

# Comportements asymptotiques et rigidités des géométries de Hilbert

Édith SOCIÉ-MÉTHOU

20 novembre 2000



# Introduction.

Au cours du  $XIX^{\text{ème}}$  siècle, la question de savoir si le postulat des parallèles est indépendant ou non du système d'Euclide, est résolue. Vers 1868, Beltrami décrit un premier modèle concret d'une géométrie qui satisfait les axiomes d'Euclide sans vérifier le postulat des parallèles. Dès 1890, Hilbert remarque que le modèle donné par Beltrami, plus connu aujourd'hui sous le nom de modèle de Klein de la géométrie hyperbolique, se généralise pour définir des espaces métriques plus généraux, appelés géométries de Hilbert. De même que le modèle de Klein est le seul modèle de variété riemannienne à courbure constante strictement négative, les géométries de Hilbert apparaissent comme les seuls modèles de variétés de Finsler projectivement plates à courbure constante strictement négative ([Fun29, Ber30]). Rappelons qu'une variété de Finsler est une variété munie d'un champ de normes ne provenant pas nécessairement d'un produit scalaire comme dans le cas riemannien. Ces géométries très concrètes permettent donc de mieux comprendre les structures finslériennes et de mettre en évidence des différences fondamentales de comportement entre les cadres riemanniens et finslériens.

Cette thèse expose quelques résultats concernant les géométries de Hilbert. Plus précisément, dans une première partie comprenant les chapitres 1 et 2, on s'intéresse essentiellement à des propriétés métriques et en particulier au comportement asymptotique des bonnes géométries de Hilbert. La seconde partie, formée par les chapitres 3 et 4, concerne les isométries de telles géométries et se termine par un théorème de rigidité. Cette dernière partie doit beaucoup à Thomas Delzant qui est à l'origine de mon intérêt pour les groupes d'isométries, et a suivi pas à pas mes avancées dans leur étude.

Les méthodes utilisées font essentiellement appel aux outils usuels de géométrie affine et projective, d'algèbre linéaire et d'analyse élémentaires. En effet, les géométries de Hilbert admettent très peu de contrôle uniforme, il est donc difficile d'obtenir des estimations avec les outils finslériens; ces derniers sont encore peu développés, et pour la plupart, ils sont définis en coordonnées locales dans des cartes et n'ont pas encore été interprétés géométriquement. Enfin, les géométries de Hilbert étant très concrètes bien qu'assez générales, il est possible et éclairant d'en faire une étude approfondie directe.

Rappelons rapidement la définition d'une géométrie de Hilbert. C'est la donnée d'un domaine ouvert convexe borné  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  muni d'une distance  $h$ , appelée métrique de Hilbert, telle que la distance entre deux points distincts  $x$  et  $y$  de  $C$  est donnée par le réel  $\ln[y^-, x, y, y^+]$  où le point  $y^-$ , respectivement  $y^+$ , est le point d'intersection entre la frontière

du convexe  $C$  avec la demi-droite  $[y, x)$  respectivement  $[x, y)$  et où  $[y^-, x, y, y^+]$  désigne le birapport du quadruplet  $(y^-, x, y, y^+)$ .

Au début de la première partie de cette thèse, certaines propriétés métriques des géométries de Hilbert (description des boules, topologie métrique qui coïncide avec la topologie affine sous-jacente,...) sont rappelées, et un premier résultat de rigidité obtenu. Il assure que deux géométries de Hilbert coïncidant sur un ouvert correspondent en fait à un même convexe. Puis, on aborde les aspects finslériens de ces géométries, plus précisément, on montre que la métrique d'une géométrie de Hilbert  $(C, h)$  provient d'une structure finslérienne si et seulement si la frontière du convexe  $C$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et pour toute section plane de  $C$ , le hessien de la frontière du convexe obtenu est non dégénéré en tout point excepté au plus le long d'un segment. Pour de telles géométries de Hilbert, les géodésiques sont les traces des droites sur le convexe, et la courbure finslérienne d'une telle variété est constante négative ([Fun29, Egl95]). Récemment, B. Colbois et P. Verovic ([CV00]) ont retrouvé le résultat fréquemment admis mais dont il ne semblait pas avoir de démonstration écrite, selon lequel une géométrie de Hilbert riemannienne correspond nécessairement à un convexe borné par un ellipsoïde. Leur démonstration repose sur l'utilisation astucieuse de résultats du milieu du  $XX^{\text{ème}}$  (Beltrami, Busemann, Kelly et Straus). Le chapitre 1 se termine par la démonstration de la proposition:

**Proposition:** *Une géométrie de Hilbert riemannienne (a priori seulement) sur un ouvert correspond à un convexe ayant pour frontière un ellipsoïde, donc est en particulier riemannienne partout.*

L'intérêt de la démonstration proposée dans cette thèse, outre le fait qu'on obtient un résultat un peu plus général, réside dans le fait qu'elle se fait de manière directe et explicite comment et pourquoi une isométrie locale finslérienne entre deux géométries de Hilbert s'étend en une application projective, isométrie globale entre ces deux espaces.

Les variétés riemanniennes courbées négativement vérifient de nombreuses propriétés de convexité, il est donc naturel de s'interroger s'il en est de même des variétés de Finsler à courbure négative. C'est l'objet du chapitre 2 qui traite en particulier de la convexité de la fonction distance entre deux géodésiques sécantes. Au départ, il s'agissait de savoir si la convexité de ces fonctions subsistait pour les variétés finslériennes courbées négativement. Mais, une étude dans ce cadre général s'est révélée infructueuse, je me suis donc rapidement concentrée sur l'exemple plus concret de la géométrie de Hilbert pour répondre négativement à cette question.

Le fait qu'une métrique de Hilbert provienne d'une structure finslérienne, n'exclut pas la présence de segments dans la frontière du convexe correspondant, et l'existence de plats dans la frontière ne se voit a priori pas localement. Cependant le comportement asymptotique de la fonction distance entre deux géodésiques sécantes change radicalement selon qu'elles arrivent ou non sur un segment de la frontière. Nous en ferons une étude détaillée et prouverons en particulier le théorème

**Théorème:** *Soit  $(C, h)$  une géométrie de Hilbert dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  et à hessien défini positif, alors la fonction distance entre deux géodésiques sécantes est asymp-*

*totiquement convexe.*

Cependant, cette fonction bien que convexe au voisinage de l'infini, n'est pas nécessairement globalement convexe. A l'opposé, une telle fonction n'est jamais asymptotiquement convexe quand les géodésiques arrivent sur un même segment affine du bord, et son comportement peut être très varié comme on le verra sur des exemples.

D'autre part, on démontre dans ce même chapitre 2, que les géométries de Hilbert correspondant à des convexes non strictement convexes ne sont pas hyperboliques au sens de Gromov et que leur bord visuel n'est plus un espace séparé. Pour des géométries de Hilbert strictement convexes, nous verrons que le bord visuel est homéomorphe à la frontière topologique du convexe comme dans le cas du modèle de Klein. En revanche, la question de leur hyperbolicité au sens de Gromov reste ouverte.

Par ailleurs, il est connu que les isométries des géométries de Hilbert correspondant à des convexes strictement convexes sont les restrictions des applications projectives conservant le convexe ([BK53, dlH93]). Dans le chapitre 3, on prouve que cette description des isométries se généralise aux bonnes géométries de Hilbert c'est à dire aux géométries de Hilbert pour lesquelles il y a unicité de la géodésique reliant deux points quelconques. La démonstration proposée, largement inspirée de [dlH93], utilise une notion "faible" d'isométrie à savoir que l'on n'impose pas a priori d'hypothèse de surjectivité.

Le chapitre 4 est une étude plus approfondie des isométries des bonnes géométries de Hilbert pour lesquelles la frontière du convexe est de classe  $\mathcal{C}^2$ . L'idée de cette étude est d'obtenir un analogue au résultat de J. Lelong-Ferrand ([LF71]). En fait, le cadre de la géométrie de Hilbert n'intervient plus dans ce dernier chapitre puisque l'on s'intéresse aux automorphismes des corps convexes c'est-à-dire aux applications projectives conservant un convexe. Ces applications sont classifiées suivant leur nombre de points fixes à l'intérieur et sur la frontière du convexe. Un raisonnement algébrique pour lequel les discussions avec Thomas Delzant ont été particulièrement précieuses et déterminantes, permet d'assurer qu'un corps convexe dont tous les automorphismes ont un point fixe à l'intérieur du corps, admet un groupe d'automorphismes compact. Une étude des autres cas permet d'obtenir le théorème suivant:

**Théorème:** *Le groupe d'isométries des automorphismes d'un corps convexe dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  et à hessien défini en tout point, est compact dès que le corps convexe n'est pas un ellipsoïde.*

Au cours de la preuve de ce théorème, on obtient aussi que les quotients d'une géométrie de Hilbert associée à un tel convexe, par un sous-groupe discret non trivial de son groupe d'isométries n'est jamais une variété sans bord (sauf si on avait un modèle de Klein).



# Table des matières

<b>1</b>	<b>La géométrie de Hilbert.</b>	<b>1</b>
1.1	Le modèle et ses premières propriétés. . . . .	1
1.1.1	Le modèle. . . . .	1
1.1.2	La structure projective. . . . .	3
1.1.3	Description des boules métriques. . . . .	4
1.2	Quelques propriétés des distances de Hilbert. . . . .	6
1.2.1	La topologie. . . . .	6
1.2.2	Les géodésiques. . . . .	6
1.2.3	Géométries coïncidant sur un ouvert. . . . .	7
1.3	Aspects finlériens des géométries de Hilbert. . . . .	7
1.3.1	La métrique de Finsler. . . . .	8
1.3.2	Les géodésiques variationnelles. . . . .	12
1.3.3	La courbure. . . . .	13
1.3.4	Un résultat de rigidité. . . . .	14
1.3.5	Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une variété riemannienne. . . . .	14
<b>2</b>	<b>Convexité en géométrie de Hilbert.</b>	<b>21</b>
2.1	Convexité de certains ensembles. . . . .	21
2.1.1	Les boules métriques. . . . .	21
2.1.2	L'ensemble des points à distance constante d'un convexe. . . . .	22
2.2	Hyperbolicité au sens de Gromov. . . . .	23
2.2.1	Définition. . . . .	23
2.2.2	Cas des géométries de Hilbert. . . . .	23
2.3	Le bord visuel des bonnes géométries de Hilbert. . . . .	26
2.3.1	Définitions. . . . .	26
2.3.2	Description du bord visuel. . . . .	26
2.3.3	La topologie du bord visuel. . . . .	27
2.3.4	Le lemme du ruban plat. . . . .	29
2.4	Distance entre deux géodésiques sécantes. . . . .	29
2.4.1	Enoncé du théorème. . . . .	29
2.4.2	Position du problème et notations. . . . .	32
2.4.3	Démonstration du théorème 2.1. . . . .	34

2.4.4	Exemples. . . . .	40
<b>3</b>	<b>Les isométries en géométrie de Hilbert.</b>	<b>43</b>
3.1	Description des isométries. . . . .	43
3.1.1	Le cas des bonnes métriques de Hilbert. . . . .	44
3.1.2	Que se passe-t-il en dimension $n = 1$ ? . . . . .	45
3.1.3	Un très bref aperçu du cas des simplexes. . . . .	46
3.2	Démonstration de la proposition 3.1. . . . .	46
3.2.1	Quelques propriétés des isométries. . . . .	46
3.2.2	Prolongement d'une isométrie à l'adhérence du convexe. . . . .	48
3.2.3	Egalité des coefficients $k$ et $k'$ . . . . .	51
3.2.4	Conservation du birapport par une isométrie. . . . .	52
3.2.5	Démonstration de la proposition 3.1 proprement dite. . . . .	53
3.3	Cocompacité du groupe d'isométries . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Automorphismes des corps convexes réguliers.</b>	<b>57</b>
4.1	Le cadre du problème. . . . .	57
4.1.1	Convention et notations. . . . .	58
4.1.2	Une description de la frontière. . . . .	58
4.2	Une classification des automorphismes. . . . .	59
4.2.1	Définitions. . . . .	59
4.2.2	Puissances des automorphismes. . . . .	59
4.3	Les automorphismes elliptiques. . . . .	60
4.3.1	Description. . . . .	60
4.3.2	Compacité d'un groupe d'isométrie. . . . .	61
4.4	Les automorphismes hyperboliques. . . . .	63
4.4.1	Un résultat de rigidité. . . . .	63
4.4.2	Démonstration du théorème 4.2. . . . .	64
4.4.3	Remarque. . . . .	65
4.5	Les automorphismes paraboliques. . . . .	66
4.5.1	Un résultat de rigidité. . . . .	66
4.5.2	Démonstration du théorème . . . . .	66
4.5.3	Démonstration du lemme 4.5. . . . .	68
4.5.4	Preuve du lemme 4.6. . . . .	69
4.5.5	Démonstration du lemme 4.7. . . . .	70
4.6	Conclusion. . . . .	73
4.6.1	Les variétés quotients. . . . .	73
4.6.2	Compacité du groupe d'isométries . . . . .	74
<b>A</b>	<b>A propos des variétés de Finsler</b>	<b>75</b>
A.1	Bref rappel de géométrie finslérienne . . . . .	75
A.1.1	Définition . . . . .	75
A.1.2	Le champ géodésique . . . . .	75



A.2	Le cas des variétés riemanniennes . . . . .	76
<b>B</b>	<b>Espaces métriques issus d'une structure finslérienne</b>	<b>77</b>
B.1	Bref rappel sur les espaces métriques généraux . . . . .	77
B.1.1	Les géodésiques . . . . .	77
B.1.2	Convexité . . . . .	78
B.2	Distance définie par une métrique de Finsler . . . . .	78
B.2.1	Définition . . . . .	78
B.2.2	Rapport entre la métrique $F$ et la distance $d_F$ . . . . .	78
B.2.3	A propos des géodésiques . . . . .	79
B.2.4	Le cas des géométries de Hilbert . . . . .	79
<b>C</b>	<b>Calculs relatifs au chapitre 2</b>	<b>83</b>
C.1	Calcul de $\mathcal{S}$ . . . . .	83
C.2	Calcul et estimation de la fonction $D$ . . . . .	84
<b>D</b>	<b>Démonstration du lemme 4.4</b>	<b>87</b>
D.1	Les modules des valeurs propres de $g$ sont comprises strictement entre 1 et $\lambda$ .	87
D.2	Les valeurs propres de $g$ sont de module $\sqrt{\lambda}$ . . . . .	88
D.3	L'endomorphisme $g$ est semi-simple. . . . .	89
	<b>Bibliographie</b>	<b>89</b>



# Chapitre 1

## La géométrie de Hilbert.

Vers 1868, Beltrami décrit le premier modèle concret de la géométrie hyperbolique en dimension 2. Dès 1890 Hilbert remarque que ce modèle peut se généraliser pour obtenir des espaces métriques plus généraux. Ce sont ces espaces qui vont nous intéresser car ils s'avèrent être des modèles explicites de variétés de Finsler à courbure constante négative.

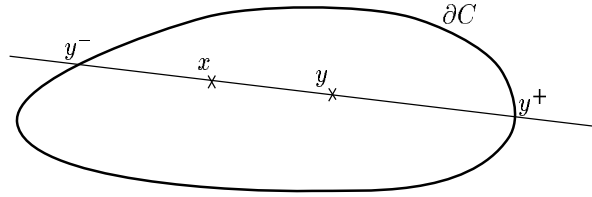
Dans une première partie, nous rappellerons quelques propriétés métriques très agréables des géométries de Hilbert, en particulier que les traces des droites affines sont des géodésiques et que la topologie métrique coïncide avec la topologie affine sous-jacente. La seconde partie du chapitre est consacrée aux aspects finslériens de ces géométries. Le résultat le plus intéressant concerne probablement le fait bien connu suivant : la distance d'une géométrie de Hilbert provient d'une structure riemannienne si et seulement si la frontière du convexe est un ellipsoïde. Cette affirmation usuellement admise mais dont aucune démonstration ne semblait figurer dans la littérature, a récemment été retrouvée par B. Colbois et P. Verovic ([CV00]). Leur démonstration est courte et repose sur l'utilisation astucieuse de résultats déjà connus. Intéressée par ce problème, j'en ai trouvé une démonstration directe permettant de montrer que le même résultat reste encore valable en supposant la distance de Hilbert seulement riemannienne sur un ouvert. L'intérêt de cette démonstration réside dans le fait qu'elle explicite comment et pourquoi une isométrie locale finslérienne entre deux géométries de Hilbert s'étend naturellement en une application projective, isométrie globale entre ces deux espaces.

### 1.1 Le modèle et ses premières propriétés.

#### 1.1.1 Le modèle.

Une **géométrie de Hilbert**  $(C, h_k)$  est la donnée d'un ouvert  $C$  convexe borné d'un  $\mathbb{R}$ -espace affine  $\mathbb{A}$  de dimension finie et d'un réel strictement positif  $k$ , dont nous verrons le rôle au paragraphe 1.3.3. Le convexe  $C$  est alors naturellement muni de la distance  $h_k$ , dite de Hilbert, définie de la manière suivante: pour deux points  $x$  et  $y$  distincts de  $C$ , la droite définie par  $x$  et  $y$  coupe la frontière topologique  $\partial C$  du convexe  $C$  en deux points

distincts  $y^-$  et  $y^+$  tels que  $y^-$ ,  $x$ ,  $y$  et  $y^+$  sont alignés dans cet ordre.



En désignant par  $[y^-, x, y, y^+]$  le birapport du quadruplet  $(y^-; x; y; y^+)$ , la distance de Hilbert entre les points  $x$  et  $y$  est donnée par

$$h_k(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln [y^-, x, y, y^+].$$

Rappelons que, si  $|\cdot|$  désigne une norme quelconque sur la droite vectorielle sous-jacente à la droite affine  $(xy)$ , le birapport du quadruplet  $(y^-, x, y, y^+)$  vaut

$$[y^-, x, y, y^+] = \frac{|y - y^-|}{|x - y^-|} \times \frac{|x - y^+|}{|y - y^+|}.$$

Bien sûr, on pose  $h_k(x, x) = 0$  pour tout point  $x$  de  $C$ .

Avant de rappeler la démonstration du fait que  $h_k$  est une distance, remarquons que pour une boule ouverte d'un espace euclidien avec  $k = 1$ , le modèle obtenu est le modèle projectif standard, dit de Klein, de la géométrie hyperbolique (riemannienne à courbure constante égale à  $-1$ ).

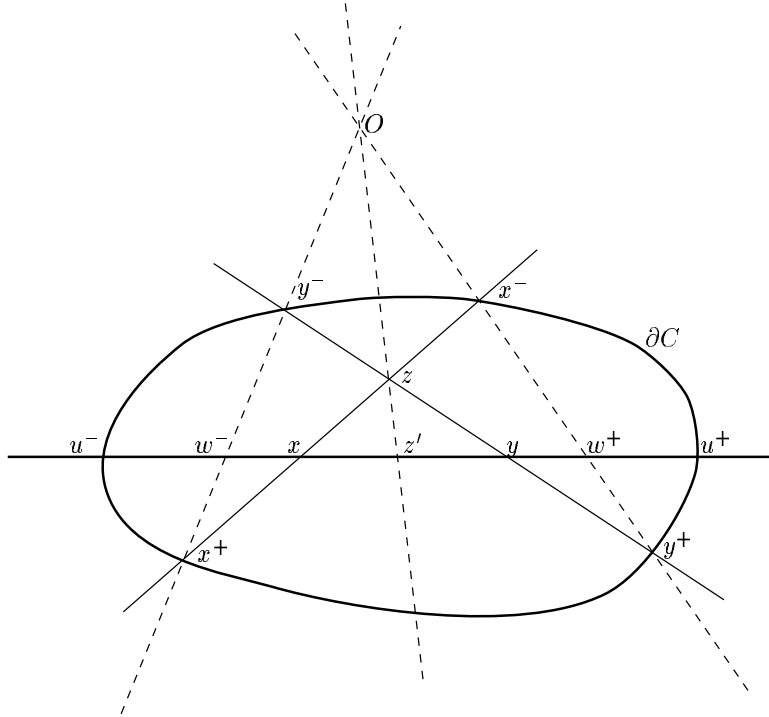
*Démonstration.* La seule propriété non totalement triviale à vérifier pour s'assurer que  $h_k$  est une distance est l'inégalité triangulaire. Considérons donc trois points  $x$ ,  $y$  et  $z$  distincts de  $C$ .

Si ces points sont alignés, les propriétés du birapport permettent de conclure que l'inégalité  $h_k(x, y) \leq h_k(x, z) + h_k(z, y)$  est toujours vérifiée et que c'est une égalité si et seulement si le point  $z$  appartient au segment  $[x, y]$ .

Si les points  $x$ ,  $y$  et  $z$  ne sont pas alignés, désignons par  $x^-$ ,  $x^+$ ,  $y^-$ ,  $y^+$ ,  $u^-$  et  $u^+$  les points d'intersection de la frontière  $\partial C$  du convexe  $C$  avec respectivement les demi-droites  $[x, z)$ ,  $[z, x)$ ,  $[y, z)$ ,  $[z, y)$ ,  $[y, x)$  et  $[x, y)$ . Les droites  $(x^+y^-)$  et  $(x^-y^+)$  se coupent alors en un point noté  $O$ , éventuellement situé à l'infini, et les droites  $(Oz)$ ,  $(Oy^-) = (Ox^+)$  et  $(Oy^+) = (Ox^-)$  intersectent la droite  $(xy)$  en des points respectivement notés  $z'$ ,  $w^-$  et  $w^+$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} 2\sqrt{k} (h_k(x, z) + h_k(z, y)) &= \ln[x^+, x, z, x^-] + \ln[y^-, z, y, y^+] \\ &= \ln[(Ox^+), (Ox), (Oz), (Ox^-)] + \ln[(Oy^-), (Oz), (Oy), (Oy^+)] \\ &= \ln[w^-, x, z', w^+] + \ln[w^-, z', y, w^+] \\ &= \ln[w^-, x, y, w^+]. \end{aligned}$$

Par convexité de  $C$ , les points  $w^-$  et  $w^+$  sont situés sur le segment  $[u^-, u^+]$  et à l'extérieur du segment  $[x, y]$ . Nous avons donc  $\ln[w^-, x, y, w^+] \geq \ln[u^-, x, y, u^+]$  avec égalité si et seulement si  $w^- = u^-$  et  $w^+ = u^+$ . Comme  $2\sqrt{k} h_k(x, y)$  vaut  $\ln[u^-, x, y, u^+]$ , l'inégalité triangulaire  $h_k(x, y) \leq h_k(x, z) + h_k(z, y)$  est bien vérifiée et nous connaissons les cas d'égalité.



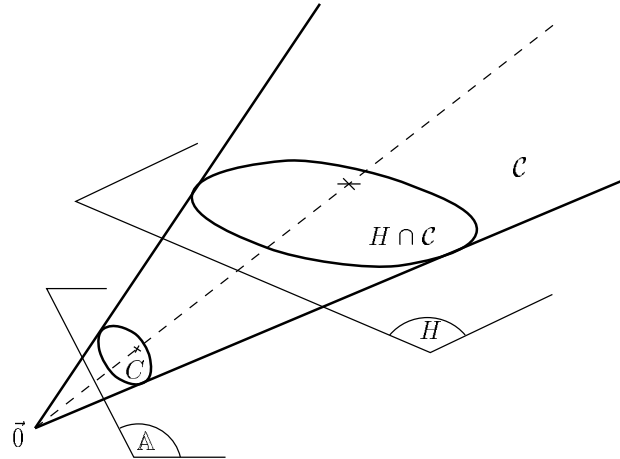
□

### 1.1.2 La structure projective.

Le birapport étant une notion projective, il apparaît naturellement une structure projective des géométries de Hilbert.

Considérons  $(C, h_k)$  une géométrie de Hilbert et plongeons le  $\mathbb{R}$ -espace affine  $\mathbb{A}$  sous-jacent au convexe  $C$  dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$  tel que  $\mathbb{A}$  apparaisse comme un hyperplan affine non vectoriel de  $V$ . Désignons par  $\mathcal{C}$  le cône vectoriel engendré par  $C$  dans l'espace vectoriel  $V$ . Alors pour tout hyperplan affine non vectoriel  $H$  rencontrant  $\mathcal{C}$  selon un convexe borné, les convexes  $H \cap \mathcal{C}$  et  $C$  munis respectivement de métriques de Hilbert correspondant à un même coefficient  $k$ , sont isométriques. En effet, d'après les propriétés du birapport de quatre droites, l'application qui à tout point  $u$  du convexe  $C$  associe le point d'intersection entre la droite vectorielle  $\mathbb{R}u$  et l'hyperplan affine  $H$ , conserve les

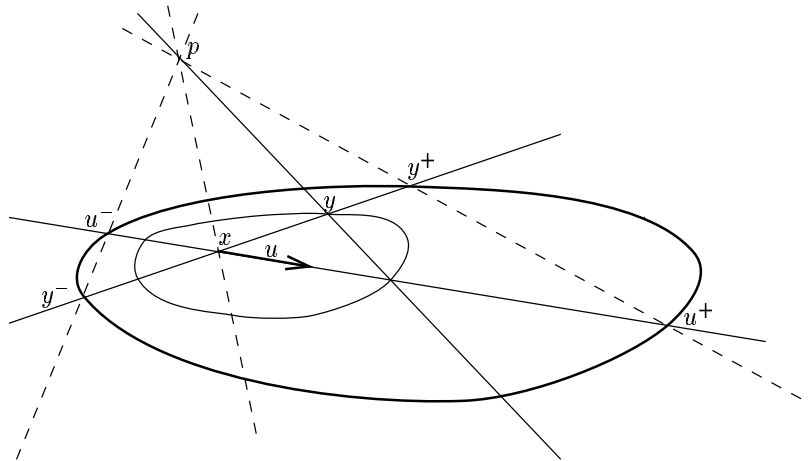
distances.



Cette construction montre que les ellipsoïdes munis de leur métrique de Hilbert sont des modèles isométriques au modèle de Klein, ce qui est naturel puisque la notion de boule n'est pas une notion affine.

### 1.1.3 Description des boules métriques.

Soit  $(C, h_k)$  une géométrie de Hilbert définie sur un espace affine  $\mathbb{A}$  d'espace vectoriel sous-jacent  $\vec{A}$ . Etant donnés deux points distincts  $x$  et  $y$  de  $C$ , la sphère  $S$  de centre  $x$  et passant par  $y$ , c'est à dire l'ensemble des points à distance exactement  $h_k(x, y)$  du point  $x$ , est géométriquement construite de la manière suivante: les demi-droites  $[x, y)$  et  $[y, x)$  intersectent la frontière  $\partial C$  du convexe  $C$  en des points respectivement notés  $y^+$  et  $y^-$ , et pour tout vecteur  $u$  non nul de  $\vec{A}$ , les demi-droites  $[x, x + u)$  et  $[x, x - u)$  coupent  $\partial C$  en deux points distincts  $u^+$  et  $u^-$ .



Alors la sphère  $S$  intersecte la demi-droite  $[x, x + u)$  en un unique point qui est le point de concours de la droite  $(x, x + u)$  avec la droite  $(py)$  où  $p$  est le point de concours des droites

$(u^-y^-)$  et  $(u^+y^+)$ . Si  $(u^-y^-)$  et  $(u^+y^+)$  sont parallèles, la droite  $(py)$  désigne la droite passant par  $y$  et parallèle à  $(u^-y^-)$ , conformément à la structure projective sous-jacente.

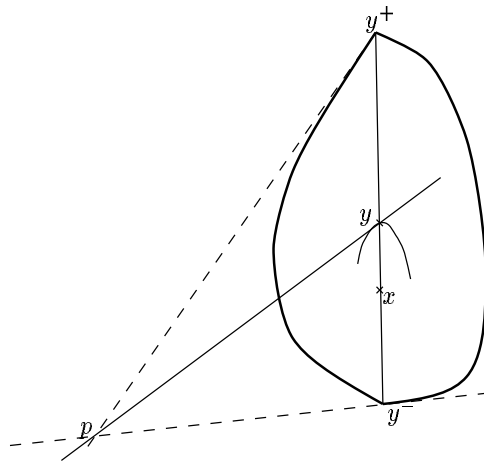
*Démonstration.* Toute droite passant par  $x$  et de direction donnée par le vecteur  $u$ , coupe le bord du convexe  $C$  en exactement deux points, notés  $u^-$  et  $u^+$ , situés de part et d'autre de  $x$ . Pour retrouver les notations de la description précédente, nous convenons que  $u^-$  est le point situé sur la demi-droite  $x + \mathbb{R}^-u$ . Alors, par définition de la distance  $h_k$ , un point  $z$  de la demi-droite  $x + \mathbb{R}^+u$  est sur la sphère  $S$  si et seulement si il vérifie  $\ln[u^-, x, z, u^+] = 2\sqrt{k} h_k(x, y)$ . Les points  $x, u^-$  et  $u^+$  étant fixés, les propriétés du birapport assurent de l'existence et de l'unicité d'un point  $z$  sur la droite  $(u^-u^+)$  vérifiant cette égalité; de plus cet unique point  $z$  est automatiquement situé sur la demi-droite  $[x, u^+)$ .

Vérifions maintenant que la description précédente fournit une construction de ce point. Si  $u$  n'est pas colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{xy}$ , la distance de Hilbert entre  $x$  et  $y$  vérifie

$$\begin{aligned} 2\sqrt{k} h_k(x, y) &= \ln[y^-, x, y, y^+] \\ &= \ln[(py^-), (px), (py), (py^+)] \\ &= \ln[(py^-) \cap (u^-u^+), (px) \cap (u^-u^+), (py) \cap (u^-u^+), (py^+) \cap (u^-u^+)] \\ &= \ln[u^-, x, (py) \cap (u^-u^+), u^+] \quad (\text{par définition du point } p). \end{aligned}$$

Ainsi d'après la première partie de la démonstration, la droite  $(py)$  intersecte bien la droite  $(u^-u^+)$  et ce, au point situé à la distance  $h_k(x, y)$  de  $x$  sur la demi-droite  $[x, u^+)$ .  $\square$

Cette démonstration nous montre aussi que les sections planes des sphères métriques admettent deux demi-tangentes en tout point, et que ces demi-tangentes en un point  $y$  à la sphère centrée en  $x$  passant par  $y$  sont supportées par les droites passant par  $y$  et le point de concours des droites supports des demi-tangentes à  $\partial C$  aux points communs à  $\partial C$  et à la droite  $(xy)$ .



## 1.2 Quelques propriétés des distances de Hilbert.

### 1.2.1 La topologie.

Soit  $C$  un domaine ouvert convexe borné d'un  $\mathbb{R}$ -espace affine  $\mathbb{A}$  de dimension finie. Il est naturellement muni de deux topologies a priori différentes : celle provenant d'une distance de Hilbert associée au convexe  $C$  (toutes les distances de Hilbert associées à  $C$  étant proportionnelles donc équivalentes, définissent la même topologie), et la topologie trace sur  $C$  de la topologie de  $\mathbb{A}$  provenant de sa structure affine (toutes les distances sur  $\mathbb{A}$  respectant sa structure affine sont équivalentes car  $\mathbb{A}$  est de dimension finie, et définissent bien une unique topologie). En fait, ces deux topologies coïncident ([Bea99]) bien que les distances dont elles proviennent, ne sont pas équivalentes (les distances de Hilbert sont non bornées sur  $C \times C$  contrairement aux restrictions des distances respectant la structure affine de  $\mathbb{A}$ ).

De plus, les métriques de Hilbert sur le convexe  $C$  sont complètes ([Bea99]).

### 1.2.2 Les géodésiques.

Dans toute géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$ , l'inégalité triangulaire et les cas d'égalité nous assurent que tout segment affine reliant deux points du convexe ouvert  $C$  est un segment géodésique pour  $h_k$ . Les géométries de Hilbert sont donc des espaces métriques géodésiques c'est-à-dire que deux points quelconques sont toujours reliés par un segment géodésique.

En reprenant les notations utilisées au paragraphe 1.1.1 dans la démonstration du fait que  $h_k$  est une distance, nous voyons que le segment  $[x, y]$  n'est pas l'unique géodésique métrique reliant  $x$  à  $y$  si et seulement si on peut trouver un plan  $P$  contenant  $x$  et  $y$ , tel que les points  $y^-$  et  $y^+$  d'intersection entre  $\partial C$  et la droite  $(xy)$ , sont tous les deux à l'intérieur de segments inclus dans la frontière topologique de la section  $C \cap P$ , ces deux segments étant nécessairement distincts par convexité de  $C$ . En effet, dans ce dernier cas, il existe en particulier une ligne brisée qui est aussi un segment géodésique.

Dorénavant, nous appellerons **bonne géométrie de Hilbert** toute géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  dans laquelle il y a unicité du segment géodésique reliant deux points quelconques de  $C$ . Nous parlerons aussi de **bonnes métriques** pour les métriques de Hilbert associées. Nous avons donc la propriété suivante

**Proposition 1.1.** *Une géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  est une bonne géométrie de Hilbert si et seulement si la frontière topologique de toute section plane non vide du convexe  $C$  contient au plus un segment ouvert non vide.*

Dans le cas d'une bonne géométrie de Hilbert, il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire uniquement pour trois points alignés, le point intermédiaire étant situé entre les deux autres.



### 1.2.3 Géométries coïncidant sur un ouvert.

Les géométries de Hilbert vérifient un premier théorème de rigidité:

**Théorème 1.1.** *Soient  $(C, h_k)$  et  $(C', h_{k'})$  deux géométries de Hilbert telles que  $C$  et  $C'$  sont des ouverts d'un même espace affine. Si les distances  $h_k$  et  $h_{k'}$  coïncident sur un ouvert non vide de  $C \cap C'$ , alors les réels  $k$  et  $k'$  sont égaux, et les convexes  $C$  et  $C'$  sont confondus.*

*Preuve.* Fixons une norme sur l'espace vectoriel  $\vec{A}$  sous-jacent à l'espace affine  $\mathbb{A}$  dont les convexes  $C$  et  $C'$  sont des ouverts. L'ouvert de  $C \cap C'$  sur lequel les métriques  $h_k$  et  $h_{k'}$  coïncident, contient donc une boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  strictement positif.

Soit  $u$  un vecteur de l'espace vectoriel  $\vec{A}$  de norme unité. Les demi-droites issues de  $x$  ayant pour directions respectives  $u$  et  $-u$  coupent la frontière  $\partial C$  en des points  $x + \alpha_+ u$  et  $x - \alpha_- u$  où  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  sont des réels strictement positifs (et même supérieurs à  $\varepsilon$ ), et la frontière  $\partial C'$  en des points  $x + \alpha'_+ u$  et  $x - \alpha'_- u$  avec  $\alpha'_+$  et  $\alpha'_-$  des réels supérieurs à  $\varepsilon$ . Ainsi donc, pour tout réel  $t$  dans  $] -\varepsilon, \varepsilon[$ , le point  $x + tu$  appartient à l'ouvert sur lequel les métriques coïncident. La fonction  $f : t \in ] -\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow h_k(x, x + tu) - h_{k'}(x, x + tu)$  qui s'écrit aussi

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \left( \frac{\alpha_+}{t + \alpha_+} \cdot \frac{\alpha_- - t}{\alpha_-} \right) - \frac{1}{2\sqrt{k'}} \ln \left( \frac{\alpha'_+}{t + \alpha'_+} \cdot \frac{\alpha'_- - t}{\alpha'_-} \right)$$

est donc la fonction nulle. Sa dérivée est nulle, or c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et dont le numérateur est un polynôme de degré au plus deux:

$$f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{k}} \times \frac{\alpha_- + \alpha_+}{(t + \alpha_+)(\alpha_- - t)} + \frac{1}{2\sqrt{k'}} \times \frac{\alpha'_- + \alpha'_+}{(t + \alpha'_+)(\alpha'_- - t)}.$$

Le système obtenu en écrivant la nullité des coefficients du polynôme du numérateur, conduit aux égalités cherchées à savoir  $k = k'$ ,  $\alpha_+ = \alpha'_+$  et  $\alpha_- = \alpha'_-$ . Ainsi donc toute demi-droite issue de  $x$  coupe  $\partial C$  et  $\partial C'$  en un même point, ce qui signifie bien que les convexes  $C$  et  $C'$  sont confondus.  $\square$

## 1.3 Aspects finslériens des géométries de Hilbert.

Rappelons qu'une variété de Finsler est une variété munie d'un champ de normes vérifiant certaines propriétés (cf annexe A). Ces conditions assurent en particulier que la borne inférieure de l'action associée à ce champ de normes définit une distance sur la variété (annexe B).

Nous allons voir que sous certaines conditions de régularité de la frontière (paragraphe 1.3.1), les géométries de Hilbert sont des variétés de Finsler dont nous donneront rapidement les géodésiques et la courbure. En fait, ces géométries sont même les modèles de variétés finslériennes à courbure constante négative, projectivement plates ([Fun29, Ber30]).

C'est pourquoi elles sont intéressantes car elles représentent plus qu'un exemple anecdotique. Enfin, nous obtiendrons un résultat de rigidité affirmant qu'une géométrie de Hilbert riemannienne sur un ouvert est en fait un modèle de Klein c'est à dire que la frontière du convexe est un ellipsoïde. La démonstration de ce résultat nous montrera qu'une isométrie locale entre géométries de Hilbert finslériennes s'étend toujours en une isométrie globale.

Le convexe  $C$  est un ouvert d'un  $\mathbb{R}$ -espace affine  $\mathbb{A}$  de dimension finie, il est donc naturellement muni d'une structure de variété lisse. Compte tenu de la structure affine sous-jacente, nous identifierons le produit cartésien  $C \times \vec{A}$ , où  $\vec{A}$  est l'espace vectoriel associé à  $\mathbb{A}$ , au fibré tangent  $TC$  à  $C$  au moyen de l'application  $(x, u) \in C \times \vec{A} \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x + tu) \in T_x C$ .

