INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Université Louis Pasteur et CNRS (UMR 7501)

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cédex

COURBES ALGEBRIQUES REELLES ET COURBES FLEXIBLES SUR LES SURFACES REGLEES

par

Jean-Yves WELSCHINGER

AMS subject classification : 14H10, 14J26, 14P25.
Mots clés : courbe algébrique réelle, discriminant, surface de Hirzebruch, variété presque-complexe.

Remerciements

Ces lignes sont très insuffisantes pour exprimer mes remerciements envers Viatcheslav Kharlamov. Cela a été une expérience extrêmement enrichissante pour moi de pouvoir effectuer ma thèse sous sa direction. A travers sa disponibilité constante, sa patience systématique et ses innombrables conseils, il m'a offert sans compter la possibilité de profiter de sa grande expérience en matière de recherche. Je lui en suis vivement reconnaissant.

Je remercie également Norbert A'Campo, Olivier Debarre, Stepan Orevkov et Jean-Jacques Risler d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Enfin, je tiens à remercier Michèle Audin et Thomas Delzant de l'éxcellent accueil qu'ils m'ont réservé dès mon arrivée dans cette université.

Table des matières

Introduction **1**

Préliminaires **7**

1 Les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$ **7**
1.1 Les automorphismes des surfaces X_l 8
1.2 Les structures réelles de X_l 8

2 Les surfaces réglées presque-complexes séparantes **10**
2.1 Les surfaces réglées presque-complexes séparantes 10
2.2 Le nombre d'enroulement 12

3 Le principe d'alternance **12**
3.1 L'invariant s 13
3.2 Le principe d'alternance 14

I Forme d'intersection tordue et extension de la congruence d'Arnol'd **15**

4 Forme d'intersection tordue **15**
4.1 Triangulations générales, et la forme $\mathcal{P}_c^\tau$ 15
4.2 La forme quadratique $\mathcal{P}_c$ 17
4.3 Quelques propriétés de la forme $\mathcal{P}_c$ 19

5 Extension de la congruence d'Arnol'd **19**
5.1 La fonction ind et son intégrale. 19
5.2 Résultat principal 21
5.3 Applications 22
5.3.1 Les surfaces de Del Pezzo 22
5.3.2 Les surfaces réglées presque-complexes séparantes 23

6 Compléments **26**
6.1 Courbes de torsion sur les surfaces réglées 27
6.2 Courbes séparantes disjointes 28

II Courbes J-holomorphes réelles à nids profonds sur les surfaces presque-complexes réglées **31**

7 Les courbes à nids profonds **31**
7.1 Courbes à nids profonds et les cycles $\mathcal{A}_\pm$ 31
7.2 Calculs de $[\mathcal{A}_\pm]$ et $\chi(\mathcal{A}_\pm)$ 32
7.3 Les termes $\pi^\pm$ 34
7.3.1 Cas des courbes dans un tore 35
7.3.2 Cas des courbes dans une bouteille de Klein 38

8 Résultats et applications **38**
8.1 Enoncés des résultats 38
8.2 Applications 41
8.2.1 Courbes planes projectives 41
8.2.2 Courbes sur les surfaces réglées 43

9 Inégalités supplémentaires **44**
9.1 Construction d'un revêtement double ramifié Y en $\widetilde{\mathcal{A}}$ 44
9.2 Décomposition de $H_2(Y;\mathbb{R})$ 45
9.3 Les formes quadratiques f^ϵ. 48
9.4 Résultat principal. 49
9.5 Une application. 51
9.6 Remarque finale. 51

Annexe A Démonstration de la proposition 8.4 **52**

Annexe B Formule de Rudolph dans $D \times \mathbb{C}P^1$ **54**
B.1 L'indice d'intersection 54
B.2 La somme des exposants 56
B.3 Formule de Rudolph généralisée 56

III Discriminants, courbes flexibles et courbes isotopes sur les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$ **57**

10 Discriminants des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$ **57**
10.1 Une déformation Y des surfaces réglées 57
10.2 Homothéties à poids 58
10.3 Discriminants des surfaces X_m 59

11 Constructions de courbes flexibles et d'isotopies équivariantes de courbes algébriques réelles **62**
11.1 Surjectivité de f_D, courbes flexibles non-algébriques dans X_m 63
11.2 Injectivité de f_D, courbes isotopes de classes de déformation distinctes 67

Bibliographie **75**

Introduction

Une *surface algébrique réelle* X est une surface algébrique complexe projective munie d'une involution antiholomorphe c appelée la *structure réelle* de X. Dans cette thèse, ces surfaces seront toujours lisses et compactes. La *partie réelle* de X est alors le lieu des points fixes de c, c'est une sous-variété de classe C^∞ de X soit vide, soit de dimension réelle 2, notée $\mathbb{R}X$. Toute surface lisse de $\mathbb{C}P^n$ définie comme le lieu des zéros d'un système de polynômes homogènes à coefficients réels est une surface algébrique réelle, la structure réelle provenant de la restriction de la conjugaison complexe de $\mathbb{C}P^n$. Ces surfaces sont d'ailleurs les seules surfaces algébriques réelles, puisque réciproquement toute surface algébrique réelle peut être réalisée ainsi.

Fixons le système linéaire complet $|D|$ des diviseurs de X linéairement équivalent à diviseur effectif D donné. C'est l'espace projectif associé au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(D)$ des sections algébriques du fibré en droites complexes $L_D \to X$ qui est associé à D. Le sous ensemble de $|D|$ formé des diviseurs singuliers dans X, lorsqu'il est non-vide et différent de $|D|$ tout entier, forme une hypersurface algébrique $\Delta_D \subset |D|$ appelée *discriminant*. Lorsque D est réel, il existe une structure réelle sur L_D qui commute avec celle de X et induit une conjugaison complexe sur $|D|$ pour laquelle Δ_D est une hypersurface algébrique réelle.

Les résultats obtenus dans cette thèse sont motivés par le problème suivant :

Décrire les composantes connexes du complémentaire de $\mathbb{R}\Delta_D$ dans $\mathbb{R}|D|$.

Dans le cas complexe, une telle description peut être donnée immédiatement, puisque $|D| \setminus \Delta_D$ est connexe. Dans le cas réel, la situation est bien différente et ce problème est à ce jour largement ouvert. La réponse n'est connue que dans le cas des courbes de degré inférieur ou égal à six dans $\mathbb{C}P^2$, et dans le cas des courbes de bidegré $(3,3)$, $(4,3)$ et (a,b) avec $a \leq 2$ sur l'hyperboloïde, c'est-à-dire sur $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ muni du produit des conjugaisons complexes (v. [4], [40],[5]).

Si A est une courbe algébrique réelle lisse de X, sa partie réelle $\mathbb{R}A$ est une courbe lisse de $\mathbb{R}X$. La classe d'isotopie de cette courbe dans $\mathbb{R}X$ est invariante par déformation de A dans X, elle est appelée *le schéma réel* de A, c'est un invariant qui permet de distinguer les composantes connexes de $\mathbb{R}|D| \setminus \mathbb{R}\Delta_D$. Par exemple, la conique imaginaire d'équation $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}P^2$, et la conique réelle d'équation $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ sont deux courbes algébriques réelles lisses dans un même système linéaire de diviseurs $\mathbb{R}|D|$ qui n'appartiennent pas à une même composante du complémentaire de $\mathbb{R}\Delta_D$, parce qu'elles n'ont pas même schéma réel. Une première étape importante est donc de classifier les schémas réels qui apparaissent dans un système linéaire de diviseurs donné. Cette question a été incluse par D. Hilbert dans son seizième problème dans le cas des courbes planes projectives (v. [13]). Elle a motivée de nombreuses recherches au cours du XXeme siècle (v. les surveys [37], [33], [4]), et n'est à ce jour résolue que dans le cas des courbes de degré inférieur ou égal à 7. Cependant, la connaissance de cet invariant ne suffit pas pour décrire l'espace $\mathbb{R}|D| \setminus \mathbb{R}\Delta_D$, comme l'avait déjà remarqué V.A. Rokhlin dans le cas des courbes de degrés 5 et 6 de $\mathbb{C}P^2$ (v. [28]).

Une courbe algébrique réelle lisse irréductible A est dite *séparante* lorsque $A \setminus \mathbb{R}A$ est constituée de deux composantes connexes A^+, A^- échangées par la structure réelle, et elle est dite *non-séparante* sinon. Lorsque la courbe A est séparante, les moitiés A^+ et A^- sont orientées canoniquement, l'orientation provenant de la structure complexe de A. Puisque $\mathbb{R}A$ est le bord commun de A^+ et A^-, ces parties induisent sur $\mathbb{R}A$ deux orientations qui sont opposées, elles sont appelées les *orientations complexes* de $\mathbb{R}A$. La nature séparante ou non-séparante de A, et lorsque A est séparante, la classe d'isotopie dans $\mathbb{R}X$ de $\mathbb{R}A$ munie d'une orientation complexe sont eux aussi invariants par déformation de A. Ces invariants sont appelés respectivement *le type* et *le schéma complexe* de A. Remarquons qu'un schéma réel peut être réalisé par une courbe séparante, et éga-

lement par une courbe non-séparante qui n'est donc pas dans la même composante de $\mathbb{R}|D| \setminus \mathbb{R}\Delta_D$, comme c'est le cas par exemple du schéma d'une courbe de degré 5 de $\mathbb{C}P^2$ constitué d'une composante *unilatère*, c'est-à-dire dont le voisinage tubulaire dans $\mathbb{R}P^2$ est un ruban de Mœbius, et de quatre composantes *bilatères*, c'est-à-dire dont les voisinages tubulaires dans $\mathbb{R}P^2$ sont des cylindres. Une seconde étape importante est donc de classifier les types et schémas complexes des courbes dans un système linéaire de diviseurs donné $|D|$, bien que la connaissance de ces invariants soit toujours insuffisante pour décrire $\mathbb{R}|D| \setminus \mathbb{R}\Delta_D$ (v. [20], [10]).

Pour obtenir de telles classifications, il s'agit d'une part d'établir des propriétés des courbes algébriques réelles pour en déduire des restrictions sur l'ensemble des schémas réels ou complexes réalisés par ces courbes, et d'autre part de construire des courbes réalisant les schémas que l'on ne sait pas interdire. Les premières restrictions sur les schémas complexes ont été obtenues par V.I. Arnol'd et V.A. Rokhlin dans le cas des courbes algébriques réelles de degré pair de $\mathbb{C}P^2$ (v. [1] et [27]).

Cette thèse présente dans ses deux premières parties de nouvelles approches qui permettent d'une part d'obtenir une famille de congruences qui généralisent à une large classe de surfaces algébriques réelles mais aussi qui unifient des résultats antérieurs de V.I. Arnol'd, V.A. Rokhlin et G. Mikhalkin, et d'autre part, qui permettent d'étendre aux courbes séparantes à nids profonds sur les surfaces réglées une formule plus récente de S. Orevkov pour les courbes planes, et d'obtenir des majorations portant sur la nature de ces nids. Enfin, la troisième partie de cette thèse présente, dans les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$, une construction de schémas réels qui sont réalisés par des courbes flexibles mais pas par des courbes algébriques réelles, ainsi qu'une construction de courbes algébriques réelles isotopes, mais qui ne sont pas dans une même classe de déformation. Une *courbe flexible* de la surface réglée X est une sous-variété C^∞ de dimension deux de X, stable par l'involution antiholomorphe, dont les espaces tangents en les points réels sont complexes, et qui réalise un revêtement ramifié de la base dont chaque point de ramification d'indice $k-1$ est conjugué par des difféomorphismes préservant l'orientation au modèle $x = y^k$ de $\mathbb{C}^2$ et non au modèle $x = \overline{y}^k$ de $\mathbb{C}^2$. De même, deux courbes algébriques réelles lisses C_0, C_1 de X sont dites isotopes s'il existe un chemin continu de difféomorphismes de X reliant l'identité à un difféomorphisme qui envoie C_0 sur C_1, chaque difféormorphisme devant commuter avec la structure réelle. Les résultats présentés dans les deux premières parties de cette thèse, comme la plupart des résultats connus dans ce domaine, sont obtenus par des méthodes topologiques. Ils sont d'ailleurs présentés dans le cadre plus général des courbes J-holomorphes dans des variétés presques-complexes de dimension 4. L'existence de schémas réels réalisés par des courbes flexibles mais pas par des courbes algébriques réelles montre l'insuffisance de ces méthodes pour obtenir une classification des schémas réels ou complexes qui apparaissent dans un système linéaire de diviseurs donné. Un exemple d'un schéma réel d'une courbe affine de degré 6 de $\mathbb{C}^2$ non algébrique a déjà été donné dans [9], et d'une courbe de X_2 non algébrique dans [25]. De même, l'existence de courbes algébriques réelles isotopes qui ne sont pas dans une même classe de déformation montre l'insuffisance des méthodes topologiques pour décrire l'espace $\mathbb{R}|D| \setminus \mathbb{R}\Delta_D$.

La démarche utilisée dans la première partie pour obtenir les congruences est la suivante : on commence par construire un 2-cycle $\mathcal{A}_l$ modulo l (l est un entier positif) dont la classe d'homologie dans $H_2(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ relève celle réalisée par une moitié A^+ de $A \setminus \mathbb{R}A$ dans $H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, puis on démontre le théorème 0.1. Avant d'énoncer ce théorème, remarquons que la forme d'intersection tordue $x \mapsto x \circ c_*(x)$ définie sur $H_n(X;\mathbb{Z})$ passe au quotient en une application $q_c : H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ dès que l est pair.

Théorème 0.1 *Soient X une variété compacte orientée de classe C^1 et de dimension $2n$, et c une involution de classe C^1 sur X, telle que $\dim(X^c) \leq n$ où X^c est le lieu des points fixes de c.*

Pour tout entier pair l, il existe une application $\mathcal{P}_c : H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \arrow[d, "red_l"] \arrow[dr, "q_c"] & \\ H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathcal{P}_c"] & \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Cette application est définie par la propriété suivante : si A^n est un cycle simplicial modulo l, transverse à son image par c, alors $\mathcal{P}_c([A^n]) = A^n \circ c(A^n) \mod (2l)$.

On effectue alors un calcul géométrique et un calcul topologique de $\mathcal{P}_c(\mathcal{A}_l)$, pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 0.2 *Soient X une surface algébrique réelle munie d'une structure réelle c, et A une courbe algébrique réelle lisse séparante de X. Alors si l est pair, $\mathcal{P}_c(\mathcal{A}_l) = -\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi \mod (2l)$, et si l est impair, $[\mathcal{A}_l] \circ c_*[\mathcal{A}_l] = -\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi \mod (l)$.*

Dans ce théorème, $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi$ est une quantité topologique qui ne dépend que du schéma complexe de A, et du choix de $\mathbb{R}\mathcal{A}_l$. Un calcul explicite de $\mathcal{P}_c(\mathcal{A}_l)$ est effectué dans le cas des surfaces réglées et de Del Pezzo réelles, ce qui permet d'unifier et de généraliser à ces surfaces des résultats de V. I. Arnol'd, V. A. Rokhlin, N. M. Mishachev et G. Mikhalkin (v. [1], [27], [23], [22]).

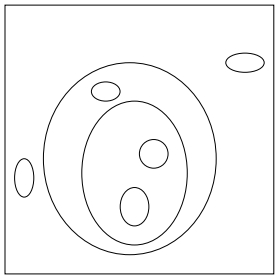
Si le théorème 0.1 est très général, il ne permet toutefois pas d'en déduire une généralisation explicite de la congruence d'Arnol'd à toutes les courbes séparantes sur les surfaces algébriques réelles. Ceci provient du fait que si la classe d'homologie de A^+ dans $H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z})$ (et celle de $\mathcal{A}_l$ dans $H_2(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$) se calcule facilement dans le cas de $\mathbb{C}P^2$, des surfaces réglées et de Del Pezzo réelles, ce n'est pas le cas dans des surfaces algébriques réelles quelconques. Il se dégage en fait de cette partie le problème suivant :

Déterminer les valeurs prises par $[A^+] \in H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z})$, lorsque A est une courbe algébrique réelle lisse séparante dans un système linéaire de diviseurs de X fixé.

Cette classe $[A^+]$ est en effet invariante par déformation de A dans X. Plus généralement, remarquons que la suite exacte longue d'homologie associée à la paire $(X, \mathbb{R}X)$ est un invariant par déformation abstraite de la variété algébrique réelle lisse X. Dans le cas d'une courbe A par exemple, cet invariant regroupe des invariants tels que le type de la courbe et le nombre de composantes connexes de sa partie réelle. Si A est une courbe algébrique réelle de X, l'injection de A dans X induit un morphisme entre les suites exactes longues associées à $(A, \mathbb{R}A)$ et $(X, \mathbb{R}X)$. Ce morphisme entre suites exactes est invariant par déformation de A dans X, et un problème plus général est de classifier les valeurs prises par cet invariant lorsque A appartient à un système linéaire de diviseurs donné. Les résultats de la première partie fournissent des restrictions sur les valeurs possibles prises par $[A^+] \in H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z})$ lorsque le schéma complexe de $\mathbb{R}A$ est fixé, et semblent donc être un premier pas dans l'étude de ce problème.

La seconde partie de cette thèse est motivée par une formule d'orientations complexes obtenue par S. Orevkov (v. [26], théorème 1.5.A) pour les courbes planes séparantes dont la partie réelle possède un nid profond, c'est-à-dire un nid de profondeur $k-1$ si la courbe est de degré $2k$ ou

$2k+1$.



Une courbe à nid profond de degré 8

La technique utilisée par S. Orevkov pour obtenir ce résultat consiste à introduire le pinceau de droites centré en un point intérieur au nid de $\mathbb{R}A$ pour déduire de A une tresse quasipositive plongée dans $S^1 \times \mathbb{C}$, puis en utiliser une formule qui se déduit des résultats de L. Rudolph (v. [30] et en annexe à la deuxième partie un analogue de cette formule pour les tresses plongées dans $S^1 \times \mathbb{C}P^1$). Dans le début de la deuxième partie est présenté une nouvelle démarche qui permet de généraliser la formule d'Orevkov aux courbes algébriques réelles séparantes *à nids profonds* (v. §7.1 pour une définition) sur les surfaces réglées, sans restriction sur le genre de la base. Elle s'appuie sur la formule d'adjonction suivante que l'on commence par démontrer :

Proposition 0.3 *Soit $\mathcal{A}$ un 2-cycle de X constitué d'une partie holomorphe et d'une partie totalement réelle, et n'ayant que des points doubles comme singularités. Alors*

$$[\mathcal{A}] \circ [\mathcal{A}] = c_1(X) \circ [\mathcal{A}] - \chi(\mathcal{A}) + 2\pi$$

où $[\mathcal{A}] \in H_2(X;\mathbb{Z})$ est la classe d'homologie de $\mathcal{A}$, $\chi(\mathcal{A})$ est la caractéristique d'Euler d'une normalisation de $\mathcal{A}$, et π le nombre algébrique de points doubles de $\mathcal{A}$.

Cette nouvelle démarche consiste alors à construire des 2-cycles auxiliaires $\mathcal{A}_\pm$ satisfaisant la proposition 0.3, et en appliquer cette proposition. Elle s'applique également aux surfaces réglées éclatées en des fibres réelles distinctes, comme par exemple $\mathbb{C}P^2$ éclaté en quatre points distincts, la structure réglée provenant alors du faisceau de coniques passant par ces quatre points. Ceci permet d'obtenir un analogue du résultat d'Orevkov pour les courbes algébriques réelles lisses séparantes de $\mathbb{C}P^2$ de degré $4k+1$, dont la partie réelle possède quatre nids disjoints de profondeur k :

Théorème 0.4 *Soit $A \subset \mathbb{C}P^2$ une courbe algébrique réelle lisse séparante de degré $4k+1$, telle que $\mathbb{R}A$ possède quatre nids disjoints de profondeur k. On a :*

$$\pi_-^+ - \pi_+^+ = \sum_{i=1}^{4} (k_i^+)^2 - r^+ \quad \textit{et} \quad \pi_+^- - \pi_-^- = \sum_{i=1}^{4} (k_i^-)^2 - r^-$$

où $r^+, r^- \geq 0$, et $r^+ + r^- = r$.

(les notations utilisées dans ce théorème ne dépendent que du schéma complexe de A et sont analogues à celle d'Orevkov, voir le théorème 8.5.)

La construction des cycles auxiliaires $\mathcal{A}_\pm$ permet en outre d'obtenir, dans le cas des courbes algébriques réelles séparantes à nids profonds sur les surfaces réglées, des inégalités portant sur les termes π_+^+, π_-^+, π_-^- et π_+^- et non plus sur des différences entre ces termes. Ces inégalités sont obtenues dans le §9 en étudiant le deuxième groupe d'homologie réelle du revêtement double de la surface réglée ramifié en un de ces cycles $\mathcal{A}_\pm$, lorsque ce revêtement existe. Cette condition

d'existence est caractérisée par l'annulation des classes d'homologies du cycle $\mathcal{A}_\pm$ et de sa partie réelle dans les groupes d'homologies de X et de $\mathbb{R}X$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La méthode utilisée pour obtenir ces inégalités est celle déjà utilisée par V. A. Rokhlin [29], V. I. Arnol'd [1] (voir aussi le survey [37]), et O. Ya. Viro [32] pour obtenir leurs inégalités. Les résultats de cette deuxième partie font l'objet de la publication [35].

Enfin, l'objectif de la troisième partie de cette thèse est de démontrer les propositions 0.5 et 0.6 suivantes sur les surfaces réglées X_l de base $\mathbb{C}P^1$ ($l \in \mathbb{N}$, voir le §1 des préliminaires pour une définition).

Proposition 0.5 *Soient a, b, m des entiers tels que $m \geq 2$, $a \geq mb$, $b > 0$ si m est pair, $b > 1$ si m est impair, et lorsque $b = 3$ et que m est impair, tels que $m \geq 5$. Il existe dans X_m des courbes flexibles réelles de classe (a, b) dont le schéma réel n'est réalisé par aucune courbe algébrique réelle dans cette classe. En particulier, ces courbes ne sont isotopes à aucune courbe algébrique réelle.*

Proposition 0.6 *Soient a, b, m des entiers tels que $a = mb$ et $b \geq 3$, ou bien $a - mb \geq 2$ et $b \geq 5$ si m est pair, ou tels que $a - mb \geq 1$ et $b \geq 3$ si m est impair. Alors, si $m \geq 2$, il existe dans X_m des courbes algébriques réelles de classe (a, b) qui sont isotopes, mais qui pourtant ne sont pas dans une même classe de déformation de X_m.*

Ces résultats sont déduits du théorème suivant obtenu en étudiant une déformation des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$: *Lorsque $m = l + 2k$, $k > 0$, les discriminants associés aux systèmes de diviseurs de X_m se déduisent de ceux associés aux systèmes de diviseurs de X_l par des homothéties à poids.*

Préliminaires

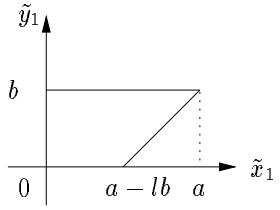
1 Les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$

Rappelons qu'une *surface réglée de base* $\mathbb{C}P^1$ est une surface algébrique complexe compacte lisse connexe munie d'une submersion holomorphe sur $\mathbb{C}P^1$ dont les fibres sont de genre nul. Soit $l \in \mathbb{N}$ et F_l le fibré vectoriel complexe de rang un et de degré l sur $\mathbb{C}P^1$. On note $X_l = P(F_0 \oplus F_l)$ où $P(F_0 \oplus F_l)$ désigne le fibré en droites projectives associé au fibré de rang deux $F_0 \oplus F_l$. Les surfaces X_l sont des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$, et ce sont les seules (v. [2]). Remarquons que $X_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ et que $X_1 = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$, la structure réglée provenant du pinceau de droites centré en le point éclaté de $\mathbb{C}P^2$. Notons U,V deux cartes isomorphes à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}P^1$, et $(x_1, (y_1 : y_0))$ (resp. $(x_2, (z_1 : z_0))$) des coordonnées sur U (resp. sur V). La surface X_l est alors obtenue en recollant les cartes U et V par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 \subset U & \to & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 \subset V \\ (x_1, (y_1 : y_0)) & \mapsto & (x_2, (z_1 : z_0)) \end{array}$$

où $x_1 x_2 = 1$ et $z_0 y_1 = x_2^l z_1 y_0$. La submersion holomorphe $p : X_l \to \mathbb{C}P^1$ est donnée dans les cartes U, V par la projection sur la première coordonnée. Lorsque $l \neq 0$, la suface X_l possède une unique courbe algébrique lisse d'autointersection strictement négatif. C'est la courbe d'équation $y_1 = 0$ dans U et $z_1 = 0$ dans V, dont l'indice d'autointersection est $-l$ et qui est une section de X_l. Ce diviseur exceptionnel est noté e, ou bien e_l s'il y a ambiguité sur la surface. Lorsque $l = 0$, e désigne une section d'autointersection nulle dans X_0. Notons de même v une fibre de X_l. Le couple $([v], [e])$, où $[v], [e]$ désignent les classes d'homologies de v, e, forme alors une base du réseau $H_2(X_l; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ que l'on fixe et qui sera utilisée tout au long de cette thèse. Ainsi, une courbe de classe (a, b) désignera une courbe qui réalise la classe d'homologie $a[v] + b[e]$ dans $H_2(X_l; \mathbb{Z})$.

Le dual de Poincaré de la première classe de Chern de X_l est $c_1(X_l) = (2 + l)[v] + 2[e]$, et X_l est simplement connexe. Par ailleurs, le genre d'une courbe algébrique lisse connexe de classe (a, b) de X_l est $(a - 1)(b - 1) - \frac{l}{2} b(b - 1)$. Enfin, le groupe de Picard de X_l est identifié à $H_2(X_l; \mathbb{Z})$. Soit D un diviseur de X_l de classe (a, b). Si $a < 0$ ou $b < 0$, alors l'espace $H^0(D)$ associé est réduit à $\{0\}$. Si $a \geq lb$, alors $\dim H^0(D) = (a + 1)(b + 1) - \frac{l}{2} b(b + 1)$. En effet, cet espace $H^0(D)$ est l'espace des sections du fibré en droites complexes associé à D, et ces sections sont données dans la carte U par les polynômes en x_1, y_1 dont le polytope de Newton est l'enveloppe convexe des sommets $(0, 0), (0, b), (a - lb, 0)$ et (a, b).



Et si $a < lb$, $a, b \geq 0$, alors $\dim H^0(D) = (a + 1)(\tilde{b} + 1) - \frac{l}{2} \tilde{b}(\tilde{b} + 1)$, où $\tilde{b} = E(\frac{a}{l})$, partie entière de $\frac{a}{l}$, puisque chaque élément de $H^0(D)$ s'annule en e avec une multiplicité au moins égale à $b - \tilde{b}$, et que la suppression de cette composante fixe établit un isomorphisme entre $H^0(D)$ et l'espace $H^0(av + \tilde{b}e)$.

1.1 Les automorphismes des surfaces X_l

1. Le groupe d'automorphisme de $X_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ a deux composantes connexes échangées en composant par l'involution holomorphe $\tau(x,y) = (y,x)$ où $x, y \in \mathbb{C}P^1$. Il satisfait la suite exacte courte :
$$0 \to PGL_2(\mathbb{C}) \times PGL_2(\mathbb{C}) \to Aut(X_0) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$
Plus précisément, un élément Φ de $Aut(X_0)$ s'écrit $(x,y) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \mapsto (\phi(x), \psi(y)) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ ou bien $(x,y) \mapsto (\phi(y), \psi(x))$, où $\phi, \psi \in Aut(\mathbb{C}P^1)$. Ceci provient essentiellement du fait que si Φ est un automorphisme de X_0, alors il préserve les courbes algébriques de genre nul et d'autointersection nulle, donc soit Φ, soit $\tau \circ \Phi$ est fibré au-dessus d'un facteur $\mathbb{C}P^1$.

2. Lorsque $l \neq 0$, le groupe d'automorphismes de X_l est connexe et possède un morphisme surjectif sur $PGL_2(\mathbb{C})$. Plus précisément, un élément Φ de $Aut(X_l)$ s'écrit dans la carte U
$$\Phi(x_1, (y_1 : y_0)) = (\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, (\alpha(cx_1 + d)^l y_1 : \gamma(x_1)y_1 + \delta y_0))$$
où $a, b, c, d, \alpha, \delta$ sont des complexes satisfaisant $ad - bc \neq 0$ et $\alpha\delta \neq 0$, et γ est un polynôme de degré inférieur ou égal à l. Dans la carte V, cet élément s'écrit :
$$\Phi(x_2, (z_1 : z_0)) = (\frac{c + dx_2}{a + bx_2}, (\alpha(a + bx_2)^l z_1 : \gamma(\frac{1}{x_2})x_2^l z_1 + \delta z_0)).$$
Ceci provient essentielement du fait qu'un automorphisme de X_l préserve le diviseur exceptionnel e et les fibres de X_l, donc est fibré au-dessus de $\mathbb{C}P^1$.

1.2 Les structures réelles de X_l

Soient c l'application définie dans la carte U par $c(x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (\overline{x}_1, (\overline{y}_1 : \overline{y}_0))$, c_0 l'application définie dans les cartes $U \to V$ par $(x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (x_2, (z_1 : z_0))$ où $x_2 = -\overline{x}_1$, $z_1 = \overline{y}_1$ et $z_0 = \overline{y}_0$, et enfin c_1 l'application définie dans les cartes $U \to V$ par $(x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (x_2, (z_1 : z_0))$ où $x_2 = -\overline{x}_1$, $z_1 = -\overline{y}_0$ et $z_0 = \overline{y}_1$.

L'application c définit une structure réelle sur toutes les surfaces X_l, telle que $\mathbb{R}X_l$ est un tore si l est pair, et une bouteille de Klein si l est impair. Lorsque l est pair, l'application c_0 s'étend en une involution qui définit une structure réelle sur les surfaces X_l, pour laquelle $\mathbb{R}X_l$ est vide. Enfin, l'application c_1 s'étend en une involution qui définit une structure réelle sur X_0, pour laquelle $\mathbb{R}X_0$ est vide.

Théorème 1.1 *Il n'y a, à conjugaison près, que quatre structures réelles sur $X_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ qui sont c, c_0, c_1 et $\tau \circ c$, où $\tau : X_0 \to X_0$ est l'involution $(x,y) \mapsto (y,x)$. Si l est pair et non nul, il n'y a, à conjugaison près, que les deux structures réelles c et c_0 sur X_l. Enfin, si l est impair, c est l'unique structure réelle de X_l, à conjugaison près.*

Dans toute cette thèse, lorsqu'une surface X_l sera munie d'une structure réelle, ce sera toujours la structure c qui est la seule structure réelle considérée. Dans ce cas, le diviseur exceptionnel e de X_l est réel, ou lorsque l est nul, la section e peut être choisie réelle, et de même, la fibre v peut être choisie réelle. Le couple $([\mathbb{R}v], [\mathbb{R}e])$ forme alors une base de l'espace $H_1(\mathbb{R}X_l; \mathbb{Z})$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ selon que l est pair ou impair.

Démonstration du théorème 1.1 :

Commençons par le cas de X_0. Soit $\tilde{c}$ une structure réelle sur X_0, $c\circ\tilde{c}$ est alors un automorphisme Φ de X_0 tel que $c\circ\Phi=\Phi^{-1}\circ c$, puisque $\tilde{c}$ est une involution. Si Φ est de la forme

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1 & \to & \mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1\\ (x,y) & \mapsto & (\phi(x),\psi(y)),\end{array}$$

où ϕ,ψ sont des automorphismes de $\mathbb{C}P^1$, alors $\tilde{c}(x,y)=(\overline{\phi(x)},\overline{\psi(y)})$, où $\overline{x}$ désigne l'image de x par la conjugaison complexe de $\mathbb{C}P^1$. Il suit que $\tilde{c}$ est le produit de deux structures réelles de $\mathbb{C}P^1$. Par conséquent, $\tilde{c}$ est conjugué à l'un des éléments c, c_0, c_1, et la structure réelle c_0' donnée par $c_0'(x,y)\mapsto(\overline{x},-\frac{1}{\overline{y}})\in\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$ où $y\mapsto-\frac{1}{\overline{y}}$ est l'application $(y_1:y_0)\mapsto(-\overline{y}_0:\overline{y}_1)$. Comme l'involution τ conjugue les éléments c_0' et c_0, on en déduit que $\tilde{c}$ est nécessairement conjugué à l'un des trois éléments c, c_0 ou c_1. Si Φ est de la forme $(x,y)\mapsto(\phi(y),\psi(x))$ où ϕ,ψ sont des automorphismes de $\mathbb{C}P^1$, alors la condition $c\circ\Phi=\Phi^{-1}\circ c$ impose que $\psi=\overline{\phi}^{-1}$ où si $\phi(x_1,x_0)=(ax_1+bx_0:cx_1+dx_0)$, alors $\overline{\phi}(x_1,x_0)=(\overline{a}x_1+\overline{b}x_0:\overline{c}x_1+\overline{d}x_0)$. Par suite $\tilde{c}(x,y)=(\overline{\phi(y)},\phi^{-1}(\overline{x}))$, et l'automorphisme $(x,y)\mapsto(\overline{\phi}(x),y)$ conjugue alors $\tilde{c}$ à $\tau\circ c$. Ainsi, toute structure réelle est conjuguée à l'une des quatre structures c, c_0, c_1, $\tau\circ c$. Ces structures sont bien distinctes, puisque trois d'entre elles n'ont pas des parties réelles homéomorphes, et que c_1 et c_0 ne sont pas conjuguées. En effet, il s'agit de verifier que pour tout automorphisme Φ de X_0, $c_1\neq\Phi^{-1}\circ c_0\circ\Phi$. Comme l'involution τ conjugue c_0 et c_0', cela revient à vérifier que pour tout automorphisme Φ de X_0 de la forme $(x,y)\mapsto(\phi(x),\psi(y))$ où ϕ,ψ sont des automorphismes de $\mathbb{C}P^1$, $c_1\neq\Phi^{-1}\circ c_0\circ\Phi$ et $c_1\neq\Phi^{-1}\circ c_0'\circ\Phi$. Or si Φ est un tel automorphisme, chaque facteur de $\Phi^{-1}\circ c_0\circ\Phi$ (resp. de $\Phi^{-1}\circ c_0'\circ\Phi$) est une structure réelle de $\mathbb{C}P^1$ conjuguée au facteur correspondant de c_0 (resp. de c_0'). Par conséquent ces éléments ne sont jamais égaux à c_1, quel que soit Φ.

Soit à présent $\tilde{c}$ une structure réelle sur X_l, $l\neq0$. Alors, $c\circ\tilde{c}$ est un automorphisme Φ de X_l tel que $c\circ\Phi=\Phi^{-1}\circ c$, puisque $\tilde{c}$ est une involution. En particulier, d'après le §1.1, $\tilde{c}$ est fibrée au-dessus d'une structure réelle de $\mathbb{C}P^1$. Par conséquent, d'après le §1.1, quitte à conjuguer $\tilde{c}$ par un automorphisme de X_l, on peut supposer que $\tilde{c}$ est fibrée au-dessus $x\mapsto\overline{x}$ ou bien $x\mapsto-\frac{1}{\overline{x}}$. Le résultat découle alors du lemme 1.2 suivant. □

Lemme 1.2 *Les structures réelles de X_l, $l\neq0$, fibrées au-dessus de $x\mapsto\overline{x}$ sont toutes conjuguées à c. Si l est impair, il n'y a pas de structure réelle de X_l fibrée au-dessus de $x\mapsto-\frac{1}{\overline{x}}$, et si l est pair, ces structures sont toutes conjuguées à c_0.*

Démonstration :

Soit $\tilde{c}$ une structure réelle de X_l fibrée au-dessus de $x\mapsto\overline{x}$. Commençons par montrer que $\tilde{c}$ s'écrit dans la carte U :

$$(x_1,(y_1:y_0))\mapsto(\overline{x}_1,(\alpha\overline{y}_1:i\gamma(\overline{x}_1)\overline{y}_1+\overline{\alpha y_0})),$$

où $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et γ est un élément de $\mathbb{R}_l[X]$, c'est-à-dire un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à l. En effet, d'après le §1.1, $c\circ\tilde{c}=\Phi$ est un automorphisme de X_l qui s'écrit dans la carte U : $(x_1,(y_1:y_0))\mapsto(x_1,(ay_1:b(x_1)y_1+dy_0))$, où $a,d\in\mathbb{C}^*$, et b est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à l. De plus, puisque $\tilde{c}$ est une involution, Φ satisfait $c\circ\Phi=\Phi^{-1}\circ c$. Or dans la carte U, $c\circ\Phi(x_1,(y_1:y_0))=(\overline{x}_1,(\overline{ay}_1:\overline{b(x_1)y_1}+\overline{dy_0}))$ où $\overline{b}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de b, et $\Phi^{-1}\circ c(x_1,(y_1:y_0))=(\overline{x}_1,(d\overline{y}_1:a\overline{y}_0-b(\overline{x}_1)\overline{y}_1))$. Par conséquent, il existe un réel θ tel que $d=\exp(i2\theta)\overline{a}$, et $b=-\exp(i2\theta)\overline{b}$, ce qui se réécrit $\exp(-i\theta)d=\overline{\exp(-i\theta)a}$, et $\exp(-i\theta)b\in i\mathbb{R}_l[X]$. Ainsi, $\tilde{c}$ est bien

de la forme annoncée. Montrons à présent que $\tilde{c}$ est conjugué à c. Notons Ψ l'automorphisme de X_l donné dans la carte U par: $(x_1,(y_1:y_0)) \mapsto (x_1,(2y_1 : i\gamma(x_1)y_1 - 2\alpha y_0))$. Alors, Ψ^{-1} est donné dans la carte U par $(x_1,(y_1:y_0)) \mapsto (x_1,(2\alpha y_1 : i\gamma(x_1)y_1 - 2y_0))$, et $\tilde{c} = \Psi^{-1}\circ c\circ\Psi$. En effet,

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}\circ c\circ\Psi(x_1,(y_1:y_0)) &= \Psi^{-1}\circ c(x_1,(2y_1 : i\gamma(x_1)y_1 - 2\alpha y_0)) \\
&= \Psi^{-1}(\overline{x}_1,(2\overline{y}_1 : -i\overline{\gamma}(\overline{x}_1)\overline{y}_1 - 2\overline{\alpha y}_0)) \\
&= (\overline{x}_1,(4\alpha\overline{y}_1 : 2i\gamma(\overline{x}_1)\overline{y}_1 + 2i\overline{\gamma}(\overline{x}_1)\overline{y}_1 + 4\overline{\alpha y}_0)) \\
&= \tilde{c} \qquad \text{(puisque par hypothèse, } \gamma \text{ est à coefficients réels)}
\end{aligned}$$

Supposons à présent que l est impair, et qu'il existe une structure réelle $\tilde{c}$ fibrée au-dessus de $x \mapsto -\frac{1}{\overline{x}}$. Alors, $\tilde{c}$ n'a pas de point fixe et agit comme $-id$ sur $H_2(X_l;\mathbb{Z})$, puisque cette involution préserve le diviseur exceptionnel et envoie une fibre sur une autre. Choisissons une section holomorphe $\tilde{e}$ de classe $(l,1)$ qui est transverse à son image par $\tilde{c}$. Les points d'intersection entre $\tilde{e}$ et $\tilde{c}(\tilde{e})$ sont invariants par $\tilde{c}$, et donc en nombre pair, de sorte que $\tilde{e}\circ\tilde{c}(\tilde{e}) = 0 \mod (2)$. Mais $\tilde{e}\circ\tilde{c}(\tilde{e}) = -\tilde{e}\circ\tilde{e} = -l \mod (2)$. D'où la contradiction.

