

THÈSE
présentée pour obtenir le grade de DOCTEUR
de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I)
Spécialité MATHÉMATIQUES

par Henrik THYS

**GROUPES QUANTIQUES ET CATÉGORIES
DE DIAGRAMMES PLANAIRES**

Soutenue le Lundi 13 Novembre 2000 devant la Commission d'Examen :

MM.	Christian KASSEL	Directeur de Thèse,
	Jacques ALEV	Rapporteur Externe,
Mme	Christine LESCOP	Rapporteur Externe,
MM.	Vladimir TURAEV	Rapporteur Interne,
	Marc ROSSO	Membre du Jury.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Université Louis Pasteur et CNRS (UMR 7501)

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cédex

**GROUPES QUANTIQUES ET CATÉGORIES
DE DIAGRAMMES PLANAIRES**

par

Henrik THYS

AMS subject classification : 17B37, 57M25, 81R50.

Mots clés : groupe quantique, catégorie rubanée, crochet de Kauffman, supergroupe quantique, R -matrice universelle.

Remerciements

Écrire des remerciements n'est pas, en ce qui me concerne, une tâche facile. Je n'arriverais pas à exprimer correctement l'apport de chacun aux pages qui suivent. J'ai rencontré trop de monde pendant ces années pour qu'il soit possible de m'adresser à chacun d'eux. Aussi vais-je me concentrer sur la partie mathématique des remerciements.

Tout d'abord, je remercie chaleureusement Christian Kassel qui m'a suivi tout au long de ces trois années. Il a toujours été disponible pour mes questions, mes fausses réponses, mes inquiétudes, ses réponses et nombreuses corrections, et nos récits de vacances. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec lui.

Ensuite, je tiens à remercier mon jury de thèse, Jacques Alev, Christine Lescop, Marc Rosso et Vladimir Turaev, pour avoir lu, voire disséqué toutes ces pages. Je suis conscient que ce n'est pas un travail toujours très agréable, surtout en juillet et en août.

Enfin, j'aimerais remercier trois personnes qui ont subi mes assauts de questions. Ce sont Pierre Baumann, Jérôme Germoni et Jean-Yves Welschinger. Ils m'ont répondu avec beaucoup de patience et de rigueur, même après plusieurs charges. Ils m'ont beaucoup apporté.

Table des matières

Introduction	1
I Description topologique des représentations de $U_q(sl_2)$	5
Introduction	5
1 Représentations de $U_q(sl_2)$	6
1.1 Catégories monoïdales	6
1.2 Catégories rubanées	7
1.3 Morphismes négligeables	8
1.4 Rappels sur $U_q(sl_2)$	8
2 Énoncé du théorème principal	9
2.1 Diagrammes	9
2.2 La catégorie de Temperley-Lieb	10
2.3 Les idempotents de Jones-Wenzl	11
2.4 La catégorie de Turaev	11
3 Construction d'un foncteur $\mathcal{V}(a) \rightarrow \mathcal{R}(q)$	12
3.1 Le module fondamental de $U_q(sl_2)$	12
3.2 Un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \rightarrow U_q\text{-Mod}$	13
3.3 Le foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \rightarrow \mathcal{R}(q)$	14
4 Préliminaires techniques	16
4.1 Les morphismes de $\mathcal{V}(a)$	16
4.2 Coefficients de Clebsch-Gordan	17
5 Pleine fidélité : cas générique	18
5.1 Cas de $\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n, m), (k)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}((n, m)), \tilde{\mathcal{F}}(k))$	19
5.2 Cas de $\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))$	21
5.3 Démonstration du théorème 5.1	25

6	Pleine fidélité : cas d'une racine de l'unité	27
6.1	Cas $m = 2$	28
6.2	Cas $m \geq 3$	28
 II Une démonstration topologique du principe de symétrie de Kirby-Melvin		31
	Introduction	31
1	Préliminaires topologiques	32
1.1	Nombres d'enlacement	32
1.2	Tresses	34
2	L'invariant de Reshetikhin-Turaev	36
2.1	Expression graphique de l'invariant de Reshetikhin-Turaev	36
2.2	Quelques relations dans $\overline{\mathcal{R}}(q)$ et $\overline{\mathcal{V}}(a)$	37
2.3	Coloriage par V_{r-2}	38
3	Démonstration du principe de symétrie	43
3.1	Première réduction	44
3.2	Deuxième réduction	44
3.3	Troisième réduction	45
3.4	Quatrième réduction	46
3.5	Cinquième réduction	46
3.6	La démonstration	47
 III Une R-matrice universelle pour $U_h(D_x)$		49
	Introduction	49
1	Énoncé du théorème principal et application	50
1.1	Rappels sur les superalgèbres de Hopf	50
1.2	La superalgèbre de Lie D_x	53
1.3	La quantification $U_h(D_x)$	53
1.4	Résultat principal	55
1.5	Application	56

2	Construction d'un double quantique généralisé	58
2.1	Préliminaires techniques	58
2.2	La superalgèbre de Hopf \mathcal{D}	65
3	R-matrice universelle	66
3.1	Relations dans \mathcal{D}	66
3.2	Démonstration du théorème 1.1	70
	 Bibliographie	 78

Introduction

Les travaux de recherche qui ont conduit à cette thèse se placent dans le domaine des groupes quantiques et de leur lien avec la topologie des nœuds. Les groupes quantiques ont été introduits vers 1983–1985 par V. Drinfeld et M. Jimbo [6, 13]. Il s’agit d’algèbres de Hopf qui sont des déformations à un paramètre q des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples complexes. Ces algèbres de Hopf possèdent ce que l’on appelle une R -matrice universelle; celle-ci induit des solutions de la fameuse équation de Yang-Baxter sur toute représentation de l’algèbre, et donne lieu à une infinité de représentations des groupes de tresses d’Artin.

À la suite des travaux de Vaughan Jones [15] qui l’ont amené à découvrir un nouvel invariant des nœuds en 1984, V. Turaev [48] a montré comment les groupes quantiques permettaient non seulement de redéfinir l’invariant de Jones, mais encore de construire des familles infinies nouvelles d’invariants de nœuds. Ce lien inattendu et spectaculaire entre la théorie purement algébrique des groupes quantiques et la topologie est essentiellement dû à l’existence de ce que Turaev a appelé une structure tressée et rubanée sur la catégorie des représentation d’un groupe quantique. Par la suite Reshetikhin et Turaev [41] ont étendu les invariants quantiques aux variétés de dimension trois, donnant ainsi une justification rigoureuse aux prédictions du physicien E. Witten. Leur extension nécessite l’étude des groupes quantiques dans le cas où le paramètre q est une racine de l’unité, c’est-à-dire un cas où les représentations ne sont plus semisimples, et où il s’agit de ne retenir qu’un nombre fini de représentations irréductibles et de rejeter essentiellement toutes celles dont la “dimension quantique” est nulle.

Autour de 1989, V. A. Vassiliev [50] a défini une importante classe d’invariants de nœuds, appelés maintenant “invariants de Vassiliev.” Un certain nombre de mathématiciens ont rapidement établi que les invariants quantiques font partie de la classe des invariants de Vassiliev. En 1991, Kontsevich [26] a démontré que les invariants de Vassiliev sont classifiés à l’aide d’objets combinatoires qu’on appelle des “systèmes de poids”. Il résulte des travaux de Bar-Natan, Kassel, Le-Murakami que les systèmes de poids correspondant aux invariants quantiques proviennent des algèbres de Lie semisimples.

La thèse est composée de trois parties.

La première partie est formée d’un texte publié sous forme d’article [47]. On considère le cas du groupe quantique $U_q(sl_2)$ lorsque le paramètre q est une racine de l’unité. Comme on l’a dit plus haut, la catégorie des modules de $U_q(sl_2)$ n’est pas semisimple dans ce cas. On peut la forcer à être semisimple en éliminant ce que Turaev a appelé les modules “négligeables” (essentiellement ceux dont la “dimension quantique” est nulle). Dans [49], page 572, Turaev a conjecturé (Problème 24) que la catégorie de modules de $U_q(sl_2)$ est équivalente, après “semisimplification”, à une catégorie de diagrammes planaires (“skein category”) associée au crochet de Kauffman. Le but de la première partie de la thèse est de démontrer cette conjecture.

À cet effet, nous construisons un foncteur monoïdal de la catégorie des diagrammes planaires vers celle des modules et nous montrons que c’est une équivalence de catégories. Plus

précisément, soit $\mathcal{S}(a)$ la catégorie dont les objets sont les entiers positifs et les morphismes sont des combinaisons linéaires d'enchevêtrements (“tangles”) modulo la relation d'écheveau de Kauffman

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = a \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + a^{-1} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} .$$

Les algèbres d'endomorphismes dans la catégorie $\mathcal{S}(a)$ sont les fameuses algèbres de Temperley-Lieb. Dans le livre mentionné plus haut, Turaev construit une catégorie rubanée $\mathcal{V}(a)$ à partir de $\mathcal{S}(a)$ en lui rajoutant les images des projecteurs de Jones-Wenzl. Notons $\overline{\mathcal{V}}(a)$ la catégorie obtenue de $\mathcal{V}(a)$ en éliminant les objets et morphismes négligeables. De même, si $\mathcal{R}(q)$ est la catégorie rubanée de $U_q(sl_2)$ -modules de dimension finie engendrée par les modules simples, on note $\overline{\mathcal{R}}(q)$ la catégorie obtenue en éliminant les objets et les morphismes négligeables. Le résultat principal de la première partie de cette thèse est le suivant.

Théorème 1 *Soit a un nombre complexe et $q = a^2$.*

(a) *Si a et q ne sont pas des racines de l'unité, il existe une équivalence de catégories $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \rightarrow \mathcal{R}(q)$.*

(b) *Si a est une racine primitive $4r$ -ième de l'unité avec $r \geq 3$, il existe une équivalence de catégories $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}(q)$.*

Les foncteurs $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ réalisant les équivalences préservent les structures rubanées.

Le point central de la démonstration du théorème 1 consiste à étudier les morphismes de la catégorie $\mathcal{V}(a)$. Il s'agit de construire une base pour chaque espace de morphismes entre deux objets de $\mathcal{V}(a)$, et de montrer qu'on peut lire sur ces morphismes la formule de Clebsch-Gordan pour la décomposition des produits tensoriels des $U_q(sl_2)$ -modules simples en somme directe de modules simples.

La deuxième partie de la thèse est une application de la première. En 1991, Kirby et Melvin [24] ont établi ce qu'ils appellent un “principe de symétrie” pour l'invariant de Reshetikhin-Turaev associé à un module simple du groupe quantique $U_q(sl_2)$ lorsque le paramètre q est une racine primitive $2r$ -ième de l'unité. Notons V_k ($0 \leq k \leq r-2$) le $U_q(sl_2)$ -module simple de plus haut poids q^k et de dimension $k+1$. Soit L un entrelacs parallélisé (“framed”) dont on colorie chaque composante connexe par un des modules simples V_0, \dots, V_{r-2} . Distinguons une composante K de L et soit V_k sa couleur. Nous notons $J_{L,K;k}$ l'invariant de Reshetikhin-Turaev correspondant à cette donnée. En utilisant la théorie des représentations de $U_q(sl_2)$, Kirby et Melvin ont montré que $J_{L,K;k}$ et $J_{L,K;r-2k}$ sont égaux à multiplication par un scalaire près. Comme, d'après la première partie de la thèse, la théorie des représentations de $U_q(sl_2)$ admet une description topologique, il était naturel de se demander si le “principe de symétrie” de Kirby et Melvin pouvait se démontrer de manière purement topologique. Le but de la deuxième partie de cette thèse est de répondre à cette question par l'affirmative.

Nous donnons de la formule de Kirby-Melvin la version suivante.

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2-k} = i \sum_{\ell_j \equiv 1 \pmod{2}}^{2r+2} \text{lk}(K, L_j) + \text{lk}(K, K)(3r-2-2k) \mathcal{J}_{L/K; k} . \quad (1)$$

Dans cette formule, i est une racine carrée de -1 , $(L_j)_j$ est la famille des composantes connexes de L différentes de la composante distinguée K , $(V_{\ell_j})_j$ est le coloriage de $(L_j)_j$, et pour tout couple de nœuds (K_1, K_2) , l'entier $\text{lk}(K_1, K_2)$ est le nombre d'enlacement de K_1 avec K_2 .

La démonstration que nous proposons pour la formule (1) se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, on remarque que dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$ du §1 on a un isomorphisme de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules

$$V_{r-2-k} \cong V_k \otimes V_{r-2}.$$

De plus, d'après le théorème 1, l'invariant d'un nœud K colorié par un module simple V_k est le même que l'invariant de l'entrelacs, colorié par le module fondamental V_1 , composé d'un câblage de k copies de K et du k -ième idempotent de Jones-Wenzl. En utilisant les formules de récurrence connues pour ces idempotents, on montre par plusieurs réductions successives qu'il suffit d'établir la formule (1) pour $k = 0$. Le théorème 1 permet également de se restreindre au cas où toutes les autres composantes de L sont coloriées par V_1 . On achève la démonstration à l'aide de la relation d'écheveau de Kauffman. Cette démonstration illustre une fois de plus la force du calcul graphique qui a été développé ces dernières années dans les interactions entre groupes quantiques et topologie.

La troisième partie est purement algébrique et porte sur la quantification d'une certaine superalgèbre de Lie. Les superalgèbres de Lie sont des algèbres de Lie graduées par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; elles ont été classifiées dans les années 1970 par Victor Kac [17]. La classification fait apparaître ce que l'on peut appeler des superalgèbres "classiques" comme $\mathfrak{sl}(n|m)$, $\mathfrak{osp}(n|m)$, mais aussi des superalgèbres "exceptionnelles" comme la superalgèbre de Lie $D(2, 1, x)$ (que nous noterons D_x) qui est la seule à dépendre d'un paramètre continu x . La superalgèbre D_x joue un rôle particulier en physique (elle fournit la seule TQFT de Chern-Simons pour laquelle la CFT de dimension deux correspondante a une supersymétrie $N = 4$) et dans la théorie des invariants de Vassiliev (voir les travaux récents de Pierre Vogel et de Jens Lieberum).

Après les algèbres de Lie semisimples, les superalgèbres de Lie ont également été quantifiées (par Gould *et al.*, Leites *et al.*, Scheunert, etc.). Les quantifications obtenues sont des superalgèbres de Hopf munies de bases de type Poincaré-Birkhoff-Witt.

Pour ce qui est de l'existence d'une R -matrice universelle pour les supergroupes quantiques, elle a été établie pour les quantifications de toutes les superalgèbres de Lie classifiées par Kac, à l'exception précisément de D_x . La troisième partie est consacrée à la construction explicite d'une R -matrice universelle pour la quantification $U_h(D_x)$.

La méthode utilisée est celle du double quantique introduite par Drinfeld, méthode dont se sont servis Marc Rosso [43], Kirillov-Reshetikhin [25] et Levendorsky-Soibelman [30] dans le cas des groupes quantiques. Cette méthode s'étend au cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué. Nous définissons des analogues $\{E_{\beta_1}, \dots, E_{\beta_\tau}\}$ des vecteurs de racines positives et des analogues $\{F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_\tau}\}$ des vecteurs de racines négatives. Nous construisons un accouplement de Hopf entre U_+ et U_- où U_+ (resp. U_-) est la sous-superalgèbre de Hopf de $U_h(D_x)$ engendrée par $E_{\beta_1}, \dots, E_{\beta_\tau}$ (resp. par $F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_\tau}$). Ensuite, nous calculons les relations de commutation entre les vecteurs de racines ainsi que leur coproduit. Ceci nous permet de construire des bases de U_+ et U_- ,

duales pour l'accouplement de Hopf. Nous en déduisons la formule suivante pour une R -matrice universelle pour $U_h(D_x)$.

Théorème 2 *L'élément*

$$R = \exp_1 \left(\frac{E_{\beta_1} \otimes F_{\beta_1}}{\varphi_1} \right) \cdots \exp_7 \left(\frac{E_{\beta_7} \otimes F_{\beta_7}}{\varphi_7} \right) \exp \left(\frac{h}{2} \left(\sum_{i,j} b_{ij} H_i \otimes H_j \right) \right)$$

est une R -matrice universelle pour $U_h(D_x)$, où $\varphi_1, \dots, \varphi_7$ sont des constantes que nous ne précisons pas ici.

En application, nous calculons à l'aide de Maple une solution de l'équation de Yang-Baxter dans le carré tensoriel d'un $U_h(D_x)$ -module topologiquement libre de rang six sur l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[h]]$.

Première partie

Description topologique des représentations de $U_q(sl_2)$

Introduction

Dans cette partie nous résolvons un problème soulevé par V. Turaev en montrant que la catégorie des représentations de sl_2 ou de son algèbre enveloppante quantique peut se décrire à l'aide de diagrammes planaires.

Le lien entre la théorie des groupes quantiques et la théorie des nœuds est maintenant bien établi. Rappelons que les groupes quantiques ont été introduits autour de 1983–85 par Drinfeld et Jimbo. Ce sont des déformations à un paramètre des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples. La théorie des représentations des groupes quantiques peut être considérée comme une généralisation puissante et féconde de la théorie classique des représentations des algèbres de Lie semisimples. Les représentations des groupes quantiques forment ce que Turaev a appelé une catégorie rubanée, c'est-à-dire une catégorie qui possède un produit tensoriel, un tressage et une dualité, ce qui permet d'étendre la notion de trace à ce cadre. Ce sont ces caractéristiques qui expliquent qu'à partir d'une telle catégorie on peut construire des invariants d'entrelacs qui généralisent le célèbre invariant construit par Vaughan Jones en 1984. La construction d'invariants topologiques à partir des groupes quantiques et, plus généralement, de catégories rubanées est due à Reshetikhin et Turaev [41].

Si les groupes quantiques ont des applications spectaculaires en théorie des nœuds et en topologie en dimension 2 et 3, le problème de savoir si on peut complètement décrire les représentations des groupes quantiques et même des groupes classiques en termes d'objets géométriques comme les nœuds, les tresses ou leurs projections planaires reste largement ouvert. Le propos de cette partie est de s'attaquer au cas le plus simple, c'est-à-dire à celui de l'algèbre de Lie semisimple sl_2 et de son avatar quantique. Nous construisons ici une équivalence de catégories entre une catégorie de représentations de l'algèbre enveloppante quantique de sl_2 et une catégorie $\mathcal{V}(a)$ construite par Turaev [49], chap. XII, dans laquelle les morphismes sont engendrés par les diagrammes planaires. Cette équivalence préserve les structures rubanées qui existent aussi bien du côté des représentations que du côté topologique. Nous démontrons une telle équivalence pour toutes les valeurs "génériques" du paramètre q qui entre dans la définition de l'algèbre enveloppante quantique de sl_2 ainsi que lorsque q est une racine de l'unité d'ordre pair ≥ 6 .

Lorsque ce paramètre est une racine de l'unité différente de 1, on sait que la catégorie des représentations d'une algèbre enveloppante quantique n'est plus semisimple. Lusztig a conjecturé une correspondance entre les représentations des groupes quantiques aux racines de l'unité et les représentations modulaires du groupe algébrique correspondant. Malgré la

complexité de la catégorie des représentations pour q racine de l'unité, nous en obtenons néanmoins une description topologique à condition de nous débarrasser de ce que Turaev appelle les modules négligeables. Ces derniers sont des modules sur lesquelles la trace est identiquement nulle et apparaissent, par exemple, dans les travaux de Reshetikhin et Turaev [41].

La catégorie $\mathcal{V}(a)$ de Turaev est une élaboration des fameuses algèbres de Temperley-Lieb [46] utilisant les idempotents de Jones-Wenzl [14, 52]. Le rapport entre les algèbres de Temperley-Lieb et les invariants quantiques n'est pas nouveau. Il apparaît par exemple dans les travaux de [8, 16, 20, 24, 31, 32, 48]. T. Kerler [22] a montré que la catégorie des représentations de $U_q(sl_2)$ est déterminée par son groupe de Grothendieck, à ce que Kazhdan et Wenzl [21] appellent un "twisting" près (*cf.* [21] pour une extension du résultat de Kerler à une algèbre de Lie semisimple générale). Comme conséquence, la catégorie de représentations de $U_q(sl_2)$ que nous considérons est équivalente à une version "tordue" de la catégorie de Turaev. Dans cette partie, nous obtenons un résultat plus fort qui se passe de "twisting" en construisant explicitement une équivalence de catégories. L'énoncé principal du texte est le théorème 2.1.

Le plan est le suivant. Au §1, après un bref rappel sur les catégories rubanées, nous résumons la théorie des représentations de $U_q(sl_2)$ aussi bien dans le cas générique que celui des racines de l'unité. Au §2, nous introduisons les diagrammes planaires, la catégorie $\mathcal{V}(a)$ et nous énonçons le théorème principal. Nous construisons un foncteur $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{V}(a)$ vers la catégorie des représentations de $U_q(sl_2)$ au §3. Le §4 est consacré à une courte étude des morphismes de la catégorie $\mathcal{V}(a)$ et à des rappels sur la formule de Clebsch-Gordan. La démonstration que $\tilde{\mathcal{F}}$ est une équivalence de catégories est donnée au §5 pour le cas générique et au §6 pour le cas d'une racine de l'unité.

1 Représentations de $U_q(sl_2)$

Nous rappelons les propriétés des représentations de $U_q(sl_2)$ dont nous aurons besoin par la suite. Il est commode de les formuler en utilisant le langage des catégories rubanées. Le contenu des §§1.1-1.3 est tiré de [18, 19, 49].

1.1 Catégories monoïdales

Rappelons qu'une *catégorie monoïdale* est une catégorie \mathcal{C} munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et d'un objet I , appelé *objet unité*, tels que

$$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W), \quad (1.1)$$

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h), \quad (1.2)$$

$$V \otimes I = V = I \otimes V, \quad (1.3)$$

$$f \otimes \text{id}_I = f = \text{id}_I \otimes f, \quad (1.4)$$

pour tous les objets U, V, W et tous les morphismes f, g, h de \mathcal{C} .

Ce que nous venons de définir est usuellement appelé une catégorie monoïdale stricte. Les catégories de représentations que nous considérerons ne sont évidemment pas strictes et il conviendrait de remplacer les égalités (1.1)-(1.4) par des isomorphismes naturels appropriés. L'abus que nous commettons en ne le faisant pas est justifié par le théorème de cohérence de MacLane qui donne la méthode pour passer d'une catégorie monoïdale arbitraire à une catégorie monoïdale stricte, *cf.* [39].

Les catégories monoïdales que nous considérerons par la suite sont \mathbb{C} -linéaires, où \mathbb{C} désigne le corps des nombres complexes. Cela signifie que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel pour tout couple d'objets (V, W) de \mathcal{C} et que la composition et le produit tensoriel des morphismes sont bilinéaires.

Par la suite, nous appellerons *catégorie tensorielle* toute catégorie monoïdale \mathbb{C} -linéaire telle que l'espace vectoriel $\text{End}_{\mathcal{C}}(I)$ est de dimension 1.

Soient $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ et $(\mathcal{C}', \otimes, I')$ des catégories tensorielles. Nous dirons qu'un foncteur $\mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ *conserve les structures tensorielles* si les conditions suivantes sont réalisées :

1. Pour tout couple (x, y) d'objets de \mathcal{C} , l'application

$$\mathcal{G} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(y))$$

est \mathbb{C} -linéaire.

2. $\mathcal{G}(x \otimes y) = \mathcal{G}(x) \otimes \mathcal{G}(y)$ pour tout couple (x, y) d'objets et de morphismes de \mathcal{C} ;
3. $\mathcal{G}(I) = I'$ et \mathcal{G} réalise un isomorphisme de $\text{End}_{\mathcal{C}}(I)$ sur $\text{End}_{\mathcal{C}'}(I')$;

1.2 Catégories rubanées

Soit \mathcal{C} une catégorie tensorielle, d'objet unité I . Un *tressage* est une famille d'isomorphismes naturels $c = (c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V)$, où V, W décrivent l'ensemble des objets de \mathcal{C} , telle que

$$c_{U \otimes V, W} = (c_{U,W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}) \quad \text{et} \quad c_{U, V \otimes W} = (\text{id}_U \otimes c_{V,W})(c_{U,V} \otimes \text{id}_W)$$

pour tous les objets U, V, W de \mathcal{C} . Nous dirons que \mathcal{C} est munie d'une *dualité* si à tout objet V on a associé un objet V^* , appelé *dual* de V , et des morphismes $b_V : I \rightarrow V \otimes V^*$ et $d_V : V^* \otimes V \rightarrow I$ dans \mathcal{C} tels que

$$(\text{id}_V \otimes d_V)(b_V \otimes \text{id}_V) = \text{id}_V \quad \text{et} \quad (d_V \otimes \text{id}_{V^*})(\text{id}_{V^*} \otimes b_V) = \text{id}_{V^*}. \quad (1.5)$$

Enfin, une *torsion* dans \mathcal{C} est une famille d'isomorphismes naturels $\theta = (\theta_V : V \rightarrow V)$, où V décrit l'ensemble des objets de \mathcal{C} , telle que

$$\theta_{V \otimes W} = c_{V,W} c_{W,V} (\theta_V \otimes \theta_W)$$

pour tous les objets V, W de \mathcal{C} .

Une *catégorie rubanée* est une catégorie tensorielle \mathcal{C} munie d'un tressage c , d'une dualité $(*, b, d)$ et d'une torsion θ telle que

$$(\theta_V \otimes \text{id}_{V^*})b_V = (\text{id}_V \otimes \theta_{V^*})b_V$$

pour tout objet V de \mathcal{C} .

1.3 Morphismes négligeables

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I, c, *, \theta)$ une catégorie rubanée, V un objet de \mathcal{C} et f un endomorphisme de V . La *trace quantique* de f est l'élément de $\text{End}_{\mathcal{C}}(I)$ défini par

$$\text{tr}_q(f) = d_V c_{V, V^*} (\theta_V f \otimes \text{id}_{V^*}) b_V. \quad (1.6)$$

La trace quantique jouit des propriétés suivantes :

1. Pour tous les morphismes $f : V \rightarrow W$, $g : W \rightarrow V$, nous avons $\text{tr}_q(fg) = \text{tr}_q(gf)$.
2. Pour tous les endomorphismes f, g d'objets de \mathcal{C} , nous avons $\text{tr}_q(f \otimes g) = \text{tr}_q(f) \text{tr}_q(g)$.
3. Pour tout endomorphisme k de I , nous avons $\text{tr}_q(k) = k$.

Un morphisme $f : V \rightarrow W$ dans \mathcal{C} est dit *négligeable* si $\text{tr}_q(fg) = 0$ pour tout $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V)$. Un objet V de \mathcal{C} est dit *négligeable* si son morphisme identité est négligeable, *i.e.* $\text{tr}_q(f) = 0$ pour tout endomorphisme f de V . Il en résulte que, pour tout objet W de \mathcal{C} , tout morphisme de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V)$ est négligeable si V est négligeable. La composition et le produit tensoriel d'un morphisme négligeable avec n'importe quel autre morphisme est un morphisme négligeable. Nous en déduisons que le produit tensoriel d'un objet négligeable avec n'importe quel autre objet est un objet négligeable, *cf.* [49], chap. XI.

Nous notons $\text{Negl}_{\mathcal{C}}(V, W)$ le sous-espace vectoriel de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ des morphismes négligeables et posons $\text{hom}_{\mathcal{C}}(V, W) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) / \text{Negl}_{\mathcal{C}}(V, W)$. Nous pouvons alors définir une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ ayant les mêmes objets que \mathcal{C} et telle que $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(V, W) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ pour tout couple (V, W) d'objets de \mathcal{C} . Turaev ([49], chap. XI) appelle cette catégorie la catégorie purifiée de \mathcal{C} . Par construction, $\overline{\mathcal{C}}$ est une catégorie rubanée qui n'admet pas de morphismes négligeables non nuls.

1.4 Rappels sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Pour plus de détails, voir [5, 4, 12, 18, 19, 41, 49]. Soit q un nombre complexe différent de ± 1 . L'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est l'algèbre engendrée sur \mathbb{C} par K, K^{-1}, X et Y et les relations

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K = 1, \\ KXK^{-1} &= q^2X, \quad KYK^{-1} = q^{-2}Y, \\ XY - YX &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

L'algèbre $U_q(sl_2)$ est une algèbre de Hopf dont la comultiplication Δ , la coïunité ε et l'antipode S sont déterminées par

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= 1 \otimes X + X \otimes K, & \Delta(Y) &= K^{-1} \otimes Y + Y \otimes 1, & \Delta(K) &= K \otimes K, \\ S(X) &= -XK^{-1}, & S(Y) &= -KY, & S(K) &= K^{-1} \\ \varepsilon(X) &= 0, & \varepsilon(Y) &= 0, & \varepsilon(K) &= 1. \end{aligned}$$

Nous supposons que q est un nombre complexe générique (c'est à dire non racine de l'unité) ou bien une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, où r est un entier, $r \geq 3$. On définit $\tilde{J} = \tilde{J}(q)$ comme l'ensemble des entiers ≥ 0 si q est générique et comme l'ensemble fini $\{0, \dots, r-2\}$ si q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité. Pour tout entier $n \in \tilde{J}$ il existe un $U_q(sl_2)$ -module simple V_n de dimension $n+1$, isomorphe à son dual. Lorsque q est générique, tout $U_q(sl_2)$ -module simple est isomorphe à un module V_n , au produit tensoriel par un module de dimension 1 près, cf. [37, 42]. Lorsque q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, tout module simple de dimension $n < r$ est isomorphe à V_n , au produit tensoriel par un module de dimension 1 près. En outre, il n'y a pas de module simple de dimension $n > r$ (cf. par exemple [5, 18]).

Notons $\mathcal{R}(q)$ la sous-catégorie pleine des $U_q(sl_2)$ -modules de dimension finie dont les objets sont les produits tensoriels des modules simples V_n . Notre but est de décrire topologiquement la catégorie rubanée $\overline{\mathcal{R}}(q)$ associée à $\mathcal{R}(q)$ par la procédure de purification décrite au §1.3. On notera que, si q est générique, alors $\overline{\mathcal{R}}(q) = \mathcal{R}(q)$. En effet, lorsque q est générique, la catégorie des $U_q(sl_2)$ -modules de dimension finie est semisimple. Par conséquent, d'après [49], chap. XI, il n'y a pas de morphisme négligeable non nul entre $U_q(sl_2)$ -modules de dimension finie. Nous appellerons *sous-catégorie paire* de $\mathcal{R}(q)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}(q)$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}(q)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}(q)$) dont les objets sont les produits tensoriels $V_{n_1} \otimes \dots \otimes V_{n_p}$ tels que $n_1 + \dots + n_p \equiv 0 \pmod{2}$.

2 Énoncé du théorème principal

Le but de ce paragraphe est de définir la catégorie $\mathcal{V}(a)$ de Turaev et d'énoncer le théorème qui la relie aux catégories $\mathcal{R}(q)$ et $\overline{\mathcal{R}}(q)$ introduites précédemment.

2.1 Diagrammes

Soient k et ℓ deux entiers positifs. Un *diagramme* de type (k, ℓ) consiste en un nombre fini d'arcs et de cercles immergés dans la bande $\mathbb{R} \times [0, 1]$. On suppose que l'immersion n'admet que des points doubles ordinaires et que les extrémités des arcs sont k points distincts fixés sur la droite $\mathbb{R} \times 0$ (les "entrées") et ℓ points distincts fixés sur la droite $\mathbb{R} \times 1$ (les "sorties"). A chaque croisement on distingue un brin passant dessus et un brin passant dessous. De plus, les diagrammes sont considérés à isotopie de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ fixant les bords près et conservant les croisements et les passages supérieurs et inférieurs.