### 1.3.1 La métrique de Finsler.

#### Le champ de normes.

Supposons que l'espace métrique  $(C, h_k)$  admette une structure finslérienne  $F$ . Considérons alors  $(x, u)$  un élément de  $C \times \vec{A}$ , et notons  $u^+ = x + \alpha_+ u$  et  $u^- = x - \alpha_- u$  les points d'intersection des demi-droites issues de  $x$ , de directions respectives  $u$  et  $-u$  avec la frontière  $\partial C$ . Le théorème de Busemann-Meyer appliqué à la courbe  $\eta : t \in ]\alpha_-, \alpha_+[ \mapsto x + tu$  s'écrit  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} d(\eta(0), \eta(t)) = F(\dot{\eta}(0))$ , soit encore, après un rapide calcul, et en désignant par  $|\cdot|$  une norme quelconque sur  $\vec{A}$ ,

$$F(x, u) = \frac{|u|}{2\sqrt{k}} \left( \frac{1}{|x - u^-|} + \frac{1}{|x - u^+|} \right). \quad (1.1)$$

Maintenant que nous connaissons la seule valeur possible pour le lagrangien  $F$ , nous allons nous intéresser aux conditions sous lesquelles il munit la variété  $C$  d'une structure finslérienne réversible, sans nous soucier pour l'instant de savoir si cette structure finslérienne redonnera bien la métrique  $h_k$  dont nous sommes partis.

#### Quand le lagrangien $F$ est-il une métrique de Finsler?

Rappelons les conditions que doit satisfaire le lagrangien  $F$  pour être une métrique de Finsler (cf annexe A):

(i) pour tout point  $x$  de la variété  $M$ , la restriction  $F_x$  de  $F$  à l'espace vectoriel tangent  $T_x M$  est une norme,

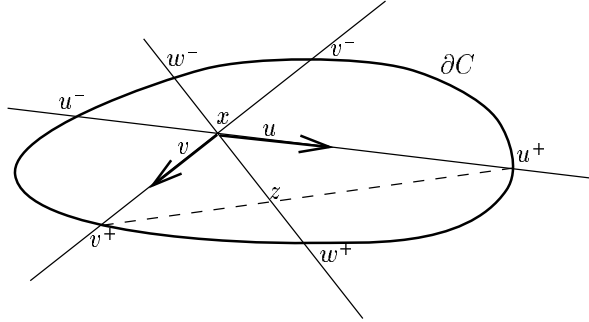
(ii) la restriction de  $F$  au fibré tangent  $TM$  privé de la section nulle, est de classe au moins  $\mathcal{C}^2$ ,

(iii) pour tout point  $x$  de  $M$ ; le hessien de la restriction de  $F^2$  à l'espace tangent  $T_x M$  est non dégénéré en tout point de  $T_x M$  différent de 0.

Au vu de l'expression du lagrangien  $F$ , la seule propriété à vérifier pour s'assurer que la restriction  $F_x$  de  $F$  à toute fibre  $T_x C$ , est une norme, est l'inégalité triangulaire pour

deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $\vec{A}$  non colinéaires.

*Vérification de (i).* Notons  $u^-$  et  $u^+$  les points d'intersection de  $\partial C$  avec les demi-droites issues de  $x$  et de directions respectives  $-u$  et  $u$ . Définissons de même les points  $v^-$ ,  $v^+$ ,  $w^-$  et  $w^+$  associés aux vecteurs  $v$  et  $w = u + v$ , et désignons par  $z$  le point d'intersection entre le segment  $[u^+, v^+]$  et la demi-droite issue de  $x$  avec la direction  $w$ . Ce point appartient à l'ouvert  $C$  par convexité de ce dernier.



Il existe donc deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  compris entre 0 et 1 tels que  $z$  s'écrive  $(1 - \lambda)u^+ + \lambda v^+$  et  $x + \mu(w^+ - x)$ , l'existence du réel  $\mu$  dans l'intervalle fixé provenant encore de la convexité de  $C$ . Nous avons donc

$$(1 - \lambda) \frac{|u^+ - x|}{|u|} u + \lambda \frac{|v^+ - x|}{|v|} v = \mu \frac{|w^+ - x|}{|u + v|} (u + v).$$

L'indépendance des vecteurs  $u$  et  $v$  conduit à un système dont la résolution aboutit à l'égalité

$$\frac{|w^+ - x|}{|u + v|} \mu = \frac{|u^+ - x| |v^+ - x|}{|u^+ - x| |v| + |v^+ - x| |u|}.$$

Puisque  $\mu$  est compris entre 0 et 1, nous obtenons donc

$$\frac{|u + v|}{|w^+ - x|} \leq \frac{|v|}{|v^+ - x|} + \frac{|u|}{|u^+ - x|}.$$

Un raisonnement strictement identique conduit à l'inégalité obtenue à partir de la précédente en remplaçant dans les exposants le signe  $+$  par  $-$ . Ainsi en ajoutant membre à membre ces deux inégalités, nous obtenons, d'après la formule 1.1 du lagrangien  $F$ , l'inégalité cherchée à savoir  $F(x, u + v) \leq F(x, u) + F(x, v)$ .  $\square$

Par ailleurs, le lagrangien  $F$  doit être de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $TC$  privé de la section nulle pour correspondre à une structure de Finsler. C'est en particulier le cas dès que la frontière du convexe  $C$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^2$ , puisque le lagrangien  $F$  est toujours au moins aussi régulier que le bord  $\partial C$  dont il provient. En fait, le théorème des fonctions implicites assure que la réciproque est aussi vraie:

**Lemme 1.1.** *Soit  $C$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n$  un entier supérieur ou égal à deux. Alors la frontière topologique de ce convexe est de même classe que l'application*

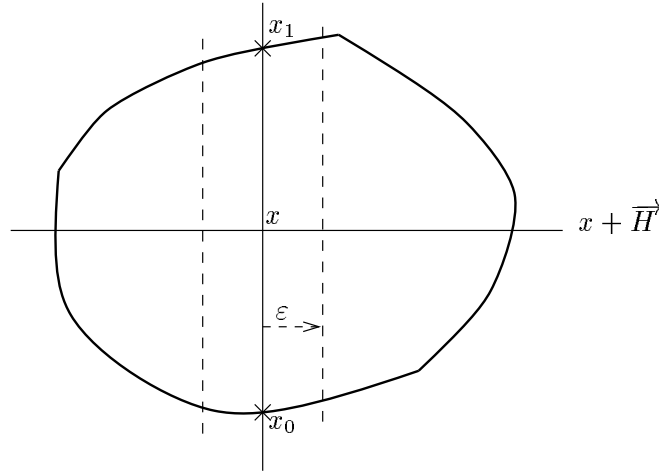
$$(x, u) \in C \times (\mathbb{R}^n)^* \mapsto F_x(u) = |u| \left( \frac{1}{|x - u^+|} + \frac{1}{|x - u^-|} \right)$$

où  $u^+$  et  $u^-$  sont les points d'intersection de la frontière  $\partial C$  avec les demi-droites  $[x, x+u)$  et  $[x, x-u)$ .

*Démonstration.* L'ouvert  $C$  étant convexe, sa frontière est une variété de classe  $\mathcal{C}^1$  Lebesgue-presque partout. Supposons donc que la restriction du lagrangien  $F$  à  $TM \setminus \{0\}$  est de classe au moins  $\mathcal{C}^1$ .

Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points de la frontière  $\partial C$  du convexe  $C$  tels que le segment affine  $[x_0; x_1]$  n'est pas entièrement inclus dans  $\partial C$ . Le milieu  $x$  de ce segment est alors un point de  $C$ . Pour simplifier les écritures, nous désignerons désormais par  $u$  le vecteur  $\overrightarrow{x_0 x_1}$ . Fixons  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne sur  $\vec{A}$  telle que  $\|u\|$  vaut 1, et  $\vec{H}$  un supplémentaire de la droite vectorielle  $\mathbb{R}u$ .

Comme  $x$  est un point de l'ouvert  $C$ , il en est de même de tout point suffisamment proche, disons situé à une distance euclidienne inférieure à  $4\varepsilon$  avec  $\varepsilon$  un réel strictement compris entre 0 et  $1/4$ . Ainsi la convexité de  $C$  assure que pour tout vecteur  $w$  de  $\vec{H}$  de norme inférieure à  $2\varepsilon$ , les demi-droites  $(x+w) + \mathbb{R}^\pm u$  coupent la frontière  $\partial C$  respectivement en un unique point situé à la distance  $h^+(w)$  respectivement  $h^-(w)$  de  $x+w$ . Remarquons que  $h^+(\vec{0})$  et  $h^-(\vec{0})$  sont égaux à 1.



D'après la formule 1.1, ces fonctions  $h^+$  et  $h^-$  vérifient, pour tout  $t$  inférieur en valeur absolue à  $2\varepsilon$  et tout vecteur  $w$  de  $\vec{H}$  de norme euclidienne aussi inférieure à  $2\varepsilon$ ,

$$F(x+w+tu, u) = \frac{\|u\|}{2\sqrt{k}} \left( \frac{1}{h^+(w) - t\|u\|} + \frac{1}{h^-(w) + t\|u\|} \right) = \frac{1}{2\sqrt{k}} \left( \frac{1}{h^+(w) - t} + \frac{1}{h^-(w) + t} \right).$$

Notons  $f$  la fonction définie sur l'ouvert  $\{(w, t) \in \vec{H} \times \mathbb{R} \text{ tq } \|w\| < 2\varepsilon \text{ et } |t| < 2\varepsilon\}$  par  $f(w, t) = 2\sqrt{k} F(x+w+tu, u)$ . Elle est de même classe que la restriction de  $F$  à  $TM \setminus \{0\}$ .

Désignons maintenant par  $U$  l'ouvert de  $\vec{H}$  formé des vecteurs de norme strictement inférieure à  $2\varepsilon$ , par  $V$  l'ouvert  $]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[^2$  de  $\mathbb{R}^2$ , et par  $\Psi$  l'application de  $U \times V$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  définie de la façon suivante:

$$\Psi : (w, (s, t)) \in U \times V \mapsto \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{t} - f(w, 0); \frac{1}{s - \varepsilon} + \frac{1}{t + \varepsilon} - f(w, \varepsilon) \right).$$

Cette application  $\Psi$  est bien définie car  $\varepsilon$  est inférieur à  $1/4$ , a pour classe celle de  $f$  donc elle est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'application linéaire tangente de l'application partielle  $\Psi(\vec{0}, \cdot)$  en  $(1, 1)$  a pour matrice

$$- \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \\ 1 & \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \end{pmatrix}$$

qui est inversible. Le théorème des fonctions implicites appliqué à  $\Psi$  assure qu'il existe un voisinage ouvert  $U'$  de  $\vec{0}$  inclus dans  $U$ , un voisinage ouvert  $W$  de  $\Psi(\vec{0}, (1, 1))$  dans  $\mathbb{R}^2$ , un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $(\vec{0}, 1, 1)$  inclus dans  $U \times V$  et une application  $\Phi$  de même classe que  $\Psi$  tels que les conditions suivantes sont équivalentes:

- i)  $(w, s, t) \in \Omega$ ,  $z \in W$  et  $\Psi(w, s, t) = z$ ;
- ii)  $(w, z) \in U' \times W$  et  $(s, t) = \Phi(w, z)$ .

Or  $\Psi(w, h^+(w), h^-(w))$  vaut 0 par définition même de  $f$ , et  $h^+(\vec{0})$  et  $h^-(\vec{0})$  sont égaux à 1. Ainsi nous obtenons donc qu'au voisinage du vecteur nul, la fonction  $\Phi(\cdot, 0)$  vaut  $(h^+, h^-)$  et donc que les fonctions  $h^+$  et  $h^-$  y sont de même classe que la fonction  $f$ .

Finalement, comme  $\partial C$  apparaît au voisinage de  $x_0$  respectivement  $x_1$  comme le graphe de  $h^-$  respectivement  $h^+$ , c'est au voisinage de ces points une variété de classe celle de la restriction du lagrangien  $F$  à  $TM \setminus \{0\}$ . Par ailleurs, l'ensemble  $C$  étant ouvert et convexe, pour tout point  $x_0$  de la frontière  $\partial C$ , il est possible de trouver un point  $x_1$  tel que le segment  $[x_0; x_1]$  ne soit pas totalement inclus dans  $\partial C$ . Le résultat précédent permet donc de conclure que la frontière de  $C$  est une sous-variété de  $\mathbb{A}$  de classe celle de la restriction de  $F$  à  $TM \setminus \{0\}$ .  $\square$

La dernière condition pour que le lagrangien  $F$  corresponde à une structure finslérienne est que le carré de sa restriction  $F_x$  à tout espace tangent  $T_x C$  admette un hessien défini positif en tout point non nul de  $T_x C$ , ce qui est caractérisé par le lemme suivant

**Lemme 1.2.** *Soit  $C$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière est une variété de classe  $\mathcal{C}^2$ . La norme  $F_x$  sur  $T_x C$  provenant de la métrique de Hilbert  $h_k$  a un carré à hessien défini positif si et seulement le bord de toute section plane non vide de  $C$  a un hessien défini positif en tout point sauf peut-être sur un segment fermé.*

Une géométrie de Hilbert admettant une structure de Finsler est donc automatiquement une bonne géométrie de Hilbert.

*Preuve.* Comme  $F_x$  est une norme sur  $T_x C$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sauf peut-être en zéro, le hessien de  $F_x^2$  en tout point  $w$  de  $T_x C \setminus \{0\}$  est positif, il est donc défini positif si et seulement si la nullité de  $\text{Hess}_w F_x^2(u, u)$  implique celle du vecteur  $u$ . Or  $\text{Hess}_w F_x^2(u, u)$  est le nombre dérivé  $f''(0)$  où  $f$  est la fonction définie au voisinage de zéro par  $f(t) = (F_x(w + tu))^2$ .

Si  $u$  est colinéaire à  $w$ , l'homogénéité de  $F$  montre immédiatement que  $\text{Hess}_w F_x^2(u, u) = 0$  impose  $u = 0$  puisque  $w$  n'est pas nul.

Afin d'évaluer  $f''(0)$  dans le cas où  $u$  n'est pas colinéaire à  $w$ , plaçons nous dans un plan  $P$  contenant  $x$  et dont la direction contient les vecteurs  $u$  et  $w$  et considérons les coordonnées polaires associées au repère orthornormé direct  $(x, w, u)$ . Le bord du convexe  $C \cap P$  est alors décrit par une équation polaire  $\theta \mapsto r(\theta) > 0$  de classe au moins  $\mathcal{C}^2$ . Un court calcul montre qu'au voisinage de zéro,

$$f(t) = \frac{1+t^2}{4k} \left( \frac{1}{r(\arctan t)} + \frac{1}{r(\pi + \arctan t)} \right)^2,$$

et donc,

$$2kf''(0) = \left( \frac{1}{r}(0) + \frac{1}{r}(\pi) \right) \left\{ \left( \frac{1}{r} + \left( \frac{1}{r} \right)'' \right) (0) + \left( \frac{1}{r} + \left( \frac{1}{r} \right)'' \right) (\pi) \right\} + \left( \left( \frac{1}{r} \right)' (0) + \left( \frac{1}{r} \right)' (\pi) \right)^2.$$

Comme la fonction  $\frac{1}{r} + \left( \frac{1}{r} \right)''$  est positive (puisque  $r$  décrit le bord d'un convexe), nous avons bien  $\text{Hess}_w(u, u) = 0$  avec  $u$  non colinéaire à  $w$ , impose au bord de la section  $C \cap P$  d'avoir au moins deux points du bord où le hessien est nul.  $\square$

## Conclusion

En fait sous ces hypothèses (frontière  $\partial C$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et bord de toute section plane de  $C$  à hessien défini positif sauf sur au plus un segment), la distance définie par le lagrangien  $F$  redonne bien la métrique  $h_k$ . La démonstration en est donnée dans l'annexe B sur les espaces métriques provenant d'une structure finslérienne.

En résumé, nous obtenons la caractérisation suivante

**Proposition 1.2.** *Une géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  est une variété de Finsler de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 2$  si et seulement si la frontière  $\partial C$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et le bord de toute section plane non vide de  $C$  a un hessien défini positif en tout point sauf peut-être sur un segment fermé.*

Dans toute la suite de cette section, nous considérerons une géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  qui est aussi une variété de Finsler  $(C, F)$  où  $F$  est la norme associée à la distance  $h_k$  sur le fibré tangent  $TC$  au convexe  $C$ , et noterons  $\mathbb{A}$  l'espace affine dont  $C$  est un convexe ouvert, et  $\vec{A}$  l'espace vectoriel correspondant.

### 1.3.2 Les géodésiques variationnelles.

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer les géodésiques finslériennes d'une géométrie de Hilbert. Ce sont les traces sur le convexe  $C$  des droites affines.

Donnons nous un point  $x$  de  $C$  et un vecteur non nul tangent à  $C$  en  $x$  noté  $u$  identifié canoniquement à un vecteur de  $\vec{A}$ . Définissons encore  $x + \alpha_+ u$  et  $x - \alpha_- u$  les points d'intersection entre  $\partial C$  et les demi-droites issues de  $x$  et de directions respectives  $u$  et  $-u$ . La courbe de classe  $\mathcal{C}^\infty$

$$\eta : t \in \mathbb{R} \mapsto x + \frac{(e^{2\sqrt{k}F(u)t} - 1) \alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_- e^{2\sqrt{k}F(u)t}} u$$

est une géodésique au sens métrique car elle paramètre le segment  $]x - \alpha_- u, x + \alpha_+ u[$ ; elle vérifie  $h_k(\eta(t), \eta(s)) = |t - s| F(u)$  pour tout couple  $(t, s)$  de réels, donc est parcourue à vitesse constante  $F(u)$ . De plus, elle passe à la date  $t = 0$  en  $x$  avec la vitesse  $\dot{\eta}(0) = u$  car  $2\sqrt{k} F(u)$  vaut  $1/\alpha_+ + 1/\alpha_-$ . Mais en tant que géodésique métrique, la courbe  $\eta$  minimise la longueur des courbes entre deux quelconques de ses points, et comme elle est régulière, c'est une géodésique, au sens variationnel, de la variété de Finsler  $(C, F)$ . Par ailleurs, il y a unicité de la géodésique au sens variationnel partant du point  $x$  à la vitesse  $u$ , nous obtenons donc que les géodésiques au sens métrique ou variationnel sont les mêmes, à savoir les traces des droites de l'espace affine ambiant  $\mathbb{A}$  sur le convexe  $C$  (parcourues à vitesse finslérienne constante), et qu'elles minimisent donc toujours globalement la longueur.

Une variété de Finsler provenant d'une géométrie de Hilbert est donc **projectivement plate**, c'est à dire que pour tout point de  $C$ , il existe un voisinage de ce point (à savoir  $C$  lui-même) et une carte définie sur ce voisinage (ici la restriction à  $C$  d'une identification de l'espace affine ambiant  $\mathbb{A}$  à  $\mathbb{R}^n$ ) dans laquelle les géodésiques apparaissent comme des segments affines.

Nous pouvons aussi traduire en terme de champs de Reeb (cf annexe A), le fait que les géodésiques de la variété finslérienne  $(C, F)$  sont géométriquement les traces sur  $C$  de celles de l'espace affine ambiant  $\mathbb{A}$  muni d'une structure euclidienne. Rappelons que les géodésiques d'une variété de Finsler sont les projetés des orbites du champ de Reeb défini sur le fibré en demi-droites  $HM$  de  $TM$ . En désignant par  $X_F$  le champ de Reeb associé à la métrique de Finsler  $F$ , et par  $X_E$  celui associé à une métrique euclidienne fixée sur  $\mathbb{A}$ , nous avons colinéarité de ces deux champs de vecteurs sur le fibré homogène de  $C$  c'est-à-dire il existe une fonction  $m$  définie sur le fibré homogène  $HC$  à valeurs réelles strictement positives telle que  $X_F = mX_E$ .

### 1.3.3 La courbure.

Rappelons qu'une variété de Finsler admet un équivalent de la courbure qui est l'endomorphisme de Jacobi de son champ de Reeb ([Fou86b]). Dans sa thèse ([Egl95]), Egloff a repris les idées de Funk ([Fun29]) pour les appliquer à cet endomorphisme de Jacobi. Il a ainsi montré qu'une géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  correspondant à une variété de Finsler est une variété à courbure constante négative  $-k$  c'est-à-dire que l'endomorphisme de Jacobi vaut  $-k \text{Id}$ .

A priori, pour pouvoir définir la courbure d'une variété de Finsler, il faut que le lagrangien  $F$  soit de classe  $\mathcal{C}^5$  hors de la section nulle ou que le champ de Reeb associé soit de classe  $\mathcal{C}^3$ . En fait, dans le cas particulier de structures de Finsler projectivement plates et de classe  $\mathcal{C}^2$ , il est toujours possible de définir et de calculer l'endomorphisme de Jacobi de la variété  $(C, F)$ . Pour calculer la courbure de la variété  $(C, F) = (C, h_k)$ , l'idée est d'utiliser la colinéarité des champs géodésiques  $X_F$  et  $X_E$  associés respectivement à la métrique de Finsler  $F$  et à une métrique euclidienne.

Les géométries de Hilbert apparaissent donc comme de bons exemples permettant de tester des conjectures sur les variétés de Finsler courbées négativement.

### 1.3.4 Un résultat de rigidité.

En fait, Funk en 1929 pour la dimension 2, et Berwald l'année suivante pour toutes les dimensions, ont démontré le résultat suivant de rigidité:

**Théorème 1.2** ([Fun29, Ber30]). *Une variété de Finsler, réversible, simplement connexe, projectivement plate, à courbure constante strictement négative, géodésiquement complète est une géométrie de Hilbert.*

C'est une première différence fondamentale des variétés de Finsler par rapport au cadre riemannien pour lequel il n'y a qu'une seule variété simplement connexe à courbure constante strictement négative à isométrie près.

En fait, Funk et Berwald n'ont pas démontré le théorème 1.2 sous cette forme, ils ont résolu le quatrième problème de Hilbert pour des métriques finslériennes réversibles à courbure constante négative, c'est à dire qu'ils ont trouvé toutes les métriques réversibles sur des convexes de  $\mathbb{R}^n$ , dont les géodésiques sont les droites affines. Pour passer du théorème obtenu par Funk et Berwald à son énoncé sous la forme du théorème 1.2 affirmé par Egloff dans sa thèse [Egl95], il faut utiliser le résultat de Kobayashi et Nagano ([KN64]) assurant qu'une variété projectivement plate est un ouvert d'un espace projectif réel, puis le théorème de Funk et Berwald sous sa forme originale permet de conclure.

### 1.3.5 Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une variété riemannienne.

Nous avons déjà vu que l'intérieur d'un ellipsoïde muni d'une métrique de Hilbert est un modèle de variété riemannienne à courbure constante strictement négative. En fait, il est bien connu que la réciproque est vraie aussi:

**Proposition 1.3.** *Une géométrie de Hilbert est une variété riemannienne si et seulement si le convexe est l'intérieur d'un ellipsoïde.*

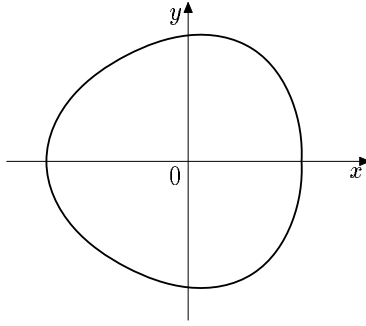
Cette affirmation dont la seule démonstration écrite noir sur blanc semble être celle récemment obtenu par B. Colbois et P. Verovic ([CV00] à paraître), peut être obtenue comme corollaire de l'énoncé plus général suivant:

**Proposition 1.4.** *Si une géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  a une restriction à un ouvert qui est variété riemannienne, alors le convexe est l'intérieur d'un ellipsoïde et l'espace  $(C, h_k)$  est l'espace hyperbolique riemannien à courbure  $-k$  standard.*

Avant de nous intéresser à la démonstration de cette dernière proposition, remarquons qu'il faut se garder de croire qu'une géométrie de Hilbert, même finslérienne, qui est riemannienne en un point est riemannienne partout, comme le montre l'exemple explicite suivant: dans  $\mathbb{R}^2$ , la courbe décrite en coordonnées polaires par  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto r(\theta) = \frac{1}{18 + \cos 3\theta + \cos \theta}$



est une courbe simple fermée de classe  $C^\infty$ .



C'est le bord d'un convexe dont les métriques de Hilbert sont finslériennes, riemanniennes au point 0, mais pas riemanniennes partout puisque cette courbe n'est pas une ellipse.

*Preuve.* L'expression  $\left(\left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{1}{r}\right)(\theta) = 18 - 8 \cos 3\theta$  est strictement positive, donc le bord du convexe défini par cette courbe est bien à hessien défini positif en tout point (cf la démonstration du lemme 1.2).

La norme sur l'espace tangent en 0 est donnée par

$$F_0(u) = \frac{\|u\|}{2\sqrt{k}} \left( \frac{1}{r(\theta)} + \frac{1}{r(\theta + \pi)} \right) = \frac{18 \|u\|}{\sqrt{k}}.$$

Elle provient donc bien d'un produit scalaire, proportionnel au produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

Commençons par démontrer de la proposition 1.4, avant de faire quelques commentaires sur les diverses manières d'obtenir la proposition 1.3.

*Démonstration de la proposition 1.4.* Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert sur lequel la distance  $h_k$  provient d'une métrique riemannienne et  $x_0$  un point de cet ouvert. L'espace vectoriel tangent  $T_{x_0}C$  à la variété  $C$  au point  $x_0$ , est naturellement muni de la norme provenant de la structure riemannienne, et comme il est identifié à l'espace vectoriel  $\vec{A}$  sous-jacent à l'espace affine  $\mathbb{A}$ , ce dernier est automatiquement muni de la même norme  $|\cdot|$ . Choisissons  $(e_i)_{i=1\dots n}$  une base de vecteurs de norme unité de l'espace vectoriel tangent  $T_{x_0}C$ .

Le calcul de la courbure de la variété finslérienne  $(\mathcal{U}, h_k)$  se fait comme au paragraphe 1.3.3, et la relation entre les courbure finslérienne et riemannienne (cf annexe A) montre que la variété riemannienne  $(\mathcal{U}, h_k)$  est à courbure constante  $-k$ , mais bien sûr elle n'est pas complète. Nous pouvons donc restreindre l'ouvert  $\mathcal{U}$  de manière à ce que la variété  $(\mathcal{U}, h_k)$  soit isométrique à un ouvert  $\mathcal{V}$  du modèle de Klein  $(B, d_k)$  via un difféomorphisme  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  où  $B$  est un ellipsoïde de l'espace affine  $\mathbb{A}$ . Ainsi, quitte à composer le difféomorphisme  $\phi$  par l'application affine de  $\mathbb{A}$  qui envoie le point  $\phi(x_0)$  sur  $x_0$ , et la base  $(T_{x_0}\phi \cdot e_i)_{i=1\dots n}$  sur la base  $(e_i)_{i=1\dots n}$ , la variété  $\mathcal{U}$  munie de la distance  $h_k$  est isométrique à un ouvert  $\mathcal{V}$  d'un modèle de Klein encore noté  $(B, d_k)$  via un difféomorphisme  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$

laissant le point  $x_0$  fixe et dont l'application linéaire tangente  $T_{x_0}\phi$  en  $x_0$  est l'identité. En effet, toute application affine envoie ellipsoïdes sur ellipsoïdes et est une isométrie entre les géométries de Hilbert formées par un domaine convexe ouvert borné d'une part, et son image par l'application affine d'autre part, tous deux munis de distances de Hilbert affectées d'un même coefficient  $k$ . Quitte à restreindre encore l'ouvert  $\mathcal{U}$ , nous supposons désormais, que c'est une boule centrée en  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$  strictement positif, relativement à la norme  $|\cdot|$  de l'espace affine  $\mathbb{A}$ .

Dans le but de prolonger l'isométrie  $\phi$  à toute l'adhérence du convexe  $C$ , considérons  $\Psi$  l'application du compact  $\overline{C}$  vers le compact  $\overline{B}$  définie la façon suivante:

- le point  $x_0$  est envoyé sur lui même,
- tout point  $y$  de l'ouvert  $C$  distinct de  $x_0$  a pour image par  $\Psi$  le point de la demi-droite  $[x_0; y)$  situé à la distance  $h_k(x_0, y)$  de  $x_0$  pour la distance  $d_k$ , le point image  $\Psi(y)$  est donc bien dans l'ouvert  $B$ ,
- et tout point  $y$  de la frontière  $\partial C$  est envoyé par  $\Psi$  sur le point de la frontière  $\partial B$  situé sur la demi-droite  $[x_0, y)$ .

Remarquons que l'application définie par la construction donnant  $\Psi$  dans laquelle les rôles des convexes  $C$  et  $B$  sont inversés, apparaît clairement comme l'inverse de l'application  $\Psi$  qui est donc une bijection entre les adhérences  $\overline{C}$  et  $\overline{B}$  des convexes  $C$  et  $B$ .

Par ailleurs, comme  $\phi$  est une isométrie, elle envoie toute géodésique finslérienne de  $(\mathcal{U}, h_k)$  partant de  $x_0$  dans une direction  $u$  sur l'unique géodésique de  $(\mathcal{V}, d_k)$  partant de  $\phi(x_0)$  avec la direction  $T_{x_0}\phi \cdot u = u$ . Cette géodésique est l'intersection  $[x_0; x_0 + u) \cap \mathcal{V}$ , les applications  $\phi$  et  $\Psi$  coïncident donc sur l'ouvert  $\mathcal{U}$ .

Observons encore que, par construction, la restriction de l'application  $\Psi$  à toute section du convexe  $C$  par une droite  $D$  passant par le point  $x_0$  est une isométrie entre les géométries de Hilbert  $(C \cap D, h_k)$  et  $(B \cap D, d_k)$ . Or les deux convexes  $C \cap D$  et  $B \cap D$  sont de dimension 1, la restriction de  $\Psi$  à  $D \cap C$  est donc une application projective (cf le paragraphe 3.1.2).

Pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , notons  $x_i$  le point  $x_0 + \frac{\varepsilon}{2}e_i$  de l'ouvert  $\mathcal{U}$ . Identifions l'espace affine  $\mathbb{A}$  à un hyperplan affine non vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la manière suivante: tout point de  $\mathbb{A}$  s'écrit de manière unique  $x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  dans le repère affine  $(x_0, e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{A}$ , et est identifié au point  $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Notons encore  $p$  la projection de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  sur son espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  qui sera identifié à  $\mathbb{A} \cup p(\vec{A})$ .

Prouvons maintenant l'existence et l'unicité d'une application projective  $\gamma$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  dans lui-même, coïncidant avec l'application  $\phi$  sur tous les segments intersection du convexe  $C$  avec une droite passant par le point  $x_0$  et l'un des points  $x_i$ .

Si l'application  $\gamma$  existe, alors en tant qu'application projective, elle provient d'une application linéaire  $g$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  définie à une homothétie près. Comme  $\gamma$  doit envoyer  $x_0$  sur lui-même, l'application linéaire  $g$  est uniquement déterminée à partir de  $\gamma$  en lui imposant d'envoyer le vecteur  $x_0$  sur lui-même.

Réciproquement, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , notons  $f_i$  le vecteur de  $\mathbb{R}x_0 \oplus \mathbb{R}e_i$  tel que l'application projective de  $p(\mathbb{R}x_0 \oplus \mathbb{R}e_i)$  associée à l'application linéaire qui envoie le vecteur  $x_0$  sur  $x_0$ , et le vecteur  $e_i$  sur  $f_i$ , coïncide avec la restriction de  $\phi$  au segment  $C \cap (x_0x_i)$ . C'est possible puisque nous savons qu'une telle restriction est projective. Remarquons qu'aucun vecteur  $f_i$  n'appartient à la droite vectorielle  $\mathbb{R}x_0$ , ainsi la famille  $(x_0, f_1, \dots, f_n)$  constitue une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . L'application linéaire envoyant  $x_0$  sur lui-même, et chaque vecteur  $e_i$  sur le vecteur  $f_i$ , définit donc bien une application projective  $\gamma$  qui coïncide avec  $\phi$  là où nous le voulions.

Nous allons maintenant démontrer par récurrence que les applications  $\Psi$  et  $\gamma$  sont égales sur toute section de l'ouvert convexe  $\mathcal{U}$  par un sous-espace affine de  $\mathbb{A}$  engendré par  $x_0$  et certains points de la famille  $(x_i)_{i=1\dots n}$ . La récurrence se fait sur la dimension  $m$  du sous-espace affine. L'application projective  $\gamma$  a été choisie pour que cette propriété soit vraie au rang 1.

Supposons maintenant que  $m$  est un entier supérieur ou égal à 1, et montrons que la propriété étudiée est récurrente. Intéressons nous au sous-espace affine de  $\mathbb{A}$  engendré par les  $m + 2$  points  $x_0, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m+1}}$ . Soit  $y$  un point de la section de l'ouvert  $\mathcal{U}$  par ce sous-espace affine. Si  $y$  appartient à un sous-espace affine de  $\mathbb{A}$  engendré par le point  $x_0$  et  $m$  points parmi  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m+1}}$ , alors l'hypothèse de récurrence nous assure que le point  $y$  a même image par les applications  $\Psi$  et  $\gamma$ . Sinon  $y$  est barycentre des points pondérés  $(x_0, \nu_0), (x_{i_1}, \nu_1), \dots, (x_{i_{m+1}}, \nu_{m+1})$  avec  $(\nu_j)_{j=0\dots n}$  des réels, non nuls pour tout entier  $j$  distinct de zéro, et de somme 1. Si  $\nu_{m+1}$  est distinct de 1, la somme  $\sum_{i=0}^m \nu_i = 1 - \nu_{m+1}$  est non nulle, nous pouvons donc introduire les barycentres  $z$  et  $z'$  des points pondérés  $(x_0, \nu_0), (x_{i_1}, \nu_1), \dots, (x_{i_m}, \nu_m)$  respectivement  $(x_{i_{m+1}}, \nu_{m+1})$ , sinon  $z$  et  $z'$  désignerons les barycentres des points pondérés  $(x_0, \nu_0 - 1), (x_{i_1}, \nu_1), \dots, (x_{i_m}, \nu_m)$ , respectivement  $(x_{i_{m+1}}, \nu_{m+1})$  et  $(x_0, 1)$ . Dans tous les cas, le point  $y$  apparaît donc comme le barycentre des points  $z$  et  $z'$  et appartient au segment affine  $(zz') \cap \mathcal{U}$ . Ainsi le point  $y$  est le point d'intersection de la demi-droite affine  $[x_0, y)$  et du segment affine  $(zz') \cap \mathcal{U}$ . Son image par  $\Psi$  appartient donc à l'intersection entre l'image par  $\Psi$  de la demi-droite  $[x_0, y)$  c'est à dire  $[x_0, y)$  elle-même, et l'image par  $\Psi$  du segment affine  $(zz') \cap \mathcal{U}$ . Le segment  $(zz') \cap \mathcal{U}$  est un morceau de géodésique de la variété  $(\mathcal{U}, h_k)$ , son image par l'isométrie  $\phi = \Psi|_{\mathcal{U}}$  appartient donc à la géodésique de  $(\mathcal{V}, d_k)$  reliant  $\phi(z) = \Psi(z)$  à  $\phi(z') = \Psi(z')$  qui est l'intersection avec  $\mathcal{V}$  de la droite affine reliant ces deux points. Or d'après l'hypothèse de récurrence et comme  $m$  vaut au moins 1, le point  $z$  a même image par  $\Psi$  et  $\gamma$ , et le point  $z'$  aussi, le point  $\Psi(y) = \phi(y)$  appartient donc à l'intersection de la droite  $(x_0y)$  et de la droite affine  $(\gamma(z) \gamma(z'))$  qui est l'image par l'application projective  $\gamma$  de la droite  $(zz')$ . Par ailleurs, l'application projective  $\gamma$  conservant l'alignement, elle envoie le point  $y$  sur l'intersection des droites images de  $(zz')$  et  $(x_0y)$ , qui sont respectivement les droites  $(\gamma(z) \gamma(z'))$  et la droite contenant  $\gamma(x_0) = x_0$  et de direction  $T_{x_0}\gamma \cdot \overrightarrow{x_0y} = \overrightarrow{x_0y}$  c'est à dire la droite  $(x_0y)$  elle-même. Ainsi les images du point  $y$  par les applications  $\Psi$  et  $\gamma$  sont bien confondues, ce qui termine la récurrence.

Finalement l'application  $\Psi$  coïncide avec l'application projective  $\gamma$  sur la section de

l'ouvert convexe  $\mathcal{U}$  par le sous-espace affine de  $\mathbb{A}$  engendré par le point  $x_0$  et tous les points  $x_i$  pour  $i$  variant de 1 à  $n$ , c'est à dire sur  $\mathcal{U}$  tout entier. Mais les restrictions des applications  $\gamma$  et  $\Psi$  à toute droite  $D$  passant par  $x_0$  sont projectives, or elles coïncident sur le segment ouvert non vide  $D \cap \mathcal{U}$ , donc elles sont égales. Ceci étant valable pour toute droite passant par le point  $x_0$ , l'application  $\Psi$  est l'application projective  $\gamma$ . La frontière du convexe  $C$  est donc l'image de l'ellipsoïde  $\partial B$  par l'application projective  $\gamma^{-1}$ , c'est donc une quadrique, bornée puisque le convexe  $C$  l'est, autrement dit un ellipsoïde, ce qui termine la démonstration.  $\square$

Dans cette démonstration, la structure riemannienne ne joue pas un rôle fondamental, et le même raisonnement que précédemment, en oubliant le passage relatif au modèle de Klein, permet d'obtenir la proposition suivante:

**Proposition 1.5.** *Soient  $(C, h_k)$  et  $(C', h'_k)$  deux géométries de Hilbert telles qu'il existe une isométrie infinitésimale entre deux variétés de Finsler  $(\mathcal{U}, h_k)$  et  $(\mathcal{U}', h'_k)$  où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$  sont respectivement des ouverts de  $C$  et  $C'$ . Alors les deux convexes  $C$  et  $C'$  se déduisent l'un de l'autre par une application projective.*

Rappelons qu'une isométrie infinitésimale entre deux variétés de Finsler  $(M, F)$  et  $(M', F')$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local  $f$  entre  $M$  et  $M'$  tel que l'application linéaire tangente en tout point  $x$  est une isométrie entre les espaces vectoriels normés  $(T_x M, F)$  et  $(T_{f(x)} M', F')$ . Contrairement à ce qui se passe dans le cadre riemannien, les isométries de la distance associée à la structure de Finsler ne sont a priori pas nécessairement différentiables. C'est pourquoi la proposition 1.5 n'est pas énoncée avec des isométries des distances. Dans cet énoncé, le fait d'imposer une structure (sur un ouvert) de variété de Finsler permet d'avoir l'unicité des géodésiques issues d'un point avec une direction donnée dans les ouverts  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}'$ , et celui de s'intéresser à une isométrie infinitésimale, d'assurer que l'image de la base  $(e_i)_{i=1\dots n}$  est encore une base.

