Thomas Hausberger

UNIFORMISATION DES VARIÉTÉS DE LAUMON-RAPOPORT-STUHLER ET APPLICATION À LA CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE

Thomas Hausberger

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (URA 01), 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.

E-mail : `hausberg@math.u-strasbg.fr`

Url : `{http://www-irma.u-strasbg.fr/}`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S37, 11G09, 11G18, 14G22.

Mots clefs. — variétés modulaires de Drinfeld, uniformisation rigide-analytique, correspondance de Langlands locale.

Janvier 2001

Merci *à V.Drinfeld pour les fondements ; à Henri Carayol et à Thomas Zink dont je suis fier d'être le disciple ; à la coopération franco-allemande qui prend tout son sens à Strasbourg* ***Merci*** *au Jury, pour sa qualité et sa pertinence ; aux Universités pour leurs savoirs et leurs moyens ; aux sponsors dont le logo figure sur la couverture* ***Merci*** *à l'équipe «géométrie arithmétique» qui m'a intégré et adopté ; à mon tuteur pédagogique Claudine Mitschi pour ses encouragements et sa sympathie ; aux collègues, aux amis, aux collègues et amis* ***Merci*** *aux mathématiciens rencontrés ; à Tony Scholl pour les discussions et pour les notes (de musique) ; à Stuhler, pour son accueil à Göttingen et pour le reste* ***Merci*** *à mon père, pour le gène mathématique ; à ma mère, pour d'autres gènes ; aux deux réunis et à la famille pour beaucoup plus que des gènes* ***Merci*** *enfin à mon épouse Bénédicte, qui m'aime et que j'aime, qui m'aime et me comprend...*

♡

UNIFORMISATION DES VARIÉTÉS DE LAUMON-RAPOPORT-STUHLER ET APPLICATION À LA CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE

Thomas Hausberger

Résumé. — Cette thèse se compose de deux parties, qui sont destinées à être publiées sous la forme de deux articles distincts et indépendants. Le lecteur pourra donc commencer sa lecture par l'une ou l'autre de ces parties indifféremment. La partie I traite de l'uniformisation «à la Čerednik» des variétés dites «de Laumon, Rapoport et Stuhler». Dans la partie II, les résultats obtenus sont appliqués à la correspondance de Langlands locale afin de démontrer la conjecture de Drinfeld-Carayol. Enfin, un appendice est consacré à la théorie de cohomologie ℓ-adique des espaces analytiques de Berkovich.

Partie I

Un théorème bien connu de Čerednik et Drinfeld ([**Č**], [**Dr4**] ; voir aussi [**Bo-Ca**]) affirme que des courbes de Shimura associées à une algèbre de quaternions indéfinie sur $\mathbb{Q}$ admettent en une place p où l'algèbre est ramifiée une «uniformisation p-adique» par l'analogue p-adique du demi-plan de Poincaré. Ce résultat a été généralisé plus tard par Rapoport et Zink à certains groupes unitaires ([**R-Z**]). On s'intéresse ici au cas d'un corps de fonctions F d'une variable sur un corps fini et aux variétés de «$\mathcal{D}$-modules elliptiques» introduites par Laumon, Rapoport et Stuhler ([**L-R-S**]). Rappelons que D désigne une algèbre à division de centre F et de rang d ; les variétés en question sont des variétés propres et lisses sur F de dimension $d-1$. L'objectif de la première partie de cette thèse est d'établir pour ces variétés un analogue du théorème de Čerednik. Plus précisément, on considère une place o de F où D_o est un corps gauche d'invariant $1/d$, et on montre alors que nos variétés sont uniformisées par l'espace de Drinfeld Ω^d de dimension $d-1$ sur F_o – du moins dans le cas où il n'y a pas de structure de niveau en o. Si l'on met en plus de telles structures, alors on obtient une uniformisation rigide-analytique par les revêtements Σ_n^d de Ω^d qu'a construits Drinfeld ([**Dr1**]).