Fixons un nombre complexe a non nul. On définit alors $E_{k,\ell}$ comme l'espace vectoriel sur \mathbb{C} engendré par les classes d'isotopie des diagrammes de type (k, ℓ) modulo les relations suivantes :

$$\mathcal{D} \cup \bigcirc = -(a^2 + a^{-2}) \mathcal{D}, \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = a \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \left(+ a^{-1} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right). \quad (2.2)$$

Dans la première relation, $\mathcal{D} \cup \bigcirc$ est la classe d'isotopie de l'union disjointe du diagramme \mathcal{D} et d'un cercle. La deuxième relation lie trois diagrammes qui sont égaux sauf dans un disque du plan où ils sont comme indiqué. Cette relation s'appelle la *relation de Kauffman*. Il est connu (cf. [20]) que l'espace $E_{k,\ell}$ a pour base l'ensemble des classes d'isotopie des diagrammes *simples*, c'est-à-dire ceux qui ne contiennent ni croisements, ni cercles.

2.2 La catégorie de Temperley-Lieb

Nous sommes maintenant en mesure de définir la catégorie de Temperley-Lieb $\mathcal{S}(a)$. Ses objets sont les entiers naturels. Un morphisme $k \rightarrow \ell$ est un élément de $E_{k,\ell}$. Lorsque \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont des diagrammes de type respectif (ℓ, m) et (k, ℓ) , la composition $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$ est le diagramme de type (k, m) obtenu en posant \mathcal{D}_1 au-dessus de \mathcal{D}_2 et en collant chaque sortie de \mathcal{D}_2 à l'entrée correspondante de \mathcal{D}_1 . Cette opération s'étend par linéarité à tous les morphismes. Le morphisme identité de l'objet k est la classe d'isotopie du diagramme simple à k brins verticaux.

On munit $\mathcal{S}(a)$ d'une structure de catégorie monoïdale de la manière suivante. Le produit tensoriel de deux objets k, ℓ est leur somme : $k \otimes \ell = k + \ell$. L'objet unité est 0. Le produit tensoriel de deux diagrammes $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$ est donné par la juxtaposition de ces deux diagrammes, \mathcal{D}_1 étant placé à gauche de \mathcal{D}_2 . Cette opération est étendue à tous les morphismes par linéarité. La catégorie $\mathcal{S}(a)$ est tensorielle car $E_{0,0}$ est isomorphe à \mathbb{C} . Elle est munie d'une structure rubanée pour laquelle tout objet est autodual : $k^* = k$, et les morphismes de structures $c_{n,m}$, θ_n , b_n et d_n sont définis par les diagrammes de la figure 1.

$$c_{n,m} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \quad , \quad \theta_n = (-1)^n \begin{array}{c} \text{diagramme de torsion} \\ \text{à } n \text{ brins} \end{array} \quad , \quad b_n = \begin{array}{c} \text{diagramme de brins } n \\ \text{en forme de U} \end{array} \quad , \quad d_n = \begin{array}{c} \text{diagramme de brins } n \\ \text{en forme de U inversé} \end{array} .$$

Figure 1.

Remarque. Nous introduisons un signe dans la définition de la torsion de la catégorie $\mathcal{S}(a)$ afin qu'elle corresponde à celle de la catégorie $\mathcal{R}(q)$.

2.3 Les idempotents de Jones-Wenzl

Il est bien connu (cf. [49], XII.3 et XII.4, [52]) que, pour $k \geq 1$, l'algèbre de Temperley-Lieb $E_k = E_{k,k}$ est engendrée par les $k - 1$ éléments e_1, \dots, e_{k-1} où e_i est le diagramme simple défini par la figure 2. Pour chaque k strictement inférieur à l'ordre de a^4 , l'algèbre E_k contient un idempotent central particulier, appelé l'idempotent de Jones-Wenzl: il est défini comme l'unique élément $f_k \in E_k$ tel que $f_k - 1_k$ soit un polynôme non commutatif sans terme constant en e_1, \dots, e_{k-1} et tel que $f_k e_i = e_i f_k = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k - 1$.

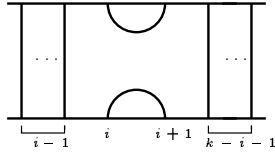


Figure 2.

2.4 La catégorie de Turaev

Nous supposons que le nombre complexe a est générique ou qu'il est une racine $4r^{\text{ème}}$ de l'unité où $r \geq 3$. L'ensemble $J = J(a)$ est défini comme l'ensemble des entiers ≥ 1 si a est générique et comme l'ensemble fini $\{1, 2, \dots, r - 2\}$ si a est une racine $4r^{\text{ème}}$ de l'unité.

Dans [49], chap. XII, Turaev a construit une catégorie $\mathcal{V}(a)$ dont les objets sont les suites finies $s = (n_1, \dots, n_m)$ d'éléments de J , y compris la suite vide \emptyset . Pour une telle suite, on pose $|s| = n_1 + \dots + n_m$ et

$$f_s = f_{n_1} \otimes \dots \otimes f_{n_m} \in E_{|s|}. \quad (2.3)$$

On convient que $f_\emptyset = 1 \in E_0$. Les morphismes de $\mathcal{V}(a)$ sont des morphismes particuliers de $\mathcal{S}(a)$. Soient s et s' des objets de $\mathcal{V}(a)$. Pour tout morphisme $g \in E_{|s|, |s'|}$, on pose

$$\hat{g} = f_{s'} g f_s \in E_{|s|, |s'|}. \quad (2.4)$$

On obtient ainsi un endomorphisme idempotent $g \mapsto \hat{g} : E_{|s|, |s'|} \rightarrow E_{|s|, |s'|}$. Nous définissons alors $\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s')$ comme l'image de cet endomorphisme :

$$\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s') = \hat{E}_{|s|, |s'|} = \{\hat{g}, \quad g \in E_{|s|, |s'|}\}. \quad (2.5)$$

La composition des morphismes dans $\mathcal{V}(a)$ est induite par celle dans $\mathcal{S}(a)$.

La catégorie $\mathcal{V}(a)$ est une catégorie rubanée au sens du §1.2. Le produit tensoriel de deux objets s, s' est la concaténation ss' des suites. L'objet unité est la suite vide. Le produit tensoriel des morphismes est induit par celui des morphismes de $\mathcal{S}(a)$. Si s et s' sont des objets de $\mathcal{V}(a)$, le tressage $c_{s, s'} : s \otimes s' \rightarrow s' \otimes s$ est donné par

$$c_{s, s'} = \hat{c}_{|s|, |s'|} = (f_{s'} \otimes f_s) c_{|s|, |s'|} (f_s \otimes f_{s'}). \quad (2.6)$$

Le dual s^* d'un objet $s = (n_1, \dots, n_m)$ est $s^* = (n_m, \dots, n_1)$. Les morphismes $b_s : \mathbb{C} \rightarrow s \otimes s^*$, $d_s : s^* \otimes s \rightarrow \mathbb{C}$ et la torsion $\theta_s : s \rightarrow s$ sont définis par

$$b_s = \widehat{b}_{|s|} = (f_s \otimes f_{s^*})b_{|s|}, \quad (2.7)$$

$$d_s = \widehat{d}_{|s|} = d_{|s|}(f_{s^*} \otimes f_s), \quad (2.8)$$

$$\theta_s = \widehat{\theta}_{|s|} = f_s \theta_{|s|} f_s. \quad (2.9)$$

Nous noterons $\overline{\mathcal{V}}(a)$ la catégorie rubanée obtenue à partir de $\mathcal{V}(a)$ en annulant les morphismes négligeables comme au §1.3. Turaev introduit également la sous-catégorie paire de $\mathcal{V}(a)$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}(a)$) qui est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}(a)$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}(a)$) dont les objets sont les suites s telles que $|s|$ soit paire. Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette partie. C'est une réponse au problème 24 soulevé par Turaev dans [49], p. 572.

Théorème 2.1 *Soit a un nombre complexe et $q = a^2$. Alors*

1. *si a et q sont génériques, il existe une équivalence de catégories $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \rightarrow \mathcal{R}(q)$;*
2. *si a est une racine primitive $4r^{\text{ème}}$ de l'unité avec $r \geq 3$ et q une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, il existe une équivalence de catégories $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}(q)$.*

Les foncteurs $\widetilde{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ réalisant les équivalences conservent les structures rubanées, et l'image de la sous-catégorie paire de $\mathcal{V}(a)$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}(a)$) est la sous-catégorie paire de $\mathcal{R}(q)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}(q)$).

La première partie du théorème sera démontrée au §5, la seconde au §6.

3 Construction d'un foncteur $\mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathcal{R}(q)$

Nous fixons pour toute la suite deux nombres complexes a et q tels que $q = a^2$. Nous supposons en outre que a est soit générique, soit une racine primitive $4r^{\text{ème}}$ de l'unité avec $r \geq 3$. En reprenant les notations des §1.4 et §2.4, nous avons $\widetilde{J} = J \cup \{0\}$. Nous noterons $U_q\text{-Mod}$ la catégorie des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de dimension finie.

Nous commençons par rappeler quelques propriétés du *module fondamental* V_1 de dimension 2, que nous noterons V .

3.1 Le module fondamental de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Le module fondamental V admet une base (v_0, v_1) telle que

$$\begin{aligned} K v_0 &= q v_0, & X v_0 &= 0, & Y v_0 &= v_1, \\ K v_1 &= q^{-1} v_1, & X v_1 &= v_0, & Y v_1 &= 0. \end{aligned}$$

Soit (v^0, v^1) la base duale de (v_0, v_1) . Nous faisons le choix d'une racine carrée $q^{1/2}$ de q . Le tressage $c_{V,V} \in \text{End}_{\mathcal{R}(q)}(V \otimes V)$ est donné dans la base (v_0, v_1) par

$$c_{V,V}(v_0 \otimes v_0) = q^{1/2} v_0 \otimes v_0, \quad c_{V,V}(v_0 \otimes v_1) = q^{-1/2} v_1 \otimes v_0, \quad (3.1)$$

$$c_{V,V}(v_1 \otimes v_1) = q^{1/2} v_1 \otimes v_1, \quad c_{V,V}(v_1 \otimes v_0) = q^{-1/2} v_0 \otimes v_1 + q^{-1/2}(q - q^{-1}) v_1 \otimes v_0. \quad (3.2)$$

Les morphismes $b_V : \mathbb{C} \rightarrow V \otimes V^*$ et $d_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$ sont donnés par

$$b_V(1) = v_0 \otimes v^0 + v_1 \otimes v^1 \quad \text{et} \quad d_V(v^i \otimes v_j) = \delta_{ij}. \quad (3.3)$$

Enfin la torsion $\theta_V : V \rightarrow V$ est donnée par

$$\theta_V = q^{3/2} \text{id}_V. \quad (3.4)$$

Au §3.2, nous construisons un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \rightarrow U_q\text{-Mod}$ conservant les structures rubanées. La catégorie $\mathcal{S}(a)$ étant auto-duale, alors que la catégorie $U_q\text{-Mod}$ ne l'est pas (mais tout module est isomorphe à son dual), nous devons faire le choix d'un isomorphisme entre le module fondamental V et son dual. On définit le morphisme de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules $\alpha : V \rightarrow V^*$ par

$$\alpha(v_0) = v^1 \quad \text{et} \quad \alpha(v_1) = -q^{-1}v^0. \quad (3.5)$$

Il est aisé de voir que α est un isomorphisme. Posons également $d = d_V(\alpha \otimes \text{id}_V) : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$ et $b = (\text{id}_V \otimes \alpha^{-1})b_V : \mathbb{C} \rightarrow V \otimes V$, qui vérifient

$$\begin{aligned} b(1) &= v_1 \otimes v_0 - q v_0 \otimes v_1, & d(v_0 \otimes v_0) &= d(v_1 \otimes v_1) = 0, \\ d(v_0 \otimes v_1) &= 1, & d(v_1 \otimes v_0) &= -q^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Des calculs élémentaires montrent alors que

$$db = -(q + q^{-1}), \quad (3.7)$$

$$c_{V,V} = q^{1/2} \text{id}_{V \otimes V} + q^{-1/2} bd. \quad (3.8)$$

3.2 Un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \rightarrow U_q\text{-Mod}$

Nous voulons définir un foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \rightarrow \mathcal{R}(q)$, conservant les structures tensorielles et les structures rubanées. Pour cela, nous rappelons la construction bien connue d'un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \rightarrow U_q\text{-Mod}$ (prop. 3.1), conservant les structures tensorielles, ainsi que les structures rubanées.

Proposition 3.1 *Il existe un unique foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \rightarrow U_q\text{-Mod}$ conservant les structures tensorielles tel que*

$$\mathcal{F}(1) = V, \quad \mathcal{F}(\cup) = b \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\cap) = d.$$

En outre, pour tout couple (n, m) d'objets de $\mathcal{S}(a)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(c_{n,m}) &= c_{\mathcal{F}(n), \mathcal{F}(m)}, \\ \mathcal{F}(b_n) &= (\text{id}_{\mathcal{F}(n)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes n}) b_{\mathcal{F}(n)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(d_n) = d_{\mathcal{F}(n)} (\alpha^{\otimes n} \otimes \text{id}_{\mathcal{F}(n)}), \\ \mathcal{F}(\theta_n) &= \theta_{\mathcal{F}(n)}. \end{aligned}$$

Démonstration. La construction d'un foncteur sur $\mathcal{S}(a)$ conservant les structures tensorielles est bien connue. Nous la rappelons brièvement. On définit \mathcal{F} sur les objets par $\mathcal{F}(n) = V^{\otimes n}$. D'après le §2.1, pour définir \mathcal{F} sur les morphismes, il suffit de connaître sa valeur sur les diagrammes simples. La valeur de $\mathcal{F}(\cup)$ et $\mathcal{F}(\cap)$ étant donnée, (nécessairement $\mathcal{F}(1) = \text{id}_V$ car \mathcal{F} est un foncteur), l'image par \mathcal{F} de tout diagramme simple est définie par compositions et produits tensoriels. Par construction, \mathcal{F} conserve les structures tensorielles. Il reste à vérifier (2.1), ce qui est immédiat par (3.7) lorsque $q = a^2$.

Vérifions alors les quatre égalités annoncées. Celles concernant $\mathcal{F}(b_n)$ et $\mathcal{F}(d_n)$ sont immédiates. Montrons que $\mathcal{F}(c_{n,m}) = c_{\mathcal{F}(n), \mathcal{F}(m)}$, relation qu'il suffit de vérifier pour $n = m = 1$ grâce aux propriétés des tressages. Puisque dans $\mathcal{S}(a)$ le morphisme $c_{1,1}$ est donné par (2.2), il suffit de vérifier que dans $\mathcal{R}(q)$, on a $c_{V,V} = a \text{id}_{V^{\otimes 2}} + a^{-1}bd$, ce qui résulte de (3.8) lorsque $q = a^2$. La dernière relation se montre de la même manière. ■

3.3 Le foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathcal{R}(q)$

À partir du foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \rightarrow U_q\text{-Mod}$ nous définissons un foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \rightarrow U_q\text{-Mod}$ comme suit :

1. $\tilde{\mathcal{F}}(s) = \mathcal{F}(f_s)V^{\otimes |s|}$ pour tout objet s de $\mathcal{V}(a)$;
2. $\tilde{\mathcal{F}}(\hat{g}) = \mathcal{F}(\hat{g})$ pour tout morphisme \hat{g} de $\mathcal{V}(a)$.

Il est clair que $\tilde{\mathcal{F}}$ conserve les structures tensorielles.

Proposition 3.2 *Le foncteur $\tilde{\mathcal{F}}$ est à valeurs dans $\mathcal{R}(q)$. Comme foncteur $\mathcal{V}(a) \rightarrow \mathcal{R}(q)$, il est essentiellement surjectif.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout objet V de $\mathcal{R}(q)$, il existe un objet s de $\mathcal{V}(a)$ tel que $\tilde{\mathcal{F}}(s) \cong V$ dans $\mathcal{R}(q)$.

Si $n \in J$, alors on a $\tilde{\mathcal{F}}(n) \cong V_n$. En effet, soit $p_n \in \text{End}_{\mathcal{R}(q)}(V^{\otimes n})$ l'idempotent déterminé par

$$p_n(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \text{ est de plus haut poids } n, \\ 0 & \text{si } w \text{ est de plus haut poids } p < n. \end{cases}$$

Nous avons alors l'isomorphisme $p_n(V^{\otimes n}) \cong V_n$. Or, d'après [40], on a $\mathcal{F}(f_n) = p_n$. Par conséquent, $\tilde{\mathcal{F}}(n) = p_n(V^{\otimes n}) \cong V_n$. Ceci prouve que $\tilde{\mathcal{F}}$ est essentiellement surjectif. En effet, si $M \cong V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_m}$ est un objet de $\mathcal{R}(q)$, alors, comme $\tilde{\mathcal{F}}$ conserve les structures tensorielles, l'image de la suite $s = (n_1, \dots, n_m) = n_1 \otimes \cdots \otimes n_m$ est $\tilde{\mathcal{F}}(n_1) \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathcal{F}}(n_m) \cong V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_m} \cong M$. ■

Nous déduisons de cette proposition le dernier point du théorème 2.1, *i.e.* que l'image de la sous-catégorie paire de $\mathcal{V}(a)$ est la sous-catégorie paire de $\mathcal{R}(q)$. En effet, l'objet (n) de $\mathcal{V}(a)$

a pour image l'objet V_n de $\mathcal{R}(q)$. Pour montrer que $\tilde{\mathcal{F}}$ induit un foncteur $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}(q)$ sur les catégories purifiées, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3 *Pour tout couple d'objets (s, s') de $\mathcal{V}(a)$, on a*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}(c_{s,s'}) &= c_{\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(s')}, \\ \tilde{\mathcal{F}}(b_s) &= \left(\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes |s|} \right) b_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}(d_s) = d_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \left(\alpha^{\otimes |s|} \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \right), \\ \tilde{\mathcal{F}}(\theta_s) &= \theta_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}.\end{aligned}$$

Pour tout morphisme g de $\mathcal{V}(a)$, nous avons

$$\text{tr}_q(\tilde{\mathcal{F}}(g)) = \tilde{\mathcal{F}}(\text{tr}_q(g)).$$

Démonstration. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier les quatre premières relations qui découlent de la proposition 3.1. Nous vérifions la cinquième. Soit s un objet de $\mathcal{V}(a)$, $g \in \text{End}_{\mathcal{S}(a)}(|s|)$ et \hat{g} l'élément correspondant de $\text{End}_{\mathcal{V}(a)}(s)$. Par définition de la trace quantique, on a

$$\text{tr}_q(\hat{g}) = d_s c_{s,s} (\theta_s \hat{g} \otimes \text{id}_s) b_s.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}(\text{tr}_q(\hat{g})) &= \tilde{\mathcal{F}}(d_s) \tilde{\mathcal{F}}(c_{s,s}) (\tilde{\mathcal{F}}(\theta_s) \tilde{\mathcal{F}}(\hat{g}) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(\text{id}_s)) \tilde{\mathcal{F}}(b_s) \\ &= d_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} (\alpha^{\otimes |s|} \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}) c_{\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(s)} (\theta_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \tilde{\mathcal{F}}(\hat{g}) \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}) (\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes |s|}) b_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \\ &= d_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} (\alpha^{\otimes |s|} \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}) c_{\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(s)} (\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes |s|}) (\theta_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \tilde{\mathcal{F}}(\hat{g}) \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}) b_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \\ &= d_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} (\alpha^{\otimes |s|} \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}) ((\alpha^{-1})^{\otimes |s|} \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}) c_{\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(s)} (\theta_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \tilde{\mathcal{F}}(\hat{g}) \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(s)}) b_{\tilde{\mathcal{F}}(s)} \\ &= \text{tr}_q(\tilde{\mathcal{F}}(\hat{g})).\end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité provient de la naturalité du tressage. ■

Corollaire 3.4 *Le foncteur $\tilde{\mathcal{F}}$ induit un foncteur fidèle $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}(q)$.*

Démonstration. L'existence du foncteur induit est une conséquence immédiate de la dernière égalité du lemme précédent et du fait que $\tilde{\mathcal{F}}$ est essentiellement surjectif (proposition 3.2).

Démontrons la fidélité de $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}(q)$. Soit $h : s \rightarrow s'$ un morphisme de $\mathcal{V}(a)$ dont l'image dans $\overline{\mathcal{V}}(a)$ est notée \overline{h} . Si $\overline{\mathcal{F}}(\overline{h}) = 0$ dans $\overline{\mathcal{R}}(q)$, alors $\tilde{\mathcal{F}}(h)$ est négligeable dans $\mathcal{R}(q)$. En particulier, pour tout morphisme $g : s' \rightarrow s$ de $\mathcal{V}(a)$, on a $\text{tr}_q(\tilde{\mathcal{F}}(h)\tilde{\mathcal{F}}(g)) = 0$. Le lemme 3.3 implique que $\tilde{\mathcal{F}}(\text{tr}_q(hg)) = 0$. Comme l'application

$$\tilde{\mathcal{F}} : \text{End}_{\mathcal{V}(a)}(\emptyset) \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{R}(q)}(V_0)$$

applique le diagramme vide sur l'identité de V_0 , c'est un isomorphisme. On en déduit que $\text{tr}_q(hg) = 0$ ce qui prouve que h est négligeable dans $\mathcal{V}(a)$, donc que $\overline{h} = 0$. ■

Corollaire 3.5 *Dans le cas où a et q sont génériques, le foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathcal{R}(q)$ est fidèle.*

Démonstration. D'après [49], chap. XII, on a $\mathcal{V}(a) = \overline{\mathcal{V}}(a)$ lorsque a est générique. De même, $R(q) = \overline{R}(q)$ lorsque q est générique. ■

4 Préliminaires techniques

Au §4.1 nous exhibons une base simple pour chaque espace de morphismes dans la catégorie $\mathcal{V}(a)$ du §2.4. Au §4.2, nous donnons quelques rappels sur la formule de Clebsch-Gordan pour $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

4.1 Les morphismes de $\mathcal{V}(a)$

Etant donné deux objets $s = (n_1, \dots, n_m)$ et $s' = (n'_1, \dots, n'_m)$ de $\mathcal{V}(a)$, on dit qu'un diagramme simple \mathcal{D} est *du bon type* (s, s') s'il est du type $(|s|, |s'|)$ et si

$$\widehat{\mathcal{D}} = f_{s'} \mathcal{D} f_s \neq 0.$$

Lemme 4.1 *Les éléments $\widehat{\mathcal{D}}$, où \mathcal{D} est du bon type (s, s') , forment une base de $\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s')$.*

Démonstration. D'après [49], chap. XII, il existe un entier n_s (resp. $n'_{s'}$), des nombres complexes α_j et des diagrammes simples $Q_j \in E_{|s|}$ différents de $1_{|s|}$, $j = 1, \dots, n_s$ (resp. $\alpha'_{j'}$ et des diagrammes simples $Q'_{j'} \in E_{|s'|}$ différents de $1_{|s'|}$, $j' = 1, \dots, n'_{s'}$), tels que

$$f_s = 1_{|s|} + \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j Q_j, \quad (\text{resp. } f_{s'} = 1_{|s'|} + \sum_{j'=1}^{n'_{s'}} Q'_{j'}),$$

où les Q_j (resp. les $Q'_{j'}$) vérifient $f_s Q_j = Q_j f_s = 0$ (resp. $f_{s'} Q'_{j'} = Q'_{j'} f_{s'} = 0$). Par conséquent, pour tout diagramme simple $\mathcal{D} \in \text{Hom}_{\mathcal{S}(a)}(|s|, |s'|)$, il existe un entier $n_{\mathcal{D}}$, des nombres complexes λ_i et des diagrammes simples $\widetilde{\mathcal{D}}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{S}(a)}(|s|, |s'|)$, $i = 1, \dots, n_{\mathcal{D}}$, tels que

$$\widehat{\mathcal{D}} = f_{s'} \mathcal{D} f_s = \mathcal{D} + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{D}}} \lambda_i \widetilde{\mathcal{D}}_i, \quad (4.1)$$

et tels que $f_{s'} \widetilde{\mathcal{D}}_i f_s = 0$, donc tous distincts de \mathcal{D} si \mathcal{D} est du bon type (s, s') .

Nous montrons maintenant que $\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s')$ admet une base constituée de l'ensemble (fini) des diagrammes du bon type. Notons N le cardinal de cet ensemble et $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_N$ ces éléments. Cet ensemble est clairement un système générateur de $\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s')$. Supposons alors qu'il existe des nombres complexes μ_1, \dots, μ_N tels que

$$\mu_1 \widehat{\mathcal{D}}_1 + \dots + \mu_N \widehat{\mathcal{D}}_N = 0, \quad (4.2)$$

égalité dans $\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s')$. Or, d'après (4.1), on a dans $\text{Hom}_{\mathcal{S}(a)}(|s|, |s'|)$, pour $i = 1, \dots, N$,

$$\widehat{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}_i + \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{D}_i}} \lambda_{i,j} \widetilde{\mathcal{D}}_{i,j}, \quad (4.3)$$

avec $f_{s'} \tilde{\mathcal{D}}_{i,j} f_s = 0$. On en déduit que pour tout $i, k = 1, \dots, N$ et tout $j = 1, \dots, n_{\mathcal{D}_i}$, on a

$$\tilde{\mathcal{D}}_{i,j} \neq \mathcal{D}_k. \quad (4.4)$$

De plus, d'après (4.2) et (4.3), on a l'égalité suivante dans $\text{Hom}_{\mathcal{S}(a)}(|s|, |s'|)$:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{D}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{D}_i}} \mu_i \lambda_{i,j} \tilde{\mathcal{D}}_{i,j} = 0. \quad (4.5)$$

On déduit alors des égalité (4.4) et (4.5) et du fait que des diagrammes simples différents sont linéairements indépendants, que $\mu_1 = \dots = \mu_N = 0$. ■

Remarque. Un diagramme est du bon type si on ne peut pas factoriser $1^{(n_1+\dots+n_{k-1})} \otimes e_i \otimes 1^{(n_{k+1}+\dots+n_m)}$ en entrée ou $1^{(n'_1+\dots+n'_{k'-1})} \otimes e_i \otimes 1^{(n'_{k'+1}+\dots+n'_{m'})}$ en sortie. La figure 3 donne un exemple d'un diagramme du bon type (s, s') , où $s = (3, 3, 3, 4)$ et $s' = (2, 2)$.

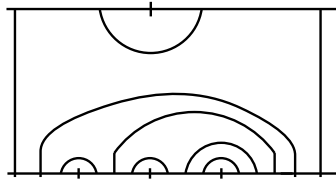


Figure 3.

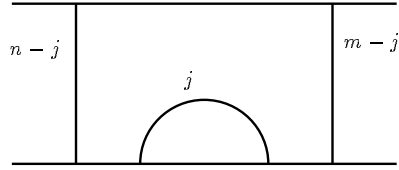


Figure 4.

Pour terminer ce paragraphe, nous définissons des diagrammes du bon type particuliers. Soit j un entier vérifiant $0 \leq j \leq \inf(n, m)$. On définit $\mathcal{D}_{n,m,j} \in E_{n+m, n+m-2j}$ comme la classe d'isotopie du diagramme simple de la figure 4 où, par convention, un entier p coloriant un arc signifie p arcs parallèles.

4.2 Coefficients de Clebsch-Gordan

Le produit tensoriel des deux modules V_n et V_m ($n, m \in \tilde{J}$) vérifie la formule de Clebsch-Gordan

$$V_n \otimes V_m \cong \bigoplus_{\substack{k=|n-m| \\ k \equiv n+m \pmod{2}}}^{n+m} V_k \quad (4.6)$$

si $n+m \in \tilde{J}$. Si $n+m \notin \tilde{J}$ (ce qui n'arrive que si q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité et $n+m > r-2$), alors

$$V_n \otimes V_m \cong \bigoplus_{\substack{k=|n-m| \\ k \equiv n+m \pmod{2}}}^{2r-4-n-m} V_k \oplus Z \quad (4.7)$$

où Z est un module négligeable. Une telle décomposition étant unique à isomorphisme près, nous parlerons des parties semisimple et négligeable de $V_n \otimes V_m$. (cf. [1, 2, 4, 41]).

En itérant (4.6), on obtient, pour tout entier $n \in J$, une décomposition de la forme

$$V^{\otimes n} \cong V_n \oplus \bigoplus_{k_i < n} V_{k_i}, \quad (4.8)$$

où chaque V_{k_i} peut apparaitre plusieurs fois.

Rappelons qu'un vecteur de plus haut poids de poids $k \in \mathbb{N}$ d'un $U_q(sl_2)$ -module est un vecteur v tel que $Kv = q^k v$ et $Xv = 0$. Nous rappelons également la forme générale des vecteurs de plus haut poids d'un produit tensoriel $W \otimes W'$ de deux modules. Soient $w \in W$ un vecteur de plus haut poids n , $w' \in W'$ un vecteur de plus haut poids m et p un entier ≥ 0 . Posons

$$v(w, w', p) = \sum_{i=0}^p c_{p,i}^{n,m} (Y^i w) \otimes (Y^{p-i} w'), \quad (4.9)$$

où

$$c_{p,i}^{n,m} = (-1)^i \frac{[m-p+i]_q! [n-i]_q!}{[i]_q! [p-i]_q! [m-p]_q! [n]_q!} q^{-i(m-2p+i+1)}, \quad (4.10)$$

$[k]_q = (q^k - q^{-k})/(q - q^{-1})$ et $[k]_q! = [k]_q [k-1]_q \cdots [1]_q$ si k est un entier ≥ 1 et $[0]! = 1$ par convention. Nous avons alors les résultats qui suivent (cf. [18], p.157).

1. Lorsque q est générique, un vecteur de $W \otimes W'$ est de plus haut poids k si et seulement s'il est égal à un vecteur $v(w, w', p)$, avec $0 \leq p \leq \inf(n, m)$ et $n + m - 2p = k$.
2. Lorsque q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, supposons, en outre, que W et W' se décomposent en sommes directes d'une partie semisimple et négligeable, i.e.

$$W \cong P \oplus Z, \quad W' \cong P' \oplus Z',$$

où Z et Z' sont des modules négligeables et P et P' sont sommes directes de modules V_n , $n \in J$. Dans ce cas, un vecteur de la partie semisimple de $W \otimes W'$ est de plus haut poids k si et seulement s'il est égal à un vecteur $v(w, w', p)$, avec $0 \leq p \leq \inf(n, m)$, $n + m - 2p = k$ et $k \leq \inf(n + m, 2r - 4 - n - m)$.

5 Pleine fidélité : cas générique

Nous fixons un nombre complexe a générique et posons $q = a^2$. Pour démontrer le premier point du théorème 2.1, il suffit, au vu de la proposition 3.2, d'établir la pleine fidélité du foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \rightarrow \mathcal{R}(q)$ défini au 3.3. Il s'agit de montrer le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Pour tout couple (s, t) d'objets de $\mathcal{V}(a)$, l'application*

$$\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, t) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(t))$$

est un isomorphisme.