La proposition 1.5 et sa démonstration montrent qu'en particulier, deux géométries de Hilbert localement isométriques au sens de leur structure de Finsler sont isométriques par une application projective, et que les seules isométries infinitésimales des géométries de Hilbert finslériennes sont les applications projectives. Cependant, même si le résultat final est identique (cf chapitre 3), la proposition 1.5 ne donne pas d'informations sur l'ensemble des isométries métriques des distances de Hilbert.

Revenons à la proposition 1.3, seule la partie réciproque demande une démonstration. Ce sens peut soit être considéré comme un corollaire de la proposition 1.4 qui est plus générale, soit se démontrer par un raisonnement similaire à celui conduisant à la proposition 1.4 au cours du lequel apparaissent des simplifications (les ouverts  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont les convexes  $C$  et  $B$ , l'isométrie  $\phi$  n'a pas besoin d'être prolongée), soit encore se prouver par la démonstration suivante, plus courte, mais qui fait appelle aux isométries des bonnes géométries de Hilbert que nous étudierons au chapitre 3. Rappelons une fois encore que B. Colbois et P. Verovic ont donnée récemment une quatrième démonstration de cette propriété ([CV00]).

*Une démonstration de la proposition 1.3.* La géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  étant une variété

riemannienne, cette dernière est simplement connexe, complète et à courbure constante égale à  $-k$ . Un résultat standard de géométrie riemannienne assure alors de l'existence d'une isométrie  $\phi$  entre la variété riemannienne  $(C, h_k)$  et le modèle de Klein  $(B, d_k)$  où  $B$  est une boule euclidienne de même dimension affine que le convexe  $C$ . Comme la géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  admet une structure riemannienne donc finslérienne, c'est une bonne géométrie de Hilbert. Ainsi l'isométrie  $\phi$  est une application projective (d'après la description des isométries faite au chapitre 3). La frontière  $\partial C$  du convexe  $C$  est donc l'image par une application projective, à savoir  $\gamma^{-1}$ , de la sphère  $\partial B$ , c'est donc une quadrique, bornée car  $C$  l'est, autrement dit un ellipsoïde, ce qui achève la démonstration.  $\square$



# Chapitre 2

## Convexité en géométrie de Hilbert.

Nous avons vu au chapitre précédent que les géométries de Hilbert sont les modèles de variétés de Finsler projectivement plates à courbure constante négative. Par ailleurs, les variétés riemanniennes à courbure strictement négative ont de nombreuses propriétés de convexité. Il est donc intéressant de tester si ces propriétés restent vraies en géométrie de Hilbert pour mieux appréhender la différence entre les cadres riemannien et finslérien.

Les résultats obtenus dans ce chapitre mettent en valeur des comportements très contrastés, en particulier selon que le convexe dont provient la géométrie de Hilbert contient ou non un segment fermé non vide dans sa frontière, alors que la présence d'un tel segment ne semble pas se lire localement sur la métrique de Finsler associée. En tous cas, il apparaît clairement que les résultats de convexité concernant les variétés riemanniennes courbées négativement ne peuvent guère s'étendre aux variétés de Finsler.

Un des résultats les plus marquants de ce chapitre, bien que quasi-immédiat, est l'équivalence pour les bonnes métriques de Hilbert entre bord visuel séparé et absence de segments ouverts non vides dans la frontière topologique du convexe. L'étude du comportement asymptotique de la distance entre deux géodésiques sécantes est aussi très instructive. En effet, en l'absence de segments dans la frontière topologique, cette distance reste convexe au voisinage de l'infini mais pas nécessairement sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier.

### 2.1 Convexité de certains ensembles.

Rappelons que dans un espace métrique géodésique, une partie  $\mathcal{A}$  est dite convexe quand tout segment géodésique reliant deux points de  $\mathcal{A}$  est entièrement inclus dans  $\mathcal{A}$ .

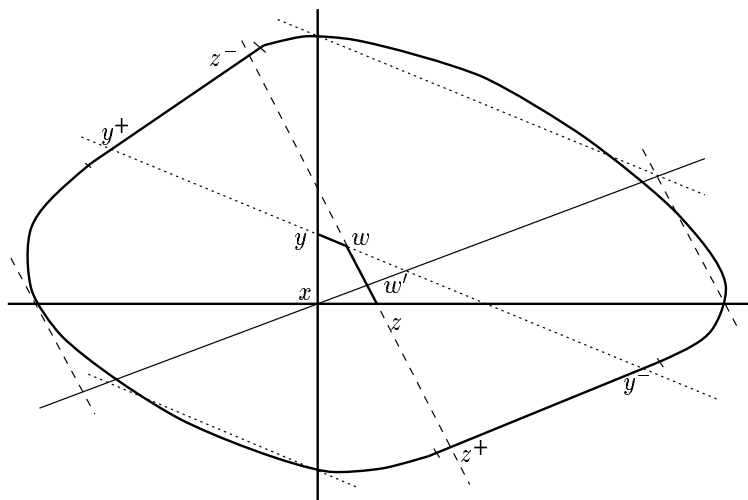
#### 2.1.1 Les boules métriques.

Les boules métriques d'une bonne géométrie de Hilbert sont strictement convexes pour la métrique de Hilbert. En revanche, pour une métrique de Hilbert quelconque, les boules métriques sont encore affinement convexes, mais ne sont plus nécessairement convexes au sens de la métrique ([Bus55]).

Ainsi, les sections planes des boules métriques sont affinement convexes, et admettent en tout point deux demi-tangentes, ce qui éclaire le résultat obtenu au paragraphe 1.1.3 du chapitre précédent.

### Exemple de boule non convexe.

Munissons le convexe représenté ci-après d'une métrique de Hilbert  $h$ .



La ligne brisée constituée des segments affines  $[y, w]$  et  $[w, z]$  est un segment géodésique reliant les points  $y$  et  $z$  d'après le paragraphe 1.1.1. Mais ce segment géodésique n'est pas totalement inclus dans la boule métrique de centre  $x$  et de rayon  $\max(h(x, y), h(x, z))$  puisque le point  $w'$  n'appartient pas à cette boule, comme le montre le schéma. La boule métrique centrée en  $x$  et de rayon  $\max(h(x, y), h(x, z))$  n'est donc pas métriquement convexe pour la distance  $h$ .

### 2.1.2 L'ensemble des points à distance constante d'un convexe.

Dans une bonne géométrie de Hilbert, l'ensemble des points à distance au plus  $R$  d'une partie convexe est convexe. Ce résultat reste vrai pour une géométrie de Hilbert quelconque à condition de remplacer la notion de convexité associée à la distance de Hilbert par la notion de convexité affine définie par la structure affine sous-jacente.

*Preuve.* La démonstration de cette propriété se fait à l'aide d'hyperplans d'appui du convexe, et de la description des boules métriques et de leurs tangentes. Une démonstration précise est donnée dans [Bus55] section 18.  $\square$



## 2.2 Hyperbolicité au sens de Gromov.

### 2.2.1 Définition.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Définissons pour tout point  $x_0$ , la fonction qui, à tout couple de points  $(x, y)$  de  $E$  associe le réel positif  $(x \cdot y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y))$ . Cet espace métrique  $(E, d)$  est alors dit  **$\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov** avec  $\delta$  un réel positif si pour tout point  $x_0$  de  $E$ , la propriété suivante est vérifiée:

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x \cdot y)_{x_0} \geq \min((x \cdot z)_{x_0}, (y \cdot z)_{x_0}) - \delta.$$

Rappelons que si cette propriété est vérifiée en un point  $x_0$  avec un réel  $\delta$ , elle est alors vérifiée en tout point de  $E$  avec le réel  $2\delta$ .

Pour les propriétés usuelles des espaces hyperboliques au sens de Gromov, on pourra se reporter à [CDP90] ou à l'article original de Gromov ([Gro87]).

### 2.2.2 Cas des géométries de Hilbert.

Rappelons que les géométries de Hilbert dont la frontière du convexe est un ellipsoïde sont riemanniennes, complètes, simplement connexes et à courbure constante négative, elles sont donc hyperboliques au sens de Gromov. A l'opposé, nous allons démontrer la proposition suivante:

**Proposition 2.1.** *Les géométries de Hilbert dont la frontière du convexe contient un segment ouvert non vide, ne sont pas hyperboliques au sens de Gromov.*

En particulier, les variétés de Finsler à courbure strictement négative même constante ne sont donc pas nécessairement hyperboliques au sens de Gromov. En effet, il existe des géométries de Hilbert finslérienne dont la frontière du convexe contient un segment.

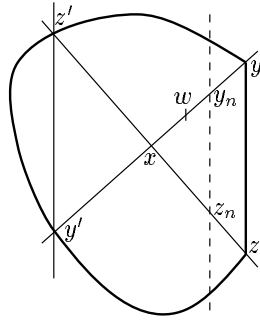
C'est encore une différence fondamentale avec le cadre riemannien dans lequel les variétés complètes, simplement connexes dont la courbure sectionnelle est majorée par une constante strictement négative sont automatiquement hyperboliques au sens de Gromov.

Enfin, pour les géométries de Hilbert dont le bord n'est pas un ellipsoïde et ne contient pas de segment, la question de l'hyperbolicité au sens de Gromov reste ouverte.

*Démonstration.* Soit  $(C, h_k)$  une géométrie de Hilbert telle que la frontière du convexe  $C$  contient au moins un segment. Nous allons montrer par l'absurde que l'espace métrique  $(C, h_k)$  ne peut pas être hyperbolique au sens de Gromov. Pour cela, nous allons construire une suite de triangles géodésiques, puis nous allons écrire qu'ils sont  $4\delta$ -étroits où  $\delta$  est un réel positif pour lequel la géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  est  $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov. Enfin, nous montrerons que ce réel  $\delta$  devrait alors être infini ce qui constituera la contradiction cherchée.

Avant de commencer, rappelons que la topologie provenant de la distance  $h_k$  et celle

issue de la structure affine sous-jacente, coïncident sur l'ouvert  $C$ ; ainsi toutes les convergences seront à prendre au sens de la topologie affine sous-jacente à l'adhérence de  $C$ . Supposons donc que l'espace métrique  $(C, h_k)$  est  $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov avec  $\delta$  un réel positif, et quitte à considérer une intersection du convexe  $C$  avec un plan contenant un segment du bord  $\partial C$ , que le convexe  $C$  est dimension 2. Notons  $y$  et  $z$  deux points distincts tels que la droite  $(yz)$  intersecte la frontière  $\partial C$  selon le segment affine  $[y; z]$ . Pour tout point  $u$ , la droite  $D_u$  désigne la parallèle à la droite  $(yz)$  passant par  $u$ . Fixons un point  $y'$  de la frontière  $\partial C$  tel que la droite  $D_{y'}$  n'est pas une droite d'appui du convexe  $C$ . Notons  $z'$  le deuxième point d'intersection entre  $D_{y'}$  et la frontière  $\partial C$ . Quitte à échanger les rôles des points  $y'$  et  $z'$ , les droites  $(yy')$  et  $(zz')$  se coupent en un point  $x$  de l'ouvert convexe  $C$ . Fixons encore une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points du segment affine  $[x; y]$  qui converge vers le point  $y$ . Elle définit la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des points d'intersection entre le segment  $[xz]$  et les droites  $D_{y_n}$ , et cette suite converge vers le point  $z$ .

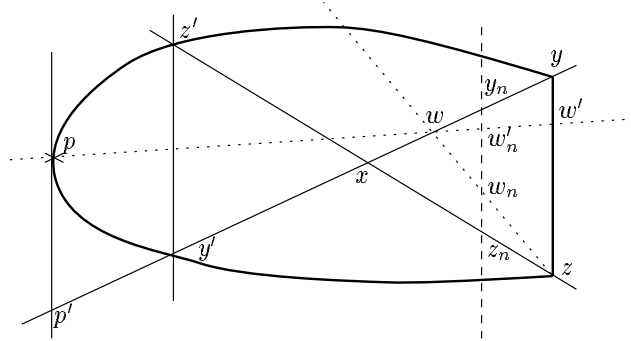


Soit  $w$  un point du segment  $[x; y]$ . Comme la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le point  $y$ , à partir d'un certain rang  $N_w$ , le point  $w$  appartient à tous les segments  $[x; y_n]$ , et donc au triangle affine  $xy_nz_n$ . Ce triangle étant un triangle géodésique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique, chacun de ses côtés est situé dans le  $(4\delta)$ -voisinage des deux autres. En particulier, le point  $w$  est situé à une distance inférieure à  $4\delta$  de la réunion des segments affines  $[xz_n] \cup [y_nz_n]$ , autrement dit, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N_w$ , nous avons l'inégalité  $4\delta \geq \min(h_k(w, [x; z_n]), h_k(w, [y_n; z_n]))$ . La distance  $h_k(w, [x; z_n])$  entre le point  $w$  et le segment  $[x; z_n]$  étant supérieure à la distance  $h_k(w, [x; z])$  entre le point  $w$  et le segment affine  $[x; z]$ , le réel  $\delta$  vérifie encore

$$4\delta \geq \min(h_k(w, [x; z]), h_k(w, [y_n; z_n])). \quad (2.1)$$

Intéressons nous maintenant à la distance entre le point  $w$  et le segment affine  $[y_n; z_n]$ . La droite  $(y'z')$  est parallèle à la droite  $(yz)$  et, contrairement à cette dernière, n'est pas une droite d'appui du convexe  $C$ . Il existe donc au moins un point  $p$  de la frontière  $\partial C$  situé dans le demi-plan ouvert limité par la droite  $(y'z')$  ne contenant pas  $y$ , tel que la droite  $D_p$  est une droite d'appui du convexe  $C$ . Le point d'intersection de cette droite  $D_p$  avec la droite  $(xy)$  est un point  $p'$  indépendant du point  $p$  choisi, et situé sur la demi-droite issue de  $y'$  dans la direction  $\overrightarrow{y'x}$ . Désignons par  $w_n$ , respectivement  $w'_n$ , le point d'intersection entre les droites  $(wz)$ , respectivement  $(wp)$ , et  $(y_nw_n)$ . Pour tout entier  $n$  supérieur à  $N_w$ , ces points  $w_n$  et  $w'_n$  appartiennent en fait au segment  $[y_n; z_n]$ . Remarquons encore que

les suites  $(w_n)_{n \geq N_w}$  respectivement  $(w'_n)_{n \geq N_w}$  convergent vers le point  $z$  respectivement le point  $w'$  d'intersection entre les droites  $(pw)$  et  $(yz)$ . Ainsi, quitte changer d'entier  $N_w$ , nous pouvons supposer que le point  $w'_n$  appartient au segment  $[y_n; w_n]$  pour tout entier  $n$  supérieur à  $N_w$ .



Fixons maintenant un entier  $n$  supérieur à  $N_w$ , et orientons le segment affine  $C \cap (y_n z_n)$  de  $y_n$  vers  $z_n$ . Les boules métriques étant affinement convexes (cf paragraphe 2.1.1), et les droites étant des géodésiques, la fonction  $d$  qui à tout point  $u$  de ce segment  $C \cap (y_n z_n)$  associe sa distance  $h_k(u, w)$  au point  $w$  est décroissante puis croissante. Pour tout point  $u$  du segment  $[y_n; w_n]$ , la droite  $(wu)$  coupe la frontière  $\partial C$  en deux points l'un appartenant au segment  $[y; z]$  et l'autre, noté  $u^-$  n'y appartenant pas. Nous avons donc

$$d : u \in [y_n; w_n] \mapsto \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln[D_{u^-}, D_w, D_u, (yz)] = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln[D_{u^-} \cap (xy), w, y_n, y].$$

Ainsi par construction des points  $p'$  et  $w'_n$ , la fonction  $d$  atteint un minimum local au point  $w'_n$  du segment  $[y_n; z_n]$ , c'est donc son minimum global. Or nous avons les inclusions  $[y_n; w_n] \subset [y_n; z_n] \subset (y_n z_n) \cap C$ , la distance entre le point  $w$  et le segment  $[y_n; w_n]$  est donc égale à la distance  $h_k(w, w'_n)$  entre les points  $w$  et  $w'_n$  qui vaut par ailleurs  $\frac{1}{2\sqrt{k}} \ln[p', w, y_n, y]$ .

Ainsi, l'inégalité 2.1 s'écrit aussi  $4\delta \geq \min(h_k(w, w'_n), h_k(w, [x; z]))$  pour tout entier  $n$  supérieur à  $N_w$ . Or la suite formée par les points  $w'_n$  converge vers le point  $y$ , la distance  $h_k(w, w'_n)$  qui vaut  $\frac{1}{2\sqrt{k}} \ln[p', w, y_n, y]$ , tend donc vers  $+\infty$ . Ainsi, pour tout point  $w$  du segment ouvert  $[x; y]$ , le réel  $4\delta$  est supérieur à la distance  $h_k(w, [x; z])$  atteinte en un point  $q_w$  de  $[x; z]$ . Choisissons maintenant une suite de points  $W_n$  du segment  $[x; y]$  qui converge vers le point  $y$ , la suite des points  $q_{W_n}$  correspondants est une suite du compact (pour la topologie affine)  $[x; z]$ , elle converge donc, à extraction près, vers un point  $q$  du segment  $[x; z]$ . Si le point  $q$  appartient à l'ouvert  $C$ , alors la distance  $h_k(W_n, [x; z]) = h_k(W_n, q_{W_n})$  tend vers l'infini avec  $n$ , sinon  $q$  est confondu avec le point  $z$  et la distance  $h_k(W_n, [x; z])$  qui vaut  $h_k(W_n, q_{W_n})$  tend encore vers l'infini. Ainsi, dans tous les cas, le réel  $\delta$  doit être supérieur à tous les termes d'une suite tendant vers l'infini, ce qui n'est pas possible et fournit la contradiction cherchée à l'hyperbolicité au sens de Gromov de la géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$ .  $\square$

## 2.3 Le bord visuel des bonnes géométries de Hilbert.

Dans toute cette partie,  $(C, h)$  désigne une bonne géométrie de Hilbert,  $\mathbb{A}$  l'espace affine sous-jacent et toute géodésique sera implicitement paramétrée par sa longueur d'arc. La convergence sera à comprendre, sauf mention contraire, au sens de la topologie affine.

Nous allons nous intéresser au bord visuel de  $(C, h)$  et voir qu'il permet de détecter la stricte convexité de l'adhérence du convexe  $C$ .

### 2.3.1 Définitions.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

Deux rayons géodésiques, restrictions de deux géodésiques orientées  $\delta$  et  $\beta$  à  $\mathbb{R}^+$ , sont dits **asymptotes** si la fonction qui, à tout réel  $t$  positif associe la distance  $d(\delta(t), \beta(t))$  est bornée. On dit aussi que les géodésiques  $\delta$  et  $\beta$  sont asymptotes en  $+\infty$ .

L'inégalité triangulaire et le fait que les géodésiques sont paramétrées par leur longueur d'arc, assurent que cette notion ne dépend que des supports orientés des géodésiques concernées, et que la relation "être asymptotes" est une relation d'équivalence.

Le **bord visuel** en un point  $x$  de l'espace métrique  $(E, d)$  est l'ensemble des rayons géodésiques (i.e. définis sur  $\mathbb{R}^+$ ) paramétrés par leur longueur d'arc et issus du point  $x$ , quotienté par la relation d'équivalence "être asymptotes". Ce bord visuel est muni de la topologie quotient issue de la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts.

### 2.3.2 Description du bord visuel.

Soit  $\beta$  une géodésique orientée. Son support géométrique est un segment affine  $]\beta^-; \beta^+]$ , et les points  $\beta(t)$  convergent vers le point  $\beta^-$ , respectivement  $\beta^+$ , de la frontière topologique du convexe  $C$  quand  $t$  tend vers  $-\infty$  respectivement  $+\infty$ .

Dans le cadre des bonnes géométries de Hilbert, les rayons géodésiques asymptotes se caractérisent facilement:

**Lemme 2.1.** *Dans une bonne géométrie de Hilbert  $(C, h)$ , deux géodésiques orientées  $\delta$  et  $\beta$  sont asymptotes en  $+\infty$  si et seulement si les points  $\delta^+$  et  $\beta^+$  sont confondus ou appartiennent à l'intérieur d'un même segment inclus dans la frontière du convexe  $C$ .*

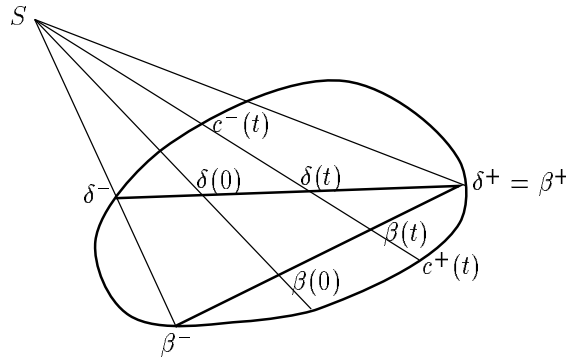
Le bord visuel en un point  $x$  quelconque d'une bonne métrique de Hilbert est donc naturellement en bijection avec la frontière topologique  $\partial C$  du convexe  $C$ , quotientée par la relation d'équivalence "être confondus ou appartenir à un même segment ouvert inclus dans  $\partial C$ ". Cette relation est automatiquement une relation d'équivalence car c'est la traduction dans le cas particulier des bonnes métriques de Hilbert de la relation d'équivalence "être asymptotes". La topologie de ce bord visuel fait l'objet du paragraphe suivant.

*Preuve du lemme.* Supposons les géodésiques  $\delta$  et  $\beta$  de supports distincts, et notons par  $c^-(t)$  et  $c^+(t)$  les points d'intersection de la droite orientée  $(\delta(t)\beta(t))$  avec la frontière  $\partial C$  du convexe  $C$ . Ces points sont bien définis excepté peut-être pour une valeur du paramètre

$t$ .

Supposons dans un premier temps, que les points  $\delta^+$  et  $\beta^+$  sont distincts. Alors les points  $c^-(t)$  et  $c^+(t)$  convergent, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , vers des points de  $\partial C$  notés respectivement  $c^-$  et  $c^+$ . Ce sont les extrémités du segment  $(\delta^+\beta^+) \cap \overline{C}$ . Ainsi quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , le birapport  $[c^-(t), \delta(t), \beta(t), c^+(t)]$  tend vers le birapport  $[c^-, \delta^+, \beta^+, c^+]$  qui est strictement supérieur à 1 et éventuellement infini. En fait, il est fini si et seulement si  $c^-$  est distinct de  $\delta^+$  et  $c^+$  distinct de  $\beta^+$ , autrement dit si  $\delta^+$  et  $\beta^+$  sont situés à l'intérieur du segment  $(\delta^+\beta^+) \cap \overline{C}$ . Le passage aux logarithmes donnant la distance, termine la démonstration dans ce premier cas.

Supposons maintenant que les rayons géodésiques  $\delta$  et  $\beta$  arrivent en un même point de la frontière du convexe  $C$ . Dans une telle situation, les rayons géodésiques admettent comme supports géométriques des segments affines ayant une extrémité en commun et sont nécessairement coplanaires. Restreignons nous au plan ainsi défini. Les segments affines, supports géométriques de  $\beta$  et  $\delta$ , sont distincts et ont l'extrémité  $\delta^+ = \beta^+$  en commun. Les points  $\delta(0)$  et  $\beta(0)$  sont donc distincts, et définissent une droite qui intersecte la droite  $(\delta^-\beta^-)$  en un point  $S$  éventuellement situé à l'infini. Comme les chemins  $\delta$  et  $\beta$  sont paramétrés par leur longueur d'arc, pour tout réel  $t$ , la droite projective  $(\delta(t)\beta(t))$  contient le point  $S$ .



La fonction distance  $d : t \in \mathbb{R} \mapsto h(\delta(t), \beta(t))$  vérifie donc

$$d(t) = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln[c^-(t), \delta(t), \beta(t), c^+(t)] = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln [(\delta^+c^-(t)), (\delta^-\delta^+), (\beta^-\beta^+), (\delta^+c^+(t))].$$

Comme  $C$  est convexe, si  $t$  et  $t'$  sont deux réels tels que  $t$  est strictement inférieur à  $t'$ , les demi-droites  $[\delta^+c^-(t)]$  et  $[\delta^+c^+(t)]$  sont dans le secteur angulaire défini par les demi-droites  $[\delta^+c^-(t')]$  et  $[\delta^+c^+(t')]$  et contenant la demi-droite  $[\delta^+\delta^-]$ . Ainsi la fonction continue  $d$  est décroissante. Or elle est minorée par zéro, elle admet donc une limite finie en  $+\infty$  ce qui termine la démonstration.  $\square$

### 2.3.3 La topologie du bord visuel.

L'espace des rayons géodésiques issus d'un point  $x$  vérifie le lemme suivant:

**Lemme 2.2.** *Soit  $(C, h)$  une bonne géométrie de Hilbert. L'ensemble des rayons géodésiques issues d'un point de  $C$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tous les*

compacts, est homéomorphe à la frontière topologique du convexe  $C$ , munie de la topologie trace de la topologie affine sous-jacente.

Ainsi, vu la traduction de la relation d'équivalence "être asymptotes" en terme de points de la frontière topologique du convexe  $C$  (lemme 2.1), les bords visuels de l'espace métrique  $(C, h)$  sont tous homéomorphes.

*Démonstration.* Soit  $x$  un point du convexe  $C$ , et  $\Psi$  l'application définie sur la frontière topologique  $\partial C$  de la façon suivante :

$$\Psi(y) : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x + \frac{\alpha_-(y) \left( e^{2\sqrt{k}t} - 1 \right)}{1 + \alpha_-(y)e^{2\sqrt{k}t}} \overrightarrow{xy}$$

où  $\alpha_-(y)$  est le réel strictement positif défini en écrivant que le point  $x - \alpha_-(y)\overrightarrow{xy}$ , est le point d'intersection entre la frontière  $\partial C$  et la demi-droite issue de  $x$  dans la direction  $-\overrightarrow{xy}$ . L'application  $\Psi$  est une bijection entre la frontière topologique  $\partial C$  du convexe  $C$  et l'ensemble des rayons géodésiques de l'espace métrique  $(C, h)$  issus du point  $x$ .

La topologie trace sur  $\partial C$  de la topologie affine est métrisable, et il en est de même pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}^+$ . Ainsi, nous pouvons travailler avec des suites pour prouver la bicontinuité de l'application  $\Psi$ .

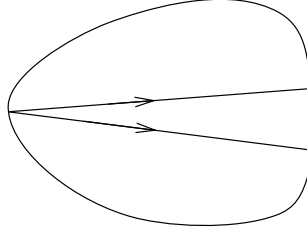
L'application  $\Psi$  est continue car la convexité et la compacité de  $\overline{C}$  assure la continuité de la fonction  $\alpha_-$ , et donc pour toute suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la frontière  $\partial C$  convergeant pour la topologie affine vers un point  $y$  de  $\partial C$ , les fonctions continues  $\Psi(y_n)$  convergent vers la fonction continue  $\Psi(y)$ , et en particulier uniformément sur tout compact.

L'application  $\Psi^{-1}$  est aussi continue. En effet, supposons qu'une suite des rayons géodésiques  $\Psi(y_n)$  converge uniformément sur tout compact vers une application  $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{C}$  alors pour tout réel positif  $t$ , les points  $\Psi(y_n)(t)$  appartiennent à la boule de centre  $x$  et de rayon  $t$  pour la distance  $h$ , qui est compacte et incluse dans l'ouvert  $C$ , donc finalement l'application  $r$  arrive dans le convexe  $C$ , et par continuité de la fonction distance, est encore un rayon géodésique issu de point  $x$ . Il s'écrit, de manière unique,  $\Psi(y)$ . Les points  $y_n$ , respectivement  $y$ , sont alors les points d'intersection de la frontière  $\partial C$  avec les demi-droites issues de  $x$  dans la direction  $\overrightarrow{x\Psi(y_n)(1)}$ , respectivement  $\overrightarrow{x\Psi(y)(1)}$ . Comme la suite des points  $\Psi(y_n)(1)$  converge vers  $\Psi(y)(1)$  pour la topologie métrique provenant de la distance  $h$ , la convergence a aussi lieu pour la topologie affine sous-jacente, les demi-droites affines  $[x; \Psi(y_n)(1)) = [x, y_n)$  convergent donc vers la demi-droite  $[x; \Psi(y)(1)) = [x; y)$  et la convexité de  $C$  permet de conclure que les points  $y_n$  convergent vers le point  $y$ .  $\square$

Finalement, quand le convexe  $C$  est géométriquement strictement convexe, son bord visuel est homéomorphe à sa frontière topologique. Par contre, si le convexe  $C$  correspond à de bonnes géométries de Hilbert sans être géométriquement convexe, le bord visuel des géométries de Hilbert qu'il définit, n'a plus une topologie aussi agréable. Elle n'est en particulier plus séparée car la classe d'équivalence d'un segment  $I$  ouvert non vide de la frontière du convexe  $C$  forme un ouvert, contenu dans tous les ouverts contenant la classe d'équivalence de l'une des extrémités de  $I$ .

### 2.3.4 Le lemme du ruban plat.

Observons maintenant qu'il existe des convexes  $C$  dont le bord contient un segment et qui, munis d'une métrique de Hilbert, sont des variétés de Finsler réversibles. Considérons alors deux segments partant d'un même point de la frontière du convexe, et arrivant en deux points distincts situés à l'intérieur d'un même segment du bord  $\partial C$ .



Ces segments sont des géodésiques qui sont asymptotes en  $-\infty$  et  $+\infty$ , d'après la description donnée dans le lemme 2.1. Mais contrairement au cas riemannien, ils ne bordent pas un ruban plat (i.e. de courbure nulle), puisque la courbure de la variété est constante et strictement négative. Ainsi donc le lemme du ruban plat de la géométrie riemannienne n'est plus vrai dans les variétés de Finsler à courbure négative, même constante.

## 2.4 Distance entre deux géodésiques sécantes.

Dans le cas des variétés riemmanniennes à courbure négative, la distance entre deux géodésiques paramétrées par leur longueur d'arc est une fonction convexe. Nous allons montrer qu'il ne faut pas s'attendre à un résultat similaire sur les variétés de Finsler à courbure négative même constante, en étudiant le comportement asymptotique de certaines de ces fonctions distances en géométrie de Hilbert. Nous verrons cependant que dans certains cas, il subsiste de la convexité à l'infini.

### 2.4.1 Enoncé du théorème.

Soit  $(C, h_k)$  une bonne géométrie de Hilbert. Toute géodésique orientée  $\delta$  admet alors pour support géométrique un segment affine orienté  $]\delta^-; \delta^+[$  où les points  $\delta^-$  et  $\delta^+$  sont les points d'intersection de droite affine engendrée par le support géométrique de  $\delta$  et le bord du convexe  $C$ .

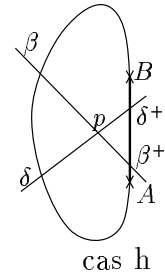
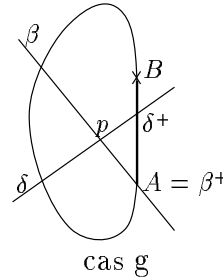
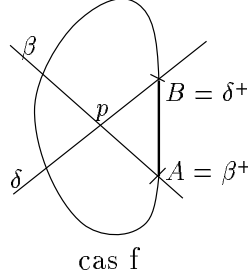
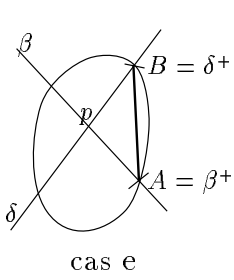
Considérons  $\beta$  et  $\delta$  deux géodésiques orientées n'admettant pas le même support géométrique, coïncidant à l'origine des temps en un point  $p = \beta(0) = \delta(0)$ . La droite orientée  $(\beta^+\delta^+)$  intersecte l'adhérence du convexe  $C$  selon un segment noté  $[AB]$ . Désignons alors de la façon suivante les quatre cas différents qui peuvent se produire:

**cas e**: la droite  $(AB)$  n'est pas une droite d'appui du convexe  $C$ ; donc le point  $A$  est confondu avec  $\gamma^+$  et  $B$  avec  $\delta^+$ ;

**cas f**: la droite  $(AB)$  est une droite d'appui du convexe  $C$  et les points  $A$  et  $\beta^+$  sont confondus ainsi que les points  $B$  et  $\delta^+$ ;

**cas g** : les segments  $[AB]$  et  $[\beta^+\delta^+]$  ont une seule extrémité en commun;

**cas h** : le segment fermé  $[\beta^+\delta^+]$  est entièrement inclus dans le segment ouvert  $]AB[$ .



Dès que les géodésiques  $\delta$  et  $\beta$  n'arrivent pas sur un même plat du bord de  $C$ , nous sommes dans la situation e. C'est en particulier, toujours le cas pour les géométries de Hilbert à bord strictement convexe. Par contre, pour des géométries de Hilbert admettant aussi une structure de Finsler, tous les cas peuvent se produire, puisque le bord du convexe peut éventuellement contenir un segment.

Avec ces notations, nous sommes en mesure de décrire le comportement asymptotique de la distance entre deux géodésiques sécantes. Il dépend fortement de la forme du convexe aux extrémités des deux géodésiques.

**Théorème 2.1.** *Soit  $(C, h_k)$  une bonne géométrie de Hilbert telle que le bord du convexe  $C$  est de classe  $\mathcal{C}^q$  avec  $q$  un entier supérieur ou égal à 2. Etant données deux géodésiques orientées  $\beta$  et  $\delta$ , paramétrées par leur longueur d'arc, dont les supports géométriques sont distincts, et qui passent par un même point  $p = \beta(0) = \delta(0)$  à la date  $t = 0$ , la fonction  $d$  qui à tout réel  $t$  associe la distance de Hilbert  $d(t) = h_k(\beta(t), \delta(t))$  vérifie les propriétés suivantes:*

(i) *la fonction  $d$  est strictement croissante,*

(ii) *à l'infini:*

$$d(t) = 2t + \sum_{l=0}^{q-1} K_l e^{-2l\sqrt{k}t} + o\left(e^{-2(q-1)\sqrt{k}t}\right) \quad \text{avec } K_0 \leq 0, \text{ dans le cas e,}$$

*et  $d$  tend vers l'infini dans le cas f resp. g mais de manière à ce que  $d(t) - 2t$  respectivement  $d(t) - t$  tend vers  $-\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .*

(iii) *pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, la dérivée  $\dot{d}$  de la fonction  $d$  vérifie pour  $t$  assez grand (cette borne dépend de  $\varepsilon$ ):*

$$\begin{cases} \lim_{+\infty} \dot{d} = 2 & \text{dans le cas e,} \\ 0 < \dot{d}(t) \leq 2 & \text{dans le cas f,} \\ 0 < \dot{d}(t) \leq 1 + \varepsilon & \text{dans le cas g,} \\ \lim_{+\infty} \dot{d} = 0 & \text{dans le cas h} \end{cases}$$

(iv) *dans le cas e, la dérivée seconde  $\ddot{d}$  tend vers zéro par valeurs positives à l'infini, autrement dit la fonction  $d$  est convexe au voisinage de l'infini.*



Ces résultats sont optimaux comme le montreront les exemples au paragraphe 2.4.4, en particulier il n’y a quasiment aucun contrôle sur la dérivée  $\ddot{d}$  dans des situations de type f, g ou h.

### Remarques

Aucune hypothèse de régularité sur la frontière du convexe  $C$  n’est nécessaire pour prouver la stricte croissance de la fonction  $d$ .

La propriété (ii) reste vraie pour un bord de classe seulement  $\mathcal{C}^1$ , mais le développement asymptotique obtenu est moins précis. Par ailleurs, le signe de  $K_0$  est simplement donné par l’inégalité triangulaire.

Dans le cadre des domaines strictement convexes, les résultats obtenus sont à mettre en parallèle avec le comportement asymptotique de la distance entre deux suites de points de  $C$  convergeant vers deux points distincts de la frontière  $\partial C$ , obtenue par Beardon ([Bea99]). Là encore, aucun contrôle uniforme n’est obtenu.

Remarquons enfin que l’étude du comportement de la distance entre les géodésiques permet de “visualiser” les plats du bord du convexe  $C$ , puisque ces derniers induisent un changement radical dans le comportement des fonctions distance  $d$ .

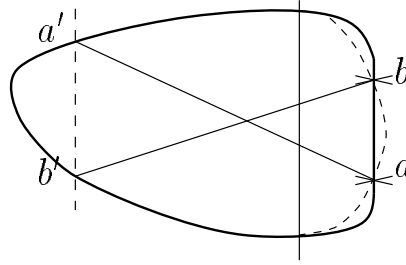
### A propos de la convexité globale

Observons que dans une situation de type  $h$ , la fonction distance est croissante et admet une limite finie à l’infini, elle ne peut donc pas être convexe ni même à partir d’une certaine date. La fonction  $\ddot{d}$  ne peut donc pas rester positive au voisinage de l’infini.

Dans une situation de type e, la quatrième propriété du théorème 2.1 affirme que la fonction  $d$  est nécessairement convexe à partir d’un certain temps mais absolument pas qu’elle est convexe sur tout  $\mathbb{R}^+$  comme c’est le cas pour une variété riemannienne à courbure négative constante. D’ailleurs la fonction distance n’est pas en général convexe sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier.

