \pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'$. Remarquons que de la proposition 3.3, il résulte que $\eta_1 = \tau_1 \vee \tau_1'$, sinon du lemme précédent, on voit que $\psi(\eta) + \psi(\eta') > \psi(\pi) + \psi(\pi')$.

Puisque, dans ce cas on a $\eta_2 \geq (\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2')$, alors : ou bien on a égalité, ou bien

$$(\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2')(\lambda) - \eta_2(\lambda) > 0.$$

Donc, il existe au moins une racine simple γ telle que $n_\gamma^{\eta_2} > n_\gamma^{(\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2')}$, mais

$$n_\gamma^{(\tau_1 \wedge \tau_1') \vee (\tau_2 \vee \tau_2')} = \max\big(n_\gamma^{\tau_2}, n_\gamma^{\tau_2'}, \min(n_\gamma^{\tau_1}, n_\gamma^{\tau_1'})\big). \tag{3.14}$$

Si on suppose que γ n'appartient pas au $\mathrm{supp}(\eta_1, \tau_1)$, alors on a $n_\gamma^{\tau_1} = n_\gamma^{\eta_1}$ et pour N assez grand on obtient

$$N^{n_\gamma^{\eta_2}} > N^{n_\gamma^{\tau_2}} + \psi(\pi'),$$

ce qui implique directement le résultat. Puisque nous avons montré que

$$\psi_{\gamma'}(\pi) + \psi_{\gamma'}(\pi^{'}) \geq \psi_{\gamma'}(\eta) + \psi_{\gamma'}(\eta^{'})$$

pour toute racine simple γ' (*voir* lemme 3.9), on déduit que

$$\psi(\eta) + \psi(\eta') > \psi(\pi) + \psi(\pi').$$

Par conséquent, nous pouvons supposer que $\eta = \pi \vee \pi'$. Puisque nous avons montré que $\pi' \wedge \pi' \geq_d \eta'$, alors $\eta_2' \leq (\tau_2 \wedge \tau_2')$. Si il ya égalité, alors de l'équation des poids

$$\pi(1) + \pi'(1) = \eta(1) + \eta'(1),$$

et du fait que les poids $\delta(\lambda)$, pour δ dans W^λ, sont de multiplicité 1, on déduit que $\pi' = \eta'$. Sinon, de l'égalité des poids $\eta'(1)$ et $\pi \wedge \pi'$, on déduit que pour toute racine simple γ, on a

$$n_\gamma^{\eta_1'} \geq n_\gamma^{(\tau_1 \wedge \tau_1') \wedge (\tau_2 \vee \tau_2')}. \tag{3.15}$$

De plus, pour au moins une racine simple cette inégalité est stricte et chaque fois qu'il y a égalité, on a $n_\gamma^{\tau_2 \wedge \tau_2'} = n_\gamma^{\eta_2'}$, donc $\psi_\gamma(\eta') > \psi_\gamma(\pi')$. De plus, par définition de $\pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'$, pour toute racine simple γ, on a

$$n_\gamma^{\tau_1 \vee \tau_1'} = \max(n_\gamma^{\tau_1}, n_\gamma^{\tau_1'}), \qquad n_\gamma^{(\tau_2 \wedge \tau_2')} = \min(n_\gamma^{\tau_2}, n_\gamma^{\tau_2'}),$$

et

$$n_\gamma^{(\tau_1 \wedge \tau_1') \wedge (\tau_2 \vee \tau_2')} = \min\bigl(n_\gamma^{\tau_1}, n_\gamma^{\tau_1'}, \max(n_\gamma^{\tau_2}, n_\gamma^{\tau_2'})\bigr).$$

Donc, en utilisant ces égalités, on déduit directement que $\psi(\pi) + \psi(\pi') = \psi(\pi \vee \pi') + \psi(\pi \wedge \pi')$.