Partie II

On s'intéresse à la cohomologie ℓ-adique, en degré médian $d-1$, des revêtements Σ_n^d de l'espace de Drinfeld Ω^d sur un corps local K d'égale caractéristique p. Notons Ψ_d la limite inductive suivant n de ces espaces de cohomologie ; c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_\ell$ muni d'actions (qui commutent entre elles) des trois groupes suivants : $\mathrm{GL}_d(K)$, le groupe D_d^* des éléments inversibles du corps gauche D_d sur K d'invariant $1/d$ et le groupe de Weil W_K. Carayol, qui attribue la conjecture en partie à Drinfeld, a prédit dans [**Ca2**] que cette représentation Ψ_d «réalise» à la fois la correspondance de Langlands locale (entre représentations de $\mathrm{GL}_d(K)$ et de W_K) et la correspondance de Jacquet-Langlands locale (entre représentations de $\mathrm{GL}_d(K)$ et de D_d^*). Précisément, nous montrons dans cette deuxième partie de la thèse que la composante isotypique $\Psi_d(\pi)$, pour π une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_d(K)$, est isomorphe au produit tensoriel $\mathrm{JL}(\pi^\vee)\otimes\widetilde{\sigma}_d(\pi^\vee)$, où $\mathrm{JL}(\pi^\vee)$ (resp. $\widetilde{\sigma}_d(\pi^\vee)$) désigne la représentation qui correspond à la contragrédiente $\pi^\vee$ de π par la correspondance de Jacquet-Langlands locale (resp. de Langlands locale, légèrement twistée). La preuve est de nature «globale» : on utilise le théorème d'uniformisation (établi dans la partie I) des variétés de modules $\mathcal{E}\ell\ell$ des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques, et la méthode (inventée par Deligne ([**De**]) et développée par différents auteurs (voir [**Ca2**], [**H1**], [**H-T**])) de comparaison entre la représentation locale Ψ_d et la cohomologie globale de la variété modulaire $\mathcal{E}\ell\ell$.

Abstract. — This thesis is made up of two parts, which are meant for publication as two distinct and self-contained articles. The reader may thus start indifferently by one or the other of the two. Parts I deals with uniformisation "à la Čerednik" of the so-called "Laumon, Rapoport and Stuhler varieties". In part II, the results obtained are applied to the local Langlands correspondence in order to prove Drinfeld-Carayol's conjecture. Finally, an appendix is dedicated to the theory of ℓ-adic cohomology for Berkovich's analytic spaces.

Part I

A well-known theorem of Čerednik and Drinfeld's ([**Č**], [**Dr4**]; see also [**Bo-Ca**]) asserts that Shimura curves associated to an indefinite quaternionic algebra over $\mathbb{Q}$ admit for p in the ramification locus "p-adic uniformisation" by the generalized upper half plane. This result has been generalized later by Rapoport and Zink to the case of some unitary groups ([**R-Z**]). By contrast, we deal here with a function field F over a finite field, in one variable, and with Laumon-Rapoport-Stuhler modular varieties for $\mathcal{D}$-elliptic sheaves ([**L-R-S**]). Recall that D stands for a central division algebra of rank d over F. The above varieties are proper and smooth of dimension $d-1$ over F. Our aim is to establish an analog of Čerednik's theorem for them. More precisely, we fix a place o of F where D_o is a skew field of invariant $1/d$, and then show that our varieties are uniformised by Drinfeld's space Ω^d of dimension $d-1$ over F_o – at least when there is no level-structure on the place o. If we add such structures, then we get a rigid-analytic uniformisation by the coverings Σ_n^d of Ω^d which were constructed by Drinfeld ([**Dr1**]).

Part II

We focus here at the ℓ-adic cohomology, in median degree $d-1$, of the coverings Σ_n^d of Drinfeld's space Ω^d over a local field K of equal characteristic p. Let's denote by Ψ_d the inductive limit over n of these cohomology spaces; it is a $\mathbb{Q}_\ell$-vector space endowed with (commuting) actions of the following three groups : $\mathrm{GL}_d(K)$, the group D_d^* of invertible elements inside the skew field D_d over K of invariant $1/d$ and the Weil group W_K. Carayol, who attributes the conjecture in part to Drinfeld, predicts in [**Ca2**] that this representation Ψ_d realizes both the local Langlands correspondence (between representations of $\mathrm{GL}_d(K)$ and W_K) and the local Jacquet-Langlands correspondence (between representations of $\mathrm{GL}_d(K)$ and D_d^*). Precisely, we show in this second part of the thesis that the isotypic component $\Psi_d(\pi)$, for π a supercuspidal representation of $\mathrm{GL}_d(K)$, is isomorphic to the tensor product $\mathrm{JL}(\pi^\vee) \otimes \widetilde{\sigma}_d(\pi^\vee)$, where $\mathrm{JL}(\pi^\vee)$ (resp. $\widetilde{\sigma}_d(\pi^\vee)$) denotes the representation corresponding to the contragredient $\pi^\vee$ of π under the local Jacquet-Langlands correspondence (resp. the local Langlands correspondence, slightly twisted). The proof is of "global" nature : we use the uniformisation theorem (established in part I) for the moduli varieties $\mathcal{E}\ell\ell$ of $\mathcal{D}$-elliptic sheaves, and the method (invented by Deligne ([**De**]) and developed by several authors (see [**Ca2**], [**H1**], [**H-T**])) of comparison between the local representation Ψ_d and the global cohomology of the moduli variety $\mathcal{E}\ell\ell$.