Nous démontrerons ce théorème par récurrence sur la longueur de t . Les propositions 5.4 et 5.9 concernent le cas où t est de longueur 1 et le §5.3 traite le cas général.

Remarquons que le théorème est vrai lorsque s et t sont de longueur 0 ou 1. En effet, les considérations du §4.1 impliquent que, dans ce cas,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, t) = \begin{cases} \mathbb{C} \mathrm{id}_s & \text{si } s = t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le lemme de Schur, il en est de même de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(t))$.

Dans toute la suite de cette partie, nous conviendrons que la suite (0) représente la suite vide de $\mathcal{V}(a)$, ce qui permet de la traiter comme un objet de longueur 1.

5.1 Cas de $\tilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n, m), (k)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}((n, m)), \tilde{\mathcal{F}}(k))$

On fixe deux entiers n et $m > 0$ et un entier $k \geq 0$. Si $j \geq 0$ est un entier, on note id_j le morphisme identité de $V^{\otimes j}$. Le but du §5.1 est de démontrer le théorème 5.1 pour $s = (n, m)$ et $t = (k)$.

Lemme 5.2 *Si $0 \leq k < |n - m|$, ou bien $n + m < k$, ou bien $k \not\equiv n + m \pmod{2}$, alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n, m), (k)) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(n, m), \tilde{\mathcal{F}}(k)) = 0.$$

Sinon,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n, m), (k)) = \mathbb{C} \hat{\mathcal{D}}_{n, m, j},$$

(où j est l'unique entier vérifiant $0 \leq j \leq \inf(n, m)$ et $n + m - 2j = k$) et

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(n, m), \tilde{\mathcal{F}}(k)) \right) = 1.$$

Démonstration. Le calcul de la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(n, m), \tilde{\mathcal{F}}(k))$ provient de la formule (4.6) et du lemme de Schur. La détermination de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n, m), (k))$ est immédiate dès que l'on a remarqué que s'il existe un diagramme du bon type $((n, m), (k))$, alors c'est le diagramme $\mathcal{D}_{n, m, j}$, où j vérifie les conditions de l'énoncé. ■

Remarque. D'après le corollaire 3.5, le lemme 5.2 suffit à démontrer le théorème 5.1 dans le cas où t est de longueur 1 et s de longueur 2. Nous démontrons néanmoins la surjectivité directement car les calculs qui suivent sont indispensables pour le cas des racines de l'unité, cf. le §6.

Nous avons maintenant besoin de la formule (4.9) et des notations qui y sont rattachées. Pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq \inf(n, m)$, définissons

$$v_{n, m}^{(j)} = v(v_0^{\otimes n}, v_0^{\otimes m}, j) \in \tilde{\mathcal{F}}(n, m) \tag{5.1}$$

et

$$b_{n,m,j} = q^{-m+j-1} \frac{[n+m-j+1]_q}{[n]_q}. \quad (5.2)$$

D'après les rappels subordonnés à (4.9), les vecteurs $v_{n,m}^{(j)}$ sont des vecteurs de plus haut poids $n+m-2j$, et pour tout vecteur v de plus haut poids ℓ de $\tilde{\mathcal{F}}(n,m)$, il existe un (unique) j avec $0 \leq j \leq \inf(n,m)$, tel que v soit proportionnel à $v_{n,m}^{(j)}$.

Lemme 5.3 *Pour $n \geq 1$, $m \geq 1$ et $0 \leq j \leq \inf(n,m)$, l'application $g = \text{id}_{n-1} \otimes d \otimes \text{id}_{m-1} : \tilde{\mathcal{F}}(n,m) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(n-1,m-1)$ vérifie*

$$g(v_{n,m}^{(j)}) = b_{n,m,j} v_{n-1,m-1}^{(j-1)}$$

où, par convention, $v_{n-1,m-1}^{(-1)} = 0$.

Démonstration. Rappelons que l'application $d : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par (3.6). On remarque que $g(v_{n,m}^{(j)}) \in \tilde{\mathcal{F}}(n-1,m-1)$ et est de plus haut poids $n+m-2j = (n-1) + (m-1) - 2(j-1)$. On peut alors utiliser la remarque précédant l'énoncé: on a $g(v_{n,m}^{(j)}) = \gamma v_{n-1,m-1}^{(j-1)}$, où γ est un certain nombre complexe. Pour calculer γ , il suffit par exemple de comparer les coefficients devant $v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1} v_0^{\otimes(m-1)}$ dans $g(v_{n,m}^{(j)})$ et $v_{n-1,m-1}^{(j-1)}$. Comme

$$\Delta(Y^i) = \sum_{s=0}^i q^{s(i-s)} \frac{[i]_q!}{[s]_q! [i-s]_q!} (Y^s K^{s-i}) \otimes Y^{i-s}$$

(cf. par exemple [18]), nous avons

$$g(Y^i v_0^{\otimes n} \otimes Y^j v_0^{\otimes m}) = [j]_q Y^i v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1} v_0^{\otimes(m-1)} - [i]_q q^{i-j-n-1} Y^{i-1} v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^j v_0^{\otimes(m-1)}.$$

Nous avons donc

$$g(v_{n,m}^{(j)}) = (c_{j,0}^{n,m} [j]_q - c_{j,1}^{n,m} q^{-j-n+1}) v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1} v_0^{\otimes(m-1)} + v,$$

(cf. (4.10)) où v est une combinaison linéaire de $Y^i v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1-i} v_0^{\otimes(m-1)}$ avec $i \neq 0$. Or

$$\begin{aligned} c_{j,0}^{n,m} [j]_q - c_{j,1}^{n,m} q^{-j-n+1} &= \frac{[m-j]_q! [n]_q! [j]_q}{[j]_q! [m-j]_q! [n]_q!} + \frac{[m-j+1]_q! [n-1]_q!}{[j-1]_q! [m-j]_q! [n]_q!} q^{-m+2j-2-n-j+1} \\ &= \frac{[n]_q + [m-j+1]_q q^{-m-n+j-1}}{[j-1]_q! [n]_q} = b_{n,m,j} c_{j-1,0}^{n-1,m-1}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Proposition 5.4 *L'application $\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n,m),(k)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}((n,m),(k)))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Au vu du lemme 5.2, il nous reste à traiter le cas

$$|n - m| \leq k \leq n + m \text{ et } k \equiv n + m \pmod{2},$$

i.e. le cas où il existe un entier j tel que $0 \leq j \leq \inf(n, m)$ et $n + m - 2j = k$. D'après ce même lemme, les deux espaces sont de dimension 1; donc il suffit de montrer que $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_{n,m,j}) \neq 0$. Comme

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,j}) = (\text{id}_{n-j} \otimes d \otimes \text{id}_{m-j}) \cdots (\text{id}_{n-1} \otimes d \otimes \text{id}_{m-1})$$

et $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,0}) = \text{id}_{n+m}$, on obtient, en appliquant le lemme 5.3,

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,j})(v_{n,m}^{(j)}) = b_{n,m,j} \cdots b_{n-j+1,m-j+1} v_{n-j,m-j}^{(0)}.$$

Or, pour $\widehat{\mathcal{D}}_{n,m,j} = f_k \mathcal{D}_{n,m,j}(f_n \otimes f_m)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}_{n,m,j}) &= p_k \mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,j})(p_n \otimes p_m), \\ (p_n \otimes p_m)(v_{n,m}^{(j)}) &= v_{n,m}^{(j)}, \\ p_k(v_0^{\otimes k}) &= v_0^{\otimes k}, \\ v_{n-j,m-j}^{(0)} &= v_0^{\otimes k}, \end{aligned}$$

car $v_{n,m}^{(j)} \in \tilde{\mathcal{F}}(n, m)$ et $v_0^{\otimes k} \in \tilde{\mathcal{F}}(k)$. Comme tous les $b_{n,m,j}$ sont non nuls, $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_{n,m,j})(v_{n,m}^{(j)}) \neq 0$. ■

5.2 Cas de $\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))$

Nous allons maintenant établir la pleine fidélité dans le cas où s est une suite de longueur quelconque. Fixons un entier $m \geq 3$ et des entiers strictement positifs n_1, \dots, n_m . Nous notons s la suite (n_1, \dots, n_m) et s' la suite tronquée (n_1, \dots, n_{m-1}) . Nous fixons également un entier positif k . Nous appellerons *espace de plus haut poids j* d'un module W le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de W de plus haut poids j .

Soit $\{b_1, \dots, b_N\}$ l'ensemble des entiers tel que pour tout $j = 1, \dots, N$, la dimension p_j de l'espace de plus haut poids b_j de $\tilde{\mathcal{F}}(s')$ soit strictement positive et tel qu'il existe un entier ℓ_j vérifiant $0 \leq \ell_j \leq \inf(b_j, n_m)$ et $b_j + n_m - 2\ell_j = k$. (Les notations ne signifient pas que cet ensemble est non vide). Les deux lemmes suivants justifient la donnée de cet ensemble.

Lemme 5.5 *Supposons qu'il existe un vecteur de plus haut poids k dans $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Alors l'ensemble $\{b_1, \dots, b_N\}$ est non vide.*

Démonstration. Soit v un vecteur de plus haut poids k dans $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous avons

$$\tilde{\mathcal{F}}(s) \cong \tilde{\mathcal{F}}(s') \otimes \tilde{\mathcal{F}}(n_m).$$

D'après la formule (4.9), il existe un vecteur w de plus haut poids b et un entier ℓ tel que $v = v(w, v_0^{\otimes n_m}, \ell)$, avec $0 \leq \ell \leq \inf(b, n_m)$ et $b + n_m - 2\ell = k$. ■

Pour tout $j = 1, \dots, N$, soit $w_1^j, \dots, w_{p_j}^j$ une base de l'espace de plus haut poids b_j de $\tilde{\mathcal{F}}(s')$.

Lemme 5.6 *Supposons qu'il existe un vecteur de plus haut poids k dans $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Alors la famille $(v_p^j) = v(w_p^j, v_0^{\otimes n_m}, \ell_j)$, $j = 1, \dots, N$ et $p = 1, \dots, p_j$, forme une base de l'espace de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que ces vecteurs sont bien dans $\tilde{\mathcal{F}}(s) = \tilde{\mathcal{F}}(s') \otimes \tilde{\mathcal{F}}(n_m)$ puisque $w_p^j \in \tilde{\mathcal{F}}(s')$ et $v_0^{\otimes n_m} \in \tilde{\mathcal{F}}(n_m)$. Avec les notations rattachées à la formule (4.9), posons $W = \tilde{\mathcal{F}}(s')$ et $W' = \tilde{\mathcal{F}}(n_m)$. Puisque $0 \leq j \leq \inf(b_j, n_m)$ et $k = b_j + n_m - 2\ell_j$, les vecteurs v_p^j sont des vecteurs de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Ils sont linéairement indépendants car les vecteurs $(Y^i w_p^j)$ (où $i = 1, \dots, \ell_j$, $p = 1, \dots, p_j$ et $j = 1, \dots, N$) le sont par construction.

Soit alors $v \in \tilde{\mathcal{F}}(s)$ un vecteur de plus haut poids k . Puisque $W' \cong V_{n_m}$, tous ses vecteurs de plus haut poids sont proportionnels à $v_0^{\otimes n_m}$ et de poids n_m , et donc, d'après la formule (4.9), il existe $w \in W$ de plus haut poids b tel que $v = v(w, v_0^{\otimes n_m}, \ell)$ et tel que $0 \leq \ell \leq \inf(b, n_m)$ et $k = b + n_m - 2\ell$. Donc $b = b_j$ et $\ell = \ell_j$ pour un certain j ; donc $w = \sum_{p=1}^{p_j} \lambda_p w_p^j$, $\lambda_p \in \mathbb{C}$, et $v = \sum_{p=1}^{p_j} \lambda_p v_p^j$, ce qui prouve que les vecteurs v_p^j forment une base de l'espace de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. ■

Pour tout $j = 1, \dots, N$, on note $\{\mathcal{D}_{j,p}\}_{p=1, \dots, p'_j}$ l'ensemble des diagrammes du bon type $(s', (b_j))$. On pose

$$\overline{\mathcal{D}_{j,p}} = \mathcal{D}_{b_j, n_m, \ell_j}(\mathcal{D}_{j,p} \otimes 1_{n_m}), \quad (5.3)$$

$j = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, p'_j$, où $\mathcal{D}_{b_j, n_m, \ell_j}$ est défini par la figure 4.

Proposition 5.7 *Soit $k \geq 0$. Alors l'ensemble des diagrammes $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$, $j = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, p'_j$ forme une base de $\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k))$.*

Démonstration. Nous allons montrer que les diagrammes $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ sont distincts et du bon type $(s, (k))$ et que tout diagramme du bon type $(s, (k))$ est égal à un diagramme $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$. On conclura par le lemme 4.1.

Soit \mathcal{D} un diagramme du bon type $(s, (k))$. Nous allons le transformer de la manière suivante : on remonte tous les brins s'attachant au bloc n_m des entrées (et uniquement ceux-ci), puis on divise \mathcal{D} en deux diagrammes $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$, qui sont uniquement déterminés par \mathcal{D} . La figure 5 donne l'idée de la construction.

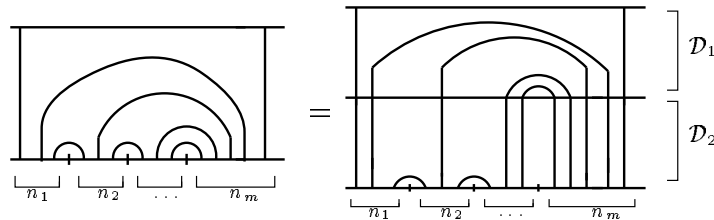


Figure 5.

Celle-ci implique tout d'abord que $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}' \otimes 1_{n_m}$. Le diagramme \mathcal{D}' est du bon type $(s', (b))$ où $b \geq 0$ est un entier non encore déterminé. En effet, les entrées de \mathcal{D}' sont celles de \mathcal{D} . En ce qui concerne les sorties, il faut montrer qu'il n'y a pas d'arc les reliant. Or les brins s'attachant aux sorties de \mathcal{D}' proviennent soit d'un brin reliant une entrée et une sortie de \mathcal{D} , soit d'un arc reliant une entrée de \mathcal{D} à une entrée du bloc n_m , arc que l'on a remonté par la construction précédente. Dans les deux cas, ces brins ne peuvent relier deux sorties de \mathcal{D}' . De la même manière, on montre que \mathcal{D}_1 est du bon type $((b, n_m), (k))$. D'après le lemme 5.2, on sait alors que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{b, n_m, \ell}$ où ℓ est un entier vérifiant $b + n_m - 2\ell = k$ et $0 \leq \ell \leq \inf(b, n_m)$. Par définition des b_j , il existe j tel que $b = b_j$ et $\ell = \ell_j$.

Il reste à prouver que $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ et $\overline{\mathcal{D}_{j',p'}}$ sont distincts dès que $j \neq j'$ ou $p \neq p'$. Notons t (resp. t') le nombre de brins du bloc d'entrées n_m de $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ (resp. $\overline{\mathcal{D}_{j',p'}}$) reliant des sorties. Alors $t = n_m - j$ et $t' = n_m - j'$; donc si $j \neq j'$, alors $\overline{\mathcal{D}_{j,p}} \neq \overline{\mathcal{D}_{j',p'}}$. Si $j = j'$, alors $p \neq p'$ et donc $\mathcal{D}_{j,p} \neq \mathcal{D}_{j,p'}$, ce qui prouve la proposition. ■

Nous allons maintenant démontrer deux propositions qui prouvent le théorème 5.1 dans le cas où t est de longueur 1. Rappelons pour cela que tout morphisme de $\text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les vecteurs de plus haut poids de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$, et qu'il envoie tout vecteur de plus haut poids $k' \neq k$ sur 0. En particulier, la dimension de $\text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))$ est égale à la dimension de l'espace de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$.

Proposition 5.8 *Pour tout entier $k \geq 0$, on a*

$$\dim(\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k))) = \dim(\text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))).$$

Démonstration. D'après la remarque précédente et le lemme 4.1, il suffit de démontrer que le nombre de diagramme du bon type $(s, (k))$ est égal à la dimension de l'espace de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous allons démontrer ceci par récurrence sur la longueur m de s . Le cas $m = 2$ est l'objet de la proposition 5.4. Supposons alors que pour tout $\tilde{m} < m$, tout entier $\tilde{k} \geq 0$ et tout objet \tilde{s} de longueur \tilde{m} , le nombre de diagramme du bon type $(\tilde{s}, (\tilde{k}))$ est égal à la dimension de l'espace de plus haut poids \tilde{k} de $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})$.

Reprenons les notations que nous avons utilisées pour définir les diagrammes $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$. D'après la proposition 5.7 le nombre de diagrammes du bon type $(s, (k))$ est $p'_1 + \dots + p'_N$. D'après le lemme 5.6, la dimension de l'espace de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ est $p_1 + \dots + p_N$. Or, par hypothèse de récurrence, nous avons $p'_j = p_j$, $1 \leq j \leq N$ puisque p_j est la dimension de l'espace de plus haut poids b_j de $\tilde{\mathcal{F}}(s')$, ce qui prouve la proposition. ■

Remarque. La remarque du §5.1 est encore valable ici. Le corollaire 3.5 et la proposition 5.8 démontrent le théorème 5.1 dans le cas où t est de longueur 1. Néanmoins, nous avons besoin des calculs de la proposition 5.9 pour le cas des racines de l'unité, cf. la proposition 6.4.

Le théorème 5.1 est donc démontré lorsque t est de longueur 1 et si $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ ne contient pas de vecteur de plus haut poids k . Nous supposons donc jusqu'à la fin du §5 que $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ contient un vecteur de plus haut poids k .

Proposition 5.9 *L'application $\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit g la dimension commune de $\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))$. D'après la remarque précédant la proposition 5.8, il suffit de prouver qu'il existe une base v_1, \dots, v_g de l'espace de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ telle que, si $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_g$ sont les diagrammes du bon type $(s, (k))$, il existe des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_g$, tous non nuls tels que

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_{p'}) = 0 \quad \text{si } 1 \leq p' < p \leq g, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_p) = \alpha_p v_0^{\otimes k} \quad \text{si } p \leq g, \quad (5.5)$$

où $v_0^{\otimes k} \in V^{\otimes k}$. Nous démontrons ceci par récurrence sur la longueur m de s . Le cas $m = 2$ est l'objet du §5.1 où nous avons montré que $q = 1$, $p_1 = 1$, $g = 1$ et que

$$\mathcal{F}(D_{n,m,j})(v_{n,m}^{(j)}) = b_{n,m,j} \cdots b_{n-j+1,m-j+1,1} v_0^{\otimes k}.$$

Supposons $m \geq 3$. Pour tout $j = 1, \dots, N$, nous choisissons une base w_p^j , $1 \leq p \leq p_j$, de l'espace de plus haut poids b_j de $\tilde{\mathcal{F}}(s')$ telle que, pour tout $j = 1, \dots, N$, il existe, par hypothèse de récurrence, des nombres complexes $\alpha_{j,p}$ tous non nuls ($1 \leq p \leq p_j$) tels que

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^j) = 0 \quad \text{si } 1 \leq p' < p \leq p_j, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_p^j) = \alpha_{j,p} v_0^{\otimes b_j}, \quad \text{si } p \leq p_j. \quad (5.7)$$

Fixons alors un j et soient p et p' des entiers tel que $1 \leq p, p' \leq p_j$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v_{p'}^j) &= \mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j, n_m, \ell_j}) \mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p} \otimes 1_{n_m})(v_{p'}^j) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j, n_m, \ell_j}) \left(\sum_{i=0}^{\ell_j} c_{\ell_j, i}^{b_j, n_m} (Y^i \mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^j)) \otimes (Y^{\ell_j - i} v_0^{\otimes n_m}) \right) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de la formule (4.9) et de la définition du vecteur $v_{p'}^j$ (cf. lemme 5.6). Si $p' < p$, la formule (5.6) implique que $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v_{p'}^j) = 0$. Si $p = p'$, on a, d'après (4.9) et (5.7),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v_p^j) &= \mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j, n_m, \ell_j}) \left(\alpha_{j,p} \sum_{i=0}^{\ell_j} c_{\ell_j, i}^{b_j, n_m} (Y^i v_0^{\otimes b_j}) \otimes (Y^{\ell_j - i} v_0^{\otimes n_m}) \right) \\ &= \alpha_{j,p} \mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j, n_m, \ell_j}) \left(v(v_0^{\otimes b_j}, v_0^{\otimes n_m}, \ell_j) \right), \end{aligned}$$

qui est donc un vecteur de plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Or, d'après le §5.1 et le lemme 5.2, il existe $\gamma_j \neq 0$ tels que

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j, n_m, \ell_j})(v(v_0^{\otimes b_j}, v_0^{\otimes n_m}, \ell_j)) = \gamma_j v_0^{\otimes k}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v_{p'}^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } p' < p, \\ \alpha_{j,p} \gamma_j v_0^{\otimes k} & \text{si } p' = p. \end{cases}$$

De plus, on peut toujours supposer $b_1 > \dots > b_N$. Par conséquent, $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^{j'}) = 0$, pour tous $j' < j$, $1 \leq p \leq p_j$ et $1 \leq p' \leq p_{j'}$. En effet, rappelons tout d'abord que $w_{p'}^{j'} \in \tilde{\mathcal{F}}(s')$ ($1 \leq j' \leq N$, $1 \leq p' \leq p_{j'}$) et que $\mathcal{D}_{j,p} \in E_{|s', b_j}$ ($1 \leq j \leq N$, $1 \leq p \leq p_j$). Donc $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^{j'})$ a bien un sens. Ensuite, remarquons que $w_{p'}^{j'}$ est de plus haut poids $b_{j'} > b_j$. Donc $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^{j'}) \in V^{\otimes b_j}$ l'est également. Mais rappelons (*cf.* (4.8)) que tous les vecteurs de plus haut poids de $V^{\otimes b_j}$ ont un poids inférieur à b_j , ce qui prouve que $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^{j'}) = 0$.

En renumérotant alors les vecteurs $\{v_p^j\}_{p=1, \dots, p_j}^{j=1, \dots, N}$ et les diagrammes $\{\overline{\mathcal{D}_{j,p}}\}_{p=1, \dots, p_j}^{j=1, \dots, N}$ selon l'ordre

$$v_1^1, v_2^1, \dots, v_{p_1}^1, v_1^2, \dots, v_{p_2}^2, \dots, \dots, v_p^j, v_{p+1}^j, \dots, v_1^N, \dots, v_{p_N}^N,$$

(et l'ordre correspondant pour les diagrammes), nous obtenons deux familles satisfaisant aux conditions de l'énoncé. ■

5.3 Démonstration du théorème 5.1

D'après [18], XIV.2.2, pour tout triplet d'objets (U, V, W) d'une catégorie rubanée, l'application $\sharp : \text{Hom}(U \otimes V, W) \longrightarrow \text{Hom}(U, W \otimes V^*)$ donnée par

$$f^\sharp = (f \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes b_V),$$

et l'application $\flat : \text{Hom}(U, W \otimes V^*) \longrightarrow \text{Hom}(U \otimes V, W)$ donnée par

$$g^\flat = (\text{id}_W \otimes d_V)(g \otimes \text{id}_V),$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre. Dans le cas des catégories $\mathcal{V}(a)$ et $\mathcal{R}(q)$, ce sont en outre des isomorphismes d'espaces vectoriels. Soit alors s et t deux objets quelconques de $\mathcal{V}(a)$. On suppose que t est de longueur > 1 . Soit $k > 0$ l'entier et \tilde{s} la suite tels que $t = \tilde{s} \otimes (k)$. Nous allons démontrer le théorème 5.1 par récurrence sur la longueur de la suite t . Le cas où t est de longueur 1 (ou 0) a été démontré au §5.2. D'après l'hypothèse de récurrence, l'application

$$\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s \otimes (k), \tilde{s}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s \otimes k), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}))$$

est un isomorphisme. Par conséquent, il s'agit de montrer que le diagramme de la figure 6 est commutatif. Or,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}((\widehat{\mathcal{D}})^\flat) &= \left(\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes \tilde{\mathcal{F}}(\widehat{d}_k) \right) \left(\tilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}) \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(k)} \right) \\ &= \left(\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes (d_{\tilde{\mathcal{F}}(k)}(\alpha^{\otimes k} \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(k)}) \right) \left((\tilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}) \otimes \text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(k)}) \right), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient du lemme 3.3. En utilisant la représentation graphique des morphismes dans une catégorie rubanée (donnée, par exemple, dans [18], chap. XIV, ou [49],

chap. I), nous obtenons

$$\tilde{\mathcal{F}}((\hat{\mathcal{D}})^b) = \begin{array}{c} \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \boxed{\tilde{\mathcal{F}}(\hat{\mathcal{D}})} \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(s) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \boxed{\alpha^{\otimes k}} \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \end{array}.$$

Or, si $g \in \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s \otimes k), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}))$, alors

$$g^\sharp \in \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(k)^*)$$

et

$$g^\sharp = \begin{array}{c} \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(s) \\ \boxed{g} \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(s) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \end{array}$$

On en déduit que

$$\left(\tilde{\mathcal{F}}((\hat{\mathcal{D}})^b)\right)^\sharp = \begin{array}{c} \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \boxed{\tilde{\mathcal{F}}(\hat{\mathcal{D}})} \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(s) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \boxed{\alpha^{\otimes k}} \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \boxed{\tilde{\mathcal{F}}(\hat{\mathcal{D}})} \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(s) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \boxed{\alpha^{\otimes k}} \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \\ \downarrow \tilde{\mathcal{F}}(k) \end{array} = (\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes \alpha^{\otimes k}) \tilde{\mathcal{F}}(\hat{\mathcal{D}}).$$

Or $(\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes k}) : \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(k)^*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(t))$ est un isomorphisme, donc l'application

$$\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, t) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(t))$$

qui envoie $\hat{\mathcal{D}}$ sur $\tilde{\mathcal{F}}(\hat{\mathcal{D}}) = (\text{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes k}) \left(\tilde{\mathcal{F}}((\hat{\mathcal{D}})^b)\right)^\sharp$ est un isomorphisme. ■

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s \otimes k, \tilde{s}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s \otimes k), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})) \\
\uparrow \scriptstyle b & & \downarrow \scriptstyle \sharp \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, t) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(t)) \\
& & \downarrow \scriptstyle \mathrm{id}_{\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes k} \\
& & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(k)^*)
\end{array}$$

Figure 6.

6 Pleine fidélité : cas d'une racine de l'unité

Nous fixons un nombre complexe a qui une racine primitive $4r^{\text{ème}}$ de l'unité avec $r \geq 3$. Posons $q = a^2$. Rappelons que l'ensemble $J = J(a)$ défini au §2.4 est l'ensemble $\{1, \dots, r-2\}$. Nous allons démontrer que le foncteur $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}(q)$ est pleinement fidèle. D'après le corollaire 3.4, il ne nous reste qu'à démontrer la surjectivité de l'application

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{V}}(a)}(s, s') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s), \overline{\mathcal{F}}(s')) \quad (6.1)$$

pour toute paire (s, s') d'objets de $\overline{\mathcal{V}}(a)$, ce qui achèvera la démonstration du théorème 2.1.

Remarquons qu'il suffit de vérifier que, pour tout objet s de $\overline{\mathcal{V}}(a)$ et tout entier $k \geq 0$, le foncteur $\tilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{V}}(a)}(s, (k)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k))$ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, la démonstration donnée au §5.3 s'étend mot pour mot au cas d'une racine de l'unité. Or nous savons que si P , Z et W sont des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de dimension finie avec Z négligeable, alors

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{R}(q)}(P \oplus Z, W) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{R}(q)}(P, W),$$

(les notations sont celles de §1.3). Il suffit donc de considérer les cas où la partie semi-simple de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ contient un vecteur de plus haut poids k , puisque dans le cas contraire, $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(s), \tilde{\mathcal{F}}(k)) = 0$, ce qui entraîne $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{V}}(a)}(s, (k)) = 0$ d'après le corollaire 3.4.

Nous sommes donc réduits à montrer la surjectivité de l'application

$$\tilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s), \overline{\mathcal{F}}(k)) \quad (6.2)$$

pour toute suite s et pour tout plus haut poids k de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous allons procéder par récurrence sur la longueur m de s . Si $m = 1$, on procède comme dans le cas générique. Au §6.1, nous considérons le cas $m = 2$.

6.1 Cas $m = 2$

Fixons deux entiers $n_1, n_2 \in J$ et k un entier ≥ 0 tel que la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(n_1, n_2)$ contienne un vecteur de plus haut poids k . D'après (4.6) et (4.7), ceci équivaut à

$$k \leq \inf(n_1 + n_2, 2r - 4 - n_1 - n_2) \quad \text{et} \quad k = n_1 + n_2 - 2j,$$

pour un certain entier j tel que $0 \leq j \leq \inf(n_1, n_2)$.

Proposition 6.1 *L'application $\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n_1, n_2), (k)) \rightarrow \text{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\tilde{\mathcal{F}}(n_1, n_2), \tilde{\mathcal{F}}(k))$ est surjective.*

Démonstration. Au vu du §5.1, il suffit d'établir que le scalaire $b_{n_1-i, n_2-i, j-i} \neq 0$ pour tout $i = 0, \dots, j-1$. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de le prouver pour $i = 0$. En effet, le triplet $(n_1 - i, n_2 - i, j - i)$ vérifie les conditions imposées à (n_1, n_2, j) pour tout $i = 0, \dots, j-1$. Rappelons que

$$b_{n_1, n_2, j} = q^{-n_2+j-1} \frac{[n_1 + n_2 - j + 1]_q}{[n_1]_q}.$$

Nous devons montrer que $[n_1 + n_2 - j + 1]_q \neq 0$. Comme $[n]_q = 0$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod r$, il suffit de montrer que $0 < n_1 + n_2 - j + 1 < r$. Or, $j \leq \inf(n_1, n_2)$, donc $n_1 + n_2 - j + 1 > 0$. De plus,

$$n_1 + n_2 - 2j \leq \inf(n_1 + n_2, 2r - 4 - n_1 - n_2),$$

donc $j \geq n_1 + n_2 - r + 2$ et par conséquent $n_1 + n_2 - j + 1 \leq r - 1$. ■

6.2 Cas $m \geq 3$

On part d'un objet s de longueur $m \geq 3$. Soit $s' = (n_1, \dots, n_{m-1})$ l'objet de $\mathcal{V}(a)$ défini par $s = s' \otimes (n_m)$. Soit k un entier ≥ 0 tel que la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ contienne un vecteur de plus haut poids k . Par récurrence, nous admettons que l'application (6.2) est surjective pour tout objet de longueur $< m$.

Par analogie avec le cas générique, soit $\{b_1, \dots, b_N\}$ l'ensemble des entiers tel que pour tout $j = 1, \dots, N$, la dimension p_j de l'espace de plus haut poids b_j de la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(s')$ soit strictement positive et tel qu'il existe un entier ℓ_j vérifiant $0 \leq \ell_j \leq \inf(b_j, n_m)$ et $b_j + n_m - 2\ell_j = k$. Comme au §5.2, les deux lemmes suivants justifient la donnée de cet ensemble.