Pour avoir l'équivalence, il suffit donc de montrer que si on a l'égalité pour la fonction, les éléments τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2' sont dans un même treillis distributif.

Notons que si l'intersection de $\mathrm{supp}(\tau_1, \eta_1)$ et $\mathrm{supp}(\tau_1^{'}, \eta_1)$ n'est pas vide, alors il existe une racine simple γ telle que $n_\gamma^{\eta_1} > \max(n_\gamma^{\tau_1}, n_\gamma^{\tau_1^{'}})$, d'où

$$\psi_\gamma(\pi) + \psi_\gamma(\pi^{'}) < \psi_\gamma(\eta) + \psi_\gamma(\eta^{'}),$$

ce qui nous donne une contradiction. Il en résulte que $\mathrm{supp}(\tau_1, \eta_1)$ ne rencontre pas $\mathrm{supp}(\tau_1^{'}, \eta_1)$. En vertu du lemme 2.15, on déduit que $\eta_1 = \tau_1 \vee \tau_1^{'}$ est l'unique borne supérieure de τ_1 et $\tau_1^{'}$ dans W^λ.

Le reste de la preuve sera donnée en deux étapes :

Première étape. — η est un chemin trivial $\eta = (\eta_1, 0, 1)$, on procède par récurrence sur $\ell(\eta_1)$. Si $\ell(\eta_1) \leq 1$, il n'y a rien à prouver.

Supposons que $\ell(\eta_1) > 1$. Si $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta_1)$ n'est pas orthogonal au $\operatorname{supp}(\tau_1^{'}, \eta_1)$, alors il existe un couple de racines simples (γ, γ') dans $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta_1) \times \operatorname{supp}(\tau_1^{'}, \eta_1)$ tel que $\langle \gamma, \gamma'^{\vee} \rangle \neq 0$. S'il existe

$$\gamma^{''} \in \operatorname{supp} \pi \cap \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1^{'}),$$

alors $n_{\gamma''}^{\eta_1} > \max(n_{\gamma''}^{\tau_2}, n_{\gamma''}^{\tau_1'})$, donc pour N assez grand

$$N^{n_{\gamma''}^{\eta_1}} > \psi_{\gamma''}(\pi) + \psi_{\gamma''}(\pi')$$

et nous en déduisons que

$$\psi_{\gamma''}(\pi) + \psi_{\gamma''}(\pi^{'}) < \psi_{\gamma''}(\eta) + \psi_{\gamma''}(\eta^{'}),$$

ce qui nous donne une contradiction. Par conséquent,

$$\operatorname{supp} \pi \cap \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1^{'}) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp} \pi' \cap \operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1) = \varnothing. \tag{3.16}$$

Supposons que $\tau_1' < \eta_1$ et qu'il existe α une racine positive α telle que $\tau_1' \leq s_\alpha \eta_1 < \eta$ et le support de α est orthogonal au $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta_1)$. Comme λ est classique et que le support de α ne rencontre pas $\operatorname{supp} \pi$, on déduit que le support de α est orthogonal au $\operatorname{supp} \pi$. Remarquons que dans ce cas

$$\psi(\pi) + \psi(\pi') = \psi(\eta) + \psi(\eta') \iff \psi(s_\alpha \pi) + \psi(\pi') = \psi(s_\alpha \eta_1) + \psi(\eta'),$$