En effet, la conjecture selon laquelle dans toute bonne géométrie de Hilbert dont la frontière du convexe est de classe  $\mathcal{C}^2$  et à hessien défini positif en tout point, les fonctions distances du théorème 2.1 sont toutes convexes, est fautive. Pour nous en convaincre, considérons un ouvert convexe borné  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$ , contient un segment ouvert non vide  $]a; b[$ , et est à hessien défini positif en tout point hors de  $\partial C \cap (ab)$ . Munissons le convexe  $C$  d’une métrique de Hilbert  $h_k$  et choisissons deux points  $a'$  et  $b'$  de  $\partial C$  tels que les droites  $(aa')$  et  $(bb')$  sont sécantes à l’intérieur de  $C$  et la droite  $(a'b')$  est parallèle à la droite  $(ab)$ . Les géodésiques orientées de  $(C, h)$  paramétrées par leur longueur d’arc correspondant aux traces sur  $C$  des droites affines orientées  $(a'a)$  et  $(b'b)$  sont respectivement notées  $\beta$  et  $\delta$ . Nous imposons encore que les points  $\beta(0)$  et  $\delta(0)$  sont confondus avec le point de concours entre les droites  $(a'a)$  et  $(b'b)$ . Pour tout réel  $t$  strictement positif, on verra au paragraphe suivante que la droite  $(\beta(t)\delta(t))$  est parallèle à  $(ab)$ , nous pouvons donc considérer un ouvert convexe borné  $C_t$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que sa frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  à hessien défini positif en tout point, contient les points  $a$  et  $b$  et le morceau de la frontière

$\partial C$  situé dans le demi-plan fermé limité par la droite  $(\beta(t)\delta(t))$  et contenant le point  $a'$ .



Munissons alors ce convexe  $C_t$  de sa métrique de Hilbert  $h_k^t$  ayant le même coefficient  $k$  que la métrique  $h_k$  de  $C$ . Les chemins  $\delta$  et  $\beta$  sont encore des géodésiques paramétrées à vitesse unité de  $(C_t, h_k^t)$ , et pour tout réel  $s$  de  $[0; t]$  les distances  $h_k(\beta(s); \delta(s))$  et  $h_k^t(\beta(s), \delta(s))$  sont égales. Donc si la conjecture était vraie, la fonction  $s \in \mathbb{R}^+ \mapsto h_k(\beta(s), \delta(s))$  serait alors convexe ce qui n'est pas.

### 2.4.2 Position du problème et notations.

La géométrie de Hilbert n'étant pas uniforme, il n'est guère possible d'utiliser des résultats généraux sur la variation de la longueur. Des calculs directs utilisant des formules explicites de la longueur sont donc inévitables. Pour les mêmes raisons, il ne faut pas s'attendre à pouvoir contrôler uniformément le comportement de la distance entre les géodésiques.

La fonction  $d$  ne dépendant que de l'intersection du convexe  $C$  avec le plan défini par les deux géodésiques  $\beta$  et  $\delta$ , nous nous restreignons désormais à ce plan.

Montrons maintenant que nous pouvons toujours nous ramener à un cadre agréable où les calculs ne seront pas trop pénibles.

Si les droites  $(\beta^-\delta^-)$  et  $(\beta^+\delta^+)$  ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point  $u$  situé à l'extérieur du convexe  $C$ . En effet, comme les segments  $] \beta^- \beta^+[$  et  $] \delta^- \delta^+[$  se coupent en un point de l'ouvert  $C$ , le point  $u$  n'appartient ni à l'ouvert  $C$  par convexité de ce dernier, ni à sa frontière  $\partial C$  puisque dans ce cas, la convexité de  $C$  interdirait aux dits segments d'être colinéaires ce qui contredirait le fait que  $(C, h)$  est une bonne géométrie de Hilbert. La structure projective des géométries de Hilbert, permet d'envoyer le point  $u$  à l'infini, et de se ramener par une application projective qui est une isométrie de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à une situation où les droites  $(\beta^-\delta^-)$  et  $(\beta^+\delta^+)$  sont parallèles, ce que nous supposons désormais. Remarquons qu'une telle application conserve la régularité de la frontière, et ne change pas le cas (e, f, g ou h) relatif aux géodésiques étudiées.

Dans cette situation, les droites  $(\beta(t)\delta(t))$  restent parallèles à la droite  $(\beta^+\delta^+)$ . En effet, en notant respectivement  $D$  et  $D_t$  les droites parallèles à  $(\beta^+\delta^+)$  passant respectivement par  $p$  et  $\beta(t)$ , le birapport  $[\beta^-, p, \beta(t), \beta^+]$  est égal au birapport de droites  $[(\beta^-\delta^-), D, D_t, (\beta^+\delta^+)]$

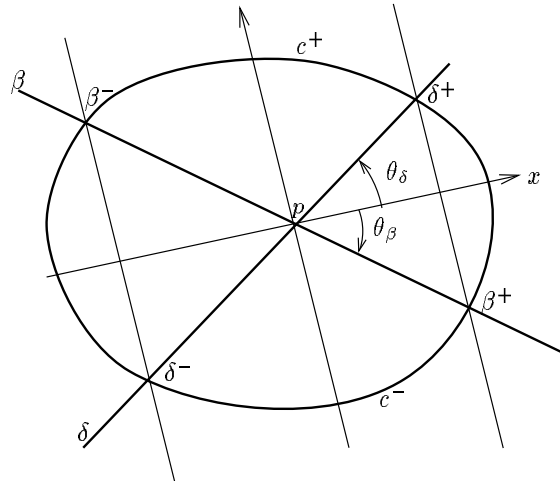
et donc à  $[\delta^-, p, D_t \cap \delta, \delta^+]$  par intersection avec la droite supportant  $\delta$  (encore notée  $\delta$ ). Les géodésiques  $\beta$  et  $\delta$  étant paramétrées par leur longueur d'arc, les distances  $h_k(p, \delta(t))$  et  $h_k(p, \beta(t))$  sont égales à  $|t|$  et donc le point  $\delta(t)$  est confondu avec le point de concours entre les droites  $D_t$  et  $\delta$ .

Nous nous plaçons dorénavant dans un repère  $(p, \vec{i}, \vec{j})$  tel que le vecteur  $\vec{j}$  est positivement colinéaire au vecteur  $\vec{\beta^+ \delta^+}$ , la droite  $(p, \vec{i})$  sépare les points  $\delta^+$  et  $\beta^+$ , et l'abscisse  $a$  de  $\beta^+$  est positive. Nous décidons que le repère ainsi choisi est orthonormé (ce qui fixe un produit scalaire).

### Notations

Désignons par  $\theta_\delta$  et  $\theta_\beta$  les angles des droites orientées  $\delta$  respectivement  $\beta$  avec le vecteur  $\vec{i}$ . Ils vérifient donc  $-\pi/2 < \theta_\beta < 0 < \theta_\delta < \pi/2$ . Le rapport  $-\overline{p\delta^+} / \overline{p\delta^-}$  sera noté  $r$ , il est positif.

Comme  $C$  est un domaine convexe borné, l'intersection de sa frontière qui est de classe  $\mathcal{C}^q$ , avec la bande d'équation  $\frac{a}{r} < x < a$  peut être décrite à l'aide du graphe de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^q$ . La fonction  $c^+$  (resp.  $c^-$ ) décrivant la partie supérieure de l'intersection (resp. la partie inférieure) est nécessairement concave (resp. convexe). Rappelons que l'entier  $q$  est supposé supérieur à 1, et observons alors que les fonctions  $c^+$  et  $c^-$  sont dérivables en  $a$  si et seulement si nous sommes dans le cas e, sinon la régularité du bord impose que les dérivées  $-\dot{c}^+$  et  $\dot{c}^-$  tendent simultanément vers  $+\infty$ .



Nous avons donc en coordonnées

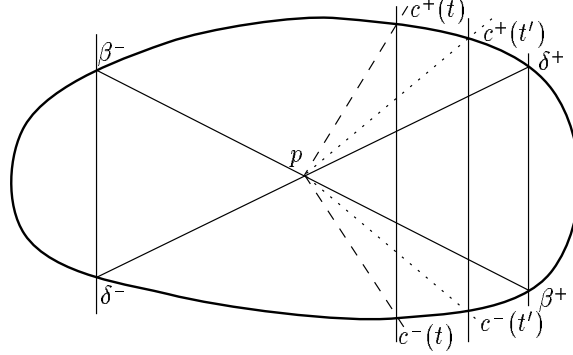
$$\begin{aligned} A &= (a, c^-(a)) & B &= (a, c^+(a)) & \delta^+ &= (a, a \tan \theta_\delta) \\ \beta^+ &= (a, a \tan \theta_\beta) & \delta^- &= \left(-\frac{a}{r}, -\frac{a \tan \theta_\delta}{r}\right) & \beta^- &= \left(-\frac{a}{r}, -\frac{a \tan \theta_\beta}{r}\right). \end{aligned}$$

### 2.4.3 Démonstration du théorème 2.1.

Nous nous ramenons à la situation décrite dans le paragraphe précédent et utilisons les notations qui y ont été définies.

#### La croissance de $d$ .

La convexité de  $C$  implique que, pour tous réels  $0 < t < t'$ , les demi-droites  $[pc^-(t)]$ ,  $[pc^-(t')$ ,  $[p, \beta^+)$ ,  $[p, \delta^+)$ ,  $[pc^+(t')$  et  $[pc^+(t)]$ , issues de  $p$ , sont distinctes et placées dans cet ordre, comme l'illustre la figure suivante



L'angle orienté entre les demi-droites  $[pc^-(t)]$  et  $[pc^+(t)]$  étant strictement compris entre zéro et  $\pi$ , le birapport  $[(pc_t^-), \beta, \delta, (pc_t^+)]$  est donc strictement inférieur à  $[(pc_{t'}^-), \beta, \delta, (pc_{t'}^+)]$ , ce qui termine la preuve de la croissance de la fonction  $d$ .

#### L'abscisse de $\beta(t)$ .

L'abscisse  $a$  de  $\beta^+$ , resp.  $-a/r$  de  $\beta^-$ , est aussi celle de  $\delta^+$ , resp. de  $\delta^-$ . De plus, les droites  $(\beta^+\delta^+)$  et  $(\beta(t)\delta(t))$  restant parallèles, les points  $\beta(t)$  et  $\delta(t)$  ont toujours la même abscisse notée  $x(t)$ . Ainsi, comme la courbe  $\beta$  est paramétrée par sa longueur d'arc, tout réel  $t$  vérifie  $t = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln [\beta^-, p, \beta(t), \beta^+]$ , ce qui conduit à l'égalité

$$x(t) = a \frac{e^{2\sqrt{k}t} - 1}{e^{2\sqrt{k}t} + r}.$$

Nous retrouvons le fait que  $x(t)$  tend vers  $a$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , et vers  $-a/r$  quand  $t$  tend vers  $-\infty$ , et obtenons la relation utile suivante

$$a - x(t) = \frac{a(r+1)}{r + e^{2\sqrt{k}t}}. \quad (2.2)$$

La dérivée  $\dot{x}$  vaut donc

$$\dot{x} = a(r+1) 2\sqrt{k} \frac{e^{2\sqrt{k}t}}{(r + e^{2\sqrt{k}t})^2}. \quad (2.3)$$

Elle tend vers zéro en  $+\infty$  et vérifie

$$\dot{x} = 2\sqrt{k}(a-x) - \frac{2\sqrt{k}r}{a(r+1)}(a-x)^2. \quad (2.4)$$

Enfin la dérivée seconde  $\ddot{x}$  tend aussi vers zéro à l'infini car elle est donnée par la relation

$$\ddot{x} = -4k(a-x) + \frac{12kr}{a(r+1)}(a-x)^2 - 8k\left(\frac{r}{a(r+1)}\right)^2(a-x)^3. \quad (2.5)$$

### Une expression de la distance $d$ .

En explicitant le birapport intervenant dans la fonction  $d$ , nous obtenons la relation

$$2\sqrt{k}d = \ln \left( \frac{c^- \circ x - x \tan \theta_\delta}{c^- \circ x - x \tan \theta_\beta} \cdot \frac{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} \right).$$

Les inégalités  $c^-(a) \leq a \tan \theta_\beta < a \tan \theta_\delta \leq c^+(a)$  montrent que la fonction croissante  $d$  tend vers  $+\infty$  avec  $t$  dans tous les cas excepté le cas h pour lequel  $d$  converge vers une limite finie.

Ecrivons  $d$  comme la somme  $d_+ + d_-$  de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^q$  sur  $\mathbb{R}$  définies par

$$d_+ = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} \quad \text{et} \quad d_- = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{c^- \circ x - x \tan \theta_\delta}{c^- \circ x - x \tan \theta_\beta}. \quad (2.6)$$

Les fonctions  $c^+$  et  $c^-$  peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre excepté le fait que leurs dérivées premières tendent simultanément vers l'infini ou vers une limite finie en  $a$ . Nous allons donc étudier le comportement de  $d_+$ , celui de  $d_-$  se traitant de manière analogue, pour en déduire celui de la fonction  $d$ . Nous sommes donc naturellement amenés à considérer les trois cas suivants<sup>1</sup>:

**cas e'** :  $\dot{c}^+(a)$  existe et donc  $c^+(a)$  vaut  $a \tan \theta_\delta$ ,

**cas f'** :  $\dot{c}^+(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$ , et  $A = \delta^+$  i.e.  $c^+(a) = a \tan \theta_\delta$ ,

**cas h'** :  $\dot{c}^+(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$ , et  $A \neq \delta^+$  i.e.  $c^+(a) > a \tan \theta_\delta$ .

### La propriété (ii).

Evaluons plus précisément le birapport donnant  $d_+$  pour en obtenir un développement asymptotique.

*Dans le cas e'.*

Dans la situation e', la fonction  $c^+$  étant de classe  $\mathcal{C}^q$  sur l'intervalle  $[0, a]$  tout entier avec  $q \geq 2$ , nous obtenons par la formule de Taylor, et en tenant compte de l'égalité  $c^+(a) = a \tan \theta_\delta$ , les estimations suivantes

---

1. Attention, par commodité d'écriture, une fonction  $f$  étant donnée, la notation  $\dot{f}$  désignera sa dérivée usuelle.

- $c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta = (c^+(a) - a \tan \theta_\beta) + (\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\beta)(x - a) + o(x - a)$ ,
- $c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta = (\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)(x - a) + \frac{\ddot{c}^+(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2)$ .

Rappelons que la fonction  $d_+$  est définie par la formule 2.6. Ainsi, comme nous avons les inégalités  $c^+(a) > a \tan \theta_\beta$  et  $\dot{c}_+(a) < \tan \theta_\delta$ , il existe deux constantes  $k_0$  et  $k_1$  telles que

$$2\sqrt{k} d_+ = k_0 - \ln(a - x) + k_1(x - a) + o(a - x).$$

Finalement, l'expression 2.2 de la fonction  $x - a$  nous montre qu'elle se développe sur les puissances entières positives de  $t \mapsto e^{-2\sqrt{k}t}$ . Nous obtenons, au voisinage de l'infini, l'estimation

$$d_+(t) = t + K_0^+ + K_1^+ e^{-2\sqrt{k}t} + o\left(e^{-2\sqrt{k}t}\right) \text{ où } K_0^+ \text{ et } K_1^+ \text{ sont des constantes.}$$

Si l'entier  $q$  est strictement supérieur à 2, la même démonstration avec des développements de Taylor à des ordres plus élevés, montre immédiatement que la fonction  $d_+$  se développe sur l'échelle des fonctions  $e^{-2l\sqrt{k}t}$  avec  $l \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$ .

*Dans le cas f'.*

Dans cette situation, la concavité et la régularité de la fonction  $c^+$  assure qu'elle vérifie au voisinage de l'infini

$$0 < -\dot{c}^+ \circ x < \frac{c^+ \circ x - c^+(a)}{a - x}. \quad (2.7)$$

Mais la dérivée  $\dot{c}^+$  tend vers l'infini en  $a$  dans ce cas f', la fonction  $a - x$  est donc négligeable devant  $c^+ \circ x - c^+(a)$ , ce qui conduit, puisque  $c^+(a)$  vaut  $a \tan \theta_\delta$ , aux égalités

$$c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta = c^+ \circ x - c^+(a) + (a - x) \tan \theta_\delta = (c^+ \circ x - c^+(a))(1 + o(1)).$$

De plus, nous avons  $c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta = c^+(a) - a \tan \theta_\beta + o(1)$  avec  $c^+(a) - a \tan \theta_\beta$  qui est strictement positif. Finalement, en nous souvenant que  $c^+ \circ x - c^+(a)$  tend vers zéro à l'infini, nous obtenons  $2\sqrt{k} d_+ = -\ln(c^+ \circ x - c^+(a)) + O(1)$ . Nous avons aussi

$$\begin{aligned} d_+(t) - t &= -\frac{\ln(c^+ \circ x - c^+(a))}{2\sqrt{k}} + \frac{\ln e^{-2\sqrt{k}t}}{2\sqrt{k}} + O(1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \left( \frac{e^{-2\sqrt{k}t}}{a - x} \times \frac{a - x}{c^+ \circ x - c^+(a)} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Or nous savons que  $a - x$  est négligeable, dans le cas f' qui nous intéresse, devant  $c^+ \circ x - c^+(a)$  et que la fonction  $t \mapsto a - x(t)$  est équivalente à  $t \mapsto a(r + 1)e^{-2\sqrt{k}t}$  d'après son expression donnée en 2.2, donc  $d_+(t) - t$  tend bien vers  $-\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

*Dans le cas g'.*

Dans ce cas particulier,  $d_+$  admet clairement une limite finie à l'infini.

*Conclusion.*

Des calculs similaires pour  $d_-$ , aboutissent au développement cherché pour la fonction  $d = d_+ + d_-$  à l'infini, simplement en utilisant l'indépendance des fonctions  $c^+$  et  $c^-$ .

**La propriété (iii).**

La positivité de la fonction dérivée  $\dot{d}$  quand elle existe (ce qui est le cas dès que le bord du convexe est de classe  $\mathcal{C}^1$ ) provient de la stricte croissance de la fonction distance  $d$ . Rappelons maintenant l'expression de la fonction  $d_+$

$$d_+ = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta}.$$

Sa dérivée  $\dot{d}_+$  est donc donnée par l'expression

$$\dot{d}_+ = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{k}} \times \frac{\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\beta}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta} - \frac{\dot{x}}{2\sqrt{k}} \times \frac{\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} \quad (2.8)$$

$$= \frac{\dot{x}}{2\sqrt{k}} \times \frac{(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - x \dot{c}^+ \circ x)}{(c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta)}. \quad (2.9)$$

Comme  $a \tan \theta_\beta$  est différent de  $c^+(a)$ , nous en déduisons, à l'aide de la formule 2.4, l'équivalence à l'infini:

$$\dot{d}_+ \sim (a - x) \times \frac{(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - x \dot{c}^+ \circ x)}{(c^+(a) - a \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta)}. \quad (2.10)$$

*Dans le cas e'.*

Dans ce cas, la fonction  $c^+$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -a/r, a]$ , et  $c^+(a)$  vaut  $a \tan \theta_\delta$ . Comme  $\dot{c}^+(a)$  est distinct de  $\tan \theta_\delta$ , la formule 2.10 devient donc

$$\dot{d}_+ \sim (a - x) \times \frac{\tan \theta_\delta - \dot{c}^+(a)}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta}.$$

De la formule de Taylor  $c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta = (\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)(x - a) + o(x - a)$ , nous déduisons enfin que  $\dot{d}_+$  tend vers 1 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

*Dans le cas f'.*

Dans une situation de ce type, la dérivée  $\dot{c}^+$  tend vers l'infini, la valeur de  $c^+(a)$  est  $a \tan \theta_\delta$ , et la fonction  $a - x$  est négligeable devant  $c^+ \circ x - c^+(a)$ . D'après la formule 2.10, la dérivée  $\dot{d}_+$  vérifie donc au voisinage de l'infini,

$$\dot{d}_+ \sim -(a - x) \times \frac{\dot{c}^+ \circ x}{c^+ \circ x - c^+(a)}.$$

Le dernier terme est positif au voisinage de l'infini et majoré par 1 d'après l'inégalité 2.7. Ici, la fonction  $\dot{d}_+$  est donc positive et majorée par tout réel strictement supérieur à 1 pour

$t$  assez grand.

En fait  $\dot{d}_+$  est majoré par 1 au voisinage de l'infini. Pour le voir, cherchons le signe de  $\dot{d}_+ - 1$  soit encore celui de  $\mathcal{S} = (\dot{d}_+ - 1)(c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta)$  au voisinage de l'infini. Un calcul direct<sup>2</sup> utilisant les formules 2.4 et 2.9 aboutit à l'expression  $\mathcal{S}$  comme somme des trois termes  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  suivants :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{r}{r+1}(a-x)^2(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta) = o((c^+ \circ x - c^+(a))^2), \\ T_2 &= -[c^+ \circ x - c^+(a) + (a-x)\tan \theta_\delta][c^+ \circ x - c^+(a) + (a-x)\tan \theta_\beta] \\ &\sim -(c^+ \circ x - c^+(a))^2, \\ T_3 &= (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)[c^+ \circ x - c^+(a) + (a-x)\dot{c}^+ \circ x] \left[ -a + (a-x) - \frac{r(a-x)^2}{a(r+1)} \right] \\ &\sim -a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - c^+(a) + (a-x)\dot{c}^+ \circ x). \end{aligned}$$

Rappelons que les estimations des termes  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont obtenus par la remarque suivante : dans le cas f', la concavité de  $c^+$  montre qu'à l'infini,  $\dot{c}^+ \circ x$  tend vers l'infini, la fonction  $x - a$ , respectivement  $(x - a)\dot{c}^+ \circ x$  est négligeable devant respectivement dominée par, la fonction  $c^+ \circ x - c^+(a)$ .

Les équivalents de  $T_2$  et  $T_3$  sont négatifs, puisque la concavité de  $c^+$  permet d'affirmer que  $(x - a)\dot{c}^+ \circ x$  est supérieur à  $c^+(a) - c^+ \circ x$ . L'expression  $\mathcal{S}$  est donc négative au voisinage de l'infini, ce qui termine la preuve, et nous permet d'obtenir l'équivalent suivant

$$\mathcal{S} \sim -(c^+ \circ x - c^+(a))^2 - a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - c^+(a) + (a-x)\dot{c}^+ \circ x). \quad (2.11)$$

*Dans le cas h'.*

Dans ce cas, nous avons l'inégalité  $c^+(a) > a \tan \theta_\delta$ , l'estimation  $a - x = o(c^+ \circ x - c^+(a))$  puisque  $c^+$  est concave et que sa dérivée  $\dot{c}^+$  diverge à l'infini. L'estimation 2.10 montre donc qu'à l'infini,

$$\dot{d}_+ \sim (a-x) \times \frac{-a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)\dot{c}^+ \circ x}{(c^+(a) - a \tan \theta_\beta)(c^+(a) - a \tan \theta_\delta)}.$$

Ainsi, l'inégalité 2.7 et la continuité de  $c^+$  en  $a$  assurent que le dernier terme tend vers zéro à l'infini, et donc que  $\dot{d}_+$  aussi.

*Conclusion.*

Par les mêmes méthodes, nous pouvons démontrer des résultats analogues pour  $\dot{d}_-$ . Puisque  $\dot{d}$  est la somme  $\dot{d}_+ + \dot{d}_-$  et que les fonctions  $c^+$  et  $c^-$  sont indépendantes, le résultat cherché en découle immédiatement.

---

2. Ce calcul est entièrement effectué dans l'annexe C.



**La propriété (iv).**

En utilisant l'expression 2.8 de  $\dot{d}_+$ , la dérivée seconde de la fonction  $d_+$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} \ddot{d}_+ &= \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\ddot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\beta) + \dot{x}^2 \ddot{c}^+ \circ x}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta} - \frac{1}{2\sqrt{k}} \left( \frac{\dot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\beta)}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\ddot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta) + \dot{x}^2 \ddot{c}^+ \circ x}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} + \frac{1}{2\sqrt{k}} \left( \frac{\dot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta)}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} \right)^2. \end{aligned}$$

Les expressions 2.4 et 2.5 des dérivées  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  comme polynômes en la fonction  $x - a$ , montrent que la dérivée seconde  $\ddot{d}_+$  s'exprime comme une fonction composée  $D \circ x$ . La fonction  $D$  se développe sur les puissances entières de la fonction  $x - a$  en appliquant la formule de Taylor aux fonctions  $c^+$ ,  $\dot{c}^+$  et  $\ddot{c}^+$  au point  $a$ . Pour cela, nous avons seulement besoin que  $c^+$  soit  $\mathcal{C}^2$  en  $a$ . Un calcul direct conduit à l'estimation<sup>3</sup>

$$D(y) = 2\sqrt{k} \left( \frac{r}{a(r+1)} + \frac{\ddot{c}^+(a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} - \frac{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\beta}{a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)} \right) (a - y) + o(a - y).$$

Pour passer de la fonction  $d_+$  à  $d_-$ , il suffit d'invertir les exposants  $+$  et  $-$ , respectivement les indices  $\delta$  et  $\beta$ , ainsi nous obtenons

$$\ddot{d}(t) = 2\sqrt{k} S(a - x(t)) + o(a - x(t))$$

$$\text{avec } S = \frac{2r}{a(r+1)} + \frac{\ddot{c}^+(a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} + \frac{\ddot{c}^-(a)}{2(\dot{c}^-(a) - \tan \theta_\beta)} + \frac{\tan \theta_\beta - \dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta + \dot{c}^-(a)}{a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)}.$$

Or dans une situation de type e, la convexité de  $C$  impose la positive relative de la tangente à  $\partial C$  en  $\delta^+$  et de la droite  $(\beta^- \delta^+)$  à savoir

$$\dot{c}^+(a) \leq \frac{a \tan \theta_\delta + a \tan \theta_\beta / r}{a + a/r} = \tan \theta_\delta + \frac{1}{1+r} (\tan \theta_\beta - \tan \theta_\delta).$$

Une inégalité similaire concernant  $\dot{c}^-(a)$  conduit à l'inégalité

$$\dot{c}^-(a) \geq \tan \theta_\beta + (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) \frac{1}{r+1}.$$

Remarquons qu'il y a égalité dans la première (resp. seconde) inégalité si et seulement si le segment  $[\beta^- \delta^+]$  (resp.  $[\beta^+ \delta^-]$ ) est inclus dans la frontière topologique de  $C$ . Dans le cadre d'une bonne géométrie de Hilbert, les deux inégalités précédentes ne peuvent donc pas être simultanément des égalités. Ainsi, nous obtenons

$$S > \frac{\ddot{c}^+(a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} + \frac{\ddot{c}^-(a)}{2(\dot{c}^-(a) - \tan \theta_\beta)}.$$

Le réel  $S$  est donc strictement positif puisque la fonction  $c^+$  est concave et la fonction  $c^-$  convexe, et  $\ddot{d}$  s'annule à l'infini tout en restant positif. La fonction  $d$  est donc convexe à l'infini.

---

3. Ce calcul est détaillé dans l'annexe C.

### 2.4.4 Exemples.

Le but de cette partie est de montrer par des exemples que les résultats du théorème 2.1 sont optimaux.

Nous utiliserons les notations précédentes et décrirons seulement les morceaux de la frontière qui nous intéressent pour avoir le comportement de la fonction  $d$ . Nous sommes autorisés à ne décrire qu'une partie du bord car nous le ferons toujours de façon à ce qu'il soit possible de trouver un prolongement lisse et convexe de la partie décrite. De plus, pour tous les exemples, les géodésiques  $\delta$  et  $\beta$  seront respectivement la première et la seconde bissectrice, les réels  $r$  et  $a$  seront pris égaux à 1 et le réel  $k$  vérifiera  $2\sqrt{k} = 1$ . La fonction abscisse  $x$  est donc donnée par  $x(t) = \tanh(t/2)$ .

#### Comportements possibles de $\dot{d}_+$ dans le cas f'.

Les exemples suivants illustrent le fait que n'importe quelle limite comprise entre 0 et 1 peut être obtenue pour  $\dot{d}_+$ .

- La dérivée  $\dot{d}_+$  tend vers zéro à l'infini pour une frontière décrite pour  $x$  dans  $[1 - e^{-2}, 1[$  par :

$$c^+(x) = 1 - \frac{1}{\ln(1-x)}.$$

- Soit  $\mu$  un réel strictement compris entre 0 et 1, alors la dérivée  $\dot{d}_+$  tend vers  $\mu$  à l'infini dès que la frontière coïncide pour  $x$  dans  $[0, 1[$  avec le graphe  $c^+$  défini par

$$c^+(x) = 1 + \frac{(1-x)^\mu}{\mu}.$$

- La dérivée  $\dot{d}_+$  tend vers 1 à l'infini quand le bord de  $C$  est décrit sur  $[1 - e^{-1}, 1]$  par

$$c^+(x) = 1 - (1-x) \ln(1-x).$$

Remarquons que dans ces trois exemples, la dérivée seconde  $\ddot{d}_+$  tend vers zéro à l'infini.

En revanche, choisissons un bord dont la restriction à l'intervalle  $[1/2, 1]$  est donnée par la fonction

$$c^+(x) = 1 + 2 [8 + \cos(\ln(1-x))] \sqrt{1-x}.$$

Dans ce cas, ni la dérivée première  $\dot{d}_+$ , ni la dérivée seconde  $\ddot{d}_+$  n'admettent de limite à l'infini. De plus,  $\ddot{d}_+$  reste bornée tout en prenant des valeurs positives et négatives dans tout voisinage de l'infini.

#### Comportement de $\ddot{d}$ dans les cas f' et h'.

Puisque  $\dot{d}$  est une fonction bornée, la seule limite possible dans  $\overline{\mathbb{R}}$  pour la dérivée seconde  $\ddot{d}$  est zéro. Quand cette dérivée seconde n'a pas de limite à l'infini, elle peut rester

bornée ou non. En fait, toutes ces situations peuvent se produire comme l'illustrent les exemples suivants.

Tout d'abord, remarquons de nouveau que les fonctions  $c^+$  et  $c^-$  pouvant être choisies indépendamment l'une de l'autre, il suffit de montrer que les situations décrites ci-avant se produisent pour  $\ddot{d}_+$  dans les cas f' et h'.

Avant d'exhiber des exemples, observons plus précisément la dérivée seconde. Les équivalents de  $\dot{x}$  et  $\dot{x}$  donnés par les formules 2.4 et 2.5, permettent d'obtenir, en tenant compte de l'inégalité 2.7 et de la continuité de  $c^+$ ,

$$\ddot{d}_+ = \frac{\dot{x}^2}{2\sqrt{k}} \times \frac{x(\tan\theta_\beta - \tan\theta_\delta)\ddot{c}^+ \circ x}{(c^+ \circ x - x \tan\theta_\delta)(c^+ \circ x - x \tan\theta_\beta)} + \begin{cases} 0(1) & \text{dans le cas f'} \\ o(1) & \text{dans le cas h'}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Les trois premiers exemples du paragraphe précédent illustrent des situations de type f' pour lesquelles  $\ddot{d}_+$  tend vers zéro à l'infini.

Un bord dont la partie supérieure est le graphe de  $c^+ : x \in [0, 1] \mapsto 2 + 2\sqrt{1-x}$  correspond à une situation du type h' pour laquelle  $\ddot{d}_+$  tend vers zéro à l'infini.

Cherchons maintenant des exemples pour lesquels  $\ddot{d}_+$  reste borné sans avoir limite à l'infini. Pour le cas f', une telle situation est fournie par le dernier exemple du paragraphe précédent. Construisons maintenant un exemple pour le cas h'.

Tout d'abord, considérons la fonction continue  $f$  définie sur  $[0, 1[$  qui prend la valeur  $-1$  sauf sur les intervalles  $[1 - 1/n - 1/n^4, 1 - 1/n + 1/n^4]$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ , où elle vaut  $f(x) = -1 - n^2 + |x - 1 + 1/n| n^6$ . La fonction  $f$  est donc une fonction "triangle" qui vérifie

$$-1 - \frac{1}{(x-1)^2} \leq f \leq -1.$$

Observons que la fonction  $g : y \in [0, 1[ \mapsto \int_0^y f(u) du$  est alors une fonction décroissante, négative et continue sur  $[0, 1]$  puisque  $g(1 - 1/n + 1/n^4)$  converge quand  $n$  tend vers l'infini. Ainsi la fonction

$$c^+ : x \in [0, 1] \mapsto - \int_x^1 \int_0^y f(u) du dy + 2\sqrt{1-x} + 2$$

est concave, de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1[$  et  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , tend vers  $2 \neq 1$  en 1 (par continuité de  $g$ ). De plus sa dérivée première  $\dot{c}^+$  tend vers  $-\infty$  en 1. La fonction  $c^+$  décrit donc bien une situation de type h'.

Ici la formule 2.12 devient

$$\ddot{d}_+ = -2x \dot{x}^2 \times \frac{\ddot{c}^+ \circ x}{(c^+ \circ x - x)(c^+ \circ x + x)} + o(1).$$

Mais la formule 2.4 montre qu'à l'infini

$$\frac{-2x \dot{x}^2 \ddot{c}^+ \circ x}{(c^+ \circ x - x)(c^+ \circ x + x)} \sim -\frac{2(1-x)^2}{3} \times \left( f \circ x - \frac{1}{2\sqrt{1-x}^3} \right).$$

Grâce au choix de  $f$ , ce dernier terme est borné mais n'admet pas de limite (les suites définies par  $x_n = 1 - 1/n$  resp.  $1 - 1/n - 1/n^4$  tendent vers  $2/3$  resp. zéro); ainsi nous avons bien un exemple où  $\ddot{d}_+$  reste borné sans avoir de limite à l'infini.

Cherchons enfin des exemples pour lesquels  $\ddot{d}_+$  est non bornée. La formule 2.12 assure que si  $c^+$  décrit une situation de type h' pour laquelle la dérivée seconde  $\ddot{d}_+$  est non bornée, alors  $c^+ - c^+(1) + 1$  fournit un exemple de situation de type f' pour laquelle  $\ddot{d}_+$  n'est pas bornée. Cela provient simplement du fait que le dénominateur admet une limite non nulle dans le premier cas, et tend vers zéro dans l'autre. Nous allons donc nous contenter de construire un exemple pour le cas h'.

Soit  $f$  la fonction continue, en triangle, définie sur  $[0, 1[$  comme prenant la valeur  $-1$  sauf sur les intervalles  $[1 - 1/n - 1/n^4, 1 - 1/n + 1/n^4]$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ , où elle vaut  $f(x) = -1 - n^3 + |x - 1 + 1/n| n^7$ . Observons que la fonction  $g : y \in [0, 1[ \mapsto \int_0^y f(u) du$  est alors négative, décroissante de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1[$ , et qu'elle tend vers  $-\infty$  en 1 puisque la suite  $g(1 - 1/n + 1/n^4)$  est divergente.

Cependant un calcul explicite de  $\int_{1-1/n}^{1-1/(n+1)} g(u) du$  montre que ces termes sont ceux d'une série convergente, et donc que l'intégrale  $\int_0^1 g(u) du$  est convergente. Nous pouvons donc définir la fonction

$$c^+ : x \in [0, 1[ \mapsto - \int_x^1 \int_0^y f(u) du dy + 2.$$

Elle est concave, de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1[$ , tend vers  $2 \neq 1$  en 1. Comme  $\dot{c}^+$  diverge vers  $-\infty$  en 1, la situation ainsi décrite est de type h'.

Ici la formule 2.12 conduit à l'équivalence des suites  $\ddot{d}_+(1 - \frac{1}{n})$  et  $\frac{2n}{3}$  ce qui prouve que  $\ddot{d}_+$  n'est pas borné.

## Chapitre 3

# Les isométries en géométrie de Hilbert.

Le but de ce chapitre est de déterminer les isométries des bonnes géométries de Hilbert et donc en particulier des géométries de Hilbert finslériennes. Il peut sembler trivial que ces isométries sont les applications projectives conservant le convexe, mais ce résultat n'est pas aussi immédiat qu'il paraît et s'avère faux pour certains convexes comme le triangle ([dlH93]).

Fixons un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  et une métrique de Hilbert associée à ce convexe. Une isométrie, i.e. une application conservant les distances, pour l'espace métrique ainsi défini sera encore une isométrie pour toute autre métrique de Hilbert associée à ce même convexe puisque toutes ces métriques sont proportionnelles. Cela autorise donc à parler abusivement d'isométrie d'un convexe muni de sa métrique de Hilbert sans préciser laquelle.

Insistons encore sur le fait que nous appelons isométrie toute application conservant les distances et non une application surjective ayant cette propriété.

### 3.1 Description des isométries.

Dans  $\mathbb{R}^n$ , les applications projectives de  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  conservant globalement un domaine ouvert convexe borné sont visiblement, en restriction à ce domaine, des isométries pour toute métrique de Hilbert associée à ce convexe puisqu'elles conservent le birapport. Mais la réciproque, à savoir si ces applications sont les seules isométries des géométries de Hilbert, n'est pas claire.

Dans [BK53], Busemann répond par l'affirmative pour les convexes de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  géométriquement strictement convexes, mais avec une catégorie un peu plus restreinte d'isométries, à savoir les isométries surjectives.

Dans [dlH93], P. de la Harpe démontre que pour tout domaine convexe de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n$  supérieur ou égal à 2, dont l'adhérence est géométriquement strictement convexe, les iso-

métriques pour la métrique de Hilbert sont exactement les applications projectives conservant globalement le convexe. Toujours dans cet article, P. de la Harpe prouve que le résultat subsiste pour un quadrilatère convexe de  $\mathbb{R}^2$ , mais devient faux pour un triangle de  $\mathbb{R}^2$ . Nous y reviendrons succinctement un peu plus loin.

La question de savoir pour quels convexes les isométries de la métrique de Hilbert sont exactement les restrictions des applications projectives conservant le convexe, reste ouverte.

Remarquons enfin qu'une application projective conserve l'ouvert convexe borné  $C$  si et seulement si elle conserve sa frontière topologique.

### 3.1.1 Le cas des bonnes métriques de Hilbert.

En fait, des arguments similaires à ceux utilisés par P. de la Harpe et une observation attentive des bonnes métriques de Hilbert permettent d'obtenir la proposition suivante, dont la démonstration fera l'objet de la section 3.2:

**Proposition 3.1.** *Soient  $(C, h_k)$  et  $(C', h_{k'})$  deux bonnes métriques de Hilbert respectivement associées aux domaines ouverts convexes bornés  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $C'$  de  $\mathbb{R}^{n'}$  avec  $n$  un entier supérieur à 2.*

*Alors l'ensemble des isométries de  $(C, h_k)$  vers  $(C', h_{k'})$  est*

*— vide dès que  $k$  est différent de  $k'$ , ou que la dimension affine de  $C$  est strictement supérieure à celle de  $C'$  (i.e.  $n > n'$ ),*

*— l'ensemble des restrictions à  $C$  des éléments de  $PGL(\mathbb{R}^{n+1})$  envoyant  $C$  sur une section affine  $n$ -dimensionnelle de  $C'$  quand  $k = k'$  et  $n \leq n'$ .*

*Dans cet énoncé, une isométrie de  $(C, h_k)$  vers  $(C', h_{k'})$  désigne une application  $\gamma$  de  $C$  vers  $C'$ , conservant les distances c'est à dire telle que  $h_{k'}(\gamma(x), \gamma(y)) = h_k(x, y)$  pour tout couple de points  $(x, y)$  de  $C \times C$ .*

Remarquons que la bijectivité d'une isométrie n'est pas posée a priori dans sa définition mais obtenue a posteriori (en un certain sens précisé dans le théorème pour la surjectivité, l'injectivité étant automatique). De plus, il est clair qu'à toute isométrie correspond une et une seule application projective puisque cette dernière est déterminée par  $n + 2$  points projectivement indépendants, qui peuvent être choisis dans l'ouvert  $C$ .