Enfin, supposons que l est pair, et que $\tilde{c}$ est une structure réelle de X_l fibrée au-dessus de $x \mapsto -\frac{1}{\overline{x}}$. Montrons que $\tilde{c}$ s'écrit dans la carte U:

$$(x_1,(y_1:y_0)) \mapsto (-\frac{1}{\overline{x}_1},(\alpha\overline{x}_1^l\overline{y}_1 : i\gamma(\overline{x}_1)\overline{y}_1 + \overline{\alpha y}_0)),$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et γ est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à l, satisfaisant $\gamma(-\frac{1}{x})x^l = \overline{\gamma}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}^*$. En effet, d'après le §1.1, $c_0\circ\tilde{c} = \Phi$ est un automorphisme de X_l qui s'écrit dans la carte U: $(x_1,(y_1:y_0)) \mapsto (x_1,(ay_1 : b(x_1)y_1 + dy_0))$, où $a,d \in \mathbb{C}^*$, et b est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à l. De plus, puisque $\tilde{c}$ est une involution, Φ satisfait $c_0\circ\Phi = \Phi^{-1}\circ c_0$. Or dans la carte U, $c_0\circ\Phi(x_1,(y_1:y_0)) = (-\frac{1}{\overline{x}_1},(\overline{a}\overline{x}_1^l\overline{y}_1 : \overline{b(x_1)y_1} + \overline{dy_0}))$, et $\Phi^{-1}\circ c_0(x_1,(y_1:y_0)) = (-\frac{1}{\overline{x}_1},(-d\overline{x}_1^l\overline{y}_1 : b(-\frac{1}{\overline{x}_1})\overline{x}_1^l\overline{y}_1 - a\overline{y}_0))$. Par conséquent, il existe un réel θ tel que $d = \exp(i2\theta)\overline{a}$, et $b(-\frac{1}{x})x^l = -\exp(i2\theta)\overline{b}$, ce qui se réécrit $\exp(-i\theta)d = \overline{\exp(-i\theta)a}$, et $\exp(-i\theta)b = ip$ où p est un polynôme complexe de degré l satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{C}^*$, $p(-\frac{1}{x})x^l = \overline{p}$. Ainsi, $\tilde{c}$ est bien de la forme annoncée. Montrons à présent que $\tilde{c}$ est conjuguée à c_0. Notons Ψ l'automorphisme de X_l donné dans la carte U par: $(x_1,(y_1:y_0)) \mapsto (x_1,(2y_1 : i\overline{\gamma}(x_1)y_1 - 2\alpha y_0))$. Alors, Ψ^{-1} est donné dans la carte U par $(x_1,(y_1:y_0)) \mapsto (x_1,(2\alpha y_1 : i\overline{\gamma}(x_1)y_1 - 2y_0))$, et $\tilde{c} = \Psi^{-1}\circ c_0\circ\Psi$. En effet,

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}\circ c_0\circ\Psi(x_1,(y_1:y_0)) &= \Psi^{-1}\circ c_0(x_1,(2y_1 : i\overline{\gamma}(x_1)y_1 - 2\alpha y_0)) \\
&= \Psi^{-1}(-\frac{1}{\overline{x}_1},(2\overline{x}_1^l\overline{y}_1 : -i\gamma(\overline{x}_1)\overline{y}_1 - 2\overline{\alpha y}_0)) \\
&= (-\frac{1}{\overline{x}_1},(4\alpha\overline{x}_1^l\overline{y}_1 : 2i\overline{\gamma}(-\frac{1}{\overline{x}_1})\overline{x}_1^l\overline{y}_1 + 2i\gamma(\overline{x}_1)\overline{y}_1 + 4\overline{\alpha y}_0)) \\
&= \tilde{c} \qquad \text{(puisque par hypothèse, } \gamma(-\frac{1}{x})x^l = \overline{\gamma}(x)). \quad \square
\end{aligned}$$

2 Les surfaces réglées presque-complexes séparantes

2.1 Les surfaces réglées presque-complexes séparantes

Soient X une variété presque-complexe de dimension réelle 4, et B une surface de Riemann. La variété X est appelée *surface réglée presque-complexe* ou plus simplement *surface réglée* s'il n'y a

pas d'ambiguité, lorsqu'il existe une submersion J-holomorphe $p : X \to B$ dont les fibres sont de genre nul. La surface de Riemann B est alors appelée *la base* de X. Soit c_X une structure réelle sur X, c'est-à-dire une involution J-antiholomorphe sur X, pour laquelle il existe une structure réelle c_B sur B satisfaisant $p \circ c_X = c_B \circ p$. La variété X munie de c_X est appelée *surface presque-complexe réglée réelle*. Remarquons que lorsque B est de genre strictement positif, la condition d'existence de c_B est automatiquement satisfaite, puisque les seules courbes J-holomorphes de genre nul de X sont alors les fibres de p, et donc que l'image par c_X de chaque fibre de p est une autre fibre de p.

Si X est une surface presque-complexe réglée réelle, chaque composante de $\mathbb{R}X$ est un fibré en cercle au-dessus de la composante correspondante de $\mathbb{R}B$, c'est donc un tore ou une bouteille de Klein. Une surface réglée réelle (X, c_X) est dite *séparante* lorsque la base (B, c_B) est séparante et que $\mathbb{R}X$ et $\mathbb{R}B$ ont même nombre de composantes connexes, et elle est dite *non-séparante* sinon.

Lemme 2.1 *Une surface presque-complexe réglée réelle X de base B possède une section différentiable réelle, c'est-à-dire une application différentiable $e : B \to X$ telle que $p \circ e = id_B$ et $c_X \circ e = e \circ c_B$, si et seulement si $\mathbb{R}X$ et $\mathbb{R}B$ ont même nombre de composantes connexes.*

Démonstration :

Le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}X$ est toujours inférieur ou égal à celui de $\mathbb{R}B$, et exactement égal lorsque e existe. Réciproquement, si $\mathbb{R}X$ et $\mathbb{R}B$ ont même nombre de composantes connexes il n'y a pas d'obstruction à construire e, en fixant une triangulation invariante sur B et en commençant par construire e au dessus de $\mathbb{R}B$. $\square$

Rappelons qu'à toute variété algébrique réelle X est associé un invariant par déformation de cette variété: la suite exacte longue d'homologie associée à la paire $(X, \mathbb{R}X)$. Si X est une surface réglée réelle, cet invariant contient le type séparant ou non-séparant de X. En effet, notons t (resp. k) le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}X$ homéomorphe à un tore (resp. une bouteille de Klein), alors $H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2+t} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\max(0,k-1)}$ lorsque X est non-séparante, et $H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{3+t} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\max(0,k-1)}$ lorsque X est séparante. Les autres groupes d'homologie de cette suite exacte longue ne dépendent que de la topologie de $\mathbb{R}X$. Notons $\mu = t + k$ le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}X$ et g le genre de B ; alors, lorsque $\mathbb{R}X$ est non-vide, ces groupes d'homologie à coefficients entiers sont :

$$H_4(\mathbb{R}X) = H_3(\mathbb{R}X) = H_0(X, \mathbb{R}X) = 0, \quad H_4(X) = H_4(X, \mathbb{R}X) = H_0(X) = \mathbb{Z}$$

$$H_3(X) = H_1(X) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_3(X, \mathbb{R}X) = \mathbb{Z}^t \times \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(\mathbb{R}X) = \mathbb{Z}^t, \quad H_2(X) = \mathbb{Z}^2$$

$$H_1(\mathbb{R}X) = \mathbb{Z}^{\mu+t} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k, \quad H_1(X, \mathbb{R}X) = \mathbb{Z}^{2g+\mu-1}, \quad \text{et} \quad H_0(\mathbb{R}X) = \mathbb{Z}^{\mu}.$$

Exemples :

1 **Les surfaces réglées** X_l introduites au §1 munies de la structure réelle c, sont des surfaces réglées réelles séparantes. Les surfaces (X_l, c_0) lorsque l est pair, et (X_0, c_1) sont des surfaces réglées réelles non-séparantes parce que leurs bases sont non-séparantes. Enfin, la structure réelle $\tau \circ c$ de X_0 ne satisfait pas la condition d'être fibrée au-dessus d'une structure réelle de la base $\mathbb{C}P^1$ de X_0.

2 **Une surface réglée non-séparante dont la base est séparante.**
Soient $X = T^2 \times \mathbb{C}P^1$ où T^2 est un tore, et p la projection $X \to T^2$. Notons U^1 le groupe des nombres complexes de module un, et (x, y) des coordonnées sur $T^2 = U^1 \times U^1$. On munit alors T^2 de la structure réelle $c_T : (x, y) \mapsto (\overline{x}, y)$, et on définit :

$$\begin{array}{rcl} c_X : X & \to & X \\ (x, y; z) & \mapsto & (\overline{x}, y; \dfrac{(1+x)\overline{z} + i(1-x)}{(1-x)\overline{z} + i(1+x)} i) \end{array}$$

Par une vérification directe, on obtient :

Proposition 2.2 *L'involution c_X est une structure réelle sur la surface réglée $X \to T^2$. La partie réelle $\mathbb{R}T^2$ a deux composantes connexes, alors que $\mathbb{R}X$ est connexe.* $\square$

Ainsi, la surface X donnée dans cet exemple est une surface réglée réelle non-séparante, bien que sa base T^2 soit séparante.

2.2 Le nombre d'enroulement

Soit C une courbe lisse orientée d'un tore ou d'une bouteille de Klein. Supposons ce tore ou cette bouteille de Klein muni d'une structure de fibré en cercles sur une base orientée $\mathbb{R}P^1$. On appelle *nombre d'enroulement* de C, et on note $n(C)$, le degré de la projection $C \to \mathbb{R}P^1$. Par ailleurs, une composante de C est appelée *ovale* si elle borde un disque du tore ou de la bouteille de Klein.

Lemme 2.3 *Une courbe orientée lisse d'une bouteille de Klein contient au plus deux composantes de nombre d'enroulement ± 1 et ne contient pas de composantes de nombre d'enroulement de module strictement plus grand que 2.*

Démonstration :
Le revêtement double d'orientation de la bouteille de Klein est un tore, et la courbe se relève en une courbe lisse dans ce tore, orientée et invariante par l'involution du revêtement. Chaque composante non contractile de cette courbe est une courbe connexe simple orientée qui est soit disjointe, soit confondue avec son image par l'involution du revêtement ; elle est donc nécéssairement homologue -au signe près- au relevé d'une section de la bouteille de Klein, ou bien à une fibre du tore. Les composantes qui sont couplées par deux avec l'involution du revêtement se quotientent en les composantes de nombre d'enroulement ± 2 ou nul, et celles qui sont stables par l'involution se quotientent en les composantes de nombre d'enroulement ± 1. Il ne peut pas y avoir plus que deux telles composantes, puisque les voisinages tubulaires de ces composantes dans la bouteille de Klein sont des rubans de Mœbius. $\square$

3 Le principe d'alternance

Soit C une courbe lisse orientée d'un tore muni d'une structure de fibré en cercle sur $\mathbb{R}P^1$. Munissons ce tore d'une orientation quelconque ; chaque disque D bordé par un ovale de C possède une orientation induite par C, telle que ∂D coïncide avec cet ovale en tant que courbe orientée. Un ovale de C est dit *positif* (resp. *négatif*) si l'orientation du disque qu'il borde coïncide (resp. ne coïncide pas) avec celle du tore. Le but de ce §3 est d'obtenir la proposition suivante, qui découlera de la proposition 3.4 :

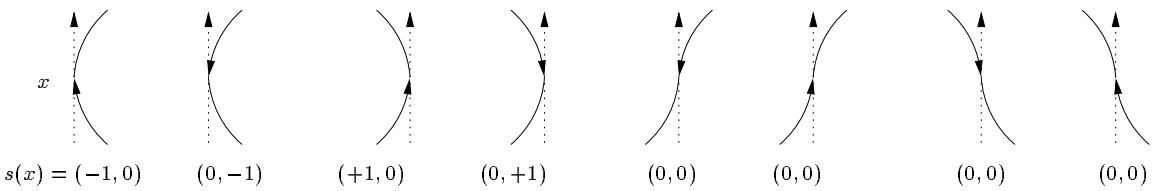
Proposition 3.1 *Soit A une courbe J-holomorphe réelle séparante d'une surface réglée presque-complexe réelle. Alors la courbe $\mathbb{R}A$, lorsque'elle est munie d'une orientation complexe, possède autant d'ovales positifs que d'ovales négatifs dans chaque composante de $\mathbb{R}X$ homéomorphe à un tore.*

Cette proposition fournit déjà une restriction assez forte sur l'ensemble des schémas complexes réalisés par les courbes J-holomorphes réelles séparantes dans une classe d'homologie donnée. Elle va découler du principe d'alternance que l'on rappelle au §3.2 , principe qui a été introduit par T. Fiedler dans [10].

3.1 L'invariant s

Soit C une courbe lisse orientée pas nécéssairement connexe d'un tore muni d'une structure de fibré en cercle sur $\mathbb{R}P^1$. La courbe C n'est pas nécéssairement fermée, mais on suppose qu'elle n'est tangente aux fibres qu'en un nombre fini de points distincts de son bord. Fixons une orientation de la base $\mathbb{R}P^1$ et des fibres de ce tore, puis une orientation du tore telle que $e \circ v = +1$ où e est une section du tore munie de l'orientation induite par la base, et v est une fibre de ce tore.

Soit x un point de tangence entre C et une fibre ; on définit l'élément $s(x)$ de $\mathbb{Z}^2$ par $s(x) = (0,0)$ si C traverse la fibre en x, $s(x) = (-1,0)$ (resp. $(+1,0)$) si l'orientation induite par C sur la fibre en x coïncide avec l'orientation de cette fibre, et que la courbe se situe localement à droite[1] (resp. gauche) de cette fibre ; et $s(x) = (0,-1)$ (resp. $(0,+1)$) si l'orientation induite par C sur la fibre en x diffère de celle de cette fibre, et que la courbe se situe localement à droite (resp. gauche) de cette fibre. Ces huit cas sont représentés sur la figure suivante :



On pose alors $s(C) = \sum_x s(x)$, la somme étant prise sur tous les points x du tore en lesquels C est tangente aux fibres.

Lemme 3.2 *Si C et C' sont deux courbes disjointes, alors $s(C \sqcup C') = s(C) + s(C')$; et si $s(C) = (c_1, c_2)$, alors $s(-C) = (c_2, c_1)$, où $-C$ est la courbe C munie de l'orientation opposée.* □

Proposition 3.3 *Si C et C' sont deux courbes lisses fermées orientées isotopes sur le tore, alors $s(C) = s(C')$. En particulier, pour toute courbe fermée orientée C du tore, il existe un entier a tel que $s(C) = (a, -a)$.*

Remarquons qu'il découle de cette proposition que lorsque C est connexe, $a = \pm 1$ si et seulement si C est un ovale, et $a = 0$ sinon.

Démonstration :

Munissons $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de la métrique riemannienne plate provenant de $\mathbb{R}^2$, et fixons la trivialisation canonique du fibré tangent à ce tore T^2. Le fibré unitaire orienté de ce tore est alors isomorphe à $T^2 \times S^1 \to T^2$. Chaque courbe orientée C de T^2 induit une section de $T^2 \times S^1$ au-dessus de C, c'est-à-dire une application $f_C : C \to S^1$. Notons x_+ l'image de la fibre orientée v par l'application f_v, et x_- l'image de v munie de l'orientation opposée par f_v ; ce sont deux points antipodaux de S^1. Il découle de la définition de s que $s(C) = ((f_C)_*([C]) \circ x_+, -(f_C)_*([C]) \circ x_-)$, où $[C] \in H_1(C;\mathbb{Z})$ est la classe fondamentale de C, d'où le résultat. □

1. On convient que la base est localement orientée de "gauche à droite"

3.2 Le principe d'alternance

Soit A une courbe J-holomorphe réelle séparante d'une surface réglée presque-complexe réelle. Supposons, quitte à déformer un peu A dans X, que les points de ramification de la projection de A sur la base B de X qui ne sont pas réels, sont situés en-dehors de la variété de dimension trois $L = p^{-1}(\mathbb{R}B)$ où p est la fibration $X \to B$. L'intersection $A \cap L$ est alors constituée de $\mathbb{R}A$ et d'une réunion de courbes connexes fermées $(O_t)_{1 \leq t \leq T}$ appelées *ovales imaginaires*. Lorsqu'un ovale O_t intersecte $\mathbb{R}X$, cette intersection est réduite à deux points x_1 et x_2 en lesquels $\mathbb{R}A$ est tangente aux fibres réelles ; ce sont des points de ramification réels de $A \to B$, et l'ovale O_t est alors invariant par c. Munissons $\mathbb{R}A$ d'une orientation complexe ; le principe d'alternance s'énonce comme suit :

Les orientations induites par $\mathbb{R}A$ sur les fibres réelles en les points x_1 et x_2 coïncident, c'est-à-dire les classes d'homologies entières réalisées par ces fibres dans $H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ sont égales.

Proposition 3.4 *Soit A une courbe J-holomorphe réelle séparante d'une surface réglée presque-complexe réelle (X, c), et T^2 une composante de $\mathbb{R}X$ homéomorphe à un tore. Lorsque $\mathbb{R}A$ est munie d'une orientation complexe, $s(\mathbb{R}A \cap T^2) = 0$.*

Remarquons que cette proposition implique la proposition 3.1, puisque les valeurs de s pour un ovale positif et un ovale négatif sont opposées.

Démonstration :

D'après le principe d'alternance et par définition de s, pour chaque ovale O_t qui intersecte T^2 en les points x_1, x_2, $s(x_1) + s(x_2) = 0$. En effectuant la somme sur tous les ovales O_t, on obtient le résultat. $\square$

Première partie

Forme d'intersection tordue et extension de la congruence d'Arnol'd

L'objectif de cette partie est de donner une nouvelle démonstration de la congruence d'Arnol'd, qui permet de généraliser celle-ci aux courbes séparantes des variétés presques-complexes réelles de dimension 4. Il s'avère que cette généralisation couvre en outre des résultats antérieurs de Rokhlin, Mishachev, Zvonilov et Mikhalkin.

Remarquons que ce résultat n'est valable que pour les courbes parce que l'hypothèse d'être séparante est essentielle, et qu'une notion de variété séparante généralisant la notion de courbes séparante n'est pas encore connue. Toutefois, le principal outil utilisé est valable en toute dimension, et est donc donné sans restriction sur celle-ci : c'est la forme d'intersection tordue présentée dans le §1. Le principal résultat est donné dans le §2, et enfin le §3 donne quelques compléments à ce résultat.

4 Forme d'intersection tordue

Dans ce premier paragraphe, X désigne une variété compacte orientée de classe C^1 et de dimension $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), munie d'une involution c de classe C^1.

Si l est un entier pair, on s'aperçoit que la forme d'intersection tordue $x \mapsto x \circ c_*(x)$ définie sur $H_n(X;\mathbb{Z})$ passe au quotient en une application $q_c : H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$, parce-que si $x, h \in H_n(X;\mathbb{Z})$, $(x+lh) \circ c_*(x+lh) = x \circ c_*(x) + l(h \circ c_*(x) + x \circ c_*(h)) + l^2 h \circ c_*(h) = x \circ c_*(x) \mod (2l)$. Ce fait est toutefois remarquable, puisque $H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, et que l'application $x \mapsto x \circ c_*(x)$ de $H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ n'est définie que modulo l.

L'objet de ce paragraphe est de montrer l'existence d'une forme quadratique $\mathcal{P}_c : H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ adaptée à la forme d'intersection tordue $x \mapsto x \circ c_*(x)$ et qui étend cette application q_c. Ceci ne sera fait que sous l'hypothèse supplémentaire que la sous-variété X^c des points fixes de c est de dimension inférieure ou égale à n, ce qui est le cas des applications J-antiholomorphes sur les variétés presque-complexes.

Toutes les chaînes et les cycles considérés dans cette partie sont à coefficients entiers. Ainsi, un *cycle modulo* l est une chaîne entière dont le bord est un multiple de l, il définit donc un véritable cycle lorsque le groupe des coefficients est réduit à $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

4.1 Triangulations générales, et la forme $\mathcal{P}_c^\tau$

Soit τ une triangulation de classe C^1 de X, c'est-à-dire un homéomorphisme de classe C^1 d'un complexe simplicial dans X, dont l'application tangente est en tout point injective (v. [24], p.76). Notons $c(\tau)$ la triangulation dont les cellules sont les images par c des cellules de τ.

La triangulation τ sera appelée *n-générale* ou plus simplement *générale* si l'intersection des cellules σ_i^p de dimension p de τ avec les cellules $c(\sigma_j^q)$ de $c(\tau)$ est vide si $p+q < \dim(X)$, et transverse si $p+q = \dim(X)$. Sous cette condition, les indices d'intersection $\sigma_i^p \circ c(\sigma_j^{2n-p})$ sont bien définis et satisfont (v. [36] p.422, ou [19] p.169) :

Lemme 4.1 *Soient τ une triangulation générale de X, A^p une chaîne de dimension p de τ, et B^{2n-p+1} une chaîne de dimension $2n-p+1$ de $c(\tau)$. Alors,*

$$A^p \circ \partial B^{2n-p+1} = (-1)^p \partial A^p \circ B^{2n-p+1} \quad \square$$

Soient l un entier naturel et A^n un n-cycle de τ modulo l, on pose $\mathcal{P}_c^\tau(A^n) = A^n \circ c(A^n) \mod (2l)$.

Proposition 4.2 *Si l est un entier pair, l'application $\mathcal{P}_c^\tau$ passe au quotient en une application $H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$.*

Cette application sera également notée $\mathcal{P}_c^\tau$.

Démonstration :

Il s'agit de montrer que si A_1^n et A_2^n sont deux cycles modulo l de τ qui sont homologues, alors $\mathcal{P}_c^\tau(A_1^n)$ et $\mathcal{P}_c^\tau(A_2^n)$ sont égaux -modulo $2l$-.

Soient donc A_1^n, D^{n-1} deux chaînes entières de τ telles que $\partial A_1^n = lD^{n-1}$. Soient également B^{n+1}, C^n deux autres chaînes entières, et $A_2^n = A_1^n + \partial B^{n+1} + lC^n$. Il suffit de montrer que $A_2^n \circ c(A_2^n) = A_1^n \circ c(A_1^n) \mod (2l)$. On a

$$\begin{aligned} A_2^n \circ c(A_2^n) &= A_1^n \circ c(A_1^n) + l\big(C^n \circ (c(A_1^n) + \partial c(B^{n+1})) + (A_1^n + \partial B^{n+1}) \circ c(C^n)\big) \\ &\quad + l^2 C^n \circ c(C^n) + A_1^n \circ \partial c(B^{n+1}) + \partial B^{n+1} \circ (c(A_1^n) + \partial c(B^{n+1})). \end{aligned}$$

Or $l^2 = 0 \mod (2l)$ puisque l est pair. D'autre part, d'après le lemme 4.1, $A_1^n \circ \partial c(B^{n+1}) = (-1)^n \partial A_1^n \circ c(B^{n+1})$ et $\partial B^{n+1} \circ (c(A_1^n) + \partial c(B^{n+1})) = (-1)^{n+1} B^{n+1} \circ \partial c(A_1^n)$. Enfin, puisque c agit comme ± 1 sur la forme d'intersection, et que celle-ci est soit symétrique, soit antisymétrique, on a $B^{n+1} \circ c(D^{n-1}) = D^{n-1} \circ c(B^{n+1}) \mod (2)$, et $C^n \circ (c(A_1^n) + \partial c(B^{n+1})) = (A_1^n + \partial B^{n+1}) \circ c(C^n) \mod (2)$. Le résultat en découle. $\square$

Rappelons la règle d'orientation provenant de la formule de Stokes : si M est une variété orientée, l'orientation de ∂M est définie en tout point $x \in \partial M$ de sorte qu'un vecteur normal sortant de M en x, suivi d'une base directe de $T_x \partial M$ forme une base directe de $T_x M$. Rappelons également que si T_1 et T_2 sont deux sous-espaces vectoriels orientés transverses de dimension $n+1$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté V de dimension $2n+1$, et S_1, S_2 deux supplémentaires de $T_1 \cap T_2$ dans T_1 et T_2 respectivement, orientés de sorte que $T_i = (T_1 \cap T_2) \oplus S_i$ en tant qu'espaces vectoriels orientés, alors $T_1 \cap T_2$ est orienté de sorte que $V = (T_1 \cap T_2) \oplus S_1 \oplus S_2$ en tant qu'espace vectoriel orienté.

Lemme 4.3 *Soient T_1, T_2 deux sous-espaces vectoriels orientés transverses de dimension n d'un espace vectoriel orienté V de dimension $2n$. Notons $\widetilde{T}_1 = T_1 \times [0,+\infty[$, $\widetilde{T}_2 = T_2 \times [0,+\infty[$, $\widetilde{V} = V \times [0,+\infty[$, et orientons ces espaces de sorte que $\partial \widetilde{T}_i = T_i$ et $\partial \widetilde{V} = V$. En $x \in T_1 \cap T_2$, on a :*

$$\partial(\widetilde{T}_1 \circ_{\widetilde{V}} \widetilde{T}_2)(x) = \partial \widetilde{T}_1 \circ_V \partial \widetilde{T}_2(x). \square$$

C'est une version locale de la formule (9.1) de [18] (p.8).

4.2 La forme quadratique $\mathcal{P}_c$

Théorème 4.4 *Soit X une variété compacte orientée de classe C^1 et de dimension $2n$, et c une involution de classe C^1 sur X, telle que $\dim(X^c) \leq n$. Pour tout entier pair l, il existe une application $\mathcal{P}_c : H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$ telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \arrow[d, "red_l"] \arrow[dr, "q_c"] & \\ H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathcal{P}_c"] & \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Cette application est définie par la propriété suivante : si A^n est un cycle simplicial modulo l, transverse à son image par c, alors $\mathcal{P}_c([A^n]) = A^n \circ c(A^n) \mod (2l)$.

Commençons par donner deux résultats qui seront essentiels dans la démonstration de ce théorème.

Lemme 4.5 *Soit X une variété compacte orientée de classe C^1 et de dimension $2n$, munie d'une involution c de classe C^1 satisfaisant $\dim(X^c) \leq n$. Alors (X, c) possède une triangulation générale.*

Démonstration :

Munissons X d'une triangulation τ de classe C^1 quelconque (une telle triangulation existe, v. [24] p.101), et fixons une numérotation $s_1, \ldots, s_N$ de ses simplexes, dans l'ordre croissant des dimensions. Nous allons construire un champ de vecteurs ξ de classe C^1 sur X, de sorte qu'en décalant τ à l'aide du flot ϕ_t associé à ξ, ceci pendant un temps suffisament court, on obtienne une triangulation générale. Ce champ de vecteurs va être construit par récurence, simplexe après simplexe.

Commençons donc par s_1, c'est un point. Pour que $\phi_t(s_1)$ soit distinct de son image par c, il suffit de choisir $\xi|_{s_1}$ quelconque non nul dans le fibré normal à X^c dans X si $s_1 \in X^c$, et $\xi|_{s_1}$ quelconque sinon.

Supposons à présent ξ construit de façon C^1 sur la réunion $s_1 \cup \cdots \cup s_{r-1}$ de sorte que $\phi_t(s_1), \ldots, \phi_t(s_{r-1})$ satisfassent aux conditions de triangulation générale pour t suffisament petit. Construisons ξ sur s_r.

D'après l'hypothèse faite sur la numérotation des simplexes, ξ est déjà construit sur ∂s_r, et il s'agit donc d'étendre ce champ à s_r tout entier. Cette extension doit être choisie de façon C^1, de sorte que $\phi_t(s_r)$ n'intersecte pas les cellules $c(\phi_t(s_1)), \ldots, c(\phi_t(s_{r-1}))$ qui sont de dimensions $< 2n - \dim(s_r)$, et intersecte transversalement celles qui sont de dimension $2n - \dim(s_r)$. Comme le bord de $\phi_t(s_r)$ est par construction disjoint de ces cellules, et qu'elles forment un nombre fini de sous-variétés à bord "anguleux" de X, le théorème de transversalité de Thom assure que parmi tous les prolongements de ξ, ceux ayant cette propriété forment un ouvert dense. Cependant, si $\dim(s_r) \leq n$, il faut en outre que $\phi_t(s_r)$ intersecte transversalement son image par c, en particulier ne l'intersecte pas si $\dim(s_r) < n$. D'après le théorème de transversalité de Thom, le prolongement de ξ peut être choisi de sorte que $\phi_t(s_r)$ intersecte transversalement X^c, et puisque $\dim(X^c) \leq n$ on peut supposer qu'en les éventuels points d'intersection $\phi_t(s_r)$ est transverse à son image par c. Fixons un tel prolongement, les points d'intersections de $\phi_t(s_r)$ avec X^c sont alors isolés. Privons s_r d'un voisinage V de ces points, et composons le plongement $\phi_t(s_r \setminus V) \to X \setminus X^c$ avec la projection $X \setminus X^c \to (X \setminus X^c)/c$. D'après le théorème d'immersion de Whitney, cette application peut être

perturbée en une immersion qui est injective si $\dim(s_r) < n$, et dont les points d'autointersection sont des points doubles ordinaires si $\dim(s_r) = n$. En relevant cette perturbation à X, on en déduit un prolongement de ξ à s_r satisfaisant l'hypothèse de récurence.

On peut donc finalement conclure qu'il n'y a pas d'obstruction à construire un tel champ ξ sur X tout entier, et par suite que X possède une triangulation générale. □

Proposition 4.6 *Soit X une variété compacte orientée de classe C^1 et de dimension $2n$, munie d'une involution c de classe C^1 telle que $\dim(X^c) \leq n$. Soient l un entier pair, et τ_1, τ_2 deux triangulations générales sur X. Alors $\mathcal{P}_c^{\tau_1} = \mathcal{P}_c^{\tau_2}$.*

Démonstration :

La variété $\widetilde{X} = X \times [1,2]$ a pour bord $\partial\widetilde{X} = X \times \{2\} - X \times \{1\}$. Equipons $X \times \{k\}$ de la triangulation τ_k, $k \in \{1,2\}$, et prolongeons cette triangulation de façon quelconque en une triangulation τ de classe C^1 sur $\widetilde{X}$ (v. [24] théorème 10.6). Munissons la variété $\widetilde{X}$ de l'involution $\tilde{c} = c \times id$. En procédant exactement de la même façon que dans le lemme 4.5, on s'aperçoit que quitte à décaler τ à l'aide du flot associé à un champ de vecteurs de $\widetilde{X}$, on peut supposer que l'intersection de toute cellule σ_i^p de τ avec une cellule $c(\sigma_j^q)$ de $c(\tau)$ est transverse si $p+q = 2n+1$, et est vide si $p+q < 2n+1$, sauf si $p = q = n$ et si σ_i^p, σ_j^q sont égales et intersectent $\widetilde{X}^{\tilde{c}}$. Dans ce dernier cas, on peut supposer que $\sigma_i^n \cap c(\sigma_i^n) \subset \widetilde{X}^{\tilde{c}}$, que l'intersection de σ_i^n avec $\widetilde{X}^{\tilde{c}}$ est transverse et qu'en un tel point d'intersection x, la somme $T_x\sigma_i^n + T_xc(\sigma_i^n)$ est directe et forme un sous-espace $H_x \subset T_x\widetilde{X}$ de codimension 1, qui ne contient aucun espace tangent à des cellules de dimension $n+1$ de τ adjascentes à σ_i^n autre que ceux des cellules de $\partial\widetilde{X}$ lorsque $x \in \partial\widetilde{X}$.

Supposons donc $(\widetilde{X}, \tilde{c})$ munie d'une triangulation τ ayant ces propriétés, et considérons deux chaînes entières A_1^n, A_2^n qui sont des n-cycles modulo l de (X, τ_1) et (X, τ_2) respectivement, réalisant la même classe d'homologie de $H_n(X; \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Soient B^{n+1}, C^n deux chaînes entières de $(\widetilde{X}, \tau)$ telles que $\partial B^{n+1} = A_2^n - A_1^n + lC^n$ et qu'aucune cellule de dimension $n+1$ de B^{n+1} n'est incluse dans $\partial\widetilde{X}$.

La chaîne B^{n+1} réalise une classe d'homologie dans $H_{n+1}(B^{n+1}, \partial B^{n+1}; \mathbb{Z})$. Suivant [6] (p.340), l'intersection $B^{n+1} \circ c(B^{n+1})$ réalise une classe d'homologie dans $H_1(B^{n+1} \cap c(B^{n+1}), (\partial B^{n+1} \cap B^{n+1}) \cup (B^{n+1} \cap \partial c(B^{n+1})); \mathbb{Z})$. En particulier, le bord de cette classe d'homologie est nul dans $H_0((\partial B^{n+1} \cap c(B^{n+1})) \cup (B^{n+1} \cap \partial c(B^{n+1})); \mathbb{Z}) \cong H_0((\partial B^{n+1} \cap c(B^{n+1})) \cup (B^{n+1} \cap \partial c(B^{n+1})); \mathbb{Z})$. Or, d'après les hypothèses faites sur τ, ce bord peut être calculé géométriquement et provient des points d'intersection de A_1^n (resp. A_2^n) avec $c(A_1^n)$ (resp. $c(A_2^n)$) et des points d'intersection de lC^n (resp. $c(lC^n)$) avec $c(B^{n+1})$ (resp. B^{n+1}).

D'après le lemme 4.3, la contribution au bord de $B^{n+1} \circ c(B^{n+1})$ de A_1^n et A_2^n est $\mathcal{P}_c^{\tau_2}(A_2^n) - \mathcal{P}_c^{\tau_1}(A_1^n)$ (l'orientation de $X \times \{1\}$ est opposée à celle de X). Par ailleurs, les points d'intersection de C^n avec $c(B^{n+1})$ exterieurs à $\widetilde{X}^{\tilde{c}}$ sont couplés par c et leur contribution est donc nulle modulo $2l$, puisque ces points sont multiples de l. Il reste à considérer le cas d'une cellule σ^n de C^n qui intersecte $\widetilde{X}^{\tilde{c}}$ en $x \notin \partial\widetilde{X}$. Dans ce cas, x est un point d'intersection de σ^n avec $c(\sigma^n)$ et d'après les hypothèses faites sur τ, $H_x = T_x\sigma^n \oplus T_xc(\sigma^n)$ est de codimension 1 dans $T_x\widetilde{X}$. Ce sous-espace H_x sépare $T_x\widetilde{X}$ en deux demi-espaces $\widetilde{X}_1$ et $\widetilde{X}_2$, et on note $\widetilde{T}_1 = T_xB^{n+1} \cap \widetilde{X}_1$ et $\widetilde{T}_2 = T_xB^{n+1} \cap \widetilde{X}_2$. Il existe deux entiers t_1, t_2 tels que $\partial\widetilde{T}_1 = t_1T_x\sigma^n$, $\partial\widetilde{T}_2 = t_2T_x\sigma^n$, et $t_1 + t_2 = 0 \mod (l)$. D'après le lemme 4.3, la contribution en x au bord de $B^{n+1} \circ c(B^{n+1})$ est donc $(t_1^2 - t_2^2)T_x\sigma^n \circ T_xc(\sigma^n) = 0 \mod (2l)$. Finalement,

$$0 = \partial(B^{n+1} \circ c(B^{n+1})) = \mathcal{P}_c^{\tau_2}(A_2^n) - \mathcal{P}_c^{\tau_1}(A_1^n) \mod (2l) \ \square$$

Démonstration du théorème 4.4 :

Choisissons une triangulation générale τ sur X, qui existe d'après le lemme 4.5, et posons $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_c^\tau$. D'après la proposition 4.6, cette définition est indépendante du choix de la triangulation générale, et il est clair que cette application prolonge l'application q_c. Si A^n est un cycle simplicial de X transverse à son image par c, alors la triangulation dont provient A^n peut être décalée comme dans le lemme 4.5 en une triangulation générale τ équipée d'un n-cycle A^n_τ approximant A^n. On a alors : $\mathcal{P}_c([A^n]) = \mathcal{P}_c^\tau(A^n_\tau) = A^n_\tau \circ c(A^n_\tau) = A^n \circ c(A^n) \mod (2l)$. □

4.3 Quelques propriétés de la forme $\mathcal{P}_c$

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

Proposition 4.7 *Soient X une variété compacte munie d'une involution c satisfaisant les hypothèses du théorème 4.4, et l un entier pair.*

1. *Si $a, b \in H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, alors $\mathcal{P}_c(a+b) = \mathcal{P}_c(a) + \mathcal{P}_c(b) + i(a \circ c_*(b))$ où i est l'injection $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$; et si $\lambda \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_c(\lambda a) = \lambda^2 \mathcal{P}_c(a) \in \mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}$.*

2. *Si $a \in H_n(X;\mathbb{Z}/2l\mathbb{Z})$, $\mathcal{P}_c(\rho(a)) = a \circ c_*(a)$ où $\rho : H_n(X;\mathbb{Z}/2l\mathbb{Z}) \to H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ est la réduction modulo l.*

3. *Si $a \in H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, alors $a \circ c_*(a) = \mathcal{P}_c(a) \mod (l)$, et $\mathcal{P}_c(a) = \epsilon \mathcal{P}_c(c_*(a))$, où $\epsilon = +1$ ou -1 selon que c préserve l'orientation de X ou non.* □

En particulier, $\mathcal{P}_c$ est une forme quadratique adaptée à la forme bilinéaire d'intersection tordue, et pour déterminer cette forme il suffit donc de la calculer sur une famille génératrice de $H_n(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

5 Extension de la congruence d'Arnol'd

Dans toute la suite de cette partie, X désigne une variété presque-complexe compacte de dimension 4, munie d'une structure réelle c et de l'orientation induite par la structure presque-complexe.

5.1 La fonction ind et son intégrale.

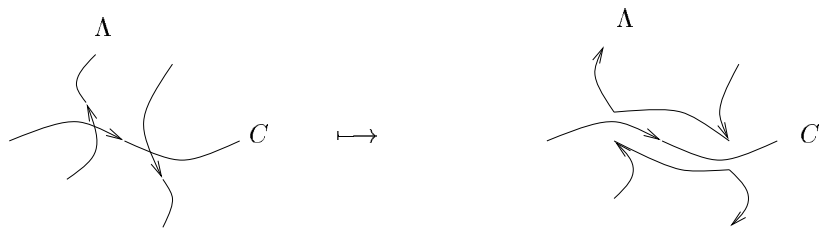
Soient A une courbe J-holomorphe réelle séparante de X, et A^+ une partie de $A \setminus \mathbb{R}A$ dont le bord est $\mathbb{R}A$. Comme A^+ est orientée par la structure J-holomorphe de A, elle induit une orientation complexe sur $\mathbb{R}A$ que l'on fixe. Fixons $l \in \mathbb{N}$ un diviseur de $[\mathbb{R}A]$, c'est-à-dire un entier tel que l'équation $lx = [\mathbb{R}A]$ possède une solution x dans $H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Lorsque $[\mathbb{R}A] = 0$, on choisit $l = 0$; sinon, on choisit l aussi grand que possible. Soit $([\mathbb{R}e_1], \ldots, [\mathbb{R}e_N])$ une base de $H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$, et $s_1, \ldots, s_N$ des entiers tels que $[\mathbb{R}A] = l\sum_{i=1}^N s_i[\mathbb{R}e_i] \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Remarquons que lorsque $H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ n'a pas de torsion d'ordre l, la classe $\sum_{i=1}^N s_i[\mathbb{R}e_i]$ est uniquement définie par l, et par la classe $[\mathbb{R}A]$. Dans le cas contraire, cette classe n'est pas définie de manière unique par l et $[\mathbb{R}A]$, et elle est donc choisie arbitrairement.

Lemme 5.1 *Il existe une famille de courbe lisses orientées disjointes $(\lambda_j)_{j\in J}$ de $\mathbb{R}X$, chacune soit disjointe de $\mathbb{R}A$, soit incluse dans $\mathbb{R}A$, ainsi qu'une famille d'entiers $(u_j)_{j\in J}$ tels que :*

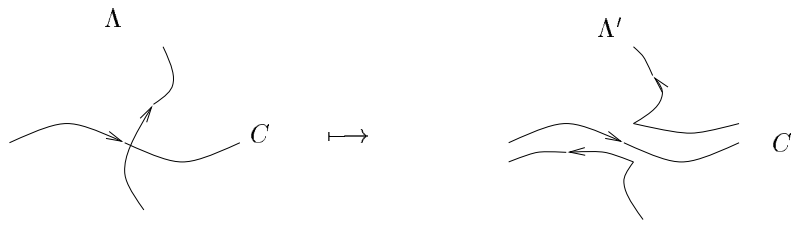
$$\sum_{j\in J} u_j[\lambda_j] = \sum_{i=1}^N s_i[\mathbb{R}e_i] \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$$

Démonstration :

La classe $\sum_{i=1}^{N} s_i[\mathbb{R}e_i]$ est réalisée par une sous variété orientée Λ de dimension 1 de $\mathbb{R}X$. Soit C une composante connexe de $\mathbb{R}A$ incluse dans une composante connexe $\mathbb{R}X_i$ de $\mathbb{R}X$. Si C est bilatère, quitte à relever C, $\mathbb{R}A$ et Λ dans le revêtement double d'orientation $\mathbb{R}Y_i$ de $\mathbb{R}X_i$ lorsque $\mathbb{R}X_i$ n'est pas orientable, l'indice d'intersection $C \circ \Lambda$ est un entier, et $C \circ \Lambda = \frac{1}{l} C \circ \mathbb{R}A = 0$. Par conséquent, quitte à effectuer une chirurgie sur Λ, on peut supposer que Λ n'intersecte pas C :



Si C est unilatère, chaque paire de points d'intersection -transverse- entre C et Λ peut être supprimée par une chirurgie analogue à la précédente. S'il reste un point d'intersection, on remplace Λ par $\Lambda' \cup C$ comme indiqué sur la figure suivante :



Le résultat en découle. □

Les courbes données par le lemme 5.1 peuvent être supposées connexes, et les entiers s_i premiers entre eux. Fixons un tel choix de courbes. La réunion $\mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j$ est une sous-variété de $\mathbb{R}X$, et on note $\{C_k\,,\, k \in K\}$ l'ensemble des composantes connexes de son complémentaire dans $\mathbb{R}X$. Lorsqu'une composante $\mathbb{R}X_i$ de $\mathbb{R}X$ est orientable, elle est munie d'une orientation quelconque et les composantes C_k incluses dans $\mathbb{R}X_i$ sont munies de l'orientation induite. Les autres composantes C_k orientables sont munies d'orientations quelconques.