où $s_\alpha \pi = (s_\alpha \tau_1, s_\alpha \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$ et $s_\gamma \eta = (s_\gamma \eta_1, 0, 1)$. Par hypothèse de récurrence sur $\ell(s_\alpha \eta_1)$, on déduit que $s_\alpha \tau_1$, $s_\alpha \tau_2$, τ_1' et τ_2' appartiennent à un treillis distributif, de plus $(s_\alpha \eta_1, 0, 1) = (s_\alpha \pi) \vee \pi'$ et $\eta' = s_\alpha \pi \wedge \pi'$. Soit $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_t}$ une expression compatible avec $s_\alpha \eta * \eta'$, donc il existe une expression équivalente $s_{i_1} \cdots s_{i_t}$ et $p \leq q \leq t+1$ tels que $s_{i_q} \cdots s_{i_t} = s_\alpha \tau_2$ et $s_{i_p} \cdots s_{i_t} = s_\alpha \tau_1$. D'après ce qui précède les supports des racines $\alpha_{i_{q-1}}, \ldots, \alpha_{i_1}$ sont orthogonaux au support de α, ce qui implique que l'expression $s_\alpha s_{i_1} \cdots s_{i_t}$ est une expression compatible avec $\eta_1 * \eta'$ et le treillis associé à la classe d'équivalence de la chaîne $\kappa_j = s_{i_j} \cdots s_{i_t}$, $j = 0, \ldots, t+1$, où $\kappa_0 = \eta_1$ et $\kappa_{t+1} = \mathrm{Id}$, contient τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2'.

Si $\tau_1' = \eta_1$, alors on considère τ_1 à la place de τ_1', et si $\tau_1 = \tau_1' = \eta_1$, alors du lemme 3.6, on conclut qu'il existe un treilllis distributif qui contient les éléments en question.

Si pour toute racine positive α telle que $\tau_1' \leq s_\alpha \eta_1 < \eta_1$, le support de α n'est pas orthogonal au $\operatorname{supp}(\eta_1, \tau_1)$, alors on choisit α telle que $\tau_1 \leq s_\alpha \eta_1 < \eta_1$ et on procède de la même façon. Si aucune des racines positives ne satisfait cette condition, alors τ_1, τ_1' et η_1 vérifient les hypothèses du lemme 2.17, donc on peut se restreindre au cas (γ, γ') unique.

Rappelons que le corollaire 2.7 nous dit qu'il existe deux racines positives α et β, ainsi qu'un élément $\kappa = s_\alpha \tau \wedge s_\beta \tau'$ dans W^λ tels que $s_\alpha \kappa < \tau_1$, $s_\beta \kappa < \tau_1'$, pour tous $\delta \leq \tau_1$ et $\delta \leq \tau_2$, on a montré que $\delta \leq s_\alpha s_\beta \kappa$ ou $\delta \leq s_\beta s_\alpha \kappa$. De plus, γ est dans le support de α et γ' est dans le support de β, ainsi que

$$\operatorname{supp}\big(\tau_1, s_\beta s_\alpha \kappa\big) \subset \operatorname{supp}\big(\tau_1', \eta\big) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp}\big(\tau_1', s_\alpha s_\beta \kappa\big) \subset \operatorname{supp}\big(\tau_1, \eta\big).$$

Étant donné que toute suite de diviseurs entre $X(\tau_1)$ et $X(\tau_2)$, et toute suite de diviseurs entre $X(\tau_1')$ et $X(\tau_2')$ sont des suites de diviseurs doubles et que λ est un poids classique, mais aussi rappelons 3.16, il en résulte que

$$\gamma'' \in \operatorname{supp} \pi \Longrightarrow \gamma'' \text{ orthogonale au } \operatorname{supp}(\tau_1, s_\beta s_\alpha \kappa),$$

de même,

$$\gamma'' \in \operatorname{supp} \pi' \Longrightarrow \gamma'' \text{ orthogonale au } \operatorname{supp}(\tau_1', s_\alpha s_\beta \kappa).$$

Puisque γ est dans le support de α et γ' dans le support de β, on déduit que γ n'est pas dans $\operatorname{supp} \pi$ et de même γ' n'est pas dans $\operatorname{supp} \pi'$, mais ceci implique que

$$n_\gamma^{\tau_1} = n_\gamma^{\tau_2} \qquad \text{et} \qquad n_{\gamma'}^{\tau_1'} = n_{\gamma'}^{\tau_2'}.$$