TABLE DES MATIÈRES

PARTIE I

UNIFORMISATION DES VARIÉTÉS DE LAUMON-RAPOPORT-STUHLER : ANALOGUE DU THÉORÈME DE ČEREDNIK-DRINFELD

Introduction

Les premiers résultats d'uniformisation p-adique remontent à Tate qui introduit dans [**T**] la notion d'espace analytique rigide en traitant du cas des courbes elliptiques à réduction multiplicative. Un peu plus tard, Raynaud donne une interprétation de ces espaces rigides-analytiques comme «fibres génériques» de schémas formels (voir [**Ra2**]). C'est ce point de vue qu'utilise Mumford pour montrer que les courbes de genres quelconques, en certaines places de mauvaise réduction, peuvent être uniformisées par des ouverts convenables du «demi-plan p-adique» $\Omega^2_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{P}^1\left(\widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p\right) - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ ([**M**] ; voir aussi [**Ra1**]).

Čerednik découvre alors (voir [**Č**]) que tel est le cas de la courbe de Shimura S associée à une algèbre de quaternions Δ indéfinie de centre $\mathbb{Q}$, en une place p où Δ est ramifiée : $S \otimes \mathbb{Q}_p$ est la réunion de (formes tordues galoisiennes) de quotients à la Mumford de $\Omega^2_{\mathbb{Q}_p}$ par des sous-groupes de Schottky de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (du moins, lorsque l'exposant en p du niveau est maximal). Peu après, Drinfeld en donne une explication naturelle ([**Dr4**]) : il prouve que $\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Q}_p}\hat{\otimes}\widehat{\mathbb{Z}}^{nr}_p$ – où $\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Q}_p}$ est le modèle formel de l'analogue $\Omega^d_{\mathbb{Q}_p}$ en dimension supérieure du demi-plan p-adique – est un espace de modules pour des groupes formels, de dimension d et de hauteur d^2 , munis d'une action de l'ordre maximal du corps gauche d'invariant $1/d$ de centre $\mathbb{Q}_p$, et d'une «rigidification». L'uniformisation p-adique provient alors de ce qu'en la place p considérée, la courbe de Shimura paramètre des variétés abéliennes toutes isogènes dont le groupe p-divisible est de ce type (pour $d = 2$).

La situation qui nous intéresse ici est celle des corps de fonctions rationnelles $F = \mathbb{F}_q(X)$ de courbes algébriques $X/\mathbb{F}_q$. Les variétés qui nous concernent sont les variétés de «$\mathcal{D}$-modules elliptiques» introduites par Laumon, Rapoport et Stuhler ([**L-R-S**]). Ce sont des variantes compactes des variétés de modules des faisceaux elliptiques de Drinfeld (voir [**Dr1**], [**Dr2**] et [**Dr3**]). Rappelons que D désigne une algèbre à division de centre F et de rang d^2, déployée en une place fixée ∞ de X ; on note $\mathcal{R}$ le lieu de ramification de D et choisit un faisceau d'ordres maximaux $\mathcal{D}$ de D. Pour tout sous-schéma fini fermé non vide de $X \setminus \{\infty\}$, les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques munis d'une I-structure de niveau admettent des schémas de modules $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ définis sur $X - \infty - I - \mathcal{R}$, propres et lisses sur F de dimension $d - 1$.

Considérons une place o de F où D est un corps gauche D_o d'invariant $1/d$. Le théorème que nous démontrons s'énonce comme une uniformisation rigide-analytique :

$$(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an} \simeq \mathrm{GL}_d(F_o) \setminus \left[\left(\Omega^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}_o\right) \times Z_I\right],$$

où $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ désigne le schéma de module obtenu après extension de la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique ($\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ n'est pas défini au-dessus de o ; la bonne définition dans notre contexte est celle d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique «spécial». La condition «spéciale» est utile afin d'obtenir un schéma raisonnable, c'est-à-dire plat). Précisons bien que le résultat cité est valable uniquement dans le cas où il n'y a pas de structure de niveau en o. Dans le cas où l'on met en plus de telles structures, alors on obtient une uniformisation par les revêtements Σ^d_n de Ω^d qu'a construits Drinfeld.