Lemme 5.2 *Il existe une famille d'entiers $(c_k)_{k\in K}$ telle que $c_k = 0$ si C_k n'est pas orientable, et $\partial(\sum_{k\in K} c_k C_k) = l\sum_{j\in J} u_j\lambda_j - \mathbb{R}A$. De plus, si c_k et c'_k sont deux telles familles, alors $c'_k - c_k$ est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}X$, et nul lorsque cette composante est non-orientable.*

Démonstration :

Considérons les morphismes

$$H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j; \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j; \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$$

extraits de la suite exacte longue associée à la paire $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j)$. Comme l'image de la classe $l\sum_{j\in J} u_j[\lambda_j] - [\mathbb{R}A]$ de $H_1(\mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j; \mathbb{Z})$ est nulle dans $H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$, il existe un élément de $H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j; \mathbb{Z})$ qui relève cette classe. Or l'espace $H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j; \mathbb{Z})$ est engendré par les classes d'homologies relatives des composantes orientées C_k, on en déduit l'existence d'une famille

d'entiers $(c_k)_{k\in K}$ satisfaisant le lemme 5.2. Si $(c'_k)_{k\in K}$ est une autre famille d'entiers satisfaisant ce lemme, alors on considère les morphismes

$$H_2(\mathbb{R}X;\mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j;\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j;\mathbb{Z})$$

extraits de la suite exacte longue associée à la paire $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j)$. L'image de la classe $\sum_{k\in K}(c'_k - c_k)[C_k]$ de $H_2(\mathbb{R}X, \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j;\mathbb{Z})$ est nulle dans $H_1(\mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j;\mathbb{Z})$, et il existe donc un élément de $H_2(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ qui relève cette classe. Comme l'espace $H_2(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ est engendré par les classes d'homologies des composantes orientables de $\mathbb{R}X$, on en déduit le résultat. $\square$

Soit $(c_k)_{k\in K}$ une famille d'entiers donnée par le lemme 5.2, choisie arbitrairement. On associe la fonction ind définie sur $\mathbb{R}X$ à valeur dans $\mathbb{Z}$ en posant $\mathrm{ind}(x) = c_k$ si $x \in C_k$, et $\mathrm{ind}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j$.

La somme $\sum_{k\in K} c_k^2\chi(C_k)$ est alors indépendante du choix des orientations des parties C_k, et elle est notée $\int_{\mathbb{R}X}\mathrm{ind}^2\, d\chi$ (c'est l'intégrale de la fonction ind^2 sur $\mathbb{R}X$, la mesure étant donnée par la caractéristique d'Euler, v. [34] pour une présentation de ces intégrales). Par contre, cette intégrale dépend du choix des entiers c_k. Si $(c'_k)_{k\in K}$ est une autre famille d'entiers, d'après le lemme 5.2, pour chacune des composantes orientables $\mathbb{R}X_i$ de $\mathbb{R}X$, il existe un entier n_i tel que pour tout $k \in K$, $c'_k = c_k + n_i$ si $C_k \subset \mathbb{R}X_i$. Notons N le nombre total de composantes orientables de $\mathbb{R}X$, l'intégrale de la fonction ind' associée à la famille $(c'_k)_{k\in K}$ satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}X}(\mathrm{ind}')^2 d\chi = \int_{\mathbb{R}X}(\mathrm{ind})^2 d\chi + 2\sum_{i=1}^{N} n_i \int_{\mathbb{R}X_i}\mathrm{ind}\, d\chi + \sum_{i=1}^{N} n_i^2\chi(\mathbb{R}X_i)$$

Exemples :

1. Si $X = \mathbb{C}P^2$ est muni de la conjugaison complexe, et A est une courbe réelle séparante de degré pair de $\mathbb{C}P^2$, l'entier l peut être choisi nul et l'ensemble J vide. Dans ce cas, $\{C_k\,,\, k \in K\}$ est l'ensemble des composantes de $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}A$, et ind est la fonction utilisée par Viro dans [34] pour énoncer la formule de Rokhlin.

2. Si $X = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ est muni du produit des conjugaisons complexes, et A est une courbe réelle séparante de bidegré (a, b). Notons (e_1, e_2) la base standard de $H_1(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1;\mathbb{Z})$, il existe des entiers l, s_1, s_2 tels que $[\mathbb{R}A] = l(s_1e_1 + s_2e_2)$, et tels que s_1, s_2 sont premiers entre eux. Si $(s_1, s_2) \neq (0, 0)$, l'ensemble $(\lambda_j)_{j\in J}$ peut être réalisé par une composante λ de $\mathbb{R}A$ de classe $\pm(s_1e_1 + s_2e_2)$. Choisissons alors la famille $(c_k)_{k\in K}$ de sorte que $c_k = 0$ d'un côté de λ (c'est-à-dire pour une partie C_k ayant λ dans son bord). Dans ce cas, la fonction ind réduite modulo l est la fonction utilisée par Mikhalkin dans [22] pour écrire ses congruences (v. [22] théorèmes 5.5, 5.7, 5.8 et 5.9 et 6.1d).

5.2 Résultat principal

Théorème 5.3 *Soient X une variété presque-complexe compacte de dimension 4 munie d'une structure réelle c, et A une courbe J-holomorphe réelle séparante de X. Soit $\mathcal{A}_l \in Z_2(X;\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ le 2-cycle $A^+ + \sum_{k\in K} c_kC_k$. Alors si l est pair, $\mathcal{P}_c([\mathcal{A}_l]) = -\int_{\mathbb{R}X}\mathrm{ind}^2\, d\chi \mod (2l)$, et si l est impair, $[\mathcal{A}_l] \circ c_*[\mathcal{A}_l] = -\int_{\mathbb{R}X}\mathrm{ind}^2\, d\chi \mod (l)$.*

Corollaire 5.4 *Soient X une variété presque-complexe compacte de dimension 4 munie d'une structure réelle c, et A une courbe J-holomorphe réelle séparante de X, telle que $[\mathbb{R}A] = 0 \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Soit C une partie de $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}A$ telle que $\partial C = \mathbb{R}A \mod (2)$. En notant $\mathcal{A}_l \in Z_2(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ le cycle $A^+ + C$, on a :*

$$\mathcal{P}_c(\mathcal{A}_l) = -\chi(C) \mod (4).$$

Remarque :

Le théorème 5.3 couvre le résultat de Zvonilov [39], qui correspond au cas où l est nul.

Lorsque l est impair, la congruence donnée par le théorème 5.3 semble plus faible que dans le cas où l est pair, puisque le résultat est modulo l et non modulo $2l$. Toutefois dans ce cas, une congruence modulo $2l$ équivaut à la donnée d'une congruence modulo l et d'une congruence modulo 2. Or la valeur modulo 2 de $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi$ est la caractéristique d'Euler de la réunion des parties C_k pour lesquelles c_k est impair.

Démonstration du corollaire 5.4 :

Si la partie C est orientable, ce corollaire découle immédiatement du théorème 5.3, dès que l'on choisit $c_k = 0$ ou 1 selon que $C_k \cap C = \emptyset$ ou $C_k \subset C$. En effet, avec ce choix d'entiers, $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = \sum_{k\in K} c_k^2 \chi(C_k) = \chi(C)$.

Si C n'est pas orientable, c'est également une conséquence du théorème 5.3 si l'on inclut dans le choix des courbes $(\lambda_j)_{j\in J}$ des courbes intérieures à C qui découpent cette surface en une surface orientable. □

Démonstration du théorème 5.3 :

Choisissons une section ζ de classe C^1 de $T\mathbb{R}X$, transverse à la section nulle et dont la restriction à $\mathbb{R}A \cup \cup_{j\in J}\lambda_j$ ne s'annule pas, est tangente à cette courbe et compatible l'orientation de $\mathbb{R}A$. Prolongeons alors $J\zeta$ en un champ de vecteur de classe C^1 sur X tout entier, et notons ϕ_t le flot associé. Lorsque t est suffisament petit, les seuls points d'intersections du cycle $\phi_t(\mathcal{A}_l)$ avec son image par c proviennent des zéros du champ de vecteurs ζ, et ce cycle $\phi_t(\mathcal{A}_l)$ est transverse à son image par c en ces points. Or sur chaque partie C_k, la somme des indices des zéros de ζ vaut $\chi(C_k)$. Comme la multiplicité de C_k dans $\mathcal{A}_l$ est c_k, il en résulte que $\phi_t(\mathcal{A}_l) \circ c\big(\phi_t(\mathcal{A}_l)\big) = -\sum_k c_k^2 \chi(C_k) = -\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi$. Le résultat découle alors du théorème 4.4. □

5.3 Applications

5.3.1 Les surfaces de Del Pezzo

Supposons que (X, c) est le plan projectif éclaté en N points réels distincts, comme par exemple les surfaces maximales de degrés un et trois de $\mathbb{C}P^3$ ($N = 0$ et $N = 6$), ou l'intersection complète maximale de deux quadriques de $\mathbb{C}P^4$ ($N = 5$). Dans ce cas, le morphisme c_* agit comme $-id$ sur $H_2(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{N+1}$, et $\mathbb{R}X \cong \#(N+1)\mathbb{R}P^2$. Notons e_0 une droite réelle de $\mathbb{C}P^2$ ne passant pas par les points éclatés, et $e_1, \ldots, e_N$ les diviseurs exceptionnels au-dessus de ces points. Fixons des moitiés e_i^+ de e_i, dont le bord est $\mathbb{R}e_i$. Ces moitiés induisent des orientations complexes sur $\mathbb{R}e_i$ que l'on fixe également.

Soit A une courbe algébrique réelle séparante lisse de X, et A^+ une moitié de A de bord $\mathbb{R}A$. Cette moitié équipe $\mathbb{R}A$ d'une orientation complexe que l'on fixe. Notons l, a_i, s_i des entiers tels que $[A] = \sum_{i=0}^N a_i[e_i] \in H_2(X;\mathbb{Z})$ et $[\mathbb{R}A] = l\sum_{i=0}^N s_i[\mathbb{R}e_i] \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$.

Lemme 5.5

$$[A^+] = l\sum_{i=0}^{N} s_i[e_i^+] + \sum_{i=0}^{N} \frac{a_i - ls_i}{2}[e_i] \in H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z})$$

Démonstration :

Par hypothèse, le bord de $A^+ - l\sum_{i=0}^{N} s_i[e_i^+]$ est nul dans $H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Il existe donc des entiers v_i tels que $[A^+] = l\sum_{i=0}^{N} s_i[e_i^+] + \sum_{i=0}^{N} v_i[e_i]$. Or $[A^+] - c_*[A^+] = [A] = \sum_{i=0}^{N} a_i[e_i]$, et donc $a_i = ls_i + 2v_i$, d'où le résultat. □

Soit $(\lambda_j)_{j\in J}$ une famille de courbes et $(u_j)_{j\in J}$ une famille d'entiers donnés par le lemme 5.1, de sorte que $\sum_{j\in J} u_j[\lambda_j] = \sum_{i=0}^{N} s_i[\mathbb{R}e_i] \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Soit alors $(c_k)_{k\in K}$ une famille d'entiers donnée par le lemme 5.2, et ind la fonction de $\mathbb{R}X$ associée.

Proposition 5.6 *Si l est pair,*

$$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = \frac{(a_0 - ls_0)^2}{4} - \sum_{i=1}^{N} \frac{(a_i - ls_i)^2}{4} \mod (2l)$$

En particulier, si C est la réunion des parties C_k pour lesquelles c_k est impair,

$$\chi(C) = \frac{(a_0 - ls_0)^2}{4} - \sum_{i=1}^{N} \frac{(a_i - ls_i)^2}{4} \mod (4)$$

Démonstration de la proposition 5.6 :

Il existe une chaîne Λ^+ tels que $\partial\Lambda^+ = \sum_{j\in J} u_j\lambda_j$, et $[\Lambda^+] = \sum_{i=0}^{N} s_i[e_i^+] \in H_2(X, \mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Le cycle $\mathcal{A}_l - l\Lambda^+$ est donc un cycle entier qui relève $\mathcal{A}_l$. Or d'après le lemme 5.5, la classe d'homologie de ce cycle est $\sum_{i=0}^{N} \frac{a_i - ls_i}{2}[e_i] \in H_2(X;\mathbb{Z})$. Le résultat découle donc du théorème 5.3. □

Remarque :

En fait, la même démarche permet d'obtenir un résultat analogue à celui de la proposition 5.6 dans n'importe quelle surface obtenue à partir de $\mathbb{C}P^2$ par une suite d'éclatements de points réels. Par conséquent, cette proposition fournit un résultat pour les courbes planes réelles ayant des singularités réelles. Une généralisation de la congruence d'Arnol'd pour ce type de courbes a déja été obtenue dans [15].

5.3.2 Les surfaces réglées presque-complexes séparantes

Soit A une courbe J-holomorphe réelle séparante de X, où X est une surface réglée séparante (v. §2.1 pour une définition). Fixons une moitié A^+ de A, de bord $\mathbb{R}A$, et fixons l'orientation sur $\mathbb{R}A$ induite par A^+. Soient a, b, l, s_i et t_i des entiers tels que $[A] = a[v] + b[e] \in H_2(X;\mathbb{Z})$, et $[\mathbb{R}A] = l\sum_{i\in I}(s_i[\mathbb{R}v_i] + t_i[\mathbb{R}e_i]) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ où $\mathbb{R}e_i = \mathbb{R}e \cap \mathbb{R}X_i$. Lorsque l est nul, s_i et t_i sont également choisis nuls.

Lemme 5.7 *L'entier t_i est indépendant de $i \in I$, et en notant $t = t_i$ et $s = \sum_{i\in I} s_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a :*

$$[A^+] = l\sum_{i\in I} s_i[v_i^+] + lt[e^+] + \frac{a - ls}{2}[v] + \frac{b - lt}{2}[e] \in H_2(X, \mathbb{R}X;\mathbb{Z})$$

Démonstration :

Considérons les morphismes $H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z}) \to H_1(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} H_1(B;\mathbb{Z})$. Puisque $\mathbb{R}A = \partial A^+$, l'image de $[\mathbb{R}A]$ est nulle dans $H_1(B;\mathbb{Z})$, et puisque $\mathbb{R}v_i = \partial v_i^+$, cette image vaut $l\sum_{i\in I} t_i p_*[\mathbb{R}e_i]$. Comme le noyau du morphisme $H_1(\mathbb{R}B;\mathbb{Z}) \to H_1(B;\mathbb{Z})$ est engendré par $[\mathbb{R}B]$, on en déduit que t_i est indépendant de $i \in I$.

Le bord de $A^+ - l\sum_{i\in I} s_i[v_i^+] - lt[e^+]$ est homologue à zéro dans $H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$, donc il existe des entiers v_1, v_2 tels que

$$[A^+] = l\sum_{i\in I} s_i[v_i^+] + lt[e^+] + v_1[v] + v_2[e] \in H_2(X, \mathbb{R}X;\mathbb{Z})$$

Or $[A^+] - c_*[A^+] = [A]$, d'où $a = ls + 2v_1$ et $b = lt + 2v_2$, et le résultat. □

Fixons une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de courbes, et une famille $(u_j)_{j\in J}$ d'entiers donnés par le lemme 5.1, tels que $\sum_{j\in J} u_j[\lambda_j] = \sum_{i\in I}(s_i[\mathbb{R}v_i] + t_i[\mathbb{R}e_i]) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Soit $(c_k)_{k\in K}$ une famille d'entiers donnée par le lemme 5.2, et ind la fonction définie sur $\mathbb{R}X$ associée.

Proposition 5.8 *Si l est pair,*

$$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = \frac{1}{2}(b - lt)(a + ls + \frac{h}{2}(b - lt)) \mod (2l)$$

En particulier, si C est la réunion des parties C_k pour lesquelles c_k est impair,

$$\chi(C) = \frac{1}{2}(b - lt)(a + ls + \frac{h}{2}(b - lt)) \mod (4)$$

Remarque :

Lorsque $X = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, la section e est choisie holomorphe de carré d'intersection nul, de sorte que $h = 0$, et ce théorème couvre les congruences obtenues par Mikhalkin (v. [22] théorèmes 5.5, 5.7, 5.8 et 5.9 et 6.1d).

Démonstration :

Il existe une chaîne Λ^+ de X telle que $\partial\Lambda^+ = \sum_{j\in J} u_j\lambda_j$, et $[\Lambda^+] = \sum_{i\in I} s_i[v_i^+] + t[e^+] \in H_2(X, \mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Le cycle $\mathcal{A}_l - l\Lambda^+$ est donc un cycle entier qui relève $\mathcal{A}_l$. Or d'après le lemme 5.7, la classe d'homologie de ce cycle est $\frac{a-ls}{2}[v] + \frac{b-lt}{2}[e]$. Le résultat découle donc du théorème 5.3. □

Donnons à présent quelques applications de ce résultat :

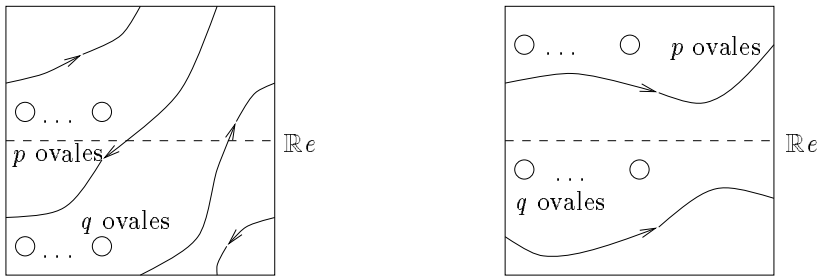
Proposition 5.9 *Soit A une courbe J-holomorphe réelle de classe $a[v] + 4[e]$ d'une surface réglée séparante X de partie réelle connexe.*

Supposons que $\mathbb{R}X$ est un tore, et que le schéma réel de A est constitué de deux composantes de classe $\pm(s, 1)$ ainsi que de p et q ovales se situant de part et d'autre de ces composantes. Alors :

1. *Lorsque $2s = a + h \mod (4)$ et que $p = q + 2 \mod (4)$, la courbe A n'est pas séparante. En particulier, il n'existe pas de courbe maximale ayant ce schéma réel.*

2. *Lorsque $2s = a + h + 2 \mod (4)$ et que la courbe est séparante, $[\mathbb{R}A] = 0 \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ si $p = q \mod (4)$, et $[\mathbb{R}A] = \pm 2(s, 1) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ si $p = q + 2 \mod (4)$.*

Supposons à présent que $\mathbb{R}X$ est une bouteille de Klein, et que le schéma réel de A est constitué d'une composante de nombre d'enroulement ± 2 ainsi que de p et q ovales se situant de part et d'autre de cette composante, où q est le nombre d'ovales se situant dans le ruban de Mœbius dont l'âme est homologue à $\mathbb{R}e$. Alors, si $p = a - h + q \mod (4)$, la courbe A n'est pas séparante. En particulier, il n'existe pas de courbes maximales ayant ce schéma réel.



Tore Bouteille de Klein

Remarques :

Lorsque $\mathbb{R}X$ est un tore et que $X = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, la partie 1 se déduit des résultats antérieurs de Mikhalkin (v. [22]). De même dans la partie 2, le fait que $[\mathbb{R}A] = 0 \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ implique que $p = q \mod (4)$ peut se déduire de la formule de Zvonilov (v. [39]).

Remarquons par ailleurs que la même démarche permet d'obtenir un résultat analogue pour les courbes de classe (a, b) avec a, b pairs, dont la partie réelle contient $(b-2)$ composantes de classe $\pm(s, 1)$.

Démonstration :

La proposition 5.8 s'applique avec $b = 4$ et $t = \pm 1$. Par conséquent, lorsque $\mathbb{R}X$ est un tore, $\chi(C) = a + 2s + h \mod (4)$ si $l = \pm 2$, et $\chi(C) = 0 \mod (4)$ si $l = 0$, où $\chi(C) = p - q = q - p \mod (4)$.

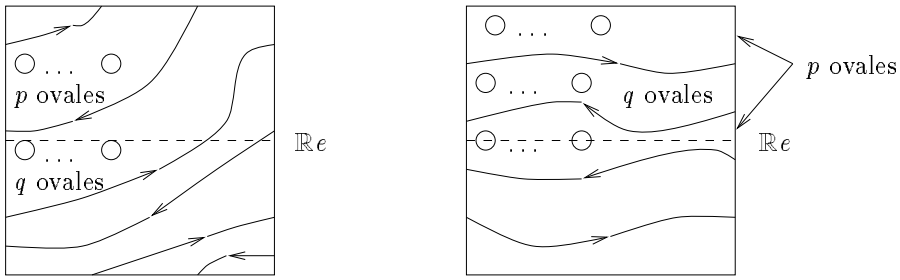
Ainsi, lorsque $a + 2s + h = 0 \mod (4)$ et que $p = q + 2 \mod (4)$, la courbe ne peut pas être séparante ; et lorsque $a + 2s + h = 2 \mod (4)$, $p = q \mod (4)$ impose que $l = 0$, et $p = q + 2 \mod (4)$ impose que $l = \pm 2$.

Si $\mathbb{R}X$ est une bouteille de Klein, alors $l = \pm 2$ et $\chi(C) = p - q = q - p + 2 \mod (4)$. La proposition 5.8 fournit la relation $p - q = a + h \mod (4)$, d'où le résultat puisque h est impair. $\square$

Proposition 5.10 *Soit A une courbe J-holomorphe réelle de classe $a[v] + 6[e]$ d'une surface réglée séparante X de partie réelle connexe.*

Supposons que $\mathbb{R}X$ est un tore, et que le schéma réel de A est constitué de deux composantes de classe $\pm(s, 2)$ ainsi que de p et q ovales se situant de part et d'autre de ces composantes. Alors, si la courbe A est séparante, $[\mathbb{R}A] = 0 \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ lorsque $p = a + h + q \mod (4)$, et $[\mathbb{R}A] = \pm 2(s, 2) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ lorsque $p = a + h + 2 + q \mod (4)$.

Supposons à présent que $\mathbb{R}X$ est une bouteille de Klein, et que le schéma réel de A est constitué de deux composantes de nombre d'enroulement ± 2 (qui séparent $\mathbb{R}X$ en un cylindre et deux rubans de mœbius), ainsi que de p ovales se situant dans les rubans de mœbius et de q ovales se situant dans le cylindre. Alors, si $p = a - h + q \mod (4)$, la courbe n'est pas séparante. En particulier, il n'existe pas de courbes maximales ayant ce schéma réel.



Tore Bouteille de Klein

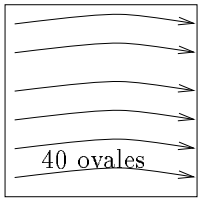
Démonstration :

La proposition 5.8 s'applique avec $b = 6$ et $t = \pm 2$ si $\mathbb{R}X$ est un tore, $t = \pm 1$ si $\mathbb{R}X$ est une bouteille de Klein. Par conséquent, lorsque $\mathbb{R}X$ est un tore, $\chi(B) = a + 2s + h \mod (4)$ si $l = \pm 2$, et $\chi(B) = a + h \mod (4)$ si $l = 0$, où $\chi(B) = p - q = q - p \mod (4)$.

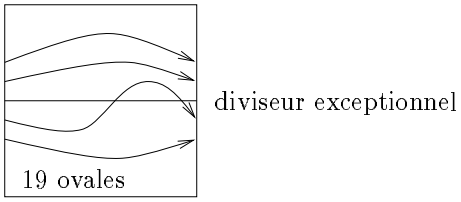
Comme s est impair, puisque premier avec $t = \pm 2$, on en déduit que $p = a + h + q \mod (4)$ impose que $l = 0$, et que $p = a + h + 2 + q \mod (4)$ impose que $l = \pm 2$.

Lorsque $\mathbb{R}X$ est une bouteille de Klein, $\chi(B) = p - q \mod (4)$ et la proposition 5.8 fournit la relation $p - q = a + h \mod (4)$, d'où le résultat puisque h est impair. □

Proposition 5.11 *Il n'existe pas de* $(M-4)$*-courbe algébrique réelle séparante de bidegré* $(8, 8)$ *sur l'hyperboloïde, dont le schéma complexe est:*



De même, il n'existe pas de courbe algébrique réelle maximale de classe $(8, 6)$ *sur la surface réglée* $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$*, dont le schéma complexe est:*



Démonstration :

Dans la première partie, la proposition 5.8 s'applique avec $a = b = 8$, $l = 6$, $h = s = 0$ et $t = 1$. Cette proposition fournit la relation $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2 \, d\chi = 8 \mod (12)$. Or dans le schéma complexe proposé, $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2 \, d\chi = 40 = 4 \mod (12)$, d'où le résultat.

Dans la seconde partie, la proposition 5.8 s'applique avec $a = 8$, $b = 6$, $l = 4$, $t = 1$ et $h = -1$. Cette proposition fournit la relation $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2 \, d\chi = 7 \mod (8)$. Or dans le schéma complexe proposé, $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2 \, d\chi = 19 = 3 \mod (8)$, d'où le résultat. □

6 Compléments

Une courbe J-holomorphe réelle séparante A d'une variété presque-complexe X réelle de dimension 4 est dite *de torsion* si $[\mathbb{R}A] \in H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$ n'est pas un multiple de 2 alors que $2[\mathbb{R}A]$

est divisible par 4. Par exemple, soit X une surface réglée séparante telle que $\mathbb{R}X$ contienne une bouteille de Klein, et A une courbe J-holomorphe réelle lisse séparante telle que $\mathbb{R}A$ contienne deux composantes de nombre d'enroulement ± 1 dans une bouteille de Klein de $\mathbb{R}X$. Cette courbe est alors de torsion. La classe $[\mathbb{R}A]$ n'est donc pas divisible par un entier pair, et la proposition 5.8 ne s'applique pas directement. Par contre, la classe $2[\mathbb{R}A]$ est divisible par $2l$ où l est un entier pair, mais la proposition 5.8 ne fournit alors qu'un résultat modulo $4l$. L'objet du §6.1 est de combler cette lacune et de donner dans ce cas un résultat modulo $8l$. Dans le §6.2 est obtenu un résultat analogue à la formule d'orientation complexe de Rokhlin dans le cas de deux courbes séparantes disjointes, qui peut également dans certains cas renforcer la proposition 5.8.

6.1 Courbes de torsion sur les surfaces réglées

Soit A une courbe J-holomorphe réelle lisse séparante de la surface réglée séparante (X, c), et A^+ une moitié de A, de bord $\mathbb{R}A$. Munissons $\mathbb{R}A$ de l'orientation complexe induite par A^+. Notons l, s_i, t_i les entiers tels que $2[\mathbb{R}A] = 2l\sum_{i\in I}(s_i[\mathbb{R}v_i] + t_i[\mathbb{R}e_i]) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$, où $\mathbb{R}e_i = \mathbb{R}e \cap \mathbb{R}X_i$. Lorsque l est nul, les entiers s_i, t_i sont également choisis nuls. D'après le lemme 5.7, l'entier t_i est indépendant de $i \in I$, et noté t. Par ailleurs, on note $s = \sum_{i\in I} s_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

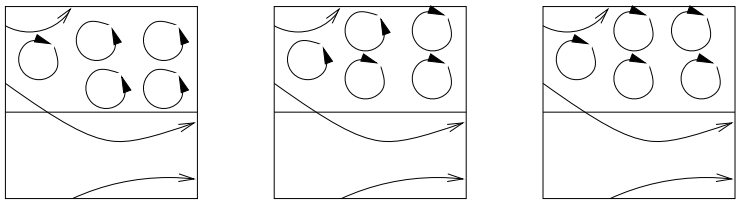
Si l est non nul, on choisit pour chaque $i \in I$ une courbe λ_i dans $\mathbb{R}X_i$, soit disjointe de $\mathbb{R}A$, soit incluse dans $\mathbb{R}A$, que l'on oriente de sorte que son nombre d'enroulement soit positif. Choisissons alors une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'entiers tels que $u_i[\lambda_i] = s_i[\mathbb{R}v_i]+t_i[\mathbb{R}e_i] \in H_1(\mathbb{R}X_i;\mathbb{Z})$, ainsi qu'une famille $(c_k)_{k\in K}$ d'entiers donnée par le lemme 5.2, de sorte que $\partial(\sum_{k\in K} c_k C_k) = 2l\sum_{i\in I} u_i\lambda_i - 2\mathbb{R}A$. Notons ind la fonction associée à la famille $(c_k)_{k\in K}$, et $\delta = \sum_{i\in I}\epsilon(i)u_i$, où $\epsilon(i) = 1$ si λ_i est unilatère, incluse dans $\mathbb{R}A$ et de sens opposé à $\mathbb{R}A$, et $\epsilon(i) = 0$ sinon.

Théorème 6.1 *Si l est pair et $e \circ e = -h$,*

$$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi + 4l\delta = 2(b - lt)(a - ls - \frac{h}{2}(b - lt)) \mod (8l)$$

Un exemple d'application de ce théorème est :

Corollaire 6.2 *Il n'existe pas de courbe algébrique réelle maximale de classe $5e_0 + 4e_1$ sur la surface réglée $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P}^2$, ayant un des schémas complexes suivant :*



diviseur exceptionnel

Remarque : On a noté e_0 une droite de $\mathbb{C}P^2$ ne passant pas par le point éclaté, et e_1 le diviseur exceptionel de $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P}^2$. Par ailleurs, le schéma réel de la courbe proposée existe, puisque cette courbe est obtenue en éclatant une courbe maximale de degré 5 de $\mathbb{C}P^2$ en un point situé sur un ovale de cette courbe.

Démonstration :

Le théorème 6.1 s'applique avec $a = 5$, $b = 4$, $s = 0$, $t = 1$, $l = 2$, $h = +1$, et $\delta = 0$. Ce théorème fournit donc la relation $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = 16 = 0 \mod (16)$. Or dans les schémas complexes proposés,

$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = 8 \mod (16)$. $\square$

Démonstration du théorème 6.1 :

Il existe une 2-chaîne Λ^+ de X telle que $\partial\Lambda^+ = \sum_{i\in I} u_i\lambda_i$, et $[\Lambda^+] = \sum_{i\in I} s_i[v_i^+] + t[e^+] \in H_2(X, \mathbb{R}X; \mathbb{Z})$. De plus, comme une telle chaîne peut être obtenue par homotopie, à partir d'une perturbation de la courbe $\sum_{i\in I} s_i v_i + te$, on peut supposer qu'elle est holomorphe au voisinage de $\cup_{i\in I}\lambda_i$.

Posons alors $\mathcal{A} = 2A^+ + \sum_{k\in K} c_k C_k - 2l\Lambda^+$. C'est un 2-cycle entier de X dont la classe d'homologie entière satisfait $[\mathcal{A}] - c_*[\mathcal{A}] = 2A - 2l\Lambda = (2a - 2ls)[v] + (2b - 2lt)[e]$. Par suite $[\mathcal{A}] = (a-ls)[v]+(b-lt)[e]$, et $[\mathcal{A}]\circ c_*([\mathcal{A}]) = h(b-lt)^2 - 2(b-lt)(a-ls) = -2(b-lt)(a-ls-\frac{h}{2}(b-lt))$.

Or on peut effectuer un calcul géométrique de ce nombre d'intersection. Choisissons une section ξ de classe C^1 de $T\mathbb{R}X$, transverse à la section nulle et dont la restriction à $\mathbb{R}A \cup \cup_{i\in I}\lambda_i$ ne s'annule pas, est tangent à cette courbe et compatible avec l'orientation de $\mathbb{R}A$. Perturbons à présent ξ de façon qu'il soit normal à toute composante bilatère de $\mathbb{R}A \cup \cup_{i\in I}\lambda_i$, et qu'il ne soit tangent aux composantes unilatères de cette courbe qu'en un unique point. Prolongeons $J(\xi)$ en un champ défini sur X tout entier, et notons ϕ_t le flot associé. Ce prolongement peut être choisi de sorte que $\phi_t(\mathcal{A})$ est transverse à son image par c lorsque t est suffisament petit. Les points d'intersection de $\phi_t(\mathcal{A})$ avec $c(\phi_t(\mathcal{A}))$ sont alors de trois natures différentes : ce sont soit des points d'intersection entre $\phi_t(\sum_k c_k C_k)$ et $c(\phi_t(\sum_k c_k C_k))$, provoqués par les zéros du champ ξ, soit des points d'intersection entre $\phi_t(2A^+ - 2l\Lambda^+)$ et $c(\phi_t(2A^+ - 2l\Lambda^+))$ situés en-dehors d'un voisinage de $\mathbb{R}X$, soit de tels points d'intersection situés dans ce voisinage de $\mathbb{R}X$.

La contribution des points de la première catégorie se calcule comme dans la démonstration du théorème 5.3, et vaut $-\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi$. La contribution des points de la seconde catégorie est nulle modulo $8l$, puisque ces points sont couplés par c. Les points de la troisième catégorie sont concentrés au voisinage des points en lesquels ξ est tangent à une courbe λ_i incluse dans $\mathbb{R}A$, et de sens opposé à cette courbe. D'après ce qui précède, il y a autant de tels points que de courbes λ_i unilatères, incluses dans $\mathbb{R}A$ et de sens opposé à $\mathbb{R}A$. Pour calculer la contribution de ces points, il convient d'effectuer un calcul du nombre d'entrelacement des cycles $\phi_t(\mathcal{A})$ et $c(\phi_t(\mathcal{A}))$ dans une sphère centrée en ces points. Comme ce calcul est local, il peut être effectué sur un modèle qui présente le même entrelac. Soit donc d une droite de $\mathbb{C}P^2$. Notons d^+ une moitié de cette droite, de bord $\mathbb{R}d$, et fixons sur $\mathbb{R}d$ l'orientation induite par d^+. Le complémentaire de $\mathbb{R}d$ dans $\mathbb{R}P^2$ est un disque C que l'on oriente de sorte que $\partial C = 2\mathbb{R}d$. Notons alors $d^- = -c(d^+)$, et $\mathcal{B}$ le cycle $2d^+ + (ul-1)C + 2uld^-$ où u et l sont des entiers. La classe d'homologie de $\mathcal{B}$ se calcule comme ci-dessus et vaut $(ul+1)[d]$, de sorte que $[\mathcal{B}] \circ c_*[\mathcal{B}] = -(ul+1)^2$. Or dans cet exemple, $-\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = -(ul-1)^2$, par conséquent, la contribution recherchée est $(ul-1)^2 - (ul+1)^2 = -4ul$, d'où le résultat. $\square$

6.2 Courbes séparantes disjointes

Théorème 6.3 *Soit (X, c) une variété presque-complexe réelle de dimension quatre telle que $c_* = -id$ sur $H_2(X;\mathbb{Z})$. Soient A_1, A_2 deux courbes J-holomorphes réelles séparantes disjointes de X, telles qu'il existe deux entiers q_1, q_2 satisfaisant $q_1[\mathbb{R}A_1] = q_2[\mathbb{R}A_2] \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. Soit $(c_k)_{k\in K}$ une famille d'entiers telle que $\partial\sum_k c_k C_k = q_2[\mathbb{R}A_2] - q_1[\mathbb{R}A_1]$, et* ind *la fonction de $\mathbb{R}X$ associée (v. §5.1). Alors :*

$$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = \frac{1}{4}(q_1[A_1] + q_2[A_2])^2.$$

Démonstration :

Notons $\mathcal{A} = q_1 A_1^+ + q_2 A_2^- + \sum_k c_k C_k$. Comme $2[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}] - c_*[\mathcal{A}] = q_1[A_1] + q_2[A_2]$, on a $[\mathcal{A}] = \frac{1}{2}(q_1[A_1] + q_2[A_2]) \in H_2(X;\mathbb{Z})$. Par suite, $[\mathcal{A}] \circ c_*[\mathcal{A}] = -\frac{1}{4}(q_1[A_1] + q_2[A_2])^2$. Or ce nombre d'intersection se calcule géométriquement comme dans le théorème 5.3 et vaut $-\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi$. D'où le résultat. □

Corollaire 6.4 *Soit A une courbe J-holomorphe réelle séparante de la surface réglée séparante (X, c), qui n'intersecte pas la section e. Notons $e \circ e = -h$, $[A] = hb[v] + b[e] \in H_2(X;\mathbb{Z})$ et supposons que $[\mathbb{R}A] = l[\mathbb{R}e] \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$. En notant* ind *la fonction associée au choix d'entiers $(c_k)_{k\in K}$ décrit dans le théorème 6.3, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = \frac{h}{4}(b^2 - l^2)$$

Remarque : Lorsque $h > 0$ et que la section e est J-holomorphe, comme c'est le cas par exemple dans les surfaces $X_h = P(F_0 \oplus F_h)$, les classes d'homologies réalisées par les courbes irréductibles autres que e sont de la forme $a[v] + b[e]$ avec $a - hb \geq 0$. Dans le cas éxtremal $a = hb$, ce corollaire renforce le résultat donné par le corollaire 5.8.

Démonstration :

Puisque c_* agit comme $-id$ sur $H_2(X;\mathbb{Z})$, le théorème 6.3 s'applique avec $A_1 = A$, $A_2 = e$, $q_1 = 1$ et $q_2 = l$. Or $([A] + l[e])^2 = (hb[v] + (b+l)[e])^2 = -h(b+l)^2 + 2hb(b+l) = h(b^2 - l^2)$. □

Deuxième partie

Courbes J-holomorphes réelles à nids profonds sur les surfaces presque-complexes réglées

S. Orevkov a obtenu dans [26] une nouvelle formule d'orientations complexes pour les courbes planes réelles séparantes dites à nid profond. L'objectif de la première moitié de cette partie est de présenter une nouvelle démonstration de cette formule, qui permet de généraliser celle-ci aux courbes à nids profonds sur les surfaces réglées, et d'obtenir un analogue de cette formule pour des courbes réelles séparantes de degré $4k+1$ de $\mathbb{C}P^2$ possédant quatre nids (v. théorème 8.5). Plutôt que d'utiliser une formule de Rudolph pour les tresses (v. annexe B), cette démonstration consiste à utiliser une formule d'adjonction pour des cycles $\mathcal{A}_\pm$ construits au préalable. Cette construction de cycles permet en outre d'obtenir des inégalités analogues à celles d'Arnol'd [1] ou de Rokhlin [29] ; ces inégalités sont présentées dans le §9.

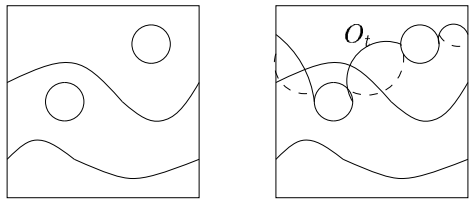
7 Les courbes à nids profonds

Soit (X, c) une surface presque-complexe réglée réelle séparante (v. §2.1 pour une définition. Pour simplifier dans la suite, on écrira "surface réglée réelle séparante") de base séparante B, éclatée en n points réels appartenant à des fibres distinctes. Ainsi, X est une surface réglée possédant n fibres singulières, chacune constituée de deux sphères J-holomorphes exceptionnelles s'intersectant transversalement en un point.

La famille $([v], [e], [v_1], \ldots, [v_n])$ forme une base du réseau $H_2(X; \mathbb{Z})$, où v est une fibre régulière, e est une section différentiable réelle fixée de X qui ne passe pas par les points éclatés, et $v_1, \ldots, v_n$ sont les n sphères exceptionnelles situées au-dessus des points éclatés. Ces sphères sont incluses dans les fibres singulières et ne rencontrent pas e.

7.1 Courbes à nids profonds et les cycles $\mathcal{A}_\pm$

Une courbe J-holomorphe réelle A de X est dite *à nids profonds* si toute fibre réelle intersecte $A \setminus \mathbb{R}A$ en au plus deux points imaginaires conjugués, et si chaque composante de $\mathbb{R}X$ possède une fibre dont tous les points d'intersection avec A sont réels. Lorsque la fibre réelle v se déplace, les points imaginaires de $A \cap v$ forment des ovales imaginaires O_t, $1 \leq t \leq T$, qui sont invariants par c et intersectent $\mathbb{R}X$ en les points où $\mathbb{R}A$ est tangente aux fibres réelles. Plus précisément, la restriction $p^{-1}(\mathbb{R}B)$ du fibré au-dessus de $\mathbb{R}B$ est une sous-variété de dimension 3 de X (singulière lorsque $n > 0$), qui intersecte A en la réunion de $\mathbb{R}A$ et des ovales O_t.