Notons que

$$s_\alpha s_\beta \kappa(\lambda) = s_\beta \kappa(\lambda) - 2\alpha \qquad \text{et} \qquad s_\beta s_\alpha \kappa(\lambda) = s_\alpha \kappa(\lambda) - 2\beta,$$

il s'ensuit que $n_\gamma^{s_\alpha s_\beta \kappa} = n_\gamma^{\eta_1} - 2$ et $n_{\gamma'}^{s_\beta s_\alpha \kappa} = n_{\gamma'}^{\eta_1} - 2$, donc $n_\gamma^{\eta_2'} \leq n_\gamma^{s_\alpha s_\beta \kappa}$ ou $n_{\gamma'}^{\eta_2'} \leq n_{\gamma'}^{s_\beta s_\alpha \kappa}$. Mais le corollaire 2.14 nous dit que

$$n_{\gamma'}^{\tau_1'} = n_{\gamma'}^{\eta_1} - 1 \qquad \text{et} \qquad n_\gamma^{\tau_1} = n_\gamma^{\eta_1} - 1.$$

Par conséquent, on a

$$n_\gamma^{\eta_1} = n_\gamma^{\tau_1'} = n_\gamma^{\tau_2'} \qquad \text{et} \qquad n_{\gamma'}^{\eta_1} = n_{\gamma'}^{\tau_1} = n_{\gamma'}^{\tau_2},$$

sinon $\psi(\pi) + \psi(\pi') < \psi(\eta_1) + \psi(\eta')$. À l'aide de (3.12) et de ces dernières égalités, on obtient

$$n_\gamma^{\eta_1'} + n_\gamma^{\eta_2'} = n_\gamma^{\tau_1} + n_\gamma^{\tau_2} \qquad \text{et} \qquad n_\gamma^{\eta_1'} + n_\gamma^{\eta_2'} = n_{\gamma'}^{\tau_1'} + n_{\gamma'}^{\tau_2'}.$$

Rappelons que $n_\gamma^{\tau_1} = n_\gamma^{\tau_2}$, que $n_\gamma^{\tau_1'} = n_\gamma^{\tau_2'}$ et que $n_{\gamma'}^{\eta_2'} \leq n_{\gamma'}^{\eta_1} - 2$ ou $n_{\gamma'}^{\eta_2'} \leq n_\gamma^{\eta_1} - 2$, donc, ou bien $n_\gamma^{\eta_1'} > n_{\gamma'}^{\tau_1'}$, ou bien $n_\gamma^{\eta_1'} > n_\gamma^{\tau_1}$, et dans les deux cas, on obtient l'inégalité $\psi(\eta) + \psi(\eta') > \psi(\pi) + \psi(\pi')$, d'où une contradiction.

On peut ainsi supposer que, $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta)$ est orthogonal au $\operatorname{supp}(\tau_1', \eta)$. En considérant (3.16) et le fait que λ est un poids classique, on déduit que $\operatorname{supp}(\pi) \cup \operatorname{supp}(\tau_1, \eta)$ est orthogonal au $\operatorname{supp}(\tau_1', \eta)$ et $\operatorname{supp}(\pi') \cup \operatorname{supp}(\tau_1', \eta)$ est orthogonal au $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta)$. ce qui implique que τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2' appartiennent à un treillis distributif associé à une classe d'équivalence de chaînes.

Deuxième étape. — On procède par récurrence sur le cardinal de $\operatorname{supp} \eta$. Soit γ une racine simple dans $\operatorname{supp} \eta$ telle que $\eta_1 > s_\gamma \eta_1 \geq \eta_2$. Soit $s_\gamma \eta = (s_\gamma \eta_1, \eta_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$. Comme l'intersection de $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta_1)$ et $\operatorname{supp}(\tau_1', \eta_1)$ est vide, on peut supposer que γ n'est pas dans $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta_1)$, et donc γ orthogonale au $\operatorname{supp}(\tau_1, \eta_1)$.