Ce résultat constitue donc l'exact analogue pour les corps de fonctions du théorème de Čerednik-Drinfeld dans le cas des corps de nombres. L'analogie est frappante jusqu'au plan de la preuve elle-même, semblable dans ses grandes lignes à celle que le lecteur peut trouver dans l'article originel de Drinfeld ([**Dr4**]), ou son exégèse [**Bo-Ca**] par Boutot et Carayol.

Les principaux ingrédients sont les suivants : tout d'abord, il est fondamental de construire le groupe π_o-divisible sous-jacent à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique. Une courbe de Shimura paramétrise une famille de variétés abéliennes dont les complétés formels fournissent ces groupes de manière naturelle. Dans notre contexte, il y a deux constructions du groupe π_o-divisible : la première, directe, utilise le foncteur Gr introduit par Drinfeld à propos des variétés de modules des «Stukas» ([**Dr6**]). La seconde passe par l'anti-équivalence de catégorie entre $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné et schémas π_o-divisibles en $\mathcal{O}_o$-modules. Le groupe est alors construit à partir de la fibre en o du $\mathcal{D}$-faisceau qui possède naturellement la structure d'un $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné.

On montre finalement que les deux constructions sont bien équivalentes. L'utilité principale de cette double construction réside dans la démonstration, plus aisée lorsque l'on manipule des modules de Dieudonné, du théorème de Serre et Tate, ou plutôt de son analogue : déformer un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique revient à déformer le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné qu'il porte, donc le module divisible sous-jacent.

En fait, les modules de Dieudonné sont des objets qui interviennent assez naturellement dans la théorie qui nous intéresse. Ils réapparaissent, sous forme de F_x-modules de Dieudonné, lorsque l'on examine la nature locale de la «fibre générique» d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique. Leur étude constitue la clef d'un autre ingrédient – capital – de la preuve : les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques spéciaux sur $\bar{\kappa}\,(o)$ forment une seule classe d'isogénie.

Pour finir, nous démontrons l'analogue du théorème de Čerednik-Drinfeld : en gros, on compare les groupes π_o-divisibles obtenus aux groupes formels classifiés par $\widehat{\Omega}^d\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{nr}$. Par contre, nous ne dirons rien de la preuve du théorème de Drinfeld, qui en lui-même est une pierre maîtresse de l'édifice ; nous nous contenterons de substantiels rappels et ferons référence à [**Dr4**], [**Bo-Ca**] ou [**Ge**] pour les détails. Signalons la nature particulière de la preuve – valable en égale caractéristique uniquement – que donne Genestier du théorème de Drinfeld : elle fait appel à la théorie du «module de coordonnés» des $\mathcal{O}_D$-modules formels, dont nous faisons usage afin de relier modules de Dieudonné et modules divisibles. Peut-être est-il de ce fait possible de «court-circuiter» le théorème de Drinfeld et reconnaître directement dans nos variétés de $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques la trace de l'espace de Drinfeld $\widehat{\Omega}^d$, vu à travers l'une appropriée de ses descriptions fonctorielles variées...

CHAPITRE 1

$\mathcal{D}$-FAISCEAUX ELLIPTIQUES «SPÉCIAUX»

1.1. Rappels sur les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques

1.1.1. Notations. — Dans tout ce qui suit, X désigne une courbe algébrique lisse, projective et géométriquement connexe sur le corps $\mathbb{F}_q$ (avec q une puissance p^e d'un nombre premier p). On note $F = \mathbb{F}_q(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X.

Pour tout point fermé $x \in |X|$ (correspondant à une place de F), on désigne par $\mathcal{O}_x$ et F_x les complétés respectifs de $\mathcal{O}_{X,x}$ et F en x. Le corps résiduel de $\mathcal{O}_x$ est noté $\kappa(x)$, de cardinal $q_x = q^{\deg(x)}$.

La valuation $v_x : F_x \to \mathbb{Z}$ est telle que $v_x(\pi_x) = 1$, pour π_x une uniformisante de $\mathcal{O}_x$; la valeur absolue $|\ |_x$ est $q_x^{-v_x(\ )}$.