$\mathbb{R}A$ $\qquad$ $\mathbb{R}A \cup \cup_{t=1}^{T} O_t$

Supposons à présent que A est séparante, et fixons A^+ une moitié de $A \setminus \mathbb{R}A$, de bord $\mathbb{R}A$. Munissons $\mathbb{R}A$ de l'orientation complexe induite par A^+. Notons A^+_+ (resp. A^+_-) la partie de A^+ qui se projette sur B^+ (resp. B^-). Quitte à déformer un peu A dans X, on peut supposer que les ovales $(O_t)_{1\leq t\leq T}$ ne rencontrent pas e, et il existe alors dans $p^{-1}(\mathbb{R}B)$ des disques D_t invariants par c, disjoints de e et tels que $\partial D_t = O_t$. En effet, ces disques sont construits en reliant chaque couple de points de O_t se situant dans une fibre donnée par un segment inclus dans cette fibre et ne rencontrant pas e. Ces disques peuvent donc être choisis transverses à $\mathbb{R}X$ et *totalement réels*, c'est-à-dire de sorte qu'ils ne contiennent aucun espace tangent invariant par J.

Les surfaces $A^+_+ - c(A^+_+)$ et $A^+_- - c(A^+_-)$ sont des parties de la courbe A, on les munit de l'orientation induite par la structure presque-complexe de A. Le bord de ces surfaces est exactement la réunion des ovales O_t, et l'orientation des disques D_t est choisie de sorte que les chaînes $\mathcal{A}_+ = A^+_+ - c(A^+_+) + \sum_{t=1}^T D_t$ et $\mathcal{A}_- = A^+_- - c(A^+_-) - \sum_{t=1}^T D_t$ sont des cycles entiers. Ces cycles sont invariants par c et possèdent pour seules singularités des "plis" et des points doubles réels. Chacun de ces points doubles possède un signe correspondant à l'indice d'intersection des deux branches en ce point, et on note[2] π^+_+ (resp. π^-_-) le nombre de points doubles négatifs de $\mathcal{A}_+$ (resp. $\mathcal{A}_-$), et π^+_- (resp. π^-_+) le nombre de points doubles positifs. On note également $\pi^+ = \pi^+_+ - \pi^+_-$ et $\pi^- = \pi^-_- - \pi^-_+$ l'opposé du nombre algébrique de points doubles.

Proposition 7.1 *Les cycles $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$ satisfont la formule d'adjonction :*

$$[\mathcal{A}_\pm] \circ [\mathcal{A}_\pm] = c_1(X) \circ [\mathcal{A}_\pm] - \chi(\mathcal{A}_\pm) - 2\pi^\pm$$

où $[\mathcal{A}_\pm] \in H_2(X;\mathbb{Z})$ est la classe d'homologie de $\mathcal{A}_\pm$, et $\chi(\mathcal{A}_\pm)$ est la caractéristique d'Euler d'une normalisation de $\mathcal{A}_\pm$.

Tous les résultats du §8 vont essentielement découler de cette proposition, mais auparavant, les §§7.2 et 7.3 sont consacrés à une étude des termes $[\mathcal{A}_\pm]$, $\chi(\mathcal{A}_\pm)$ et $\pi^\pm$.

Une formule d'adjonction analogue est déjà apparue dans [17] et [7], présentons toutefois ici une démonstration :

Démonstration :

Choisissons un champ ξ de vecteurs non nuls tangents aux ovales O_t, et un champ ζ normal à ces ovales et tangent aux disques D_t. Ces champs sont prolongés aux cycles $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$, de sorte qu'ils soient tangents aux disques D_t, que ξ soit tangent aux J-courbes et ζ normal à ces J-courbes. Ce prolongement est choisi de sorte que les champs n'aient pas de zéros communs et soient linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ en dehors de leurs zéros. Le produit exterieur $\xi \wedge J(\zeta)$ forme une section du fibré vectoriel $\bigwedge^2 TX$ au-dessus des cycles $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$, qui s'annule en les points où un des champs s'annule. Or l'indice d'intersection de cette section avec la section nulle vaut par définition $c_1(X) \circ [\mathcal{A}_\pm]$. Cet indice est la somme des contributions des zéros du champs ξ et du champ $J(\zeta)$. Comme l'orientation des cycles sur les J-courbes coïncide avec l'orientation canonique de celles-ci, et que les disques D_t sont totalement réels, on s'aperçoit que la contribution du champ ξ est $\chi(\mathcal{A}_\pm)$, et celle du champ $J(\zeta)$ est le nombre normal d'Euler $\nu(\mathcal{A}_\pm) = [\mathcal{A}_\pm] \circ [\mathcal{A}_\pm] + 2\pi^\pm$. $\square$

7.2 Calculs de $[\mathcal{A}_\pm]$ et $\chi(\mathcal{A}_\pm)$

Notons $a, b, a_i, a^\pm, b^\pm, a_i^\pm$ les entiers tels que $[A] = a[v] + b[e] - \sum_{i=1}^n a_i[v_i] \in H_2(X;\mathbb{Z})$ et $[\mathcal{A}_\pm] = a^\pm[v] + b^\pm[e] - \sum_{i=1}^n a_i^\pm[v_i] \in H_2(X;\mathbb{Z})$. Ces entiers satisfont $a^+ + a^- = a$, $b^+ + b^- = b$ et

2. Ces notations sont choisies de façon à coïncider avec celles de [26] dans le cas des courbes planes, à un facteur 2 près.

$a_i^+ + a_i^- = a_i$. Notons également $n^\pm = b^\pm - 1$.

Lemme 7.2 *Quelle que soit la composante $\mathbb{R}X_i$ de $\mathbb{R}X$, $b^\pm = |n(\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i)|$, où $n(\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i)$ est le nombre d'enroulement de $\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i$. Si la courbe A est disjointe de e, alors $a^\pm = hb^\pm$; et si e est J-holomorphe et $h = -e \circ e$, alors*

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}e \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_\pm) \leq a^\pm - hb^\pm \leq a - hb - \mathrm{card}(\mathbb{R}e \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_\mp).$$

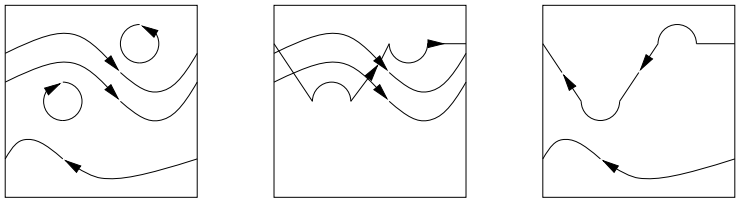
(le nombre d'enroulement est défini dans le §2.2.)

Démonstration :

Comme A est à nids profonds, dans chaque composante $\mathbb{R}X_i$ de $\mathbb{R}X$, il existe une fibre réelle v dont tous les points d'intersection avec A sont réels. Il en est donc de même pour les intersections entre v et $\mathcal{A}_\pm$. Or $[v] \circ [\mathcal{A}_\pm] = b^\pm$, $\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm$ est transverse aux fibres, et toutes les composantes de $\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm$ ont un nombre d'enroulement de même signe $\pm$; par suite, $b^\pm = |n(\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i)|$.

Si A est disjointe de e, alors $0 = \mathcal{A}_\pm \circ e = a^\pm - hb^\pm$, et si e est J-holomorphe, toutes les intersections entre e et $\mathcal{A}_\pm$ sont positives, donc $\mathrm{card}(\mathbb{R}e \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_\pm) \leq a^\pm - hb^\pm = \mathcal{A}_\pm \circ e = A \circ e - \mathcal{A}_\mp \circ e \leq a - hb - \mathrm{card}(\mathbb{R}e \cap \mathbb{R}\mathcal{A}_\mp)$.□

Notons à présent c^+ (resp. c^-) le nombre de composantes de $\mathbb{R}A$ transverses aux fibres et de nombre d'enroulement positif (resp. négatif); et notons $d^\pm$ le nombre de composantes irréductibles de $\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm$ contenant des parties réelles de disques D_t.



$\mathbb{R}A$ $\mathbb{R}\mathcal{A}_+$ $\mathbb{R}\mathcal{A}_-$

$c^+ = 2$
$c^- = 1$
$d^+ = d^- = 1$

Notons également $\mu^\pm$ (resp. $g^\pm$) le nombre de composantes connexes (resp. le genre) d'une normalisation de $\mathcal{A}_\pm$, de sorte que $\chi(\mathcal{A}_\pm) = 2\mu^\pm - 2g^\pm$.

Lemme 7.3 *Si A est une $(M-2r)$-courbe J-holomorphe réelle séparante connexe de X et $d^\pm \neq 0$, les quantités $\mu^\pm, g^\pm$ satisfont les inégalités :*

$$\mu^\pm \leq d^\pm \quad \text{et} \quad \mu^+ + \mu^- \leq \min(d^+, d^-) + 1$$

$$c^\pm \leq g^\pm + \mu^\pm - d^\pm \quad \text{et} \quad g^+ + g^- \leq c^+ + c^- + 2r + \min(d^+, d^-) - 1$$

(Si $d^\pm = 0$, un des cycles $\mathcal{A}_\pm$ est vide alors que l'autre coïncide avec A.)

Démonstration :

Puisque $d^\pm \neq 0$ et que A est connexe, chaque point de $\mathcal{A}_\pm$ peut être relié par un arc de $\mathcal{A}_\pm$ à un ovale imaginaire O_t, et donc $\mu^\pm \leq d^\pm$. En appliquant le théorème de Harnack à une normalisation de $\mathcal{A}_\pm$, on obtient $c^\pm + d^\pm \leq \mu^\pm + g^\pm$.

Enfin, enlever un ovale O_t à A a pour effet soit de disconnecter cette courbe, soit de faire diminuer son genre de un. Or si on enlève tous les ovales O_t associés à une même composante de $\mathbb{R}\mathcal{A}_+$ ou de $\mathbb{R}\mathcal{A}_-$, seul l'un d'entre eux peut disconnecter la courbe A, de sorte que $\mu^+ + \mu^- \leq \min(d^+, d^-) + 1$.

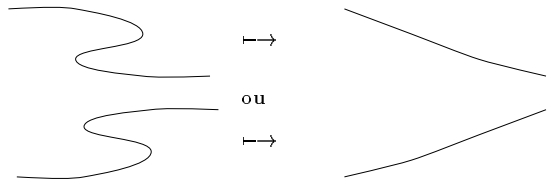
D'après l'additivité de la caractéristique d'Euler, $\chi(\mathcal{A}_+)+\chi(\mathcal{A}_-)-2T = \chi(A)$, c'est-à-dire $\mu^+ + \mu^- - g^+ - g^- - T = 1 - g(A)$, d'où $g^+ + g^- = (g(A)+1) - T - 2 + \mu^+ + \mu^- \leq c^+ + c^- + 2r + \min(d^+, d^-) - 1$. □

Si X n'a pas de fibre singulière, c'est-à-dire si $n = 0$, une courbe J-holomorphe réelle à nids profonds A de X est dite *sous forme normale* si les composantes de $\mathbb{R}A$ autres que les ovales sont transverses aux fibres, et si les ovales ne sont tangents aux fibres qu'en deux points.

Lemme 7.4 *Si $n = 0$, alors le schéma réel de toute courbe J-holomorphe réelle à nids profonds de X est réalisé, quitte à modifier la structure presque-complexe de X, par une courbe sous forme normale. Si de plus chaque fibre réelle de X intersecte les composante de $\mathbb{R}A$ autres que les ovales en au moins $b-2$ points, on peut supposer que les ovales ne rencontre pas e, et alors $d^+ = d^-$ est égal au nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}X$ contenant des ovales de $\mathbb{R}A$. En particulier, si $\mathbb{R}X$ est connexe et que A est maximale avec $d^\pm \neq 0$, $\chi(\mathcal{A}_\pm) = 2 - 2c^\pm$.*

Démonstration :

Si la courbe n'est pas sous forme normale, elle possède des "zig-zags". Quitte à déplacer la courbe par une isotopie fibrée de la surface, on peut supposer que les zig-zags sont "petits", c'est-à-dire voisins d'une fibre réelle. Procédons alors de la même façon que dans la proposition 3.5.1 de [26] : localement, dans un voisinage de ce zig-zag, la courbe est conjuguée par un difféomorphisme équivariant au modèle $y = x^3 - \epsilon x$ de $\mathbb{C}^2$, où $\epsilon > 0$ est petit. Effectuons la chirurgie qui consiste à remplacer cette partie de la courbe par la courbe conjuguée au modèle $y = x^3 + \epsilon x$ de $\mathbb{C}^2$. En modifiant la structure presque-complexe de X dans ce voisinage, ce recollement peut être rendu J-holomorphe, et ainsi les zig-zags sont supprimés et la courbe est sous forme normale.

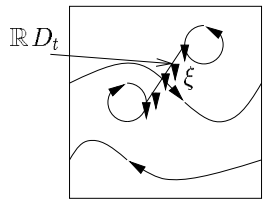


Si chaque fibre réelle de X intersecte les composante de $\mathbb{R}A$ autres que les ovales en au moins $b-2$ points, quitte à effectuer une isotopie le long des fibres, on peut également supposer que les ovales ne rencontrent pas e. Si A est alors une telle courbe, les ovales O_t relient deux à deux les ovales de $\mathbb{R}A$, donc $d^+ = d^-$ coïncide avec le nombre de composantes de $\mathbb{R}X$ contenant des ovales de $\mathbb{R}A$. Enfin, si A est de plus maximale, si $\mathbb{R}X$ est connexe et si $d^\pm \neq 0$, d'après le lemme 7.3, $\mu^\pm = d^\pm = 1$, $g^\pm = c^\pm$ et donc $\chi(\mathcal{A}_\pm) = 2 - 2c^\pm$. □

7.3 Les termes $\pi^\pm$

Dans le §7.1 sont définis les termes $\pi^\pm$ qui sont l'opposé du nombre algébrique de points doubles des cycles $\mathcal{A}_\pm$. Ces termes ne dépendent en fait que du couple orienté $(\mathbb{R}A, \mathbb{R}e)$ dans $\mathbb{R}X$.

En effet, notons R l'ensemble des points de $\mathbb{R}X$ en lesquels $\mathbb{R}A$ est tangente aux fibres réelles. Deux points de R sont dits "consécutifs" s'ils sont reliés par la partie réelle d'un disque D_t. La courbe A satisfait alors la propriété d'alternance (v. §3.2) qui peut être énoncée comme suit : soient ξ_0, ξ_1 deux vecteurs tangents à $\mathbb{R}A$ en deux points consécutifs de R, compatibles avec l'orientation de $\mathbb{R}A$. Alors il existe un champ de vecteurs ξ continu qui prolonge ces deux vecteurs, qui est défini le long de $\mathbb{R}D_t$, qui ne s'annule pas et qui est tangent aux fibres réelles.



En chaque point d'intersection x entre $\mathbb{R}D_t$ et $\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm$, distinct de R, c'est-à-dire en chaque point double de $\mathcal{A}_\pm$, l'espace tangent $T_x\mathbb{R}X$ privé de $T_x\mathbb{R}D_t$ est constitué de deux demi-plans. Posons $\epsilon(x) = +1$ si $\xi(x)$ et un vecteur tangent de $\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm$ en x sont situés dans un même demi-plan, et $\epsilon(x) = -1$ sinon. Le terme $\pi^\pm$ est alors égal à $\sum_x \epsilon(x)$, la somme étant prise sur tous les points doubles x de $\mathcal{A}_\pm$. De même, le terme π_+^+ (resp. π_-^+) est égal au nombre de points doubles de $\mathcal{A}_+$ pour lesquels ϵ est positif (resp. négatif), et le terme π_-^- (resp. π_+^-) est égal au nombre de points doubles de $\mathcal{A}_-$ pour lesquels ϵ est positif (resp. négatif). En effet, quitte à effectuer une homotopie du disque D_t dans la restriction du fibré X au-dessus de $\mathbb{R}B$, on peut supposer qu'en chaque point double x de $\mathcal{A}_\pm$, D_t est tangent à la fibre passant par x. Le signe du point double de $\mathcal{A}_+$ (resp. de $\mathcal{A}_-$) est alors $+1$ (resp. -1) si l'orientation du disque coïncide avec celle de la fibre, et -1 (resp. $+1$) sinon. Or l'orientation du disque D_t est déterminée par les vecteurs ξ_0, ξ_1, donc par le champ de vecteurs ξ, et le résultat provient d'une vérification des quatres cas pouvant se produire.

Il suit de cette nouvelle définition que les termes $\pi^\pm$ ne dépendent que du triplet $(\mathbb{R}X; \mathbb{R}A, \mathbb{R}e)$ à isotopie "fibrée" de $\mathbb{R}X$ près, c'est-à-dire à isotopie de $\mathbb{R}X$ qui commute avec la projection sur la base B. Le but de ce paragraphe est d'étudier dans quelle mesure ces termes sont invariants par isotopie quelconque de $\mathbb{R}X$ préservant $\mathbb{R}e$, et ne dépendent alors que du schéma complexe du couple $(\mathbb{R}A, \mathbb{R}e)$.

Cette étude n'est faite que dans le cas où X n'a pas de fibre singulière. La partie réelle $\mathbb{R}X$ ne contient alors que des tores ou des bouteilles de Klein. On suppose de plus que chaque fibre réelle de X intersecte les composantes de $\mathbb{R}A$ autres que les ovales en au moins $b-2$ points. D'après le lemme 7.4, on peut supposer que A est sous forme normale et que ses ovales ne rencontrent pas e.

Soit donc L une courbe orientée sous forme normale dont les ovales ne rencontrent pas e et satisfaisant la propriété d'alternance sur un tore ou une bouteille de Klein (L n'est pas nécéssairement la partie réelle d'une courbe J-holomorphe réelle). Ce tore ou cette bouteille de Klein est muni d'une structure de fibré en cercle sur S^1 et d'une section orientée $\mathbb{R}e$. Notons π le terme associé à la courbe L comme ci-dessus, qui est bien défini puisque L satisfait la propriété d'alternance. Ainsi, si $L = \mathbb{R}A$, alors $\pi = \pi^+ + \pi^-$, et si L est constituée des ovales de $\mathbb{R}A$ et des composantes de nombre d'enroulement positif (resp. négatif), alors $\pi = \pi^+$ (resp. $\pi = \pi^-$).

7.3.1 Cas des courbes dans un tore

Supposons dans ce paragraphe que la courbe L est plongée dans un tore, et munissons ce tore d'une orientation quelconque. Le complémentaire de $\mathbb{R}e$ est un cylindre qui est muni de l'orientation induite par le tore. La courbe L privée de ses ovales est une courbe à bord dans ce cylindre notée $\widetilde{L}$, et on note $\{C_{\tilde{k}} \mid \tilde{k} \in \widetilde{K}\}$ l'ensemble des composantes connexes de son complémentaire. Notons également $\tilde{l} = L \circ \mathbb{R}e$.

Lemme 7.5 *Il existe une mesure entière μ sur l'ensemble $\widetilde{K}$, c'est-à-dire une fonction $\mu : \widetilde{K} \to \mathbb{Z}$, possédant la propriété suivante : si C_1 et C_2 sont deux composantes séparées par $\widetilde{L}$, et γ est un chemin orienté transverse à $\widetilde{L}$ reliant C_1 à C_2, alors $\mu(C_2) = \mu(C_1) + 2\widetilde{L} \circ \gamma \mod (2\tilde{l})$. De plus, si μ_1 et μ_2 sont deux telles mesures, il existe une constante c telle que $\mu_2 = \mu_1 + c \mod (2\tilde{l})$.*

Démonstration :

Une telle mesure est construite en attribuant une valeur quelconque à une composante donnée $C_{\tilde{k}}$, $\tilde{k} \in \widetilde{K}$, et en respectant la règle de passage d'une composante à l'autre. Cette règle est cohérente puisque si γ_1 et γ_2 sont deux chemins reliant C_1 à C_2, on peut supposer qu'ils ont mêmes extrémités, et par suite $\gamma_1 - \gamma_2$ est un 1-cycle entier du cylindre. Comme $(\gamma_1 - \gamma_2) \circ \widetilde{L}$ est alors un multiple de $\tilde{l}$, la valeur de $\mu(C_2)$ ne dépend que de $\mu(C_1)$ et pas du chemin γ choisi. Par ailleurs, d'après cette règle de passage, si μ_1 et μ_2 sont deux mesures sur $\widetilde{K}$ données par ce lemme 7.5, il existe une constante c telle que $\mu_2 = \mu_1 + c \mod (2\tilde{l})$. □

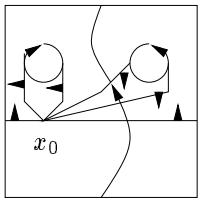
Chaque ovale de L borde un disque orienté, et cet ovale est dit positif (resp. négatif) si l'orientation de ce disque coïncide (resp. ne coïncide pas) avec l'orientation du tore. On définit alors la fonction g sur $\widetilde{K}$ en posant $g(\tilde{k})$ égal au nombre algébrique d'ovales situés dans $C_{\tilde{k}}$. Il découle de la proposition 3.1 que $\sum_{\tilde{k}} g(\tilde{k}) = 0$, ce qui peut se réinterpréter comme le fait que l'intégrale de g sur $\widetilde{K}$ muni d'une mesure constante est nulle.

Lemme 7.6 *Si μ est une mesure donnée par le lemme 7.5, alors $\int_{\widetilde{K}} g \, d\mu$ modulo $2\tilde{l}$ est indépendant du choix de μ, et :*

$$\tilde{l} + \pi = \int_{\widetilde{K}} g \, d\mu \mod (2\tilde{l}).$$

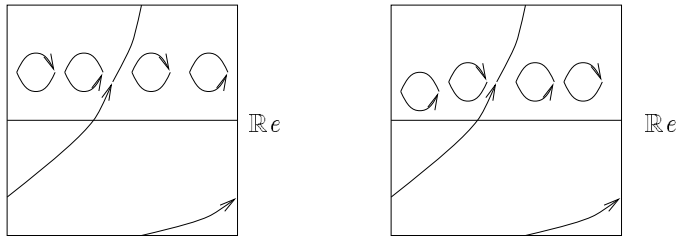
Démonstration :

Rappelons que le terme π est défini à l'aide d'une coorientation donnée sur les segments $\mathbb{R}D_t \subset \mathbb{R}X \backslash \mathbb{R}e$ reliant deux à deux les points consécutifs en lesquels L est tangente aux fibres. Ces segments réalisent donc un 1-cocycle du cylindre privé des ovales de L, et le terme π est égal à la somme des indices d'intersection $< \mathbb{R}D_t, \widetilde{L} >$. Choisissons une homotopie du cylindre $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}e$ qui vaut l'identité sur les ovales de L, et déplace chaque segment $\mathbb{R}D_t$ de façon qu'il passe par un point x_0 fixé dans une composante C_0 du complémentaire de $\widetilde{L}$.



Par chaque ovale passent alors 2 chemins reliant x_0 à cet ovale, et un chemin exceptionnel ne passe par aucun ovale et forme un lacet homologue à $\pm\mathbb{R}e$, puisque la somme de ces chemins est homologue à la somme des segments $\mathbb{R}D_t$ qui est homologue à $\pm\mathbb{R}e$ dans le groupe d'homologie du cylindre relatif aux ovales de $\widetilde{L}$. La contribution de chaque ovale à l'indice total $\sum_{t=1}^{T} < \mathbb{R}D_t, \widetilde{L} >$ est égale modulo $2\tilde{l}$ au signe de l'ovale multiplié par $\mu(C_{\tilde{k}}) - \mu(C_0)$ si cet ovale est inclus dans $C_{\tilde{k}}$. La contribution du lacet exceptionnel est égale à $\tilde{l}$. Par sommation, on en déduit le résultat. □

Il découle de ce lemme 7.6 que modulo $2\tilde{l}$, le terme π est invariant par isotopie du tore. Si $\tilde{l} = 0$, c'est donc un entier qui ne dépend que du schéma complexe de $(L, \mathbb{R}e)$, mais lorsque $\tilde{l} \neq 0$, ce n'est pas le cas comme le montre l'exemple suivant de deux courbes isotopes sur le tore, pour lesquelles π vaut ± 1 :



$\pi = +1$ $\qquad$ $\pi = -1$

Supposons à présent que L possède une composante λ de classe $s[\mathbb{R}v] + t[\mathbb{R}e] \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$, $t \neq 0$. Il existe un entier l tel que $[L] = l(s[\mathbb{R}v] + t[\mathbb{R}e]) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$.

Soit ind une fonction définie sur $\mathbb{R}X$ à valeur dans $\mathbb{Z}$ associée à un choix d'entiers $(d_k)_{k\in K}$ donné par le lemme 5.2 de la première partie, tel que $\partial(\sum d_k D_k) = l\lambda - L$, et T le nombre d'ovales de L.

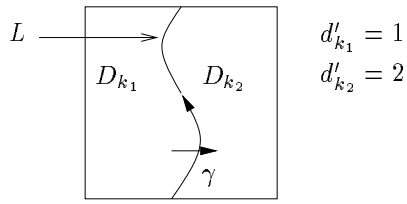
Lemme 7.7

$$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi = T + \pi + ls \mod (2l).$$

Démonstration :

Rappelons qu'avec les notations de la première partie, $\{D_k \mid k \in K\}$ désigne l'ensemble des composantes connexes du complémentaire de $L \cup \lambda = L$ dans $\mathbb{R}X$, orientées ici de façon compatible avec l'orientation du tore $\mathbb{R}X$. Définissons la famille $(d'_k)_{k\in K}$ d'entiers comme suit : si D_k n'est pas un disque, $d'_k = d_k$; sinon, le bord de D_k est un ovale de L qui borde également une autre composante $D_{k'}$ et on pose $d'_k = d_{k'}$.

La famille $(-2d'_k)_{k\in K}$ induit alors sur le cylindre $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}e$ une mesure μ' modulo $2l$ au sens du lemme 7.5. En effet, cette famille est constante sur les composantes connexes du complémentaire de $\widetilde{L}$ dans ce cylindre, et si γ est un chemin transverse à $\widetilde{L}$ reliant deux telles composantes D_{k_1} et D_{k_2}, alors $-d'_{k_2} = -d'_{k_1} + L \circ \gamma \mod (l)$ puisque $\partial(\sum d'_k D_k) = l\lambda - \widetilde{L}$.



A présent, si D_k est un disque qui borde un ovale positif (resp. négatif) de L, alors $d_k = d'_k - 1$ (resp. $d_k = d'_k + 1$), puisque par hypothèse, $\partial(\sum d_k D_k) = l\lambda - L$. Notons ind$'$ la fonction de $\mathbb{R}X$ associée aux entiers d'_k. D'après ce qui précède, $\int_{\mathbb{R}X} (\mathrm{ind}')^2 d\chi = 0$, or en développant $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi &= \int_{\mathbb{R}X} (\mathrm{ind}')^2 d\chi + T - 2 \sum_{\text{ovales de } L} (\text{signe de l'ovale}) d'_k \\ &= T + \int_{\widetilde{K}} g(\tilde{k})\, d\mu'\end{aligned}$$

Le résultat découle alors du lemme 7.6, puisque $\tilde{l} = L \circ \mathbb{R}e = ls$. $\square$

7.3.2 Cas des courbes dans une bouteille de Klein

Supposons à présent que L est plongée dans une bouteille de Klein munie d'une section $\mathbb{R}e$.

Lemme 7.8 *Soient L_1, L_2 deux courbes orientées d'une bouteille de Klein satisfaisant le principe d'alternance et sous forme normale, telles que L_2 est l'image de L_1 par une isotopie préservant $\mathbb{R}e$. Soient π_1, π_2 les termes associés à L_1 et L_2, alors $\pi_1 = \pi_2$.*

Ainsi, contrairement au cas du tore, le terme π est toujours invariant par isotopie quelconque de la bouteille de Klein préservant $\mathbb{R}e$, et est donc un entier qui ne dépend que du schéma complexe de $(L, \mathbb{R}e)$.

Démonstration :
Plutôt que de reprendre une étude analogue à la précédente, remarquons que le revêtement double d'orientation de la bouteille de Klein est un tore. La courbe L_1 se relève dans ce tore en une courbe L_1' orientée, sous forme normale, et satisfaisant la propriété d'alternance. Notons π_1 et π_1' les termes associés à L_1 et L_1' respectivement. On a $\pi_1' = 2\pi_1$, puisque chaque point d'intersection x entre $\mathbb{R}D_t$ et L_1 se relève sur le tore en deux point x_1, x_2 satisfaisant $\epsilon(x_1) = \epsilon(x_2)$, ce qui découle de la définition de ϵ (v. §7.3). Chaque isotopie de la bouteille de Klein se relève en une istopie du tore. Or la courbe L' satisfait toujours $L' \circ \mathbb{R}e = 0$, le résultat découle donc du lemme 7.6. □

Supposons enfin que L contient des composantes de nombre d'enroulement ± 2, mais aucune composante de nombre d'enroulement ± 1 (v. §2.2), et choisissons une courbe orientée λ de $\mathbb{R}X$, disjointe de L et de nombre d'enroulement $+1$. Notons l l'entier pair tel que $[L] = l[\lambda] \in H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$, et $s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'élément tel que $[\lambda] = s[\mathbb{R}v] + [\mathbb{R}e] \in H_1(\mathbb{R}X; \mathbb{Z})$. Soit $(d_k)_{k \in K}$ une famille d'entiers donnée par le lemme 5.2 de la première partie, ind la fonction définie sur $\mathbb{R}X$ à valeur dans $\mathbb{Z}$ associée, et T le nombre d'ovales de L.

Lemme 7.9

$$\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2 \, d\chi = T + \pi + ls \mod (2l).$$

Démonstration :
Choisissons un point $x_0 \notin \mathbb{R}e$ à l'intérieur de la composante non-orientable du complémentaire de $L \cup \lambda$ dans $\mathbb{R}X$. De la même façon que dans le lemme 7.7, on construit à l'aide de la famille $(d_k)_{k \in K}$ une famille $(d_k')_{k \in K}$ d'entiers qui induit une mesure μ' modulo $2l$ sur le ruban de Mœbius $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}e$. Choisissons comme dans le lemme 7.6 une homotopie du ruban de Mœbius qui vaut l'identité sur les ovales de L et déplace chaque segment $\mathbb{R}D_t$ de sorte qu'il passe par x_0. En sommant la contribution de chaque ovale à l'indice total $\pi = \sum_t < \mathbb{R}D_t, L >$ ainsi que la contribution du lacet exceptionnel homologue à $\mathbb{R}e$, on obtient la formule $ls + \pi = \int_K g(k) \, d\mu'$. Or en développant $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2 \, d\chi$ comme dans le lemme 7.7, on obtient $\int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2 \, d\chi = T + \int_K g(k) \, d\mu'$. D'où le résultat. □

8 Résultats et applications

8.1 Enoncés des résultats

Les énoncés qui suivent utilisent les notations introduites dans le §7.2. Les termes $\pi^{\pm}$ et $\mathcal{A}_{\pm}$ sont définis dans le §7.1.

Théorème 8.1 *Soit X une surface presque-complexe réglée réelle séparante éclatée en n points réels appartenant à des fibres distinctes. Soit A une courbe J-holomorphe réelle séparante connexe à nids profonds de X. Alors :*

$$2\pi^{\pm} + 2n^{\pm}a^{\pm} = b^{\pm}(\chi(B) + hn^{\pm}) - \chi(\mathcal{A}_{\pm}) + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\pm}(a_i^{\pm} - 1).$$

Rappelons qu'une section réelle e de X est fixée et que par définition, $e \circ e = -h$. Lorsque e est J-holomorphe, les termes $a^{\pm}$ peuvent être estimés à l'aide des encadrements donnés par le lemme 7.2.

Démonstration :
La classe de Chern $c_1(X)$ est duale à $(\chi(B)+h)[v]+2[e]-\sum_i[v_i]$, et $[\mathcal{A}_{\pm}]^2 = 2a^{\pm}b^{\pm} - h(b^{\pm})^2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i^{\pm})^2$. Or d'après la proposition 7.1, le cycle $\mathcal{A}_{\pm}$ satisfait une formule d'adjonction qui s'écrit ici : $2a^{\pm}b^{\pm} - h(b^{\pm})^2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i^{\pm})^2 = b^{\pm}(\chi(B) + h) + 2a^{\pm} - 2hb^{\pm} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{\pm} - \chi(\mathcal{A}_{\pm}) - 2\pi^{\pm}$. D'où le résultat. □

Corollaire 8.2 *Sous les hypothèses du théorème 8.1, on a les formules :*

$$n^-(2\pi^+ + \chi(\mathcal{A}_+)) + n^+(2\pi^- + \chi(\mathcal{A}_-)) = n^+n^-(2\chi(B) - 2a + hb)$$

$$+(b-2)\chi(B) + \sum_{i=1}^{n}\left(n^+a_i^-(a_i^- - 1) + n^-a_i^+(a_i^+ - 1)\right),$$

et si A est disjointe de e, $2\pi^{\pm} = b^{\pm}(\chi(B) - hn^{\pm}) - \chi(\mathcal{A}_{\pm}) + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\pm}(a_i^{\pm} - 1)$. □

Dans le cas où X est la surface réglée X_1, et que A relève une courbe algébrique réelle lisse séparante à nid profond de $\mathbb{C}P^2$ ne passant pas par le point éclaté, la deuxième formule de ce corollaire s'applique. Les termes $a_i^{\pm}$ sont alors nuls, et d'après le lemme 7.4, $\chi(\mathcal{A}_{\pm}) = 2 - 2c^{\pm}$. Cette deuxième formule du corollaire 8.2 coïncide donc dans ce cas avec la formule d'Orevkov (v. [26], théorème 1.5A).

Corollaire 8.3 *Sous les hypothèses du théorème 8.1, on a les congruences :*

$$2\pi^{\pm} = b^{\pm}(\chi(B) - hn^{\pm}) + 2n^{\pm}[\mathbb{R}e]\circ[\mathbb{R}\mathcal{A}_{\pm}] - \chi(\mathcal{A}_{\pm}) + \sum_{i=1}^{n} a_i^{\pm}(a_i^{\pm} - 1) \mod (4n^{\pm})$$

$$T + \pi^+ + \pi^- = (a - hb^+)b^+ - \sum_{i=1}^{n} a_i^+a_i^- + (b^+ - b^-)[\mathbb{R}e]\circ[\mathbb{R}\mathcal{A}_+] \mod (2(b^+ - b^-)).$$

Montrons que la deuxième congruence donnée par ce corollaire renforce dans le cas des courbes à nids profonds le résultat de la proposition 5.8 de la première partie.

Commençons par réécrire la congruence donnée dans la proposition 5.8 avec les notations du corollaire 8.3. Supposons donc que X n'a pas de fibre singulière, que A est sous forme normale, que chaque fibre réelle de X intersecte les composantes de $\mathbb{R}A$ autres que les ovales en au moins $b-2$ points, et qu'il existe un entier l pair, ainsi que des entiers s_i et t_i, $i \in I$, tels que $[\mathbb{R}A] = l\sum_{i\in I}(s_i[\mathbb{R}v_i] + t_i[\mathbb{R}e_i]) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ où $\mathbb{R}e_i = \mathbb{R}e \cap \mathbb{R}X_i$. Soit $\mathbb{R}X_i$ une composante de $\mathbb{R}X$ dans laquelle $\mathbb{R}A$ possède des composantes autres que des ovales. Si $\mathbb{R}X_i$ est un tore, notons λ_i une

composante de $\mathbb{R}A \cap \mathbb{R}X_i$ qui n'est pas un ovale. Si $\mathbb{R}X_i$ est une bouteille de Klein, on choisit une courbe λ_i de $\mathbb{R}X_i$ disjointe de $\mathbb{R}A$ et de nombre d'enroulement $+1$, qui existe puisque d'après le lemme 2.3, $\mathbb{R}A$ ne possède pas de telles composantes. Ces courbes sont choisies de sorte qu'il existe des entiers $(u_i)_{i\in I}$ tels que $\sum_{i\in I} u_i[\lambda_i] = \sum_{i\in I}(s_i[\mathbb{R}v_i] + t_i[\mathbb{R}e_i]) \in H_1(\mathbb{R}X;\mathbb{Z})$ (v. lemme 5.1). Soit $s = \sum_{i\in I} s_i$ et $t = t_i$, ce qui a un sens puisque t_i est indépendant de $i \in I$ (v. le lemme 5.7 de la première partie). Soit ind une fonction associée à un choix d'entiers $(d_k)_{k\in K}$ donné par le lemme 5.2 de la première partie. Alors, d'après les lemmes 7.7 et 7.9, par sommation sur les composantes $\mathbb{R}X_i$, $i \in I$, on a $T + \pi^+ + \pi^- = \int_{\mathbb{R}X} \mathrm{ind}^2\, d\chi + ls \mod (2l)$. Comme $b^+ + b^- = b$ et $b^+ - b^- = lt$, la proposition 5.8 de la première partie se réécrit :

$$T + \pi^+ + \pi^- + ls = b^-(a + hb^-) + lsb^- \mod (2l).$$

Vérifions à présent que ce résultat coïncide avec celui du corollaire 8.3. Soit $\mathbb{R}X_i$ une composante de $\mathbb{R}X$. Si $\mathbb{R}X_i$ est un tore, notons k^+ (resp. k^-) le nombre de composantes de $\mathbb{R}A \cap \mathbb{R}X_i$ homologues à $\pm\lambda_i$ et de nombre d'enroulement positif (resp. négatif). Si $\mathbb{R}X_i$ est une bouteille de Klein, notons k^+ (resp. k^-) le nombre de composantes de $\mathbb{R}A \cap \mathbb{R}X_i$ homologues à $2\lambda_i$ (resp. $-2\lambda_i$). Alors, $[\mathbb{R}e]\circ[\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i] = k^\pm s_i$ lorsque $\mathbb{R}X_i$ est un tore, et $[\mathbb{R}e]\circ[\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i] = 2k^\pm s_i$ lorsque $\mathbb{R}X_i$ est une bouteille de Klein. De même, $b^\pm = k^\pm t + 1$ (resp. $b^\pm = 2k^\pm t + 1$) lorsque $\mathbb{R}X_i$ est un tore (resp. une bouteille de Klein). Par conséquent, lorsque $\mathbb{R}X_i$ est un tore,$[\mathbb{R}e]\circ[\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i](b^+ - b^-) = k^\pm s_i lt$ et $ls_i b^\pm = ls_i k^\pm t + ls_i$; et lorsque $\mathbb{R}X_i$ est une bouteille de Klein, $[\mathbb{R}e]\circ[\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm \cap \mathbb{R}X_i](b^+ - b^-) = 2k^\pm s_i lt$ et $ls_i b^\pm = 2ls_i k^\pm t + ls_i$. Par sommation sur $i \in I$, on en déduit que la deuxième congruence donnée par le corollaire 8.3 réduite modulo $2l$ est la congruence donnée par la proposition 5.8 de la première partie.

Démonstration du corollaire 8.3 :

Remarquons que les cycles $\mathcal{A}_\pm$ et la section e sont invariants par c. Les points d'intersection imaginaires entre ces cycles sont donc couplés par deux, de sorte que $[\mathbb{R}e] \circ [\mathbb{R}\mathcal{A}_\pm] = e \circ \mathcal{A}_\pm \mod (2) = a^\pm - hb^\pm \mod (2)$. La première congruence découle de ce fait et du théorème 8.1.

Pour démontrer la deuxième congruence, sommons les formules d'adjonctions données par la proposition 7.1 :

$$[\mathcal{A}_+]^2 + [\mathcal{A}_-]^2 = c_1(X) \circ ([\mathcal{A}_+] + [\mathcal{A}_-]) - \chi(\mathcal{A}_+) - \chi(\mathcal{A}_-) - 2\pi^+ - 2\pi^-$$

Comme $[\mathcal{A}_+] + [\mathcal{A}_-] = [A]$, $\chi(\mathcal{A}_+) + \chi(\mathcal{A}_-) = \chi(A) + 2T$ et que la courbe A satisfait la formule d'adjonction usuelle $[A]^2 = c_1(X) \circ [A] - \chi(A)$, cette formule se réécrit : $[\mathcal{A}_+]^2 + [\mathcal{A}_-]^2 = [A]^2 - 2T - 2\pi^+ - 2\pi^-$, où encore :

$$\begin{aligned}
T + \pi^+ + \pi^- &= [\mathcal{A}_+] \circ [\mathcal{A}_-] \\
&= a^-b^+ + a^+b^- - hb^+b^- - \sum_{i=1}^n a_i^+ a_i^- \\
&= ab^+ + hb^+(b^- - b^+) - hb^+b^- - \sum_{i=1}^n a_i^+ a_i^- + [\mathbb{R}e] \circ [\mathbb{R}\mathcal{A}_+](b^- - b^+) \mod (2(b^- - b^+)) \\
&= (a - hb^+)b^+ - \sum_{i=1}^n a_i^+ a_i^- + [\mathbb{R}e] \circ [\mathbb{R}\mathcal{A}_+](b^- - b^+) \mod (2(b^- - b^+)). \quad \square
\end{aligned}$$

8.2 Applications

8.2.1 Courbes planes projectives

On ne rappelle pas ici les notations de schémas réels et complexes qui sont présentées en détail dans [33], $p60$.