Lemme 6.2 *Avec les notations précédentes, l'ensemble $\{b_1, \dots, b_N\}$ est non vide.*

Démonstration. Décomposons $\tilde{\mathcal{F}}(s')$ en ses parties semisimples et négligeables: $\tilde{\mathcal{F}}(s') \cong P' \oplus Z'$. Alors

$$\tilde{\mathcal{F}}(s) \cong \tilde{\mathcal{F}}(s') \otimes \tilde{\mathcal{F}}(n_m) \cong (P' \otimes V_{n_m}) \oplus (Z' \otimes V_{n_m}).$$

Puisque $P' \cong \bigoplus_{i=1}^d V_{k_i}$ avec $0 \leq k_i \leq r-2$ pour tout $i = 1, \dots, d$, nous avons

$$P' \otimes V_{n_m} \cong \bigoplus_{i=1}^d (V_{k_i} \otimes V_{n_m}).$$

Or, d'après (4.7),

$$V_{k_i} \otimes V_{n_m} \cong \bigoplus_{\substack{t=|n_m-k_i| \\ t \equiv k_i+n_m \pmod{2}}}^{\inf(k_i+n_m, 2r-4-k_i-n_m)} V_t \oplus Z \quad (6.3)$$

où Z est un module négligeable. De plus, nous savons qu'il existe un vecteur de plus haut poids k dans la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous en déduisons que pour un certain k_i , il existe un indice t dans (6.3) tel que $t = k$, et donc, d'après (4.9), des entiers i et ℓ tels que $k_i + n_m - 2\ell = k$ et $0 \leq \ell \leq \inf(k_i, n_m)$, ce qui prouve que l'ensemble $\{b_1, \dots, b_N\}$ est non vide. ■

Pour tout $j = 1, \dots, N$, soit $w_1^j, \dots, w_{p_j}^j$ une base de l'espace de plus haut poids b_j de la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(s')$. En procédant comme pour le lemme 5.6, on établit le lemme suivant.

Lemme 6.3 *La famille de vecteurs $v_p^j = v(w_p^j, v_0^{n_m}, \ell_j)$ $1 \leq j \leq N$, $1 \leq p \leq p_j$, forme une base de l'espace de plus haut poids k de la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$.*

Nous poursuivons comme dans le cas générique. Toutefois, remarquons que la proposition 5.8 n'est pas valable dans le cas d'une racine de l'unité.

Proposition 6.4 *L'application $\tilde{\mathcal{F}} : \text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k)) \longrightarrow \text{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s), \overline{\mathcal{F}}(k))$ est surjective.*

Démonstration. Établissons cette proposition par analogie avec la proposition 5.9, *i.e.* montrons qu'il existe une base $v_1, \dots, v_{g'}$ de l'espace de plus haut poids k de la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$, des diagrammes $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{g'}$ du bon type $(s, (k))$ et des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_{g'}$, tous non nuls tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_{p'}) &= 0 & \text{si } 1 \leq p' < p \leq g', \\ \mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_p) &= \alpha_p v_0^{\otimes k} & \text{si } p \leq g', \end{aligned}$$

où $g' = \dim \left(\text{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s), \overline{\mathcal{F}}(k)) \right)$. Puisque la dimension de l'espace de plus haut poids k de la partie semisimple de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ dans le cas d'une racine de l'unité est inférieure à la dimension de l'espace de plus haut poids de $\tilde{\mathcal{F}}(s)$ dans le cas générique, on a $g' \leq g = \dim \left(\text{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k)) \right)$. La démonstration de la proposition 5.9 s'adapte donc au cas présent dès que l'on remplace les espaces de plus haut poids par les espaces de plus haut poids des parties semisimples et le lemme 5.6 par le lemme 6.3. Nous conservons la définition des diagrammes $\overline{\mathcal{D}}_{j,p}$ et la proposition 5.7. ■

A partir de la proposition 6.4 nous procédons comme dans la démonstration du théorème 5.1 à la fin du §5.2 qui s'applique encore ici pour ce qui est de la surjectivité. En conclusion, l'application (6.2) est surjective pour tout $m \geq 3$.

Deuxième partie

Une démonstration topologique du principe de symétrie de Kirby-Melvin

Introduction

Cette deuxième partie est une application de la première. Dans un article [24] paru dans *Inventiones mathematicae* en 1991, Kirby et Melvin ont établi ce qu'ils appellent un "principe de symétrie" pour l'invariant de Reshetikhin-Turaev associé à un module simple du groupe quantique $U_q(sl_2)$ lorsque le paramètre q est une racine primitive $2r$ -ième de l'unité.

Nous énonçons maintenant ce principe. Notons V_k ($0 \leq k \leq r-2$) le $U_q(sl_2)$ -module simple de plus haut poids q^k et de dimension $k+1$. Soit L un entrelacs parallélisé ("framed link") dont on colorie chaque composante connexe par un des modules simples V_0, \dots, V_{r-2} . Distinguons une composante K de L et soit V_k sa couleur. Nous notons $\mathcal{J}_{L/K;k}$ l'invariant de Reshetikhin-Turaev correspondant à cette donnée. En utilisant la théorie des représentations de $U_q(sl_2)$, Kirby et Melvin ont montré que $\mathcal{J}_{L/K;k}$ et $\mathcal{J}_{L/K;r-2-k}$ sont égaux à multiplication par un scalaire près. Comme, d'après la première partie de cette thèse, la théorie des représentations de $U_q(sl_2)$ admet une description topologique, il est naturel de se demander si le principe de symétrie de Kirby et Melvin peut se démontrer de manière purement topologique. Le but de cette partie est de répondre à cette question par l'affirmative.

Nous donnons du principe de symétrie de Kirby-Melvin la version suivante. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq r-2$, on a

$$\mathcal{J}_{L/K;r-2-k} = i \sum_{\ell_j \equiv 1 \pmod{2}}^{2r+2} \text{lk}(K, L_j) + \text{lk}(K, K)(3r-2-2k) \mathcal{J}_{L/K;k}. \quad (1)$$

Dans cette formule, $i \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de -1 , $(L_j)_j$ est la famille des composantes connexes de L différentes de la composante distinguée K , $(V_{\ell_j})_j$ est le coloriage de $(L_j)_j$, et pour tout couple de nœuds (K_1, K_2) , l'entier $\text{lk}(K_1, K_2)$ est le nombre d'enlacement de K_1 avec K_2 .

La démonstration que nous proposons se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, on remarque que dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$ introduite dans la première partie, on a un isomorphisme de $U_q(sl_2)$ -modules

$$V_{r-2-k} \cong V_k \otimes V_{r-2},$$

qui nous permet de ramener la démonstration de (1) au cas $k=0$. De plus, d'après le théorème 2.1 de la première partie, l'invariant d'un nœud K colorié par un module simple V_k est le même que l'invariant de l'entrelacs, colorié par le module fondamental V_1 , composé d'un câblage de k copies de K et du k -ième idempotent de Jones-Wenzl. On montre alors par plusieurs réductions successives qu'il suffit d'établir le principe de symétrie pour les entrelacs

L , dont toutes les composantes sont triviales, et dont les composantes différentes de K ne se croisent pas entre elles et sont coloriées par V_1 , et où K est coloriée par V_{r-2} .

Le plan de cette partie est le suivant. Les §§2-1 sont consacrés aux rappels et aux lemmes techniques indispensables pour la suite. La démonstration du principe de symétrie est donnée dans le §3.

1 Préliminaires topologiques

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition du nombre d'enlacement de deux nœuds. Puis nous démontrons la conservation de la parité des nombres d'enlacement sous certaines opérations. Nous terminons par un lemme combinatoire sur les tresses.

1.1 Nombres d'enlacement

Nous commençons ce paragraphe par un rappel sur les nombres d'enlacement. On pourra consulter [19] pour plus de détails. Soit L un entrelacs et soient M et N deux de ses composantes que nous orientons de manière arbitraire. Nous fixons un diagramme planaire représentant L . À chaque croisement entre M et N nous associons un nombre ± 1 comme sur la figure 7.



Figure 7.

Le *nombre d'enlacement* $\text{lk}(M, N)$ de M et N est la demi-somme des nombres ± 1 associés à tous les croisements entre M et N . Cet entier ne dépend pas du diagramme planaire de L choisi. Lorsqu'on change une seule des orientations de M ou de N , le nombre d'enlacement est multiplié par -1 .

Lorsque L est un entrelacs à $p + 1$ composantes L_1, \dots, L_p, K , nous posons

$$\text{lk}(L, K) = \sum_{j=1}^p \text{lk}(L_j, K).$$

Si de plus chaque composante L_j est coloriée par V_{ℓ_j} , nous posons

$$\bar{\text{lk}}(L, K) = \sum_{\substack{j \\ \ell_j \text{ impair}}} \text{lk}(L_j, K).$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à démontrer la conservation des nombres d'enlacement sous certaines opérations.

Soit L un entrelacs orienté à $p + 1$ composantes L_1, \dots, L_p, K . Nous fixons un certain diagramme planaire représentant L et on suppose que les projections des composantes L_1 et L_2 se croisent. Nous fixons un tel croisement de L_1 et L_2 . Nous l'éliminons en le remplaçant soit par \parallel , soit par \smile . Nous notons L' l'entrelacs obtenu après cette transformation.

Lemme 1.1 *Avec les notations précédentes, nous avons*

$$\text{lk}(L', K) \equiv \text{lk}(L, K) \pmod{2}.$$

Démonstration. On peut orienter L_1 et L_2 de façon que le croisement considéré soit celui de la figure 8. Supposons alors qu'on remplace ce croisement par le diagramme du milieu ou celui de droite de la figure 8. Les deux composantes L_1 et L_2 sont alors transformées en une seule que nous notons L'_0 . Dans le cas du premier remplacement, l'orientation de L'_0 conserve celle de L_1 et celle de L_2 , donc $\text{lk}(L'_0, K) = \text{lk}(L_1, K) + \text{lk}(L_2, K)$. Dans le deuxième cas, l'orientation de L'_0 conserve celle de L_1 et inverse celle de L_2 , donc $\text{lk}(L'_0, K) = \text{lk}(L_1, K) - \text{lk}(L_2, K)$, et ceci prouve le lemme. ■

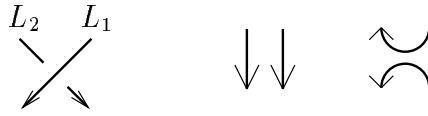


Figure 8.

Soit L un entrelacs orienté dont nous distinguons deux composantes N et M . Nous fixons un certain diagramme planaire de L et on suppose qu'il existe un croisement de N avec elle-même. Nous fixons un tel croisement et nous le désingularisons en le remplaçant soit par \parallel , soit par \smile . Nous notons L' l'entrelacs obtenu après cette transformation.

Lemme 1.2 *Avec les notations précédentes, on a*

$$\text{lk}(L', M) \equiv \text{lk}(L, M) \pmod{2}.$$

Démonstration. Nous devons considérer les croisements de la figure 9.



Figure 9.

Nous traitons le cas du premier croisement. Le deuxième se traite de façon analogue. Nous introduisons quatre points A, B, C et D comme sur la figure 10. Comme N est un nœud, et vu l'orientation, on parcourt ces points dans l'ordre $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$.

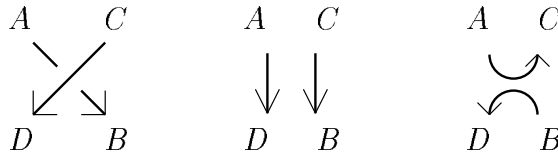


Figure 10.

Si on remplace le croisement par le deuxième diagramme de la figure 10, la composante N est transformée en deux composantes N'_0 et N'_1 munies de l'orientation induite par N . Que l'orientation de N soit conservée est immédiat. De plus, lorsqu'on parcourt l'entrelacs obtenu en partant de A , on rejoint D . Comme l'orientation de N est conservée, on rejoint alors le point A sans passer par B ni C , ce qui prouve que N est transformée en deux composantes. Nous avons donc

$$\text{lk}(N, M) = \text{lk}(N'_0, M) + \text{lk}(N'_1, M)$$

et $\text{lk}(L, M) = \text{lk}(L', M)$. Remplaçons maintenant le croisement par le troisième diagramme de la figure 10. Si on parcourt l'entrelacs ainsi obtenu à partir de A , on rejoint C . De C , on rejoint B car l'orientation de N est inversée sur ce bout. De B , on rejoint D , puis A car sur cette partie l'orientation de N est conservée. On en déduit que N est transformée en une seule composante N' . Nous affirmons que

$$\text{lk}(N, M) = \text{lk}(N'_0, M) - \text{lk}(N'_1, M),$$

où N'_0 et N'_1 sont les composantes obtenues précédemment. Ceci provient du fait que les croisements entre N' et M sont exactement les croisements entre (N'_0, M) et entre (N'_1, M) . Nous avons donc dans tous les cas $\text{lk}(L', M) \equiv \text{lk}(L, M) \pmod{2}$. ■

Soit maintenant un entrelacs L orienté dont nous distinguons deux composantes N et K . Soit $1 \leq n \leq r - 2$ un entier. Soit \mathcal{D} un diagramme simple de type (n, n) (au sens du §2.1 de la première partie), et soit $\hat{\mathcal{D}}$ l'entrelacs obtenu en intercalant le diagramme \mathcal{D} dans un cablage de n copies de N .

Lemme 1.3 *Avec les notations précédentes, on a*

$$\text{lk}(\hat{\mathcal{D}}, K) \equiv \begin{cases} \text{lk}(N, K) \pmod{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 \pmod{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous intercalons le diagramme \mathcal{D} sur une partie de N qui ne croise aucune composante de L . De cette façon, les croisements entre $\hat{\mathcal{D}}$ et les autres composantes de L ont lieu à l'extérieur de \mathcal{D} . De plus, pour $i = 1, \dots, n$, le brin issu de l'entrée i de \mathcal{D} rejoint la sortie i le long du nœud N . Nous notons b_i ce brin. Ainsi, pour tout i , le brin b_i apporte une contribution pour $\text{lk}(\hat{\mathcal{D}}, K)$ égale à $\pm \text{lk}(N, K)$, suivant que l'orientation de b_i conserve ou non l'orientation de N . On en déduit que $\text{lk}(\hat{\mathcal{D}}, K) \equiv n \text{lk}(N, K) \pmod{2}$. ■

1.2 Tresses

Le lemme suivant est un résultat purement combinatoire. Il est nécessaire pour établir le lemme 2.8.

Lemme 1.4 *Soit T une tresse à n brins dont la permutation associée est un cycle de longueur n . Alors on peut remplacer les croisements de T par des diagrammes \parallel ou \smile de façon que la clôture \hat{T} de T soit le nœud trivial.*

Démonstration. Nous notons \mathfrak{S}_n le groupe symétrique sur n éléments, et $\sigma_i \in \mathfrak{S}_n$ la transposition qui échange i et $i + 1$ ($i = 1, \dots, n - 1$). Soit σ le cycle de longueur n associé à T . Alors

$$\sigma = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_m}, \quad (1.1)$$

avec $\sigma_{i_j} \in \mathfrak{S}_n$, et où chaque transposition $\sigma_i \in \mathfrak{S}_n$ apparaît au moins une fois. On transforme alors T de la manière suivante. Pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, nous remplaçons le premier croisement de T correspondant à σ_i par \smile , et les suivants par \parallel . Nous affirmons que la clôture \hat{T} de T (après transformation) est le nœud trivial. Comme il n'y a aucun croisement dans le diagramme \hat{T} , il s'agit de montrer qu'il n'a qu'une seule composante.

Les principes même de la transformation et de la clôture d'une tresse nous permettent de nous restreindre au cas où chaque transposition σ_i , $i = 1, \dots, n - 1$ apparaît une et une seule fois dans le produit (1.1), *i.e.*

$$\sigma = \sigma_{\pi(1)} \sigma_{\pi(2)} \cdots \sigma_{\pi(n-1)},$$

où $\pi \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Comme σ_1 commute avec σ_i dès que $i > 2$, on a

$$\sigma = \sigma_1 \sigma' \text{ ou } \sigma = \sigma' \sigma_1,$$

où $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ est un produit des $n - 2$ transpositions $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2} \in \mathfrak{S}_{n-1}$, chacune intervenant une et une seule fois. Ceci permet d'écrire que

$$T = \begin{array}{c} \diagup \quad | \quad \dots \quad | \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad | \quad \dots \quad | \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{ou} \quad T = \begin{array}{c} | \quad \dots \quad | \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad | \quad \dots \quad | \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad (1.2)$$

où T' est une tresse à $n - 1$ brins dont la permutation associée est σ' . Pour démontrer que \hat{T} est le nœud trivial, nous raisonnons par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, il ne se passe rien. Le passage de $n - 1$ à n est obtenu grâce à l'égalité (1.2), et est expliqué par la figure 11. Sur cette figure, nous n'avons pas dessiné les brins qui ferment la tresse. Lorsqu'on suit le brin issu de 1, on rentre dans T' en 2. Par hypothèse de récurrence, \hat{T}' est le nœud trivial. On ressort donc en 3 après être passé par toutes les entrées et sorties de T' . On rejoint alors 4 et 5, puis à nouveau 1, ce qui prouve que \hat{T} n'a qu'une seule composante. ■

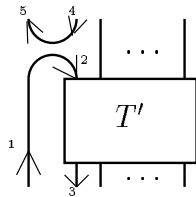


Figure 11.

2 L'invariant de Reshetikhin-Turaev

Dans ce paragraphe, nous rappelons la notion d'entrelacs colorié, la définition de l'invariant de Reshetikhin-Turaev, et nous démontrons quelques résultats qui établissent des égalités entre morphismes dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$.

Dans toute la suite, r est un entier ≥ 3 . Nous fixons q une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ et a une racine primitive $4r^{\text{ème}}$ de 1, telles que $q = a^2$. Nous considérons l'algèbre de Hopf $U_q(sl_2)$ pour cette racine de l'unité. Nous renvoyons le lecteur au §1.4 de la première partie pour ce qui concerne $U_q(sl_2)$ et les catégories de $U_q(sl_2)$ -modules $\mathcal{R}(q)$ et $\overline{\mathcal{R}}(q)$, en particulier pour la définition des modules simples V_k , et au §2.4 pour la définition des catégories $\mathcal{V}(a)$ et $\overline{\mathcal{V}}(a)$. Nous fixons également une racine carrée i de -1 dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

2.1 Expression graphique de l'invariant de Reshetikhin-Turaev

Nous commençons par rappeler la notion d'entrelacs colorié. Soit L un entrelacs muni d'un champ de vecteurs normal (entrelacs parallélisé ou "framé") à p composantes L_1, \dots, L_p . À chaque composante L_j nous associons un objet W_j de la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$. Le module W_j est appelé la *couleur* de L_j et l'ensemble $\{W_1, \dots, W_p\}$ un *coloriage* de l'entrelacs L .

Nous rappelons brièvement la construction de l'invariant de Reshetikhin-Turaev (nous renvoyons à [41] pour les détails). Soit L un entrelacs parallélisé à p composantes L_1, \dots, L_p coloriées respectivement par $V_{\ell_1}, \dots, V_{\ell_p}$. Soit \mathcal{D} un diagramme planaire représentant L . Ce diagramme est construit à partir des composants élémentaires présentés dans la figure 12.

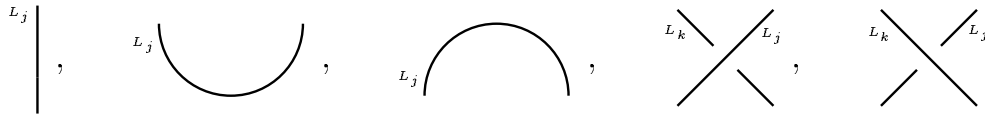


Figure 12.

Il est bien connu que, pour définir l'invariant de Reshetikhin-Turaev \mathcal{J}_L , il suffit d'associer aux diagrammes de la figure 12 des morphismes de la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$, que nous noterons graphiquement à l'aide des dessins de la figure 13.

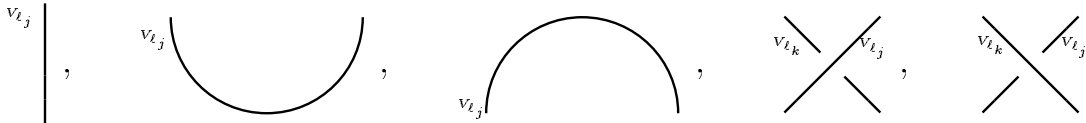


Figure 13.

Par définition, ces morphismes sont les images par le foncteur $\overline{\mathcal{F}}$ (défini dans la première partie au §3.3 par le corollaire 3.4) des morphismes de la catégorie $\overline{\mathcal{V}}(a)$ donnés par la

figure 14. Dans cette figure, f_p désigne le $p^{\text{ème}}$ idempotent de Jones-Wenzl, et nous renvoyons le lecteur au chapitre XII de [49] pour la signification des dessins.

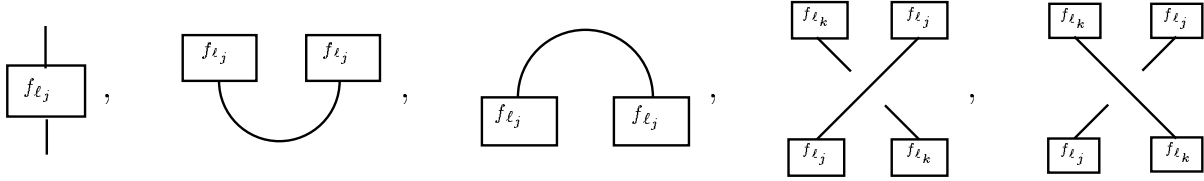


Figure 14.

Le théorème 2.1 de la première partie justifie l'identification des morphismes de la figure 13 avec ceux de la figure 14. Par définition, l'invariant \mathcal{J}_L est égal à l'invariant $\mathcal{J}_{\tilde{L}}$, où l'entrelacs \tilde{L} est obtenu à partir de L en remplaçant la composante L_j par un câblage de j copies de L_j , toutes coloriées par V_1 , et en intercalant le $j^{\text{ème}}$ idempotent de Jones-Wenzl f_j .

2.2 Quelques relations dans $\overline{\mathcal{R}}(q)$ et $\overline{\mathcal{V}}(a)$

Dans ce paragraphe, nous démontrons quelques égalités entre morphismes dans les catégories $\overline{\mathcal{R}}(q)$ et $\overline{\mathcal{V}}(a)$.

Lemme 2.1 *Dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$, on a l'isomorphisme*

$$V_{r-2-k} \cong V_k \otimes V_{r-2}$$

pour tout $k = 0, \dots, r-2$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la décomposition des produits tensoriels dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$ (cf. la formule (4.7) de la première partie). Remarquons qu'il n'existe pas de tel isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{R}(q)$. ■

Lemme 2.2 *Dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$, on a l'égalité*

$$\left| \begin{array}{c} \text{⌚} \\ \vdots \\ \text{⌚} \end{array} \right|^{V_n} = (-1)^n q^{n(n+2)/2} \left| \begin{array}{c} \text{⌚} \\ \vdots \\ \text{⌚} \end{array} \right|^{V_n}$$

pour tout $n = 1, \dots, r-2$.

Démonstration. Par le théorème 2.1 de la première partie, il suffit de montrer que l'on a

$$\left[\begin{array}{c} \text{⌚} \\ \vdots \\ \text{⌚} \end{array} \right]^{V_n} = (-1)^n q^{n(n+2)/2} \left[\begin{array}{c} \text{⌚} \\ \vdots \\ \text{⌚} \end{array} \right]^{V_n}$$

dans la catégorie $\overline{\mathcal{V}}(a)$. Nous procédons par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est bien connu (cf. [49], chap. XII). La figure 15 explique comment passer de $n - 1$ à n . La première égalité de cette figure provient du cas $n = 1$ appliqué à la boucle intérieure. La deuxième égalité est immédiate. Pour obtenir la troisième, nous appliquons la relation de Kauffmann aux $n - 1$ croisements supérieurs et aux $n - 1$ croisements inférieurs. Comme

$$\boxed{f_n} = \boxed{f_n} = 0,$$

(cf. [49], chap.XII), un seul terme apparaît à chaque fois, et un coefficient $(q^{(n-1)/2})^2$ apparaît. Comme

$$\begin{array}{c} | \\ \boxed{f_n} \\ | \\ \boxed{f_p} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{f_p} \\ | \\ \boxed{f_n} \\ | \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \boxed{f_n} \\ | \end{array},$$

(cf. [49], chap.XII); pour $p = n - 1$, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à la boucle formée des $n - 1$ brins extérieurs. Le coefficient final est alors

$$-q^{(2n+1)/2} \times (-1)^{n-1} q^{(n-1)(n+1)/2} = (-1)^n q^{n(n+2)/2}. \blacksquare$$

Figure 15.

2.3 Coloriage par V_{r-2}

Dans ce paragraphe, nous étudions le cas où les coloriages font intervenir le module simple "maximal" V_{r-2} .

Lemme 2.3 Dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$, on a l'égalité

$$\begin{array}{c} V_{r-2} \\ \cup \\ V_{r-2} \end{array} = (-1)^r \begin{array}{c} V_{r-2} \\ | \\ V_{r-2} \end{array}.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.1, nous avons $V_{r-2} \otimes V_{r-2} \cong V_0 \cong \mathbb{C}$. Par conséquent, tous les endomorphismes de $V_{r-2}^{\otimes 2}$ sont proportionnels à l'identité. On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{array}{c} V_{r-2} \\ \cup \\ V_{r-2} \end{array} = \alpha \begin{array}{c} V_{r-2} \\ | \\ V_{r-2} \end{array}. \quad (2.1)$$

Fixons un vecteur v de plus haut poids 0 dans $V_{r-2}^{\otimes 2}$. Le morphisme (2.1) est entièrement défini par sa valeur sur v . Considérons les morphismes

$${}^{V_{r-2}} \smile : \mathbb{C} \longrightarrow V_{r-2}^{\otimes 2} \quad \text{et} \quad \smile_{V_{r-2}} : V_{r-2}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que

$${}^{V_{r-2}} \smile (1) = \beta v \quad \text{et} \quad \smile_{V_{r-2}} (v) = \gamma,$$

et $\alpha = \beta\gamma$. Or, d'après [49], chap. XII,

$$\bigcirc^{V_{r-2}} = \beta\gamma = (-1)^{r-2} [r-1] = (-1)^r,$$

où $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ pour tout entier n . ■

Lemme 2.4 *Il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que le tressage de V_{r-2} dans la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$ vérifie*

$$\begin{array}{c} V_{r-2} \quad V_{r-2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ V_{r-2} \quad V_{r-2} \end{array} = \lambda \begin{array}{c} V_{r-2} \quad V_{r-2} \\ | \quad | \\ | \quad | \\ V_{r-2} \quad V_{r-2} \end{array} = (-1)^r \lambda \begin{array}{c} V_{r-2} \\ \smile \\ V_{r-2} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} V_{r-2} \quad V_{r-2} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ V_{r-2} \quad V_{r-2} \end{array} = \lambda^{-1} \begin{array}{c} V_{r-2} \quad V_{r-2} \\ | \quad | \\ | \quad | \\ V_{r-2} \quad V_{r-2} \end{array} = (-1)^r \lambda^{-1} \begin{array}{c} V_{r-2} \\ \smile \\ V_{r-2} \end{array}.$$

Démonstration. Comme $V_{r-2}^{\otimes 2} \cong V_0$ dans $\overline{\mathcal{R}}(q)$ et comme V_0 est simple, nous avons évidemment les premières égalités pour le tressage et son inverse. Les deux autres égalités proviennent du lemme 2.3. ■

Remarque : Un calcul utilisant la R -matrice universelle de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ (cf. [18]) montre que $\lambda = -i^r$.

Lemme 2.5 *Dans la catégorie $\overline{\mathcal{V}}(a)$, on a les égalités*

$$\begin{array}{c} \boxed{f_{r-2}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{f_{r-2}} \end{array} = q^{(r-2)/2} \begin{array}{c} \boxed{f_{r-2}} \\ | \quad \diagdown \\ | \quad \boxed{f_{r-2}} \end{array} + q^{-(r-2)/2} \begin{array}{c} \boxed{f_{r-2}} \\ \diagup \quad | \\ \boxed{f_{r-2}} \quad \diagdown \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{f_{r-2}} \end{array} = q^{(r-2)/2} \begin{array}{c} \boxed{f_{r-2}} \\ \diagup \quad | \\ \boxed{f_{r-2}} \quad \diagdown \end{array} + q^{-(r-2)/2} \begin{array}{c} \boxed{f_{r-2}} \\ \diagdown \quad | \\ \boxed{f_{r-2}} \quad \diagup \end{array}.$$

Démonstration. Nous donnons la méthode pour établir la première relation. On élimine les $r - 2$ croisements du membre de gauche à l'aide de la relation de Kauffman. On commence par le croisement avec le brin issu de f_{r-2} le plus à droite. On obtient la relation

$$= q^{1/2} \text{ (diagram)} + q^{-1/2} \text{ (diagram)} . \quad (2.2)$$

On applique ensuite à nouveau la relation de Kauffman aux croisements des termes du membre de droite. Or, d'après [49] chap.XII, on a

$$= 0.$$

Ainsi, les éliminations des croisements restants du membre de droite de (2.2) ne font apparaître qu'un seul terme, et on obtient la relation annoncée. ■

Lemme 2.6 Dans la catégorie $\bar{\mathcal{V}}(a)$, on a l'égalité

$$= - \left| \begin{array}{c} r-2 \\ f_{r-2} \\ r-2 \end{array} \right| .$$

Démonstration. D'après le lemme 2.5, et comme $q^{r-2} = -q^{-2}$, on a

$$= -q^{-2} \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} + \text{ (diagram)} + -q^2 \text{ (diagram)} . \quad (2.3)$$

Or, on a les formules suivantes ([49], chap. XII):

$$\left| \begin{array}{c} r-2 \\ f_{r-2} \\ r-2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} r-3 \\ f_{r-3} \\ r-3 \end{array} \right| + [r-3][r-2]^{-1} \left| \begin{array}{c} f_{r-3} \\ r-4 \\ f_{r-3} \end{array} \right| ,$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ f_{r-2} \\ r-3 \end{array} \right| = -[r-1][r-2]^{-1} \left| \begin{array}{c} r-3 \\ f_{r-3} \\ r-3 \end{array} \right| ,$$

et pour tout $n = 0, \dots, r-1$, on a $[r-n] = [n]$. On en déduit que

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array} \\
 \diagdown \\
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array} \\
 \diagup \\
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c} \hline r-2 \\ \hline f_{r-2} \\ \hline r-2 \\ \hline \end{array}
 + [3][2]^{-1}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline r-3 \\ \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array},$$

et

$$\begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 = -[2]^{-1}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline r-3 \\ \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}.$$

De plus, pour tout $k = 1, \dots, r-2$ on a ([49], chap. XII) :

$$\begin{array}{|c} \hline r-k \\ \hline f_{r-k} \\ \hline r-k \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c} \hline r-k-1 \\ \hline f_{r-k-1} \\ \hline r-k-1 \\ \hline \end{array}
 + [r-k-1][r-k]^{-1}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-k-1} \\ \hline r-k-2 \\ \hline f_{r-k-1} \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c} \hline f_k \\ \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline f_k \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 = [3][2]^{-1}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline r-4 \\ \hline f_{r-3} \\ \hline r-4 \\ \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}.$$

En itérant ce calcul, on obtient finalement que

$$\begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}
 = [2]^{-1}
 \begin{array}{|c} \hline f_{r-2} \\ \hline r-3 \\ \hline f_{r-2} \\ \hline \end{array}.$$

De la même manière, on obtient que

$$\text{Diagram} = [2]^{-1} \text{Diagram}$$

Par l'égalité 2.3, on obtient alors

$$\text{Diagram} = -q^{-2} \text{Diagram} + q^{-1}(q - q^{-1})[2] \text{Diagram} \quad (2.4)$$

Rappelons que l'idempotent de Jones-Wenzl f_{r-1} est négligeable (cf. [49], chap. XII) : il est nul dans la catégorie $\overline{\mathcal{V}}(a)$. Par la formule de récurrence définissant les idempotents de Jones-Wenzl (cf. [49], chap. XII), on a alors

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + [2] \text{Diagram} = 0.$$

L'égalité 2.4 donne alors

$$\text{Diagram} = \left(-q^{-2} - q^{-1}(q - q^{-1})\right) \text{Diagram} = - \text{Diagram} \quad \blacksquare$$

Lemme 2.7 *Soit K un nœud tel que $\text{lk}(K, K) = 0$. Alors*

$$\mathcal{J}_{K; r-2} = (-1)^r.$$

Démonstration. On peut choisir une représentation planaire de K qui est la clôture d'une tresse T à n brins. Nous munissons K d'une orientation de façon que les brins de la tresse T soient orientés de haut en bas. Les croisements de T sont donc ceux de la figure 16. Comme $\text{lk}(K, K) = 0$, il y a autant de croisements positifs que de croisements négatifs. D'après le lemme 2.4, on peut remplacer chacun des croisements par

$$\text{Diagram}$$

Chaque substitution fait apparaître un coefficient λ ou λ^{-1} suivant que le croisement supprimé est positif ou non. Nous avons donc $\mathcal{J}_{K;r-2} = \mathcal{J}_{L;r-2}$, où L est l'entrelacs à n composantes triviales disjointes, toutes coloriées par V_{r-2} . Or, d'après [49], chap.XII, on a

$$\bigcirc^{V_{r-2}} = (-1)^{r-2}[r-1] = (-1)^r;$$

donc $\mathcal{J}_{K;r-2} = (-1)^{nr}$.