Rappelons que par construction de la base de $V_{2\lambda}$ formée des vecteurs w_π, on a $Y_\gamma w_{s_\gamma \eta * \eta'} = w_{\eta * \eta'}$. En considérant l'image de $w_{\eta * \eta'}$ dans $\mathrm{M}_{\lambda, \mathcal{R}}^{\otimes \frac{2l}{d}}$, on constate que $m^\pi \otimes m^{\pi'}$ est un facteur de $w_{\eta * \eta'}$ seulement s'il existe $m_{\mu_1} \otimes m_{\mu_2} \otimes m_{\mu_3} \otimes m_{\mu_4}$ un facteur dans $v_{s_\gamma\eta*\eta'}$, tel que $m^\pi \otimes m^{\pi'} = F_\gamma^{(h_1)} m_{\mu_1} \otimes F_\gamma^{(h_2)} m_{\mu_2} \otimes F_\gamma^{(h_3)} m_{\mu_3} \otimes F_\gamma^{(h_4)} m_{\mu_4}$ où $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = l_\gamma$. Mais cette égalité n'est possible que si :

$$\mu_1 \leq s_\gamma\eta_1,\ \tau_1, \qquad \mu_2 \leq s_\gamma\eta_1,\ \tau_2, \qquad \mu_3 \leq s_\gamma\eta_1,\ \tau_1' \qquad \text{et} \qquad \mu_4 \leq s_\gamma\eta_1,\ \tau_2'.$$

Ainsi, du fait que γ est orthogonale au $\mathrm{supp}(\eta_1, \tau_1)$, on a : $\mu_1 \leq s_\gamma\tau_1$. En effet, si $F_\gamma^h m_{\mu_1} = m_{\tau_1}$ et $h \leq l_\gamma$, alors

$$\mu_1 - s_\gamma\eta_1(\lambda) = (h - l_\gamma)\gamma + s_\gamma\tau_1(\lambda) - s_\gamma\eta_1(\lambda) > 0,$$

mais $\mathrm{supp}(s_\gamma\tau_1, s_\gamma\eta_1) = \mathrm{supp}(\tau_1, \eta_1)$ qui est orthogonal à γ, donc de la dernière équation, on déduit que $h = l_\gamma$ et donc $\mu = s_\gamma\tau_1(\lambda)$, ce qui induit que $m_\mu = m_{s_\gamma\tau_1}$ et $h_2 = h_3 = h_4 = 0$. Par conséquent $\mu_2 = \tau_2$, $\mu_3 = \tau_1'$ et $\mu_4 = \tau_2'$. Ce qui veut dire que $m^{s_\gamma\pi} \otimes m^{\pi'}$ est un facteur de $w_{s_\gamma\eta*\eta'}$, où $s_\gamma\pi = (s_\gamma\tau_1, \tau_2, 0, \frac{1}{2}, 1)$. En particulier $s_\gamma\pi$, π', $s_\gamma\eta$, η' vérifient les hypothèses de la proposition. Notons que

$$\begin{array}{rcll}
\psi_{\gamma'}(\pi) + \psi_{\gamma'}(\pi') &=& \psi_{\gamma'}(s_\gamma\pi) + \psi_{\gamma'}(\pi') & \quad \text{pour } \gamma' \neq \gamma, \\
\psi_{\gamma'}(\eta) + \psi_{\gamma'}(\eta') &=& \psi_{\gamma'}(s_\gamma\eta) + \psi_{\gamma'}(\eta') & \quad \text{pour } \gamma' \neq \gamma, \\
\psi_{\gamma}(s_\gamma\pi) + \psi_{\gamma}(\pi') &=& \psi_{\gamma}(\pi) + \psi_{\gamma}(\pi') - \dfrac{1}{2}(N^{n_\gamma^{\tau_1}} - N^{n_\gamma^{\tau_1}-2}), & \\
\psi_{\gamma}(s_\gamma\eta) + \psi_{\gamma}(\eta') &=& \psi_{\gamma}(\eta) + \psi_{\gamma}(\eta') - \dfrac{1}{2}(N^{n_\gamma^{\eta_1}} - N^{n_\gamma^{\eta_1}-2}), &
\end{array}$$