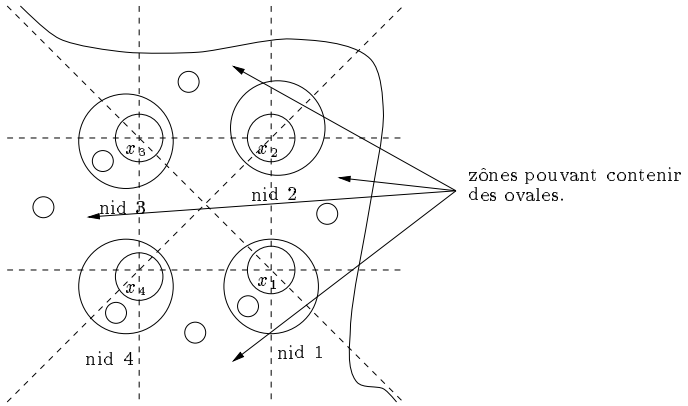
Proposition 8.4 *Si le schéma réel d'une courbe algébrique réelle non-singulière maximale de degré* 8 *de* $\mathbb{C}P^2$ *est* $< 1 \sqcup 1 < \alpha > \sqcup 1 < \beta >>$, *où* α *est pair et* β *impair, alors son schéma complexe est :* $< 1 \sqcup 1 < (\frac{\alpha}{2}+1)_+ \sqcup (\frac{\alpha}{2}-1)_- > \sqcup 1 < (\frac{\beta+1}{2})_+ \sqcup (\frac{\beta-1}{2})_- >>$

Remarque : Les schémas réels des courbes maximales de degré 8 dont on ignore à ce jour l'existence ou la non-existence sont les suivants :

$1 \sqcup 1 < 1 > \sqcup 1 < 18 >$
$1 \sqcup 1 < 4 > \sqcup 1 < 15 >$
$1 \sqcup 1 < 6 > \sqcup 1 < 13 >$
$1 \sqcup 1 < 7 > \sqcup 1 < 12 >$
$1 \sqcup 1 < 9 > \sqcup 1 < 10 >$
$4 \sqcup 1 < 2 \sqcup 1 < 14 >>$
$7 \sqcup 1 < 2 \sqcup 1 < 11 >>$
$14 \sqcup 1 < 2 \sqcup 1 < 4 >>$

S. Orevkov vient de me communiquer qu'il a réussi à construire toutes ces courbes comme des courbes flexibles réelles. Les schémas complexes de ces courbes sont donnés par la proposition 8.4 pour les cinq premières, et par le corollaire 1.5.2 de [26] pour les trois dernières (ce corollaire 1.5.2 de [26] est une conséquence de la formule d'Orevkov). La proposition 8.4 découle d'un résultat plus général sur les courbes à deux nids, et est démontrée en annexe A.

Soit à présent A une courbe algébrique réelle lisse séparante de degré $4k+1$ de $\mathbb{C}P^2$, telle que $\mathbb{R}A$ possède quatre nids de profondeur k. Fixons un point x_i au centre de chaque nid, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, et considérons le pinceau de coniques passant par ces points. Fixons une orientation de la base $\mathbb{R}P^1$ de ce pinceau, ainsi qu'une orientation complexe de $\mathbb{R}A$. Notons k_i^+ (resp. k_i^-) le nombre d'ovales non-vides du i^{eme} nid de $\mathbb{R}A$ de nombre d'enroulement $+2$ (resp. -2) dans ce pinceau, de sorte que $k_i^+ + k_i^- = k-1$. Une paires d'ovales orientés emboités est dite *positive* si elle borde un anneau orienté de $\mathbb{R}P^2$, et *négative* sinon. Notons enfin π_-^+ (resp. π_+^-) le nombre de paires positives d'ovales emboités dont l'ovale extérieur est positif (resp. négatif), et l'ovale intérieur vide ; et de même, notons π_+^+ (resp. π_-^-) le nombre de paires négatives d'ovales emboités dont l'ovale extérieur est positif (resp. négatif), et l'ovale intérieur vide.



Théorème 8.5 *Soit $A \subset \mathbb{C}P^2$ une courbe algébrique réelle lisse séparante de degré $4k+1$, telle que $\mathbb{R}A$ possède quatre nids de profondeur k. Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\pi_-^+ - \pi_+^+ = \sum_{i=1}^{4} (k_i^+)^2 - r^+$$

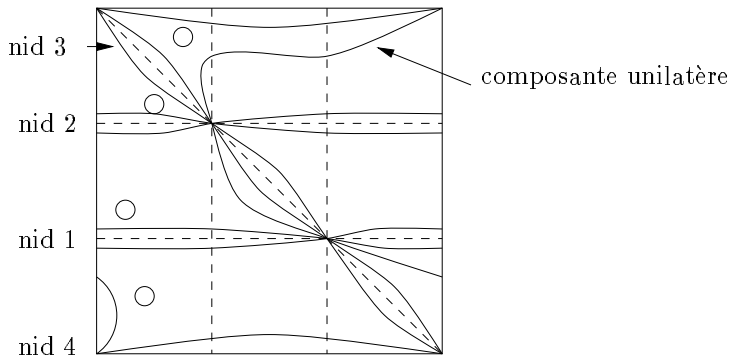
$$\pi_+^- - \pi_-^- = \sum_{i=1}^{4} (k_i^-)^2 - r^-$$

où $r^+, r^- \geq 0$, et $r^+ + r^- = r$.

Remarque : Dans le cas des courbes de degré 9 ayant quatre nids de profondeur 2, il découle des résultats de S. Fiedler [8] que pour chaque $i \in \{1, \ldots, 4\}$, $(\pi_-^+)_i - (\pi_+^+)_i = (k_i^+)^2$, et $(\pi_+^-)_i - (\pi_-^-)_i = (k_i^-)^2$. Le théorème 8.5 ne donne dans ce cas que la somme de ces quatre égalités.

Démonstration :

Notons K_i^+ (resp. K_i^-) le nombre total d'ovales du i^{eme} nid de $\mathbb{R}A$ de nombre d'enroulement $+2$ (resp. -2) dans le pinceau, de sorte que $K_i^+ + K_i^- = k$. De même, notons Π_-^+ (resp. Π_+^-) le nombre de paires injectives positives d'ovales dont l'ovale extérieur est positif (resp. négatif), et l'ovale intérieur ne contient pas de point x_i dans son intérieur ; et Π_+^+ (resp. Π_-^-) le nombre de paires injectives négatives d'ovales dont l'ovale extérieur est positif (resp. négatif), et l'ovale intérieur ne contient pas de point x_i dans son intérieur. Notons $\Pi^+ = \Pi_+^+ - \Pi_-^+$, et $\Pi^- = \Pi_-^- - \Pi_+^-$. Considérons la surface réglée réelle séparante (X, c) obtenue après éclatements des quatre points x_i fixés aux centres des nids. Cette surface contient trois fibres singulières.



$\mathbb{R}X$ après contraction d'une composante de chaque fibre singulière.

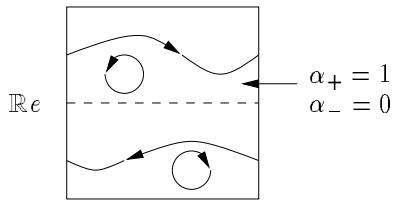
Les ovales de $\mathbb{R}A$ ne contenant pas de points x_i dans leur intérieur ne peuvent se situer que dans quatre des douze régions du complémentaire dans $\mathbb{R}P^2$ des six droites joignant deux à deux les points x_i. En considérant les pinceaux de droites centrés en les points x_i, et en appliquant le principe d'alternance, on s'aperçoit que le nombre algébrique d'ovales situés dans la région séparant le i^{eme} nid du $(i+1)^{eme}$ vaut $\frac{1}{2}((K_i^+ - K_i^-) - (K_{i+1}^+ - K_{i+1}^-)) = K_i^+ - K_{i+1}^+ = K_{i+1}^- - K_i^-$. Appliquons la deuxième formule donnée par le corollaire 8.2 en choisissant comme section e le diviseur exceptionnel situé au-dessus de x_4. Cette section est en effet disjointe de A. On a $b^\pm = 2\sum_{i=1}^4 K_i^\pm + 1$, $n^\pm = 2\sum_{i=1}^4 K_i^\pm$, $\chi(B) = 2$, $h = 1$, $a_1^\pm = K_2^\pm + K_3^\pm$, $a_2^\pm = K_1^\pm + K_3^\pm$, $a_3^\pm = K_1^\pm + K_2^\pm$, et en procédant comme dans le lemme 7.4, on peut supposer que $\chi(\mathcal{A}_\pm) = 2 - 2\sum_{i=1}^4 K_i^\pm - 4r^\pm$.

Le membre de gauche dans l'égalité donnée par le corollaire 8.2 vaut $-4K_1^\pm - 4K_2^\pm - 4K_3^\pm + 8K_1^\pm(K_1^\pm - K_4^\pm) + 8K_2^\pm(K_2^\pm - K_4^\pm) + 8K_3^\pm(K_3^\pm - K_4^\pm) + 4\Pi^\pm$. Le membre de droite de cette égalité

vaut, après simplification, $4(K_1^\pm)^2+4(K_2^\pm)^2+4(K_3^\pm)^2-4(K_4^\pm)^2-8K_4^\pm(K_1^\pm+K_2^\pm+K_3^\pm)+4K_4^\pm-4r^\pm$. On en déduit que $-\Pi^\pm = \sum_{i=1}^4 K_i^\pm(K_i^\pm - 1) - r^\pm$, et donc que $-\pi^\pm = \sum_{i=1}^4 (k_i^\pm)^2 - r^\pm$. □

8.2.2 Courbes sur les surfaces réglées

Proposition 8.6 *Soit X une surface réglée réelle séparante de base B (sans fibre singulière), telle que $\mathbb{R}X$ est un tore. Soit A une courbe J-holomorphe réelle maximale de X disjointe d'une section réelle e de X, et telle que $v \circ A = 4$ où v est une fibre de X. Supposons que $\mathbb{R}A$ contienne une composante de nombre d'enroulement $+1$ et une composante de nombre d'enroulement -1. Chaque ovale se situant dans le cylindre de $\mathbb{R}X$ bordé par $\mathbb{R}e$ et la composante de nombre d'enroulement positif sépare ce cylindre en un disque et un cylindre troué. Notons α_+ (resp. α_-) le nombre d'ovales pour lesquels il existe (resp. n'existe pas) une orientation du cylindre troué qui induit sur son bord les orientations de l'ovale et de la composante de nombre d'enroulement positif. Alors, on a $\alpha_- - \alpha_+ = \frac{1}{2}(\chi(B) - h)$, où $h = -e \circ e$.*



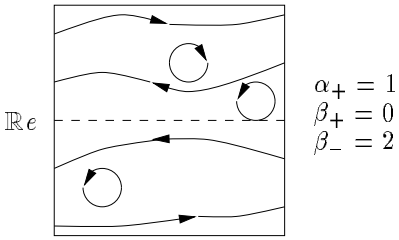
Démonstration :

Appliquons la deuxième formule du corollaire 8.2. Le membre de gauche vaut $4(\alpha_- - \alpha_+)$. Or $b^+ = b^- = 2$, $a_i^\pm = 0$, et d'après le lemme 7.4, $\chi(\mathcal{A}_\pm) = 2 - 2 = 0$. Par conséquent, le membre de droite vaut $2(\chi(B) - h)$, d'où le résultat. □

Pour les surfaces pour lesquelles la partie réelle est une bouteille de Klein, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 8.7 *Soit X une surface réglée réelle séparante de base B (sans fibre singulières), telle que $\mathbb{R}X$ est une bouteille de Klein. Soit A une courbe J-holomorphe réelle maximale de X disjointe d'une section réelle e et telle que $v \circ A = 6$ où v est une fibre de X. Supposons que $\mathbb{R}A$ contienne une composante de nombre d'enroulement $+2$ et une composante de nombre d'enroulement -2. Alors son schéma complexe est $< \gamma \sqcup 1 < \beta_+ \sqcup \beta_- \sqcup 1_+ < \alpha_+ \sqcup \alpha_- >>>$, avec $\alpha_+ - \alpha_- = \frac{3}{2}(1 - h - g(B))$ et $\beta_+ - \beta_- = 3(h - 1 + g(B))$.*

Dans la proposition 8.7, les notations de schémas complexes sont les notations usuelles après avoir contracté la section $\mathbb{R}e$ de la bouteille de Klein.



Démonstration :

Appliquons la deuxième formule du corollaire 8.2. D'après le lemme 7.4, $\chi(\mathcal{A}_\pm) = 2 - 2 = 0$, cette formule fournit donc les égalités : $4(\alpha_- - \alpha_+) + 4(\beta_- - \beta_+) = 3(\chi(B) - 2h)$, et $4(\alpha_+ - \alpha_-) = 3(\chi(B) - 2h)$. On en déduit que $\beta_- - \beta_+ = \frac{3}{2}(\chi(B) - 2h)$, et $\alpha_+ - \alpha_- = \frac{3}{4}(\chi(B) - 2h)$. □

9 Inégalités supplémentaires

Dans cette partie, nous construisons des revêtements doubles ramifiés en les cycles $\mathcal{A}_\pm$ définis au §7.1 (après quelques éclatements de ces cycles), et obtenons des inégalités en étudiant le second groupe d'homologie réelle de ces revêtements. Pour alléger les notations, fixons un signe $\eta \in \{\pm\}$, et notons $\mathcal{A}$ le cycle $\mathcal{A}_\eta$. De même, lorsque les groupes d'homologies seront à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous omettrons de mentionner ce groupe de coefficients.

Les rédactions des §3.2, 3.3 et 3.4 sont inspirées de [37], [14] et [38] respectivement. Par ailleurs, la méthode que nous utilisons ici est analogue à celle déjà utilisée par Rokhlin [29], Arnol'd [1] (voir aussi le survey [37]), et Viro [32].

9.1 Construction d'un revêtement double ramifié Y en $\widetilde{\mathcal{A}}$

Notons N_+ (resp. N_-) le nombre de points doubles positifs (resp. négatifs) de $\mathcal{A}$, et $N = N_+ + N_-$ le nombre total de points doubles. Remarquons que si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$ (resp. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_-$), alors avec les notations du §7.1, $N_+ = \pi_-^+$ (resp. $N_+ = \pi_+^-$) et $N_- = \pi_+^+$ (resp. $N_- = \pi_-^-$).

Soit $\widetilde{X}$ l'éclatement de X en les N points doubles de $\mathcal{A}$. Supposons à présent que les disques D_t construits au §7.1 ont été choisis de sorte qu'ils soient *tangents aux fibres en chaque point double.* De cette façon, la transformée stricte $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ est une surface de $\widetilde{X}$ ayant pour seules singularités des plis. La structure presque-complexe J et l'involution c_X se relèvent en une structure presque-complexe sur $\widetilde{X}$ et une structure réelle $c_{\widetilde{X}}$ pour laquelle $\widetilde{\mathcal{A}}$ est invariant.

L'objet de ce paragraphe est de construire un revêtement double Y de $\widetilde{X}$ ramifié en $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur lequel $c_{\widetilde{X}}$ se relève. Un tel revêtement n'existe que sous des hypothèses supplémentaires, comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 9.1 *S'il existe un revêtement double de $\widetilde{X}$ ramifié en $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur lequel $c_{\widetilde{X}}$ se relève, alors les classes d'homologies de $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ sont nulles dans $H_2(\widetilde{X})$ et $H_1(\mathbb{R}\widetilde{X})$ respectivement. Réciproquement, si ces deux classes d'homologies sont nulles, un tel revêtement double existe.*

Démonstration :
L'existence d'un tel revêtement Y équivaut à l'existence d'un élément de $H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})$ invariant par $c_{\widetilde{X}}$ et dont le bord est $[\widetilde{\mathcal{A}}] \in H_2(\widetilde{X})$, ce qui justifie que la condition $[\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_2(\widetilde{X})$ est nécéssaire. Par ailleurs, l'involution $c_{\widetilde{X}}$ se relève en deux involutions c_+, c_- qui diffèrent l'une de l'autre par l'automorphisme du revêtement. Les ensembles des points fixes de ces involutions sont notés Y_+ et Y_- respectivement, ils sont stables par l'automorphisme du revêtement et leur projection dans $\mathbb{R}\widetilde{X}$ a pour bord $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$, ce qui justifie que la seconde condition est également nécéssaire.

Le fait que dans le cas des surfaces réglées, ces conditions sont suffisantes, est donné par le lemme 9.2. □

Lemme 9.2 *Soit $\widetilde{\mathcal{A}}$ un 2-cycle entier dans une surface réglée séparante $(\widetilde{X}, c_{\widetilde{X}})$. On suppose que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est stable par $c_{\widetilde{X}}$, et que les classes d'homologies de $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ sont nulles dans $H_2(\widetilde{X})$ et $H_1(\mathbb{R}\widetilde{X})$ respectivement. Alors il existe un 2-cycle entier E, ainsi qu'une 3-chaîne entière H dans $\widetilde{X}$, tous deux stables par $c_{\widetilde{X}}$, tels que $\partial H = \widetilde{\mathcal{A}} - 2E$.*

Démonstration :
On peut supposer que $\widetilde{X}$ n'a pas de fibre singulière. En effet, en contractant des diviseurs exceptionnels, chaque surface réglée se ramène à une surface sans fibre singulière. Si le résultat est démontré pour ce type de surfaces, il l'est dans les surfaces réglées quelconques pour les cycles $\widetilde{\mathcal{A}}$

n'intersectant pas les diviseurs exceptionnels (en relevant les homologies construites). Or, on peut toujours se ramener à ce cas : chaque 2-cycle qui intersecte un diviseur exceptionnel (ici nécéssairement en un nombre pair de points), est homologue à un 2-cycle n'intersectant pas le diviseur exceptionnel moins un multiple (nécéssairement pair ici) du diviseur exceptionnel, l'homologie pouvant être choisie invariante par $c_{\widetilde{X}}$. En effet, ceci se vérifie localement et provient du fait que c'est le cas dans $\overline{\mathbb{C}P}^2$ privé d'un point.

Supposons donc que $\widetilde{X}$ n'a pas de fibre singulière, et fixons un difféomorphisme entre $(\widetilde{X}\backslash e, c_{\widetilde{X}})$, où e est une section réelle fixée de X, et un fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{R}$ au-dessus de B muni d'un endomorphisme involutif c. En particulier, la section nulle de ce fibré correspond à une section différentiable $\tilde{e}$ de $\widetilde{X}$, stable par $c_{\widetilde{X}}$, et satisfaisant $\tilde{e} \circ e = 0$.

Notons alors $\widetilde{H} = \{tx \,|\, t \in [0,1],\, x \in \widetilde{\mathcal{A}}\}$, qui est compact si l'on convient que lorsque $x \in \widetilde{\mathcal{A}} \cap e$, l'ensemble $\{tx \,|\, t \in [0,1]\}$ est toute la fibre associée, comptée avec multiplicité. Ce complexe $\widetilde{H}$ est de dimension 3, stable par c, et son bord est constitué de $\widetilde{\mathcal{A}}$ moins un multiple pair de $\tilde{e}$ et la somme des fibres passant par les points d'intersection de e avec $\widetilde{\mathcal{A}}$ (comptées avec multiplicités). Or dans chaque composante de $\mathbb{R}\widetilde{X}$ est contenu un nombre pair de telles fibres, puisque par hypothèse $[\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}] = 0$. Ces fibres sont donc homologues à un multiple pair d'une fibre réelle, l'homologie pouvant être choisie invariante par c. De même, les fibres imaginaires sont couplées par deux avec c, et sont donc homologues à un multiple pair d'une fibre réelle, l'homologie pouvant également être choisie invariante par c. L'homologie totale H construite convient, le cycle E étant constitué de la demi-somme des fibres réelles, et d'un multiple de $\tilde{e}$. $\square$

9.2 Décomposition de $H_2(Y;\mathbb{R})$

Supposons à présent que $[\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_2(\widetilde{X})$, et que $[\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}] = 0 \in H_1(\mathbb{R}\widetilde{X})$, et notons Y le revêtement double de $\widetilde{X}$ ramifié en $\widetilde{\mathcal{A}}$ construit au §9.1. Par construction, $c_{\widetilde{X}}$ se relève en deux involutions c_+ et c_- sur Y qui commutent. Ces involutions préservent l'orientation de Y et induisent donc une décomposition de $H_2(Y;\mathbb{R})$ en huit sous-espaces deux à deux orthogonaux ${}_{\pm 1}E^{\pm}_{\pm 1}$, notés de façon que, par exemple, l'espace ${}_{-1}E^{+}_{1}$ est un sous-espace maximal de $H_2(Y;\mathbb{R})$ sur lequel la forme d'intersection se restreint en une forme définie positive, l'involution c_+ agit comme l'identité, et l'involution c_- comme moins l'identité.

L'objet de ce paragraphe est de calculer les dimensions de ces sous-espaces. Notons Y_+, Y_- les ensembles des points fixes de c_+ et c_- respectivement. Ces parties sont stables par l'involution du revêtement, leurs projections dans $\widetilde{X}$, notées $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ et $\mathbb{R}\widetilde{X}_-$ ont pour réunion $\mathbb{R}\widetilde{X}$, et pour intersection $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$. Soit ξ le champ de vecteurs non nuls défini sur $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ de sorte qu'en dehors de $\cup_t s_t$, ξ est tangent à $\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}}$ et compatible avec son orientation, et sur $\cup_t s_t$, le champ est prolongé en un champ tangent aux fibres réelles (le fait que le champ se recolle est la propriété d'alternance).

Notons alors $\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$ (resp. $\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_-)$) la somme des indices des zéros du champ ξ prolongé à $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ (resp. $\mathbb{R}\widetilde{X}_-$). Notons également $\chi^1_\pm = 2\chi(B) - \chi(\mathcal{A}) - 2\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_\pm)$, et $\chi^2_\pm = 2\chi(\mathbb{R}\widetilde{X}_\pm) - \frac{1}{2}\mathcal{A}\circ\mathcal{A}$.

Proposition 9.3 *Les dimensions des huit sous-espaces ${}_{\pm 1}E^{\pm}_{\pm 1}$ sont:*

$$\dim({}_{+1}E^{+}_{+1}) = \dim({}_{+1}E^{-}_{+1}) = 0\,,\ \dim({}_{-1}E^{+}_{-1}) = 1\,,\ \dim({}_{-1}E^{-}_{-1}) = N + n + 1,$$

$$\dim({}_{-1}E^{+}_{+1}) = \frac{1}{4}\big(2N_+ + \chi^1_+ + \chi^2_+ + 2h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\big),$$

$$\dim({}_{+1}E^{+}_{-1}) = \frac{1}{4}\big(2N_+ + \chi^1_- + \chi^2_- + 2h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})\big),$$

$$\dim({}_{-1}E^{-}_{+1}) = \frac{1}{4}\big(\chi^1_- - \chi^2_- + 2h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) - 2N_+\big),$$

$$\dim({}_{+1}E^{-}_{-1}) = \frac{1}{4}\big(\chi^1_+ - \chi^2_+ + 2h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) - 2N_+\big),$$

où $h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \geq 0$ *et* $h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) + h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \leq 4\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - 2\mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 2.$

Corollaire 9.4

$$-\chi^1_\pm - \chi^2_\pm - 2h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \leq 2N_+ \leq \chi^1_\pm - \chi^2_\pm + 2h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}). \square$$

Remarque : L'espace $H_1(Y;\mathbb{R})$ (resp. $H_3(Y;\mathbb{R})$) se décompose en une somme directe orthogonale $H_1^+(Y;\mathbb{R}) \oplus H_1^-(Y;\mathbb{R})$ (resp. $H_3^+(Y;\mathbb{R}) \oplus H_3^-(Y;\mathbb{R})$) des sous-espaces associés aux valeurs propres $+1$ et -1 de l'involution du revêtement. En fait, $h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) = \dim(H_1^-(Y;\mathbb{R})) \pm tr(c_+|H_1^-(Y;\mathbb{R}))$. Lorsque la base B est une sphère et que $\mathcal{A}$ est connexe, $h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) = 0$. Par ailleurs, rappelons que $\mu(\widetilde{\mathcal{A}})$ désigne le nombre de composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Nous donnons à présent deux lemmes qui seront utiles dans la démonstration de la proposition 9.3 . Ces lemmes fournissent quelques calculs préliminaires concernant le revêtement Y.

Lemme 9.5

$$\chi(Y_+) = 2\chi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$$

$$b_2(Y) = 2(N+n) - \chi(\mathcal{A}) + 2b_1(Y) - 2 + 4\chi(B)$$

$$\sigma(Y) = -2n - \frac{1}{2}\mathcal{A}\circ\mathcal{A} - 2N_-$$

$$\sigma_{c_+}(Y) = -2\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$$

Démonstration du lemme 9.5 :

D'après la dualité de Poincaré, $b_1(Y) = b_3(Y)$, et $b_0(Y) = b_4(Y) = 1$. Par conséquent, $b_2(Y) = \chi(Y) - 2 + 2b_1(Y)$ et les deux premières formules découlent de l'additivité de la caractéristique d'Euler qui fournit les relations $\chi(Y_+) = 2\chi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$, $\chi(Y) = 2\chi(\widetilde{X}) - \chi(\mathcal{A})$, et $\chi(\widetilde{X}) = \chi(X) + N = N + n + 4 - 4g(B)$.

Les deux dernières relations sont données par la formule d'Atiyah-Singer-Hirzebruch appliquée à l'automorphisme du revêtement et c_+ respectivement. En effet, cette formule fournit les relations : $\sigma(Y) = 2\sigma(\widetilde{X}) - \frac{1}{2}(\widetilde{\mathcal{A}}\circ\widetilde{\mathcal{A}})_{\widetilde{X}}$ et $\sigma_{c_+}(Y) = Y_+\circ Y_+$. Or $\sigma(\widetilde{X}) = -n - N$, et $\widetilde{\mathcal{A}}\circ\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\circ\mathcal{A} - 4N_+$.

Enfin, $Y_+\circ Y_+ = -2\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$, ce qui peut se vérifier en effectuant un calcul géométrique de ce nombre d'intersection : prolongeons le champ ξ en un champ de classe C^1 tangent à $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$. Le champ $J(\xi)$ se relève en un champ normal à la surface Y_+. L'indice $Y_+\circ Y_+$ vaut alors l'indice des zéros de ce champ de vecteurs (vu comme section du fibré normal de Y_+ dans Y), c'est-à-dire deux fois l'indice des zéros du champ $J(\xi)$ sur $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ (vu comme section du fibré normal de $\mathbb{R}\widetilde{X}_+$ dans $\widetilde{X}$). Or ce dernier indice vaut $-\chi_\xi(\mathbb{R}\widetilde{X}_+)$. $\square$

Lemme 9.6

$$\dim(H_1^+(Y;\mathbb{R})) = \dim(H_3^+(Y;\mathbb{R})) = 2g(B)$$

$$\dim(H_1^-(Y;\mathbb{R})) = \dim(H_3^-(Y;\mathbb{R})) \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1$$

et

$$tr(c_+|H_1^+(Y;\mathbb{R})) = tr(c_+|H_3^+(Y;\mathbb{R})) = 0$$

Démonstration du lemme 9.6 :

Le transfert $p^* : H_*(\widetilde{X};\mathbb{R}) \to H_*(Y;\mathbb{R})$ identifie $H_1^+(Y;\mathbb{R})$ (resp. $H_3^+(Y;\mathbb{R})$) avec $H_1(\widetilde{X};\mathbb{R})$ (resp. $H_3(\widetilde{X};\mathbb{R})$). Or $b_1(\widetilde{X}) = b_3(\widetilde{X}) = 2g(B)$, et $tr(c_{\widetilde{X}}|H_1(\widetilde{X};\mathbb{R})) = tr(c_{\widetilde{X}}|H_3(\widetilde{X};\mathbb{R})) = tr(c_B|H_1(B;\mathbb{R})) = 0$, cette dernière égalité provenant de la formule des points fixes de Lefschetz appliquée à c_B.

Par ailleurs, la formule des coefficients universels fournit $\dim_{\mathbb{R}}(H_1(Y;\mathbb{R})) \leq \dim(H_1(Y))$. La suite exacte de Smith appliquée à l'involution du revêtement s'écrit :

$$\cdots \xrightarrow{\gamma} H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \oplus H_1(\widetilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\alpha} H_1(Y) \xrightarrow{\beta} H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \to H_0(\widetilde{\mathcal{A}}) \to H_0(\widetilde{X}) \to 0$$

Par conséquent,

$$\dim(H_1(Y)) \quad = \quad 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) + \dim(H_1(\widetilde{\mathcal{A}})) - \dim Im(\gamma) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1$$

Or $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ où $\gamma_2 : H_2(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \to H_1(\widetilde{\mathcal{A}})$ est le morphisme de bord. Le lemme provient alors de l'inégalité $\dim Im(\gamma) \geq \dim Im(\gamma_2)$, puisque $\dim(H_1(\widetilde{\mathcal{A}})) - \dim Im(\gamma_2) \leq \dim H_1(\widetilde{X})$. $\square$

Remarque : Dans la démonstration, on a vu que $\dim(H_1(Y)) \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1 + 2g(B)$. Il en découle que $\dim(TorsH_1(Y;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1$, ce qui sera utile dans la suite.

Démonstration de la proposition 9.3 :

Le transfert identifie la partie de $H_2(Y;\mathbb{R})$ stable par l'automorphisme du revêtement avec $H_2(\widetilde{X};\mathbb{R})$. Le calcul des quatres premières dimensions découle donc du fait que $c_{\widetilde{X}}$ agit comme moins l'identité sur $H_2(\widetilde{X};\mathbb{R})$ et que $b_2^+(\widetilde{X}) = 1$, $b_2^-(\widetilde{X}) = N + n + 1$.

Les autres formules découlent des relations suivantes :

$$\dim({}_{-1}E_{+1}^+) + \dim({}_{-1}E_{+1}^-) + \dim({}_{+1}E_{-1}^+) + \dim({}_{+1}E_{-1}^-) + N + n + 2 = b_2(Y)$$

$$\dim({}_{-1}E_{+1}^+) - \dim({}_{-1}E_{+1}^-) + \dim({}_{+1}E_{-1}^+) - \dim({}_{+1}E_{-1}^-) - N - n = \sigma(Y)$$

$$\dim({}_{-1}E_{+1}^+) - \dim({}_{-1}E_{+1}^-) - \dim({}_{+1}E_{-1}^+) + \dim({}_{+1}E_{-1}^-) + N + n = \sigma_{c_+}(Y)$$

$$\dim({}_{-1}E_{+1}^+) + \dim({}_{-1}E_{+1}^-) - \dim({}_{+1}E_{-1}^+) - \dim({}_{+1}E_{-1}^-) - N - n - 2 = \chi(Y_+) - 2 + tr(c_+|H_1(Y;\mathbb{R}) \oplus H_3(Y;\mathbb{R}))$$

(la dernière relation est la formule des points fixes de Lefschetz appliquée à l'involution c_+).

Remarquons que, puisque c_+ préserve la forme d'intersection et que celle-ci est non-dégénérée, $tr(c_+|H_1(Y;\mathbb{R})) = tr(c_+|H_3(Y;\mathbb{R}))$. Par ailleurs, les membres de droite des quatre relations précédentes ont été calculés dans le lemme 9.5. Pour terminer la démonstration de la proposition 9.3, il suffit donc de résoudre le système d'équations précédent, et d'utiliser les estimations données par le lemme 9.6. En effet, d'après ce lemme, $b_1(Y) \pm tr(c_+|H_1(Y;\mathbb{R})) = 2g(B) + h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})$, avec

$$h_\pm(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) = \dim(H_1^-(Y;\mathbb{R})) \pm tr(c_+|H_1^-(Y;\mathbb{R})),$$

et ces quantités sont positives et satisfont l'inégalité :

$$h_+(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) + h_-(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}) \leq 4\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}})) - 2\mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 2. \ \square$$

9.3 Les formes quadratiques f^ϵ.

Notons $\widetilde{S}$ la réunion des diviseurs exceptionnels situés au-dessus des points doubles de $\mathcal{A}$, et $S = p^{-1}(\widetilde{S})$. Notons $D_\epsilon^1, \ldots, D_\epsilon^m$ les composantes connexes de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$, telles que les adhérences des surfaces $p^{-1}(D_\epsilon^i)$ de Y associées soient orientables. Les adhérences des surfaces $p^{-1}(D_\epsilon^i)$ sont notées $\mathcal{D}_\epsilon^i$, leurs bords sont des réunions de cercles, chacun plongé dans une sphère de S de sorte qu'il sépare cette sphère en deux demi-sphères canoniquement orientées (comme revêtements doubles des diviseurs exceptionnels de $\widetilde{X}$ ramifiés en deux points).

Munissons $\mathcal{D}_\epsilon^i$ d'une orientation quelconque, et recollons à son bord la réunion des demi-sphères (munies de leur orientation canonique) induisant une orientation opposée de celle du bord, de façon à former un cycle entier dont la classe d'homologie dans $H_2(Y;\mathbb{R})$ est notée β_ϵ^i. Le projeté de β_ϵ^i sur le sous-espace propre de c_ϵ associé à la valeur propre $+1$ est alors noté α_ϵ^i, de sorte que $\alpha_\epsilon^i = \frac{1}{2}(\beta_\epsilon^i + c_\epsilon(\beta_\epsilon^i))$.

Nous allons définir une forme quadratique f^ϵ sur $\mathbb{R}^m$, et montrer dans le lemme 9.7 qu'elle correspond à la forme quadratique de Poincaré de $H_2(Y;\mathbb{R})$ dans la famille α_ϵ^i.

Soit s un point double du cycle $\mathcal{A}$ et supposons que s joint les composantes D_ϵ^i et D_ϵ^j de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon$, où $1 \leq i, j \leq m$ (éventuelement $i = j$). Posons $\delta_s = +1$ (resp. $\delta_s = -1$) si les surfaces orientées $\mathcal{D}_\epsilon^i$, $\mathcal{D}_\epsilon^j$ associées induisent une orientation opposée (resp. la même orientation) sur le cercle situé au-dessus de s, bordant $\mathcal{D}_\epsilon^i$ et $\mathcal{D}_\epsilon^j$. Définissons alors la forme quadratique f_s^ϵ sur $\mathbb{R}^m$ par $f_s^\epsilon(x_1, \ldots, x_m) = -\frac{1}{2}(x_i^2 + x_j^2) + \delta_s x_i x_j$. Dans le cas où le point double s ne borde pas deux composantes D_ϵ^i et D_ϵ^j, mais une composante D_ϵ^i et une composante de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$, n'appartenant pas à $\cup_j D_\epsilon^j$, on pose $f_s^\epsilon(x_1, \ldots, x_m) = -\frac{1}{2}x_i^2$.

Enfin, remarquons que le champ ξ défini au §9.2 s'étend à tout le bord des parties D_ϵ^i, en imposant que sur la partie commune avec $\mathbb{R}\widetilde{S}$, le champ est normal à cette partie et tangent à $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon$. On note alors $\chi_\xi(D_\epsilon^i)$ la somme des indices des zéros d'un prolongement de ξ à D_ϵ^i tout entier, et la forme quadratique f^ϵ est définie comme la somme des f_s^ϵ où s décrit l'ensemble des points doubles de $\mathcal{A}$, et de la forme diagonale $-2\sum_{i=1}^m \chi_\xi(D_\epsilon^i)x_i^2$, c'est-à-dire :

$$f^\epsilon = \sum_s f_s^\epsilon - 2\sum_{i=1}^m \chi_\xi(D_\epsilon^i)x_i^2$$

Lemme 9.7 *La forme d'intersection de Poincaré de Y dans la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1\leq i\leq m}$ est la forme f^ϵ.*

Démonstration :

Rappelons que $\alpha_\epsilon^i = \frac{1}{2}(\beta_\epsilon^i + c_\epsilon(\beta_\epsilon^i))$, de sorte que $(\alpha_\epsilon^i)^2 = \frac{1}{4}(\beta_\epsilon^i - c_\epsilon(\beta_\epsilon^i))^2 + \beta_\epsilon^i \circ c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$. Le terme $\beta_\epsilon^i - c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$ est la somme des diviseurs de carré -2 se situant au-dessus des points doubles s bordant D_ϵ^i, le diviseur étant compté deux fois si D_ϵ^i se situe de part et d'autre de s. Le terme $\beta_\epsilon^i \circ c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$ peut se calculer géométriquement: le champ $J(\xi)$ (ξ est le champ défini au §9.3) se relève en un champ normal à $\mathcal{D}_\epsilon^i$, qui s'étend en un champ normal à β_ϵ^i, dont l'indice des zéros vaut -1 sur chaque demi-sphère, et vaut $-2\chi_\xi(D_\epsilon^i)$ sur $\mathcal{D}_\epsilon^i$. En décalant ce cycle à l'aide d'un flot associé à ce champ de vecteurs, on obtient alors un cycle transverse à $c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$, et dont l'indice d'intersection avec $c_\epsilon(\beta_\epsilon^i)$ vaut $-2\chi_\xi(D_\epsilon^i)$ auquel s'ajoute deux fois le nombre de points doubles s bordant D_ϵ^i de part et d'autre et pour lesquels $\delta_s = +1$. En sommant ces contributions, on s'aperçoit donc que $(\alpha_\epsilon^i)^2$ vaut exactement $f^\epsilon(e_i)$, où e_i est le i^{eme} vecteur coordonnée de $\mathbb{R}^m$.

Pour effectuer un calcul géométrique de $\alpha_\epsilon^i \circ \alpha_\epsilon^j$ avec $i \neq j$, on décale le cycle β_ϵ^i comme précédement, de façon à le rendre transverse à β_ϵ^j. Ainsi, les seuls points d'intersections entre ces deux

cycles sont situés sur les diviseurs de carré -2 et la somme des indices est exactement la somme des δ_s où s décrit l'ensemble des points doubles bordant D_i^ϵ et D_j^ϵ, ce qui coïncide avec $f^\epsilon(e_i, e_j)$. $\square$

9.4 Résultat principal.

Notons $\sigma_+(f^\epsilon)$ (resp. $\sigma_-(f^\epsilon)$) la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathbb{R}^m$ sur lequel la forme quadratique f^ϵ définie au §9.3 ($\epsilon = \pm 1$) se restreint en une forme définie positive (resp. définie négative), et notons $\sigma_0(f^\epsilon)$ la dimension du noyau de cette forme.

Théorème 9.8 *Soit A une courbe J-holomorphe réelle séparante connexe à nids profonds de la surface presque-complexe réglée réelle séparante X. On a, en conservant les notations de la proposition 9.3, pour $\epsilon \in \{\pm\}$:*

$$\max(0, \tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)) + \sigma_+(f^\epsilon) \leq \frac{1}{4}\big(2N_+ + \chi_\epsilon^1 + \chi_\epsilon^2 + 2h_\epsilon(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})\big),$$

$$\max(0, \tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)) + \sigma_-(f^\epsilon) \leq \frac{1}{4}\big(\chi_{-\epsilon}^1 - \chi_{-\epsilon}^2 + 2h_\epsilon(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}) - 2N_+\big),$$

où $\tilde{\sigma}_0(f^\epsilon) = \sigma_0(f^\epsilon) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - 4g(B) - 1$

Remarque : Rappelons que $N_+ = \pi_-^+$ (resp. $N_+ = \pi_+^-$) si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$ (resp. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_-$). Par ailleurs, lorsque la réunion des D_ϵ^i n'est pas toute la surface $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$, le terme -1 peut être enlevé dans la définition de $\tilde{\sigma}_0(f^\epsilon)$; et lorsque la base B est une sphère, les termes $g(B)$ et $\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}))$ sont nuls.

Pour démontrer ce théorème, nous allons calculer la dimension ρ du sous-espace de $H_2(Y; \mathbb{R})$ engendré par les cycles α_ϵ^i, calcul effectué dans le lemme 9.10, puis utiliser le lemme 9.7, pour enfin conclure.

Commençons donc par donner deux lemmes préliminaires. Rappelons que $S = p^{-1}\widetilde{S}$ où $\widetilde{S}$ est la réunion des diviseurs exceptionnels de $\widetilde{X}$ situés au-dessus des points doubles de $\mathcal{A}$. L'image des cycles α_ϵ^i dans le groupe $H_2(Y, S; \mathbb{R})$, est réalisée par les surfaces $\mathcal{D}_\epsilon^i$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$), elle peut donc être considérée dans $H_2(Y, S; \mathbb{Z})$ et $H_2(Y, S)$.