Il reste à établir que n est impair. Comme K est un nœud, la permutation représentée par T est un cycle de longueur n , de signature $(-1)^{n+1}$. Cette permutation est paire car c'est la composée de $2p$ transpositions; donc n est impair. ■



Figure 16.

Lemme 2.8 *Soit L un entrelacs dont une composante K vérifie $\text{lk}(K, K) = 0$. Alors on peut remplacer les croisements de K avec elle-même par des diagrammes \parallel ou \smile de façon à obtenir le nœud trivial \bigcirc . De plus, si L' est l'entrelacs L obtenu après cette transformation, alors*

$$\mathcal{J}_{L/K;r-2} = \mathcal{J}_{L'/\bigcirc;r-2} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{L/K;0} = \mathcal{J}_{L'/\bigcirc;0}.$$

Démonstration. Représentons K comme la clôture d'une tresse T . Comme K est coloriée par V_{r-2} , on peut remplacer les croisements de T par des diagrammes \parallel ou \smile (lemme 2.4). D'après le lemme 1.4, on peut choisir ces remplacements de façon à transformer K en le nœud trivial. On a donc

$$\mathcal{J}_{L/K;r-2} = \gamma \mathcal{J}_{L'/\bigcirc;r-2},$$

où $\gamma \in \mathbb{C}$ est le produit des coefficients qui apparaissent lorsqu'on change les croisements, cf. lemme 2.4. Or, on a

$$\mathcal{J}_{K;r-2} = \gamma \mathcal{J}_{\bigcirc;r-2},$$

puisque le changement des croisements de K n'affecte pas les autres composantes de L . D'après le lemme 2.7, $\mathcal{J}_{K;r-2} = \mathcal{J}_{\bigcirc;r-2} \neq 0$. On en déduit que $\gamma = 1$. L'égalité pour le coloriage par V_0 découle immédiatement du fait que V_0 est l'objet unité de la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$. ■

3 Démonstration du principe de symétrie

Dans ce paragraphe, nous démontrons la formule (1). La démonstration se fait après cinq réductions.

Nous fixons un entrelacs orienté colorié L à $p+1$ composantes L_1, \dots, L_p et une composante distinguée K . La couleur de la composante L_j est V_{ℓ_j} , où $0 \leq \ell_j \leq r-2$. Comme V_0

est l'objet unité de la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$, une composante colorié par V_0 peut être enlevée sans changer \mathcal{J}_L . Nous pouvons donc supposer $\ell_j > 0$ pour tout j .

3.1 Première réduction

Nous montrons qu'on peut se ramener au cas où $\text{lk}(K, K) = 0$. En effet, supposons $\text{lk}(K, K) \neq 0$ et soit \tilde{K} le nœud obtenu en tordant le nœud K avec $|\text{lk}(K, K)|$ boucles du signe contraire de $\text{lk}(K, K)$. (Le premier diagramme de la figure 17 est une boucle positive, le deuxième une boucle négative). On a alors $\text{lk}(\tilde{K}, \tilde{K}) = 0$. Soit L' l'entrelacs obtenu de L en remplaçant K par \tilde{K} . Supposons que l'on ait démontré (1) pour le couple (L', \tilde{K}) . Alors on a

$$\mathcal{J}_{L'/\tilde{K}; r-2-k} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(L, \tilde{K})} \mathcal{J}_{L'/\tilde{K}; k}.$$

D'après le lemme 2.2, on a

$$\mathcal{J}_{L/K; k} = (-1)^{\text{lk}(K, K)k} q^{\text{lk}(K, K)k(k+2)/2} \mathcal{J}_{L'/\tilde{K}; k}$$

pour tout $k = 0, \dots, r-2$. Or, $\overline{\text{lk}}(L', \tilde{K}) = \overline{\text{lk}}(L, K)$; on en déduit que

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2-k} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(L, K)} (-1)^{\text{lk}(K, K)r} q^{\text{lk}(K, K)((r-2-k)(r-k)-k(k+2))/2} \mathcal{J}_{L'/\tilde{K}; k}.$$

Or,

$$(r-2-k)(r-k) - k(k+2) = r(r-2-2k), \quad q^{r/2} = i \quad \text{et} \quad (-1)^{\text{lk}(K, K)r} = i^{2\text{lk}(K, K)r},$$

ce qui prouve que

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2-k} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(L, K)} i^{\text{lk}(K, K)(3r-2-2k)} \mathcal{J}_{L'/\tilde{K}; k}.$$



Figure 17.

3.2 Deuxième réduction

Nous supposons que $\text{lk}(K, K) = 0$ et nous montrons qu'on peut se ramener au cas où $k = 0$. En effet, d'après le lemme 2.1, on a

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2-k} = \mathcal{J}_{L/K; k \otimes r-2},$$

où $\mathcal{J}_{L/K; k \otimes r-2}$ désigne l'invariant de L lorsque la composante K est coloriée par $V_k \otimes V_{r-2}$. Or,

$$\mathcal{J}_{L/K; k \otimes r-2} = \mathcal{J}_{\tilde{L}/K; r-2},$$

où \tilde{L} est l'entrelacs obtenu à partir de L en remplaçant la composante K par un cablage de deux copies de K , l'une coloriée par V_k , l'autre par V_{r-2} . Alors

$$\mathcal{J}_{\tilde{L}/K; r-2} = (-1)^{r + \overline{\text{lk}}(\tilde{L}, K)} \mathcal{J}_{\tilde{L}/K; 0}. \quad (3.1)$$

Or,

$$\overline{\text{lk}}(\tilde{L}, K) \equiv \begin{cases} \overline{\text{lk}}(L, K) + \text{lk}(K, K) \pmod{2} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \overline{\text{lk}}(L, K) \pmod{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\text{lk}(K, K) = 0$, on déduit de l'égalité (3.1) que

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2-k} = (-1)^{r + \overline{\text{lk}}(L, K)} \mathcal{J}_{\tilde{L}/K; 0} = (-1)^{r + \overline{\text{lk}}(L, K)} \mathcal{J}_{L/K; k},$$

car V_0 est l'objet unité de la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$.

3.3 Troisième réduction

On suppose que $k = 0$ et que $\text{lk}(K, K) = 0$. Nous montrons maintenant qu'on peut se ramener au cas où toutes les composantes de L différentes de K sont coloriées par V_1 .

Nous démontrons que, si le principe de symétrie (1) est vrai lorsque $\ell_j = 1$ pour tout j , alors il est vrai pour toutes les valeurs de ℓ_j . Nous procédons par récurrence sur le nombre n de composantes de L différentes de K , coloriées par un module V_ℓ où $\ell > 1$. Le cas $n = 0$ satisfait l'hypothèse que nous faisons dans cette réduction.

Soit L un entrelacs colorié, avec n composantes différentes de K coloriées par un V_ℓ avec $\ell > 1$. Nous fixons une composante L_j coloriée par V_{ℓ_j} avec $\ell_j > 1$. Soit f_{ℓ_j} le $\ell_j^{\text{ème}}$ idempotent de Jones-Wenzl. Nous avons

$$f_{\ell_j} = \sum_m \lambda_{j,m} \mathcal{D}_{j,m},$$

où chaque $\mathcal{D}_{j,m}$ est un diagramme planaire de type (ℓ_j, ℓ_j) , et où $\lambda_{j,m} \in \mathbb{C}$. Notons $\hat{\mathcal{D}}_{j,m}$ l'entrelacs obtenu en intercalant le diagramme $\mathcal{D}_{j,m}$ dans un cablage de ℓ_j copies de L_j . D'après le théorème 2.1 de la première partie, nous avons

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2} = \sum_m \lambda_{j,m} \mathcal{J}_{L^{j,m}/K; r-2},$$

où $L^{j,m}$ est l'entrelacs obtenu en remplaçant L_j par $\hat{\mathcal{D}}_{j,m}$, et où toutes les composantes de $\hat{\mathcal{D}}_{j,m}$ sont coloriées par V_1 . En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'ordre $n - 1$ à $L^{j,m}$, on obtient

$$\mathcal{J}_{L^{j,m}/K; r-2} = (-1)^{r + \overline{\text{lk}}(L^{j,m}, K)} \mathcal{J}_{L^{j,m}/K; 0}.$$

Comme toutes les composantes de $\hat{\mathcal{D}}_{j,m}$ sont coloriées par V_1 , on a

$$\overline{\text{lk}}(L^{j,m}, K) \equiv \sum_{\substack{b \neq j \\ \ell_b \text{ impair}}} \text{lk}(L_b, K) + \text{lk}(\hat{\mathcal{D}}_{j,m}, K).$$

Or, d'après le lemme 1.3, on a

$$\text{lk}(\hat{\mathcal{D}}_{j,m}, K) \equiv \begin{cases} \text{lk}(L_j, K) \pmod{2} & \text{si } \ell_j \text{ est impair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que $\overline{\text{lk}}(L^{j,m}, K) = \overline{\text{lk}}(L, K)$, et donc que

$$\mathcal{J}_{L/K;r-2} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(L,K)} \sum_m \lambda_{j,m} \mathcal{J}_{L^{j,m}/K;0} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(L,K)} \mathcal{J}_{L/K;0}.$$

3.4 Quatrième réduction

Nous supposons que $\text{lk}(K, K) = 0$ et nous montrons qu'on peut se ramener au cas où K est le nœud trivial.

D'après le lemme 2.8 (et en gardant les notations de ce lemme), on a

$$\mathcal{J}_{L/K;r-2} = \mathcal{J}_{L'/\circ;r-2} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{L/K;0} = \mathcal{J}_{L'/\circ;0}.$$

Supposons alors que

$$\mathcal{J}_{L'/\circ;r-2} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(L',\circ)} \mathcal{J}_{L'/\circ;0}.$$

D'après le lemme 1.2 (avec $N = K$ et M une autre composante de L), on a $\overline{\text{lk}}(L, K) \equiv \overline{\text{lk}}(L', \circ) \pmod{2}$, donc

$$\mathcal{J}_{L/K;r-2} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(L,K)} \mathcal{J}_{L/K;0}.$$

3.5 Cinquième réduction

On suppose que $\text{lk}(K, K) = 0$ et que toutes les composantes de L différentes de K sont coloriées par V_1 . Nous montrons qu'on peut se ramener au cas où les composantes de L différentes de K sont sans auto-croisement et qu'elles ne se croisent pas deux à deux entre elles.

Nous démontrons cette réduction par récurrence sur le nombre de croisements entre les composantes de L différentes de K . Nous fixons deux composantes L_n et L_m de L différentes de K et on suppose qu'elles se croisent. La réduction précédente permet de supposer que toutes les composantes de L différentes de K sont coloriées par V_1 . Nous pouvons alors éliminer le croisement que nous considérons par la relation de Kauffman pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{L/K;r-2-k} &= q^{1/2} \mathcal{J}_{L'/K;r-2-k} + q^{-1/2} \mathcal{J}_{L''/K;r-2-k} \\ &= q^{1/2} (-1)^{r+\text{lk}(L',K)} \mathcal{J}_{L'/K;k} + q^{-1/2} (-1)^{r+\text{lk}(L'',K)} \mathcal{J}_{L''/K;k}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où L' (resp. L'') est l'entrelacs obtenu en remplaçant le croisement par $||$ (resp. \smile), et où la deuxième égalité provient de l'hypothèse de récurrence appliquée à L' et L'' . Dans L' (resp.

L''), les composantes L_n et L_m sont remplacées par une composante $L'_{n,m}$ (resp. $L''_{n,m}$). Nous avons alors

$$\text{lk}(L_n, K) + \text{lk}(L_m, K) \equiv \text{lk}(L'_{n,m}, K) \equiv \text{lk}(L''_{n,m}, K) \pmod{2}. \quad (3.3)$$

En effet, si $L_n \neq L_m$, on applique le lemme 1.1 avec $L_1 = L_n$ et $L_2 = L_m$, et si $L_n = L_m$, on applique le lemme 1.2 avec $N = L_n = L_m$ et $M = K$. D'après (3.2) et (3.3), on a

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2-k} = (-1)^{r+\text{lk}(L,K)} (q^{1/2} \mathcal{J}_{L'/K; k} + q^{-1/2} \mathcal{J}_{L''/K; k}) = (-1)^{r+\text{lk}(L,K)} \mathcal{J}_{L/K; 0}.$$

3.6 La démonstration

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le principe de symétrie. Rappelons qu'il reste à démontrer la formule (1) lorsque $k = 0$, que le nœud K est le nœud trivial avec $\text{lk}(K, K) = 0$, et que les autres composantes de L sont sans croisement entre elles et sans auto-croisement, et qu'elles sont coloriées par V_1 . Soit p le nombre de composantes de L différentes de K . Nous démontrons la formule (1) par récurrence sur le nombre (nécessairement pair) c de croisements entre K et les autres composantes de L .

Si $c = 0$, nous avons

$$\mathcal{J}_{L/K; 0} = (-[2])^p,$$

car V_0 est l'objet unité de la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$ et $\mathcal{J}_{0; 1} = -[2]$, et

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2} = (-[2])^p (-1)^r,$$

car

$$\bigcirc^{V_{r-2}} = (-1)^{r-2} [r-1] = (-1)^r$$

(cf. [49] chap.XII), ce qui prouve la formule (1) lorsque $c = 0$.

Nous supposons maintenant la formule (1) vraie pour toute configuration avec c croisements. Soit L un entrelacs dont le nombre de croisements entre K et les autres composantes est $c+2$. Soit A un croisement entre K et une composante L_n , et soit B le croisement suivant entre K et L_n lorsqu'on parcourt L_n dans le sens de son orientation. Les portions d'arcs de K et L_n entre A et B (lorsqu'on parcourt ces nœuds dans le sens de leur orientation) délimitent un disque \mathcal{D} du plan. Nous supposons tout d'abord que l'intérieur de ce disque est vide. Dans ce cas, les croisements A et B sont soit du type de la figure 18, soit du type de la figure 19 (ou de leur symétrique). Dans la première situation, nous pouvons directement éliminer ces croisements et appliquer l'hypothèse de récurrence.

Dans la deuxième situation, nous considérons l'entrelacs \tilde{L} obtenu à partir de L en éliminant les croisements A et B comme sur la figure 20 (ou sa symétrique). D'après le lemme 2.6, nous avons

$$\mathcal{J}_{L/K; r-2} = -\mathcal{J}_{\tilde{L}/K; r-2},$$

et, comme V_0 est l'objet unité de la catégorie $\overline{\mathcal{R}}(q)$, nous avons

$$\mathcal{J}_{L/K; 0} = \mathcal{J}_{\tilde{L}/K; 0}.$$

Par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\mathcal{J}_{\tilde{L}/K;r-2} = (-1)^{r+\overline{\text{lk}}(\tilde{L},K)} \mathcal{J}_{\tilde{L}/K;0}.$$

Or, $\overline{\text{lk}}(L, K) \equiv \overline{\text{lk}}(\tilde{L}, K) + 1 \pmod{2}$, ce qui prouve la formule (1).

Nous traitons maintenant le cas où l'intérieur du disque \mathcal{D} est non vide. Par le deuxième mouvement de Reidemeister, nous sortons de \mathcal{D} toutes les composantes L_m qui sont complètement incluses dans \mathcal{D} . Si l'intérieur de notre disque est vide après cette opération, nous sommes ramené au cas précédent. Sinon, il existe une composante $L_m \neq L_n$ qui croise K sur le bord de \mathcal{D} . Notons A' ce croisement, et B' le croisement suivant entre K et L_m . Comme L_m et L_n ne se croisent pas, nous avons $B' \in \mathcal{D}$. Soit \mathcal{D}' le disque construit sur A' et B' . Nous sommes ramenés au raisonnement précédent en remplaçant \mathcal{D} par \mathcal{D}' . Nous aboutissons nécessairement à un disque dont l'intérieur est vide car il n'y a qu'un nombre fini de croisements entre K et les autres composantes de L . ■



Figure 18.

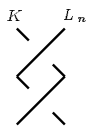


Figure 19.



Figure 20.

Troisième partie

Une R -matrice universelle pour $U_h(D_x)$

Introduction

Les groupes quantiques introduits autour de 1983-85 par Drinfeld et Jimbo sont des déformations à un paramètre des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples complexes. Techniquement, ces “quantifications” sont des algèbres de Hopf munies de “ R -matrices universelles”, c’est-à-dire d’éléments qui sont responsables de l’existence de solutions de la fameuse équation de Yang-Baxter et donc de représentations des groupes de tresses.

Dans les années 1970 Victor Kac [17] a étudié une généralisation naturelle des algèbres de Lie semisimples, à savoir les superalgèbres de Lie. Dans la classification qu’il en donne, il y a ce que l’on peut appeler des superalgèbres “classiques” comme $sl(n|m)$ ou $osp(n|m)$ et des superalgèbres exceptionnelles. Parmi ces dernières, il y en a une, notée $D(2,1,x)$ dans [17], et que nous noterons D_x , qui dépend d’un paramètre continu x (c’est la seule). La superalgèbre de Lie D_x joue un rôle particulier en physique où elle fournit la seule théorie topologique quantique des champs (TQFT) de Chern-Simons pour laquelle la théorie conforme des champs (CFT) de dimension deux correspondante a une supersymétrie $N = 4$. Elle joue aussi un rôle particulier dans les travaux récents de Pierre Vogel [51] et de Jens Lieberum [33] sur les invariants de Vassiliev.

Après les algèbres de Lie semisimples, les superalgèbres de Lie ont également été quantifiées (par Gould *et al.*, Leites *et al.*, Scheunert, etc.). Les quantifications obtenues sont des superalgèbres de Hopf munies de bases de type Poincaré-Birkhoff-Witt.

Pour ce qui est de l’existence d’une R -matrice universelle pour les supergroupes quantiques, elle a été établie pour les quantifications de toutes les superalgèbres de Lie classifiées par Kac, à l’exception précisément de D_x . Dans cette partie, nous comblons cette lacune en construisant explicitement une R -matrice universelle pour la quantification $U_h(D_x)$.

La méthode utilisée est celle du double quantique introduite par Drinfeld, méthode dont se sont servis Marc Rosso, Kirillov-Reshetikhin et Levendorsky-Soibelman dans le cas des groupes quantiques. Cette méthode s’étend au cas $\mathbb{Z}/2$ -gradué. Nous définissons des analogues des vecteurs de racines positives et négatives. Nous définissons également l’analogue de la sous-algèbre positive U_+ (resp. sous-algèbre négative U_-) engendrée par les vecteurs de racines positives (resp. négatives), et nous construisons un accouplement de Hopf entre U_+ et U_- . Ensuite, nous calculons les relations de commutation entre les vecteurs de racines ainsi que leur coproduit. Ceci nous permet de construire des bases de U_+ et U_- , duales pour l’accouplement de Hopf. Nous en déduisons une R -matrice universelle pour $U_h(D_x)$.

En application, nous exhibons une solution de l’équation de Yang-Baxter dans le carré tensoriel d’un $U_h(D_x)$ -module topologiquement libre de rang six sur l’anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[h]]$.

Le plan est le suivant. Les §§1.1-1.2-1.3 sont consacrés à des rappels sur les superalgèbres de Hopf, sur D_x et sur $U_h(D_x)$. Au §1.4 nous énonçons le résultat principal (théorème 1.1), et au §1.5 nous en donnons une application. Le §2.1 est consacré à la construction d'un accouplement de Hopf et de ses propriétés et le §2.2 à la construction d'un double quantique \mathcal{D} . Au §3.1 nous établissons des relations vérifiées dans \mathcal{D} et nous terminons par la démonstration du théorème 1.1 au §3.2.

1 Énoncé du théorème principal et application

Dans ce paragraphe, nous commençons par les rappels nécessaires pour la suite sur les superalgèbres de Hopf, l'équation de Yang-Baxter graduée et les R -matrices universelles. Ensuite, nous donnerons la définition du supergroupe quantique $U_h(D_x)$ qui est la quantification de la superalgèbre de Lie D_x . Nous terminerons par l'énoncé des théorèmes principaux.

Le contenu du §1.1 se trouve dans de nombreux articles. On pourra notamment consulter [3, 7, 44, 54, 55, 56, 58].

1.1 Rappels sur les superalgèbres de Hopf

On note \mathbb{C} le corps des nombres complexes. Un *superespace vectoriel* V est un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'une graduation par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *i.e.* d'une somme directe de deux espaces vectoriels $V = V_0 \oplus V_1$, où V_0 est la partie *paire* de V et V_1 la partie *impaire*. Les éléments de V_0 (resp. de V_1) sont dits *homogènes pairs* (resp. *homogènes impairs*). Si $v \in V_0$, on pose $|v| = 0$ et si $v \in V_1$, on pose $|v| = 1$, et on appelle *degré* ces quantités. Le corps \mathbb{C} est un superespace dont la partie impaire est réduite à 0. Le produit tensoriel de deux superespaces V et W est le superespace $V \otimes W = (V \otimes W)_0 \oplus (V \otimes W)_1$, où

$$(V \otimes W)_0 = (V_0 \otimes V_0) \oplus (V_1 \otimes V_1), \quad (V \otimes W)_1 = (V_0 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_0).$$

Étant donné deux superespaces V et W , un *morphisme de superespaces* $f : V \rightarrow W$ est une application linéaire telle que $f(V_i) \subset W_i$. Dans toute la suite, le morphisme identité d'un superespace V sera noté id_V . La *volte* de deux superespaces V, W est le morphisme de superespaces $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ défini sur des éléments homogènes $v \in V, w \in W$ par

$$\tau(v \otimes w) = (-1)^{|v||w|} w \otimes v. \quad (1.1)$$

(La volte sera notée τ pour tous les couples de superespaces.)

Une *superalgèbre* est un triplet (A, μ, η) où A est un superespace, $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ et $\eta : \mathbb{C} \rightarrow A$ des morphismes de superalgèbres tels que $\mu(\mu \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \mu)$ et $\mu(\eta \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \eta) = \text{id}_A$. On notera $\mu(a \otimes a') = aa'$ pour $a, a' \in A$. Étant donné deux algèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) , un morphisme de superalgèbres $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de superespaces tel que $f(aa') = f(a)f(a')$ pour tous $a, a' \in A$. Le produit tensoriel de deux superalgèbres (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) est une superalgèbre $(A \otimes B, \mu_{A \otimes B}, \eta_{A \otimes B})$ où

$\mu_{A \otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\text{id}_A \otimes \tau \otimes \text{id}_B)$ et $\eta_{A \otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$. On notera que pour des éléments homogènes $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$, on a

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'. \quad (1.2)$$

Une *superalgèbre de Hopf* $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est la donnée d'une superalgèbre (A, μ, η) , de morphismes de superalgèbres $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ (*le coproduit*) et $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$ (*la coïunité*), et d'un morphisme de superespaces $S : A \rightarrow A$ (*l'antipode*) tels que

1. $(\Delta \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \Delta)\Delta$,
2. $(\varepsilon \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id}_A$,
3. $\mu(\text{id}_A \otimes S)\Delta = \mu(S \otimes \text{id}_A)\Delta = \eta\varepsilon$.

Nous utiliserons la notation standard de Sweedler ($a \in A$):

$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \quad (\Delta \otimes \text{id}_A)\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)}.$$

Rappelons également que l'antipode est un anti-morphisme de superalgèbre, *i.e.*

$$S(aa') = (-1)^{|a||a'|} S(a')S(a), \quad a, a' \in A \text{ homogènes.}$$

Étant donné une superalgèbre de Hopf et $r = \sum_i a_i \otimes b_i \in (A \otimes A)_0$, on pose

$$r_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, \quad r_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i, \quad r_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i \in A \otimes A \otimes A.$$

On dit que le 2-tenseur r vérifie *l'équation de Yang-Baxter graduée* si

$$r_{12}r_{13}r_{23} = r_{23}r_{13}r_{12}. \quad (1.3)$$

La superalgèbre de Hopf A est dite *tressée* s'il existe un élément inversible $R \in (A \otimes A)_0$ tel que

$$R\Delta(a) = (\tau \circ \Delta)(a)R, \quad \forall a \in A, \quad (1.4)$$

$$(\Delta \otimes \text{id}_A)R = R_{13}R_{23}, \quad (\text{id}_A \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}. \quad (1.5)$$

L'élément R est appelé *R-matrice universelle* de A . Il vérifie l'équation de Yang-Baxter graduée (1.3). Si $R = \sum a_i \otimes b_i$, l'élément $u = \sum (-1)^{|a_i|} S(b_i)a_i \in A$ est inversible, et si $uS(u)$ admet une racine carrée $\theta \in A$, la superalgèbre A est *rubanée* (*cf.* [18]). Dans ce cas, la catégorie des A -modules est une *catégorie rubanée* au sens de Turaev (on pourra consulter [49, 19, 18] pour la définition). Pour tout couple (V, W) de A -modules et pour tout $v \in V$, $w \in W$, le *tressage* $c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ et le *twist* $\theta_V : V \rightarrow V$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} c_{V,W}(v \otimes w) &= \tau(R(v \otimes w)), \\ \theta_V(v) &= \theta^{-1}v. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nous rappelons maintenant la construction du *double quantique* de Drinfeld. On pourra consulter [6, 19, 43, 11] pour les détails. Soient A et B deux superalgèbres de Hopf avec antipode inversible. Un *accouplement de Hopf* $\varphi : B \otimes A \rightarrow \mathbb{C}$ est un morphisme de superspaces tel que

$$\varphi(bb' \otimes a) = \sum_{(a)} (-1)^{|b'| |a_{(1)}|} \varphi(b \otimes a_{(1)}) \varphi(b' \otimes a_{(2)}), \quad (1.7)$$

$$\varphi(b \otimes aa') = \sum_{(b)} \varphi(b_{(1)} \otimes a') \varphi(b_{(2)} \otimes a), \quad (1.8)$$

$$\varphi(1 \otimes a) = \varepsilon(a) \text{ et } \varphi(b \otimes 1) = \varepsilon(b), \quad (1.9)$$

$$\varphi(b \otimes S(a)) = \varphi(S^{-1}(b) \otimes a). \quad (1.10)$$

pour tous les éléments homogènes $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$. En suivant la construction du *double quantique* de Drinfeld (*cf.* également [11]), on construit à partir de A et B une superalgèbre de Hopf $\mathcal{D}(A \otimes B)$ de la manière suivante :

1. $\mathcal{D}(A \otimes B) = A \otimes B$ comme superspace.
2. Le coproduit Δ de $\mathcal{D}(A \otimes B)$ est donné par $\Delta = (\text{id}_A \otimes \tau \otimes \text{id}_B)(\Delta_A \otimes \Delta_B)$.
3. La coïtité est le produit tensoriel des coïtités de A et B .
4. L'unité est le produit tensoriel des unités de A et B .
5. Le produit est défini par les deux formules suivantes:

$$(a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b, \quad (1.11)$$

$$(1 \otimes b)(a \otimes 1) = \sum_{(a),(b)} (-1)^\xi \varphi(S(b_{(1)}) \otimes a_{(1)}) \varphi(b_{(3)} \otimes a_{(3)}) a_{(2)} \otimes b_{(2)}, \quad (1.12)$$

où $\xi = |a_{(1)}| |b_{(2)}| + |a_{(2)}| |b_{(2)}| + |a_{(1)}| |b_{(3)}| + |a_{(2)}| |b_{(3)}|$ et $a \in A, b \in B$ sont homogènes.

6. L'application $a \mapsto a \otimes 1$ (resp. $b \mapsto 1 \otimes b$) de A dans $\mathcal{D}(A \otimes B)$ (resp. B dans $\mathcal{D}(A \otimes B)$) est un morphisme de superalgèbres de Hopf injectif.

Ce dernier point nous permet d'identifier a à $a \otimes 1$ pour $a \in A$ et b à $1 \otimes b$ pour $b \in B$, et ainsi ab à $a \otimes b$ grâce à la relation (1.11). Soient alors $(a_i \in I)$ (resp. $(b_i \in I)$) une base de A (resp. B), indexées par un ensemble I , duales pour φ , *i.e.* $\varphi(b_j \otimes a_i) = \delta_{ij}$. Alors l'élément

$$\sum_i a_i \otimes b_i$$

est une R -matrice universelle pour $\mathcal{D}(A \otimes B)$, munissant cette superalgèbre de Hopf d'une structure de superalgèbre de Hopf tressée.

Pour terminer, rappelons les définitions des actions adjointes ad^+ et ad^- dans le cas supergradué (on pourra par exemple consulter [29, 28, 61]). Pour des éléments x, y homogènes d'une superalgèbre de Hopf avec antipode inversible, on pose

$$\begin{aligned} \text{ad}^+ x(y) &= \sum_{(x)} (-1)^{|y| |x_{(2)}|} x_{(1)} y S(x_{(2)}), \\ \text{ad}^- x(y) &= \sum_{(x)} (-1)^{|y| |x_{(1)}| + |x_{(1)}| |x_{(2)}|} x_{(2)} y S^{-1}(x_{(1)}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2 La superalgèbre de Lie D_x

Nous rappelons la définition de la superalgèbre de Lie D_x introduite par Kac (cf. [17], où elle est notée $D(2, 1, x)$). Nous résumons également les propriétés de ses racines.