ainsi que $n_\gamma^{\tau_1} = n_\gamma^{\eta_1}$; ce qui nous permet de conclure que

$$\psi(s_\gamma\pi) + \psi(\pi') = \psi(s_\gamma\eta) + \psi(\eta') \iff \psi(\pi) + \psi(\pi') = \psi(\eta) + \psi(\eta').$$

Par hypothèse de récurrence, on déduit que $\psi(\pi)+\psi(\pi') = \psi(\eta)+\psi(\eta')$ si seulement si $s_\alpha\eta$, $s_\alpha\pi$, η', π' appartiennent à un treillis distributif associé à une classe d'équivalence de chaînes . Soit $s_\gamma\eta_1 = s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ une expression correspondante à une chaîne dans cette classe. Il s'ensuit que τ_1, τ_2, τ_1' et τ_2' appartiennent à tout treillis distributif, contenant la chaîne associée à l'expression $\eta_1 = s_\gamma s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$. De plus, remarquons que $s_\gamma\tau_1 = \tau_1 \wedge s_\gamma\eta_1$ et que $s_\gamma\eta_1 \geq \tau_1'$, donc

$$\begin{array}{rcl}
(s_\gamma\tau_1) \wedge \tau_1' &=& (\tau_1 \wedge s_\gamma\eta_1) \wedge \tau_1' \\
&=& \tau_1 \wedge \big((s_\gamma\eta_1) \wedge \tau_1'\big) \\
&=& \tau_1 \vee \tau_1'.
\end{array}$$

Par conséquent, $\eta * \eta' = \pi \vee \pi' * \pi \wedge \pi'$, ce qui achève la preuve. □

Bibliographie

[1] Aigner (M.), *Combinatorial theory*, Springer (1979).

[2] Andersen (H. H.), "Schubert varieties and Demazure's character formula", *Invent. Math.* 79 (1985), n° 3, p. 611–618.

[3] Birkhoff (G.), *Lattice theory*, Third edition, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV (1967).

[4] Bourbaki (N.), *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5 et 6, Hermann (1968).

[5] Brion (M.), "Invariants et covariants des groupes algébriques réductifs", notes de l'école d'été *Théorie des invariants*, Monastir (1996).

[6] Chirivi (R.), preprint.

[7] De Concini (C.), Eisenbud (D.) et Procesi (C.), *Hodge algebras,* Astérisque 91, Société Mathématique de France (1982).

[8] De Concini (C.) et Lakshmibai (V.), "Arithmetic Cohen Macaulayness and arithmetic normality for Schubert varieties", *Amer. J. Math.* 103 (1981), n° 5, p. 835–850.

[9] Dehy (R.), "Combinatorial results on Demazure modules", *J. Algebra* 205 (1998), n° 2, p. 505–524.

[10] Dehy (R.) et Yu (R. W. T.), "Polytopes associated to certain Demazure module of $sl(n+1)$", *J. of algebraic combinatorics* 10 (1999), p. 149-172.

[11] Eisenbud (D.), *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer (1995).

[12] Fulton (W.), *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press (1993).

[13] Gonciulea (N.) et Lakshmibai (V.), "Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties", *Transform. Groups* 1 (1996), n° 3, p. 215–248.

[14] Ewald (G.), *Combinatorial convexity and algebraic geometry,* Graduate Texts in Mathematics 168, Springer (1996).

[15] Hartshorne (R.), *Algebraic geometry,* Graduate Texts in Mathematics 52, Springer (1977).

[16] Hibi (T.), “Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws”, *Commutative algebra and combinatorics* (1985), p. 93–109.