Comme corollaire immédiat de cette proposition, nous obtenons la description suivante des isométries d'une bonne métrique de Hilbert i.e. des isométries de  $(C, h_k)$  vers  $(C, h_k)$ :

**Proposition 3.2.** *Les isométries d'une bonne métrique de Hilbert  $h_k$  associée à un domaine ouvert convexe borné  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  sont exactement les restrictions des applications projectives de  $PGL(\mathbb{R}^{n+1})$  qui conservent globalement la frontière topologique de  $C$  dans  $\mathbb{R}^n$ .*

La topologie à laquelle il est fait référence, est la topologie affine de  $\mathbb{R}^n$ . Seul le cas  $n = 1$  ne découle pas de la proposition précédente et sera vérifié à part dans le paragraphe suivant.

### 3.1.2 Que se passe-t-il en dimension $n = 1$ ?

Toute géodésique orientée  $\delta$  paramétrée à vitesse unité pour  $h_k$  une métrique de Hilbert (i.e.  $h_k(\delta(t), \delta(s)) = |t-s| \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$ ) est isométrique à la droite réelle usuelle, l'isométrie étant donnée par  $t \in \mathbb{R} \mapsto \delta(t)$  dans un sens et par l'application qui, à tout point  $x$  du support de  $\delta$ , associe la distance algébrique  $h_k(x, \delta(0))$ , dans l'autre.

Ainsi donc tous les convexes de dimension 1 sont isométriques entre eux (sans considération sur le coefficient  $k$  de la métrique de Hilbert). Et une isométrie  $\gamma$  de la géométrie de Hilbert  $(]a, b[, h_k)$  vers la géométrie de Hilbert  $(C', h_{k'})$  se réduit à une isométrie entre  $(]a, b[, h_k)$  et le support géométrique de la géodésique  $\gamma(]a, b[)$  muni de la distance de Hilbert  $h_{k'}$ . Dans le cas où  $(C', h_{k'})$  est une bonne métrique de Hilbert ou plus généralement si le support géométrique de  $\gamma(]a, b[)$  est un segment affine noté  $]c, d[$ , nous allons montrer l'isométrie  $\gamma$  corestreinte à l'arrivée à  $\gamma(]a, b[)$  est une application projective si et seulement si  $k = k'$ .

*Preuve.* Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 a \text{---} \text{---} \text{---} b & \xrightarrow{\gamma} & c \text{---} \text{---} \text{---} d \\
 \downarrow \phi : t \in ]a, b[ \mapsto \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \left( \frac{t-a}{b-t} \right) & & \downarrow \psi : t \in ]c, d[ \mapsto \frac{1}{2\sqrt{k'}} \ln \left( \frac{t-c}{d-t} \right) \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Comme  $\phi$  et  $\psi$  sont des isométries bijectives, l'application  $\tilde{\gamma} = \psi \circ \gamma \circ \phi^{-1}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans lui-même qui conserve la distance usuelle. Cette application est donc monotone et s'écrit nécessairement sous la forme

$$\tilde{\gamma} : t \in \mathbb{R} \mapsto \varepsilon t + \tilde{\gamma}(0) \text{ où } \varepsilon \in \{\pm 1\}.$$

Réciproquement, toute application  $\eta$  de cette forme fournit une isométrie entre  $(]a, b[, h_k)$  et  $(]c, d[, h_{k'})$  donnée par  $\psi^{-1} \circ \eta \circ \phi$ . Ainsi, après un court calcul, les isométries apparaissent exactement comme les applications du type

$$t \in ]a, b[ \mapsto \frac{c(b-t)^\mu + \alpha d(t-a)^\mu}{(b-t)^\mu + \alpha(t-a)^\mu} \in ]c, d[ \text{ avec } \mu \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{k'}{k}} \right\} \text{ et } \alpha > 0.$$

Une telle application est projective si et seulement si  $k = k'$ . En effet, si elle est projective, elle conserve le birapport et d'après la définition des distances de Hilbert, cela impose  $k = k'$ . La réciproque est claire.  $\square$

### 3.1.3 Un très bref aperçu du cas des simplexes.

Dans la deuxième partie de son article [dlH93], P. de la Harpe s'intéresse aux simplexes. Ces convexes forment une classe située complètement à l'opposé des bonnes métriques de Hilbert. En effet, pour ces dernières, il y a unicité de la géodésique reliant deux points donc une isométrie envoie la géodésique reliant deux points sur la géodésique reliant les deux points images. A l'opposé, pour les simplexes, il y a une infinité des géodésiques (minimisantes de surcroît) reliant deux points génériques, mais par contre pour un point donné, il y a un nombre fini de points sur la sphère unité centrée en ce point, qui lui sont reliés par une unique géodésique. Et c'est sur ces points que l'on travaille. Entre ces deux catégories de convexes, on ne sait rien dire sur le groupe des isométries.

P. de la Harpe montre en particulier que le groupe des collinéations de  $\mathbb{R}^2$  qui conservent un triangle est un sous-groupe d'indice 2 du groupe des isométries pour la métrique de Hilbert de ce triangle. Pour plus de détails, on se référera à l'article original [dlH93].

## 3.2 Démonstration de la proposition 3.1.

Une bonne géométrie de Hilbert n'a pas toujours de structure finslérienne car le champ de normes associé à cette métrique peut être dégénéré en certains points ou encore manquer de régularité. Nous ne pouvons donc pas utiliser directement la notion de courbure d'une variété de Finsler (cf annexe A) pour conclure immédiatement que  $k = k'$ . Nous allons donc en donner une preuve plus élémentaire dans le cadre plus général des bonnes métriques de Hilbert.

Le théorème 3.1 peut se démontrer de la manière suivante: on commence par établir quelques propriétés utiles des isométries, en particulier qu'elles s'étendent en des homéomorphismes de l'adhérence des convexes, puis on montre que si les géométries de Hilbert  $(C, h_k)$  et  $(C', h_{k'})$  sont isométriques alors  $k$  et  $k'$  sont égaux, et enfin on prouve qu'une isométrie entre les deux espaces  $(C, h_k)$  et  $(C', h_{k'})$  conserve le birapport et doit nécessairement être la restriction d'une collinéation envoyant  $C$  sur une section affine  $n$ -dimensionnelle de  $C'$ . Le fait que de telles applications sont des isométries, termine la démonstration.

### 3.2.1 Quelques propriétés des isométries.

Une isométrie entre deux bonnes géométries de Hilbert vérifie le lemme suivant:

**Lemme 3.1.** *Soient  $(C, h_k)$  et  $(C', h_{k'})$  deux bonnes géométries de Hilbert, et  $\gamma$  une isométrie de  $(C, h_k)$  vers  $(C', h_{k'})$ , alors :*

(i) *Les images par  $\gamma$  de trois points sont alignés dans  $C'$  si et seulement si les trois points étaient alignés dans  $C$ ; de plus,  $\gamma$  préserve l'ordre des points.*

(ii) *Pour toute famille  $(x_i)_{i=1..p}$  de points de  $C$ , on note  $H$  le sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  qu'elle engendre. La famille image  $(g(x_i))_{i=1..p}$  engendre un sous-espace affine  $H'$  de  $C'$  de même dimension que  $H$ , et l'image par  $\gamma$  de la section affine  $H \cap C$  est exactement la*



section affine de  $C'$  par  $H'$ . En particulier, toute droite de  $C$  s'envoie surjectivement sur une droite de  $C'$ .

Avant de démontrer ce lemme, remarquons que la deuxième propriété implique que la dimension de  $C'$  à savoir  $n'$  est supérieure à celle de  $C$  à savoir  $n$ , dès qu'une isométrie existe de la géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  vers la géométrie de Hilbert  $(C', h'_{k'})$ .

*Preuve.* Comme  $(C, h_k)$  est une bonne géométrie de Hilbert, les trois points  $x, y$  et  $z$  sont alignés, et dans cet ordre, si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité triangulaire  $h_k(x, z) \leq h_k(x, y) + h_k(y, z)$ , donc, puisque  $\gamma$  est une isométrie, si et seulement si  $h'_{k'}(\gamma(x), \gamma(y)) + h'_{k'}(\gamma(y), \gamma(z)) = h'_{k'}(\gamma(x), \gamma(z))$ , autrement dit, comme  $(C', h'_{k'})$  est aussi une bonne géométrie de Hilbert, si et seulement si  $\gamma(x), \gamma(y)$  et  $\gamma(z)$  sont alignés et dans cet ordre. La première propriété est donc démontrée.

De plus, soit  $q$  est un point situé sur la droite  $(\gamma(x)\gamma(y))$  de  $C'$ , considérons alors l'unique<sup>1</sup> point  $p$  de la droite  $(xy)$  de  $C$  situé à une distance  $h'_{k'}(\gamma(x), q)$  de  $x$  et  $h'_{k'}(\gamma(y), q)$  de  $y$ . Son image  $\gamma(p)$  appartient donc à la droite  $(\gamma(x)\gamma(y))$  et se situe à une distance  $h'_{k'}(\gamma(x), q)$  de  $\gamma(x)$  et  $h'_{k'}(\gamma(y), q)$  de  $\gamma(y)$ , l'image  $\gamma(p)$  de  $p$  est donc le point  $q$ , ce qui prouve que  $\gamma$  est une application qui envoie surjectivement la droite  $(xy) \cap C$  de  $C$  sur la droite  $C' \cap (\gamma(x)\gamma(y))$  de  $C'$ .

Pour prouver la propriété (ii), il suffit de le faire pour des familles de points affinement indépendants. Démontrons maintenant cette propriété ii) par récurrence sur la dimension  $d$  de l'espace affine  $H$ . Le cas  $d = 0$  est trivial. Le cas  $d = 1$  a été traité dans le paragraphe précédent. Nous avons encore besoin du cas  $d = 2$  pour pouvoir mener à bien la récurrence.

Soient donc  $x_1, x_2$  et  $x_3$  trois points de  $C$  non alignés. La première propriété du lemme nous assure que leurs images  $\gamma(x_1), \gamma(x_2)$  et  $\gamma(x_3)$  engendrent un plan affine.

Considérons un point  $p$  de  $C$  situé dans le plan  $(x_1x_2x_3)$  mais n'appartenant à aucune des droites  $(x_ix_j)_{i \neq j}$ . Nous pouvons alors trouver deux points  $u$  et  $v$  de  $C$  respectivement situés sur  $(x_1x_2)$  et  $(x_1x_3)$  tels que  $u, v$  et  $p$  sont alignés. Le point  $\gamma(u)$  appartient donc à la droite  $(\gamma(x_1)\gamma(x_2)) \cap C'$  et a fortiori à l'intersection de  $C'$  avec le plan  $(\gamma(x_1)\gamma(x_2)\gamma(x_3))$ . De même pour  $\gamma(v)$ . L'image de  $p$  étant alignée avec les images  $\gamma(u)$  et  $\gamma(v)$ , elle appartient aussi au plan  $(\gamma(x_1)\gamma(x_2)\gamma(x_3))$ . Ainsi donc l'image de la section plane  $(x_1, x_2, x_3) \cap C$  est incluse dans la section plane de  $C'$  par  $(\gamma(x_1)\gamma(x_2)\gamma(x_3))$ .

En fait, cette image coïncide exactement avec l'intersection du plan  $(\gamma(x_1)\gamma(x_2)\gamma(x_3))$  avec le convexe  $C'$ . Pour nous en convaincre, considérons  $y'$  un point de cette intersection. Si c'est un point situé sur une des trois droites  $(\gamma(x_i)\gamma(x_j))_{i \neq j}$ , la propriété ii) pour  $d = 1$  nous assure de l'existence d'une préimage de  $y'$  appartenant à la droite correspondante  $(x_ix_j) \cap C$ . Sinon, nous allons faire une construction similaire à la précédente. Prenons deux points  $u'$  et  $v'$  de  $C'$  respectivement situés sur les droites  $(\gamma(x_1)\gamma(x_2))$  et  $(\gamma(x_1)\gamma(x_3))$  tels que  $u', v'$  et  $y'$  sont alignés. Ces points  $u'$  et  $v'$  sont les images de deux points  $u$  et  $v$

---

1. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'une géodésique paramétrée par sa longueur d'arc pour la distance de Hilbert est en bijection isométrique avec la droite réelle usuelle.

appartenant respectivement aux droites  $(x_1x_2) \cap C$  et  $(x_1x_3) \cap C$ , ainsi donc  $y'$  admet un antécédent sur la droite  $(uv) \cap C$  donc dans le plan  $(x_1x_2x_3) \cap C$ . Ainsi nous obtenons bien le résultat voulu, et la propriété ii) est vérifiée pour  $d = 2$ .

Démontrons maintenant que la propriété (ii) est récurrente sur la dimension  $d$  de  $H$ . Pour cela, considérons une famille  $(x_i)_{i=1..d+1}$  de points de  $C$  qui engendrent un sous-espace affine noté  $\langle x_1, \dots, x_{d+1} \rangle$  de dimension  $d + 1$  (avec  $d \geq 2$ ). L'hypothèse de récurrence assure que la dimension du sous-espace affine  $\langle \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_{d+1}) \rangle$  est supérieur à  $d$ , et que si cette dimension est exactement  $d$ , il existe un point  $y$  dans  $\langle x_1, \dots, x_d \rangle \cap C$  tel que  $\gamma(y) = \gamma(x_{d+1})$ . Donc, comme  $\gamma$  est injective, cela conduit à la coïncidence des points  $y$  et  $x_{d+1}$  ce qui contredit l'indépendance affine des points  $x_1, \dots, x_{d+1}$ . La dimension du sous-espace affine engendré par les images  $\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_{d+1})$  est donc exactement  $d + 1$ .

Soit  $y$  un point de  $\langle x_1, \dots, x_{d+1} \rangle \cap C$ . Il existe des points  $u$  et  $v$  de  $\langle x_1, \dots, x_d \rangle \cap C$  tels que  $u$ ,  $v$  et  $x_{d+1}$  définissent un plan contenant  $y$ . Nous savons alors que  $\gamma(y)$  appartient au plan  $(\gamma(u)\gamma(v)\gamma(x_{d+1}))$ , et l'hypothèse de récurrence affirme que  $\gamma(u)$  et  $\gamma(v)$  sont des points du sous-espace  $\langle \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_d) \rangle$ . Ainsi donc l'image de  $\langle x_1, \dots, x_{d+1} \rangle \cap C$  par  $\gamma$  est incluse dans  $\langle \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_{d+1}) \rangle \cap C'$ .

Montrons que cette inclusion est une égalité. Soit  $y'$  un point de  $\langle \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_{d+1}) \rangle \cap C'$ . Si  $y'$  appartient au sous-espace affine  $\langle \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_d) \rangle$  alors il admet un antécédent dans  $\langle x_1, \dots, x_d \rangle \cap C$  et donc dans  $\langle x_1, \dots, x_{d+1} \rangle \cap C$ . Sinon, considérons  $u'$  et  $v'$  deux points de  $\langle \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_d) \rangle \cap C'$  tels que  $u'$ ,  $v'$  et  $\gamma(x_{d+1})$  définissent un plan contenant  $y'$ . L'hypothèse de récurrence affirme que  $u'$  et  $v'$  sont les images de points  $u$  et  $v$  de  $\langle x_1, \dots, x_d \rangle \cap C$ . Le cas  $d = 2$  nous permet alors de conclure que  $y'$  admet un antécédent dans le plan  $(uvx_{d+1})$  qui est bien inclus dans la section affine  $\langle x_1, \dots, x_{d+1} \rangle \cap C$ . Cela termine la démonstration de la propriété (ii).  $\square$

### 3.2.2 Prolongement d'une isométrie à l'adhérence du convexe.

Avec les notations du lemme précédent, la restriction de l'isométrie  $\gamma$  à toute section affine  $C \cap H$  de  $C$  est un homéomorphisme entre  $C \cap H$  et  $C' \cap H'$ . En effet, cette restriction est injective (car elle conserve les distances) et surjective (c'est le lemme 3.1) donc bijective. De plus la réciproque d'une isométrie (dès qu'elle existe) conserve elle-aussi les distances, donc cette restriction est bi-1-lipschitzienne donc bi-continue pour les topologies associées à  $h_k$  et  $h'_{k'}$ , et a posteriori pour les topologies traces de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n'}$  puisque ces topologies coïncident à l'intérieur de  $C$  et  $C'$ . En fait, nous avons la situation suivante

**Lemme 3.2.** *Soient  $(C, h_k)$  et  $(C', h'_{k'})$  deux bonnes géométries de Hilbert.*

*Toute isométrie  $\gamma$  de  $(C, h_k)$  vers  $(C', h'_{k'})$  s'étend en un homéomorphisme entre l'adhérence  $\overline{C}$  de  $C$  (pour la topologie de  $\mathbb{R}^n$ ) et l'adhérence  $\overline{\gamma(C)}$  de son image par  $\gamma$  qui apparaît aussi comme l'intersection de l'adhérence de  $C'$  avec le sous-espace affine engendré par  $\gamma(C)$ .*

*Preuve.* L'idée naturelle pour prolonger l'isométrie  $\gamma$  à tout point de la frontière topologique  $\partial C$  du convexe  $C$  repose sur la construction suivante: soit  $u$  un point de  $\partial C$ , et  $\beta$  un rayon géodésique paramétré par sa longueur d'arc (pour la distance de Hilbert  $h_k$ ) arrivant en  $u$ , le rayon géodésique  $\gamma \circ \beta$  est paramétré par sa longueur d'arc (pour  $h'_{k'}$ ) et arrive en

un point de  $\partial C'$ . C'est ce point que nous voulons définir comme étant l'image de  $u$  par  $\gamma$ . Pour cela, nous allons vérifier que cette définition est licite autrement dit qu'elle est indépendante de la géodésique  $\beta$  choisie. Puis nous montrerons que l'application  $\gamma$  ainsi étendue reste continue pour les topologies affines sous-jacentes.

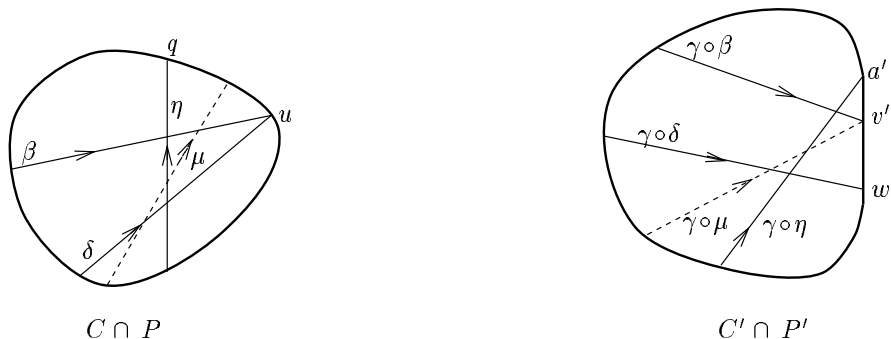
Soient  $\beta$  et  $\delta$  deux géodésiques orientées, de supports distincts, et arrivant au même point  $u$  de la frontière  $\partial C$  de  $C$ . Ces géodésiques sont asymptotes en  $+\infty$ , et comme  $\gamma$  est une isométrie, leurs images  $\gamma \circ \beta$  et  $\gamma \circ \delta$  aussi. La description des rayons géodésiques asymptotes pour les bonnes métriques de Hilbert (2.1) montre que les rayons géodésiques  $\gamma \circ \beta$  et  $\gamma \circ \delta$  arrivent soit en un même point de  $\partial C'$  soit en deux points distincts  $v'$  et  $w'$  appartenant à l'intérieur d'un même segment fermé  $[a', b']$  de la frontière  $\partial C'$ . En fait, cette dernière situation ne se produit jamais.

Raisonnons par l'absurde et supposons que nous sommes dans la situation où les rayons géodésiques arrivent en deux points distincts de l'intérieur d'un segment fermé  $[a', b']$  de la frontière  $\partial C'$ . Nous décidons que les points  $a', v', w'$  et  $b'$  sont alignés dans cet ordre. Dans toute la suite, nous confondrons une géodésique et son support géométrique qui est un segment affine. Comme les rayons géodésiques  $\beta$  et  $\delta$  ont des supports distincts et arrivent au même point  $u$ , ils définissent un plan  $P$  et ne s'intersectent pas à l'intérieur de  $C \cap P$ . Ainsi, d'après le lemme 3.1, leurs images  $\gamma \circ \beta$  et  $\gamma \circ \delta$  définissent un plan  $P'$  qui est aussi celui engendré par l'ensemble  $\gamma(P \cap C)$ , et ont pour support deux segments distincts ne s'intersectant pas à l'intérieur du convexe  $C' \cap P'$ . Considérons une géodésique orientée  $D$  de  $C' \cap P'$  arrivant au point  $a'$  et intersectant  $\gamma \circ \beta$  et  $\gamma \circ \delta$  respectivement en des points  $(\gamma \circ \beta)(s)$  et  $(\gamma \circ \delta)(t)$ . La propriété (ii) du lemme 3.1 affirme que  $D$  est l'image d'une géodésique orientée  $\eta$  de  $C \cap P$  dont le support géométrique est inclus dans la droite  $(\delta(t)\beta(s))$ . La caractérisation des asymptotes dans les bonnes géométries de Hilbert assure que les géodésiques  $D = \gamma \circ \eta$  et  $\gamma \circ \beta$  ne sont pas asymptotes en  $+\infty$ , et comme  $\gamma$  est une isométrie,  $\eta$  et  $\beta$  non plus. Donc  $\eta$  arrive en un point  $q$  distinct de  $u$ .



Le rayon géodésique partant de  $(\gamma \circ \delta)(t-1)$  et arrivant en  $v'$  est l'image d'un certain rayon géodésique  $\mu$  de  $C \cap P$  d'après la propriété (ii) du lemme 3.1. La géodésique  $\gamma \circ \mu$  intersecte

$\gamma \circ \delta$  au  $\gamma \circ \delta(t - 1)$ , et  $D = \gamma \circ \eta$  à l'intérieur du segment  $](\gamma \circ \beta)(s); (\gamma \circ \delta)(t)[$ .



Sa préimage  $\mu$  intersecte forcément  $\delta$  au point  $\delta(t - 1)$ , et  $\eta$  en un point du segment  $]\beta(s); \delta(t)[$ . Mais observons qu'alors  $\mu$  coupe nécessairement  $\beta$ , et donc son image par  $\gamma$  doit aussi rencontrer  $\gamma \circ \beta$ , ce qui est impossible par construction. C'est la contradiction cherchée au fait que les points  $v'$  et  $w'$  puissent être distincts. Finalement, nous venons de montrer que le prolongement de l'isométrie  $\gamma$  à la frontière de  $C$  est bien défini.

Maintenant nous allons vérifier que l'application  $\gamma$  ainsi prolongée est encore continue. Les topologies définies respectivement par la distance de Hilbert  $h_k$  et par la trace de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^n$  coïncident à l'intérieur de l'ouvert  $C$ , la convergence des suites sera donc implicitement comprise au sens de la topologie affine.

Considérons donc une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de l'adhérence  $\overline{C}$  du convexe  $C$ , convergant vers un point  $u$  de  $\overline{C}$ . Si  $u$  est un point de  $C$ , tous les points  $u_n$  seront dans l'ouvert  $C$  à partir d'un certain rang, et comme  $\gamma$  est continue sur  $C$ , la suite formée des images  $\gamma(u_n)$  converge bien vers l'image  $\gamma(u)$  de  $u$  par  $\gamma$ . Si  $u$  est un point de la frontière topologique  $\partial C$ , fixons un point  $x$  de  $C$  distinct des  $u_n$ , et notons  $y_n$  le point de la demi-droite  $[x, u_n)$  situé à une distance unité pour  $h_k$  de  $x$ . La suite  $y_n$  ainsi définie converge vers le point  $y$  situé à une distance unité de  $x$  sur la demi-droite  $[xu)$ . Comme le point  $y$  appartient à  $C$ , la suite des images  $\gamma(y_n)$  converge vers  $\gamma(y)$ . Finalement les demi-droites  $[\gamma(x), \gamma(u_n)) = [\gamma(x), \gamma(y_n))$  admette la demi-droite  $[x, y) = [x, u)$  comme limite, et la distance de Hilbert  $h'_k(\gamma(x), \gamma(u_n)) = h_k(x, u_n)$  entre  $\gamma(x)$  et  $\gamma(u_n)$  tend vers l'infini puisque les points  $u_n$  converge vers un point de  $\partial C$ . Ainsi donc la suite formée des points images  $\gamma(u_n)$  admet bien une limite qui est le point d'intersection entre la demi-droite  $[\gamma(x)\gamma(y))$  et la frontière de  $C'$ , c'est à dire, par définition du prolongement de  $\gamma$  à  $\overline{C}$ , le point  $\gamma(u)$ .

Pour terminer la preuve du lemme, il suffit de remarquer que  $\gamma$  est une bijection entre le convexe  $C$  et son image  $\gamma(C)$  qui est aussi l'intersection de  $C'$  avec le sous-espace affine engendré par  $\gamma(C)$ , et que par construction, le prolongement de  $\gamma^{-1}$  à  $\overline{\gamma(C)}$  est bien l'inverse du prolongement de  $\gamma$  à  $\overline{C}$ .  $\square$

### 3.2.3 Égalité des coefficients $k$ et $k'$ .

Nous allons démontrer le lemme suivant qui s'avère faux dans le cas où le convexe  $C$  est un segment, comme nous l'avons au début de ce chapitre,

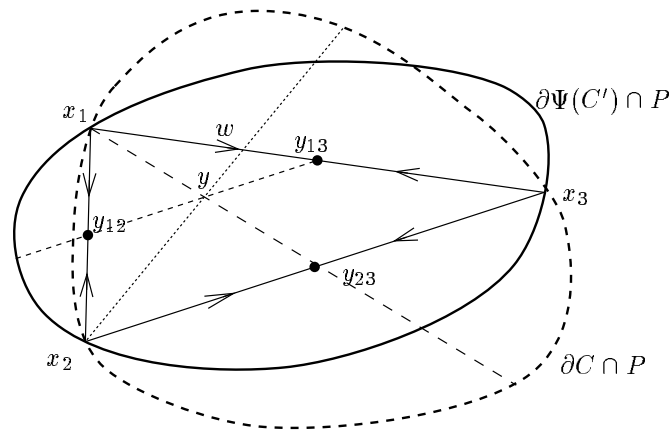
**Lemme 3.3.** *S'il existe une isométrie  $\gamma$  de la bonne géométrie de Hilbert  $(C, h_k)$  vers la bonne géométrie de Hilbert  $(C', h_{k'})$  et si la dimension affine de  $C$  est supérieure ou égale à 2 alors les coefficients  $k$  et  $k'$  sont égaux.*

*Démonstration.* Quitte à corestreindre l'isométrie  $\gamma$  au convexe intersection de  $C'$  et de l'espace affine engendré par  $\gamma(C)$ , le lemme 3.2 nous assure que  $\gamma$  est un homéomorphisme entre  $\overline{C}$  et  $\overline{C'}$ , qui préserve (ainsi que son inverse) les distances. Nous allons donc vérifier que l'hypothèse  $k > k'$  conduit à une contradiction; en considérant  $\gamma^{-1}$  il en va de même pour l'hypothèse  $k < k'$ . Finalement  $k$  et  $k'$  sont donc forcément égaux.

Nous avons donc une isométrie  $\gamma$  entre  $(C, h_k)$  et  $(C', h_{k'})$ , deux bonnes géométries de Hilbert sur des convexes de même dimension, et le réel  $k$  est strictement plus grand que  $k'$ .

Le convexe  $C$  étant de dimension supérieure à 2 et conduisant à de bonnes métriques de Hilbert, nous pouvons considérer trois points non alignés  $x_1, x_2$  et  $x_3$  du bord  $\partial C$  tels qu'aucun des trois segments  $[x_i; x_j]_{i \neq j}$  ne soit inclus dans  $\partial C$ . Les images  $\gamma(x_1), \gamma(x_2), \gamma(x_3)$  de ces trois points, ne sont pas alignées d'après la propriété (i) du lemme 3.1. Nous pouvons donc trouver une transformation affine  $\Psi$  de l'espace affine engendré par  $C'$  dans celui engendré par  $C$  qui envoie chacun des trois points  $\gamma(x_i)$  sur son antécédent  $x_i$ . Etudions plus précisément la restriction  $\tilde{\gamma}$  de l'application  $\Psi \circ \gamma$  au plan  $P$  engendré par les points  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . C'est une isométrie entre  $(C \cap P, h_k)$  et  $(\Psi(C') \cap P, h_{k'})$ .

Pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ , l'application  $\tilde{\gamma}$  envoie le segment ouvert  $]x_i x_j[$  dans lui-même d'après la propriété (ii) du lemme 3.1, et est strictement contractante lorsque le segment  $]x_i x_j[$  est muni de la même métrique de Hilbert au départ et à l'arrivée, puisque l'identité est  $\sqrt{k'/k}$ -contractante de  $(]x_i x_j[, h_{k'})$  dans  $(]x_i x_j[, h_k)$ . Donc, les métriques de Hilbert étant complètes, il existe un unique point fixe pour  $\tilde{\gamma}$  noté  $y_{ij}$  dans  $]x_i x_j[$ ; ce point fixe est de plus attractif.



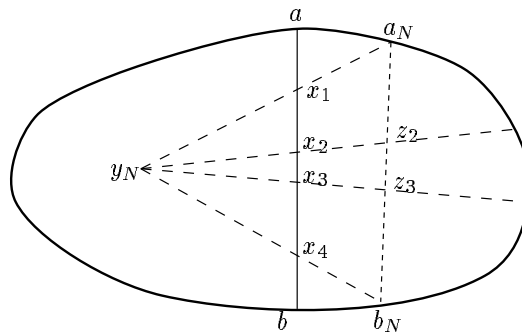
L'isométrie  $\tilde{\gamma}$  envoie les segments affines  $(x_1y_{23}) \cap C$  et  $(y_{12}y_{13}) \cap C$  respectivement sur les segments  $(x_1y_{23}) \cap \Psi(C')$  et  $(y_{12}y_{13}) \cap \Psi(C')$ . Ainsi le point d'intersection  $y$  entre les droites  $(x_1y_{23})$  et  $(y_{12}y_{13})$ , qui appartient au convexe  $C$ , reste fixe sous l'action de  $\tilde{\gamma}$ . Le segment  $(x_2y) \cap C$  est donc envoyé sur le segment  $(x_2y) \cap \Psi(C')$  par  $\tilde{\gamma}$ , et le point d'intersection  $w$  entre  $(x_1x_3)$  et  $(yx_2)$  reste aussi fixe sous l'action de  $\tilde{\gamma}$ . Mais le fait que  $w$  soit nécessairement distinct de  $y_{13}$  contredit l'affirmation selon laquelle la restriction de  $\tilde{\gamma}$  à  $]x_1x_3[$  admet un unique point fixe. C'est la contradiction cherchée.  $\square$

### 3.2.4 Conservation du birapport par une isométrie.

Montrons maintenant qu'une isométrie conserve le birapport, plus précisément

**Lemme 3.4.** *Etant données  $(C, h_k)$  et  $(C', h'_k)$  deux bonnes géométries de Hilbert avec  $C$  un convexe de dimension au moins 2, toute isométrie de  $(C, h_k)$  vers  $(C', h'_k)$  envoie quatre points distincts alignés de  $C$  sur quatre points distincts alignés de  $C'$  tels que le birapport du quadruplet image est égal à celui du quadruplet de départ.*

*Preuve.* Soient  $\gamma$  l'isométrie considérée et  $(x_i)_{i=1\dots 4}$  quatre points alignés distincts de l'ouvert  $C$ . Notons  $[a, b]$  l'intersection entre l'adhérence  $\overline{C}$  du convexe  $C$  et la droite affine définie par les points  $(x_i)_{i=1\dots 4}$ . Quitte à permuter les indices, nous supposons désormais que les points  $a, x_1, x_2, x_3, x_4$  et  $b$  sont alignés dans cet ordre sur le segment  $[a, b]$ . Etant donné  $y$  un point de  $C \setminus [a, b]$ , nous pouvons définir la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  des barycentres de  $y$  affecté du poids  $1/n$  et  $x_2$  affecté du poids  $1 - 1/n$ . La suite ainsi définie converge vers  $x_2$  pour la topologie affine. Considérons les suites  $a_n$  et  $b_n$  formées par les points d'intersection entre la frontière  $\partial C$  et respectivement les demi-droites  $[y_n x_1)$  et  $[y_n x_4)$ . Ces suites  $a_n$  et  $b_n$  convergent respectivement vers les points  $a$  et  $b$ . Comme le segment  $[a, b]$  n'est pas inclus dans le fermé  $\partial C$ , il existe au moins un entier  $N$  tel que le segment  $[a_N, b_N]$  n'est pas une partie  $\partial C$ .



Désignons par  $z_2$  et  $z_3$  les points d'intersection du segment  $[a_N, b_N]$  respectivement avec les demi-droites  $[y_N x_2)$  et  $[y_N x_3)$ . Ils appartiennent à l'ouvert  $C$ , donc vérifient les égalités suivantes:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [a_N, z_2, z_3, b_N] = \exp\left(2\sqrt{k} h_k(z_2, z_3)\right).$$

Mais  $\gamma$  étant une isométrie, elle conserve les distances et l'alignement (dans  $\overline{C}$ ), d'où la succession des égalités suivantes:

$$\begin{aligned} [\gamma(x_1), \gamma(x_2), \gamma(x_3), \gamma(x_4)] &= [\gamma(a_N), \gamma(z_2), \gamma(z_3), \gamma(b_N)] \\ &= \exp\left(2\sqrt{k} h'_k(\gamma(z_2), \gamma(z_3))\right) \\ &= \exp\left(2\sqrt{k} h_k(z_2, z_3)\right) \\ &= [x_1, x_2, x_3, x_4] \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.  $\square$

### 3.2.5 Démonstration de la proposition 3.1 proprement dite.

Considérons donc deux bonnes géométries de Hilbert  $(C, h_k)$  et  $(C', h'_{k'})$ . Les dimensions des convexes  $C$  et  $C'$  seront respectivement notées  $n$  et  $n'$ . Nous supposons que  $n$  est supérieur ou égal à 2.

S'il existe une isométrie  $\gamma$  de  $(C, h_k)$  vers  $(C', h'_{k'})$  alors la propriété (ii) du lemme 3.1 assure que nous avons  $n \geq n'$ , et le lemme 3.3 que nécessairement  $k$  et  $k'$  sont égaux. Par ailleurs, le lemme 3.2 précise que l'isométrie  $\gamma$  est un homéomorphisme entre  $\overline{C}$  et  $\overline{C''}$  où  $C''$  est la section de  $C'$  par l'espace affine engendré par  $\gamma(C)$ . Rappelons que les dimensions des convexes  $C$  et  $C''$  sont égales d'après le lemme 3.1.

Il suffit alors de reproduire pas à pas la démonstration de P. de la Harpe.

Considérons le plongement  $\iota : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  la projection de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  identifié à  $\iota(\mathbb{R}^n) \cup p(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ . Comme  $C$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , nous pouvons trouver  $n+1$  points de  $C$  notés  $x_0, \dots, x_n$  formant une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (au sens strict ce sont les  $\iota(x_j)$  qui forment une base). Les points  $p \circ \iota(x_0), \dots, p \circ \iota(x_n)$ , et  $y_0 = p(\iota(x_0) + \dots + \iota(x_n))$  forment alors un repère projectif de l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , le point d'intersection  $y_k$  entre la droite projective  $L_k$  définie par  $p \circ \iota(x_0)$  et  $p \circ \iota(x_k)$ , et l'unique hyperplan projectif  $H_k$  contenant  $y_0$  et tous les  $p \circ \iota(x_i)$  sauf  $p \circ \iota(x_k)$ , est en fait le point projectif  $p(\iota(x_0) + \dots + \iota(x_k))$  qui est encore dans  $C$  par convexité. Désormais, nous désignerons abusivement par une même lettre un point de  $\mathbb{R}^n$ , son image par  $\iota$  et celle par  $p \circ \iota$ .

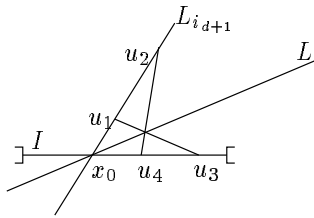
Puisque l'application  $\gamma : C \mapsto C''$  est une bijection qui préserve les sections affines (d'après le lemme 3.1), les points  $\gamma(y_0), \gamma(x_0), \dots$ , et  $\gamma(x_n)$  forment un repère projectif de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ . Il existe donc une application projective  $f$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  dans lui-même telle que les applications  $f$  et  $\gamma$  coïncident sur  $y_0$  et tous les points  $x_k$ . L'application  $f$  envoie chaque droite projective  $L_k$  sur la droite projective  $(f(x_0), f(x_k)) = (\gamma(x_0), \gamma(x_k))$ , et tout hyperplan projectif  $H_k$  engendré par  $y_0$  et tous les  $x_i$  excepté  $x_k$  sur l'hyperplan engendré par  $f(y_0) = \gamma(y_0)$  et tous les  $f(x_i) = \gamma(x_i)$  excepté  $f(x_k) = \gamma(x_k)$ . Comme l'intersection entre  $L_k$  et  $H_k$  est réduite au point  $y_k$ , les applications  $f$  et  $\gamma$  coïncident sur les  $y_k$ . Mais comme elles préservent toute deux le birapport, leur coïncidence sur tous les triplets formés des

points  $x_0$ ,  $x_k$ , et  $y_k$  qui sont trois points distincts de  $L_k$ , impose que pour tout entier  $k$ , les restrictions de ces applications aux sections  $L_k \cap C$  sont égales.