Lemme 9.9 *Le rang de la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1 \leq i \leq m}$ dans $H_2(Y, S)$ est supérieur ou égal à $m - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) - 2g(B)$.*

Démonstration :
Considérons la suite exacte de Smith :

$$\cdots \to H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}) \xrightarrow{\gamma} H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}) \oplus H_2(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathcal{A}} \cap \widetilde{S}) \xrightarrow{\alpha} H_2(Y, S) \to \ldots$$

Le rang des éléments $\tilde{\alpha}_\epsilon^i$ de $H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S})$ réalisés par les parties D_ϵ^i de $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon$ est au moins $m - \mu(\widetilde{\mathcal{A}})$. En effet, l'image de ces éléments par le morphisme de bord est de rang m dans $H_1(\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}} \cup \mathbb{R}\widetilde{S})$, et en composant par le morphisme d'inclusion $H_1(\mathbb{R}\widetilde{\mathcal{A}} \cup \mathbb{R}\widetilde{S}) \to H_1(\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S})$, il ne peut apparaitre qu'un noyau de dimension inférieure à $\mu(\widetilde{\mathcal{A}})$ (et de dimension exactement $\mu(\widetilde{\mathcal{A}})$ seulement dans le cas où la réunion des parties D_ϵ^i est toute la surface $\mathbb{R}\widetilde{X}_\epsilon \setminus \mathbb{R}\widetilde{S}$).

Le résultat découle alors de l'inégalité suivante :

$$\dim\big(H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}) \cap Ker(\alpha)\big) \leq 2g(B).$$

Pour démontrer cette inégalité, écrivons $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, γ_2 étant le morphisme de bord associé à la triade $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}} \cap \widetilde{S})$. La suite exacte associée à cette triade est :

$$0 \to H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cap \widetilde{S}) \to H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}) \xrightarrow{\gamma_2} H_2(\widetilde{\mathcal{A}} \cup \widetilde{S}, \widetilde{\mathcal{A}} \cap \widetilde{S}) \to \dots$$

Donc le noyau de γ_2 est formé des éléments de $H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}} \cap \widetilde{S}) = H_3(\widetilde{X})$, et est de dimension inférieure ou égale à $2g(B)$. $\square$

Lemme 9.10 *Le rang de la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1 \leq i \leq m}$ dans $H_2(Y; \mathbb{R})$ est supérieur ou égal à $m - 1 - 4g(B) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}))$.*

Démonstration :

Les composantes S_i de S engendrent un sous-espace de $\big(H_2(Y; \mathbb{Z})/TorsH_2(Y; \mathbb{Z})\big) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimension supérieure ou égale à $N - 2g(B)$. En effet, il suffit de voir qu'ils engendrent un sous-espace de dimension supérieure ou égale à $N - 2g(B)$ dans $H_2(Y)$ puisque l'intersection de ce sous-espace avec $TorsH_2(Y; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est réduite à $\{0\}$. La suite exacte de Smith appliquée à l'involution du revêtement donne :

$$\dots \to H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\gamma} H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}) \oplus H_2(\widetilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\alpha} H_2(Y) \to \dots$$

Les diviseurs exceptionnels $\widetilde{S}_i$ sont linéairement indépendants dans $H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})$, il suffit donc de voir que $\dim\big(H_2(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}) \cap Ker(\alpha)\big) \leq 2g(B)$, ce qui se démontre de façon analogue à ce qui a été fait au lemme 9.9. En effet, $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, γ_2 étant le morphisme de bord associé à la paire $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})$, et la suite exacte associée est :

$$0 \to H_3(\widetilde{X}) \xrightarrow{\beta} H_3(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\gamma_2} H_2(\widetilde{\mathcal{A}}) \to \dots$$

Le noyau de γ_2, qui est égal à l'image de β, est donc de dimension inférieure ou égale à $2g(B)$.

En choisissant une famille d'éléments $\widetilde{S}_i$ linéairement indépendants dans $H_2(Y)$, on s'aperçoit que cette famille engendre un facteur direct dans $H_2(Y; \mathbb{Z})/TorsH_2(Y; \mathbb{Z})$. En effet, supposons le contraire et choisissons $x \in H_2(Y; \mathbb{Z})$ et $k, l_1, \dots, l_n$ des entiers premiers entre eux tels que $kx = \sum_i l_i S_i$ avec $k \neq \pm 1$. En intersectant avec les S_i, on s'aperçoit que k divise $2l_i$ quel que soit i, donc que k peut être supposé pair. On en déduit que $0 = \sum_i l_i S_i \in H_2(Y; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et puisque les éléments $\widetilde{S}_i$ sont linéairement indépendants dans $H_2(Y)$, que les entiers l_i sont pairs, ce qui est une contradiction.

Comme une telle famille d'éléments $\widetilde{S}_i$ peut être choisie de rang au moins $N - 2g(B)$, on en déduit que $\dim(Tors(H_2(Y, S; \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leq \dim(TorsH_2(Y; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) + 2g(B)$, en considérant la suite exacte $\dots \to H_2(S; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H_2(Y; \mathbb{Z}) \to H_2(Y, S; \mathbb{Z}) \to 0$ et le fait que $Im(\alpha) \cap TorsH_2(Y; \mathbb{Z}) = \{0\}$.

Par ailleurs, d'après la formule des coefficients universels,

$$TorsH_2(Y; \mathbb{Z}) = TorsH_1(Y; \mathbb{Z}),$$

et d'après la remarque qui suit le lemme 9.6, $\dim TorsH_1(Y; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leq 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1$. Ainsi, on a démontré l'inégalité :

$$\dim(Tors(H_2(Y, S; \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leq 2g(B) + 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}})) - \mu(\widetilde{\mathcal{A}}) + 1,$$

et il suit du lemme 9.9 que le rang de la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1 \leq i \leq m}$ dans $H_2(Y, S; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ est au moins $m - 1 - 4g(B) - 2\dim(H_1(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{A}}))$. Le résultat en découle. $\square$

Démonstration du théorème 9.8 :

Le sous-espace de $H_2(Y;\mathbb{R})$ engendré par la famille $(\alpha_\epsilon^i)_{1\leq i\leq m}$, isomorphe à $\mathbb{R}^\rho$ avec $\rho \geq m-1-4g(B)-2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}))$ d'après le lemme 9.10, est inclus dans le sous-espace propre ${}_{-1}E_{+1}^{+}\oplus{}_{-1}E_{+1}^{-}$ de c_ϵ associé à la valeur propre $+1$. Par conséquent, le noyau de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^\rho$ sur ${}_{-1}E_{+1}^{+}$ (resp. ${}_{-1}E_{+1}^{-}$) est inclus dans ${}_{-1}E_{+1}^{-}$ (resp. ${}_{-1}E_{+1}^{+}$), et d'après le lemme 9.7, la forme f_ϵ est définie négative (resp. définie positive) sur ce noyau. Il en découle que la dimension de l'image de cette projection est au moins $\max\big(0,\sigma_0(f^\epsilon)-2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}))-4g(B)-1\big)+\sigma_+(f^\epsilon)$ (resp. $\max\big(0,\sigma_0(f^\epsilon)-2\dim(H_1(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{A}}))-4g(B)-1\big)+\sigma_-(f^\epsilon)$), et par suite que :

$$\max(0,\tilde{\sigma}_0(f^\epsilon))+\sigma_+(f^\epsilon)\leq \dim({}_{-1}E_{+1}^{+})$$

$$\max(0,\tilde{\sigma}_0(f^\epsilon))+\sigma_-(f^\epsilon)\leq \dim({}_{-1}E_{+1}^{-})$$

Le théorème 9.8 provient alors de la proposition 9.3. □

9.5 Une application.

Théorème 9.11 *Soit A une courbe algébrique réelle maximale à nids profonds de classe $8k[v]+4[e]$ sur la surface réglée X_{2k} de base $\mathbb{C}P^1$, avec k impair (v est une fibre, et e est la section holomorphe de carré négatif $-2k$). Supposons que $\mathbb{R}A$ possède deux composantes homologues à $\pm\mathbb{R}e$. Ces deux composantes séparent le tore $\mathbb{R}X$ en deux cylindres, dont un est divisé en deux moitiés par $\mathbb{R}e$. Supposons que les ovales de $\mathbb{R}A$ se situant dans ce dernier cylindre se situent en fait dans une même moitié.*

Alors en orientant la base de sorte que la composante séparant les ovales soit de nombre d'enroulement $+1$, on a :

$$\pi_-^+\leq 2k+2$$

Démonstration du théorème 9.11 :

Appliquons ensuite le théorème 9.8 au cycle $\mathcal{A}_+$. Notons $\mathbb{R}X_+$ la moitié de $\mathbb{R}X$ formée de N disques, où N est le nombre de points doubles de $\mathcal{A}_+$. La courbe possède $12k-4$ ovales, $[\mathcal{A}_+]=4k[v]+2[e]$, $\chi_-^1=4+2N$ et $\chi_-^2=-2N-4k$. D'après le théorème 9.8, on a donc :

$$\sigma_-(f^+)\leq N+k+1-\frac{1}{2}\pi_-^+$$

Or la matrice de f^+ dans la famille associée aux N disques est de la forme (a_{ij}) avec $a_{ii}=-1$, $a_{ij}=\frac{1}{2}$ si $|i-j|=1$ et $a_{ij}=0$ sinon (on utilise ici le fait que la classe caractéristique du revêtement Y au-dessus de $\mathbb{R}\widetilde{X}$ est $[\mathbb{R}E]$ où $E=2kv+e$ est donné par le lemme 9.2). Cette forme est donc définie négative, de sorte que $\sigma_-(f^+)=N$. D'où le résultat. □

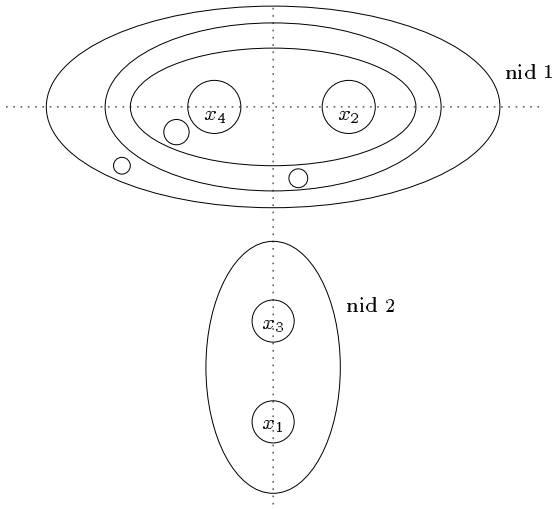
9.6 Remarque finale.

Les résultats de cette partie s'appliquent également aux J-courbes à nids profonds possédant des points réels multiples ordinaires en dehors des fibres singulières, puisqu'un éclatement en ces points rend la courbe non-singulière et que la surface reste réglée. Mieux, nous aurions pu amoindrir les hypothèses faites sur les surfaces réglées, et admettre que les fibres singulières soient des arbres quelconques de J-sphères (les énoncés des résultats auraient alors été encore plus longs). Il en découle donc que les résultats s'appliquent également à toutes les J-courbes à nids profonds dont les singularités sont réelles. Remarquons toutefois que le fait d'être à nids profonds impose de fortes conditions sur la nature de ces singularités.

Annexes.

Annexe A. Démonstration de la proposition 8.4

Soit A une $(M-2r)$-courbe algébrique réelle séparante non-singulière de degré n $d = 2k$ de $\mathbb{C}P^2$, telle que la partie réelle $\mathbb{R}A$ possède deux nids dont le premier est de profondeur $k-2$ et le second de profondeur 2. Notons k_1^- (resp. k_1^+) le nombre d'ovales non-vides du premier nid homologues (dans le premier groupe d'homologie de $\mathbb{R}P^2$ privé du centre du nid) à l'ovale extèrieur (resp. à son opposé), de sorte que $k_1^+ + k_1^- = k-3$. Supposons de plus qu'au centre de chacun de ces nids se situent deux ovales, positionnés comme sur la figure suivante :



Fixons un point x_i à l'intérieur de chacun de ces ovales, $i \in \{2,4\}$ pour le premier nid, et $i \in \{1,3\}$ pour le second, comme indiqué sur la figure ci-dessus. Pour $i \in \{2,4\}$, notons $\delta_i^- = +1$ (resp. $\delta_i^+ = +1$) si l'ovale contenant x_i dans son intérieur est homologue (dans le premier groupe d'homologie de $\mathbb{R}P^2$ privé de x_i) à l'ovale extèrieur (resp. à son opposé), et $\delta_i^- = 0$ (resp. $\delta_i^+ = 0$) sinon. Enfin, considérons le faisceau de droites centré en x_1. Notons E^- (resp. E^+) le nombre d'ovales vides situés en-dehors du deuxième nid, strictement entre x_2 et x_4, et qui sont de même signe (resp. de signe opposé) dans ce faisceau que l'ovale extérieur au premier nid.

Proposition 9.12 *Pour une telle $(M-2r)$-courbe algébrique réelle séparante A de $\mathbb{C}P^2$, on a :*

$$2(\pi_-^+ - \pi_+^+)^1 + (\pi_+^- - \pi_-^-)^2 + (E^- - E^+) = 2k_1^+(k_1^+ + 1) + \delta_2^+ + \delta_4^+ - 2r^+$$
$$2(\pi_+^- - \pi_-^-)^1 + (\pi_+^- - \pi_-^-)^2 + (E^+ - E^-) = 2k_1^-(k_1^- + 1) + \delta_2^- + \delta_4^- - 2r^-$$

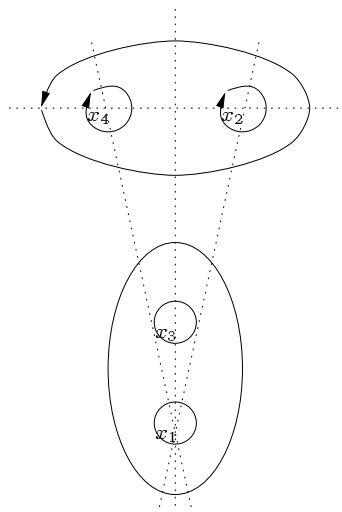
Où $0 \leq r^+, r^- \leq r$ et $r^+ + r^- = r$.

Démonstration :

Considérons le faisceau de coniques centré en les quatre points $x_1, \ldots x_4$, et éclatons ces quatre points. La surface obtenue est une surface réglée séparante X possédant trois fibres singulières et dont la base est $\mathbb{C}P^1$. Attribuons à la base $\mathbb{R}P^1$ du fibré $\mathbb{R}X$ l'orientation opposée de celle induite

par l'ovale extèrieur au nid N_1. Notons $\delta_i^+ = +1$ (resp. $\delta_i^- = +1$) si l'ovale x_i ($i \in \{1,2,3,4\}$) a un nombre d'enroulement $+2$ (resp. -2), et $\delta_i^+ = 0$ (resp. $\delta_i^- = 0$) sinon (cette définition prolonge la précédente). Choisissons comme section e du fibré le diviseur exceptionnel se situant au dessus de x_1 (en particulier $h = 1$), et appliquons la deuxième formule du corollaire 8.2. Pour calculer le membre de droite, on s'aperçoit que $n^\pm = 4k_1^\pm + 2\delta_1^\pm + 2\delta_2^\pm + 2\delta_3^\pm + 2\delta_4^\pm + 1$, que $\chi(B) = 2$, que $g^\pm = k_1^\pm + \delta_1^\pm + \delta_2^\pm + \delta_3^\pm + \delta_4^\pm + 2r_\pm$ avec $r_+ + r_- = r$ ($r_+, r_- \geq 0$), et enfin que $\{a_i^\pm \mid i \in \{1,2,3\}\} = \{2k_1^\pm + 2\delta_2^\pm + 2\delta_3^\pm + 1(\pm 1); 2k_1^\pm + 2\delta_2^\pm + 2\delta_4^\pm + 1; 2k_1^\pm + 2\delta_3^\pm + 2\delta_4^\pm + 1(\pm 1)\}$ (ces valeurs dépendent en fait de la position de l'ovale extérieur au second nid par rapport au faisceau, ce qui explique les termes entre parenthèses). Le membre de gauche se calcule directement, et vaut $2(\pi_\pm^\pm - \pi_\mp^\pm)^1 - 4k_1^\pm(2\delta_1^\pm - 1) + 4\delta_2^\pm(\delta_2^\pm - \delta_1^\pm) + 4\delta_3^\pm(\delta_3^\pm - \delta_1^\pm) + 4\delta_4^\pm(\delta_4^\pm - \delta_1^\pm) + (E^\pm - E^\mp) + (\pi_-^- - \pi_-^+)^2 + (\delta_2^\pm + \delta_4^\pm - 2\delta_1^\pm)$ (ce qui s'obtient en faisant intervenir les faisceaux de droites centrés en x_3 et x_4). $\square$

Lemme 9.13 *Une courbe satisfaisant les hypothèses de la proposition 8.4 mais n'ayant pas le schéma complexe* $< 1 \sqcup 1 < (\frac{\alpha}{2}+1)_+ \sqcup (\frac{\alpha}{2}-1)_- > \sqcup 1 < (\frac{\beta+1}{2})_+ \sqcup (\frac{\beta-1}{2})_- >>$ *possède nécéssairement quatre ovales disposés comme sur la figure suivante :*

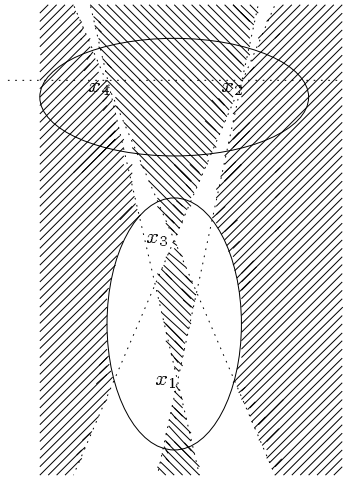


De plus, les points x_2 et x_4 sont de type β, ils séparent le faisceau de droites centré en x_1 en deux parties, et l'ovale extérieur ne se situe pas dans la même partie que x_3.

Démonstration du lemme 9.13 :

Si $\alpha_+ - \alpha_-$ est strictement supérieur à deux, on considère le faisceau de droites centré en un point intérieur à un ovale de type β. D'après la propriété d'alternance, les orientations complexes des ovales dans ce faisceau sont alternées et dans le nid contenant les ovales de type α, ce faisceau effectue forcément à deux reprises un saut entre deux ovales positifs. Comme il n'y a qu'un ovale exterieur, un de ces deux sauts est de la forme recherchée. De même, si $\alpha_+ - \alpha_-$ est strictement inférieur à deux, alors d'après la formule de Rokhlin $\beta_+ - \beta_-$ est supérieur ou égal à trois et en considérant le faisceau de droites centré en un point intérieur à un ovale de type α, on conclut de la même façon.

Pour démontrer la seconde partie du lemme, considérons le faisceau de coniques centré en les quatre points $x_1, \ldots, x_4$. D'après le théorème de Bézout, chaque conique coupe la courbe réelle en au plus seize points. Par conséquent, les ovales vides autres que $x_1, \ldots, x_4$ se situent nécessairement dans la partie hachurée :



En particulier, le faisceau de droites centré en x_1 rencontre tous les ovales de même type que x_1 entre x_2 et x_4. Ce nombre d'ovales est donc nécessairement impair, d'où le résultat. $\square$

Démonstration de la proposition 8.4 :

D'après le lemme 9.13, si le schéma complexe de la courbe donnée par la proposition 8.4 n'est pas $< 1 \sqcup 1 < (\frac{\alpha}{2}+1)_+ \sqcup (\frac{\alpha}{2}-1)_- > \sqcup 1 < (\frac{\beta+1}{2})_+ \sqcup (\frac{\beta-1}{2})_- >>$, alors cette courbe satisfait les hypothèses de la proposition 9.12. En appliquant cette proposition, on obtient :

$$2(\beta_- - \beta_+) + (\alpha_- - \alpha_+) = -4$$

$$(\alpha_- - \alpha_+) = -2$$

ce qui mène à une contradiction. $\square$

Annexe B. Formule de Rudolph dans $D \times \mathbb{C}P^1$

Dans [30], L.Rudolph étudie les tresses de $S^1 \times \mathbb{C}$ qui bordent des courbes complexes de $D \times \mathbb{C}$. Il propose une forme normale pour ces tresses, de laquelle découle immédiatement la relation suivante : la somme des exposants de la tresse est égale à la somme des indices de ramification de la courbe complexe (qui réalise un revêtement ramifié de D). Cette relation est essentielle dans la démonstration originale des formules d'Orekov. L'objet de cette annexe est de donner une relation analogue pour les tresses de $S^1 \times \mathbb{C}P^1$ qui bordent des courbes complexes de $D \times \mathbb{C}P^1$.

B.1 L'indice d'intersection

Soit C une courbe complexe plongée dans la variété complexe $D \times \mathbb{C}P^1$ (D est un disque) et qui réalise la classe d'homologie $d[D] + r[S^2]$ dans $H_2(D \times S^2, \partial D \times S^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

Soit σ une section du fibré $\partial D \times \mathbb{C}P^1 \to \partial D$ transverse aux fibres, équipée d'un champ de vecteurs tangents aux fibres. On suppose que l'image de σ ne coupe pas ∂C et qu'aucun vecteur du champ de vecteurs n'est nul.

Soit alors $\tilde{\sigma}$ un prolongement de σ en une section du fibré $D \times \mathbb{C}P^1 \to D$ tout entier, qu'on équipe également d'un champ de vecteurs tangents aux fibres prolongeant le précédent. Ce dernier champ peut s'annuler en certains points et on note $\mathrm{ind}_{\tilde{\sigma}}(\sigma)$ la somme des indices de ces zéros. On note également $(\tilde{\sigma} \circ C)$ l'indice d'intersection de C avec $\tilde{\sigma}$.

Proposition 9.14 *$I(\sigma, C) = 2(\tilde{\sigma} \circ C) - d\,\mathrm{ind}_{\tilde{\sigma}}(\sigma)$ est indépendant du prolongement $\tilde{\sigma}$ de σ. C'est un invariant par isotopie de $D \times \mathbb{C}P^1$ associé à la paire (C, σ).*

Démonstration :
Soient $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ deux prolongements de σ. On note $T\mathbb{C}P^1$ le fibré tangent de $\mathbb{C}P^1$ et on définit l'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\sigma} : \mathbb{C}P^1 = D_+ \cup (-D_-) & \to & D \times T\mathbb{C}P^1 \\ t & \mapsto & (\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) \end{array}$$

par $\tilde{\sigma}_{|D_+} = \tilde{N}\sigma 1$, et $\tilde{\sigma}_{|D_-} = \tilde{\sigma}_2$ (ces applications se recollent bien sur le bord).
Le cycle $[\tilde{\sigma}]$ associé à $\tilde{\sigma}$ est homologue à

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}P^1 & \to & D \times \mathbb{C}P^1 \\ t & \mapsto & (0, \pi \circ \tilde{q}(t)) \end{array}$$

(π est la projection $T\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$).
Soit δ le degré de l'application $\pi \circ \tilde{q}(t) : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$. L'indice d'intersection de $[\tilde{\sigma}]$ avec $[C]$ dans $H_2(D \times S^2, \partial D \times S^2) \cong \mathbb{Z}^2$ est alors δd, d'où :

$$\delta d = (\tilde{\sigma}_1 \circ C) - (\tilde{\sigma}_2 \circ C)$$

Par ailleurs, $\tilde{q}$ est une section du fibré tiré en arrière $(\pi \circ \tilde{q})^* TS^2$ dont la classe d'Euler (appliquée en $[\mathbb{C}P^1]$) est : $e^*[\mathbb{C}P^1] = e_{\mathbb{C}P^1}((\pi \circ \tilde{q})_*[\mathbb{C}P^1]) = e_{\mathbb{C}P^1}(\delta[\mathbb{C}P^1]) = 2\delta$, d'où :

$$2\delta = \mathrm{ind}_{\tilde{\sigma}_1}(\sigma) - \mathrm{ind}_{\tilde{\sigma}_2}(\sigma)$$

et donc

$$[2(\tilde{\sigma}_1 \circ C) - d\,\mathrm{ind}_{\tilde{\sigma}_1}(\sigma)] - [2(\tilde{\sigma}_2 \circ C) - d\,\mathrm{ind}_{\tilde{\sigma}_2}(\sigma)] = 2\delta d - 2\delta d = 0. \quad \square$$

Proposition 9.15 *1. Si C et C' sont deux courbes complexes de $D \times \mathbb{C}P^1$ transverses au bord, et σ est une section de $\partial D \times \mathbb{C}P^1 \to \partial D$, disjointe de C et C' et équippée d'un champ de vecteurs jamais nul, alors $I(\sigma, C \cup C') = I(\sigma, C) + I(\sigma, C')$.*

2. Si σ et σ' sont deux sections identiques de $\partial D \times \mathbb{C}P^1 \to \partial D$ mais équipées de champs de vecteurs différents , et C est une courbe complexe de $D \times \mathbb{C}P^1$ transverse au bord, qui réalise la classe d'homologie relative $d[D] + r[\mathbb{C}P^1]$, alors $I(\sigma, C) = I(\sigma', C) - d\,\mathrm{ind}(\frac{\sigma}{\sigma'})$. $\square$

B.2 La somme des exposants

Soit σ une section du fibré $S^1 \times \mathbb{C}P^1 \to S^1$ équippée d'un champ de vecteurs tangents aux fibres qui ne s'annule pas, et soit T une tresse à d brins de ce fibré (c-à-d une sous-variété de dimension 1 orientée telle que la projection $p : S^1 \times \mathbb{C}P^1 \to S^1$ en fasse un revêtement de degré d respectant l'orientation). On suppose que l'image de σ ne coupe pas T.

Le fibré trivial $S^1 \times \mathbb{C}P^1 \to S^1$ est muni d'un sous fibré trivial $S^1 \times \mathbb{R}P^1$, d'une section infinie e_∞ (incluse dans $S^1 \times \mathbb{R}P^1$), et d'une projection $p : (S^1 \times \mathbb{C}P^1) \setminus e_\infty \to (S^1 \times \mathbb{R}P^1) \setminus e_\infty$. Il existe un isomorphisme de fibré $\phi_\sigma : S^1 \times \mathbb{C}P^1 \to S^1 \times \mathbb{C}P^1$ qui envoie σ sur la section constante infinie et le champ de vecteurs sur un champ tangent au sous-fibré $S^1 \times \mathbb{R}P^1$.

La projection tirée en arrière $\phi_\sigma^*(p)$ ne dépend pas du choix de ϕ_σ et permet d'associer à T une somme des exposants $e(\sigma, T)$ de la tresse : en effet, l'image de la tresse par la projection a un nombre fini de croisements dans l'anneau $\phi_\sigma^{-1}[(S^1 \times \mathbb{R}P^1) \setminus e_\infty]$, et chaque croisement est muni d'un signe positif s'il correspond à deux brins de T tournant dans le sens de l'orientation des fibres $\mathbb{C}P^1 \setminus \sigma$, et négatif sinon. On note $e(\sigma, T)$ la somme de ces signes.

Proposition 9.16 *1. La somme des exposants $e(\sigma, T)$ ne dépend que des classes d'isotopies de σ et T.*

2. Si σ et σ' sont deux mêmes sections du fibré $S^1 \times \mathbb{C}P^1$ équippées de champs de vecteurs différents, et si T est une tresse dans ce fibré réalisant un revêtement de degré d de la base (et ne coupant pas σ,σ'), alors $e(\sigma, T) = e(\sigma', T) + d(d-1)\,\mathrm{ind}(\frac{\sigma}{\sigma'})$ $\square$

Pour tout $x \in S^1$, on obtient une base de l'espace tangent en $\sigma(x)$ grâce au champ de vecteur associé à σ' et l'indice réalisé par le champ de vecteur associé à σ dans ces bases lorsque x parcours S^1 est noté $\mathrm{ind}(\frac{\sigma}{\sigma'})$.

B.3 Formule de Rudolph généralisée

Soit C une courbe complexe plongée dans $D \times \mathbb{C}P^1$ de façon transverse au bord et qui réalise un revêtement ramifié de degré d du disque D.

Soit σ une section du fibré $\partial D \times \mathbb{C}P^1$ qui ne rencontre pas C, équippée d'un champ de vecteurs tangents aux fibres. Alors ∂C est une tresse dans $\partial D \times \mathbb{C}P^1$ et on a :

Proposition 9.17

$$e(\sigma, \partial C) = R(C) + I(\sigma, C)(1-d)$$

où $R(C)$ est la somme des indices de ramification de C.

On démontre cette proposition de la façon suivante : on prolonge la section σ en une section $\tilde{\sigma}$ du fibré $D \times \mathbb{C}P^1$ qu'on équippe d'un champ de vecteurs prolongeant celui déjà défini sur le bord ; puis on applique le même raisonnement que Rudolph (v. [30]) mais en considérant en plus des points de ramifications de C les points d'intersection de C avec $\tilde{\sigma}$ et les zéros du champ de vecteurs (qui apportent une contribution respective de $2(\tilde{\sigma} \circ C)(1-d)$ et $d(d-1)\,\mathrm{ind}(\frac{\sigma}{\sigma'})$).

Troisième partie

Discriminants, courbes flexibles et courbes isotopes sur les surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$

L'objectif de cette dernière partie est de montrer dans les surfaces X_m, $m \geq 2$, d'une part l'existence de courbes flexibles réelles qui ne sont isotopes à aucune courbe algébrique réelle ; et d'autre part, l'existence de courbes algébriques réelles isotopes, mais qui ne sont pas dans une même classe de déformation. Rappelons qu'une *courbe flexible réelle* de X_m est une sous-variété de dimension deux de X_m, stable par l'involution antiholomorphe, dont les espaces tangents en les points réels sont complexes, et qui réalise un revêtement ramifié de la base $\mathbb{C}P^1$ de X_m dont chaque point de ramification d'indice $k-1$ est conjugué par des difféomorphismes préservant l'orientation au modèle $x = y^k$ de $\mathbb{C}^2$ et non au modèle $x = \overline{y}^k$ de $\mathbb{C}^2$. De même, deux courbes algébriques réelles lisses C_0 et C_1 sont dites *isotopes* dans X_m s'il existe un chemin continu de difféomorphismes de X_m reliant l'identité à un difféomorphisme qui envoie C_0 sur C_1, chaque difféomorphisme devant commuter avec l'involution antiholomorphe de X_m, alors qu'on dit qu'elles sont dans *la même classe de déformation* si elles appartiennent à une même composante connexe de $\mathbb{R}|D| \setminus \mathbb{R}\Delta_D$, où $|D|$ est le système linéaire complet de diviseurs associé à ces courbes. Ces résultats se déduisent du théorème suivant (v. théorème 10.3) : lorsque $m = l + 2k$, $k > 0$, les discriminants de la surface X_m se déduisent de ceux de la surface X_l par des homothéties à poids.

Tous ces résultats sont obtenus en étudiant une déformation des surfaces réglées.

10 Discriminants des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$

10.1 Une déformation Y des surfaces réglées

Soient k, l, m trois entiers naturels tels que $m = l + 2k$, $k > 0$. On définit la déformation Y de X_m par le recollement de deux cartes $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ isomorphes à $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}P^1$. Fixons $(t, x_1, (y_1 : y_0))$ et $(t, x_2, (z_1 : z_0))$ des coordonnées sur $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, le recollement est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 & \to & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}P^1 \\ (t, x_1, (y_1 : y_0)) & \mapsto & (t, x_2, (z_1 : z_0)) \end{array}$$

où $x_1 x_2 = 1$, et $z_0 y_1 = x_2^m z_1 y_0 + t x_2^k y_0 z_0$.

Cette variété est munie d'une projection sur la première coordonnée $p : Y \to \mathbb{C}$, et pour $t \in \mathbb{C}$, la fibre $p^{-1}(t)$ de cette submersion propre est notée Y_t. Ces surfaces Y_t sont des surfaces réglées de base $\mathbb{C}P^1$, la structure réglée étant donnée par la projection sur la seconde coordonnée. De plus, les applications données dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ par $(t, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (\overline{t}, \overline{x}_1, (\overline{y}_1 : \overline{y}_0))$ et $(t, x_2, (z_1 : z_0)) \mapsto (\overline{t}, \overline{x}_2, (\overline{z}_1 : \overline{z}_0))$ définissent une structure réelle c_Y sur Y.

Lemme 10.1 *La déformation $Y \to \mathbb{C}$ est triviale au-dessus de $\mathbb{C}^*$, isomorphe à $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$, et Y_0 est isomorphe à X_m.*

Reproduisons la démonstration de [16], exemple 2.16.

Démonstration :

Rappelons que la surface X_m est définie par le recollement de deux cartes U, V isomorphes à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}P^1$. Notons $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0))$ et $(\tilde{x}_2, (\tilde{z}_1 : \tilde{z}_0))$ les coordonnées dans ces cartes (ces coordonnées

sont notées avec des tildes pour ne pas être confondues avec celles de Y), le recollement est alors défini par les équations $\tilde{x}_1\tilde{x}_2 = 1$, et $\tilde{z}_0\tilde{y}_1 = \tilde{x}_2^m\tilde{z}_1\tilde{y}_0$. L'isomorphisme $Y_0 \cong X_m$ est donc donné dans les cartes $\mathcal{U} \to U$ par $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{y}_1 = y_1$ et $\tilde{y}_0 = y_0$.

Lorsque $t \neq 0$, considérons les applications $(t, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (t, x_1, (x_1^k y_1 - ty_0 : ty_1))$, et $(t, x_2, (z_1 : z_0)) \mapsto (t, x_2, (z_1 : tx_2^{m-k}z_1 + t^2 z_0))$. Ces applications se recollent en une application Ψ entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l$. En effet, si x_1, $x_2 \in \mathbb{C}^*$, alors $x_1x_2 = 1$, et :

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_0\tilde{y}_1 &= (tx_2^{m-k}z_1 + t^2z_0)(x_1^k y_1 - ty_0) \\
&= tx_2^l y_1 z_1 - t^2 x_2^{m-k} y_0 z_1 + t^2 x_1^k z_0 y_1 - t^3 y_0 z_0 \\
&= tx_2^l y_1 z_1 - t^2 x_2^{m-k} y_0 z_1 - t^3 y_0 z_0 + t^2 x_1^k (x_2^m z_1 y_0 + tx_2^k y_0 z_0) \\
&= tx_2^l y_1 z_1 \\
&= \tilde{x}_2^l \tilde{z}_1 \tilde{y}_0
\end{aligned}$$

Cette application Ψ est un isomorphisme entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$. $\square$

Remarque : Une forme explicite d'un isomorphisme Ψ entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$ a été donnée dans la démonstration du lemme 10.1. Elle sera utilisée par la suite. Cet isomorphisme préserve les structures réglées de X_l et Y_t. Par ailleurs, remarquons que quel que soit $t \in \mathbb{C}^*$, les applications données dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ par : $(1, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (t, x_1, (ty_1 : y_0))$ et $(1, x_2, (z_1 : z_0)) \mapsto (t, x_2, (tz_1 : z_0))$ définissent un isomorphisme $\psi_t : Y_1 \to Y_t$.

10.2 Homothéties à poids

Fixons une décomposition $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$, où $b, n, n_0, \ldots, n_b$ sont des entiers naturels, et notons h le morphisme de groupes $\mathbb{C}^* \to GL(\mathbb{C}^n)$ défini pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ par $h(t)(x_0, \ldots, x_b) = (x_0, tx_1, t^2x_2, \ldots, t^b x_b)$. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ une hypersurface algébrique définie comme le lieu des zéros d'un polynôme P. Notons $\Delta_h = \{(t, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \mid h(t^{-1})(z) \in \Delta\}$. Si $P = \sum a_{i_0 \ldots i_b} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_b^{i_b}$, où pour $j \in \{0, \ldots, b\}$, $i_j \in \mathbb{N}^{n_j}$, le *degré homogène* de P est $d = \max\{|i_1| + 2|i_2| + \cdots + b|i_b|\}$, le maximum étant pris sur les monômes pour lesquels $a_{i_0 \ldots i_b} \neq 0$. L'hypersurface Δ_h est alors le lieu des zéros du polynôme $P_h(t, z) = t^d P(h(t^{-1})(z))$.

On appelle *homothétie à poids* de Δ associée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$, l'hypersurface algébrique

$$\begin{aligned}
H\Delta &= \{z \in \mathbb{C}^n \mid (0, z) \in \overline{\Delta_h} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n\} \\
&= \{z \in \mathbb{C}^n \mid P_h(0, z) = 0\}
\end{aligned}$$

Cette hypersurface $H\Delta$ est invariante par l'action de h. Lorsque P est à coefficients réels, c'est-à-dire lorsque Δ est une hypersurface algébrique réelle de $\mathbb{C}^n$, il en est de même pour Δ_h et $H\Delta$. Les parties réelles de $H\Delta$ et Δ satisfont alors $\mathbb{R}H\Delta = H(\mathbb{R}\Delta)$.

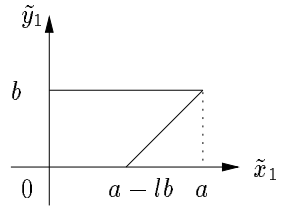
Soit à présent V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{C}}$ une famille d'applications linéaires injectives $V \to \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, $Im(\Phi_t) = h(t)(Im(\Phi_1))$. Soit $\Delta \subset V$ une hypersurface algébrique. On note $\Delta_h = \{(t, z) \in \mathbb{C}^* \times V \mid \Phi_1^{-1} \circ h(t^{-1}) \circ \Phi_t(z) \in \Delta\}$, et on appelle *homothétie à poids* de Δ associée à Φ, l'hypersurface $H_\Phi\Delta = \{z \in V \mid (0, z) \in \overline{\Delta_h} \subset \mathbb{C} \times V\}$. Lorsque $t \mapsto \Phi_t$ est algébrique, l'hypersurface $H_\Phi\Delta$ est algébrique. Si de plus Δ est algébrique réelle, pour la conjugaison complexe de V induite par Φ_1, et que quel que soit $t \in \mathbb{C}^*$ et $z \in V$, $\overline{\Phi_t(z)} = \Phi_{\overline{t}}(\overline{z})$, alors Δ_h et $H_\Phi\Delta$ sont également algébriques réelles, et $\mathbb{R}H_\Phi\Delta = H_\Phi(\mathbb{R}\Delta)$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, on notera plus simplement $H_\Phi\Delta = H\Delta$.

10.3 Discriminants des surfaces X_m

Rappelons que $Pic(X_l) = H^2(X_l;\mathbb{Z}) = H_2(X_l;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$. On fixe une base de ce réseau $([v],[e])$ donnée par une fibre et la section exceptionnelle de X_l si $l \neq 0$, ou par une fibre et une section de carré nul si $l = 0$. Fixons trois entiers naturels m, l, k tels que $k > 0$ et $m = l + 2k$, et notons ρ l'isomorphisme de réseaux

$$\begin{array}{rcl} \rho : Pic(X_l) & \to & Pic(X_m) \\ (a,b) & \mapsto & (a+kb, b) \end{array}$$

Soit D un diviseur de X_l de classe (a,b), notons $h^0(D)$ la dimension de $H^0(D)$. Si $a < 0$ ou $b < 0$, alors $H^0(D)$ est réduit à $\{0\}$. Si $a \geq lb$, alors $h^0(D) = (a+1)(b+1) - \frac{1}{2}lb(b+1)$. En effet, cet espace $H^0(D)$ est l'espace des sections du fibré en droites complexes associé à D, et ces sections sont données dans la carte U par les polynômes en $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$ dont le polytope de Newton est l'enveloppe convexe des sommets $(0,0), (0,b), (a-lb, 0)$ et (a,b).



Enfin, si $a < lb$, $a, b \geq 0$, alors $h^0(D) = (a+1)(\tilde{b}+1) - \frac{1}{2}l\tilde{b}(\tilde{b}+1)$, où $\tilde{b} = E(\frac{a}{l})$ (v. §1).

Par ailleurs, on note $\Delta_D \subset H^0(D)$ (resp. $\Delta_{\rho(D)} \subset H^0(\rho(D))$) l'hypersurface discriminant constituée des sections dont le lieu des zéros est singulier dans X_l (resp. dans X_m). Lorsque les surfaces X_l, X_m sont munies de leurs structures réelles données dans la carte U par $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0) \mapsto (\overline{\tilde{x}_1}, (\overline{\tilde{y}_1} : \overline{\tilde{y}_0})$, cette structure induit sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(D)$ (resp. $H^0(\rho(D))$) une conjugaison complexe, et l'hypersurface Δ_D (resp. $\Delta_{\rho(D)}$) est algébrique réelle pour cette conjugaison complexe.