La superalgèbre de Lie D_x , où x est un paramètre complexe $\neq 0, -1$, est engendrée sur \mathbb{C} par $e_i, f_i, h_i, i = 1, 2, 3$, et les relations, pour tous $i, j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0, & [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, \\ [h_i, e_j] &= a_{ij} e_j, & [h_i, f_j] &= -a_{ij} f_j, \\ [e_2, e_3] &= [f_2, f_3] = [e_1, e_1] = [f_1, f_1] = 0, \\ [e_i, [e_i, e_1]] &= [f_i, [f_i, f_1]] = 0, \text{ si } i = 2, 3, \end{aligned}$$

où tous les générateurs sont pairs, sauf e_1 et f_1 qui sont impairs, et où les coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ sont ceux de la matrice de Cartan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Nous noterons \mathfrak{h} la sous-algèbre de Cartan engendrée par h_1, h_2, h_3 . Un élément α du dual \mathfrak{h}^* est une *racine* s'il existe un vecteur $v \in D_x$ homogène non nul tel que $[h, v] = \alpha(h)v$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. Un tel vecteur v est appelé *vecteur de racine* et le sous-superspace vectoriel de D_x engendré par les vecteurs de racine d'une même racine est appelé *espace de racine*. On dit que α est paire (resp. impaire) si v est pair (resp. impair). La superalgèbre de Lie D_x admet trois racines simples α_1 (impaire), α_2 et α_3 (paires). Elle admet également quatre racines positives non simples qui sont $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (impaires) et $2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (paire). Les espaces de racine correspondant sont tous de dimension 1 et sont engendrés respectivement par

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad [e_2, e_1], \quad [e_1, e_3], \quad [e_2, [e_1, e_3]], \quad [e_1, [e_2, [e_1, e_3]]].$$

Nous posons

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_3, & \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_3, & \beta_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \beta_4 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, & \beta_5 &= \alpha_1, & \beta_6 &= \alpha_1 + \alpha_2, & \beta_7 &= \alpha_2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

et nous notons $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\alpha_3$ le *réseau des racines*.

1.3 La quantification $U_h(D_x)$

Nous rappelons ici la définition de la quantification $U_h(D_x)$ de D_x , puis nous définirons les vecteurs de racine de $U_h(D_x)$, cf. [61]. On pourra également consulter [3, 7, 23, 55, 56, 58, 60] pour des généralités sur les définitions des supergroupes quantiques. Posons

$$D = (d_i)_{1 \leq i \leq 3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

de telle façon que la matrice produit

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = DA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -x \\ -1 & 2 & 0 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

soit symétrique.

Nous noterons $\mathbb{C}[[h]]$ l'anneau des séries formelles à une indéterminée. C'est un superespace dont le partie impaire est réduite à 0. Un $\mathbb{C}[[h]]$ -module M est muni de la topologie h -adique pour laquelle une base de voisinages de 0 est donnée par la famille $(h^n M)_{n \geq 0}$. Le produit tensoriel topologique $M \hat{\otimes} N$ de deux $\mathbb{C}[[h]]$ -modules est défini par

$$M \hat{\otimes} N = \lim_{\leftarrow} (M/h^n M \otimes_{\mathbb{C}} N/h^n N).$$

Nous renvoyons le lecteur à [18] pour les détails sur la topologie h -adique dans le cas général, et à [54] dans le cas supergradué. Nous définissons $U_h(D_x)$ comme la superalgèbre topologiquement engendrée par $E_i, F_i, H_i, i = 1, 2, 3$ et les relations (pour tous $i, j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} H_i H_j &= H_j H_i, \\ [H_i, E_j] &= a_{ij} E_j, \quad [H_i, F_j] = -a_{ij} F_j, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \\ E_1^2 &= F_1^2 = 0, \quad [E_2, E_3] = [F_2, F_3] = 0, \\ E_i^2 E_1 - (q_i + q_i^{-1}) E_i E_1 E_i + E_1 E_i^2 &= 0 \text{ si } i = 2, 3, \\ F_i^2 F_1 - (q_i + q_i^{-1}) F_i F_1 F_i + F_1 F_i^2 &= 0 \text{ si } i = 2, 3, \end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, où on a posé

$$q = e^{h/2}, \quad q_i = q^{d_i}, \quad K_i = e^{hd_i H_i/2},$$

où $[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba$ désigne le supercommutateur et où tous les générateurs H_i, E_i, F_i sont pairs, sauf E_1 et F_1 qui sont impairs. La superalgèbre $U_h(D_x)$ est une superalgèbre de Hopf topologique (cf. [54]) dont le coproduit Δ est défini par

$$\Delta(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i,$$

la coüinité ε par

$$\varepsilon(H_i) = \varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0,$$

et l'antipode S par

$$S(H_i) = -H_i, \quad S(E_i) = -K_i^{-1} E_i, \quad S(F_i) = -F_i K_i,$$

pour tout $i = 1, 2, 3$. Nous avons également

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}, \quad \varepsilon(K_i) = 1.$$

Nous définissons maintenant l'analogue des vecteurs de racine dans $U_h(D_x)$ en utilisant les actions adjointes ad^+ et ad^- introduites au §1.1. Posons

$$\begin{aligned} E_{\beta_1} &= E_3, & E_{\beta_5} &= E_1, & E_{\beta_7} &= E_2, \\ F_{\beta_1} &= F_3, & F_{\beta_5} &= F_1, & F_{\beta_7} &= F_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_{\beta_2} &= \text{ad}^+ E_{\beta_5}(E_{\beta_1}), & F_{\beta_2} &= \text{ad}^- F_{\beta_5}(F_{\beta_1}), \\ E_{\beta_6} &= \text{ad}^+ E_{\beta_7}(E_{\beta_5}), & F_{\beta_6} &= \text{ad}^- F_{\beta_7}(F_{\beta_5}), \\ E_{\beta_3} &= \text{ad}^+ E_{\beta_7}(E_{\beta_2}), & F_{\beta_3} &= \text{ad}^- F_{\beta_7}(F_{\beta_2}), \\ E_{\beta_4} &= \text{ad}^+ E_{\beta_5}(E_{\beta_3}), & F_{\beta_4} &= \text{ad}^- F_{\beta_5}(F_{\beta_3}). \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.4 Résultat principal

Nous énonçons maintenant notre résultat principal. Pour des résultats analogues pour d'autres supergroupes quantiques, on consultera [3, 23, 27, 53, 54, 58, 60]. On a besoin des notations suivantes. Posons

$$\begin{aligned} c_2 &= c_3 = c_5 = c_6 = 0, & c_1 &= 2x, & c_4 &= -2 - 2x, & c_7 &= 2, \\ \varphi_1 &= -\frac{1}{q^x - q^{-x}}, & \varphi_2 &= \frac{q^{-x}}{q - q^{-1}}, & \varphi_3 &= -\frac{q^{-1-x}}{q - q^{-1}}, \\ \varphi_4 &= -q^{-2-2x} \frac{q^{1+x} - q^{-1-x}}{(q - q^{-1})^2}, & \varphi_5 &= -\frac{1}{q - q^{-1}}, & \varphi_6 &= \frac{q^{-1}}{q - q^{-1}}, & \varphi_7 &= -\frac{1}{q - q^{-1}}, \\ (n)_i &= \begin{cases} \frac{q^{nc_i} - 1}{q^{c_i} - 1} & \text{si } c_i \neq 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}, & (n)_i! &= (n)_i (n-1)_i \cdots (1)_i, & n &\in \mathbb{N}, & 1 \leq i \leq 7, \\ \exp_i(a \otimes b) &= \sum_{n \geq 0} \frac{a^n \otimes b^n}{(n)_i!}, & a, b &\in U_h(D_x), & i &= 1, \dots, 7, \\ \exp(a \otimes b) &= \sum_{n \geq 0} \frac{a^n \otimes b^n}{n!}, & a, b &\in U_h(D_x), \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $q^x = e^{x\hbar/2}$. Pour $x \neq 0, -1$, on pose

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = -\frac{1}{2(1+x)} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2x \\ 2 & x & -x \\ 2x & -x & x \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

La matrice B est l'inverse de la matrice $(-a_{ij}/d_j)_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Théorème 1.1 *L'élément*

$$\begin{aligned} R &= \exp_1 \left(\frac{E_{\beta_1} \otimes F_{\beta_1}}{\varphi_1} \right) \cdots \exp_7 \left(\frac{E_{\beta_7} \otimes F_{\beta_7}}{\varphi_7} \right) \exp \left(\frac{\hbar}{2} \left(\sum_{i, j} b_{ij} H_i \otimes H_j \right) \right) \\ &\in U_h(D_x) \hat{\otimes} U_h(D_x) \end{aligned} \tag{1.20}$$

est une R -matrice universelle pour $U_h(D_x)$.

Remarque: La superalgèbre $U_h(D_x)$ est rubanée au sens du §1.1. En effet, on $R \equiv 1 \otimes 1 \pmod{h}$, et donc l'élément u défini au §1.1 vérifie $u \equiv 1 \pmod{h}$. Il en est donc de même de $uS(u)$. On en déduit que cet élément admet une unique racine carré θ tel que $\theta \equiv 1 \pmod{h}$ (cf. [18] pour les détails).

1.5 Application

Dans ce paragraphe, nous calculons le tressage et le twist (cf. §1.1 et (1.6)) d'un $U_h(D_x)$ -module topologiquement libre, simple, de rang 6 sur $\mathbb{C}[[h]]$, et isomorphe à son dual. On pourra consulter [9, 10, 34, 35, 36, 57, 58, 59, 60] pour des calculs analogues pour d'autres supergroupes quantiques. Pour un $U_h(D_x)$ -module V , le tressage $c_V = c_{V,V}$ de $V \hat{\otimes} V$ est défini par (1.6). Pour calculer le twist θ_V , nous utiliserons le lemme XIV.3.4 de [18] qui affirme que

$$\theta_V^{-2} = (d_V c_{V,V^*} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c_{V,V^*} b_V),$$

où, si (e_i) est une base topologique de V et (e^i) sa base duale de $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}[[h]]}(V, \mathbb{C}[[h]])$,

$$b_V : \mathbb{C}[[h]] \longrightarrow V \hat{\otimes} V^*, \quad d_V : V^* \hat{\otimes} V \longrightarrow \mathbb{C}[[h]],$$

sont définis par $b_V(1) = \sum e_i \otimes e^i$ et $d_V(f \otimes x) = f(x)$ avec $x \in V$ et $f \in V^*$.

Nous définissons maintenant un $U_h(D_x)$ -module topologiquement libre $M = M_0 \oplus M_1$ de rang 6. À cette fin, rappelons que la sous-algèbre de Hopf de $U_h(D_x)$ topologiquement engendrée par H_i, E_i, F_i pour $i = 2, 3$, est isomorphe à $U_h(sl_2) \hat{\otimes} U_h(sl_2)$, que tout $U_h(sl_2) \hat{\otimes} U_h(sl_2)$ -module topologiquement libre de rang fini sur $\mathbb{C}[[h]]$ est semisimple, et que tout module simple topologiquement libre est de la forme $V_n \hat{\otimes} V_m$, où V_p est le $U_h(sl_2)$ -module simple topologiquement libre de rang fini engendré par un vecteur de plus haut poids $p \in \mathbb{N}$, et que $V_0 \hat{\otimes} V_0 \cong \mathbb{C}[[h]]$ est le module trivial (cf [37, 42]). Nous fixons $x = 1$ et nous définissons alors le module M de la manière suivante. La partie paire M_0 admet une base (v_1, v_2) telle que

$$\begin{aligned} H_2 v_1 = H_3 v_1 = v_1, \quad H_2 v_2 = H_3 v_2 = v_2, \quad E_i v_j = F_i v_j = 0, \quad (i = 2, 3, j = 1, 2), \\ H_1 v_1 = v_1, \quad H_1 v_2 = -v_2, \quad E_1 v_1 = F_1 v_2 = 0, \quad F_1 v_1 = v_3, \quad E_1 v_2 = -v_6, \end{aligned}$$

et la partie impaire M_1 admet une base (v_3, v_4, v_5, v_6) telle que

$$\begin{aligned} H_2 v_3 = H_3 v_3 = v_3, \quad H_2 v_6 = H_3 v_6 = -v_6, \quad H_2 v_4 = -H_3 v_4 = -v_4, \quad H_2 v_5 = -H_3 v_5 = v_5, \\ E_2 v_3 = E_3 v_3 = E_2 v_5 = E_3 v_4 = F_2 v_6 = F_3 v_6 = F_2 v_4 = F_3 v_5 = 0, \\ E_2 v_4 = E_3 v_5 = v_3, \quad E_2 v_6 = v_5, \quad E_3 v_6 = v_4, \quad F_2 v_5 = F_3 v_4 = v_6, \quad F_2 v_3 = v_4, \quad F_3 v_3 = v_5, \\ E_1 v_4 = E_1 v_5 = E_1 v_6 = F_1 v_3 = F_1 v_4 = F_1 v_5 = 0, \\ E_1 v_3 = v_1, \quad F_1 v_6 = v_2, \quad H_1 v_3 = v_3, \quad H_1 v_4 = H_1 v_5 = 0, \quad H_1 v_6 = -v_6. \end{aligned}$$

En tant que $U_h(sl_2) \hat{\otimes} U_h(sl_2)$ -module, on a $M_0 \cong \mathbb{C}[[h]] \oplus \mathbb{C}[[h]]$ et $M_1 \cong V_1 \hat{\otimes} V_1$.

Proposition 1.2 *L'action définie ci-dessus munit M d'une structure de $U_h(D_x)$ -module simple topologiquement libre isomorphe à son dual.*

Démonstration. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que ces relations définissent bien une structure de $U_h(D_x)$ -module. Pour montrer que M est simple, comme $V_1 \hat{\otimes} V_1$ est un $U_h(sl_2) \hat{\otimes} U_h(sl_2)$ -module simple, il suffit de vérifier que chacun des vecteurs v_1, v_2, v_3 engendre le module M tout entier. Or, ceci est clair d'après les actions de E_1 et F_1 . De plus, le lecteur vérifiera que l'application $f : M \rightarrow M^*$ définie par

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -q^{-3}v^2, & f(v_2) &= q^{-1}v^1, & f(v_3) &= q^{-2}v^6, \\ f(v_4) &= -q^{-1}v^5, & f(v_5) &= -q^{-1}v^4, & f(v_6) &= v^3, \end{aligned}$$

où (v^1, \dots, v^6) désigne la base duale de (v_1, \dots, v_6) , est un isomorphisme entre M et M^* . ■

Le calcul de l'automorphisme c_M se fait à l'aide de Maple. L'automorphisme c_M laisse stable les parties paire et impaire de $M \hat{\otimes} M$ car R est un élément pair de $U_h(D_x) \hat{\otimes} U_h(D_x)$. Nous donnons les matrices de $c_0 = c_{M|(M \hat{\otimes} M)_0}$ (resp. $c_1 = c_{M|(M \hat{\otimes} M)_1}$) dans la base $(v_i \otimes v_j)_{\substack{1 \leq i, j \leq 2 \\ \text{ou } 3 \leq i, j \leq 6}}$ (resp. $(v_i \otimes v_j)_{\substack{1 \leq i \leq 2, 3 \leq j \leq 6 \\ \text{ou } 3 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 2}}$) ordonnée suivant l'ordre lexicographique.

Le polynôme caractéristique de c_M est $(X - q)^{17}(X + q)(X + q^{-1})^{18}$ et son polynôme minimal $(X + q)(X - q)(X + q^{-1})$.

Le carré du twist θ_M est la multiplication par q^{-2} .

$$c_0 = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & q^3 - q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 - 1 & 0 & 0 & \frac{1-q^2}{q} & 0 & 0 & \frac{1-q^2}{q} & 0 & 0 & q^4 - q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & q^2 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^2 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & q^2 - 1 & 0 & 0 & q^2 - 1 & 0 & 0 & -\frac{(q^2 - 1)^2}{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Construction d'un double quantique généralisé

Dans ce paragraphe, nous construisons une superalgèbre de Hopf \mathcal{D} en utilisant la théorie du double quantique de Drinfeld (*cf.* par exemple [19], ainsi que le §1.1). Nous utilisons les résultats de [11, 54] qui démontrent la validité de cette théorie dans le cas supergradué. Certaines démonstrations se trouvent dans [45]. Nous les reproduisons néanmoins toutes afin de vérifier leur validité dans le cas supergradué.

2.1 Préliminaires techniques

Dans ce paragraphe, nous définissons un accouplement de Hopf et nous démontrons des lemmes techniques dont nous aurons besoin par la suite.

1. Nous définissons \tilde{U}_+ comme la superalgèbre de Hopf topologiquement engendrée sur $\mathbb{C}[[\hbar]]$ par E_i et H_i , ($i = 1, 2, 3$) et les relations (pour tous i, j)

$$H_i H_j = H_j H_i, \quad [H_i, E_j] = a_{ij} E_j, \quad (2.1)$$

où les (a_{ij}) sont définis par (1.14) et où tous les générateurs sont pairs sauf E_1 qui est impair. Le coproduit, la co-unité et l'antipode sont définies par

$$\Delta(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon(H_i) = \varepsilon(E_i) = 0, \quad (2.3)$$

$$S(H_i) = -H_i, \quad S(E_i) = -K_i^{-1} E_i, \quad (2.4)$$

où on a posé $K_i = e^{\hbar d_i H_i / 2}$.

2. Nous définissons \tilde{U}_- comme la superalgèbre de Hopf topologiquement engendrée par F_i et H'_i , ($i = 1, 2, 3$) et les relations (pour tous i, j)

$$H'_i H'_j = H'_j H'_i, \quad [H'_i, F_j] = -a_{ij} F_j, \quad (2.5)$$

où tous les générateurs sont pairs sauf F_1 qui est impair. Le coproduit, la counité et l'antipode sont définies par

$$\Delta(H'_i) = H'_i \otimes 1 + 1 \otimes H'_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i'^{-1} + 1 \otimes F_i, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon(H'_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \quad (2.7)$$

$$S(H'_i) = -H'_i, \quad S(F_i) = -F_i K_i', \quad (2.8)$$

où on a posé $K_i' = e^{hd_i H'_i/2}$.

On a

$$K_i E_j = q^{\bar{a}_{ij}} E_j K_i, \quad K_i F_j = q^{-\bar{a}_{ij}} F_j K_i,$$

$$\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}, \quad \Delta(K_i') = K_i' \otimes K_i', \quad S(K_i') = K_i'^{-1},$$

où les \bar{a}_{ij} sont définis par (1.16). Dans tout la suite, nous noterons $q = e^{h/2}$ et $q_i = e^{hd_i/2}$.

Remarque. Nous utilisons les mêmes notations pour les générateurs de $U_h(D_x)$ que pour ceux de \tilde{U}_+ , \tilde{U}_- . Cet abus est justifié *a posteriori* par la proposition 2.13.

Notons $\mathbb{C}((h))$ le corps des fractions de $\mathbb{C}[[h]]$. Posons

$$\varphi(F_j \otimes E_i) = -(-1)^{|E_i||F_j|} \frac{\delta_{ij}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad (2.9)$$

$$\varphi(H'_j \otimes E_i) = \varphi(F_j \otimes H_i) = 0, \quad (2.10)$$

$$\varphi(H'_j \otimes H_i) = -\frac{2a_{ij}}{hd_j}, \quad (2.11)$$

pour $1 \leq i, j \leq 3$. D'après le lemme 3.4 de [19] (ou [45], prop. 2.1.1) qui se généralise au cas gradué, les formules (2.9)-(2.11) définissent un accouplement de Hopf $\varphi : \tilde{U}_- \otimes \tilde{U}_+ \rightarrow \mathbb{C}((h))$.

Lemme 2.1 *L'accouplement φ vérifie, pour tous $i, j = 1, 2, 3$,*

$$\varphi(K_j' \otimes E_i) = \varphi(K_j'^{-1} \otimes E_i) = \varphi(F_j \otimes K_i) = \varphi(F_j \otimes K_i^{-1}) = 0,$$

$$\varphi(K_j' \otimes K_i) = \varphi(K_j'^{-1} \otimes K_i^{-1}) = q^{-\bar{a}_{ij}},$$

$$\varphi(K_j' \otimes K_i^{-1}) = \varphi(K_j'^{-1} \otimes K_i) = q^{\bar{a}_{ij}}.$$

Démonstration. Démontrons par exemple que $\varphi(K_j' \otimes K_i) = q^{-\bar{a}_{ij}}$. Nous avons $K_i' = e^{hd_i H'_i/2}$ et $K_i = e^{hd_i H_i/2}$, donc

$$\varphi(K_j' \otimes K_i) = \sum_{\ell, n \geq 0} \frac{h^{\ell+n} d_j^\ell d_i^n}{2^{\ell+n} \ell! n!} \varphi(H_j'^\ell \otimes H_i^n).$$

Montrons que

$$\varphi(H_j^{\ell} \otimes H_i^n) = \delta_{\ell n} \left(-\frac{2a_{ij}}{hd_j} \right)^n. \quad (2.12)$$

Pour cela, on suppose d'abord $\ell > n$. Le cas $n > \ell$ se traite de manière similaire. On raisonne par récurrence sur ℓ . Si $\ell = 1$, alors $n = 0$ et l'égalité (2.12) est vraie car $\varepsilon(H_i) = 0$. Si $\ell > n > 0$, on a

$$\varphi(H_j^{\ell} \otimes H_i^n) = \sum_{(H_i^n)} \varphi(H_j' \otimes (H_i^n)_{(1)}) \varphi(H_j^{\ell-1} \otimes (H_i^n)_{(2)}).$$

Or, $\Delta(H_i)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} H_i^m \otimes H_i^{n-m}$, d'où

$$\varphi(H_j^{\ell} \otimes H_i^n) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \varphi(H_j' \otimes H_i^m) \varphi(H_j^{\ell-1} \otimes H_i^{n-m}),$$

qui est nul par hypothèse de récurrence. Lorsque $\ell = n$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(H_j^n \otimes H_i^n) &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \varphi(H_j' \otimes H_i^m) \varphi(H_j^{n-1} \otimes H_i^{n-m}) \\ &= n \varphi(H_j' \otimes H_i) \varphi(H_j^{n-1} \otimes H_i^{n-1}) = n! \varphi(H_j' \otimes H_i)^n. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\varphi(K_j' \otimes K_i) = \sum_n \frac{h^{2n} d_j^n d_i^n}{2^{2n} n!} \varphi(H_j' \otimes H_i)^n = \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{hd_i a_{ij}}{2} \right)^n \frac{1}{n!} = q^{-\bar{a}_{ij}}.$$

Les autres calculs sont similaires. ■

Soit \tilde{V}_+ (resp. \tilde{V}_-) la sous-superalgèbre de \tilde{U}_+ (resp. de \tilde{U}_-) engendrée par les E_i (resp. F_i), $i = 1, 2, 3$. La superalgèbre \tilde{V}_+ (resp. \tilde{V}_-) admet une Q -graduation avec E_i de degré α_i (resp. F_i de degré $-\alpha_i$). On définit également \tilde{U}_0 (resp. \tilde{U}'_0) comme la sous-superalgèbre de Hopf de \tilde{U}_+ (resp. de \tilde{U}_-) topologiquement engendrée par les H_i (resp. H'_i), $i = 1, 2, 3$.

Lemme 2.2 *Pour tout $H \in \tilde{U}_0$, $F \in \tilde{V}_-$, $F \neq 1$, on a $\varphi(F \otimes H) = 0$. De même, pour tout $H' \in \tilde{U}'_0$, $E \in \tilde{V}_+$, $E \neq 1$, on a $\varphi(H' \otimes E) = 0$.*

Démonstration. Lorsque F est un des générateurs F_1, F_2 ou F_3 , on a

$$\varphi(F_i \otimes H_{i_1} \cdots H_{i_p}) = \varphi(1 \otimes H_{i_p}) \varphi(F_i \otimes H_{i_1} \cdots H_{i_{p-1}}) + \varphi(F_i \otimes H_{i_p}) \varphi(K_i'^{-1} \otimes H_{i_1} \cdots H_{i_{p-1}}) = 0,$$

d'après (1.8), (2.2) et (2.10). Ensuite, si $F = F_{i_1} \cdots F_{i_r}$, on a

$$\varphi(F_{i_1} \cdots F_{i_r} \otimes H) = \sum_{(H)} \varphi(F_{i_1} \cdots F_{i_{r-1}} \otimes H_{(1)}) \varphi(F_{i_r} \otimes H_{(2)}).$$

Or, d'après (2.2), on a $H_{(2)} \in \tilde{U}_0$ et donc $\varphi(F_{i_r} \otimes H_{(2)}) = 0$. ■

Lemme 2.3 *Si $E \in \tilde{V}_+$, $F \in \tilde{V}_-$, $H \in \tilde{U}_0$, $H' \in \tilde{U}'_0$, alors $\varphi(FH' \otimes EH) = \varphi(F \otimes E)\varphi(H' \otimes H)$.*

Démonstration. On écrit que

$$\varphi(FH' \otimes EH) = \sum_{(F),(H')} \varphi(F_{(1)}H'_{(1)} \otimes H)\varphi(F_{(2)}H'_{(2)} \otimes E).$$

Or, d'après (2.6), on a $\Delta(F) = 1 \otimes F + \sum_j r_j \otimes s_j$, où $r_j \in \tilde{V}_-$, $r_j \neq 1$. On en déduit que lorsque $F_{(1)} \otimes F_{(2)} \neq 1 \otimes F$, on a

$$\varphi(F_{(1)}H'_{(1)} \otimes H) = \sum_j \varphi(r_j H'_{(1)} \otimes H) = \sum_{j,(H)} \varphi(r_j \otimes H_{(1)}) \varphi(H'_{(1)} \otimes H_{(2)}) = 0$$

d'après le lemme 2.2 (car $H_{(1)} \in \tilde{U}_0$). Il reste alors à évaluer $\sum_{(H')} \varphi(H'_{(1)} \otimes H)\varphi(FH'_{(2)} \otimes E)$.

Or, $\Delta(E) = E \otimes 1 + \sum_j r'_j \otimes s'_j$, où $s'_j \in \tilde{V}_+$, $s'_j \neq 1$. On en déduit que

$$\varphi(FH'_{(2)} \otimes E) = \varphi(F \otimes E) \varphi(H'_{(2)} \otimes 1),$$

pour finalement obtenir le résultat voulu. ■

Lemme 2.4 *Si $i, j_1, \dots, j_r \in \{1, 2, 3\}$, et si $r \neq 1$ ou $j_1 \neq i$, alors*

$$\varphi(F_{j_1} \cdots F_{j_r} \otimes E_i) = \varphi(F_i \otimes E_{j_1} \cdots E_{j_r}) = 0.$$

Démonstration. Nous avons

$$\varphi(F_{j_1} \cdots F_{j_r} \otimes E_i) = (-1)^{|F_{j_r}| |E_i|} \varphi(F_{j_1} \cdots F_{j_{r-1}} \otimes E_i) \varphi(F_{j_r} \otimes 1) + (F_{j_1} \cdots F_{j_{r-1}} \otimes K_i) \varphi(F_{j_1} \otimes E_i),$$

et le résultat découle alors du lemme 2.2. ■

Lemme 2.5 *Soient $E = E_{i_1} \cdots E_{i_p} \in \tilde{V}_+$ de degré $\alpha \in Q$ et $F = F_{j_1} \cdots F_{j_r} \in \tilde{V}_-$ de degré $\beta \in Q$. Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\varphi(F \otimes E) = 0$.*

Démonstration. On a

$$\varphi(F \otimes E) = \sum_{(F)} \varphi(F_{(1)} \otimes E_{i_p}) \varphi(F_{(2)} \otimes E_{i_1} \cdots E_{i_{p-1}}).$$

Or,

$$\Delta(F) = (1 \otimes F_{j_1} + F_{j_1} \otimes K'_{j_1}{}^{-1}) \cdots (1 \otimes F_{j_r} + F_{j_r} \otimes K'_{j_r}{}^{-1}),$$

et par le lemme 2.4, on a $\varphi(F_{(1)} \otimes E_{i_p}) = 0$ sauf peut-être si

$$F_{(1)} \otimes F_{(2)} = F_{j_k} \otimes F_{j_1} \cdots F_{j_{k-1}} K'_{j_k}{}^{-1} F_{j_{k+1}} \cdots F_{j_r},$$

(au signe près), et alors on a $j_k = i_p$. De plus, d'après le lemme 2.3, on a

$$\begin{aligned} \varphi(F_{j_1} \cdots F_{j_{k-1}} K'_{j_k}{}^{-1} F_{j_{k+1}} \cdots F_{j_r} \otimes E_{i_1} \cdots E_{i_{p-1}}) \neq 0 &\iff \\ \varphi(F_{j_1} \cdots F_{j_{k-1}} F_{j_{k+1}} \cdots F_{j_r} \otimes E_{i_1} \cdots E_{i_{p-1}}) \neq 0 \end{aligned}$$

car $\varphi(K'_{j_k}{}^{-1} \otimes 1) = -1$. Un raisonnement par récurrence sur r achève alors la démonstration. ■

Lemme 2.6 *Soient m, s des entiers tels que $1 \leq s < m \leq 7$. Alors $n_1 \beta_1 + \cdots + n_s \beta_s \neq n_m \beta_m$ pour tous les éléments (n_1, \dots, n_s, n_m) non nuls de \mathbb{N}^{s+1} , où les β_i sont définis par (1.15).*

Démonstration. On suppose que l'on a une égalité du type

$$n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s = n_m\beta_m$$

où les n_k sont des entiers positifs. Lorsque $m = 7$, cette égalité implique le système

$$\begin{cases} n_2 + n_3 + 2n_4 + n_5 + n_6 = 0 \\ n_3 + n_4 + n_6 = n_7 \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0 \end{cases}$$

ce qui prouve que les entiers n_k sont tous nuls. Les autres valeurs de m se traitent de la même façon. ■

Lemme 2.7 Soient $n_1, n_4, n_7 \in \mathbb{N}$ et $n_2, n_3, n_5, n_6 \in \{0, 1\}$. Soit s un entier compris entre 1 et 7. Alors, si $n_i \neq 0$ pour $1 \leq i < s$ ou $n_s \neq 1$, alors

$$\varphi(F_{\beta_s} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_s}^{n_s}) = \varphi(F_{\beta_1}^{n_1} \cdots F_{\beta_s}^{n_s} \otimes E_{\beta_s}) = 0.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.5, si $\varphi(F_{\beta_s} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_s}^{n_s}) \neq 0$, alors

$$\beta_s = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s.$$

Or, une telle égalité est impossible d'après le lemme 2.6. ■

Proposition 2.8 Le morphisme de superalgèbres $\psi : \tilde{U}_+ \rightarrow \tilde{U}_-^{cop}$ défini sur les générateurs par

$$\psi(E_i) = F_i, \quad \psi(H_i) = -H_i'$$

est un isomorphisme de superalgèbres de Hopf qui vérifie $\psi(E_{\beta_i}) = F_{\beta_i}$ pour tout $i = 1, \dots, 7$.