Terminons en montrant par récurrence que  $f$  et  $\gamma$  ont même restriction à toute section de  $C$  par un sous-espace affine engendré par  $x_0$  et certains  $x_k$  avec  $k$  compris entre 1 et  $n$ . La récurrence se fait sur la dimension de l'espace affine par lequel on coupe le convexe  $C$ . Pour la dimension 1, cela a déjà été traité puisque les espaces affines en question sont les droites  $L_k$ .

Considérons  $d + 1$  points distincts  $x_{i_k}$  choisis parmi  $x_1, \dots, x_n$  avec  $d \geq 1$ , et  $y$  un point de la section de l'ouvert  $C$  par l'espace affine engendré par les points  $x_{i_k}$  et  $x_0$ , qui n'appartient pas ni au sous-espace affine engendré par les points  $x_0, x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$  ni à la droite  $L_{i_{d+1}}$ . Considérons alors la droite projective  $L$  définie par les points  $x_0$  et  $y$ , et le sous-espace projectif  $H$  de dimension  $d$  engendré par les points  $x_0, x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$ . Les segments ouverts  $L \cap C$  et  $L_{i_{d+1}} \cap C$  sont sécants en  $x_0$  et non colinéaires, l'enveloppe convexe de leur réunion coupe donc l'ouvert  $H \cap C$  selon un segment ouvert  $I$  contenant  $x_0$ .

Soit maintenant  $y_1$  un point de  $L \cap C$  distinct mais suffisamment proche de  $x_0$ , pour apparaître comme le point de concours de droites  $(u_1u_3)$  et  $(u_2u_4)$  où  $u_1$  et  $u_2$  sont des points de  $L_{i_{d+1}} \cap C$  et  $u_3$  et  $u_4$  des points du segment  $I$  (donc de la section  $H \cap C$ ).



L'image du point  $\gamma(y_1)$  par l'isométrie  $\gamma$  est le point de concours des droites  $(\gamma(u_1)\gamma(u_3))$  et  $(\gamma(u_2)\gamma(u_4))$ . Or par hypothèse de récurrence, les images des points  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  par  $\gamma$  sont celles de ces mêmes points par l'application  $f$ . Cette dernière application étant projective, conserve aussi l'alignement, et donc le point  $y_1$  a même image par  $\gamma$  et  $f$ .

Choisissons maintenant un point  $y_2$  distinct de  $x_0$  et  $y_1$  tel qu'une construction identique à celle faite avec  $y_1$  est encore possible. Ses images par  $f$  et  $\gamma$  sont encore confondues. Le point  $y$  est alors défini par son appartenance à  $L \cap C = (y_1y_2) \cap C$  et le birapport  $[x_0, y_1, y_2, y]$ . Comme les applications  $f$  et  $\gamma$  conservent l'alignement et le birapport des points de  $C$ , les images du point  $y$  par  $f$  et  $\gamma$  sont donc bien confondues.

Finalement, nous pouvons conclure que toute isométrie  $\gamma$  est la restriction d'une application projective conservant  $C$ .

### 3.3 Cocompacité du groupe d'isométries

En 1960, Benzécri [Ben60] a démontré le théorème de rigidité suivant:

**Théorème 3.1.** *Supposons que le revêtement universel d'une variété localement projective*



*compacte soit l'intérieur d'un corps convexe  $W$ . Si  $W$  possède en un point de sa frontière un ellipsoïde osculateur, alors la frontière de  $W$  est un ellipsoïde.*

A la vue de la description des isométries des géométries de Hilbert dont le convexe à une adhérence strictement convexe, ce théorème a pour conséquence le théorème de rigidité suivant:

**Théorème 3.2.** *Soit  $C$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière est de classe  $C^2$  et admet un hessien non dégénéré en un point. S'il existe un sous-groupe  $\Gamma$  discret du groupe des isométries de la géométrie de Hilbert associée à  $C$ , tel que le quotient  $\Gamma \backslash C$  est une variété compacte, alors la géométrie en question est l'espace hyperbolique riemannien standard.*

Nous voyons apparaître dans ce premier théorème de rigidité, des hypothèses sur la régularité de la frontière du convexe. Nous allons donc nous intéresser dans le chapitre suivant à des convexes suffisamment réguliers et voir que dans une telle situation, nous pouvons obtenir de nouveaux théorèmes de rigidité.



# Chapitre 4

## Automorphismes des corps convexes réguliers.

Dans ce chapitre, on ne s'intéressera qu'à des corps convexes (i.e. les adhérences des domaines ouverts convexes bornés de  $\mathbb{R}^n$ ) dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  et même à hessien défini en tout point. Le but de ce chapitre est d'obtenir un analogue des théorèmes de J. Lelong-Ferrand ([LF71]) et de B. Wong ([Won77]). Plus précisément nous allons démontrer :

**Théorème:** *Le groupe d'automorphismes d'un corps fortement convexe de  $\mathbb{R}^n$ , i.e. dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  et à hessien défini en tout point, est compact si et seulement si le convexe n'est pas l'intérieur d'un ellipsoïde.*

Remarquons que le cadre de la géométrie de Hilbert n'intervient plus dans ce chapitre, mais les résultats que nous y obtenons peuvent être traduits en termes d'une telle géométrie. En effet, nous avons vu au chapitre précédent que les isométries d'une bonne métrique de Hilbert  $(C, h)$  sont les automorphismes du corps convexe  $\overline{C}$ .

### 4.1 Le cadre du problème.

Rappelons qu'un **corps convexe** est un convexe compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^n$ , et qu'un **automorphisme** d'un tel corps est une application projective de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  le conservant. Comme les isométries d'une bonne géométrie de Hilbert  $(C, h)$  sont les automorphismes du corps convexe  $\overline{C}$ , tous les énoncés de ce chapitre admettront deux formulations : l'une concernant les automorphismes des corps convexes, l'autre les isométries d'une bonne métrique de Hilbert.

Dans toute la suite,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à deux, et  $C$  un domaine ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  autrement dit l'intérieur du corps convexe  $\overline{C}$ .

Pour démontrer que le groupe d'automorphismes d'un corps  $\overline{C}$  fortement convexe qui n'est pas un ellipsoïde, est compact, nous montrerons que tous les automorphismes ont un point fixe à l'intérieur de  $\overline{C}$ , puis qu'ils ont un point fixe à commun à l'intérieur de  $\overline{C}$ .

Pour la première partie, on considère un automorphisme sans point fixe à l'intérieur de  $\overline{C}$ , et on regarde  $\partial C$  via une transformation projective comme le graphe d'une fonction  $f$ . L'invariance de  $\partial C$  sous l'action de l'automorphisme considéré se traduit par une équation fonctionnelle vérifiée par  $f$ . L'étude de cette dernière aboutit à la conclusion que  $\partial C$  est un ellipsoïde.

### 4.1.1 Convention et notations.

Considérons le plongement affine  $x \mapsto (x, 1)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Désormais tout point de  $\mathbb{R}^n$  est identifié à son image dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par cette application, et  $\langle A \rangle_a$ , respectivement  $\langle A \rangle_v$ , désigne le sous-espace affine, respectivement vectoriel, de  $\mathbb{R}^{n+1}$  engendré par une partie  $A$ . Enfin nous noterons  $p$  la projection de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  sur l'espace projectif réel de dimension  $n$  identifié à  $\langle C \rangle_a \cup p(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ .

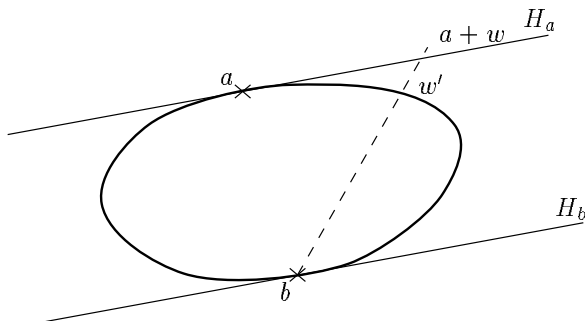
Remarquons que les automorphismes des corps convexes réguliers vérifient:

**Lemme 4.1.** *Tout automorphisme  $\gamma$  d'un corps convexe de classe  $C^1$  envoie l'hyperplan projectif tangent à sa frontière en un point  $x$  sur l'hyperplan projectif tangent à sa frontière au point image  $\gamma(x)$ .*

*Preuve.* L'application projective  $\gamma$  envoie bijectivement la frontière du convexe  $C$  sur elle-même, donc tout hyperplan d'appui en un point  $x$  sur un hyperplan d'appui au point  $\gamma(x)$ . La coïncidence et l'unicité des hyperplans d'appui et tangents en tout point de la frontière permet de conclure.  $\square$

### 4.1.2 Une description de la frontière.

Soit  $\overline{C}$  un corps convexe de classe  $C^2$ . Considérons  $a$  et  $b$  deux points de sa frontière tels que les hyperplans affines  $H_a$  et  $H_b$  tangents à  $\partial C$  en ces points sont parallèles. Notons  $\overrightarrow{H}$  leur direction commune.



Pour tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$ , la droite  $(b, a + w)$  rencontre  $\partial C \setminus \{b\}$  en un unique point  $w'$ . Ce point est le barycentre des points pondérés  $(a + w, 1)$  et  $(b, f(w))$ .

**Lemme 4.2.** *La fonction  $f$  ainsi définie est positive, convexe, de classe  $C^2$ . Elle permet de décrire  $\partial C \setminus H_b$  tout entier. De plus, elle envoie  $\vec{0}$  sur 0 et son application linéaire tangente en  $\vec{0}$  est l'application nulle.*

Remarquons que si l'on envoie l'hyperplan affine  $H_b$  à l'infini par une transformation projective, l'image du convexe  $\overline{C}$  par cette transformation est l'épigraphe de la fonction  $f$ .

*Preuve du lemme.* La positivité de  $f$  provient de la convexité de  $\overline{C}$  et du fait que les hyperplans  $H_a$  et  $H_b$  sont parallèles. Cette positivité de  $f$  entraîne immédiatement que  $T_{\overline{0}}f$  est l'application nulle.  $\square$

## 4.2 Une classification des automomorphismes.

### 4.2.1 Définitions.

Nous allons définir le type d'un automorphisme d'un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^1$  par analogie avec la classification des automorphismes de la boule euclidienne standard qui sont les isométries du modèle de Klein de l'espace hyperbolique.

Soit  $\gamma$  un automorphisme d'un corps convexe  $\overline{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si cet automorphisme possède un point fixe à l'intérieur de  $\overline{C}$ , on dit que  $\gamma$  est **elliptique**. Sinon  $\gamma$  étant un homéomorphisme du convexe  $\overline{C}$ , le théorème de Brouwer assure l'existence d'au moins un point fixe pour  $\gamma$  sur la frontière  $\partial C$  de  $\overline{C}$ . Si tous les points fixes de la restriction de  $\gamma$  à  $\partial C$  ont même hyperplan tangent à  $\partial C$ , on parle d'automorphisme **parabolique**. Dans tous les autres cas, l'automorphisme  $\gamma$  est dit **hyperbolique**.

#### Remarques:

- Un automorphisme  $\gamma$  d'un corps convexe  $\overline{C}$  n'admettant aucun point fixe à l'intérieur de  $\overline{C}$  et tel que sa restriction à  $\partial C$  a un unique point fixe, est parabolique.
- Un automorphisme  $\gamma$  d'un corps  $\overline{C}$  strictement convexe est parabolique si et seulement si sa restriction à  $\overline{C}$  admet un unique point fixe et que ce point appartient à  $\partial C$ .
- La classification des automorphismes de la boule euclidienne standard ainsi définie coïncide bien avec la classification usuelle des isométries du modèle de Klein de la géométrie hyperbolique.

### 4.2.2 Puissances des automomorphismes.

Les puissances des automorphismes des corps convexes satisfont la propriété suivante:

**Proposition 4.1.** *Un automorphisme d'un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^1$  et toutes ses puissances non nulles sont de même type.*

*Démonstration.* Désignons par  $C$  l'intérieur du corps convexe considéré.

Les puissances d'un automorphisme elliptique sont clairement elliptiques. Réciproquement supposons que  $\gamma$  est un automorphisme de  $\overline{C}$  tel que sa puissance non nulle  $\gamma^m$  est elliptique. Considérons un point de  $C$  fixé par  $\gamma^m$ , son orbite sous l'action du groupe engendré par  $\gamma$  est alors finie, et l'enveloppe convexe de cette orbite est un convexe compact de  $C$  stable sous l'action de l'application projective  $\gamma$ . Le théorème de Brouwer appliqué

à la restriction de  $\gamma$  à cet ensemble, fournit un point dans  $C$  fixe pour  $\gamma$  qui est donc bien elliptique.

Considérons un automorphisme parabolique  $\gamma$ , et  $\gamma^m$  une de ses puissances non nulles. Cet automorphisme  $\gamma^m$  n'est pas elliptique sinon  $\gamma$  le serait aussi, il est donc parabolique ou hyperbolique. Supposons qu'il est hyperbolique. L'application  $\gamma^m$  fixe le point  $x$  de la frontière  $\partial C$  fixé par  $\gamma$ , et un point  $y$  de la frontière  $\partial C$  tel que les hyperplans affines tangents  $H_x$  et  $H_y$  à la frontière  $\partial C$  en  $x$  et  $y$  sont distincts. L'orbite du point  $y$  sous l'action du groupe engendré par l'application  $\gamma$  est finie, son enveloppe convexe est donc une partie compacte du corps  $\overline{C}$  invariante sous l'action de l'application projective  $\gamma$ . Elle contient donc, d'après le théorème de Brouwer, un point  $z$  fixé par  $\gamma$ . Par ailleurs, le point  $y$  appartient à l'intersection  $I$  de  $\overline{C}$  avec le demi-espace ouvert limité par l'hyperplan  $H_x$  et contenant le convexe  $C$ . Comme l'application projective  $\gamma$  laisse le convexe  $C$  globalement invariant, le lemme 4.1 assure que l'orbite du point  $y$  appartient aussi à  $I$ . Il en est de même du point  $z$ . Finalement le point fixe  $z$  n'appartient pas à l'hyperplan  $H_x$  car il est dans  $I$ , ce qui contredit le fait que  $\gamma$  est parabolique. Ainsi les puissances non nulles d'un automorphisme parabolique sont paraboliques.

Une puissance non nulle d'un automorphisme hyperbolique fixe au moins deux points de la frontière (ceux de l'automorphisme de départ) où les hyperplans affines tangents sont distincts, elle est donc elliptique ou hyperbolique, et nous avons déjà vu que le premier cas est exclu.  $\square$

## 4.3 Les automorphismes elliptiques.

### 4.3.1 Description.

Les automorphismes elliptiques i.e. ceux qui admettent un point fixe à l'intérieur du corps convexe, ont une structure simple.

**Proposition 4.2.** *Soit  $\gamma$  un automorphisme elliptique d'un corps convexe  $\overline{C}$  de classe  $C^1$ . Alors cette application projective  $\gamma$  est associée à une application linéaire semi-simple dont toutes les valeurs propres sont de module 1.*

En fait, cette description est valable pour toute application projective conservant un corps convexe  $\overline{C}$  et admettant un point fixe à l'intérieur de  $\overline{C}$ . Aucune hypothèse sur la régularité de la frontière du convexe n'est nécessaire.

*Démonstration.* Soit  $\gamma$  une application projective conservant un corps convexe d'intérieur noté  $C$ , et  $a$  un des points fixes de  $\gamma$  situé dans  $C$ . Notons  $g$  l'application linéaire associée à  $\gamma$  pour laquelle  $a$  est un vecteur propre de valeur propre 1.

Soit  $\rho e^{i\theta}$  une valeur propre réelle ou complexe de  $g$ , où  $\rho$  est un réel strictement positif (rappelons que  $\rho$  ne peut pas être nul puisque  $g$  est bijective). Il existe donc un vecteur  $u$  non nul de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et une suite extraite  $(g/\rho)^{\varphi(m)}(u)$  convergeant vers le vecteur  $u$  quand l'entier  $m$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Comme le point  $a$  est à l'intérieur du corps convexe  $\overline{C}$ ,

il existe un réel non nul  $\varepsilon$  tel que le point projectif  $p(a + \varepsilon u)$  appartient à  $p(\partial C)$ . Si  $\rho$  est strictement supérieur (resp. inférieur) à 1, la suite  $(\gamma^{\varphi(m)}(p(a + \varepsilon u)))_{m \in \mathbb{Z}}$  converge vers le point  $p(a)$  quand  $m$  tend vers  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ). Or  $\gamma$  conserve la frontière  $\partial C$  qui est un fermé, donc  $p(a)$  appartient à  $\partial C$  ce qui n'est pas. Ainsi, le réel  $\rho$  est nécessairement égal à 1.

La réduction de Jordan permet donc d'écrire  $g$  comme une somme  $f + N$  où  $f$  est un endomorphisme semi-simple dont les valeurs propres sont de module 1, et  $N$  est un endomorphisme nilpotent commutant avec  $f$ . Si l'application nilpotente  $N$  est non nulle, considérons une suite extraite  $(f^{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  convergeant vers l'identité, et un vecteur  $u$  appartenant au noyau de  $N^2$  sans appartenir au noyau de  $N$ . Comme le point  $a$  appartient à l'ouvert convexe  $C$ , il existe un réel non nul  $\varepsilon$  tel que le point  $p(a + \varepsilon u)$  appartient à  $p(C)$ . Le point  $p(a + \frac{\varepsilon u}{2})$  appartient alors aussi à  $p(C)$ . Chacune des suites  $s_k$ , pour  $k$  valant 1 ou 2, formées des points  $\gamma^{\varphi(m)+1}(p(a + \frac{\varepsilon u}{k})) = p(a + \frac{\varepsilon}{k}(f^{\varphi(m)+1}(u) + (\varphi(m) + 1)f^{\varphi(m)}(N(u))))$  converge donc vers le point  $p(N(u))$  quand  $m$  tend vers l'infini. Mais d'autre part, l'application projective  $\gamma$  est une isométrie de la géométrie de Hilbert  $(C, h)$  qui laisse le point  $a$  fixe. La suite  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) est une suite de points de la sphère centrée en  $a$  et de rayon  $h(a, p(a + \varepsilon u))$ , (resp.  $h(a, p(a + \frac{\varepsilon u}{2}))$ ). Ces deux sphères étant des fermés sans point commun, les suites  $s_1$  et  $s_2$  ne peuvent pas avoir la même limite, et l'application nilpotente  $N$  est donc nulle. Ainsi l'application linéaire  $g$  est bien semi-simple.  $\square$

### 4.3.2 Compacité d'un groupe d'isométrie.

Observons que les éléments elliptiques vérifient

**Lemme 4.3.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe fermé du groupe d'automorphismes d'un corps convexe  $\overline{C}$ . Si tous les éléments de  $\Gamma$  admettent un point fixe commun à l'intérieur de  $\overline{C}$  alors  $\Gamma$  est compact.*

*Preuve.* Soit  $a$  le point fixe commun à tous les éléments de  $\Gamma$ . Comme il appartient à l'intérieur du corps convexe  $\overline{C}$ , il existe une famille libre  $(u_i)_{i=1 \dots n}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  tels que les points  $a + u_i$  appartiennent à  $\partial C$  et une famille  $(\lambda_i)_{i=1 \dots n}$  de réels strictement positifs tels que les points  $a - \lambda_i u_i$  appartiennent à  $\partial C$ . Fixons une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Soit  $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\Gamma$ . Pour tout entier  $m$ , notons  $g_m$  l'application linéaire de  $GL(\mathbb{R}^{n+1})$  associée à  $\gamma_m$  en imposant  $g_m(a) = a$ . C'est licite car  $a$  est un point fixe de  $\gamma_m$ . Remarquons que  $g_m(u_i)$  n'est jamais le vecteur nul, sinon le point  $\gamma_m(a + u_i)$  de  $\partial C$  serait le point  $a$  intérieur à  $C$ . A extraction près, nous pouvons donc supposer que, pour tout  $i$  de 1 à  $n$ , les suites  $(\frac{g_m(u_i)}{\|g_m(u_i)\|})_{m \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers des vecteurs notés  $f_i$ . La suite des segments  $\gamma_m([a + u_i, a - \lambda_i u_i]) = \overline{C} \cap (a, p(a + g_m(u_i)))$  converge vers le segment  $\overline{C} \cap (a, p(a + f_i))$  qui admet  $a$  comme point intérieur, ce qui prouve que les suites  $(\|g_m(u_i)\|)_{m \in \mathbb{N}}$  sont bornées. Quitte à considérer une nouvelle extraction, nous supposons que ces suites convergent chacune vers une limite  $\mu_i$  positive. Remarquons qu'aucun des réels  $\mu_i$  n'est nul, sinon l'une des suites  $(\gamma_m(a + u_i))_{m \in \mathbb{N}}$  du fermé  $\partial C$  convergerait vers le point  $a$  intérieur à  $C$ . Finalement à extraction près, la suite des applications linéaires  $g_m$

converge vers l'application linéaire  $g$  définie par  $g(a) = a$  et  $g(u_i) = \mu_i f_i$  pour tout entier  $i$  entre 1 et  $n$ . Rappelons que  $(a, u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et observons que toutes les applications  $\gamma_m$  sont elliptiques car elles fixent le point  $a$  intérieur à  $\overline{C}$ . Les déterminants des applications  $g_m$  valent donc 1 ou  $-1$  (conséquence de la proposition 4.2). L'application  $g$  est donc bijective et donne bien lieu à une application projective  $\gamma$  de  $PSL(n+1, \mathbb{R})$ . Ainsi  $\Gamma$  étant fermé, l'application  $\gamma$  appartient au groupe  $\Gamma$  qui est donc compact.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème

**Théorème 4.1.** *Soit  $\overline{C}$  un corps convexe dont tout automorphisme admet un point fixe à l'intérieur de  $\overline{C}$ . Alors le groupe des automorphismes du corps  $\overline{C}$  est compact.*

Comme nous l'a fait remarquer P. de la Harpe, ce résultat n'est pas immédiat. En effet, répondant à une question de Koplansky, H. Bass explique dans [Bas80] qu'il existe des groupes non conjugués à un sous-groupe de  $U_{n+1}(\mathbb{C})$  dont tous les éléments sont semi-simples et à valeurs propres de module 1. Le sous-groupe donné en exemple n'est pas fermé dans  $SL(n+1, \mathbb{R})$ , et ne conserve pas de corps convexe régulier.

*Démonstration.* Notons  $\Gamma$  le groupe des applications projectives conservant le corps convexe  $\overline{C}$ . C'est un fermé de  $PSL(n+1, \mathbb{R})$  car  $\overline{C}$  est compact. Sous l'hypothèse que tous les éléments de  $\Gamma$  admettent un point fixe à l'intérieur  $C$  de  $\overline{C}$ , nous voulons montrer qu'il existe un point à l'intérieur de  $\overline{C}$  fixe par tous les éléments de  $\Gamma$ .

Le sous-groupe  $\Gamma$  est fermé dans le groupe de Lie  $PSL(n+1, \mathbb{R})$ , c'est donc un groupe de Lie ainsi que sa composante neutre, notée  $\Gamma^\circ$ . La description des éléments elliptiques montre que tout élément de  $\Gamma^\circ$  est conjugué à un élément du sous-groupe compact maximal  $PO(n+1, \mathbb{R})$  de  $PSL(n+1, \mathbb{R})$ . Or un groupe de Lie connexe non compact contient toujours un élément non conjugué à un sous-groupe compact ([Mal45]), le sous-groupe  $\Gamma^\circ$  est donc compact.

Notons  $D$  l'ensemble des points du corps  $\overline{C}$  fixes par tous les éléments de  $\Gamma^\circ$ . Montrons que  $D$  contient au moins un point intérieur à  $\overline{C}$ . Soit  $x$  un point de l'intérieur de  $C$ . Son orbite sous l'action du groupe compact  $\Gamma^\circ$  est un compact de l'intérieur de  $C$ . L'enveloppe convexe de cette orbite  $\Gamma^\circ x$  est donc un compact de l'intérieur de  $C$ , stable sous l'action de  $\Gamma^\circ$ . Il existe donc des convexes compacts de  $C$  invariant par  $\Gamma^\circ$ . Choisissons en un,  $C'$ , minimal au sens de l'inclusion. Il est réduit à un point (qui est fixe sous l'action de  $\Gamma^\circ$  et dans  $C$ ). Sinon, prenons un point  $y$  intérieur à  $C'$ . l'enveloppe convexe de son orbite  $\Gamma^\circ y$  est un convexe compact de  $C$  stable sous l'action de  $\Gamma^\circ$ . L'inclusion de cette enveloppe dans l'intérieur de  $C'$  contredit la minimalité de  $C'$ .

L'ensemble  $D$  des points fixes par tous les éléments de  $\Gamma^\circ$  est une section affine non vide du corps  $\overline{C}$ . En effet, soient deux points  $x$  et  $y$  fixes pour un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ . Notons  $g$  l'application linéaire associée à  $\gamma$  en imposant  $g(x) = x$ . Le segment borné  $\overline{C} \cap (xy)$  est alors invariant par  $\gamma$  et contient deux points fixes distincts. Ces deux points fixes sont donc des vecteurs non colinéaires, propres pour l'application linéaire  $g$  et correspondant à des valeurs propres réelles de même signe. Or nous avons déjà vu (proposition 4.2) que les seules valeurs propres réelles possibles de  $g$  sont 1 et  $-1$ , donc  $g(y)$  vaut  $y$  et la restriction



de  $\gamma$  à toute la droite projective  $(xy)$  est l'identité. Ainsi, si deux points distincts de  $\overline{C}$  sont fixes par tous les éléments de  $\Gamma^\circ$ , il en est de même de tous les points de la droite projective définie par ces deux points, ce qui prouve que  $D$  est une section affine de  $\overline{C}$ .

La composante connexe  $\Gamma^\circ$  est un sous-groupe normal de  $\Gamma$  et agit de façon triviale sur  $D$ . De plus les éléments de  $\Gamma$  conservent le corps  $\overline{C}$ , l'ensemble  $D$  est donc invariant sous l'action de  $\Gamma$ . Ainsi un point fixe commun à tous les éléments de  $\Gamma$  est un point de  $D$  fixé par tous les éléments de  $\Gamma/\Gamma^\circ$ . Nous nous sommes donc ramenés au cas discret.

Remarquons maintenant que tout élément de  $\Gamma/\Gamma^\circ$  est d'ordre fini. En effet, tout élément de  $\Gamma$  est elliptique donc apparaît dans une base bien choisie comme une somme directe de rotations (proposition 4.2), et engendre un sous-groupe dont l'adhérence est un compact de  $\Gamma$ . Sa classe d'équivalence engendre ainsi un sous-groupe compact du groupe discret  $\Gamma/\Gamma^\circ$ , elle est donc d'ordre fini. Ainsi comme  $\Gamma$  agit sur  $D$  et que  $\Gamma^\circ$  y agit trivialement, tout élément du groupe  $\Gamma'$  formé des restrictions des éléments de  $\Gamma$  à  $D$ , est d'ordre fini. Un lemme dû à Schur ([Sch11]) assure que tout groupe de matrices périodiques de type fini est fini, donc tout sous-groupe de type fini de  $\Gamma'$  est fini.

Le groupe  $PSL(n+1, \mathbb{R})$  est réunion dénombrable croissante de compacts, il en est donc de même des groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma/\Gamma^\circ$ . Mais ce dernier groupe étant discret, il apparaît comme réunion dénombrable croissante d'ensembles finis  $E_m$ . Finalement, le groupe  $\Gamma'$  est une réunion dénombrable croissante des sous-groupes finis  $G_m$  engendrés par les restrictions à  $D$  des éléments des ensembles finis  $E_m$ . L'ensemble  $K_m$  des points du corps  $D$  fixés par tous les éléments de  $G_m$  est une section affine du corps convexe  $D$ , contenant au moins un point intérieur à  $D$ . La raison en est la même que celle assurant que  $D$  est une section affine de  $C$  contenant des points intérieurs à  $C$ . La suite des convexes  $K_m$  est décroissante. Les dimensions de ces convexes forment une suite décroissante d'entiers, qui est donc stationnaire à partir d'un certain rang, autrement dit la suite  $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est elle-même stationnaire à partir d'un certain rang  $N$ . Nous avons donc au moins un point intérieur au corps convexe  $C$  qui est fixé par tous les éléments du groupe  $\Gamma$ . Le lemme 4.3 permet de conclure que  $\Gamma$  est compact. De plus, nous obtenons a posteriori que le quotient  $\Gamma/\Gamma^\circ$  est fini.  $\square$

Remarquons que si tous les éléments du groupe  $\Gamma$  sont d'ordre fini, la composante connexe  $\Gamma^\circ$  de l'identité est réduite à l'identité, et le groupe  $\Gamma$  est fini.

## 4.4 Les automorphismes hyperboliques.

### 4.4.1 Un résultat de rigidité.

**Théorème 4.2.** *Soit  $\overline{C}$  un corps convexe de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$ . Le groupe des automorphismes de  $\overline{C}$  admet un élément hyperbolique si et seulement si la frontière de  $\overline{C}$  est un ellipsoïde.*

Ce théorème a pour conséquence le résultat de rigidité suivant :

**Corollaire 4.1.** *Une bonne géométrie de Hilbert de classe  $\mathcal{C}^2$  admet une isométrie hyperbolique si et seulement si le convexe dont elle provient est l'intérieur d'un ellipsoïde.*

Dans ce corollaire, la condition d'avoir un convexe  $C$  correspondant à de bonnes métriques de Hilbert sert simplement à garantir que les isométries sont les automorphismes du corps convexe  $\overline{C}$ .

Nous verrons au paragraphe 4.4.3 que l'hypothèse sur la classe du convexe est cruciale.

#### 4.4.2 Démonstration du théorème 4.2.

Notons que seule la partie directe du théorème nécessite une démonstration.

Soient  $\gamma$  un automorphisme hyperbolique du corps convexe  $\overline{C}$  et deux points  $a$  et  $b$  de  $\partial C$  fixes pour  $\gamma$  tels les hyperplans  $H_a$  et  $H_b$  tangents à la frontière  $\partial C$  en ces points sont distincts. Comme la frontière de  $\overline{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  ( $\mathcal{C}^1$  suffirait), les hyperplans affines  $H_a$  et  $H_b$  se coupent à l'extérieur de  $\overline{C}$ . Il existe donc une application projective qui envoie cette intersection à l'infini et telle que l'image du convexe  $\overline{C}$  reste bornée. Remarquons que l'image de  $\partial C$  par cette application projective est un ellipsoïde si et seulement si  $\partial C$  l'est. Nous pouvons donc supposer les hyperplans  $H_a$  et  $H_b$  parallèles. Notons  $\vec{H}$  leur direction commune.

Comme  $\gamma$  est une application projective, elle provient d'un élément  $g$  du groupe linéaire  $GL(\mathbb{R}^{n+1})$ . Les points fixes de  $\gamma$  sont les images par la projection  $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  des vecteurs propres de  $g$ . Donc  $a$  et  $b$  sont des vecteurs propres de  $g$ . Fixons l'endomorphisme  $g$  en imposant  $g(a) = a$ , et notons  $\lambda$  la valeur propre de  $b$  (nécessairement non nulle puisque  $g$  est inversible). Quitte à échanger les rôles de  $a$  et  $b$ , nous pouvons supposer  $|\lambda| \geq 1$ . Le sous-espace vectoriel  $\vec{H}$ , direction des hyperplans affines  $H_a$  et  $H_b$ , est alors stable par l'application linéaire  $g$  puisque  $\vec{H}$  est l'intersection des hyperplans vectoriels  $\langle H_a \rangle_v$  et  $\langle H_b \rangle_v$  qui sont stables par  $g$ . La restriction de  $g$  à  $\vec{H}$  sera notée  $\tilde{g}$ .

Par ailleurs, quitte à considérer à une puissance de  $\gamma$  dont nous savons qu'elle est encore hyperbolique (proposition 4.1) et qu'elle correspond à l'application linéaire  $g$  élevée à la même puissance, nous pouvons supposer que toutes les valeurs propres de  $g$  sont des réels positifs ou des nombres du type  $\rho e^{i\theta}$  avec  $\theta$  rationnellement indépendant de  $\pi$ , et  $\rho$  un réel strictement positif. Le réel  $\lambda$  est alors strictement supérieur à 1, car sinon il vaut 1, la restriction de  $\gamma$  au segment  $[a, b]$  est alors l'identité et comme  $[a, b]$  contient des points de l'intérieur  $C$  de  $\overline{C}$ , l'automorphisme  $\gamma$  admet au moins un point fixe dans  $C$  et n'est donc pas hyperbolique.

Appliquons maintenant ce que nous avons vu dans le paragraphe 4.1.2. Nous obtenons une fonction  $f_a$  de classe  $\mathcal{C}^2$  qui permet de décrire  $\partial C \setminus H_a$ .

Déterminons l'équation fonctionnelle vérifiée par  $f_a$ . Soit  $w$  un vecteur de  $\vec{H}$ . Le point  $p(b + f_a(w)a + w)$  appartient à  $\partial C$ , son image  $(p \circ g)(b + f_a(w)a + w)$  par  $\gamma$ , autrement dit

$p(\lambda b + f_a(w)a + \tilde{g}(w))$  aussi. Il existe donc un vecteur  $\tilde{w}$  dans  $\vec{H}$  tel que  $\lambda b + f_a(w)a + \tilde{g}(w)$  et  $b + f_a(\tilde{w})a + \tilde{w}$  sont colinéaires, ce qui implique, comme les espaces vectoriels  $\mathbb{R}a$ ,  $\mathbb{R}b$  et  $\vec{H}$  sont en somme directe, les égalités  $f_a(w) = \lambda f_a(\tilde{w})$  et  $\tilde{g}(w) = \lambda \tilde{w}$ , et donc l'équation fonctionnelle

$$f_a \circ \left( \frac{\tilde{g}}{\lambda} \right) = \frac{f_a}{\lambda}.$$

L'équation fonctionnelle satisfaite par la fonction  $f_a$  impose à son hessien en  $\vec{0}$  d'être invariant sous l'action de  $\tilde{g}/\sqrt{\lambda}$ . Si ce hessien est non dégénéré nous obtenons immédiatement le lemme suivant, qui reste vrai dans le cas général mais dont la démonstration est plus technique (cf. annexe D),

**Lemme 4.4.** *Toutes les valeurs propres de  $\tilde{g}$  sont de module  $\sqrt{\lambda}$  et  $\tilde{g}$  est semi-simple.*

Montrons maintenant que  $f_a$  est une forme quadratique. Comme l'endomorphisme  $\tilde{g}$  est semi-simple et que toutes ses valeurs propres sont de module  $\sqrt{\lambda}$ , il existe une suite extraite  $\left( \tilde{g}/\sqrt{\lambda} \right)^{\varphi(m)}$  qui tend vers l'identité. Or en dérivant deux fois l'équation fonctionnelle vérifiée par  $f_a$ , nous obtenons pour tout vecteur  $w$  de  $\vec{H}$  et tout entier  $m$

$$\text{Hess}_{(\tilde{g}/\sqrt{\lambda})^{\varphi(m)}(w)} f_a \left( (\tilde{g}/\sqrt{\lambda})^{\varphi(m)}(\cdot), (\tilde{g}/\sqrt{\lambda})^{\varphi(m)}(\cdot) \right) = \text{Hess}_w f_a.$$

Donc, comme  $\lambda > 1$ , en regardant la limite du terme de gauche quand  $m$  tend vers l'infini, nous obtenons que le hessien de  $f_a$  est constant, égal à son hessien en  $\vec{0}$ . La fonction  $f_a$  est donc bien quadratique.

Le bord du convexe  $C$  apparaît alors comme une quadrique qui est bornée par hypothèse, c'est donc un ellipsoïde.

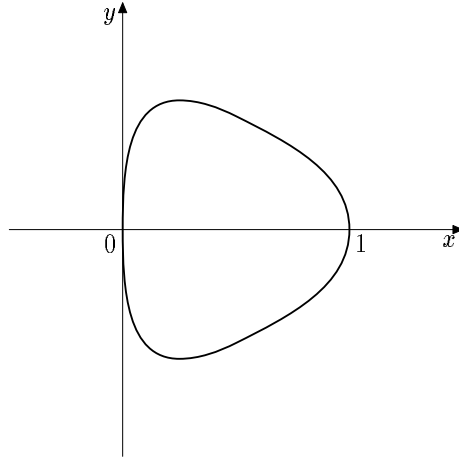
### 4.4.3 Remarque.

L'hypothèse d'un bord suffisamment régulier, à savoir de classe  $\mathcal{C}^2$  est cruciale comme le suggère la démonstration générale sans hypothèse sur le hessien de la frontière. Pour s'en convaincre, on peut avoir à l'esprit le contre-exemple suivant.

Dans  $\mathbb{R}^2$ , l'ensemble des points vérifiant  $y^4 + x(x-1)^3 \leq 0$  est un corps convexe  $\overline{C}$ , dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  partout sauf au point  $(1,0)$  où elle est seulement de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour tout réel  $\lambda$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , définissons l'application linéaire  $g_\lambda$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même par  $g_\lambda(x, y, z) = (\lambda^4 x, \lambda y, z + (\lambda^4 - 1)x)$ . C'est un isomorphisme car  $g_\lambda \circ g_{1/\lambda}$  est l'identité de  $\mathbb{R}^3$ . L'espace affine  $\mathbb{R}^2$  est toujours identifié à l'hyperplan d'équation  $z = 1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et l'espace projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}(\mathbb{R})$ . Dans ce cadre, l'application projective  $\gamma_\lambda$  déduite de  $g_\lambda$  laisse le convexe  $\overline{C}$  globalement stable. Pour tout  $\lambda$  différent de 1, l'application  $g_\lambda$  admet trois valeurs propres positives distinctes à savoir 1,  $\lambda$  et  $\lambda^4$ , dont les sous-espaces propres associés sont respectivement  $\mathbb{R}(0, 0, 1)$ ,  $\mathbb{R}(0, 1, 0)$  et  $\mathbb{R}(1, 0, 1)$ . Ainsi l'automorphisme  $\gamma_\lambda$  du corps  $\overline{C}$  est bien hyperbolique puisque ses seuls points fixes sont  $(0,0)$  et  $(1,0)$  et qu'ils

sont sur la frontière de  $\overline{C}$ .