Lemme 10.2 *Pour tout diviseur D de $Pic(X_l)$, $h^0(D) \leq h^0(\rho(D))$. Si $\rho(D)$ est numériquement effectif, c'est-à-dire si $\rho(D) \circ e \geq 0$ et $\rho(D) \circ v \geq 0$, alors il y a égalité.*

Démonstration :

Il suffit de considérer le cas où D est effectif, c'est-à-dire de classe (a,b) avec a et b positifs. Si $a < lb$, on note $\tilde{b}_l = E(\frac{a}{l})$, sinon $\tilde{b}_l = b$. De même, si $a + kb < mb$, on note $\tilde{b}_m = E(\frac{a+kb}{m})$, et sinon $\tilde{b}_m = b$. On a :

$$\begin{aligned} h^0(D) - h^0(\rho(D)) &= (a+1)(\tilde{b}_l+1) - \frac{l}{2}\tilde{b}_l(\tilde{b}_l+1) - (a+kb+1)(\tilde{b}_m+1) + \frac{m}{2}\tilde{b}_m(\tilde{b}_m+1) \\ &= (\tilde{b}_l - \tilde{b}_m)\big(a+kb+1-m(\tilde{b}_m+1) - \frac{m}{2}(\tilde{b}_l - \tilde{b}_m - 1)\big) + k(\tilde{b}_l - b)(\tilde{b}_l+1) \end{aligned}$$

Ainsi, si $\tilde{b}_l = \tilde{b}_m$, $h^0(D) \leq h^0(\rho(D))$, et il y a même égalité lorsque $\rho(D)$ est numériquement effectif, puisqu'alors $\tilde{b}_l = \tilde{b}_m = b$. Si $\tilde{b}_l > \tilde{b}_m$, alors $\frac{m}{2}(\tilde{b}_l - \tilde{b}_m - 1) \geq 0$. Or par définition de $\tilde{b}_m$, $a + kb + 1 - m(\tilde{b}_m + 1) \leq 0$, donc à nouveau $h^0(D) \leq h^0(\rho(D))$. Enfin, si $\tilde{b}_l < \tilde{b}_m$, alors $-\frac{m}{2}(\tilde{b}_l - \tilde{b}_m - 1) \geq m$, mais par définition de $\tilde{b}_m$, $a + kb + 1 - m(\tilde{b}_m + 1) \geq 1 - m$. $\square$

Pour $h \in \{0, \ldots, b\}$, posons $n_h = a + k(b-h) + 1$, et notons $\mathbb{C}^{n_h}$ l'espace des polynômes en x_1, y_1, y_0,de degré en x_1 inférieur ou égal à n_h et homogènes en $(y_1 : y_0)$ de degré $b - h$. Le produit

$\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$ désigne alors l'espace total des polynômes dont les monômes sont de la forme $x_1^i y_1^j y_0^{b-j}$ avec $i \leq a + kj$ et $j \leq b$.

Théorème 10.3 *Soit D un diviseur de X_l. Il existe des applications linéaires injectives ϕ_D : $H^0(D) \to H^0(\rho(D))$, et pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\Phi_t : H^0(D) \to \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$, telles que les seuls diviseurs de $|\rho(D)|$ qui se prolongent en des diviseurs de Y sont ceux associés aux éléments de l'image de ϕ_D, et telles qu'on ait l'alternative $Im\phi_D \subset \Delta_{\rho(D)}$, ou bien $(Im\phi_D, \Delta_{\rho(D)} \cap Im\phi_D) \cong (H^0(D), H\Delta_D)$ où $H\Delta_D$ est l'homothétie à poids de Δ_D associée à Φ. Lorsque les surfaces X_l, X_m sont munies de leurs structures réelles données dans la carte U par $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0) \mapsto (\overline{\tilde{x}_1}, (\overline{\tilde{y}_1} : \overline{\tilde{y}_0})$, ϕ_D et l'homothétie à poids préservent ces structures, et on a l'alternative correspondante $\mathbb{R}Im\phi_D \subset \mathbb{R}\Delta_{\rho(D)}$, ou bien $(\mathbb{R}Im\phi_D, \mathbb{R}\Delta_{\rho(D)} \cap \mathbb{R}Im\phi_D) \cong (\mathbb{R}H^0(D), H(\mathbb{R}\Delta_D))$.*

Remarque : Lorsque $\rho(D)$ est numériquement effectif, d'après le lemme 10.2, $h^0(D) = h^0(\rho(D))$. Dans ce cas, d'après le théorème 10.3, $Im(\phi_D) = H^0(\rho(D))$ tout entier, et tous les diviseur du système linéaire complet $|\rho(D)|$ de Y_0 se déforment dans Y. De plus dans ce cas, $(H^0(\rho(D)), \Delta_{\rho(D)}) \cong (H^0(D), H\Delta_D)$.

Pour tout diviseur D de X_l, on note E_D l'ensemble fini des composantes connexes du complémentaire de $\mathbb{R}\Delta_D$ dans $\mathbb{R}H^0(D)$. De même, $E_{\rho(D)}$ désigne l'ensemble fini des composantes connexes du complémentaire de $\mathbb{R}\Delta_{\rho(D)}$ dans $\mathbb{R}H^0(\rho(D))$. Lorsque $\rho(D)$ est numériquement effectif, le théorème 10.3 fournit une application $f_D : E_{\rho(D)} \to E_D$ qui est définie comme suit : soit C_0 un diviseur lisse réel réalisant un élément de $E_{\rho(D)}$. D'après la remarque précédente, ce diviseur se déforme dans Y en une famille $C_t \subset Y_t$ de diviseurs. Lorsque $t > 0$ est suffisament petit, C_t est lisse dans Y_t qui est isomorphe à X_l par $pr_2 \circ \Psi$ où Ψ est l'isomorphisme entre $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbb{C}^* \times X_l \to \mathbb{C}^*$ fixé au §10.1, et pr_2 la projection $\mathbb{C}^* \times X_l \to X_l$. Lorsque $t > 0$ est suffisament petit, C_t définit donc un élément de E_D. Comme cet élément ne dépend pas de choix de C_0 dans $E_{\rho(D)}$, ce procédé définit une application $E_{\rho(D)} \to E_D$ notée f_D. Cette application sera étudiée dans le §11.

Lemme 10.4 *Soit D un diviseur effectif de X_l. Il existe un fibré en droites $L \to Y$ tel que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, la restriction de L à Y_t est le fibré associé à D, et tel que sa restriction à Y_0 est le fibré associé à $\rho(D)$.*

Démonstration :

Notons (a, b) la classe de D, où a et b sont positifs, et $\tilde{b} = E(\frac{a}{l})$ (resp. $\tilde{b} = b$) si $a < lb$ (resp. si $a \geq lb$). Une base de l'espace vectoriel des sections algébriques du fibré en droites associé à D est donnée dans la carte U de X_l par les sections $\tilde{x}_1^i \tilde{y}_1^{b-\tilde{b}+j} \tilde{y}_0^{\tilde{b}-j}$, et dans la carte V par $\tilde{x}_2^{a-l\tilde{b}+lj-i} \tilde{z}_1^{b-\tilde{b}+j} \tilde{z}_0^{\tilde{b}-j}$, où $j \in \{0, \ldots, \tilde{b}\}$ et $i \in \{0, \ldots, a - l\tilde{b} + lj\}$. Par l'isomorphisme Ψ entre $\mathbb{C}^* \times X_l$ et $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donné dans le §10.1, ces sections s'écrivent dans la carte $\mathcal{U}$: $x_1^i (x_1^k y_1 - t y_0)^{b-\tilde{b}+j} (t y_1)^{\tilde{b}-j}$ où $j \in \{0, \ldots, \tilde{b}\}$ et $i \in \{0, \ldots, a - l\tilde{b} + lj\}$. Lues dans la carte $\mathcal{V}$, elles se transforment en les fractions rationelles :

$$\frac{1}{x_2^i}(x_2^{m-k} z_1)^{b-\tilde{b}+j} (t x_2^m z_1 + t^2 x_2^k z_0)^{\tilde{b}-j} = \frac{x_2^{a-l\tilde{b}+lj-i}}{x_2^{a+kb-mb}} z_1^{b-\tilde{b}+j} (t x_2^{m-k} z_1 + t^2 z_0)^{\tilde{b}-j}$$

Ainsi, notons $L_{\mathcal{U}}$ (resp. $L_{\mathcal{V}}$) les fibrés en droites au-dessus de $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) dont les sections sont les polynômes homogènes de degré b en $(y_1 : y_0)$ (resp. $(z_1 : z_0)$). Trivialisons ces fibrés au-dessus des ouverts $y_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 0$, et recollons-les par le changement de trivialisation :

$$\begin{array}{rcl} L_{\mathcal{U}}|_{x_1 y_0 \neq 0} & \to & L_{\mathcal{V}}|_{x_2 z_0 \neq 0} \\ (t, x_1, \dfrac{y_1}{y_0}, \xi) & \mapsto & (t, x_2, \dfrac{z_1}{z_0}, \dfrac{1}{x_2^{a+kb-mb}} \xi) \end{array}$$

où $x_1x_2 = 1$ et $z_0y_1 = x_2^m z_1 y_0 + t x_2^k z_0 y_0$.

En restriction à $p^{-1}(\mathbb{C}^*)$, ce fibré en droites L est le fibré associé à D, et au-dessus de Y_0, ce fibré en droite est le fibré associé à $\rho(D)$. En effet, un isomorphisme entre ce dernier fibré et le fibré associé au diviseur $(a+kb)v + be$ de X_m est donné dans les cartes $\mathcal{U} \to U$ par l'identité. $\square$

Remarque : Au début de la démonstration du lemme 10.4 ont été introduites les sections du fibré associé au diviseur D de Y_t pour $t \neq 0$. Notons $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ ces sections qui seront utiles dans la suite. Remarquons que par exemple lorsque $a \geq lb$, c'est-à-dire lorsque D est numériquement effectif, elles s'écrivent dans la carte $\mathcal{U}$ comme des éléments de l'espace $\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b}$, c'est-à-dire comme des polynômes en x_1, y_1 dont le polytope de Newton est l'enveloppe convexe des sommets $(0,0)$, $(0,b)$, $(a+kb,b)$ et $(a,0)$. Par ailleurs, les involutions des fibrés $L_{\mathcal{U}}$, $L_{\mathcal{V}}$ données par $(t, x_1, (y_1 : y_0), \xi) \mapsto (\overline{t}, \overline{x_1}, (\overline{y_1} : \overline{y_0}), \overline{\xi})$ et $(t, x_2, (z_1 : z_0), \xi) \mapsto (\overline{t}, \overline{x_2}, (\overline{z_1} : \overline{z_0}), \overline{\xi})$ définissent une structure réelle sur L qui commute avec la structure réelle c_Y de Y.

Lemme 10.5 *Soit D un diviseur effectif de X_l. Il existe une famille $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ de sections algébriques du fibré L construit dans le lemme 10.4, telle que pour tout $t \in \mathbb{C}$, les restrictions $s_i(t)$ de s_i au dessus de Y_t forment une famille libre de sections de $L \to Y_t$. Lorsque D est réel, ces sections commutent avec les structures réelles de L et Y.*

Démonstration :

Les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ sont obtenues par récurrence en appliquant la construction qui suit aux sections $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ introduites dans la démonstration du lemme 10.4 (v. la remarque précédente).

La construction initiale est la suivante : si la section $\tilde{s}_1(0)$ du fibré $L \to Y_0$ est non-nulle, on pose $s_1 = \tilde{s}_1$. Sinon, $\tilde{s}_1$ est divisible par une puissance de t, et on pose $s_1 = t^{-d}\tilde{s}_1$ où d est choisi maximal. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $s_1(t)$ est non nul, et lorsque $t \neq 0$, $s_1(t)$ est dans l'espace vectoriel engendré par $\tilde{s}_1(t)$.

Supposons à présent construits $s_1, \ldots, s_k$ où $k < h^0(D)$, de sorte que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $s_1(t), \ldots, s_k(t)$ sont linéairement indépendants, et sont dans l'espace vectoriel engendré par $\tilde{s}_1(t), \ldots, \tilde{s}_k(t)$ lorsque $t \neq 0$.

Si $\tilde{s}_{k+1}(0)$ est linéairement indépendant de $s_1(0), \ldots, s_k(0)$, on pose $s_{k+1} = \tilde{s}_{k+1}$. Sinon, il existe des complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $(\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i)(0) = 0$. Cette section $\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i$ est donc divisible par une puissance de t, et on réitère le procédé en substituant à $\tilde{s}_{k+1}$ la section $t^{-d'}(\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i)$, où d' est choisi maximal. Comme les sections $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ sont définies dans la carte $\mathcal{U}$ par des polynômes en t de degrés inférieurs ou égaux à b, et que $\tilde{s}_{k+1}(t)$ n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par $s_1(t), \ldots, s_k(t)$ pour tout t non nul, ce procéde s'arrête nécéssairement. Il produit alors une section de la forme $t^{-d''}(\tilde{s}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda'_i(t) s_i)$ où $d'' \leq b$ et les λ'_i sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à d''. Cette section est linéairement indépendante de $s_1(t), \ldots, s_k(t)$ pour tout $t \in \mathbb{C}$, et est dans l'espace engendré par $\tilde{s}_1(t), \ldots, \tilde{s}_{k+1}(t)$ pour tout t non nul. On pose s_{k+1} égal à cette section. Comme les sections $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{h^0(D)}$ commutent avec les structures réelles de X_l et du fibré associé à D, par construction, les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ commutent avec les structures réelles de Y et de L. $\square$

Démonstration du théorème 10.3 :

On peut supposer que le diviseur D est effectif. Considérons les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ données par le lemme 10.5. D'après ce lemme, $s_1(1), \ldots, s_{h^0(D)}(1)$ forme une base de $H^0(D)$, et $s_1(0), \ldots, s_{h^0(D)}(0)$ une famille libre de $H^0(\rho(D))$. Posons $\phi_D(s_i(1)) = s_i(0)$ pour $i \in \{1, \ldots, h^0(D)\}$,

et prolongeons cette application par linéarité en une application $H^0(D) \to H^0(\rho(D))$. Cette application est alors linéaire injective, et par construction, tous les diviseurs associés aux éléments de son image se prolongent en des diviseurs de Y. Par ailleurs, ce sont les seuls. En effet, si $s(0)$ était un élément de $H^0(\rho(D))$ associé à un diviseur de $|\rho(D)|$ qui se prolonge en un diviseur de Y, mais qui n'appartient pas à l'image de ϕ_D, alors pour des valeurs de t voisines de 0, $s(t)$ serait encore linéairement indépendant de $s_1(t), \ldots, s_{h^0(D)}(t)$, ce qui ne se peut pas.

Notons $V = \mathbb{C}^{h^0(D)}$, et pour tout $t \in \mathbb{C}$, Φ_t l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} V & \to & \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b} \\ (x_1, \ldots, x_{h^0(D)}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(t) \end{array}$$

ce qui a un sens lorsqu'on écrit chaque section s_i dans la carte $\mathcal{U}$, puisque son expression est alors polynomiale de la forme voulue. Notons $\Delta \subset \mathbb{C} \times V$ l'ensemble des éléments $(t, x_1, \ldots, x_{h^0(D)})$ tels que le lieu des zéros de la section $\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(t)$ est singulier dans Y_t. C'est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C} \times V$, puisque par construction, lues dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, les sections s_i sont algébriques en toutes les variables. Or pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, il existe un isomorphisme $\psi_t : Y_1 \to Y_t$ donné dans la carte $\mathcal{U}$ par $(1, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (t, x_1, (ty_1 : y_0))$ (v. le §10.1). En notant h_t l'homothétie

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b} & \to & \mathbb{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_b} \\ (y_0, y_1, \ldots, y_b) & \mapsto & (y_0, ty_1, \ldots, t^b y_b), \end{array}$$

on s'aperçoit donc que $Im(\Phi_t) = h_t(Im(\Phi_1))$. En effet, si une section s de $L|Y_1$ est donnée dans la carte $\mathcal{U}$ par un polynôme $P \in Im(\Phi_1)$, alors la section $s \circ \psi_t^{-1}$ de $L|Y_t$ est donnée dans la carte $\mathcal{U}$ par l'élément $P \circ \psi_t^{-1} \in Im(\Phi_t)$. Or $t^d P \circ \psi_t^{-1} = h_t(P)$ si d est le degré homogène de P, et donc $Im(\Phi_t) = h_t(Im(\Phi_1))$.

De plus, le lieu des zéros de la section $\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(1)$ est singulier dans Y_1 si et seulement si le lieu des zéros de la section $\sum_{i=1}^{h^0(D)} x_i s_i(1) \circ \psi_t^{-1}$ est singulier dans Y_t, donc Δ est invariante par les homothéties h_t. On en déduit l'alternative $\Delta \cap (\{0\} \times V) = \{0\} \times V$, ou bien $(\{0\} \times V, \Delta \cap (\{0\} \times V)) \cong (\{1\} \times V, H(\Delta \cap (\{1\} \times V)))$ où $H(\Delta \cap (\{1\} \times V))$ est l'homothétie à poids de $\Delta \cap (\{1\} \times V)$ associée à Φ. Lorsque les variétés X_l, X_m, Y et L sont munies de leurs structures réelles, d'après le lemme 10.5, les sections $s_1, \ldots, s_{h^0(D)}$ commutent avec les structures réelles de L et Y, et par suite Δ est une hypersurface algébrique réelle de $\mathbb{C} \times V$. On en déduit alors l'alternative analogue : $\mathbb{R}\Delta \cap (\{0\} \times \mathbb{R}V) = \{0\} \times \mathbb{R}V$, ou bien $(\{0\} \times \mathbb{R}V, \mathbb{R}\Delta \cap (\{0\} \times \mathbb{R}V)) \cong (\{1\} \times \mathbb{R}V, H(\mathbb{R}\Delta \cap (\{1\} \times \mathbb{R}V)))$. $\square$

11 Constructions de courbes flexibles et d'isotopies équivariantes de courbes algébriques réelles

Dans toute la suite de cette partie, les surfaces réglées X_l, X_m et Y sont munies de leurs structures réelles données dans les cartes U et $\mathcal{U}$ respectivement par $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0)) \mapsto (\overline{\tilde{x}_1}, (\overline{\tilde{y}_1} : \overline{\tilde{y}_0}))$, et $(t, x_1, (y_1 : y_0)) \mapsto (\overline{t}, \overline{x_1}, (\overline{y_1} : \overline{y_0}))$. On suppose également à présent que le diviseur $\rho(D)$ est **numériquement effectif**, de sorte que d'après le lemme 10.2, $h^0(D) = h^0(\rho(D))$. L'objet de ce §11 est d'étudier l'application $f_D : E_{\rho(D)} \to E_D$ introduite au §10.3. La surjectivité de f_D est étudiée dans le §11.1, et l'injectivité dans le §11.2. Il s'avère qu'en général, f_D n'est ni surjective, ni injective.

11.1 Surjectivité de f_D, courbes flexibles non-algébriques dans X_m

Proposition 11.1 *Lorsque $\rho(D) \circ v = 0$, ou bien lorsque m est impair et $\rho(D) \circ v = 1$, f_D est bijective. Par contre, dans tous les autres cas excepté lorsque m est impair, $b = 3$ et $k = 1$, il existe dans $|D|$ des courbes lisses dont le schéma réel n'est réalisé par aucune courbe réalisant un élément de l'image de f_D, et donc f_D n'est pas surjective.*

Remarque : Lorsque m est impair, $b = 3$ et $k = 1$, la surjectivité ou la non-surjectivité de f_D ne m'est pas connue.

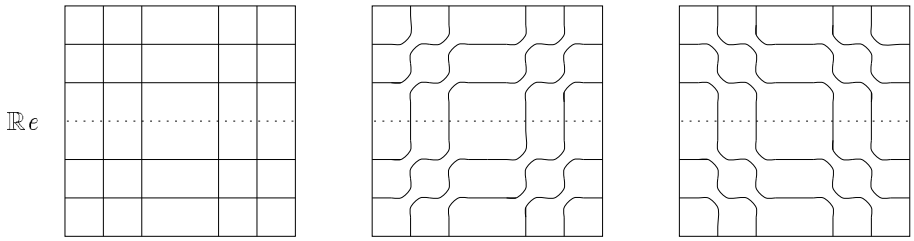
Corollaire 11.2 *Soit m un entier supérieur ou égal à 2, et $[A]$ un élément de $H_2(X_m;\mathbb{Z})$ tel que $[A]\circ[e] \geq 0$, $[A]\circ[v] > 0$ si m est pair, $[A]\circ[v] > 1$ si m est impair, et lorsque $[A]\circ[v] = 3$ et que m est impair, supposons que $m \geq 5$. Il existe dans X_m des courbes flexibles réelles de classe $[A]$ dont le schéma réel n'est réalisé par aucune courbe algébrique réelle dans cette classe. En particulier, ces courbes ne sont isotopes à aucune courbe algébrique réelle.*

Rappelons qu'une *courbe flexible réelle* de X_m est une sous-variété de dimension deux de X_m, stable par l'involution antiholomorphe, dont les espaces tangents en les points réels sont complexes, et qui réalise un revêtement ramifié de la base $\mathbb{C}P^1$ de X_m dont chaque point de ramification d'indice $k-1$ est conjugué par des difféomorphismes préservant l'orientation au modèle $x = y^k$ de $\mathbb{C}^2$.

Démonstration de la proposition 11.1 :

Notons (a, b) la classe de D. Si $b = 0$, le lieu des zéros d'un élément de $\mathbb{R}H^0(D)$ ou $\mathbb{R}H^0(\rho(D))$ est constitué de a fibres dont l'ensemble est invariant par la structure réelle. L'application f_D est donc bijective. Si $b = 1$ et que m est impair, les ensembles E_D et $E_{\rho(D)}$ sont des singletons, d'où à nouveau la bijectivité de f_D. En effet, une courbe de classe $(a, 1)$ de X_m est donnée dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0 = 0$, où P est de degré a et Q de degré $a - m$. Une telle courbe est singulière si et seulement si les homogénéisés de P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}P^1$. Or les degrés de P et de Q n'ont pas même parité. Les racines réelles de P et de Q ne peuvent donc pas être alternées dans $\mathbb{R}P^1$. Mais chaque couple de racines réelles consécutives de P ou de Q peut être supprimé à l'aide d'un chemin de courbes algébriques réelles lisses au cours duquel ces racines se transforment en une racine double puis en deux racines complexes conjuguées. Ainsi, toute courbe algébrique réelle de classe $(a, 1)$ de X_m est dans la même classe de déformation qu'une courbe donnée dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0 = 0$, où les racines de P et de Q sont toutes complexes sauf une (puisqu'un des deux polynômes est de degré impair). Le résultat découle alors du fait que ces courbes ne forment qu'une seule classe de déformation.

Supposons à présent que m (et donc l) est pair et que $b \geq 1$. Perturbons le produit de b sections réelles de classe $(l, 1)$ de X_l, choisies de sorte que les seules singularités de ce produit sont imaginaires. On obtient ainsi une courbe lisse de X_l de classe (lb, b), dont le schéma réel est constitué de b composantes transverses aux fibres et disjointes de la section exceptionnelle $\mathbb{R}e$. Perturbons ensuite le produit de cette courbe avec $a - lb$ fibres réelles distinctes, chaque point double étant perturbé de la même manière (v. [3], [12], [31]). Remarquons que par hypothèse $\rho(D)$ est numériquement effectif, c'est-à-dire $a + kb \geq mb$, de sorte que $a - lb > 0$. On obtient ainsi deux courbes lisses $C_D^{\pm}$ correspondant aux deux façons de perturber les points doubles, comme sur la figure suivante :



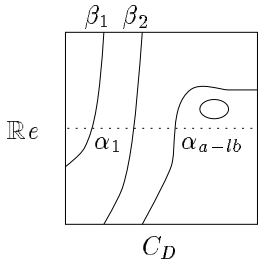
$b = 4,\ a - lb = 4$ $\qquad$ C_D^+ $\qquad$ C_D^-

La proposition 11.1 dans le cas où m est pair découle alors du lemme 11.3 suivant démontré plus loin.

Lemme 11.3 *Au moins un des éléments de E_D réalisé par C_D^+, C_D^- n'est pas dans l'image de f_D.*

Supposons à présent que m est impair et que $b > 1$. Si b est pair, il est facile de construire une courbe lisse de classe (a, b) dans X_l dont la partie réelle possède exactement $a - lb$ composantes homologues à des fibres, il suffit de perturber le produit de $a - lb$ fibres réelles distinctes et d'une courbe de classe (lb, b) sans point réel. L'élément de E_D réalisé par cette courbe n'est pas dans l'image de f_D. En effet, l'isomorphisme Ψ construit dans le §10.1 préserve les structures réglées de X_l et de Y_t, donc la partie réelle de l'image par Ψ^{-1} de cette courbe contient également $a - lb$ composantes homologues à des fibres de $\mathbb{R}Y_t$. Mais le nombre maximal de composantes homologues à des fibres d'une courbe C de classe $(a + kb, b)$ de X_m est $e \circ C = a + kb - mb < a - lb$.

Si $b \geq 3$ est impair, perturbons le produit d'une courbe de classe $((b-3)l, b-3)$ de X_l sans point réel, d'une courbe de classe $(2l, 2)$ dont la partie réelle est constituée d'un ovale, et d'une section de classe $(a - lb + l, 1)$, et notons C_D la courbe algébrique réelle lisse de X_l obtenue. La section de classe $(a - lb + l, 1)$ est donnée dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0 = 0$, où P est de degré $a - lb + l$ et Q de degré $a - lb$. Le polynôme Q est choisi de sorte que toutes ses racines soient réelles distinctes dans $\mathbb{R}P^1$. Fixons une orientation de $\mathbb{R}P^1$, ces racines sont notées dans l'ordre croissant $\alpha_1, \ldots, \alpha_{a-lb}$. Le polynôme P est choisi de sorte qu'il ait $a - lb - 1$ racines réelles distinctes, et $l + 1$ racines imaginaires conjuguées (rappelons que puisque $\rho(D)$ est numériquement effectif, $a - lb \geq kb$). De plus, les racines $\beta_1, \ldots, \beta_{a-lb-1}$ de P sont choisies de sorte que pour tout $i \in \{1, \ldots, a - lb - 1\}$, $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$. La partie réelle de cette courbe de classe $(a - lb + l, 1)$ est alors constituée d'une section qui intersecte le diviseur exceptionnel $\mathbb{R}e$ en les points $\alpha_1, \ldots, \alpha_{a-lb}$, et la section $\tilde{y}_0 = 0$ en les points $\beta_1, \ldots, \beta_{a-lb-1}$. Entre les points α_{a-lb} et α_1, cette section forme une "boucle" qui revient sur le diviseur exceptionnel $\mathbb{R}e$ sans rencontrer la section $\tilde{y}_0 = 0$. La courbe de classe $(2l, 2)$ est choisie de sorte que sa partie réelle est constituée d'un ovale situé à l'intérieur de cette boucle, comme sur la figure suivante :



La proposition 11.1 découle du lemme 11.4. □

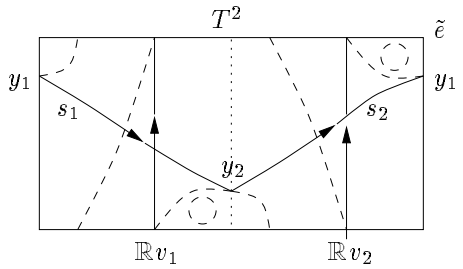
Lemme 11.4 *L'élément de E_D réalisé par C_D n'est pas dans l'image de f_D.*

Démonstration des lemmes 11.3 et 11.4 :

Il existe une famille continue $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de sous-variétés de Y, telle que e_0 est le diviseur exceptionnel de Y_0, et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e_t est une sous-variété de dimension deux de Y_t invariante par l'involution antiholomorphe. Orientons $\mathbb{R}e_t$ de sorte que lorsque $t > 0$, sa classe d'homologie dans $H_1(\mathbb{R}X_l;\mathbb{Z})$ soit $-\tilde{k}[\mathbb{R}v]+[\mathbb{R}e]$, où $\mathbb{R}v$, $\mathbb{R}e$ et $\mathbb{R}X_l$ sont orientés de sorte que $[\mathbb{R}v]\circ[\mathbb{R}e]=+1$, et $0 \leq \tilde{k} \leq k$. Considérons alors une famille continue $(C_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses telle que pour tout $t \in \mathbb{R}, C_t \subset Y_t$, et telle que C_0 est de classe $(a+kb, b)$ dans Y_0. Lorsque $t > 0$ est suffisament petit, puisque C_0 ne contient pas le diviseur exceptionnel de Y_0, le nombre de points d'intersection entre C_t et e_t est majoré par $C_0 \circ e_0 = a + kb - mb$. Or, la partie réelle d'une des deux courbes $C_D^{\pm}$, disons C_D^+, peut être orientée de sorte que sa classe d'homologie dans $H_1(\mathbb{R}X_l;\mathbb{Z})$ soit $(a - lb, b)$. Par suite, lorsque $t > 0$ est suffisament petit, le nombre de points d'intersection entre e_t et toute courbe C de Y_t qui est dans la même composante de $|D| \setminus \Delta_D$ que C_D^+ est minoré par $[\mathbb{R}C]\circ[\mathbb{R}e_t] = [\mathbb{R}C_D^+]\circ[\mathbb{R}e_t] = a - (l - \tilde{k})b$. Comme $a - (l - \tilde{k})b > a + kb - mb$, quelle que soit la famille $(C_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses choisie comme ci-dessus, lorsque $t > 0$ est suffisament petit, C_t ne peut pas être dans la même composante de $|D| \setminus \Delta_D$ que C_D^+, et donc l'élément de E_D réalisé par C_D^+ n'est pas dans l'image de f_D.

Démontrons à présent le lemme 11.4. La partie réelle de C_D est constituée d'un ovale et d'une section donnée dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $P(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + Q(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0 = 0$. Par construction, l'ovale est situé à l'intérieur d'une boucle formée par cette section entre deux racines consécutives α_{a-lb} et α_1 de Q. Par suite, pour toute courbe C de X_l qui se déforme sur C_D, le triplet $(\mathbb{R}X_l, \mathbb{R}C, \mathbb{R}e)$ est isotope à $(\mathbb{R}X_l, \mathbb{R}C_D, \mathbb{R}e)$. En effet, le nombre de points d'intersection entre la section de $\mathbb{R}C_D$ et le diviseur exceptionnel est par construction $a - lb = e \circ C_D$. Au cours d'une déformation, l'ovale de $\mathbb{R}C_D$ ne peut donc pas traverser le diviseur exceptionnel puisque ce nombre d'intersection est déjà maximal. Par suite, les deux racines consécutives α_{a-lb} et α_1 ne peuvent se transformer en une racine double puis disparaitre en deux racines imaginaires conjuguées, ce qui force le résultat.

Soit v une fibre réelle intersectant l'ovale de $\mathbb{R}C_D$, et x le point d'intersection entre $\mathbb{R}C_D$ et v qui n'appartient pas à l'ovale de $\mathbb{R}C_D$. Soit C une courbe algébrique réelle lisse de X_l située dans la même classe de déformation que C_D. Au cours d'une déformation entre C_D et C, le point marqué x de $\mathbb{R}C_D$ se transforme en un point y de $\mathbb{R}C$. Le revêtement double d'orientation de $\mathbb{R}X$ est un tore T^2. La courbe $\mathbb{R}C$ se relève en une courbe $\mathbb{R}\widetilde{C}$ de T^2 possédant deux points marqués y_1, y_2. Notons $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2$ des fibres réelles orientées de T^2 situées de part et d'autre de y_1 et y_2, et s_1, s_2 des sections orientées dans ce tore reliant y_1 à y_2 et y_2 à y_1 sans couper la courbe $\tilde{e}$ qui relève le diviseur exceptionnel de $\mathbb{R}X$. Les fibres $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2$ peuvent être orientées de façon compatible sur le tore, et les sections s_1, s_2 de façon compatible avec une orientation fixée de la base, comme sur la figure suivante, où la courbe en pointillé représente la courbe $\mathbb{R}\widetilde{C}$:



La courbe $\mathbb{R}\widetilde{C} \setminus \{y_1, y_2\}$ est constitée de deux parties $\mathbb{R}\widetilde{C}_1$ et $\mathbb{R}\widetilde{C}_2$, échangées par l'involution du revêtement. Ces parties peuvent être orientées de sorte que :

$$[\mathbb{R}\widetilde{C}_1] = (a - lb)[v_1] + [s_1] \in H_1(T^2, \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}),$$

$$[\mathbb{R}\widetilde{C}_2] = -(a-lb)[v_2] + [s_2] \in H_1(T^2, \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}).$$

En effet, ces égalités sont clairement vérifiées lorsque la construction est appliquée à la courbe C_D, et ces calculs homologiques restent invariants par isotopie de la bouteille de Klein qui préserve la diviseur exceptionnel.

Or la courbe $\mathbb{R}e_t$ se relève en une courbe $\mathbb{R}\tilde{e}_t$ dans le tore T^2, qui peut être orientée de sorte que :

$$[\mathbb{R}\tilde{e}_t] = \tilde{k}([v_1] - [v_2]) + \tilde{e} \in H_1(T^2 \setminus \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}),$$

où $\tilde{e}$ relève le diviseur exceptionnel de $\mathbb{R}X$ et $-k-2 \leq \tilde{k} \leq k+2$. En effet, soit σ_0 une section de classe $(m,1)$ dans X_m. Comme cette classe est numériquement effective, d'après le théorème 10.3, il existe une famille continue en $t \in \mathbb{R}$ de sections algébriques réelles lisses $\sigma_t \in Y_t$ qui prolonge σ_0. Lorsque $t \neq 0$, σ_t est de classe $(l+k,1)$ dans X_l et s'écrit dans la carte U comme le lieu des zéros d'un polynôme $\widetilde{P}(\tilde{x}_1)\tilde{y}_1 + \widetilde{Q}(\tilde{x}_1)\tilde{y}_0 = 0$, où $\widetilde{P}$ est de degré $l+k$ et $\widetilde{Q}$ de degré k. Comme le diviseur exceptionnel de X_m n'intersecte pas σ_0, lorsque $t > 0$ est suffisament petit, e_t est également disjointe de σ_t. La courbe $\mathbb{R}\sigma_t$ se relève donc en une courbe $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t$ qui est disjointe de $\mathbb{R}\tilde{e}_t$. Soient z_1, z_2 les points d'intersections entre $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t$ et les fibres de T^2 passant par y_1, y_2. La courbe $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t \setminus \{z_1, z_2\}$ est constitée de deux parties $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^1$ et $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^2$, invariantes par l'involution du revêtement. Ces parties peuvent être orientées de sorte que :

$$[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^1] = k'[v_1] + [s_1'] \in H_1(T^2, \{z_1, z_2\}; \mathbb{Z}),$$

$$[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^2] = -k'[v_2] + [s_2'] \in H_1(T^2, \{z_1, z_2\}; \mathbb{Z}),$$

où s_1', s_2' sont des sections de T^2 reliant z_1 à z_2 et z_2 à z_1 sans couper $\tilde{e}$, et $-k \leq k' \leq k$. Comme $\mathbb{R}\tilde{e}_t$ est disjointe de $\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t$, les indices d'intersection $[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^1] \circ [\mathbb{R}\tilde{e}_t]$ et $[\mathbb{R}\tilde{\sigma}_t^2] \circ [\mathbb{R}\tilde{e}_t]$ sont nuls, et il suit :

$$[\mathbb{R}\tilde{e}_t] = k'([v_1] - [v_2]) + [\tilde{e}] \in H_1(T^2 \setminus \{z_1, z_2\}; \mathbb{Z}),$$

d'où il découle :

$$[\mathbb{R}\tilde{e}_t] = \tilde{k}([v_1] - [v_2]) + [\tilde{e}] \in H_1(T^2 \setminus \{y_1, y_2\}; \mathbb{Z}),$$

où $-k-2 \leq \tilde{k} \leq k+2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}\tilde{e}_t] \circ [\mathbb{R}\widetilde{C}_1] &= \big(\tilde{k}([v_1] - [v_2]) + [\tilde{e}]\big)\big((a-lb)[v_1] + [s_1]\big) \\ &= -\tilde{k} + (a-lb) \\ &\geq a - lb - k - 2. \end{aligned}$$

On en déduit que le nombre de points d'intersection entre $\mathbb{R}e_t$ et $\mathbb{R}C$ est minoré par $a - lb - k - 2$. Mais si $C_t \subset Y_t$ est une famille continue en $t \in \mathbb{R}$ de courbes algébriques réelles lisses telle que C_0 est de classe $(a+kb, b)$ dans Y_0, alors lorsque $t > 0$ est suffisament petit, $|C_t \cap e_t| = |C_0 \cap e_0| = C_0 \circ e_0 = a + kb - mb$. Par hypothèse, puisque le cas $b = 3$, $k = 1$ a été écarté, $a + kb - mb < a - lb - 2 - k$, donc C_t ne peut pas être dans la même classe de déformation que C_D dans X_l. $\square$

Démonstration du corollaire 11.2 :

Notons $[A] = (a+kb)[v] + b[e]$, nous allons construire explicitement un champ de vecteurs tangents ξ de classe C^1 sur la variété Y qui est holomorphe au voisinage de $\mathbb{R}Y$ et tel que $dc \circ \xi = \xi \circ c$ où c est l'involution antiholomorphe de Y, $d\pi \circ \xi = 0$ où π est la projection $Y \to \mathbb{C}P^1$ qui à $(t, x_1, (y_1 : y_0))$ associe x_1, et $dp \circ \xi = \frac{\partial}{\partial t}$.

Il découle de ces propriétés que le flot associé à ce champ de vecteurs fournit une famille de difféomorphismes $\Theta_t : Y_0 \to Y_t$ qui préservent la structure réelle et la structure de fibré, et dont la

différentielle est J-holomorphe sur $\mathbb{R}Y_0$. Si C_t est une courbe algébrique réelle lisse de Y_t, $\Theta_t^{-1}(C_t)$ est donc une courbe flexible réelle de Y_0. Choisissons comme courbe C_t une courbe de classe (a,b) de X_l dont le schéma réel n'est réalisé par aucune courbe de l'image de f_D, ce qui existe d'après la proposition 11.1. La courbe $\Theta_t^{-1}(C_t)$ n'est alors isotope à aucune courbe algébrique réelle de classe $(a+kb,b)$ de X_m, puisque son schéma réel n'est réalisé par aucune de ces courbes, et le corollaire 11.2 est démontré.

Il s'agit donc de construire le champ de vecteurs ξ. Soit g une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui commute avec la conjugaison complexe, qui n'a pas de pôle réel et qui satisfait $g(x_1) = (\frac{1}{x_1})^k + (\frac{1}{x_1})^m + o(\frac{1}{x_1})$ lorsque $|x_1|$ est voisin de l'infini. Modifions cette fonction g au voisinage de ses pôles de façon à obtenir une fonction $\tilde{g}$ bien définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, de classe C^∞, qui commute avec la conjugaison complexe et qui est holomorphe au voisinage de $\mathbb{R}$ (les pôles de g ont été remplacés par des zéros d'indices négatifs). Soient alors $\xi_{\mathcal{U}}$ et $\xi_{\mathcal{V}}$ les champs de vecteurs tangents sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ définis par $\xi_{\mathcal{U}}(t_1,x_1,(y_1:y_0)) = \frac{\partial}{\partial t_1} + \tilde{g}(x_1)\frac{\partial}{\partial y_1}$, et $\xi_{\mathcal{V}}(t_2,x_2,(z_1:z_0)) = \frac{\partial}{\partial t_2} + x_2^{-m}(\tilde{g}(\frac{1}{x_2}) - x_2^k))\frac{\partial}{\partial z_1}$. Par définition de $\tilde{g}$, $\xi_{\mathcal{V}}$ est bien défini même au point $x_2 = 0$, et est holomorphe en ce point. Ces champs $\xi_{\mathcal{U}}$ et $\xi_{\mathcal{V}}$ se recollent et définissent le champ ξ sur Y, puisqu'on vérifie facilement que $\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} + x_2^k\frac{\partial}{\partial y_1}$, et $\frac{\partial}{\partial z_1} = x_2^m\frac{\partial}{\partial y_1}$. $\square$

Remarque : La famille de difféomorphismes $\Theta_t : Y_0 \to Y_t$ construite dans la démonstration du corollaire 11.2 sera utilisée dans la suite.

11.2 Injectivité de f_D, courbes isotopes de classes de déformation distinctes

Dans ce §11.2, on suppose toujours que $\rho(D)$ est **numériquement effectif**, et on fixe $k = 1$.