[17] Hiller (H.), *Geometry of Coxeter groups,* Research Notes in Mathematics 54, Pitman (Advanced Publishing Program) (1982).

[18] Humphreys (J. E.), *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29, Cambridge University Press (1990).

[19] Jantzen (J. C.), *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics 131, Academic Press (1987).

[20] Grossberg (M.) et Karshon (Y.), “Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations”, *Duke Math. J.* 76 (1994), n° 1, p. 23–58.

[21] Kempf (G. R.), “Linear systems on homogeneous spaces”, *Ann. of Math.* 2, 103, (1976), n° 3, p. 557–591.

[22] Kempf (G. R.) et Ramanathan (A.), “Multicones over Schubert varieties”, *Invent. Math.* 87 (1987), n° 2, p. 353–363.

[23] Kumar (S.), “Demazure character formula in arbitrary Kac Moody setting”, *Invent. Math.* 89, (1987), n° 2, p. 395–423.

[24] Lakshmibai (V.), Littelmann (P.) et Magyar (P.), “Standard monomial theory and applications”, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 514, Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997), p. 319–364, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[25] Lakshmibai (V.), Musili (C.) et Seshadri (C. S.), “Geometry of G/P III”, Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A Math. Sci. 88, 1979, n° 3, p. 93–177.

[26] Lakshmibai (V.) et Seshadri (C. S.), “Geometry of G/P V”, *J. Algebra* 100 (1986), n° 2, p. 462–557.

[27] Lakshmibai (V.) et Seshadri (C. S.), “Standard monomial theory”, Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989), p. 279–322, Manoj Prakashan, Madras, 1991.

[28] Lakshmibai (V.) et Weyman (J.), “Multiplicities of points on a Schubert variety in a minuscule G/P”, *Adv. Math.* 84 (1990), n° 2, p. 179–208.

[29] Littelmann (P.), “A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras”, *Invent. Math.* 116 (1994), n° 1–3, p. 329–346.

[30] Littelmann (P.), “Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras”, *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998), n° 3, p. 551–567.

[31] Littelmann (P.), "Paths and root operators in representation theory", *Ann. of Math.* 2, 142 (1995), n° 3, p. 499–525.

[32] Lusztig (G.), *Introduction to quantum groups,* Progress in Mathematics 110, Birkhäuser (1993).

[33] Matsumura (H.), *Commutative algebra,* Mathematics Lecture Note Series 56, Benjamin (1980).

[34] Mehta (V. B.) et Ramanathan (A.), "Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties", *Ann. of Math.* 2, 122 (1985), n° 1, p. 27–40.

[35] Mathieu (O.), "Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications", *Compositio Math.* 69 (1989), n° 1, p. 37–60.

[36] Mathieu (O.), "Le modèle des chemins, (d'après P. Littelmann)", *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1994/95, Astérisque n° 237 (1996), p. 209–224.

[37] Mumford (D.), *Abelian varieties,* Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, n° 5, Oxford University Press (1970).

[38] Proctor (R. A.), "Bruhat lattices, plane partition generating functions, and minuscule representations", *European J. Combin.* 5 (1984), n° 4, p. 331–350.

[39] Ramanathan (A.), "Equations defining Schubert varieties and Frobenius splitting of diagonals", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* n° 65 (1987), p. 61–90.

[40] Seshadri (C. S.), "Geometry of G/P", *I. Theory of standard monomials for minuscule representations. C. P. Ramanujam—a tribute*, Springer (1978), p. 207–239.

[41] Stembridge (J. R.), "On the fully commutative elements of Coxeter groups', *J. Algebraic Combin.* 5 (1996), n° 4, p. 353–385.

[42] Sturmfels (B.), *Gröbner bases and convex polytopes*, University Lecture Series 8, American Mathematical Society (1996).

[43] Wagner (D. G.), "Singularities of toric varieties associated with finite distributive lattices", *J. Algebraic Combin.* 5 (1996), n° 2, p. 149–165.