Démonstration. On laisse le soin au lecteur de vérifier que ψ est un isomorphisme de superalgèbres de Hopf. Montrons que ψ conserve les vecteurs de racine. Pour $x, y \in \tilde{U}_+$, on a

$$\begin{aligned} \psi(\text{ad}^+ x(y)) &= \sum_{(x)} (-1)^{|y||x_{(2)}|} \psi(x_{(1)})\psi(y)S^{-1}(\psi(x_{(2)})) \\ &= \sum_{(x)} (-1)^{|y||x_{(2)}| + |\psi(x)_{(1)}||\psi(x)_{(2)}|} \psi(x)_{(2)}\psi(y)S^{-1}(\psi(x)_{(1)}) \\ &= \sum_{(x)} (-1)^{|\psi(y)||x_{(2)}| + |\psi(x)_{(1)}||\psi(x)_{(2)}|} \psi(x)_{(2)}\psi(y)S^{-1}(\psi(x)_{(1)}) \end{aligned}$$

où la première égalité découle de $\psi \circ S = S^{-1} \circ \psi$, la deuxième de $(\psi \otimes \psi) \circ \Delta = \tau \circ \Delta \circ \psi$, et la troisième du fait que ψ est un morphisme de superespaces. Lorsque $x = E_i$ pour $i = 1, 2, 3$, on a de plus $|x_{(2)}| = |\psi(x)_{(1)}|$; donc

$$\psi(\text{ad}^+ E_i(E_j)) = \text{ad}^- \psi(E_i)(\psi(E_j)) = \text{ad}^- F_i(F_j),$$

ce qui prouve la proposition. ■

Nous définissons $\tilde{I}_+ \subset \tilde{U}_+$ et $\tilde{I}_- \subset \tilde{U}_-$ comme les annulateurs de φ :

$$\tilde{I}_+ = \{E \in \tilde{U}_+, \varphi(F \otimes E) = 0, \forall F \in \tilde{U}_-\}, \quad \tilde{I}_- = \{F \in \tilde{U}_-, \varphi(F \otimes E) = 0, \forall E \in \tilde{U}_+\}.$$

Proposition 2.9 *Pour $i = 2, 3$, les éléments suivants sont dans \tilde{I}_+ (resp. dans \tilde{I}_-):*

$$\begin{aligned} & E_1^2, \quad E_2E_3 - E_3E_2, \quad E_i^2E_1 - (q_i + q_i^{-1})E_iE_1E_i + E_1E_i^2 \\ & (\text{resp. } F_1^2, \quad F_2F_3 - F_3F_2, \quad F_i^2F_1 - (q_i + q_i^{-1})F_iF_1F_i + F_1F_i^2). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour montrer que $X \in \tilde{I}_+$, on établit tout d'abord que $\Delta(X) = X \otimes 1 + K \otimes X$, où $K \in \tilde{U}_0$. Ce calcul permet alors d'écrire

$$\varphi(YZ \otimes X) = (-1)^{\xi_1} \varphi(Y \otimes X) \varphi(Y \otimes 1) + (-1)^{\xi_2} \varphi(Y \otimes K) \varphi(Z \otimes X),$$

qui est nul si $\varphi(Y \otimes X) = \varphi(Z \otimes X) = 0$. On montre alors que $\varphi(Y \otimes X) = 0$ pour tout générateur $Y \in \tilde{U}_-$, *i.e.* pour $Y = H'_j$ et $Y = F_j$. Ce dernier point découle des lemmes 2.2 et 2.4. Nous calculons donc uniquement les coproduits des éléments considérés. Pour cela, nous rappelons que nous utilisons la formule (1.2) pour le produit de deux éléments de $\tilde{U}_+ \hat{\otimes} \tilde{U}_+$.

On a

$$\begin{aligned} \Delta(E_1^2) &= (E_1 \otimes 1 + K_1 \otimes E_1)^2 \\ &= E_1^2 \otimes 1 + K_1^2 \otimes E_1^2 + E_1K_1 \otimes E_1 + (-1)^{|E_1||E_1|} K_1E_1 \otimes E_1 \\ &= E_1^2 \otimes 1 + K_1^2 \otimes E_1^2, \end{aligned}$$

car E_1 est impair et $K_1E_1 = E_1K_1$. Posons $y = [E_2, E_3]$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta([E_2, E_3]) &= [\Delta(E_2), \Delta(E_3)] \\ &= y \otimes 1 + K_2K_3 \otimes y + E_2K_3 \otimes E_3 + K_2E_3 \otimes E_2 - E_3K_2 \otimes E_2 - K_3E_2 \otimes E_3 \\ &= y \otimes 1 + K_2K_3 \otimes y, \end{aligned}$$

car $[K_2, E_3] = [K_3, E_2] = [K_3, K_2] = 0$.

Posons $z = E_i^2E_1 - (q_i + q_i^{-1})E_iE_1E_i + E_1E_i^2$, $i = 2$ ou $i = 3$. Soient $1 \leq n, m, p \leq 3$ des entiers tels qu'un seul d'entre eux soit égal à 1. Alors

$$\begin{aligned} \Delta(E_nE_m) &= E_nE_m \otimes 1 + E_nK_m \otimes E_m + K_nE_m \otimes E_n + K_nK_m \otimes E_nE_m \\ &= E_nE_m \otimes 1 + E_nK_m \otimes E_m + q^{\bar{a}_{nm}} E_mK_n \otimes E_n + K_nK_m \otimes E_nE_m, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta(E_nE_mE_p) &= E_nE_mE_p \otimes 1 + E_nK_mE_p \otimes E_m + q^{\bar{a}_{nm}} E_mK_nE_p \otimes E_n + K_nK_mE_p \otimes E_nE_m \\ &+ E_nE_mK_p \otimes E_p + E_nK_mK_p \otimes E_mE_p + q^{\bar{a}_{nm}} E_mK_nK_p \otimes E_nE_p + K_nK_mK_p \otimes E_nE_mE_p \\ &= E_nE_mE_p \otimes 1 + q^{\bar{a}_{mp}} E_nE_pK_m \otimes E_m + q^{\bar{a}_{nm} + \bar{a}_{np}} E_mE_pK_n \otimes E_n \\ &\quad + q^{\bar{a}_{mp} + \bar{a}_{np}} E_pK_nK_m \otimes E_nE_m \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \Delta(E_i^2 E_1) &= E_i^2 E_1 \otimes 1 + K_i^2 K_1 \otimes E_i^2 E_1 \\ &+ q^{\bar{a}_{i1}}(1 + q^{\bar{a}_{ii}})E_i E_1 K_i \otimes E_i + E_i^2 K_1 \otimes E_1 + q^{2\bar{a}_{i1}} E_1 K_i^2 \otimes E_i^2 + (1 + q^{\bar{a}_{ii}})E_i K_i K_1 \otimes E_i E_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(E_1 E_i^2) &= E_1 E_i^2 \otimes 1 + K_1 K_i^2 \otimes E_1 E_i^2 \\ &E_1 K_i^2 \otimes E_i^2 + (1 + q^{\bar{a}_{ii}})E_1 E_i K_i \otimes E_i + q^{2\bar{a}_{i1}} E_i^2 K_1 \otimes E_1 + q^{\bar{a}_{i1}}(1 + q^{\bar{a}_{ii}})E_i K_1 K_i \otimes E_1 E_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(E_i E_1 E_i) &= E_i E_1 E_i \otimes 1 + E_i E_1 K_i \otimes E_i \\ &+ q^{\bar{a}_{i1}} E_i^2 K_1 \otimes E_1 + E_i K_1 K_i \otimes E_1 E_i + q^{\bar{a}_{i1} + \bar{a}_{ii}} E_1 E_i K_i \otimes E_i + q^{\bar{a}_{i1}} E_1 K_i^2 \otimes E_i^2 \\ &+ q^{\bar{a}_{i1} + \bar{a}_{ii}} E_i K_i K_1 \otimes E_i E_1 + K_i^2 K_1 \otimes E_i E_1 E_i. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\Delta(z) = z \otimes 1 + K_1 K_i^2 \otimes z + X$, où X est un terme dont il reste à montrer qu'il est nul. Or,

$$\begin{aligned} X &= (1 + q^{2\bar{a}_{i1}} - q^{\bar{a}_{i1}}(q_i + q_i^{-1}))E_i^2 K_1 \otimes E_1 + (1 + q^{2\bar{a}_{i1}} - (q_i + q_i^{-1})q^{\bar{a}_{i1}})E_1 K_i^2 \otimes E_i^2 \\ &+ (q^{\bar{a}_{i1}}(1 + q^{\bar{a}_{ii}}) - (q_i + q_i^{-1}))E_i E_1 K_i \otimes E_i + (1 + q^{\bar{a}_{ii}} - q^{\bar{a}_{i1} + \bar{a}_{ii}}(q_i + q_i^{-1}))E_1 E_i K_i \otimes E_i \\ &+ (1 + q^{\bar{a}_{ii}} - q^{\bar{a}_{i1} + \bar{a}_{ii}}(q_i + q_i^{-1}))E_i K_i K_1 \otimes E_i E_1 + (q^{\bar{a}_{i1}}(1 + q^{\bar{a}_{ii}}) - (q_i + q_i^{-1}))E_i K_1 K_i \otimes E_1 E_i, \end{aligned}$$

et pour $i = 2, 3$, on a $\bar{a}_{i1} = \bar{a}_{1i} = d_i a_{i1} = -d_i$ et $\bar{a}_{ii} = 2d_i$. On en déduit

$$\begin{aligned} 1 + q^{2\bar{a}_{i1}} - q^{\bar{a}_{i1}}(q_i + q_i^{-1}) &= 1 + q^{-2d_i} - q^{-d_i}(q_i + q_i^{-1}) = 0, \\ q^{\bar{a}_{i1}}(1 + q^{\bar{a}_{ii}}) - (q_i + q_i^{-1}) &= q^{-d_i}(1 + q^{2d_i}) - (q^{d_i} + q^{-d_i}) = 0, \\ 1 + q^{\bar{a}_{ii}} - q^{\bar{a}_{i1} + \bar{a}_{ii}}(q_i + q_i^{-1}) &= 1 + q^{2d_i} - q^{-d_i}(q^{d_i} + q^{-d_i}) = 0, \end{aligned}$$

d'où $X = 0$ et la proposition est démontrée en ce qui concerne \tilde{I}_+ . Pour montrer que $Y \in \tilde{I}_-$, il suffit d'établir que $\Delta(Y) = 1 \otimes Y + Y \otimes K'$, où $K' \in \tilde{U}'_0$, ce qui découle des calculs précédents en appliquant l'isomorphisme ψ . ■

Définition 2.10 On note I_+ (resp. I_-) le sous-idéal de Hopf de \tilde{I}_+ (resp. \tilde{I}_-) engendré par

$$\begin{aligned} &E_1^2, E_2 E_3 - E_3 E_2, E_i^2 E_1 - (q_i + q_i^{-1})E_i E_1 E_i + E_1 E_i^2 \quad (i = 2, 3) \\ \text{(resp. par } &F_1^2, F_2 F_3 - F_3 F_2, F_i^2 F_1 - (q_i + q_i^{-1})F_i F_1 F_i + F_1 F_i^2 \quad (i = 2, 3)). \end{aligned}$$

On pose alors

$$U_+ = \tilde{U}_+ / I_+, \quad U_- = \tilde{U}_- / I_-.$$

Corollaire 2.11 L'accouplement φ induit un accouplement sur $U_- \hat{\otimes} U_+$ que nous noterons également φ . De plus, l'isomorphisme ψ de la proposition 2.8 induit un isomorphisme de superalgèbres de Hopf entre U_+ et U_-^{cop} , que nous noterons également ψ .

Démonstration. L'accouplement φ est toujours défini puisque $I_+ \subset \tilde{I}_+$ et $I_- \subset \tilde{I}_-$ d'après la proposition 2.9. De plus, ψ envoie les générateurs de I_+ sur ceux de I_- , ce qui prouve le lemme. ■

2.2 La superalgèbre de Hopf \mathcal{D}

Dans ce paragraphe, nous construisons une superalgèbre de Hopf tressée \mathcal{D} par la méthode du double quantique (cf. §1.1) et nous établissons le lien avec $U_h(D_x)$.

En paraphrasant les définitions de $\tilde{V}_+, \tilde{V}_-, \tilde{U}_0, \tilde{U}'_0$ du §2.1 on définit $V_+ \subset U_+, V_- \subset U_-, U_0 \subset U_+, U'_0 \subset U_-$. Les résultats du lemme 2.2 jusqu'à la proposition 2.8 restent valables pour $\varphi : U_- \otimes U_+ \rightarrow \mathbb{C}[[h]]$, en remplaçant \tilde{V}_+ (resp. $\tilde{V}_-, \tilde{U}_0, \tilde{U}'_0$) par V_+ (resp. V_-, U_0, U'_0). Nous notons $\mathcal{D} = \mathcal{D}(U_+ \otimes U_-)$ le double quantique de U_+ et U_- construit à partir de l'accouplement φ , cf. le §1.1 pour la construction.

Nous avons besoin de la proposition suivante pour établir le lien entre \mathcal{D} et $U_h(D_x)$.

Proposition 2.12 *Les relations suivantes sont vérifiées dans \mathcal{D} :*

$$\begin{aligned} [H'_i, E_j] &= a_{ij}E_j, & [H_i, F_j] &= -a_{ij}F_j, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i'^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \end{aligned}$$

Démonstration. Nous ne démontrons que la dernière égalité dans laquelle les signes jouent un rôle important. On a

$$F_j E_i = \sum_{(E_i), (F_j)} (-1)^\epsilon \varphi(S(F_{j(1)}) \otimes E_{i(1)}) \varphi(F_{j(3)} \otimes E_{i(3)}) E_{i(2)} F_{j(2)}.$$

Or,

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(E_i)) &= E_i \otimes 1 \otimes 1 + K_i \otimes E_i \otimes 1 + K_i \otimes K_i \otimes E_i, \\ (\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(F_j)) &= F_j \otimes K_j'^{-1} \otimes K_j' - 1 + 1 \otimes F_j \otimes K_j'^{-1} + 1 \otimes 1 \otimes F_j, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F_j E_i &= \varphi(S(F(j)) \otimes E_i) \varphi(K_j'^{-1} \otimes 1) K_j'^{-1} + (-1)^{|E_i||F_j|} \varphi(1 \otimes K_i) \varphi(K_j'^{-1} \otimes 1) E_i F_j \\ &\quad + \varphi(1 \otimes K_i) \varphi(F_j \otimes E_i) K_i. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (-1)^{|E_i||F_j|} F_j E_i &= (-1)^{|E_i||F_j|} \varphi(S(F_j) \otimes E_i) K_j'^{-1} + E_i F_j + (-1)^{|E_i||F_j|} \varphi(F_j \otimes E_i) K_i \\ &= -(-1)^{|E_i||F_j|} \varphi(F_j K_j' \otimes E_i) K_j'^{-1} + E_i F_j - \frac{\delta_{ij}}{q_i - q_i^{-1}} K_i. \end{aligned}$$

Or, $\varphi(F_j K_j' \otimes E_i) = \varphi(F_j \otimes E_i)$ d'après le lemme 2.3. ■

Le résultat suivant résulte des relations (2.1)-(2.8), de la proposition 2.12 et du fait que $U_h(D_x)$ admet une décomposition triangulaire. Cette décomposition est bien connue pour les groupes quantiques et son existence dans le cas supergradué a également été démontrée. On consultera [38, 42, 44, 61] pour une démonstration. Définissons la superalgèbre $\overline{\mathcal{D}}$ comme le

quotient de \mathcal{D} par l'idéal de Hopf engendré par $H_i - H'_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Posons $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ la projection canonique. Définissons $\iota : U_h(D_x) \rightarrow \mathcal{D}$ par

$$\iota(E_j) = E_j, \quad \iota(F_j) = F_j, \quad \iota(H_j) = H_j,$$

pour $j = 1, 2, 3$.

Proposition 2.13 *Le morphisme ι est un morphisme de superalgèbres de Hopf topologiques injectif et la composée $p \circ \iota$ réalise un isomorphisme entre $U_h(D_x)$ et $\overline{\mathcal{D}}$.*

3 R-matrice universelle

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 1.1 en construisant des bases de U_+ et U_- duales pour φ . Rappelons que D_x admet trois racines simples α_1, α_2 et α_3 (cf. §1.2), et que les vecteurs de racine sont définis par (1.17). Nous notons également E_{β_i} et F_{β_i} les images de E_{β_i} et F_{β_i} par l'injection ι de la proposition 2.13.

3.1 Relations dans \mathcal{D}

Nous commençons par énoncer des relations vérifiées dans \mathcal{D} .

Lemme 3.1 *Pour tout $i = 1, \dots, 7$, on a $K_{\beta_i} E_{\beta_i} = q^{c_i} E_{\beta_i} K_{\beta_i}$*

Démonstration. Elle est laissée au lecteur. ■

Lemme 3.2 *On a*

$$\begin{aligned} E_{\beta_2} &= [E_1, E_3]_{q^{-x}}, \quad E_{\beta_6} = [E_2, E_1]_{q^{-1}}, \quad E_{\beta_3} = [E_2, E_{\beta_2}]_{q^{-1}}, \quad E_{\beta_4} = [E_1, E_{\beta_3}]_{q^{-1-x}}, \\ F_{\beta_2} &= [F_1, F_3]_{q^{-x}}, \quad F_{\beta_6} = [F_2, F_1]_{q^{-1}}, \quad F_{\beta_3} = [F_2, F_{\beta_2}]_{q^{-1}}, \quad F_{\beta_4} = [F_1, F_{\beta_3}]_{q^{-1-x}}, \end{aligned}$$

Démonstration. Les calculs découlent immédiatement de la définition des actions adjointes. ■

Lemme 3.3 *L'action adjointe $\text{ad}^+ : U_+ \rightarrow U_+$ vérifie*

$$\text{ad}^{+2} E_i(E_1) = 0, \quad i = 2, 3,$$

où $\text{ad}^{+2} E_i = (\text{ad}^+ E_i) \circ (\text{ad}^+ E_i)$, et pour tout $X \in U_+$, on a

$$\text{ad}^+ E_i(X E_j) = \text{ad}^+ E_i(X) E_j, \quad \text{ad}^+ E_i(E_j X) = E_j \text{ad}^+ E_i(X),$$

si $(i, j) = (2, 3)$ ou $(3, 2)$.

Démonstration. Là encore ce sont des calculs utilisant la définition de ad^+ , ainsi que le fait que E_2 et E_3 commutent. Nous laissons le soin au lecteur de les vérifier. ■

Le lemme suivant a été établi par Zou dans [61].

Lemme 3.4 *Pour $i = 2, 3, 6$, on a $E_{\beta_i}^2 = 0$.*

La proposition suivante donne les relations de commutations entre les différents vecteurs de racines. Certaines de ces relations ont été établies dans [61] sous une forme différente.

Proposition 3.5 *Dans U_+ , on a les relations de commutations suivantes:*

$$\begin{aligned} E_{\beta_7} E_{\beta_5} &= q^{-1} E_{\beta_5} E_{\beta_7} + E_{\beta_6}, & E_{\beta_7} E_{\beta_2} &= q^{-1} E_{\beta_2} E_{\beta_7} + E_{\beta_3}, & E_{\beta_7} E_{\beta_1} &= E_{\beta_1} E_{\beta_7}, \\ E_{\beta_5} E_{\beta_3} &= -q^{-1-x} E_{\beta_3} E_{\beta_5} + E_{\beta_4}, & E_{\beta_5} E_{\beta_1} &= q^{-x} E_{\beta_1} E_{\beta_5} + E_{\beta_2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} E_{\beta_7} E_{\beta_6} &= q E_{\beta_6} E_{\beta_7}, & E_{\beta_7} E_{\beta_3} &= q E_{\beta_3} E_{\beta_7}, & E_{\beta_6} E_{\beta_5} &= -q^{-1} E_{\beta_5} E_{\beta_6}, \\ E_{\beta_6} E_{\beta_1} &= q^{-x} E_{\beta_1} E_{\beta_6} + E_{\beta_3}, & E_{\beta_5} E_{\beta_4} &= q^{-1-x} E_{\beta_4} E_{\beta_5}, & E_{\beta_5} E_{\beta_2} &= -q^{-x} E_{\beta_2} E_{\beta_5}, \\ E_{\beta_4} E_{\beta_3} &= q^{-1-x} E_{\beta_3} E_{\beta_4}, & E_{\beta_3} E_{\beta_2} &= -q^{-1} E_{\beta_2} E_{\beta_3}, & E_{\beta_2} E_{\beta_1} &= q^x E_{\beta_1} E_{\beta_2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} E_{\beta_7} E_{\beta_4} &= E_{\beta_4} E_{\beta_7}, & E_{\beta_6} E_{\beta_4} &= q^{-1-x} E_{\beta_4} E_{\beta_6}, & E_{\beta_6} E_{\beta_3} &= -q^{-x} E_{\beta_3} E_{\beta_6}, \\ E_{\beta_4} E_{\beta_2} &= q^{-1-x} E_{\beta_2} E_{\beta_4}, & E_{\beta_4} E_{\beta_1} &= E_{\beta_1} E_{\beta_4} + q^{-1}(q^{1+x} - q^{-1-x}) E_{\beta_2} E_{\beta_3}, \\ E_{\beta_3} E_{\beta_1} &= q^x E_{\beta_1} E_{\beta_3}, & E_{\beta_6} E_{\beta_2} &= -q^{-1-x} E_{\beta_2} E_{\beta_6} - q^{-1-x}(q - q^{-1}) E_{\beta_3} E_{\beta_5} - q^{-1} E_{\beta_4}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Démonstration. Rappelons que $E_{\beta_1} = E_3$, $E_{\beta_5} = E_1$, $E_{\beta_7} = E_2$. Nous utiliserons implicitement les lemmes 3.2, 3.3 et 3.4. Les relations (3.1) découlent immédiatement du lemme 3.2. Démontrons les relations (3.2).

1. On a $\text{ad}^+ E_2(E_{\beta_6}) = E_{\beta_7} E_{\beta_6} - q E_{\beta_6} E_{\beta_7}$. Or, $\text{ad}^+ E_2(E_{\beta_6}) = \text{ad}^+ E_2(\text{ad}^+ E_2(E_1)) = 0$.
2. On a $E_{\beta_7} E_{\beta_3} - q E_{\beta_3} E_{\beta_7} = \text{ad}^+ E_2(E_{\beta_3}) = \text{ad}^{+2} E_2(E_{\beta_2})$. Or,

$$\begin{aligned} \text{ad}^{+2} E_2(E_{\beta_2}) &= \text{ad}^+ E_2(\text{ad}^+ E_2(E_1 E_3) - q^{-x} \text{ad}^+ E_2(E_3 E_1)) \\ &= \text{ad}^{+2} E_2(E_1) E_3 - q^{-x} E_3 \text{ad}^{+2} E_2(E_1) = 0, \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.3.

3. Comme $E_1^2 = 0$, on a $E_{\beta_6} E_{\beta_5} = -q^{-1} E_{\beta_5} E_{\beta_7} E_{\beta_5}$ et $E_{\beta_5} E_{\beta_6} = E_{\beta_5} E_{\beta_7} E_{\beta_5}$.

4. On a

$$\begin{aligned} E_{\beta_3} &= \text{ad}^+ E_2(E_{\beta_2}) = \text{ad}^+ E_2(E_1 E_3 - q^{-x} E_3 E_1) \\ &= \text{ad}^+ E_2(E_1) E_3 - q^{-x} E_3 \text{ad}^+ E_2(E_1) = E_{\beta_6} E_{\beta_1} - q^{-x} E_{\beta_1} E_{\beta_6}. \end{aligned}$$

5. On a $E_{\beta_5} E_{\beta_4} = q^{-1-x} E_{\beta_5} E_{\beta_3} E_{\beta_5}$ et $E_{\beta_4} E_{\beta_5} = E_{\beta_5} E_{\beta_3} E_{\beta_5}$ car $E_{\beta_5}^2 = 0$.

6. Le même argument prouve que $E_{\beta_5} E_{\beta_2} = -q^{-x} E_{\beta_2} E_{\beta_5}$.

7. On a $E_{\beta_4} = E_{\beta_5} E_{\beta_3} + q^{-1-x} E_{\beta_3} E_{\beta_5}$. Or, $E_{\beta_3}^2 = 0$, d'où $E_{\beta_4} E_{\beta_3} = q^{-1-x} E_{\beta_3} E_{\beta_4}$.

8. De même, $E_{\beta_3} = E_{\beta_7} E_{\beta_2} - q^{-1} E_{\beta_2} E_{\beta_7}$. Comme $E_{\beta_2}^2 = 0$, on a $E_{\beta_3} E_{\beta_2} = -q^{-1} E_{\beta_2} E_{\beta_3}$.

9. On a $E_{\beta_2}E_{\beta_1} - q^xE_{\beta_1}E_{\beta_2} = E_1E_3^2 - q^{-x}E_3E_1E_3 - q^xE_3E_1E_3 + E_3^2E_1 = 0$.

Nous démontrons maintenant les relations (3.3). Nous utiliserons les relations (3.2).

1. On a

$$\begin{aligned} E_{\beta_7}E_{\beta_4} &= E_{\beta_7}(E_{\beta_5}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}) = q^{-1}E_{\beta_5}E_{\beta_7}E_{\beta_3} + E_{\beta_6}E_{\beta_3} + q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_7}E_{\beta_5} \\ &= E_{\beta_5}E_{\beta_3}E_{\beta_7} + E_{\beta_6}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_7} + q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_6} = E_{\beta_4}E_{\beta_7}, \end{aligned}$$

où la deuxième et la troisième égalité proviennent des relations de commutations de $E_{\beta_7}E_{\beta_5}$ et $E_{\beta_7}E_{\beta_3}$ et la dernière de celle de $E_{\beta_6}E_{\beta_3}$.

2. On a

$$\begin{aligned} E_{\beta_6}E_{\beta_4} &= E_{\beta_6}(E_{\beta_5}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}) = E_{\beta_6}E_{\beta_5}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_6}E_{\beta_3}E_{\beta_5} \\ &= -q^{-1}E_{\beta_5}E_{\beta_6}E_{\beta_3} - q^{-1-2x}E_{\beta_3}E_{\beta_6}E_{\beta_5} = -q^{-1-x}E_{\beta_5}E_{\beta_3}E_{\beta_6} - q^{-2-2x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_6} \\ &= q^{-1-x}E_{\beta_4}E_{\beta_6}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les relation de commutation de $E_{\beta_6}E_{\beta_5}$ et $E_{\beta_6}E_{\beta_3}$.

3. On a $E_{\beta_6}E_{\beta_3} + q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_6} = E_{\beta_6}^2E_3 - q^{-x}E_{\beta_6}E_3E_{\beta_6} + q^{-x}E_{\beta_6}E_3E_{\beta_6} - q^{-2x}E_3E_{\beta_6}^2 = 0$ car $E_{\beta_6}^2 = 0$ et $E_{\beta_3} = E_{\beta_6}E_{\beta_1} - q^{-x}E_{\beta_1}E_{\beta_6}$.

4. On utilise à nouveau la même méthode:

$$E_{\beta_4}E_{\beta_2} = E_{\beta_5}E_{\beta_3}E_{\beta_2} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_2} = q^{-1-x}E_{\beta_2}E_{\beta_5}E_{\beta_3} + q^{-2-2x}E_{\beta_2}E_{\beta_3}E_{\beta_5}.$$

5. On a $E_{\beta_3}E_{\beta_1} - q^xE_{\beta_1}E_{\beta_3} = \text{ad}^+E_2(E_{\beta_2})E_3 - q^xE_3\text{ad}^+E_2(E_{\beta_2}) = \text{ad}^+E_2(E_{\beta_2}E_3 - q^xE_3E_{\beta_2}) = 0$ car $E_{\beta_2}E_{\beta_1} = q^xE_{\beta_1}E_{\beta_2}$.

6. On remplace à nouveau E_{β_4} par sa valeur donnée au lemme 3.2 pour obtenir

$$E_{\beta_4}E_{\beta_1} = q^xE_{\beta_5}E_{\beta_1}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5}E_{\beta_1}$$

car $E_{\beta_3}E_{\beta_1} = q^xE_{\beta_1}E_{\beta_3}$. Comme $E_{\beta_5}E_{\beta_1} = q^{-x}E_{\beta_1}E_{\beta_5} + E_{\beta_2}$, nous obtenons

$$E_{\beta_4}E_{\beta_1} = E_{\beta_1}E_{\beta_3}E_{\beta_5} + q^xE_{\beta_2}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_1}E_{\beta_5}E_{\beta_3} + q^{-1-x}E_{\beta_3}E_{\beta_2},$$

ce qui donne le résultat voulu avec $E_{\beta_3}E_{\beta_2} = -q^{-1}E_{\beta_2}E_{\beta_3}$.