Proposition 11.5 *Lorsque m est pair, et que $\rho(D)\circ e = 0$ et $\rho(D)\circ v \geq 3$, ou bien que $\rho(D)\circ e \geq 2$ et $\rho(D)\circ v \geq 5$, l'application f_D n'est pas injective. Il en est de même lorsque m est impair, que $\rho(D)\circ e \geq 1$ et que $\rho(D)\circ v \geq 3$.*

Corollaire 11.6 *Soit m un entier supérieur ou égal à 2, et $\rho(D)$ un diviseur de X_m satisfaisant les conditions de la proposition 11.5. Alors, il existe dans le système linéaire complet $\mathbb{R}|\rho(D)|$ des diviseurs réels lisses qui sont isotopes, mais qui pourtant ne sont pas dans une même classe de déformation de X_m.*

Rappelons que deux courbes C_0 et C_1 sont dites *isotopes* dans X_m s'il existe un chemin continu de difféomorphismes de X_m reliant l'identité à un difféomorphisme qui envoie C_0 sur C_1, chaque difféomorphisme devant commuter avec la structure réelle ; alors qu'on dit que deux courbes algébriques réelles lisses C_0 et C_1 de X_m sont dans *la même classe de déformation* s'il existe un chemin continu de courbes algébriques réelles lisses dont les extrémités sont C_0 et C_1.

Démonstration du corollaire 11.6 :

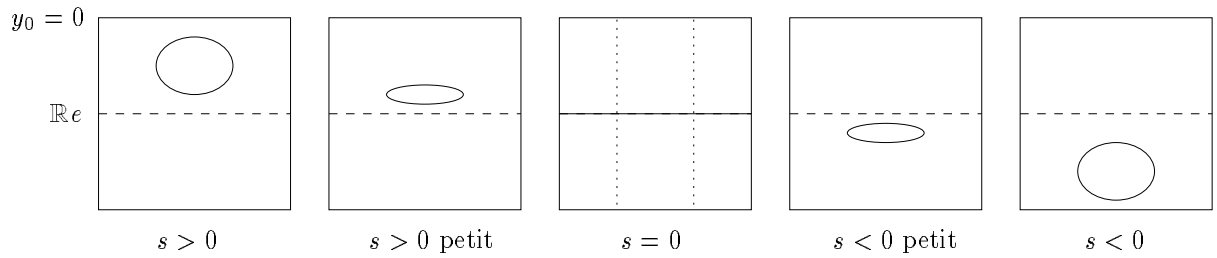
Notons $(a+kb,b)$ la classe de $\rho(D)$. D'après la proposition 11.5, il existe deux courbes C_0 et C_1 de classe $(a+kb,b)$ dans X_m qui réalisent deux éléments différents de $E_{\rho(D)}$ mais qui ont même image par f_D. Ces courbes ne se déforment donc pas l'une sur l'autre dans X_m. Par contre, ces courbes se prolongent en un chemin continu (C_s) de sous-variétés de dimension 2 de $p^{-1}(\mathbb{R}^+) \subset Y$, chacune invariante par l'involution antiholomorphe, tel que $C_s \subset Y_{t(s)}$ où $t(s)$ est une fonction continue de $s \in [0,1]$. Le chemin $\Theta_{t(s)}^{-1}(C_s)$, où Θ_t est la famille de difféomorphismes $Y_0 \to Y_t$ construite dans la démonstration du corollaire 11.2, est un chemin continu de courbes flexibles réelles de X_m,

d'extrémités C_0 et C_1. $\square$

Indiquons dès à présent la méthode utilisée pour démontrer la proposition 11.5. Pour chaque système linéaire $|\rho(D)|$, on construit explicitement deux courbes C_0 et C_1 de $Y_0 = X_m$ qui ne sont pas dans la même classe de déformation de X_m du fait de leur position mutuelle par rapport au diviseur exceptionnel. Pourtant, on construit une déformation $(C_s)_{s\in[0,1]}$ de ces courbes dans Y. Par définition de f_D, ceci entraine le résultat. Le chemin $(C_s)_{s\in[0,1]}$ est obtenu en perturbant un produit de courbes. L'élément essentiel de ce produit est construit dans le lemme 11.7 suivant, et généralisé dans le lemme 11.8.

Lemme 11.7 *Supposons que $m = 2$, $l = 0$, $k = 1$, et que Y est la déformation de X_2 sur X_0 associée. Soit $(P_t^s)_{s,t\in\mathbb{R}}$ la famille de polynômes homogènes de degré 2 en $(y_1 : y_0)$: $P_t^s(x_1, y_1, y_0) = (1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2)y_1^2 - 2(s + 4tx_1^3)y_1y_0 + (s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)y_0^2$. Quels que soient $s, t \in \mathbb{R}$, l'adhérence dans Y_t de $\{(t, x_1, (y_1 : y_0)) \in Y_t \cap \mathcal{U} \mid P_t^s(x_1, y_1, y_0) = 0\}$ est une courbe algébrique réelle C_t^s de Y_t. La courbe C_t^s est singulière si et seulement si $s = t = 0$, de classe $(4, 2)$ dans Y_0 lorsque $t = 0$, et de classe $(2, 2)$ dans Y_t lorsque $t \neq 0$.*

Remarque : Si $t = 0$ et $s \neq 0$, la partie réelle de la courbe C_0^s est constitué d'un ovale n'intersectant pas les sections $y_0 = 0$ et $y_1 = 0$. Lorsque $s = 0$, c'est la réunion de deux couples de fibres imaginaires conjuguées et de deux fois la section exceptionnelle d'équation $y_1 = 0$. Le chemin $(C_0^s)_{s\in\mathbb{R}}$ est donc un chemin de courbes algébriques réelles de classe $(4, 2)$ de X_2, dont le schéma réel est constitué d'un ovale qui "traverse" la section exceptionnelle, comme représenté sur la figure suivante :



Démonstration du lemme 11.7 :

Lorsque $t = 0$, le polytope de Newton du polynôme P_t^s est l'enveloppe convexe des sommets $(0, 0)$, $(0, 2)$ et $(4, 2)$. La courbe C_0^s est donc bien de classe $(4, 2)$ dans Y_0. Lorsque $t \neq 0$, l'inverse de l'isomorphisme $\Psi : Y_t \to X_0$ introduit dans le §10.1, est donné dans les cartes $U \to \mathcal{U}$ par $(\tilde{x}_1, (\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0)) \mapsto (\tilde{x}_1, (t\tilde{y}_0 : \tilde{x}_1\tilde{y}_0 - t\tilde{y}_1))$. Notons donc dans ce cas $\widetilde{P}_t^s(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{y}_0) = P_t^s(\tilde{x}_1, t\tilde{y}_0, \tilde{x}_1\tilde{y}_0 - t\tilde{y}_1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_t^s &= (4\tilde{x}_1^4 - 2\tilde{x}_1^3 + 3\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_1 + 1)t^2\tilde{y}_0^2 - 2(s + 4t\tilde{x}_1^3)(t\tilde{x}_1\tilde{y}_0^2 - t^2\tilde{y}_0\tilde{y}_1) + (s^2 + 2t^2\tilde{x}_1 + 4t^2\tilde{x}_1^2)(\tilde{x}_1^2\tilde{y}_0^2 \\
&\quad -2t\tilde{x}_1\tilde{y}_0\tilde{y}_1 + t^2\tilde{y}_1^2) \\
&= \big((s^2 + 3t^2)\tilde{x}_1^2 + (t^2 - 2st)\tilde{x}_1 + t^2\big)\tilde{y}_0^2 + (-4t^3\tilde{x}_1^2 - 2ts^2\tilde{x}_1 + 2st^2)\tilde{y}_0\tilde{y}_1 + (s^2t^2 + 2t^4\tilde{x}_1 + 4t^4\tilde{x}_1^2)\tilde{y}_1^2.
\end{aligned}$$

Le polytope de Newton de ce polynôme $\widetilde{P}_t^s$ est l'enveloppe convexe des sommets $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(2, 2)$. Par suite, la courbe C_t^s est de classe $(2, 2)$ dans Y_t lorsque $t \neq 0$.

Il s'agit à présent de montrer que seule la courbe C_0^0 est singulière. Commençons par montrer que C_t^s n'a pas de singularité sur la fibre $x_2 = 0$ et sur la section $y_0 = 0$ si $(s, t) \neq (0, 0)$. En effet,

cette courbe a une singularité sur la section $y_0 = 0$ en dehors de la fibre $x_2 = 0$ si et seulement si il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que les trois polynômes suivant ont une racine commune en $(x, 0)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} P & = & (1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2) - 2(s + 4tx_1^3)y_0 + (s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)y_0^2 \\ P_{y_0} & = & -2(s + 4tx_1^3) + 2(s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)y_0 \\ P_{x_1} & = & ((1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2))' - 2(s + 4tx_1^3)'y_0 + (s^2 + 2t^2x_1 + 4t^2x_1^2)'y_0^2, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $(1-x_1+x_1^2)(1+2x_1+4x_1^2) = 0$, $-2(s+4tx_1^3) = 0$ et $((1 - x_1 + x_1^2)(1 + 2x_1 + 4x_1^2))' = 0$, ce qui n'est pas le cas. Le changement de carte $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est donné par l'application $(t, x_2, (z_1 : z_0)) \mapsto (t, \frac{1}{x_2}, (x_2^2z_1 + tx_2z_0 : z_0))$. Notons $Q_t^s(x_2, z_1, z_0) = P_t^s(\frac{1}{x_2}, x_2^2z_1 + tx_2z_0, z_0)$. Ce polynôme est égal à :

$$\frac{1}{x_2^4}(4-2x_2+3x_2^2+x_2^3+x_2^4)(x_2^4z_1^2+2tx_2^3z_1z_0+t^2x_2^2z_0^2)-\frac{2}{x_2^3}(sx_2^3+4t)(x_2^2z_1z_0+tx_2z_0^2)+\frac{1}{x_2^2}(s^2x_2^2+2t^2x_2+4t^2)z_0^2$$

$$= (4-2x_2+3x_2^2+x_2^3+x_2^4)z_1^2+(-4t+6tx_2+2(t-s)x_2^2+2tx_2^3)z_1z_0+(3t^2+s^2+(t^2-2st)x_2+t^2x_2^2)z_0^2$$

La courbe C_t^s a donc une singularité sur la fibre $x_2 = 0$ en dehors de la section $y_0 = 0$ si et seulement si il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que les trois polynômes suivant ont une racine commune en $(0, z)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q & = & (4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)z_1^2 + (-4t + 6tx_2 + 2(t - s)x_2^2 + 2tx_2^3)z_1 + (3t^2 + s^2 \\ & & +(t^2 - 2st)x_2 + t^2x_2^2) \\ Q_{z_1} & = & 2(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)z_1 + (-4t + 6tx_2 + 2(t - s)x_2^2 + 2tx_2^3) \\ Q_{x_2} & = & (-2 + 6x_2 + 3x_2^2 + 4x_2^3)z_1^2 + (6t + 4(t - s)x_2 + 6tx_2^2)z_1 + ((t^2 - 2st) + 2t^2x_2), \end{array}\right.$$

c'est-à-dire s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $4z^2 - 4tz + 3t^2 + s^2 = 0$, $8z - 4t = 0$ et $-2z^2 + 6tz + (t^2 - 2st) = 0$, ce qui n'est pas le cas sauf si $s = t = 0$. Enfin, le point de coordonnées $x_2 = z_0 = 0$ n'est jamais sur la courbe C_t^s, quels que soient s et t. Finalement, dès que s et t sont non nuls, la courbe C_t^s n'a pas de singularité sur la fibre $x_2 = 0$ et sur la section $y_0 = 0$.

Lorsque s et t sont non nuls, la courbe C_t^s est donc singulière si et seulement si le polynôme P_t^s a une singularité en $(x_1, y_1, 1) \in \mathbb{C}^3$. De plus, si $t \neq 0$, P_t^s est singulier en $(x_1, y_1, 1)$ si et seulement si $P_1^{\frac{s}{t}}$ est singulier en $(x_1, ty_1, 1)$. Pour démontrer le lemme 11.7, il suffit donc de voir que P_0^s est singulier si et seulement si $s = 0$, et que P_1^s n'est jamais singulier. Or P_0^s est singulier lorsque le discriminant $s^2 - s^2(1 + X_1 + 3X_1^2 - 2X_1^3 + 4X_1^4) = -s^2X_1(1 + 3X_1 - 2X_1^2 + 4X_1^3)$ a une racine double, ce qui n'arrive que lorsque $s = 0$ puisque :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 + 3X_1 - 2X_1^2 + 4X_1^3 & = & 0 \\ 12X_1^2 - 4X_1 + 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 12X_1^2 - 4X_1 + 3 & = & 0 \\ -2X_1^2 + 6X_1 + 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 12X_1^2 - 4X_1 + 3 & = & 0 \\ 32X_1 + 21 & = & 0, \end{array}\right.$$

et $12X_1^2 - 4X_1 + 3$ n'a pas de racine réelle, donc pas de racine commune avec $32X_1 + 21$.

De même, P_1^s est singulier lorsque le discriminant Δ_y suivant a une racine double :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_y & = & (s + 4x_1^3)^2 - (s^2 + 2x_1 + 4x_1^2)(4x_1^4 - 2x_1^3 + 3x_1^2 + x_1 + 1) \\ & = & -x_1(4(s^2 + 2)x_1^3 + 2(-s^2 - 4s + 5)x_1^2 + 3(s^2 + 2)x_1 + (s^2 + 2)) \end{array}$$

Mais $x_1 = 0$ n'est jamais racine double de Δ_y, et :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4(s^2+2)x_1^3 + 2(-s^2-4s+5)x_1^2 + 3(s^2+2)x_1 + (s^2+2) & = & 0 \\ 12(s^2+2)x_1^2 + 4(-s^2-4s+5)x_1 + 3(s^2+2) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 12(s^2+2)x_1^2 + 4(-s^2-4s+5)x_1 + 3(s^2+2) & = & 0 \\ 2(-s^2-4s+5)x_1^2 + 6(s^2+2)x_1 + 3(s^2+2) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 12(s^2+2)x_1^2 + 4(-s^2-4s+5)x_1 + 3(s^2+2) & = & 0 \\ x_1((14s^2+8s+14)x_1 + (-10s^2-16s+8)) & = & 0 \end{array} \right.$$

Le discriminant du premier trinôme est $4(-s^2-4s+5)^2 - 36(s^2+2)^2 = (-8s^2-8s-2)(4s^2-8s+22)$. Or $(4s^2-8s+22)$ est toujours strictement positif, et $(-8s^2-8s-2)$ est toujours négatif et ne s'annule qu'en $s = -\frac{1}{2}$. Ainsi, si $s \neq -\frac{1}{2}$, les racines du premier trinôme sont complexes, et celles du second réelles, ils n'ont donc pas de racines communes, et si $s = -\frac{1}{2}$, le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (3+24)x_1^2 + (-1+8+20)x_1 + \frac{3}{4} + 6 & = & 0 \\ x_1((\frac{7}{2} - 4 + 14)x_1 + (-\frac{5}{2} + 8 + 8)) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (2x_1+1)^2 & = & 0 \\ x_1(x_1+1) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ici encore, les trinômes n'ont pas de racine commune. □

Lemme 11.8 *Soient m, l deux entiers positifs tels que $m = l+2$, et Y^m la déformation de X_m sur X_l associée, munie de sa structure réelle c_Y. Il existe une famille continue $(C_\theta)_{\theta\in[0,\pi]}$ de courbes algébriques réelles lisses et une fonction continue $t : [0,\pi] \to \mathbb{R}_+$ telles que :*

- *Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $C(\theta) \subset Y_{t(\theta)}$, et $t(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta \in \{0,\pi\}$. Les courbes $C(0)$ et $C(\pi)$ sont de classe $(2m,2)$ dans Y_0^m, et lorsque $\theta \in]0,\pi[$, la courbe $C(\theta)$ est de classe $(2l+2,2)$ dans $Y_{t(\theta)}$.*
- *Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, la courbe $C(\theta)$ est transverse à la section $y_0 = 0$ de $Y_{t(\theta)}$.*
- *Les parties réelles de $C(0)$ et $C(\pi)$ sont constituées d'un ovale n'intersectant ni les sections $y_0 = 0$ et $\mathbb{R}e$ ni la fibre $x_2 = 0$, et situé respectivement au-dessus ($y_1 > 0$, $y_0 = 1$) et en-dessous ($y_1 < 0$, $y_0 = 1$) du diviseur exceptionnel.*

De plus, cette famille peut être choisie arbitrairement proche dans Y^m de la courbe de Y_0^m d'équation dans $\mathcal{V}$: $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)x_2^{2m-4}z_1^2 = 0$, ce qui signifie que cette famille peut être définie dans Y^m par une équation de la forme $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)x_2^{2m-4}z_1^2 + P^\theta(t, x_2, z_1, z_0) = 0$, où P^θ est un polynôme dont les coefficients peuvent être choisis de module arbitrairement petit.

Démonstration :

On démontre ce résultat par récurrence sur m.

Si $m = 2$, fixons $\epsilon > 0$ et pour $\theta \in [0,\pi]$, posons $C(\theta) = C_{\epsilon\sin(\theta)}^{\epsilon\cos(\theta)}$ où C_t^s est la famille de courbes introduite dans le lemme 11.7. La fonction t est alors donnée par $\theta \mapsto \epsilon\sin(\theta)$, et puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit, cette famille peut être choisie arbitrairement proche de la courbe C_0^0 d'équation dans $\mathcal{V}$: $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)z_1^2 = 0$. Les parties réelles de $C(0)$ et $C(\pi)$ sont constituées d'un ovale n'intersectant pas la fibre $x_2 = 0$ et les sections $y_0 = 0$ et $\mathbb{R}e$ de Y_0, et situé respectivement au-dessus et en-dessous de $\mathbb{R}e$. Par conséquent, cette famille convient et le lemme est démontré pour $m = 2$.

Supposons à présent le lemme démontré au rang $m \geq 2$, c'est-à-dire supposons construite une telle famille $C(\theta)$ de courbes algébriques réelles lisses dans la déformation Y^m associée à m. Montrons ce lemme au rang $m+1$.

La variété Y^m est définie comme le recollement de deux cartes $\mathcal{U}^m$, $\mathcal{V}^m$ isomorphes à $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}P^1$, par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}P^1 & \to & \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}P^1 \\ (t, x_1, (y_1 : y_0)) & \mapsto & (t, x_2, (z_1 : z_0)) \end{array}$$

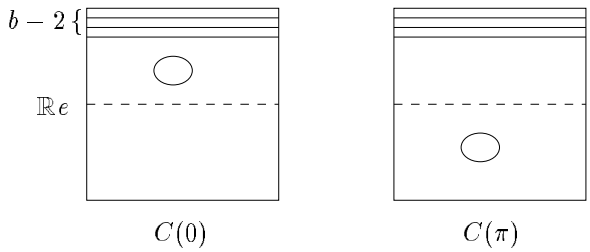
où $x_1x_2 = 1$ et $z_0y_1 = x_2^m z_1 y_0 + t x_2 z_0 y_0$. Notons τ la transformation quadratique $Y^{m+1} \to Y^m$ définie dans les cartes $\mathcal{U}^{m+1} \to \mathcal{U}^m$ par l'identité, et dans les cartes $\mathcal{V}^{m+1} \to \mathcal{V}^m$ par $(\tilde{t}, \tilde{x}_2, (\tilde{z}_1 : \tilde{z}_0)) \mapsto (t, x_2, (z_1 : z_0))$ où $t = \tilde{t}$, $x_2 = \tilde{x}_2$, $z_1 = \tilde{x}_2\tilde{z}_1$ et $z_0 = \tilde{z}_0$. Cette transformation τ est le résultat d'un éclatement dans chaque surface Y_t^m du point de coordonnée $x_2 = z_1 = 0$, puis d'une contraction dans chacune de ces surfaces de la transformée stricte de la fibre $x_2 = 0$. La transformée stricte $\widetilde{C}(\theta)$ de la famille $C(\theta)$ de Y^m est une famille de courbes algébriques réelles de Y^{m+1}, telle que pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $\widetilde{C}(\theta) \subset Y_{t(\theta)}^{m+1}$, et qui peut être choisie arbitrairement proche de la courbe d'équation dans $\mathcal{V}^{m+1}$: $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)x_2^{2m-2}z_1^2 = 0$ qui est la transformée stricte de la courbe d'équation $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)x_2^{2m-4}z_1^2 = 0$ dans $\mathcal{V}^m$. De plus, chaque courbe $\widetilde{C}(\theta)$ a pour unique singularité un point double isolé au point $\tilde{x}_2 = \tilde{y}_0 = 0$. Perturbons ce point double de manière continue en θ pour le faire disparaitre, ce qui est possible d'après le lemme de Morse à paramètres. On obtient ainsi une famille $\widehat{C}(\theta)$ de courbes algébriques réelles lisses de Y^{m+1}, chaque courbe $\widehat{C}(\theta)$ étant transverse à la section d'équation $\tilde{y}_0 = \tilde{z}_0 = 0$. Les parties réelles de $\widehat{C}(0)$ et $\widehat{C}(\pi)$ sont constituées d'un ovale n'intersectant pas la fibre $\tilde{x}_2 = 0$ et les sections $\tilde{y}_0 = 0$ et $\mathbb{R}e$, et situé respectivement au-dessus et en-dessous du diviseur exceptionnel de Y_0^{m+1}. Comme cette famille $\widehat{C}(\theta)$ peut être choisie arbitrairement proche de la courbe d'équation $(4 - 2x_2 + 3x_2^2 + x_2^3 + x_2^4)x_2^{2m-2}z_1^2 = 0$ dans $\mathcal{V}^{m+1}$, le lemme est démontré. $\square$

Démonstration de la proposition 11.5 :

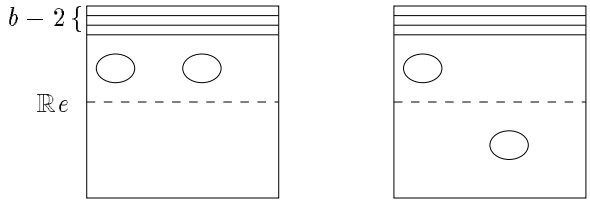
Notons $(a + kb, b)$ la classe de $\rho(D)$, et commençons par le cas où m **est pair**.

Dans ce cas, supposons pour commencer que $\rho(D) \circ e = a + kb - mb = 0$ et $\rho(D) \circ v = b \geq 3$. Perturbons le produit de $b-2$ sections de classe $(m, 1)$ voisines de la section $y_0 = 0$, de façon à obtenir une courbe algébrique réelle lisse de classe $(m(b-2), b-2)$ dans X_m, dont le schéma réel est constitué de $b-2$ composantes de classe $(m, 1)$ voisines de la section $y_0 = 0$. D'après la remarque suivant le théorème 10.3, cette courbe A_0 se prolonge en une famille continue $(A_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A_t \subset Y_t$. On considère alors le produit $A_{t(\theta)}C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 11.8, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta \in [0, \pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta \in [0, \pi]$. Or, d'après le lemme 11.8, la famille $C(\theta)$ peut être choisie de sorte que les seules singularités des courbes $A_{t(\theta)}C(\theta)$ sont des points doubles voisins des points d'intersections des $b-2$ sections choisies initialement (voisines de $y_0 = 0$) avec $C(\theta)$. Perturbons donc chacun de ces points doubles, ceci de façon continue en θ, pour obtenir un chemin de courbes algébriques lisses $B(\theta)$ dans Y^m. Les courbes $B(0)$ et $B(\pi)$ sont de classe (mb, b) dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque l'ovale de ces courbes ne peut traverser le diviseur exceptionnel au cours d'une déformation, et qu'il ne se situe pas dans la même composante du tore $\mathbb{R}X_m$ privé de

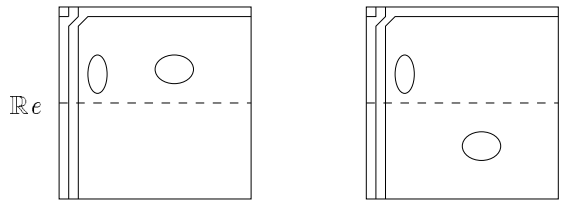
$\mathbb{R}e$ et des $b-2$ sections réelles.



Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $B(0)$ et $B(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $B(\theta)$ pour $\theta \in]0,\pi[$. Remarquons que la symétrie induite par l'application donnée dans la carte $\mathcal{U}$ par $(\tilde{x}_1,(\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0)) \mapsto (\tilde{x}_1,(-\tilde{y}_1 : \tilde{y}_0))$ échange les composantes de $|\rho(D)| \setminus \Delta_{\rho(D)}$ réalisées par $B(0)$ et $B(\pi)$. Lorsque $b \geq 5$, on peut construire de façon analogue des exemples où ce n'est plus le cas, en faisant intervenir un deuxième ovale, comme le suggère la figure suivante :



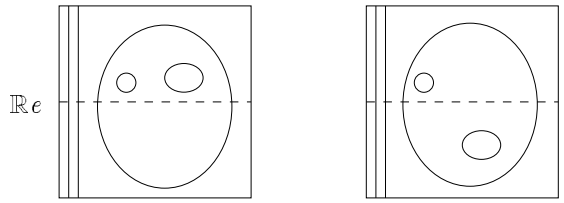
Supposons à présent que $a+kb-mb \geq 2$ et $b \geq 5$, et distinguons les cas où b est pair et impair. Commençons par le cas où b est impair. Perturbons le produit de $b-4$ sections de classe $(m,1)$ de X_m voisines de la section $y_0 = 0$, dont une est réelle et les $b-3$ autres imaginaires conjuguées, de $a+kb-mb$ fibres réelles distinctes voisines de la fibre $x_2 = 0$, et d'une courbe de classe $(2m,2)$ dont le schéma réel est constitué d'un ovale. La courbe de classe $(2m,2)$ est choisie voisine de deux fois la section $y_0 = 0$, et de sorte que l'ovale soit situé dans la même composante du complémentaire de ces fibres et de ces sections dans le tore $\mathbb{R}X_m$ que le point de coordonnées $x_1 = y_1 = 0$. Le produit de ces courbes est choisi de sorte que les seules singularités sont des points doubles, et tous les points doubles réels sont perturbés de la même manière. On obtient ainsi une courbe algébrique réelle lisse de classe $(a+kb-2m, b-2)$ de X_m, dont le schéma réel est constitué d'une composante de classe $(a+kb-mb)[\mathbb{R}v]+[\mathbb{R}e]$ dans $H_1(\mathbb{R}X_m;\mathbb{Z})$, et d'un ovale. D'après la remarque suivant le théorème 10.3, cette courbe A'_0 se prolonge en une famille continue $(A'_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'_t \subset Y_t$. On considère alors le produit $A'_{t(\theta)}C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 11.8, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta \in [0,\pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta \in [0,\pi]$ dont les seules singularités sont des points doubles. Perturbons chacun de ces points doubles de façon continue en θ, pour obtenir un chemin de courbes algébriques lisses $B'(\theta)$ dans Y. Les courbes $B'(0)$ et $B'(\pi)$ sont de classe $(a+kb,b)$ dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque les deux ovales de ces courbes ne sont pas situés dans les mêmes composantes du complémentaire de la section de la courbe et du diviseur exceptionnel dans $\mathbb{R}X_m$, et que cette position ne peut changer au cours d'une déformation, puisqu'aucun ovale ne peut traverser le diviseur exceptionnel.



$B'(0)$ $B'(\pi)$

Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $B'(0)$ et $B'(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $B'(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

Dans le cas où b est pair, et donc supérieur ou égal à six, on perturbe le produit de $b-6$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m, 1)$ de X_m voisines de la section $y_0 = 0$, de $a + kb - mb - 2$ fibres réelles distinctes voisines de la fibre $x_2 = 0$, et d'une courbe de classe $(4m + 2, 4)$ dont le schéma réel est constitué de deux ovales emboités. Cette dernière courbe est choisie voisine de quatre fois la section $y_0 = 0$ plus deux fois la fibre $x_2 = 0$, et de sorte que l'ovale extérieur englobe presque la totalité de la carte affine $x_2 y_0 \neq 0$. En particulier, cet ovale extérieur a deux points d'intersection avec le diviseur exceptionnel. On obtient ainsi une courbe algébrique réelle lisse de classe $(a + kb - 2m, b - 2)$ de X_m, dont le schéma réel est constitué de $a + kb - mb - 2$ fibres et de deux ovales emboités. D'après la remarque suivant le théorème 10.3, cette courbe A''_0 se prolonge en une famille continue $(A''_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A''_t \subset Y_t$. On considère alors le produit $A''_{t(\theta)} C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 11.8, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta \in [0, \pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta \in [0, \pi]$ dont les seules singularités sont des points doubles. Perturbons chacun de ces points doubles de façon continue en θ, de façon à obtenir un chemin de courbes algébriques lisses $B''(\theta)$ dans Y. Les courbes $B''(0)$ et $B''(\pi)$ sont de classe $(a + kb, b)$ dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque tous les points d'intersection du diviseur exceptionnel avec toute courbe située dans la même classe de déformation que $B''(\pi)$ sont réels, alors que ce n'est pas le cas avec toutes les courbes situées dans la même classe de déformation que $B''(0)$.

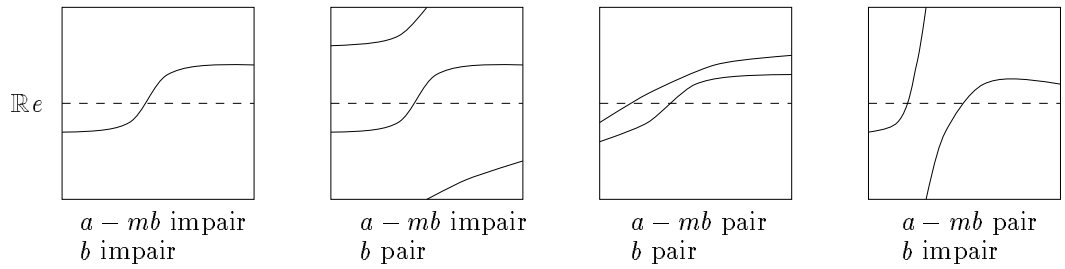


$B''(0)$ $B''(\pi)$

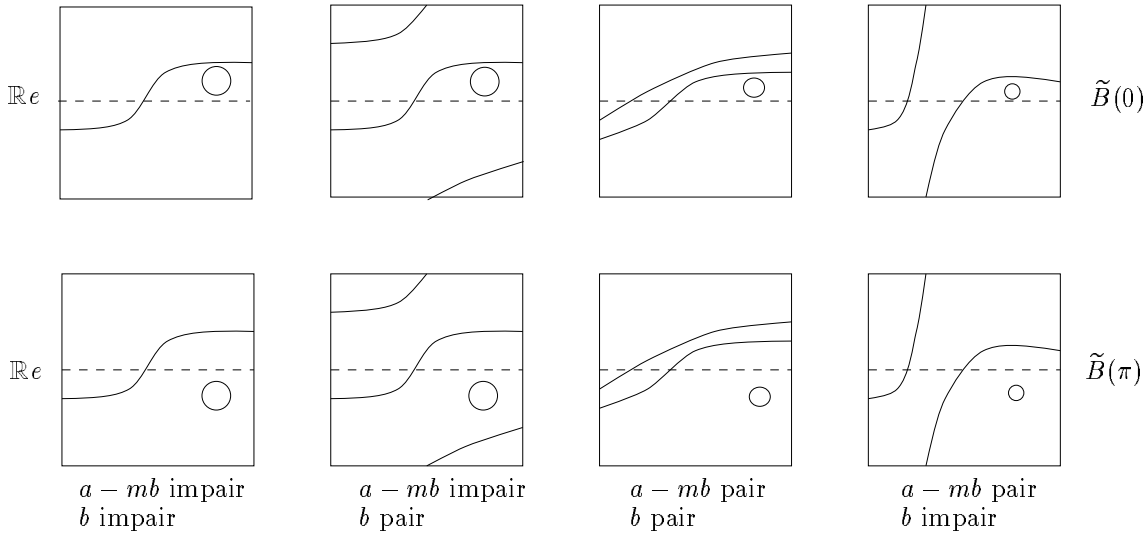
Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $B''(0)$ et $B''(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $B''(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi[$. Ceci achève la démonstration de la proposition 11.5 dans le cas où m est pair.

Supposons à présent que m **est impair**. Dans ce cas, par hypothèse, $a + kb - mb \geq 1$ et $b \geq 3$. Distinguons quatre cas selon les parités de $a+kb-mb$ et b. Si $a+kb-mb$ est impair et b est impair, perturbons le produit de $b-3$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m, 1)$ voisines de $y_0 = 0$ et d'une section réelle de classe $(a+kb-m(b-1), 1)$ dont tous les points d'intersection avec le diviseur exceptionnel sont réels. Si $a+kb-mb$ est impair et b est pair, perturbons le produit de $b-4$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m, 1)$, d'une section réelle de classe $(\frac{1}{2}(a + kb - m(b-2) - 1), 1)$ et d'une section réelle de classe $(\frac{1}{2}(a + kb - m(b-2) + 1), 1)$, toutes deux ayant tous leur points d'intersection avec le diviseur exceptionnel réels. Si $a + kb - mb$ est pair et b est pair, perturbons le

produit de $b-4$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m,1)$, et de deux sections réelles de classe $(\frac{1}{2}(a+kb-m(b-2)),1)$ ayant tous leur points d'intersection avec le diviseur exceptionnel réels. Enfin, si $a+kb-mb$ est pair et b est impair, perturbons le produit de $b-3$ sections imaginaires conjuguées de classe $(m,1)$, et d'une section réelle de classe $(a+kb-m(b-1),1)$ ayant tous ses points d'intersection avec le diviseur exceptionnel réels. Dans tous les cas, on obtient une courbe $\widetilde{A}_0$ de Y_0^m de classe $(a+kb-2m, b-2)$ qui peut être choisie arbitrairement proche du produit de $b-2$ fois la section $y_0=0$ et de $a+kb-mb$ fois la fibre $x_2=0$. Le schéma réel de $\widetilde{A}_0$ est représenté par la figure suivante :



D'après la remarque suivant le théorème 10.3, cette courbe $\widetilde{A}_0$ se prolonge en une famille continue $(\widetilde{A}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de courbes algébriques réelles lisses, telle que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\widetilde{A}_t\subset Y_t^m$. On considère alors le produit $\widetilde{A}_{t(\theta)}C(\theta)$, où $C(\theta)$ est la courbe introduite dans le lemme 11.8, $t(\theta)$ la fonction introduite dans ce lemme, et $\theta\in[0,\pi]$. On obtient ainsi un chemin de courbes algébriques singulières paramétré par $\theta\in[0,\pi]$. Or, d'après le lemme 11.8, la famille $C(\theta)$ peut être choisie de sorte que les seules singularités des courbes $\widetilde{A}_{t(\theta)}C(\theta)$ sont des points doubles. Perturbons donc chacun de ces points doubles, ceci de façon continue en θ, pour obtenir un chemin continu de courbes algébriques lisses $\widetilde{B}(\theta)$ dans Y. Les courbes $\widetilde{B}(0)$ et $\widetilde{B}(\pi)$ sont de classe $(a+kb,b)$ dans X_m et ne sont pas dans une même classe de déformation, puisque l'ovale de ces courbes ne peut traverser le diviseur exceptionnel au cours d'une déformation, et qu'il ne se situe pas dans la même composante de la bouteille de Klein $\mathbb{R}X_m$ privée de $\mathbb{R}e$ et des autres composantes de la courbe.



Les éléments de $E_{\rho(D)}$ réalisés par $\widetilde{B}(0)$ et $\widetilde{B}(\pi)$ sont donc différents, mais l'image par f_D de ces éléments est la même : c'est l'élément de E_D réalisé par $\widetilde{B}(\theta)$ pour $\theta\in]0,\pi[$. $\square$

Références

[1] V. I. Arnol'd. The situation of ovals of real plane algebraic curves, the involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms. *Funct. anal. appl.*, 5:169–176, 1971.

[2] A. Beauville. *Complex algebraic surfaces.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996.

[3] L. Brusotti. Sulla "piccola variazione" di una curva piana algebrica reala. *Rend. Rom. Accc. Lincei*, 30(5):375–379, 1921.

[4] A. I. Degtyarev and V. Kharlamov. Topological properties of real algebraic varieties : du coté de chez Rokhlin. *Uspekhi Mat. Nauk*, à paraitre.

[5] A. I. Degtyarev and V. I. Zvonilov. Rigid isotopy classification of real algebraic curves of bidegree $(3,3)$ on quadrics. *Mat. Zametki*, 66(6):810–815, 1999.

[6] A. Dold. *Lectures on algebraic topology.* Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition.

[7] J. Eliashberg and V. Kharlamov. Some remarks on the number of complex points of a real surface in a complex one. *Proc. Intern. Top. Conf. Leningrad*, pages 31–38, 1983.

[8] S. Fiedler. Cubics as tools to study the topology of M-curves of degree 9 in RP^2. *Prépublication*, 1999.

[9] S. Fiedler and S. Orevkov. A flexible affine M-sextic which is algebraically unrealizable. *Prépublication*, 1999.

[10] T. Fiedler. Pencils of lines and the topology of real algebraic curves. *Math. USSR-Izvestia*, 21:161–170, 1983.

[11] D. A. Gudkov. Topology of algebraic curves on a hyperboloid. *Russian Math. Surveys*, 34(6):27–35, 1979.

[12] D. A. Gudkov. A generalized Brusotti theorem for second-order curves on a surface. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(1):20–24, 96, 1980.

[13] D. Hilbert. Mathematische probleme. *Arch. Math. Phys. (3)*, 1:213–237, 1901.

[14] V. Kharlamov. Topology of real algebraic manifolds. In *I.G. Petrovsky, Selected Works*, volume 5, pages 509–550. Classics Soviet Math. Series, 1986.

[15] V. M. Kharlamov and O. Y. Viro. Extensions of the Gudkov-Rohlin congruence. In *Topology and geometry—Rohlin Seminar*, pages 357–406. Springer, Berlin, 1988.

[16] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures.* Springer-Verlag, New York, 1986. Translated from the Japanese by Kazuo Akao, With an appendix by Daisuke Fujiwara.

[17] H. F. Lai. Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 172:1–33, 1972.

[18] S. Lefschetz. Intersections and transformations of complexes and manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 28(1):1–49, 1926.

[19] S. Lefschetz. *Topology.* American Mathematical Society, New-York, 1930.

[20] A. Marin. Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles. pages 51–68. Univ. Paris VII, Paris, 1980.

[21] S. Matsuoka. Congruences for M- and $(M-1)$-curves with odd branches on a hyperboloid. *Bull. London Math. Soc.*, 24(1):61–67, 1992.

[22] G. Mikhalkin. The complex separation of real surfaces and extensions of Rokhlin congruence. *Invent. Math.*, 118(2):197–222, 1994.

[23] N. Mishachev. Complex orientation of plane M-curves of odd degree. *Funct. anal. appl.*, 9:342–343, 1975.

[24] J. R. Munkres. *Elementary differential topology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966. Lectures given at Massachusetts Institute of Technology, Fall, 1961. Revised edition. Annals of Mathematics Studies, No. 54.

[25] S. Orevkov and E. Shustin. Flexible algebraically unrealizable curves : rehabilitation of hilbert-rohn-gudkov approach. *Prépublication*, 2000.

[26] S. Y. Orevkov. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves. *Topology*, 38(4):779–810, 1999.

[27] V. A. Rokhlin. Complex orientations of real algebraic curves. *Funct. anal. appl.*, 8:331–334, 1974.

[28] V. A. Rokhlin. Complex topological characteristics of real algebraic curves. *Uspekhi Mat. Nauk*, 33(5(203)):77–89, 1978.

[29] V. A. Rokhlin. New inequalities in the topology of real plane algebraic curves. *Funct. anal. appl.*, 14:29–33, 1980.

[30] L. Rudolph. Algebraic functions and closed braids. *Topology*, 22(2):191–202, 1983.

[31] A. Tannenbaum. Families of algebraic curves with nodes. *Compositio Math.*, 41(1):107–126, 1980.

[32] O. Y. Viro. Generalization of the inequalities of Petrovsky and Arnol'd to curves with singularities. *Uspekkhi Mat. Nauk*, 33(3):145–146, 1978.

[33] O. Y. Viro. Achievements in the topology of real algebraic varieties in the last six years. *Russian Math. Surveys*, 41(3):55–82, 1986.

[34] O. Y. Viro. Some integral calculus based on Euler characteristic. In *Topology and geometry—Rohlin Seminar*, pages 127–138. Springer, Berlin, 1988.

[35] J. Y. Welschinger. J-courbes réelles à nids profonds sur les surfaces réglées. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 267. A paraitre.

[36] H. Whitney. On products in a complex. *Annals of Mathematics*, 39(2):397–432, 1938.

[37] G. Wilson. Hilbert's sixteenth problem. *Topology*, 17(1):53–73, 1978.

[38] V. I. Zvonilov. Strengthened Petrovsky and Arnol'd inequalities for curves of odd degree. *Funct. anal. appl.*, 13:262–268, 1979.

[39] V. I. Zvonilov. Complex topological characteristics of real algebraic curves on a surface. *Funct. anal. appl.*, 16:202–204, 1982.

[40] V. I. Zvonilov. Rigid isotopy classification of real algebraic curves of bidegree $(4, 3)$ on a hyperboloid. *Vestn. Syktyvkar. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh. Inform.*, (3):81–88, 1999.