## 4.5 Les automorphismes paraboliques.

### 4.5.1 Un résultat de rigidité.

Concernant les éléments paraboliques, nous avons le théorème de rigidité suivant

**Théorème 4.3.** *Soit  $\overline{C}$  un corps convexe de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  à hessien défini positif en tout point. Le groupe des applications projectives conservant  $\overline{C}$  contient un élément parabolique si et seulement si la frontière de  $\overline{C}$  est un ellipsoïde.*

Cela se traduit en termes de géométrie de Hilbert par:

**Corollaire 4.2.** *Soit  $C$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n$  un entier supérieur à 2, dont la frontière  $\partial C$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et admet un hessien défini positif en tout point. Si les géométries de Hilbert associées à ce convexe  $C$  admettent une isométrie parabolique alors le convexe  $C$  est l'intérieur d'un ellipsoïde.*

### 4.5.2 Démonstration du théorème

Soient  $\gamma$  un automorphisme parabolique du corps convexe  $\overline{C}$  et  $a$  l'unique point de la frontière  $\partial C$  fixe sous l'action de  $\gamma$  (voir les remarques du paragraphe 4.2.1). L'hyperplan affine tangent à la frontière  $\partial C$  au point  $a$  est noté  $H_a$ , c'est une partie de l'espace affine engendré par le convexe  $C$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Comme  $\gamma$  est une application projective, elle provient d'un élément  $g$  du groupe linéaire  $GL(\mathbb{R}^{n+1})$  défini de façon unique par la convention  $g(a) = a$ .

D'après la proposition 4.1, les puissances non nulles de  $\gamma$  sont paraboliques. Nous supposons donc désormais, quitte à remplacer  $\gamma$  par une de ses puissances, que les valeurs propres de l'application linéaire  $g$  associée à  $\gamma$  sont strictement positives ou du type  $\rho e^{i\theta}$

avec  $\rho$  un réel strictement positif et  $\theta$  un réel rationnellement indépendant de  $\pi$ .

Etudions plus précisément l'application linéaire  $g$ . Nous démontrerons au paragraphe suivant le lemme:

**Lemme 4.5.** *Les espaces caractéristiques de  $g$  hormis celui associé à la valeur propre 1 sont inclus dans l'hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  engendré par  $H_a$ .*

Fixons maintenant un point  $b$  de  $\ker(g - \text{Id})^{n+1} \cap \partial C$  qui n'est pas dans  $H_a$ , et notons  $H_b$  l'espace affine tangent à  $\partial C$  en  $b$ . Les hyperplans  $H_a$  et  $H_b$  s'intersectent à l'extérieur du convexe  $\overline{C}$  puisque ce dernier est de classe  $\mathcal{C}^2$  ( $\mathcal{C}^1$  suffirait). Il existe donc une application projective envoyant cette intersection à l'infini et le convexe  $\overline{C}$  sur un convexe borné. Ainsi quitte à conjuguer notre modèle par cette application projective, nous pouvons supposer que les hyperplans tangents en  $a$  et  $b$  à la frontière  $\partial C$ , sont parallèles. Leur direction commune est notée  $\overrightarrow{H}$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$  se décompose en la somme directe  $\mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \overrightarrow{H}$ .

L'image de  $b$  par  $g$  s'écrit donc de manière unique sous la forme  $g(b) = \mu b + \alpha a + u$  avec  $u$  dans  $\overrightarrow{H} \cap \ker(g - \text{Id})^{n+1}$ . Remarquons que  $u$  n'est pas nul. En effet, sinon la droite affine  $(a, b)$  serait stable par  $\gamma$ , et comme l'application  $\gamma$  envoie bijectivement  $\partial C$  dans lui-même, elle enverrait aussi  $\partial C \cap (a, b) = \{a, b\}$  bijectivement dans lui-même. Le point  $a$  étant fixe sous l'action de  $\gamma$ , le point  $b$  le serait aussi et  $\gamma$  ne serait donc pas parabolique. Par ailleurs, comme  $\langle H_a \rangle_v = \mathbb{R}a \oplus \overrightarrow{H}$  est l'hyperplan vectoriel tangent en  $a$  au cône vectoriel engendré par  $\partial C$ , il est stable par  $g$ . Le sous-espace vectoriel  $\langle H_a \rangle_v \cap \ker(g - \text{Id})^{n+1}$  est donc stable par  $g$ . La matrice de la restriction de  $g$  à  $\ker(g - \text{Id})^{n+1}$  dans une base  $(\mathcal{B}, b)$  où  $\mathcal{B}$  est une base de  $\ker(g - \text{Id})^{n+1} \cap \langle H_a \rangle_v$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha a + u) \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Ainsi  $\mu$  vaut 1.

D'autre part, la stabilité de l'hyperplan vectoriel  $\langle H_a \rangle_v$  sous l'action de  $g$  assure qu'il existe un unique endomorphisme linéaire de  $\overrightarrow{H}$  dans lui-même  $\tilde{g}$  et une unique forme linéaire  $l$  sur  $\overrightarrow{H}$  tels que pour tout  $w$  de  $\overrightarrow{H}$ , on a  $g(w) = \tilde{g}(w) + l(w)a$ .

Considérons maintenant les fonctions  $f_a$  et  $f_b$  définies au paragraphe 4.1.2 à partir des points  $a$  et  $b$ . Plus précisément:

- $w \in \overrightarrow{H} \mapsto \frac{b+w+f_a(w)a}{1+f_a(w)}$  est un paramétrage de  $\partial C \setminus H_a$ .
- $w \in \overrightarrow{H} \mapsto \frac{a+w+f_b(w)b}{1+f_b(w)}$  est un paramétrage de  $\partial C \setminus H_b$ .

Les fonctions  $f_a$  et  $f_b$  sont positives, de classe  $\mathcal{C}^2$  et à hessien non dégénéré car c'est le cas de la frontière  $\partial C$  considérée. Nous montrerons (au paragraphe 4.5.4) que l'invariance de la frontière  $\partial C$  par  $\gamma$  impose

**Lemme 4.6.** *Les fonctions  $f_a$  et  $f_b$  satisfont les équations fonctionnelles:*

$$\begin{aligned} \forall w \in \overrightarrow{H} \setminus \{\vec{0}\}, \quad f_b\left(\frac{w}{f_a(w)}\right) &= \frac{1}{f_a(w)} \\ \forall w \in \overrightarrow{H} \quad \text{tel que } 1 + l(w) + \alpha f_b(w) &\neq 0, \quad f_b\left(\frac{f_b(w)u + \tilde{g}(w)}{1 + l(w) + \alpha f_b(w)}\right) = \frac{f_b(w)}{1 + l(w) + \alpha f_b(w)} \\ \forall w \in \overrightarrow{H} \quad f_a(u + \tilde{g}(w)) &= \alpha + f_a(w) + l(w). \end{aligned}$$

Le lemme 4.2 assure que  $f_b$  vaut 0 en  $0_{\overrightarrow{H}}$ , et que son application linéaire en ce point est nulle. En écrivant le développement de Taylor de l'équation fonctionnelle vérifiée par  $f_b$ , nous obtenons donc que le hessien de  $f_b$  en  $0_{\overrightarrow{H}}$  est invariant sous l'action de  $\tilde{g}$ . La non-dégénérescence de ce hessien assure alors que l'endomorphisme  $\tilde{g}$  est semi-simple à valeurs propres (réelles ou complexes) de module 1.

L'équation fonctionnelle de  $f_a$  et celle reliant  $f_a$  à  $f_b$  (i.e. celle assurant que  $f_a$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  à l'infini) permettront de prouver le lemme suivant (cf. paragraphe 4.5.5)

**Lemme 4.7.** *Le hessien de la fonction  $f_a$  est constant sur  $\overrightarrow{H}$ .*

La fonction  $f_a$  est donc une forme quadratique, et la frontière  $\partial C$  du convexe qu'elle décrit est une quadrique. Mais cette frontière est bornée, c'est donc un ellipsoïde, ce qui termine la démonstration.

### 4.5.3 Démonstration du lemme 4.5.

Nous voulons démontrer que tous les espaces caractéristiques de  $g$  (réels ou complexes) sauf celui associé à la valeur propre 1, sont inclus dans l'hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  engendré par  $H_a$ .

Soit  $E$  un espace caractéristique de  $g$  associé à une valeur propre complexe  $\rho e^{i\theta}$ . Autrement dit  $E$  est le noyau de  $Q^{n+1}(g)$  où  $Q$  est le polynôme de degré 2 de  $\mathbb{R}[X]$  valant  $(X - \rho e^{i\theta})(X - \rho e^{-i\theta})$ . Alors

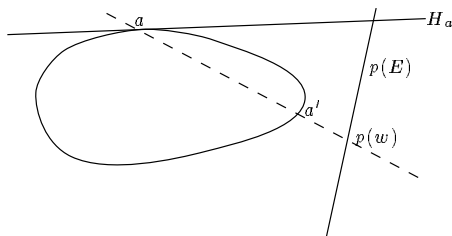
**Lemme 4.8.** *L'espace caractéristique  $E$  est inclus dans  $\langle H_a \rangle_v$ .*

*Preuve.* Les espaces vectoriels  $E$  et  $\langle H_a \rangle_v$  sont stables par  $g$ , leur intersection aussi. Si  $E$  n'est pas inclus dans l'hyperplan vectoriel  $\langle H_a \rangle_v$ , nous avons  $E + \langle H_a \rangle_v = \mathbb{R}^{n+1}$  et la dimension de  $E \cap \langle H_a \rangle_v$  est  $\dim E - 1$ . Elle est donc impaire. La restriction de  $g$  à cette intersection admet alors nécessairement une valeur propre réelle. C'est impossible car  $E$  est un espace caractéristique de  $g$  correspondant à une valeur propre complexe.  $\square$

Les espaces caractéristiques de  $g$  sont supplémentaires. Nous venons de voir que ceux correspondant à des valeurs propres complexes sont inclus dans l'hyperplan  $\langle H_a \rangle_v$ . Il existe donc une valeur propre réelle  $\alpha$  dont l'espace caractéristique associé  $\ker(g - \alpha \text{Id})^{n+1}$ , noté  $E$ , n'est pas inclus dans  $\langle H_a \rangle_v$ . Nous allons terminer la preuve du lemme 4.5 en démontrant

**Lemme 4.9.** *La valeur propre  $\alpha$  est 1.*

*Démonstration.* Comme toute valeur propre réelle de  $g$ , le réel  $\alpha$  est positif. Supposons  $\alpha > 1$  et considérons un vecteur  $w$  de  $E \setminus \langle H_a \rangle_v$ . Le plan vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  engendré par ce vecteur et la droite  $\mathbb{R}a$  coupe donc le cône vectoriel engendré par le bord  $\partial C$  en deux droites vectorielles  $\mathbb{R}a$  et  $\mathbb{R}a'$  où  $a'$  sera choisi dans le sous-espace affine  $\langle C \rangle_a$ .



La construction du point  $a'$  montre qu'il s'identifie comme élément de l'espace projectif, à un élément du type  $p((1-t)a + tw)$  où  $t$  un réel non nul. Ses images successives  $(\gamma^n(a'))_{n \in \mathbb{N}}$  définissent la suite des points  $p((1-t)a + t g^n(w))$ . Or la réduction de Jordan de la restriction de l'application linéaire  $g$  au sous-espace caractéristique  $\ker(g - \alpha \text{Id})^{n+1}$ , assure que l'application  $N = g - \alpha \text{Id}$  est nilpotente. Soit alors  $q$  l'unique entier positif tel que le vecteur  $w$  appartient au noyau de  $N^{q+1}$  mais pas à celui de  $N^q$ . Les images  $g^m(w)$  du vecteur  $w$  sont données pour  $m \geq q$  par

$$g^m(w) = \sum_{k=0}^q C_m^k \alpha^{m-k} N^k(w) = \alpha^{m-q} C_m^q (N^q(w) + o(1)).$$

Ainsi la suite  $(\gamma^m(a'))_{m \in \mathbb{N}}$  de  $\partial C$  formée des points  $p((1-t)a + t g^m(w))$  converge dans l'espace projectif vers  $p(N^q w)$ . Le point  $p(N^q w)$  appartient donc aussi à  $p(\partial C)$ . De plus, le vecteur  $N^q w$  est un vecteur propre de  $g$  associé à la valeur propre  $\alpha$ , ainsi le point  $p(N^q w)$  vu comme point de l'espace affine  $\langle C \rangle_a$ , est un point de la frontière  $\partial C$ , invariant sous l'action de  $\gamma$ . C'est donc le point  $a$ , ce qui n'est pas. Ainsi, nous avons  $\alpha \leq 1$ .

Un raisonnement similaire au précédent avec  $\gamma^{-1}$  aboutit à l'inégalité  $\alpha \geq 1$ . Finalement, nous avons bien  $\alpha = 1$ .  $\square$

#### 4.5.4 Preuve du lemme 4.6.

Rappelons que les fonctions  $f_a$  et  $f_b$  sont telles que:

- $w \in \vec{H} \mapsto \frac{b+w+f_a(w)a}{1+f_a(w)}$  est un paramétrage de  $\partial C \setminus H_a$ .
- $w \in \vec{H} \mapsto \frac{a+w+f_b(w)b}{1+f_b(w)}$  est un paramétrage de  $\partial C \setminus H_b$ .

L'invariance de  $\partial C$  sous l'action de  $\gamma$  se traduit par des équations fonctionnelles sur  $f_a$  et  $f_b$  que nous allons déterminer. Observons encore que  $f_a$  (resp.  $f_b$ ) ne s'annule qu'en  $\vec{0}$  car elle est positive, à hessien défini positif, et s'annule en  $\vec{0}$ .

Pour tout vecteur  $w$  non nul de  $\vec{H}$ , le vecteur  $\frac{b+w+f_a(w)a}{1+f_a(w)}$  appartient à  $\partial C \setminus H_a$  mais pas à  $H_b$ , il appartient donc à  $\partial C \setminus H_b$ , ce qui prouve l'existence d'un vecteur  $\tilde{w}$  de  $\vec{H}$  tel que

$$\frac{b+w+f_a(w)a}{1+f_a(w)} = \frac{a+\tilde{w}+f_b(\tilde{w})b}{1+f_b(\tilde{w})}.$$

La décomposition de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en la somme directe  $\mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \overrightarrow{H}$ , permet d'obtenir le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+f_a(w)} = \frac{f_b(\tilde{w})}{1+f_b(\tilde{w})} \\ \frac{w}{1+f_a(w)} = \frac{\tilde{w}}{1+f_b(\tilde{w})} \\ \frac{f_a(w)}{1+f_a(w)} = \frac{1}{1+f_b(\tilde{w})} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f_a(w) = \frac{1+f_a(w)}{1+f_b(\tilde{w})} \\ \frac{1}{f_a(w)} = f_b(\tilde{w}) \\ \frac{w}{f_a(w)} = \tilde{w} \end{array} \right.$$

Les applications  $f_a$  et  $f_b$  vérifient donc la relation

$$\forall w \in \overrightarrow{H} \setminus \{\vec{0}\} \quad f_b \left( \frac{w}{f_a(w)} \right) = \frac{1}{f_a(w)}. \quad (4.1)$$

Cherchons maintenant l'équation fonctionnelle satisfaite par la fonction  $f_b$ . Rappelons que  $g(b)$  est le vecteur  $b + \alpha a + u$  où  $u$  appartient à  $\overrightarrow{H}$ . Pour tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$ , l'image du point projectif  $p(a + f_b(w)b + w)$  de  $p(\partial C)$  par  $\gamma$  est le point  $p(g(a + f_b(w)b + w))$  autrement dit  $p(a + f_b(w)b + f_b(w)u + f_b(w)\alpha a + \tilde{g}(w) + l(w)a)$ . Si ce point de  $\partial C$  n'est pas  $b$ , il existe un vecteur  $\tilde{w}$  de  $\overrightarrow{H}$  tel que

$$p(a + f_b(w)b + f_b(w)u + f_b(w)\alpha a + \tilde{g}(w) + l(w)a) = p(a + f_b(\tilde{w})b + \tilde{w}).$$

Finalement, pour tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$  tel que  $1 + l(w) + \alpha f_b(w)$  n'est pas nul, nous avons

$$f_b \left( \frac{f_b(w)u + \tilde{g}(w)}{1 + l(w) + \alpha f_b(w)} \right) = \frac{f_b(w)}{1 + l(w) + \alpha f_b(w)}. \quad (4.2)$$

Un raisonnement similaire, montre que, pour tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$ , nous avons

$$f_a(u + \tilde{g}(w)) = \alpha + f_a(w) + l(w). \quad (4.3)$$

#### 4.5.5 Démonstration du lemme 4.7.

Nous voulons montrer que le hessien de  $f_a$  est constant.

Rappelons que le vecteur  $u$  (de  $\overrightarrow{H}$  est défini par  $g(b) = b + \alpha a + u$ .

**Lemme 4.10.** *Le vecteur  $u$  vérifie  $\tilde{g}(u) = u$ , et  $l(u) \neq 0$ .*

*Preuve.* La restriction de  $g$  à  $\overrightarrow{H}$  étant  $\tilde{g} + l(\cdot)a$ , et le vecteur  $a$  étant propre pour  $g$ , le sous-espace  $\overrightarrow{H} \cap \ker(g - \text{Id})^{n+1}$  est inclus dans  $\ker(\tilde{g} - \text{Id})^{n+1}$  qui est  $\ker(\tilde{g} - \text{Id})$  car  $\tilde{g}$  est semi-simple. Or  $u$  appartient à  $\overrightarrow{H} \cap \ker(g - \text{Id})^{n+1}$ , donc  $\tilde{g}(u) = u$ .

En dérivant l'équation fonctionnelle 4.3 vérifiée par  $f_a$ , nous obtenons  $T_u f_a \circ \tilde{g} = T_{\vec{0}} f_a + l$ . Donc, comme  $\tilde{g}(u) = u$  et  $T_{\vec{0}} f_a = 0$ , le réel  $l(u)$  vaut  $T_u f_a(u)$ . La fonction  $f_a$  est positive, nulle en  $\vec{0}$  ainsi que son application linéaire tangente, et à hessien défini positif, le réel  $l(u) = T_u f_a(u)$  est donc strictement positif.  $\square$



Étudions maintenant le comportement de  $f_a$  et de ses dérivées au voisinage de l'infini. Concernant son hessien, nous avons

**Lemme 4.11.** *Il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$ , la suite  $(\text{Hess}_{w+m_k u} f_a)_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\text{Hess}_w f_a$ .*

*Preuve.* Comme  $\tilde{g}$  est semi-simple et a toutes ses valeurs propres de module 1, il existe une suite croissante  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'entiers, telle que la suite des endomorphismes  $\tilde{g}^{m_k}$  tend vers l'identité. En dérivant deux fois l'équation fonctionnelle 4.3 vérifiée par la fonction  $f_a$ , nous obtenons

$$\text{Hess}_{w+m_k u} f_a(\cdot, \cdot) = \text{Hess}_{\tilde{g}^{-m_k}(w)} f_a(\tilde{g}^{-m_k}(\cdot), \tilde{g}^{-m_k}(\cdot)),$$

autrement dit la suite des formes quadratiques  $\text{Hess}_{w+m_k u} f_a$  tend vers  $\text{Hess}_w f_a$ .  $\square$

Concernant la dérivée de  $f_a$ , nous avons

**Lemme 4.12.** *Quitte à considérer une suite extraite de  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , la suite  $\left(\frac{1}{m_k} T_{w+m_k u} f_a\right)_{k \in \mathbb{N}}$  converge pour tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$  vers une forme linéaire  $h$  indépendante de  $w$ .*

*Preuve.* Dérivons l'équation fonctionnelle 4.3 vérifiée par la fonction  $f_a$ . Nous obtenons pour tout entier  $k$  et tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$  l'équation  $T_{w+ku} f_a = [l + T_{\tilde{g}^{-1}(w)+(k-1)u} f_a] \circ \tilde{g}^{-1}$  puisque  $\tilde{g}(u) = u$ . Donc, nous avons en particulier, pour tout entier  $m$ , la relation

$$\sum_{k=1}^m T_{\tilde{g}^{k-m}(w)+ku} f_a \circ \tilde{g}^{k-m} = \sum_{k=1}^m l \circ \tilde{g}^{k-1-m} + \sum_{k=1}^m T_{\tilde{g}^{k-1-m}(w)+(k-1)u} f_a \circ \tilde{g}^{k-1-m}$$

soit encore

$$T_{w+mu} f_a = T_{\tilde{g}^{-m}(w)} f_a \circ \tilde{g}^{-m} + \sum_{k=1}^m l \circ \tilde{g}^{-k}.$$

Par ailleurs, comme  $\tilde{g}$  est semi-simple et n'admet que des valeurs propres de module 1, la suite des normes des applications  $\frac{1}{m} T_{w+mu} f_a$  à  $w$  fixé, est donc bornée.

Quitte à extraire une sous-suite de  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , la suite  $\left(\frac{1}{m_k} T_{w+m_k u} f_a\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est bien convergente. Sa limite est aussi celle des formes linéaires  $\frac{1}{m_k} \sum_{r=1}^{m_k} l \circ \tilde{g}^{-r}$ . Elle est donc indépendante de  $w$ .  $\square$

La fonction  $f_a$  satisfait aussi

**Lemme 4.13.** *Pour tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$  la suite  $(f_a(w + mu))_{m \in \mathbb{N}}$  est équivalente à  $\left(\frac{m^2 l(w)}{2}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ .*

*Preuve.* Comme  $\tilde{g}(u) = u$ , l'équation fonctionnelle 4.3 vérifiée par la fonction  $f_a$  permet donc d'obtenir pour tout entier  $k$  et tout vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$  la relation:

$$f_a(w + ku) = \alpha + l(\tilde{g}^{-1}(w) + (k-1)u) + f_a(\tilde{g}^{-1}(w) + (k-1)u)$$

Sommant la relation précédente pour  $k$  variant de 0 à un entier  $m$ , nous obtenons

$$\sum_{k=1}^m f_a(\tilde{g}^{k-m}(w) + ku) = m\alpha + \sum_{k=1}^m l(\tilde{g}^{k-1-m}(w) + (k-1)u) + \sum_{k=1}^m f_a(\tilde{g}^{k-1-m}(w) + (k-1)u)$$

autrement dit

$$f_a(w + mu) = m\alpha + \sum_{k=1}^m l(\tilde{g}^{-k}(w)) + \frac{m(m-1)}{2}l(u) + f_a(\tilde{g}^{-m}(w)). \quad (4.4)$$

Comme  $\tilde{g}$  est semi-simple à valeurs propres de module 1, la famille des applications linéaires  $(\tilde{g}^m)_{m \in \mathbb{Z}}$  est bornée, la relation 4.4 permet donc d'affirmer, puisque  $l(u)$  est non nul, que les suites  $(f_b(w + mu))_{m \in \mathbb{N}}$  et  $\left(\frac{m^2 l(u)}{2}\right)_{m \in \mathbb{N}}$  sont équivalentes.  $\square$

Notons  $l_1 \odot l_2$  le produit des formes linéaires  $l_1$  et  $l_2$  c'est à dire  $l_1 \otimes l_2 + l_2 \otimes l_1$ . Les hessiens de  $f_a$  et  $f_b$  vérifient

**Lemme 4.14.** *Pour tout vecteur  $v$  non nul de  $\overrightarrow{H}$ , nous avons*

$$\text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b - \frac{T_v f_a}{f_a(v)} \odot \text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b(v, \cdot) + \text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b(v, v) \frac{T_v f_a \otimes T_v f_a}{f_a(v)^2} = \left( T_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b \cdot v - 1 \right) \text{Hess}_v f_a.$$

*Preuve.* Les fonctions  $f_a$  et  $f_b$  sont reliées par la relation 4.1 qui assure que pour tout vecteur non nul  $v$  de  $\overrightarrow{H}$ , nous avons

$$f_b\left(\frac{v}{f_a(v)}\right) = \frac{1}{f_a(v)}.$$

En dérivant une première fois cette relation, nous obtenons

$$\frac{1}{f_a(v)} T_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b - \frac{1}{f_a(v)^2} (T_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b \cdot v) T_v f_a = -\frac{T_v f_a}{f_a(v)^2}. \quad (4.5)$$

Dérivons encore une fois cette relation,

$$\begin{aligned} & -\frac{T_v f_a}{f_a(v)^2} \odot T_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b + \frac{1}{f_a(v)^2} \text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b - \frac{T_v f_a}{f_a(v)^3} \odot \text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b(v, \cdot) + 2 \left( T_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b \cdot v \right) \frac{T_v f_a \otimes T_v f_a}{f_a(v)^3} \\ & + \text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b(v, v) \frac{T_v f_a \otimes T_v f_a}{f_a(v)^4} - \left( T_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b \cdot v \right) \frac{\text{Hess}_v f_a}{f_a(v)^2} = \frac{2 T_v f_a \otimes T_v f_a}{f_a(v)^3} - \frac{\text{Hess}_v f_a}{f_a(v)^2} \end{aligned}$$

En utilisant la relation 4.5, cette dernière équation s'écrit comme annoncé dans le lemme à savoir

$$\text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b - \frac{T_v f_a}{f_a(v)} \odot \text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b(v, \cdot) + \text{Hess}_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b(v, v) \frac{T_v f_a \otimes T_v f_a}{f_a(v)^2} = \left( T_{\frac{v}{f_a(v)}} f_b \cdot v - 1 \right) \text{Hess}_v f_a.$$

$\square$

Fixons maintenant un vecteur  $w$  de  $\overrightarrow{H}$ , et écrivons la relation obtenue dans le lemme précédent pour la suite de vecteurs non nuls  $v_k = w + m_k u$  en estimant chacun des termes. D'après le lemme 4.13, nous avons  $f_a(v_k) \sim \frac{m_k^2 l(u)}{2}$  donc  $\frac{v_k}{f_a(v_k)} = \frac{2u}{m_k l(u)} + o\left(\frac{1}{m_k}\right)$ . Ainsi, nous obtenons

$$\text{Hess}_{\frac{v_k}{f_a(v_k)}} f_b = \text{Hess}_{\vec{0}} f_b + o(1) \text{ et } \text{Hess}_{\frac{v_k}{f_a(v_k)}} f_b(v_k, \cdot) = m_k (\text{Hess}_{\vec{0}} f_b(u, \cdot) + o(1)).$$

D'après le lemme 4.2,  $T_z f_b$  vaut  $\text{Hess}_{\vec{0}} f_b(z, \cdot) + o(\|z\|)$  au voisinage de  $\vec{0}$ , donc

$$T_{\frac{v_k}{f_a(v_k)}} f_b = \frac{2}{m_k l(u)} (\text{Hess}_{\vec{0}} f_b(u, \cdot) + o(1)).$$

Nous avons aussi d'après le lemme 4.12,  $\frac{1}{m_k} T_{v_k} f_a = h + o(1)$ . Ainsi la relation obtenue dans le lemme 4.14 en prenant pour  $v$  le vecteur  $v_k$  conduit en regardant la limite quand  $k$  tend vers l'infini, à la relation

$$\text{Hess}_{\vec{0}} f_b - \frac{2h}{l(u)} \odot \text{Hess}_{\vec{0}} f_b(u, \cdot) + 4 \text{Hess}_{\vec{0}} f_b(u, u) \frac{h \otimes h}{l(u)^2} = \left( \frac{2}{l(u)} \text{Hess}_{\vec{0}} f_b(u, u) - 1 \right) \text{Hess}_w f_a.$$

Pour tout vecteur  $v$  non nul de  $\ker h$ , le réel  $\left( \frac{2}{l(u)} \text{Hess}_{\vec{0}} f_b(u, u) - 1 \right) \text{Hess}_w f_a(v, v)$  vaut donc  $\text{Hess}_{\vec{0}} f_b(v, v)$ . Comme  $\text{Hess}_{\vec{0}} f_b$  est une forme quadratique définie positive, le réel  $\frac{2}{l(u)} \text{Hess}_{\vec{0}} f_b(u, u) - 1$  est non nul. Ainsi, la dernière équation que nous avons obtenue, assure que le hessien  $\text{Hess}_w f_a$  est indépendant de  $w$ .

## 4.6 Conclusion.

Nous allons maintenant tirer les conséquences des différents résultats que nous avons obtenus.

### 4.6.1 Les variétés quotients.

Nous obtenons un théorème de rigidité proche de celui obtenu par Benzécri ([Ben60]),

**Théorème 4.4.** *Soit  $C$  un corps convexe de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \geq 2$ , dont la frontière est de classe  $C^2$  à hessien défini positif en tout point. S'il existe un sous-groupe  $\Gamma$  discret du groupe des applications projectives conservant  $C$ , agissant proprement sur l'intérieur de  $C$ , alors soit  $\Gamma$  est trivial soit la frontière de  $C$  est un ellipsoïde.*

Ce théorème affirme donc que sous une hypothèse plus forte sur le corps convexe  $C$ , l'existence même d'une variété quotient force la géométrie de Hilbert de départ à être riemannienne.

*Preuve.* Notons  $\text{Int}(C)$  l'intérieur du corps  $C$ . Le quotient  $\Gamma \backslash \text{Int}(C)$  est alors une variété, et l'application de passage au quotient est un revêtement de cette variété. Les éléments

non triviaux du groupe fondamental de  $\Gamma \backslash \text{Int}(C)$  agissent alors comme des isométries sans point fixe de toute géométrie de Hilbert associée au convexe  $\text{Int}(C)$ , c'est à dire comme des isométries paraboliques ou hyperboliques. Et l'existence de telles isométries force la frontière du corps  $C$  à être un ellipsoïde (théorèmes 4.2 et 4.3).  $\square$

### 4.6.2 Compacité du groupe d'isométries

Les théorèmes 4.2, 4.3 et 4.1 concernant chacun un type d'applications projectives conservant un corps convexe donné, admettent comme corollaire immédiat le théorème de rigidité suivant:

**Théorème 4.5.** *Soit  $C$  un corps convexe de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 2$ , dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  et à hessien défini positif en tout point, alors soit le groupe des applications projectives conservant  $C$  est compact, soit la frontière de  $C$  est un ellipsoïde.*

Ce théorème se réécrit bien sûr en termes de géométrie de Hilbert, de la façon suivante

**Proposition 4.3.** *Soit  $C$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 2$ , dont la frontière est de classe  $\mathcal{C}^2$  et à hessien défini positif en tout point, alors si  $C$  n'est pas l'intérieur d'un ellipsoïde, le groupe d'isométries de la géométrie de Hilbert associée au convexe  $C$  est compact, il est même fini dès que le convexe n'admet pas de symétrie de révolution.*

En effet, si le convexe n'admet pas de symétrie de révolution, toutes les isométries (elliptiques) sont d'ordre fini, et nous avons vu que dans ce cas le groupe des isométries qui sont toutes elliptiques est fini.

# Annexe A

## A propos des variétés de Finsler

### A.1 Bref rappel de géométrie finslérienne

#### A.1.1 Définition

On appelle **métrique de Finsler** (réversible) sur une variété  $M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  un lagrangien  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les trois propriétés suivantes:

(i) pour tout point  $x$  de la variété  $M$ , la restriction  $F_x$  de  $F$  à l'espace vectoriel tangent  $T_xM$  à la variété  $M$  au point  $x$  est une norme<sup>1</sup>,

(ii) la restriction de  $F$  au fibré tangent  $TM$  privé de la section nulle, est de classe au moins  $\mathcal{C}^2$ ,

(iii) pour tout point  $x$  de  $M$ ; le hessien de la restriction de  $F^2$  à l'espace tangent  $T_xM$  est non dégénéré en tout point de  $T_xM$  différent de 0.

La restriction  $F_x$  de  $F$  est une norme provenant d'un produit scalaire si et seulement si  $F_x$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  en zéro. C'est pourquoi, on appelle **classe de la métrique**  $F$ , celle de sa restriction au fibré tangent de  $M$  privé de sa section nulle.

La condition (iii) assure simplement que le problème variationnel associé au lagrangien  $F$  est bien posé

#### A.1.2 Le champ géodésique

Soient  $r$  l'application qui à tout vecteur  $u$  non nul du fibré tangent  $TM$  associe la demi-droite  $\mathbb{R}^+u$  correspondante, et  $\sigma$  la projection du fibré homogène  $HM$ , i.e. le fibré en demi-droite  $r(TM \setminus \{0\})$  de  $TM$ , sur sa base  $M$ .

La métrique  $F$  étant homogène de degré 1, sa dérivée verticale  $d_v F$  peut s'écrire  $r^*A$ . La condition (ii) de la définition d'une géométrie de Finsler assure alors que  $A$  est une

---

1. Cette condition est parfois remplacée par la propriété  $F_x$  convexe et positivement homogène de degré 1, on parle alors de métrique de Finsler non réversible.

forme de contact. On peut donc lui associer son champ de Reeb noté  $X$ , défini par les équations  $\iota_X A = 1$  et  $\iota_X dA = 0$ .

Les géodésiques associées à la métrique  $F$ , i.e. les chemins points critiques de l'action définie par  $F$ , parmi les chemins parcourus à vitesse constante unité, apparaissent alors comme les projetés sur la variété  $M$  des orbites sur le fibré homogène  $HM$  du champ  $X$ .

Enfin, le champ  $X$  est une équation du second ordre c'est à dire qu'il vérifie la relation  $r \circ T\sigma \circ X = \text{Id}_{HM}$ . Nous pouvons lui associer différentes notions relatives à ce type d'équation ([Fou86a]), en particulier une distribution horizontale  $h_X HM$  isomorphe à la distribution verticale  $VHM$  via une application  $H_X$ , et un opérateur  $R_X$  défini sur  $h_X HM$  appelé endomorphisme de Jacobi ou opérateur de courbure.

A partir de la forme de contact  $A$ , il est aussi possible de définir une structure riemannienne sur la variété  $HM$ .

## A.2 Le cas des variétés riemanniennes

Sur une variété riemannienne  $(M, g)$ , le produit scalaire induit naturellement un champ de normes  $F$  qui munit la variété  $M$  d'une structure de Finsler. P. Foulon a montré ([Fou86b]) que l'endomorphisme de Jacobi  $R_X$  de la variété finslérienne  $(M, F)$  est alors relié au tenseur de courbure  $R$  de la variété riemannienne par la relation

$$\forall Z \in \mathbb{R}X \oplus h_X HM \quad T\sigma(R_X(Z)) = R(T\sigma.X, T\sigma.Z)T\sigma.X.$$

L'application linéaire  $T\sigma$  est un isomorphisme entre  $\mathbb{R}X \oplus h_X HM$  et  $TM$ , et pour tout vecteur  $u$  de norme 1 de  $TM$ , nous avons  $T\sigma.X(r(u)) = u$ . Ainsi l'endomorphisme de Jacobi finslérien  $R_X$  est vaut  $k\text{Id}_{HM}$  si et seulement si pour tout couple  $(u, v)$  de vecteurs unitaires d'un même espace tangent à la variété  $M$ , nous avons  $R(u, v)u = kv$ , autrement dit si et seulement si la variété riemannienne  $(M, g)$  est à courbure sectionnelle constante, égale à  $k$ .

# Annexe B

## Espaces métriques issus d'une structure finslérienne

### B.1 Bref rappel sur les espaces métriques généraux

Dans toute cette section, on considère un espace métrique noté  $(E, d)$ .

#### B.1.1 Les géodésiques

Une application continue d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $E$  est appelée **courbe** ou **chemin**. La longueur d'une courbe  $\eta$  définie sur un intervalle fermé borné  $I$  de  $\mathbb{R}$  est définie comme la borne supérieure des sommes  $\sum_{i=1}^n d(\eta(t_i), \eta(t_{i+1}))$  prises sur toutes les subdivisions  $(t_i)_{i=1 \dots n}$  de l'intervalle  $I$ . Cette quantité non nécessairement finie, est indépendante de la paramétrisation de la courbe. Elle est de plus toujours supérieure à la distance entre ses extrémités (i.e. les images des extrémités de l'intervalle  $I$ ).

Lorsqu'un chemin  $\eta : I \rightarrow E$  est de longueur finie, il est dit **rectifiable**, il est alors possible de le reparamétriser par une fonction  $\phi$  de façon à ce que la distance  $d(\eta \circ \phi(s), \eta \circ \phi(t))$  vaille  $|t - s|$  pour tous réels  $s$  et  $t$  de l'intervalle  $\phi^{-1}(I)$ . Une telle courbe est dite **paramétrée à vitesse unité**, ou **paramétrée par sa longueur d'arc**.

Un **segment géodésique** est un chemin défini sur un intervalle fermé borné dont la longueur est la distance entre ses extrémités. Par définition de la longueur, la restriction d'un segment géodésique est encore un segment géodésique. Un tel chemin peut toujours être reparamétrisé de manière à être isométrique à un segment de la droite réelle usuelle. Une courbe définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, dont toute restriction à un segment fermé borné est un segment géodésique, est appelée **géodésique**.

Une géodésique respectivement un segment géodésique désignent aussi parfois une géodésique, respectivement un segment géodésique, paramétré par leur longueur d'arc. Par ailleurs, comme la longueur d'une courbe est indépendante de sa paramétrisation, on parlera encore de segment géodésique et de géodésique pour désigner les supports géométriques de ces objets. Ainsi par abus de langage, le terme de géodésique désigne aussi bien une

géodésique, une géodésique paramétrée à vitesse unité, que le support d'une telle courbe. Le contexte permettra de décider à quelle notion il est fait référence.

Remarquons enfin que cette définition métrique d'une géodésique ne coïncide pas généralement tout à fait avec la définition variationnelle donnée dans le cadre des variétés de Finsler (manque de régularité, minimisation globale et non seulement locale de la longueur). Nous y reviendrons au paragraphe B.2.3.

L'espace métrique  $(E, d)$  est dit **géodésique** quand deux quelconques de ses points peuvent toujours être reliés par un segment géodésique. Un tel espace est en particulier connexe par arcs.

### B.1.2 Convexité

Un ensemble  $F$  d'un espace métrique géodésique  $(E, d)$  est dit **convexe** si tout segment géodésique de  $(E, d)$  reliant deux points de  $F$  est totalement inclus dans  $F$ . Cette définition est bien compatible avec la notion de convexité des espaces affines puisque dans de tels espaces, les segments géodésiques pour les métriques compatibles avec la structure affine sont les segments affines.