7. En remplaçant E_{β_6} par sa valeur donnée au lemme 3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_{\beta_6}E_{\beta_2} &= E_{\beta_7}E_{\beta_5}E_{\beta_2} - q^{-1}E_{\beta_5}E_{\beta_7}E_{\beta_2} \\ &= -q^{-x}E_{\beta_7}E_{\beta_2}E_{\beta_5} - q^{-2}E_{\beta_5}E_{\beta_2}E_{\beta_7} - q^{-1}E_{\beta_5}E_{\beta_3} \\ &= -q^{-1-x}E_{\beta_2}E_{\beta_7}E_{\beta_5} - q^{-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5} + q^{-2-x}E_{\beta_2}E_{\beta_5}E_{\beta_7} + q^{-2-x}E_{\beta_3}E_{\beta_5} - q^{-1}E_{\beta_4} \\ &= -q^{-1-x}E_{\beta_2}E_{\beta_6} - q^{-1-x}(q - q^{-1})E_{\beta_3}E_{\beta_5} - q^{-1}E_{\beta_4}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations de commutation de $E_{\beta_5}E_{\beta_2}$, $E_{\beta_7}E_{\beta_2}$ et $E_{\beta_5}E_{\beta_3}$. ■

Proposition 3.6 *Les coproduits des vecteurs de racines non simples sont donnés par les formules suivantes:*

$$\begin{aligned}
\Delta(E_{\beta_2}) &= E_{\beta_2} \otimes 1 + K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} + (1 - q^{-2x})E_{\beta_5}K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1}, \\
\Delta(E_{\beta_3}) &= E_{\beta_3} \otimes 1 + K_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3} + (1 - q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1} + (1 - q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}, \\
\Delta(E_{\beta_6}) &= E_{\beta_6} \otimes 1 + K_{\beta_6} \otimes E_{\beta_6} + (1 - q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_5} \otimes E_{\beta_5}, \\
\Delta(E_{\beta_4}) &= E_{\beta_4} \otimes 1 + K_{\beta_4} \otimes E_{\beta_4} + (1 - q^{-2-2x})E_{\beta_5}K_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3} - q^{-1}(1 - q^{-2-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} \\
&\quad + (1 - q^{-2x})(1 - q^{-2-2x})E_{\beta_5}E_{\beta_6}K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1} + (1 - q^{-2})(1 - q^{-2-2x})E_{\beta_5}E_{\beta_7}K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons que

$$\Delta(E_i)\Delta(E_j) = E_iE_j \otimes 1 + E_iK_j \otimes E_j + (-1)^{|E_i||E_j|}K_iE_j \otimes E_i + K_iK_j \otimes E_iE_j,$$

donc

$$\begin{aligned}
\Delta(E_{\beta_2}) &= E_1E_3 \otimes 1 + E_1K_3 \otimes E_3 + K_1E_3 \otimes E_1 + K_1K_3 \otimes E_1E_3 \\
&\quad - q^{-x}(E_3E_1 \otimes 1 + E_3K_1 \otimes E_1 + K_3E_1 \otimes E_3 + K_3K_1 \otimes E_3E_1) \\
&= E_{\beta_2} \otimes 1 + K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} + E_1K_3 \otimes E_3 - q^{-x}K_3E_1 \otimes E_3 + K_1E_3 \otimes E_1 - q^{-x}E_3K_1 \otimes E_1 \\
&= E_{\beta_2} \otimes 1 + K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} + (1 - q^{-2x})E_1K_3 \otimes E_3.
\end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique pour calculer $\Delta(E_{\beta_6})$. Nous traitons maintenant le cas de $\Delta(E_{\beta_3})$. On sait que $\Delta(E_{\beta_3}) = [\Delta(E_2), \Delta(E_{\beta_2})]_{q^{-1}}$. Or,

$$\begin{aligned}
\Delta(E_2)\Delta(E_{\beta_2}) &= (E_2 \otimes 1 + K_2 \otimes E_2)(E_{\beta_2} \otimes 1 + K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} + (1 - q^{-2x})E_{\beta_5}K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1}) \\
&= E_2E_{\beta_2} \otimes 1 + E_2K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} + (1 - q^{-2x})E_2E_1K_3 \otimes E_3 + q^{-1}K_2E_{\beta_2} \otimes E_2 \\
&\quad + K_2K_{\beta_2} \otimes E_2E_{\beta_2} + q^{-1}(1 - q^{-2x})E_1K_2K_3 \otimes E_2E_3,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les formules de commutation entre les K_i et les K_j . De même, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(E_{\beta_2})\Delta(E_2) &= E_{\beta_2}E_2 \otimes 1 + q^{-1}E_2K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} + (1 - q^{-2x})E_1E_2K_3 \otimes E_3 + E_{\beta_2}K_2 \otimes E_2 \\
&\quad + K_{\beta_2}K_2 \otimes E_{\beta_2}E_2 + (1 - q^{-2x})E_1K_3K_2 \otimes E_2E_3,
\end{aligned}$$

car $E_2E_3 = E_3E_2$. En regroupant alors suivant les facteurs de droite, on obtient

$$\Delta(E_{\beta_3}) = E_{\beta_3} \otimes 1 + K_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3} + (1 - q^{-2})E_2K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} + (1 - q^{-2x})[E_2, E_1]_{q^{-1}}K_3 \otimes E_{\beta_1},$$

ce qui donne le résultat annoncé d'après le lemme 3.2. Pour terminer, nous traitons le cas de E_{β_4} . On a

$$\begin{aligned}
\Delta(E_1)\Delta(E_{\beta_3}) &= (E_1 \otimes 1 + K_1 \otimes E_1)(E_{\beta_3} \otimes 1 + K_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3} + (1 - q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1} \\
&\quad + (1 - q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}) \\
&= E_1E_{\beta_3} \otimes 1 + E_1K_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3} + (1 - q^{-2})E_1E_{\beta_7}K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} \\
&\quad + (1 - q^{-2x})E_1E_{\beta_6}K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1} - q^{-1-x}E_{\beta_3}K_1 \otimes E_1 + K_1K_{\beta_3} \otimes E_1E_{\beta_3} \\
&\quad + q^{-1}(1 - q^{-2})E_{\beta_7}K_1K_{\beta_2} \otimes E_1E_{\beta_2} - q^{-1}(1 - q^{-2x})E_{\beta_6}K_1K_{\beta_1} \otimes E_1E_{\beta_1},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations de commutation entre les K_i et les E_j . De même, on a

$$\begin{aligned}\Delta(E_{\beta_3})\Delta(E_1) &= E_{\beta_3}E_1 \otimes 1 - q^{-1}E_1K_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3} - q^{-x}(1 - q^{-2})E_{\beta_7}E_1K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} \\ &\quad + q^{-x}(1 - q^{-2x})E_{\beta_6}E_1K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1} + E_{\beta_3}K_1 \otimes E_1 + K_{\beta_3}K_1 \otimes E_{\beta_3}E_1 \\ &\quad + (1 - q^{-2})E_{\beta_7}K_{\beta_2}K_1 \otimes E_{\beta_2}E_1 + (1 - q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_1}K_1 \otimes E_{\beta_1}E_1,\end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned}\Delta(E_{\beta_4}) &= E_{\beta_4} \otimes 1 + K_{\beta_4} \otimes E_{\beta_4} + (1 - q^{-2x})(E_1E_{\beta_6} + q^{-1-2x}E_{\beta_6}E_1)K_3 \otimes E_{\beta_1} \\ &\quad + (1 - q^{-2-2x})E_{\beta_5}K_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3} + (1 - q^{-2})(E_1E_2 - q^{-1-2x}E_2E_1)K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2} \\ &\quad - q^{-1}(1 - q^{-2x})E_{\beta_6}K_1K_3 \otimes (E_1E_3 - q^{-x}E_3E_1) + q^{-1}(1 - q^{-2-x})E_2K_1K_{\beta_2} \otimes (E_1E_{\beta_2} + q^{-x}E_{\beta_2}E_1).\end{aligned}$$

Or, par la proposition 3.5, on a $E_1E_{\beta_6} + q^{-1-2x}E_{\beta_6}E_1 = (1 - q^{-2-2x})E_{\beta_5}E_{\beta_6}$, et

$$-q^{-1}(1 - q^{-2x})E_{\beta_6}K_1K_3 \otimes (E_1E_3 - q^{-x}E_3E_1) = -q^{-1}(1 - q^{-2x})E_{\beta_6}K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}.$$

Ensuite, nous calculons $(1 - q^{-2})(E_1E_2 - q^{-1-2x}E_2E_1)K_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}$. En utilisant la proposition 3.5, on obtient

$$\begin{aligned}(1 - q^{-2})(E_1E_2 - q^{-1-2x}E_2E_1) \otimes K_{\beta_2} &= (1 - q^{-2})(E_{\beta_5}E_{\beta_7} - q^{-1-2x}E_{\beta_7}E_{\beta_5}) \otimes K_{\beta_2} \\ &= (1 - q^{-2})(E_{\beta_5}E_{\beta_7} - q^{-2-2x}E_{\beta_5}E_{\beta_7} - q^{-1-2x}E_{\beta_6}) \otimes K_{\beta_2}.\end{aligned}$$

Pour terminer, il reste le terme $q^{-1}(1 - q^{-2-x})E_2K_1K_{\beta_2} \otimes (E_1E_{\beta_2} + q^{-x}E_{\beta_2}E_1)$. Or, d'après la proposition 3.5, on a $E_1E_{\beta_2} + q^{-x}E_{\beta_2}E_1 = E_{\beta_5}E_{\beta_2} + q^{-x}E_{\beta_2}E_{\beta_5} = 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

3.2 Démonstration du théorème 1.1

Nous terminons maintenant par la démonstration du théorème 1.1.

Lemme 3.7 *Pour tout $i = 1, \dots, 7$, on a $\varphi(F_{\beta_i} \otimes E_{\beta_i}) = \varphi_i$, où φ_i , $i = 1, \dots, 7$ sont définis par (1.18).*

Démonstration. Lorsque $i = 1, 5, 7$, cela découle de (2.9). Pour les autres, la méthode consiste à utiliser le lemme 3.2 conjointement avec la formule (1.7). Or, $\varphi(F \otimes 1) = 0$ pour tout $F \in V_-$, $\varphi(1 \otimes K_j) = 1$ pour tout $j = 1, 2, 3$, $\varphi(F \otimes K) = 0$ pour tout $F \in V_-$, $K \in U_0$ (lemme 2.2). Cela signifie que les deux premiers termes dans les coproduits de la proposition 3.6 ont une contribution nulle. Nous utiliserons ces résultats sans les rappeler, ainsi que le lemme 2.7. Pour $i = 2$, d'après le lemme 3.2, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(F_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}) &= \varphi(F_1F_3 \otimes E_{\beta_2}) - q^{-x}\varphi(F_3F_1 \otimes E_{\beta_2}) \\ &= (1 - q^{-2x})\varphi(F_1 \otimes E_1K_3)\varphi(F_3 \otimes E_3) + q^{-x}(1 - q^{-2x})\varphi(F_3 \otimes E_1K_3)\varphi(F_1 \otimes E_3) \\ &= (1 - q^{-2x})\varphi(F_1 \otimes E_1)\varphi(F_3 \otimes E_3) = \frac{q^{-x}}{q - q^{-1}} = \varphi_2.\end{aligned}$$

Le cas $i = 6$ est identique. Traitons le cas $i = 3$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(F_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3}) &= \varphi(F_2 F_{\beta_2} \otimes E_{\beta_3}) - q^{-1} \varphi(F_{\beta_2} F_2 \otimes E_{\beta_3}) \\
&= (1 - q^{-2}) \varphi(F_2 \otimes E_{\beta_7} K_{\beta_2}) \varphi(F_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}) - (1 - q^{-2x}) \varphi(F_2 \otimes E_{\beta_6} K_{\beta_1}) \varphi(F_{\beta_2} \otimes E_{\beta_1}) \\
&\quad - q^{-1} ((1 - q^{-2x}) \varphi(F_{\beta_2} \otimes E_{\beta_6} K_{\beta_1}) \varphi(F_2 \otimes E_{\beta_1}) + (1 - q^{-2}) \varphi(F_{\beta_2} \otimes E_{\beta_7} K_{\beta_2}) \varphi(F_2 \otimes E_{\beta_2})) \\
&= (1 - q^{-2}) \varphi(F_2 \otimes E_{\beta_7}) \varphi(F_{\beta_2} \otimes E_{\beta_2}) = -\frac{q^{-1-x}}{q - q^{-1}} = \varphi_3.
\end{aligned}$$

Nous terminons par le cas $i = 4$. Sans mettre tous les détails, nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(F_{\beta_4} \otimes E_{\beta_4}) &= \varphi(F_1 F_{\beta_3} \otimes E_{\beta_4}) - q^{-1-x} \varphi(F_{\beta_3} F_1 \otimes E_{\beta_4}) \\
&= -(1 - q^{-2-2x}) \varphi(F_1 \otimes E_1) \varphi(F_{\beta_3} \otimes E_{\beta_3}) = -\frac{q^{-2-2x}(q^{1+x} - q^{-1-x})}{(q - q^{-1})^2} = \varphi_4,
\end{aligned}$$

et le lemme est démontré. ■

Proposition 3.8 Soient $n_1, n_4, n_7 \in \mathbb{N}$, $n_2, n_3, n_5, n_6 \in \{0, 1\}$ et $X = E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7} \in V_+$. Alors

$$\Delta(X) = (n_s)_s E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s-1} K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s} + y \otimes 1 + \sum z \otimes \left(\prod_{i \leq s} E_{\beta_i} \right),$$

où $1 \leq s \leq 7$ est le plus grand des entiers i tel que $n_i \neq 0$, où $(\prod_{i \leq s} E_{\beta_i})$ désigne un produit de racines E_{β_i} dans l'ordre croissant des indices, avec au moins un des indices i vérifiant $i < s$, et où $y, z \in U_+$.

Démonstration. D'après la proposition 3.6 et les relations (2.2), pour $i = 1, \dots, 7$, on a

$$\Delta(E_{\beta_i}) = E_{\beta_i} \otimes 1 + K_{\beta_i} \otimes E_{\beta_i} + \sum_{\beta_k, k < i} z \otimes E_{\beta_k},$$

$z \in U_+$. On en déduit que

$$\Delta(X) = (E_{\beta_1} \otimes 1 + K_{\beta_1} \otimes E_{\beta_1})^{n_1} \cdots (E_{\beta_s} \otimes 1 + K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s} + \sum_{\beta_k, k < s} z \otimes E_{\beta_k})^{n_s}.$$

Le terme $y \otimes 1$ en découle aussitôt. Regardons le terme $z \otimes E_{\beta_s}$, $z \in U_+$. Pour $k = 0, \dots, n_s - 1$, on a

$$\begin{aligned}
&(E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} \otimes 1)(E_{\beta_s}^k \otimes 1)(K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s})(E_{\beta_s}^{n_s-k-1} \otimes 1) \\
&= E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^k K_{\beta_s} E_{\beta_s}^{n_s-k-1} \otimes E_{\beta_s} = q^{c_s(n_s-k-1)} E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s-1} K_{\beta_s} \otimes E_{\beta_s},
\end{aligned}$$

(en utilisant le lemme 3.1), car aucun signe ne peut apparaître dans le produit, car si E_{β_s} est impair, alors $n_s = 1$ d'après le lemme 3.4. En sommant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n_s-1} q^{k c_s} = \frac{q^{n_s c_s} - 1}{q^{c_s} - 1} = (n_s)_s.$$

Il reste donc à voir que tous les termes $z \otimes E_{\beta_s}$ s'obtiennent de cette façon. En effet, il n'est pas clair que le produit

$$\left(\sum_{\beta_k, k < i} z \otimes E_{\beta_k} \right) \left(\sum_{\beta_m, m < j} z' \otimes E_{\beta_m} \right),$$

où $i < j \leq s$, ne donne pas des termes $z \otimes E_{\beta_s}$, puisqu'on obtient des termes $z \otimes E_{\beta_p} E_{\beta_r}$ avec $p > r$. Or, la proposition 3.5 prouve que $E_{\beta_p} E_{\beta_r} = \lambda E_{\beta_r} E_{\beta_p} + \zeta E_{\beta_f} E_{\beta_g} + \mu E_{\beta_t}$, où $\lambda, \zeta, \mu \in \mathbb{C}[[h]]$ et $r < f, g, t < p$. En particulier, si $p \leq s$, on n'obtient jamais un E_{β_s} seul. Le même argument prouve alors que les termes restant sont de la forme $\prod_{i \leq s} E_{\beta_i}$, ce qui prouve la proposition. ■

Lemme 3.9 Soient $n_i, m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 4, 7$, $n_j, m_j \in \{0, 1\}$, $j = 2, 3, 5, 6$. Alors

$$\varphi(F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_7}^{m_7} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7}) = (-1)^\xi \prod_{i=1}^7 \delta_{n_i m_i} (n_i)_i! \varphi_i^{n_i},$$

où $\xi = n_6(n_2 + n_3 + n_5) + n_5(n_2 + n_3) + n_3 n_2$.

Démonstration. Soit s le plus grand des indices i tel que m_i ou n_i soit non nul. Nous supposons pour la démonstration que $n_s \geq m_s$. Posons $X = E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s-1}$ et $Y = F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_{s-1}}^{m_{s-1}} F_{\beta_s}^{m_s-1}$. Si $m_s \neq 0$, alors

$$\varphi(Y F_{\beta_s} \otimes X E_{\beta_s}) = \sum_{(X E_{\beta_s})} (-1)^{|F_{\beta_s}| |(X E_{\beta_s})_{(1)}|} \varphi(Y \otimes (X E_{\beta_s})_{(1)}) \varphi(F_{\beta_s} \otimes (X E_{\beta_s})_{(2)}).$$

Or, d'après la proposition 3.8, on a $\varphi(F_{\beta_s} \otimes (X E_{\beta_s})_{(2)}) = 0$ sauf lorsque $(X E_{\beta_s})_{(2)} = E_{\beta_s}$. En effet, si $(X E_{\beta_s})_{(2)} = 1$, cela découle du lemme 2.2. Sinon, $(X E_{\beta_s})_{(2)} = \prod_{i \leq s} E_{\beta_i}$ par la proposition 3.8, et le lemme 2.7 permet de conclure. On en déduit que

$$\begin{aligned} \varphi(Y F_{\beta_s} \otimes X E_{\beta_s}) &= (-1)^{|F_{\beta_s}| |(X E_{\beta_s})_{(1)}|} (n_s)_s \varphi_s \varphi(Y \otimes X K_{\beta_s}) \\ &= (-1)^{|F_{\beta_s}| |(X E_{\beta_s})_{(1)}|} (n_s)_s \varphi_s \varphi(Y \otimes X) \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.3. Or, $|(X E_{\beta_s})_{(1)}| = |E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}} E_{\beta_s}^{n_s-1} K_{\beta_s}|$. Évidemment, le seul cas qui nous intéresse est celui où $|\beta_s| = 1$, et dans ce cas $n_s - 1 = 0$. On en déduit que

$$|(X E_{\beta_s})_{(1)}| = |E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_{s-1}}^{n_{s-1}}| = \sum_{i < s, |\beta_i|=1} n_i$$

puisque lorsque β_i est impaire, nous avons $n_i = 0$ ou 1 (lemme 3.4). En faisant cette opération $n_s - m_s$ fois, on obtient

$$\varphi(Y F_{\beta_s} \otimes X E_{\beta_s}) = (-1)^{\zeta_s} (n_s)_s \cdots (n_s - m_s + 1)_s \varphi^{n_s - m_s} \varphi(F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_{m_s-1}}^{m_{m_s-1}} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_s}^{n_s - m_s}),$$

où $\zeta_s = \sum_{i < s, |\beta_i|=1} n_i$. Si $n_s = m_s$, alors on peut refaire ce même raisonnement tant que $n_i = m_i$, et ce jusqu'à ce que $s = 1$. De plus, il apparaît un signe $(-1)^\xi$ où $\xi = \sum_{i=1}^7 \zeta_i = n_6(n_2 + n_3 + n_5) + n_5(n_2 + n_3) + n_3 n_2$. Il reste donc à montrer que

$$\varphi(F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_r}^{m_r} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_s}^{n_s}) = 0$$

si $s > r$ et $n_s > 0$. Posons $Y = F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_r}^{m_r}$ et $X = E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_s}^{n_s-1}$. Nous avons

$$\varphi(Y \otimes X E_{\beta_s}) = \sum_{(Y)} \varphi(Y_{(1)} \otimes E_{\beta_s}) \varphi(Y_{(2)} \otimes X)$$

d'après (1.8). Or, d'après les propositions 2.8 et 3.8, on a

$$\Delta(Y) = F_{\beta_r} \otimes y + 1 \otimes z + \sum \left(\prod_{i \leq r} F_{\beta_i} \right) \otimes t,$$

$y, z, t \in U_-$. On en déduit que $\varphi(Y_{(1)} \otimes E_{\beta_s}) = 0$ d'après les propositions 2.2 et 2.7. ■

Pour $j = 1, 2, 3$, posons $\tilde{H}_j = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^3 b_{ij} H'_i$, où les scalaires b_{ij} sont définis par (1.19).

Lemme 3.10 *On a $\varphi(\tilde{H}_j \otimes H_i) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq 3$ et*

$$\varphi \left(\frac{\tilde{H}_1^{q_1}}{q_1!} \frac{\tilde{H}_2^{q_2}}{q_2!} \frac{\tilde{H}_3^{q_3}}{q_3!} \otimes H_1^{p_1} H_2^{p_2} H_3^{p_3} \right) = \delta_{p_1 q_1} \delta_{p_2 q_2} \delta_{p_3 q_3}.$$

Démonstration. On a

$$\varphi(\tilde{H}_j \otimes H_i) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^3 b_{kj} \varphi(H'_k \otimes H_i) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^3 b_{kj} \left(-\frac{2a_{ik}}{hd_k} \right).$$

Or, $B = (b_{ij})$ est l'inverse de la matrice $(-a_{ij}/d_j)$ (cf. (1.19)). ■

Proposition 3.11 *Soient $n_i, m_i, p_j, q_j \in \mathbb{N}$ ($i = 1, 4, 7, j = 1, 2, 3$) et $n_k, m_k \in \{0, 1\}$ ($k = 2, 3, 5, 6$). On a*

$$\varphi \left((-1)^\xi \frac{F_{\beta_1}^{m_1}}{(m_1)_1! \varphi_1^{m_1}} \cdots \frac{F_{\beta_7}^{m_7}}{(m_7)_7! \varphi_7^{m_7}} \frac{\tilde{H}_1^{q_1}}{q_1!} \frac{\tilde{H}_2^{q_2}}{q_2!} \frac{\tilde{H}_3^{q_3}}{q_3!} \otimes E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7} H_1^{p_1} H_2^{p_2} H_3^{p_3} \right) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq 7 \\ 1 \leq j \leq 3}} \delta_{n_i m_i} \delta_{p_j q_j},$$

où $\xi = n_6(n_2 + n_3 + n_5) + n_5(n_2 + n_3) + n_3 n_2$.

Démonstration. Cette proposition découle immédiatement des lemmes 2.3, 3.9 et 3.10. ■

Démonstration du théorème 1.1. D'après les résultats de Zou, la famille

$$E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7} H_1^{\ell_1} H_2^{\ell_2} H_3^{\ell_3} \quad (\text{resp. la famille } (-1)^\xi \frac{F_{\beta_1}^{n_1}}{(n_1)_1! \varphi_1^{n_1}} \cdots \frac{F_{\beta_7}^{n_7}}{(n_7)_7! \varphi_7^{n_7}} \frac{\tilde{H}_1^{\ell_1}}{\ell_1!} \frac{\tilde{H}_2^{\ell_2}}{\ell_2!} \frac{\tilde{H}_3^{\ell_3}}{\ell_3!})$$

où ℓ_i, n_j parcourent \mathbb{N} pour $i = 1, 2, 3, j = 1, 4, 7$, et où n_i décrit $\{0, 1\}$ pour $i = 2, 3, 5, 6$, forme une famille génératrice de U_+ (resp. de U_-) sur $\mathbb{C}[[\hbar]]$. D'après la proposition 3.11, ces familles forment respectivement des $\mathbb{C}((\hbar))$ -bases de $U_+ \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} \mathbb{C}((\hbar))$ et $U_- \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} \mathbb{C}((\hbar))$ duales pour φ . On en déduit (cf. [6, 11, 43]) que l'élément

$$R_{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, n_1, n_4, n_7 \in \mathbb{N} \\ n_2, n_3, n_5, n_6 \in \{0, 1\}}} \frac{(-1)^{n_6(n_5+n_3+n_2)+n_5(n_3+n_2)+n_3n_2}}{(n_1)_1!(n_4)_4!(n_7)_7!m_1!m_2!m_3!\varphi_1^{n_1} \cdots \varphi_7^{n_7}} \\ \times E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7} H_1^{m_1} \cdots H_3^{m_3} \otimes F_{\beta_1}^{n_1} \cdots F_{\beta_7}^{n_7} \tilde{H}_1^{m_1} \cdots \tilde{H}_3^{m_3}$$

est une R -matrice universelle pour $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} \mathbb{C}((\hbar))$. Comme $R \in \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$, c'est également une R -matrice universelle pour \mathcal{D} . On en déduit que l'image $R \in \overline{\mathcal{D}} \otimes \overline{\mathcal{D}}$ de $R_{\mathcal{D}}$ par la projection canonique de \mathcal{D} sur $\overline{\mathcal{D}}$ est une R -matrice universelle pour $\overline{\mathcal{D}}$ (cf. le paragraphe précédant la proposition 2.13 pour la définition de $\overline{\mathcal{D}}$). Or,

$$(-1)^{n_6(n_5+n_3+n_2)+n_5(n_3+n_2)+n_3n_2} E_{\beta_1}^{n_1} \cdots E_{\beta_7}^{n_7} \otimes F_{\beta_1}^{n_1} \cdots F_{\beta_7}^{n_7} = (E_{\beta_1}^{n_1} \otimes F_{\beta_1}^{n_1}) \cdots (E_{\beta_7}^{n_7} \otimes F_{\beta_7}^{n_7}),$$

et

$$\sum_{m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}} \frac{H_1^{m_1} H_2^{m_2} H_3^{m_3} \otimes \tilde{H}_1^{m_1} \tilde{H}_2^{m_2} \tilde{H}_3^{m_3}}{m_1! m_2! m_3!} = \exp \left(\frac{\hbar}{2} \left(\sum_{i,j} b_{ij} H_i \otimes H_j \right) \right),$$

donc

$$R = \exp_1 \left(\frac{E_{\beta_1} \otimes F_{\beta_1}}{\varphi_1} \right) \cdots \exp_7 \left(\frac{E_{\beta_7} \otimes F_{\beta_7}}{\varphi_7} \right) \exp \left(\frac{\hbar}{2} \left(\sum_{i,j} b_{ij} H_i \otimes H_j \right) \right)$$

d'après les formules (1.18). La proposition 2.13 achève la démonstration. ■

Références

- [1] H. H. Andersen. Tensor products of quantized tilting modules. *Comm. Math. Phys.*, 149(1):149–159, 1992.
- [2] H. H. Andersen and J. Paradowski. Fusion categories arising from semisimple Lie algebras. *Comm. Math. Phys.*, 169(3):563–588, 1995.
- [3] M. Chaichian and P. Kulish. Quantum Lie superalgebras and q -oscillators. *Phys. Lett. B*, 234(1-2):72–80, 1990.
- [4] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [5] C. De Concini and V. G. Kac. Representations of quantum groups at roots of 1. In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, pages 471–506. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [6] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 283(5):1060–1064, 1985.
- [7] R. Floreanini, D. A. Leites, and L. Vinet. On the defining relations of quantum superalgebras. *Lett. Math. Phys.*, 23(2):127–131, 1991.
- [8] F. M. Goodman, P. de la Harpe, and V. F. R. Jones. *Coxeter graphs and towers of algebras*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [9] M. D. Gould, J. R. Links, and Y.-Z. Zhang. Type-I quantum superalgebras, q -supertrace, and two-variable link polynomials. *J. Math. Phys.*, 37(2):987–1003, 1996.
- [10] M. D. Gould, I. Tsohantjis, and A. J. Bracken. Quantum supergroups and link polynomials. *Rev. Math. Phys.*, 5(3):533–549, 1993.
- [11] M. D. Gould, R. B. Zhang, and A. J. Bracken. Quantum double construction for graded Hopf algebras. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 47(3):353–375, 1993.
- [12] J. C. Jantzen. *Lectures on quantum groups*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [13] M. Jimbo. A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10(1):63–69, 1985.
- [14] V. F. R. Jones. Index for subfactors. *Invent. Math.*, 72(1):1–25, 1983.
- [15] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1):103–111, 1985.
- [16] V. F. R. Jones. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 126(2):335–388, 1987.

- [17] V. G. Kac. Lie superalgebras. *Advances in Math.*, 26(1):8–96, 1977.
- [18] C. Kassel. *Quantum groups*. Graduate Texts in Math. vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [19] C. Kassel, M. Rosso, and V. Turaev. *Quantum groups and knot invariants*. Panoramas et Synthèses, vol. 5, Soc. Math. France, Paris, 1997.
- [20] L. H. Kauffman. *Knots and physics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 1993.
- [21] D. Kazhdan and H. Wenzl. Reconstructing monoidal categories. In *I. M. Gelfand Seminar*, pages 111–136. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [22] T. Kerler. *Quantum groups, quantum categories and quantum field theory*. Dissertation, ETH, Zürich, 1992.
- [23] S. M. Khoroshkin and V. N. Tolstoy. Universal R -matrix for quantized (super)algebras. *Comm. Math. Phys.*, 141(3):599–617, 1991.
- [24] R. Kirby and P. Melvin. The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl_2(\mathbb{C})$. *Invent. Math.*, 105(3):473–545, 1991.
- [25] A. N. Kirillov and N. Reshetikhin. q -Weyl group and a multiplicative formula for universal R -matrices. *Comm. Math. Phys.*, 134(2):421–431, 1990.
- [26] M. Kontsevich. Vassiliev’s knot invariants. In *I. M. Gelfand Seminar*, pages 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [27] P. P. Kulish and N. Y. Reshetikhin. Universal R -matrix of the quantum superalgebra $osp(2|1)$. *Lett. Math. Phys.*, 18(2):143–149, 1989.
- [28] N. A. Ky. Finite-dimensional representations of the quantum superalgebra $U_q[\mathfrak{gl}(2/2)]$. I. Typical representations at generic q . *J. Math. Phys.*, 35(5):2583–2606, 1994.
- [29] N. A. Ky. Superalgebras, their quantum deformations and the induced representation method. *Preprint math/9810170*, 1998.
- [30] S. Z. Levendorskiĭ and Y. S. Soĭbelman. Some applications of the quantum Weyl groups. *J. Geom. Phys.*, 7(2):241–254, 1990.
- [31] W. B. R. Lickorish. Three-manifolds and the Temperley-Lieb algebra. *Math. Ann.*, 290(4):657–670, 1991.
- [32] W. B. R. Lickorish. Calculations with the Temperley-Lieb algebra. *Comment. Math. Helv.*, 67(4):571–591, 1992.
- [33] J. Lieberum. On Vassiliev invariants not coming from semisimple Lie algebras. *J. Knot Theory Ramifications*, 8(5):659–666, 1999.

- [34] J. R. Links and M. D. Gould. Two variable link polynomials from quantum supergroups. *Lett. Math. Phys.*, 26(3):187–198, 1992.
- [35] J. R. Links, M. D. Gould, and R. B. Zhang. Quantum supergroups, link polynomials and representation of the braid generator. *Rev. Math. Phys.*, 5(2):345–361, 1993.
- [36] J. R. Links, M. Scheunert, and M. D. Gould. Diagonalization of the braid generator on unitary irreps of quantum supergroups. *Lett. Math. Phys.*, 32(3):231–240, 1994.
- [37] G. Lusztig. Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras. *Adv. in Math.*, 70(2):237–249, 1988.
- [38] G. Lusztig. *Introduction to quantum groups*. Prog. in Math. vol. 110, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [39] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [40] H. R. Morton. Invariants of links and 3-manifolds from skein theory and from quantum groups. In *Topics in knot theory (Erzurum, 1992)*, pages 107–155. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [41] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.
- [42] M. Rosso. Finite-dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra. *Comm. Math. Phys.*, 117(4):581–593, 1988.
- [43] M. Rosso. An analogue of P.B.W. theorem and the universal R -matrix for $U_h \mathfrak{sl}(N+1)$. *Comm. Math. Phys.*, 124(2):307–318, 1989.
- [44] M. Scheunert. The presentation and q deformation of special linear Lie superalgebras. *J. Math. Phys.*, 34(8):3780–3808, 1993.
- [45] T. Tanisaki. Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R -matrices for quantum algebras. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, pages 941–961. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.
- [46] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb. Relations between the “percolation” and “colouring” problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the “percolation” problem. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 322(1549):251–280, 1971.
- [47] H. Thys. Description topologique des représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 8(4):695–725, 1999.
- [48] V. G. Turaev. Operator invariants of tangles and R -matrices. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(5):1073–1107, 1989. Traduit dans *Math. USSR-Izv.* 35:441–444, 1990.

- [49] V. G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. W. de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [50] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces. In *Theory of singularities and its applications*, pages 23–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [51] P. Vogel. Algebraic structures on modules of diagrams. *Preprint*, 1997.
- [52] H. Wenzl. On sequences of projections. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 9(1):5–9, 1987.
- [53] H. Yamane. Universal R -matrices for quantum groups associated to simple Lie superalgebras. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 67(4):108–112, 1991.
- [54] H. Yamane. Quantized enveloping algebras associated with simple Lie superalgebras and their universal R -matrices. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 30(1):15–87, 1994.
- [55] H. Yamane. A Serre type theorem for affine Lie superalgebras and their quantized enveloping superalgebras. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 70(1):31–36, 1994.
- [56] H. Yamane. On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 35(3):321–390, 1999.
- [57] R. B. Zhang. Graded representations of the Temperley-Lieb algebra, quantum supergroups, and the Jones polynomial. *J. Math. Phys.*, 32(10):2605–2613, 1991.
- [58] R. B. Zhang. Braid group representations arising from quantum supergroups with arbitrary q and link polynomials. *J. Math. Phys.*, 33(11):3918–3930, 1992.
- [59] R. B. Zhang. Quantum supergroups and topological invariants of three-manifolds. *Rev. Math. Phys.*, 7(5):809–831, 1995.
- [60] R. B. Zhang and M. D. Gould. Universal R -matrices and invariants of quantum supergroups. *J. Math. Phys.*, 32(12):3261–3267, 1991.
- [61] Y. M. Zou. Deformation of the universal enveloping algebra of $\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. *Canad. Math. Bull.*, 39(4):499–506, 1996.