## B.2 Distance définie par une métrique de Finsler

### B.2.1 Définition

Une variété connexe  $M$  munie d'une structure de Finsler réversible  $F$  admet naturellement une structure d'espace métrique. En effet, l'application qui à tout couple de points  $(x, y)$  de  $M$ , associe la borne inférieure des longueurs des chemins  $\mathcal{C}^1$  par morceaux reliant  $x$  à  $y$ , définit une distance. La symétrie provient de la réversibilité de  $F$ , et la seule propriété qui n'est pas immédiate est que deux points à distance nulle l'un de l'autre sont confondus. La démonstration de cette propriété est exactement calquée sur le cas riemannien (voir par exemple [GHL90] pour le cas riemannien et [BC00] pour le cas Finsler).

### B.2.2 Rapport entre la métrique $F$ et la distance $d_F$

Dans ce paragraphe et le suivant,  $M$  désignera une variété connexe munie d'une structure de Finsler réversible  $F$ , et  $d_F$  la distance définie sur la variété  $M$  par cette métrique de Finsler.

Comme dans le cadre riemannien, la topologie induite par la distance  $d_F$  est en fait la topologie initiale de la variété  $M$ . Le théorème de Busemann-Meyer qui relie la distance  $d_F$  à la métrique  $F$  reste valable:



**Théorème B.1 (Busemann-Meyer).** *Si  $\eta$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  partant du point  $x$  avec une vitesse  $u$  alors la norme du vecteur  $u$  de  $T_xM$  est donnée par*

$$F(x, u) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d_F(x, \eta(t))}{t}.$$

### B.2.3 A propos des géodésiques

Un segment géodésique pour la distance  $d_F$  paramétré à vitesse unité, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, est une géodésique au sens variationnel pour la métrique  $F$  et dont la vitesse finslérienne vaut 1. En effet, le théorème de Busemann-Meyer nous assure qu'un tel chemin  $\eta : I \rightarrow E$  est parcouru à vitesse finslérienne unité, et donc par définition d'un chemin géodésique, que la valeur de l'action définie par  $F$  sur toute restriction de ce chemin  $\eta|_{I'}$  vaut la distance entre les extrémités de  $\eta(I')$ . Ainsi donc un tel chemin  $\eta$  minimise la longueur des courbes entre deux quelconques de ses points. C'est donc bien un point critique de l'action définie par  $F$ .

Réciproquement, le lemme de Gauß ([Egl95]) permet de montrer que toute géodésique variationnelle, du moins sa restriction à un petit intervalle, est un segment géodésique au sens métrique.

Les notions de géodésique métrique et de géodésique variationnelle diffèrent donc en particulier sur les deux points suivants: la seconde est régulière par définition alors que la première peut être simplement continue, et la seconde est seulement localement minimisante alors que la première l'est globalement.

### B.2.4 Le cas des géométries de Hilbert

Considérons  $(C, h_k)$  une géométrie de Hilbert d'un espace affine réel  $\mathbb{A}$  (dont l'espace vectoriel sera noté  $\vec{A}$ ) et supposons que la métrique définie sur chaque espace tangent  $T_xC = \vec{A}$  par  $F_x(u) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0^+} h_k(x, x + tu)$ , munisse l'ouvert  $C$  d'une structure de Finsler. Nous allons montrer que la distance  $d_F$  associée à cette structure de Finsler réversible (cf. paragraphe B.2.1) correspond alors à la distance de Hilbert  $h_k$ .

*Démonstration.* Fixons  $x$  et  $y$  deux points de  $C$ , et montrons que les distances  $h_k(x, y)$  et  $d_F(x, y)$  sont égales.

Rappelons (cf. 1.1) qu'en notant  $u^+$  et  $u^-$  les points d'intersection des demi-droites issues de  $x$  et de directions respectives  $u$  et  $-u$  avec la frontière  $\partial C$ , et  $|\cdot|$  une norme quelconque sur  $\vec{A}$ , la métrique  $F$  s'écrit

$$F(x, u) = \frac{|u|}{2\sqrt{k}} \left( \frac{1}{|x - u^-|} + \frac{1}{|x - u^+|} \right).$$

Un bref calcul nous assure alors que la distance de Hilbert  $h_k(x, y)$  entre les deux points  $x$  et  $y$  est aussi la longueur du segment affine  $[x; y]$  mesurée par rapport à la métrique  $F$ .

Cette distance  $h_k(x, y)$  est donc supérieure à la distance  $d_F(x, y)$  par définition de cette dernière comme borne inférieure des longueurs des courbes  $\mathcal{C}^1$  par morceaux reliant  $x$  à  $y$ .

Dans le but d'estimer la distance  $d_F(x, y)$ , considérons une courbe  $\eta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , partant de  $x$  et arrivant en  $y$  i.e.  $\eta(0) = x$  et  $\eta(1) = y$ . Rappelons que les topologies affines, associées aux distances  $h_k$  ou  $d_F$ , ou encore provenant de la structure de variété de  $C$  sont identiques. Par ailleurs, l'espace tangent à  $C$  étant identifié à  $C \times \vec{A}$  grâce à la structure affine sous-jacente, nous noterons donc  $(\eta, \dot{\eta})$  la dérivée du chemin  $\eta$ . Fixons une norme euclidienne  $\|\cdot\|$  sur  $\vec{A}$ .

Notons  $\sigma_0 = \{t_{0,0} = 0, t_{1,0}, \dots, t_{N_0,0} = 1\}$  la subdivision de l'intervalle  $[0; 1]$  formée des points de discontinuité de la dérivée  $\dot{\eta}$ , et construisons par récurrence une suite de subdivisions  $\sigma_n = \{t_{0,n} = 0, t_{1,n}, \dots, t_{N_n,n} = 1\}$  de cet intervalle  $[0; 1]$  telle que pour tout entier  $n$  non nul,

- la subdivision  $\sigma_n$  contient la subdivision  $\sigma_{n-1}$ ,
- le pas de la subdivision  $\sigma_n$  est inférieur à  $1/n : \forall i \in \{0, \dots, N_n - 1\} |t_{i+1,n} - t_{i,n}| \leq \frac{1}{n}$ ,
- la fonction continue définie par  $(s, t) \mapsto \|\eta(t) - \eta(s)\| + \|\dot{\eta}(t) - \dot{\eta}(s)\|$  reste inférieure à  $1/n$  sur le compact  $[t_{i,n}; t_{i+1,n}]^2$ . Dans cette écriture,  $\dot{\eta}$  est mal défini aux points de discontinuité, mais ceux-ci correspondant à des points de la subdivision, la dérivée sera comprise comme la dérivée à droite ou à gauche selon que le point est à gauche ou à droite de l'intervalle  $[t_{i,n}; t_{i+1,n}]$  considéré.

Nous pouvons donc définir une suite de courbes  $\eta_n$  définies sur  $[0, 1]$  par

$$\eta_n : t \in [t_{i,n}; t_{i+1,n}] \longmapsto \eta(t_{i,n}) + (t - t_{i,n}) \frac{\eta(t_{i+1,n}) - \eta(t_{i,n})}{t_{i+1,n} - t_{i,n}}.$$

Ces courbes correspondent aux lignes brisées formées des segments affines  $[\eta(t_{i,n}), \eta(t_{i+1,n})]$ , ce sont donc des chemins  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, tracés sur  $C$  par convexité de ce dernier. En fait, la suite  $\eta_n$  converge uniformément vers  $\eta$  sur  $[0; 1]$ , et la suite  $\dot{\eta}_n$  converge simplement vers  $\dot{\eta}$  sur  $[0; 1] \setminus \sigma_0$ . En effet, pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ , il existe une suite  $i_n$  telle que pour tout entier  $n$ , le réel  $t$  est dans l'intervalle  $[t_{i_n,n}; t_{i_n+1,n}]$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|\eta(t) - \eta_n(t)\| &= \|\eta(t_{i_n,n}) + (t - t_{i_n,n}) \frac{\eta(t_{i_n+1,n}) - \eta(t_{i_n,n})}{t_{i_n+1,n} - t_{i_n,n}} - \eta(t)\| \\ &\leq \|\eta(t_{i_n,n}) - \eta(t)\| + \|\eta(t_{i_n+1,n}) - \eta(t_{i_n,n})\| \leq \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Donc  $\eta_n$  converge uniformément vers  $\eta$  sur  $[0; 1]$ . Par ailleurs, la dérivée de  $\eta_n$  en tout point  $t$  pris hors de  $\sigma_0$  est le taux de variation de  $\eta$  entre les points  $t_{i_n,n}$  et  $t_{i_n+1,n}$ , il tend donc vers  $\dot{\eta}(t)$  puisque  $t_{i_n+1,n} - t_{i_n,n}$  tend vers zéro.

Comparons les longueurs de  $\eta$  et  $\eta_n$  mesurées par rapport à la métrique  $F$ . Par continuité de  $F$ , la suite de fonctions  $F(\eta_n, \dot{\eta}_n)$  converge simplement vers  $F(\eta, \dot{\eta})$  presque partout (sur  $[0; 1] \setminus \sigma_0$  en fait). En vue d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, montrons que les dérivées de  $\eta_n$  sont bornées indépendamment de  $n$ . Soit  $t$  dans un intervalle  $[t_{i,0}; t_{i+1,0}]$ , alors par définition de la dérivée (à gauche ou à droite pour les extrémités de l'intervalle), il existe un réel  $\delta_i$  tel que tout couple  $(s, s')$  de points distincts

de  $[t_{i,0}; t_{i+1,0}] \cap ]t - \delta_i; t + \delta_i[$  vérifie l'inégalité

$$\left\| \frac{\eta(s) - \eta(s')}{s - s'} - \dot{\eta}(t) \right\| \leq 1.$$

Les ouverts  $[t_{i,0}; t_{i+1,0}] \cap ]t - \delta_i; t + \delta_i[$  de  $[t_{i,0}; t_{i+1,0}]$  forment un recouvrement de cet intervalle qui est compact. Nous pouvons donc en extraire un recouvrement fini. Pour  $n$  assez grand, dès que deux réels de  $[t_{i,0}; t_{i+1,0}]$  diffèrent de moins de  $1/n$ , ils appartiennent au moins à un même intervalle du recouvrement fini. Cela nous montre que pour  $n$  assez grand, tout vecteur  $\dot{\eta}_n(t)$  est situé à une distance euclidienne inférieure à 1 du compact  $\dot{\eta}([0; 1])$ . Pour  $n$  assez grand, les dérivées (à droite et à gauche) de  $\eta_n$  sont donc bornées indépendamment de  $n$ .

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite de fonctions  $F(\eta_n, \dot{\eta}_n)$  qui converge simplement vers  $F(\eta, \dot{\eta})$  presque partout. La longueur du chemin  $\eta_n$  converge donc vers celle de  $\eta$ . Or nous pouvons estimer la longueur de  $\eta_n$ , car nous avons déjà vu que la longueur d'un segment affine est aussi la distance de Hilbert entre ses extrémités. La longueur de  $\eta_n$  vérifie donc

$$\int_0^1 F(\eta_n(t), \dot{\eta}_n(t)) dt = \sum_{i=0}^{N_n-1} h_k(\eta(t_{i,n}), \eta(t_{i+1,n}))$$

Et l'inégalité triangulaire pour la distance de Hilbert  $h_k$  assure finalement que la longueur des chemins  $\eta_n$  est toujours supérieure à la distance  $h_k(\eta(t_{0,n}), \eta(t_{N_n,n})) = h_k(x, y)$ . Le passage à la limite quand  $n$  tend vers l'infini, nous permet donc de conclure que la longueur de  $\eta$  est supérieure à la distance  $h_k(x, y)$ . Ceci étant vrai pour tout chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux reliant  $x$  à  $y$ , nous obtenons que le minimum des longueurs de tous ces chemins est supérieure à  $h_k(x, y)$  et donc que la distance  $d_F(x, y)$  est supérieure à  $h_k(x, y)$ .

Finalement, nous avons montré que la distance  $d_k$  est à la fois supérieure et inférieure à la distance  $d_F$ . Ces deux distances sont donc égales.  $\square$



# Annexe C

## Calculs relatifs au chapitre 2

Cette annexe est consacrée aux calculs relatifs à la démonstration du théorème 2.1 et dont la présence au sein même de la preuve alourdirait inutilement cette démonstration. Les notations, les hypothèses sur le convexe  $C$ , les références,...etc sont donc celles de la section intitulée distance entre deux géodésiques sécantes du chapitre 2.

### C.1 Calcul de $\mathcal{S}$

Nous sommes dans une situation de type f', et voulons étudier, dans le but d'en connaître le signe au voisinage de l'infini, la fonction  $\mathcal{S}$  définie par

$$\mathcal{S} = \left( \dot{d}_+ - 1 \right) (c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta).$$

L'expression 2.9 de  $\dot{d}_+$  permet d'écrire

$$\mathcal{S} = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{k}} \times (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - x \dot{c}^+ \circ x) - (c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta).$$

Notons  $X$  la fonction  $a - x$ . La formule 2.4 exprimant  $\dot{x}$  comme polynôme en  $X$ , et l'égalité  $c^+(a) = a \tan \theta_\delta$ , conduisent au calcul suivant:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= X \left( 1 - \frac{rX}{a(r+1)} \right) (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \dot{c}^+ \circ x + a \tan \theta_\delta - a \dot{c}^+ \circ x) \\ &\quad - (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\beta + a \tan \theta_\delta - a \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\delta) \\ &= X \left( 1 - \frac{rX}{a(r+1)} \right) (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \dot{c}^+ \circ x) \\ &\quad + a \tan \theta_\delta (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) X \left( 1 - \frac{rX}{a(r+1)} \right) - a (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) X \dot{c}^+ \circ x \left( 1 - \frac{rX}{a(r+1)} \right) \\ &\quad - (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\delta) \\ &\quad - a (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \dot{c}^+ \circ x - X \dot{c}^+ \circ x + X \tan \theta_\delta) \\ &= X \left( 1 - \frac{rX}{a(r+1)} \right) (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \dot{c}^+ \circ x) \\ &\quad - \tan \theta_\delta (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) \frac{rX^2}{r+1} + (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) \frac{rX^2}{r+1} \dot{c}^+ \circ x \\ &\quad - (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\delta) \\ &\quad - a (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \dot{c}^+ \circ x) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc bien  $\mathcal{S}$  comme somme des trois termes suivants

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{rX^2}{r+1} (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta) \\ T_2 &= - (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \tan \theta_\delta) \\ \text{et } T_3 &= (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \dot{c}^+ \circ x) \left( -a + X - \frac{rX^2}{a(r+1)} \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que  $-\dot{c}^+(y)$  tend vers  $-\infty$  quand  $y$  tend vers  $a$  par valeurs inférieures, et que la convexité de  $c^+$  permet d'écrire

$$-\dot{c}^+(y) \leq \frac{c^+(y) - c^+(a)}{a - y}.$$

Ainsi donc la fonction  $X$  est négligeable devant la fonction  $c^+ - c^+(a)$  et  $X\dot{c}^+$  est dominée par cette même fonction  $c^+ - c^+(a)$ . Nous obtenons donc les estimations cherchées au voisinage de l'infini

$$\begin{aligned} T_1 &\sim \frac{rX}{r+1} (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) X \dot{c}^+ \circ x = o((c^+ - c^+(a))^2) \\ T_2 &\sim -(c^+ \circ x - c^+(a))^2 \\ T_3 &\sim -a (\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta) (c^+ \circ x - c^+(a) + X \dot{c}^+ \circ x). \end{aligned}$$

## C.2 Calcul et estimation de la fonction $D$

Rappelons l'expression de la dérivée seconde de la fonction  $d_+$ :

$$\begin{aligned} \ddot{d}_+ &= \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\ddot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\beta) + \dot{x}^2 \ddot{c}^+ \circ x}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta} - \frac{1}{2\sqrt{k}} \left( \frac{\dot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\beta)}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\ddot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta) + \dot{x}^2 \ddot{c}^+ \circ x}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} + \frac{1}{2\sqrt{k}} \left( \frac{\dot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta)}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} \right)^2. \end{aligned}$$

Cela peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \ddot{d}_+ &= \frac{\ddot{x}}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\beta}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta} + \frac{\dot{x}^2}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{(\tan \theta_\beta - \tan \theta_\delta) x \ddot{c}^+ \circ x}{(c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta)(c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta)} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{k}} \left( \frac{\dot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\beta)}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\beta} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{k}} \left( \frac{\dot{x}(\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta)}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta} \right)^2 - \frac{\ddot{x}}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\dot{c}^+ \circ x - \tan \theta_\delta}{c^+ \circ x - x \tan \theta_\delta}. \end{aligned}$$

Les formules 2.4 et 2.5 exprimant les dérivées  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  comme polynômes en la fonction  $a - x$ , permettent d'écrire  $\ddot{d}_+$  comme la fonction composée  $D \circ x$  avec  $D$  une fonction définie sur l'intervalle  $] -a/r; a[$  comme la somme des quatres fonctions  $D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  suivantes :

$$D_1(y) = -2\sqrt{k} \left( (a - y) - \frac{3r(a - y)^2}{a(r + 1)} + 2 \left( \frac{r}{a(r + 1)} \right)^2 (a - y)^3 \right) \times \frac{\dot{c}^+(y) - \tan \theta_\beta}{c^+(y) - y \tan \theta_\beta}$$

$$\begin{aligned}
D_2(y) &= 2\sqrt{k}(a-y)^2 \left(1 - \frac{r(a-y)}{a(r+1)}\right)^2 \times \frac{(\tan \theta_\beta - \tan \theta_\delta) y \ddot{c}^+(y)}{(c^+(y) - y \tan \theta_\beta)(c^+(y) - y \tan \theta_\delta)} \\
D_3(y) &= -2\sqrt{k}(a-y)^2 \left(1 - \frac{r(a-y)}{a(r+1)}\right)^2 \left(\frac{\dot{c}^+(y) - \tan \theta_\beta}{c^+(y) - y \tan \theta_\beta}\right)^2 \\
D_4(y) &= 2\sqrt{k}(a-y)^2 \left(1 - \frac{r(a-y)}{a(r+1)}\right)^2 \left(\frac{\dot{c}^+(y) - \tan \theta_\delta}{c^+(y) - y \tan \theta_\delta}\right)^2 \\
&\quad + 2\sqrt{k}(a-y) \left(1 - \frac{3r(a-y)}{a(r+1)} + 2\left(\frac{r(a-y)}{a(r+1)}\right)^2\right) \times \frac{\dot{c}^+(y) - \tan \theta_\delta}{c^+(y) - y \tan \theta_\delta}.
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant un développement limité à l'ordre 1 de cette fonction  $D$ , en cherchant tout d'abord celui de chacune des fonctions  $D_i$ .

• Pour la fonction  $D_1$ , la continuité des fonctions  $c^+$  et  $\dot{c}^+$  en  $a$ , permet d'écrire, puisque  $c^+(a)$  vaut  $a \tan \theta_\delta$ ,

$$\begin{aligned}
D_1(y) &= -2\sqrt{k}(a-y)(1+o(1)) \times \frac{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\beta + o(1)}{c^+(a) - a \tan \theta_\beta + o(1)} \\
&= -2\sqrt{k}(a-y) \cdot \frac{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\beta}{a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)} + o(a-y).
\end{aligned}$$

• Pour la fonction  $D_2$ , l'utilisation dans un premier temps de la continuité des fonctions  $c^+$  et  $\ddot{c}^+$  en  $a$ , et de la valeur explicite  $a \tan \theta_\delta$  de  $c^+(a)$ , puis du développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction  $c^+$  en  $a$ , et enfin du fait que  $\dot{c}^+(a)$  est distinct de  $\tan \theta_\delta$ , conduisent aux estimations suivantes:

$$\begin{aligned}
D_2(y) &= \frac{2\sqrt{k}(a-y)^2(1+o(1))(a(\tan \theta_\beta - \tan \theta_\delta)\ddot{c}^+(a) + o(1))}{a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta + o(1))(c^+(y) - c^+(a) + (a-y)\tan \theta_\delta)} \\
&= -\frac{2\sqrt{k}(a-y)^2(\ddot{c}^+(a) + o(1))}{(a-y)(-\dot{c}^+(a) + \tan \theta_\delta + o(1))} \\
&= \frac{2\sqrt{k}\ddot{c}^+(a)}{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta}(a-y) + o(a-y).
\end{aligned}$$

• Pour la fonction  $D_3$ , c'est encore la continuité des fonctions  $c^+$  et  $\dot{c}^+$  en  $a$ , conjuguée au fait que  $c^+(a)$  ne vaut pas  $a \tan \theta_\beta$ , qui permet de conclure à l'estimation

$$D_3(y) = O((a-y)^2) = o(y-a).$$

• Pour la fonction  $D_4$ , estimons d'abord le rapport  $(\dot{c}^+(y) - \tan \theta_\delta)/(c^+(y) - y \tan \theta_\delta)$ . Pour cela, la fonction  $c^+$  étant de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle fermé  $[0; a]$ , elle et sa dérivée  $\dot{c}^+$  admettent des développements de Taylor au point  $a$  aux ordres 2 respectivement 1. Comme  $c^+(a)$  vaut  $a \tan \theta_\delta$  et que  $\dot{c}^+(a)$  est distinct de  $\tan \theta_\delta$ , nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{c}^+(y) - \tan \theta_\delta}{c^+(y) - y \tan \theta_\delta} &= \frac{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta + \dot{c}^+(a)(y-a) + o(a-y)}{(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)(y-a) + \frac{\ddot{c}^+(a)}{2}(y-a)^2 + o((a-y)^2)} \\
&= -\frac{1}{a-y} \times \left(1 + \frac{\dot{c}^+(a)(y-a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} + o(a-y)\right).
\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'estimer la fonction  $D_4$ :

$$\begin{aligned}
D_4(y) &= 2\sqrt{k} \left(1 - \frac{r(a-y)}{a(r+1)}\right)^2 \left(1 + \frac{\ddot{c}^+(a)(y-a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} + o(a-y)\right)^2 \\
&\quad - 2\sqrt{k} \left(1 - \frac{3r(a-y)}{a(r+1)} + o(a-y)\right) \left(1 + \frac{\ddot{c}^+(a)(y-a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} + o(a-y)\right) \\
&= 2\sqrt{k} \left(1 - \frac{2r(a-y)}{a(r+1)} + \frac{\ddot{c}^+(a)(y-a)}{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta} + o(a-y)\right) \\
&\quad - 2\sqrt{k} \left(1 - \frac{3r(a-y)}{a(r+1)} + \frac{\ddot{c}^+(a)(y-a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} + o(a-y)\right) \\
&= 2\sqrt{k} \left(\frac{r}{a(r+1)} - \frac{\ddot{c}^+(a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)}\right) (a-y) + o(a-y).
\end{aligned}$$

La fonction  $D$ , somme des fonctions  $D_i$ , admet donc comme développement limité au premier ordre la somme des développements des fonctions  $D_i$  c'est à dire

$$\begin{aligned}
D(y) &= -2\sqrt{k}(a-y) \cdot \frac{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\beta}{a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)} + \frac{2\sqrt{k} \ddot{c}^+(a)}{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta} (a-y) \\
&\quad + 2\sqrt{k} \left(\frac{r}{a(r+1)} - \frac{\ddot{c}^+(a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)}\right) (a-y) + o(a-y) \\
&= 2\sqrt{k} \left(-\frac{\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\beta}{a(\tan \theta_\delta - \tan \theta_\beta)} + \frac{\ddot{c}^+(a)}{2(\dot{c}^+(a) - \tan \theta_\delta)} + \frac{r}{a(r+1)}\right) (a-y) + o(a-y).
\end{aligned}$$



## Annexe D

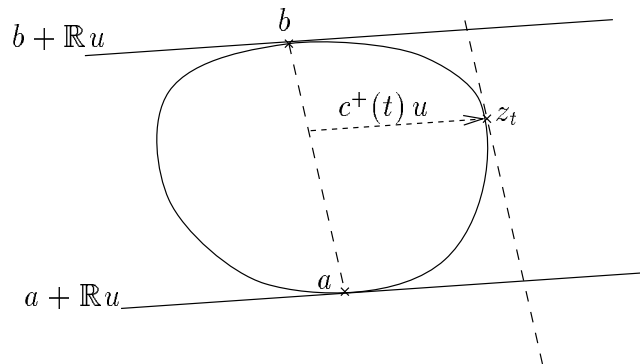
### Démonstration du lemme 4.4

Il s'agit de démontrer que toutes les valeurs propres de  $\tilde{g}$  ont pour module  $\sqrt{\lambda}$  et que l'endomorphisme  $\tilde{g}$  est semi-simple. Nous allons le faire en trois étapes.

#### D.1 Les modules des valeurs propres de $\tilde{g}$ sont comprises strictement entre 1 et $\lambda$ .

Soit  $\rho e^{i\theta}$  une valeur propre de  $\tilde{g}$  avec  $\rho > 0$ ,  $\theta$  pouvant être nul. Considérons d'une part, deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $\overline{H}$  tels que  $\tilde{g}(u) = \rho \cos \theta u + \rho \sin \theta v$  et  $\tilde{g}(v) = -\rho \sin \theta u + \rho \cos \theta v$ , et d'autre part une fonction  $\varphi$  strictement croissante de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  telle que  $e^{i\varphi(n)\theta}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $\pm\infty$ .

L'intersection du plan affine  $\langle a, b, a + u \rangle_a$  et du convexe  $C$  est un convexe dont les tangentes au bord en  $a$  et  $b$  sont respectivement  $a + \mathbb{R}u$  et  $b + \mathbb{R}u$ . La frontière de ce convexe peut donc être décrite à l'aide de deux fonctions continues  $c^\pm : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\pm$  ne s'annulant pas sur  $]0, 1[$ , plus précisément comme réunion des graphes des fonctions  $t \in [0, 1] \mapsto ta + (1 - t)b + c^\pm(t)u$  et des segments  $[a + c^+(1)u, a + c^-(1)u]$  et  $[b + c^+(0)u, b + c^-(0)u]$ . Choisissons  $t$  un réel de  $]0, 1[$  où  $c^+$  atteint son maximum (nécessairement strictement positif), et notons  $z_t$  le point  $ta + (1 - t)b + c^+(t)u$  de  $\partial C$  correspondant.



Alors, pour tout entier relatif  $m$ , l'image  $\gamma^m(z_t)$  appartient à  $\partial C$  qui est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Les points d'accumulation de cette suite de points projectifs appartiennent à  $\partial C$ .

Si  $\rho \geq \lambda$  (resp.  $\rho \leq 1$ ), considérons la suite extraite  $\gamma^{\varphi(m)}(z_t)$  avec  $m$  dans  $\mathbb{N}$  (resp.  $\mathbb{Z}^-$ ). Chaque terme de cette suite vérifie

$$\begin{aligned}\gamma^{\varphi(m)}(z_t) &= (p \circ g^{\varphi(m)})(ta + (1-t)b + c^+(t)u) \\ &= p(ta + (1-t)\lambda^{\varphi(m)}b + c^+(t)\rho^{\varphi(m)}(\cos \varphi(m)\theta u + \sin \varphi(m)\theta v)).\end{aligned}$$

Si  $\rho > \lambda$  (resp.  $\rho < 1$ ) alors comme  $\lambda > 1$ , cette suite du fermé  $p(\partial C)$  converge vers  $p(u)$  qui n'appartient pas à  $p(\langle C \rangle_a)$  donc en particulier pas à  $p(\partial C)$ . Ainsi  $\rho$  est toujours compris entre 1 et  $\lambda$ .

Si  $\rho = \lambda$  (resp.  $\rho = 1$ ), la suite précédente converge alors vers  $p((1-t)b + c^+(t)u)$  autrement dit  $b + \frac{c^+(t)}{1-t}u$  (resp. vers  $p(ta + c^+(t)u) = a + \frac{c^+(t)}{t}u$ ) qui est donc un point de  $\partial C$  (il y a donc un segment dans le bord de  $\partial C$ ). Mais le choix de  $z_t$  implique que la tangente à la frontière de  $C \cap \langle a, b, a+u \rangle_a$  est la droite affine  $(z_t, z_t + b - a)$ , et la convexité de  $C \cap \langle a, b, a+u \rangle_a$  impose alors que l'intersection de la demi-droite  $a + \mathbb{R}^+u$  (resp.  $b + \mathbb{R}^+u$ ) avec le bord  $\partial C$  est inclu dans  $[a, a + c^+(t)u]$  (resp.  $[b, b + c^+(t)u]$ ). Donc le point  $b + \frac{c^+(t)}{1-t}u$  (resp.  $a + \frac{c^+(t)}{t}u$ ) ne peut pas appartenir au bord  $\partial C$  puisque  $t$  est compris strictement entre 0 et 1. Nous obtenons donc bien la contradiction cherchée pour affirmer que  $\rho$  est strictement compris entre 1 et  $\lambda$ .

## D.2 Les valeurs propres de $\tilde{g}$ sont de module $\sqrt{\lambda}$ .

La fonction  $f_a$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , dérivons deux fois son équation fonctionnelle. Nous obtenons la relation

$$\forall w \in \overrightarrow{H} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{Hess}_{(\tilde{g}/\lambda)^m(w)} f_a \left( \left( \tilde{g}/\sqrt{\lambda} \right)^m (\cdot), \left( \tilde{g}/\sqrt{\lambda} \right)^m (\cdot) \right) = \text{Hess}_w f_a.$$

Toutes les valeurs propres de  $\tilde{g}$  sont strictement inférieure à  $\lambda$  en module. Notons  $E_-$  la somme directe des espaces caractéristiques de  $\tilde{g}$  correspondant à des valeurs propres de module strictement inférieur à  $\sqrt{\lambda}$ . Nous avons alors en prenant la limite quand  $m$  tend vers l'infini, de la relation précédente

$$\forall w \in \overrightarrow{H} \quad \text{Hess}_{\tilde{g}} f_a(\vec{0}, \vec{0}) = \text{Hess}_w f_a|_{E_-}.$$

Or le lemme 4.2 assure que  $f_a(\vec{0})$  est nul et que l'application  $T_{\vec{0}} f_a$  est nulle, la restriction de  $f_a$  à  $E_-$  est donc nulle. Ainsi si  $E_-$  n'est pas le singleton  $\{\vec{0}\}$ , la frontière  $\partial C$  contient une droite et n'est donc pas bornée. Finalement toutes les valeurs propres de  $\tilde{g}$  ont un module supérieur ou égal à  $\sqrt{\lambda}$ .

Introduisons maintenant la fonction  $f_b$  qui permet de décrire  $\partial C \setminus H_b$  définie au paragraphe 4.1.2 avec les points  $a$  et  $b$ . Comme  $f_a$ , elle satisfait une équation fonctionnelle à savoir  $f_b \circ \tilde{g} = \lambda f_b$ . Le même raisonnement que précédemment avec la fonction  $f_b$  et l'application  $\tilde{g}^{-1}$ , montre que toutes les valeurs propres de  $\tilde{g}$  ont un module inférieur ou égal à  $\sqrt{\lambda}$ . Finalement, nous obtenons bien que toutes les valeurs propres de  $\tilde{g}$  ont  $\sqrt{\lambda}$  comme module.

### D.3 L'endomorphisme $\tilde{g}$ est semi-simple.

Soit  $\sqrt{\lambda}e^{i\theta}$  une valeur propre de  $\tilde{g}$  avec éventuellement  $\theta = 0$ . Nous allons montrer que la restriction du hessien de  $f_a$  qui est positif, au noyau  $\ker(g^2 - 2\sqrt{\lambda}\cos\theta g + \lambda\text{Id})$  est non dégénérée.

Soit donc  $u$  un vecteur non nul de  $\ker(g^2 - 2\sqrt{\lambda}\cos\theta g + \lambda\text{Id})$ . Il existe une suite extraite  $\left(\left(\tilde{g}/\sqrt{\lambda}\right)^{\varphi(m)}(u)\right)_{m \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $u$ . L'équation fonctionnelle satisfaite par  $f_a$  assure que nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{Hess}_{tu}f_a(u, u) = \text{Hess}_{t(\tilde{g}/\lambda)^{\varphi(m)}(u)}f_a\left(\left(\tilde{g}/\sqrt{\lambda}\right)^{\varphi(m)}(u), \left(\tilde{g}/\sqrt{\lambda}\right)^{\varphi(m)}(u)\right).$$

En prenant la limite quand  $m$  tend vers l'infini, nous obtenons  $\text{Hess}_{tu}(u, u) = \text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(u, u)$ . Or  $f_a(\vec{0}) = 0$  et l'application linéaire tangente  $T_{\vec{0}}f_a$  est nulle, donc si  $\text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(u, u)$  est nul, la restriction de  $f_a$  à la droite  $\mathbb{R}u$  serait nulle aussi et la frontière  $\partial C$  contiendrait la droite  $p(a + \mathbb{R}u)$  ce qui est impossible puisqu'elle est bornée. Ainsi  $\text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(u, u)$  est bien non nul.

Montrons maintenant que  $\tilde{g}$  est semi-simple. Sa réduction de Jordan permet d'écrire  $\tilde{g} = \sqrt{\lambda}(f + N)$  où  $f$  est un endomorphisme semi-simple dont toutes les valeurs propres sont de module 1, et  $N$  est un endomorphisme nilpotent commutant avec  $f$ . Il existe une suite extraite  $(f^{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  qui tend vers l'identité.

Si l'application  $N$  n'est pas nulle, il existe une valeur propre  $\sqrt{\lambda}e^{i\theta}$  et un vecteur  $u$  de  $\ker(g^2 - 2\sqrt{\lambda}\cos\theta g + \lambda\text{Id})^{n+1}$  appartenant au noyau de  $N^2$  sans appartenir à celui de  $N$ . Le vecteur  $Nu$  est non nul et appartient à  $\ker(g^2 - 2\sqrt{\lambda}\cos\theta g + \lambda\text{Id})$ . Le paragraphe précédent nous assure donc que  $\text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(N(u), N(u))$  est non nul. Or le hessien de  $f_a$  en  $\vec{0}$  vérifie

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \text{Hess}_{\tilde{g}}f_a\left(\left(\tilde{g}/\sqrt{\lambda}\right)^{\varphi(m)+1}(u), \left(\tilde{g}/\sqrt{\lambda}\right)^{\varphi(m)+1}(u)\right) = \text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(u, u).$$

Ainsi, puisque les points  $\left(\tilde{g}/\sqrt{\lambda}\right)^{\varphi(m)+1}(u)$  sont les points équivalente à la suite  $f^{\varphi(m)+1}(u) + (\varphi(m)+1)f^{\varphi(m)}(N(u))$ , et que  $\text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(N(u), N(u))$  est non nul, la suite constante  $\text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(u, u)$  est équivalente à la suite  $(\varphi(m)+1)\text{Hess}_{\tilde{g}}f_a(N(u), N(u))$  qui est non bornée. C'est la contradiction cherchée qui nous permet d'affirmer que  $N$  est nul et  $\tilde{g}$  semi-simple.



# Bibliographie

- [Bas80] H. Bass. Groups of integral representation type. *Pacific J. Math.*, 86(1):15–51, 1980.
- [BC00] D. Bao and Z. Chern, S.-S. Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Bea99] A. F. Beardon. The Klein, Hilbert and Poincaré metrics of a domain. *J. Comput. Appl. Math.*, 105(1-2):155–162, 1999. Continued fractions and geometric function theory (CONFUN) (Trondheim, 1997).
- [Ben60] J.-P. Benzécri. Sur les variétés localement affines et localement projectives. *Bull. Soc. Math. France*, 88:229–332, 1960.
- [Ben00] Y. Benoist. Automorphismes des cônes convexes. *Invent. Math.*, 141(1):149–193, 2000.
- [Ber30] L. Berwald. Über die  $n$ -dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung bei die Geraden die Kürzesten sind. *Math. Zeitschr.*, 30:449–469, 1930.
- [Ber77] M. Berger. *Géométrie. Vol. 1-5*. CEDIC, Paris, 1977.
- [BK53] H. Busemann and P.-J. Kelly. *Projective geometry and projective metrics*. Academic Press Inc., New York, 1953.
- [Bou71] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, Paris, 1971.
- [Bus55] H. Busemann. *The geometry of geodesics*. Academic Press Inc., New York, 1955.
- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Les groupes hyperboliques de Gromov.
- [CR62] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962. Pure and Applied Mathematics, Vol. XI.
- [CV00] B. Colbois and P. Verovic. A rigidity result for hilbert geometries. *Prépublication Univ. Savoie*, 2000. A paraître dans GAFA.
- [dlH93] P. de la Harpe. On Hilbert’s metric for simplices. In *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, pages 97–119. Cambridge Univ. Press, 1993.

- [Egl95] D. Egloff. *Some new developments in Finsler geometry*. PhD thesis, Freiburg (Schweiz), 1995.
- [Fou83] P. Foulon. *Contribution à l'étude géométrique des problèmes de la dynamique lagrangienne*. PhD thesis, Ecole Polytechnique (France), 1983.
- [Fou86a] P. Foulon. Géométrie des équations différentielles du second ordre. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1986.
- [Fou86b] P. Foulon. *Nouveaux invariants géométriques des systèmes du second ordre - Propositions données par l'université*. PhD thesis, Université Paris VII (France), 1986.
- [Fun29] P. Funk. Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind. *Math. Ann.*, 101:226–237, 1929.
- [GHL90] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.
- [Gol90] William M. Goldman. Convex real projective structures on compact surfaces. *J. Differential Geom.*, 31(3):791–845, 1990.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [KN64] S. Kobayashi and T. Nagano. On projective connections. *J. Math. Mech.*, 13:215–235, 1964.
- [LF71] J. Lelong-Ferrand. Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz). *Acad. Roy. Belg., Cl. Sci. Mém. Coll., Collect. Octavo*, 39(5), 1971.
- [Mal45] A. Malcev. On the theory of the Lie groups in the large. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, 16(58):163–190, 1945.
- [Sch11] I. Schur. Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. für Math.*, 139:155–250, 1911.
- [Sel60] A. Selberg. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. In *Contributions to function theory (internat. Colloq. Function Theory, Bombay)*, pages 147–164. Tata Institute of Fundamental Research, 1960.
- [Won77] B. Wong. Characterization of the unit ball in  $\mathbb{C}^n$  by its automorphism group. *Invent. Math.*, 41(3), 1977.
- [ZQ95] C. Zuily and H. Queffélec. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, Paris, 1995.