On fixe un tel point fermé ∞, et l'on désigne par $A = H^0(X - \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$ le sous-anneau de F constitué des éléments qui sont entiers à toutes les places $x \neq \infty$. En un tel x, le complété $\widehat{A}_x$ s'identifie à $\mathcal{O}_x$. Notons que A est un anneau de *Dedekind* (X est lisse).

Fixons désormais une algèbre centrale simple D de dimension d^2 sur son centre F, *déployée à l'infini*, c'est-à-dire que $D \otimes_F F_\infty \simeq M_d(F_\infty)$. Choisissons d'autre part un faisceau cohérent $\mathcal{D}$ localement libre en $\mathcal{O}_X$-algèbres, de fibre générique D, tel qu'en tout point fermé x de X, $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_x$ soit un *ordre maximal* de $D_x = D \otimes_F F_x$: le choix de $\mathcal{D}$ revient à celui de chacun des $\mathcal{D}_x$, choix qui doit être cohérent en ce sens que, pour presque tout x, $\mathcal{D}_x$ doit être engendré sur $\mathcal{O}_x$ par une base fixée de D sur F.

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des mauvaises places, où l'algèbre D_x n'est pas déployée : pour $x \notin \mathcal{R}$, le couple $(D_x, \mathcal{D}_x)$ est donc isomorphe à $(M_d(F_x), M_d(\mathcal{O}_x))$.

Quelques simplifications, bien que mineures, apparaissent sous l'hypothèse $\deg(\infty) = 1$. Nous ferons cette hypothèse, pour alléger la présentation.

1.1.2. Définition. — La définition que donnent Laumon, Rapoport et Stuhler d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique est la suivante (nous notons $S \times T$ le produit sur $\mathbb{F}_q$) :

Définition 1.1.1. — Soit S un $\mathbb{F}_q$-schéma. Un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique (de pôle ∞ et zéro z) sur S consiste en la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, hook, "t"] & {}^\tau\mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, hook, "t"] & {}^\tau\mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, hook, "t"] & {}^\tau\mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, hook, "t"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{O}_{X\times S}$-module localement libre de rang d^2, muni d'une action à droite de $\mathcal{D}$ compatible à l'action de $\mathcal{O}_X$, où

$${}^\tau\mathcal{E}_i = \left(\mathrm{id}_X \times \mathrm{Frob}_{S/\mathbb{F}_q}\right)^* \mathcal{E}_i$$

(*pull-back* par le Frobenius de S), et où les j et t sont des injections $\mathcal{O}_{X\times S}$-linéaires compatibles à l'action de $\mathcal{D}$. Ces données sont astreintes à satisfaire aux conditions suivantes :

(i) *Périodicité* : $\mathcal{E}_{i+d} = \mathcal{E}_i\left(\{\infty\} \times S\right)$, le composé de d morphismes j consécutifs étant l'injection naturelle (induite par $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(\infty)$).

(ii) *Pôle* : $\mathcal{E}_i/j\left(\mathcal{E}_{i-1}\right)$ est isomorphe comme $\mathcal{O}_{X\times S}$-module à l'image directe $\left(\Gamma_\infty\right)_* \mathcal{A}_i$ d'un $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{A}_i$ localement libre de rang d par la section ∞ :

$$\Gamma_\infty : S \to X \times S, \quad s \mapsto (\infty, s)\,.$$

(iii) *Zéro* : $\mathcal{E}_i/t\left({}^\tau\mathcal{E}_{i-1}\right)$ est isomorphe comme $\mathcal{O}_{X\times S}$-module à l'image directe $\left(\Gamma_z\right)_* \mathcal{B}_i$ d'un $\mathcal{O}_S$- module $\mathcal{B}_i$ localement libre de rang d par une section $\Gamma_z : S \to X \times S$, graphe d'un morphisme de $\mathbb{F}_q$-schémas $z : S \to X - \{\infty\} - \mathcal{R}$.

(iv) *Normalisation* : Pour tout point géométrique s de S, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi\left(\mathcal{E}_0|_{X\times s}\right)$ vérifie $\chi\left(\mathcal{E}_0|_{X\times s}\right) \in [0, d[$.

Un isomorphisme entre deux faisceaux elliptiques $(\mathcal{E}_i, j, t)$ et $(\mathcal{E}'_i, j', t')$ consiste en un système d'isomorphismes $\psi_i : \mathcal{E}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_i$ de faisceaux en $\mathcal{O}_{X\times S}$-modules, compatible à l'action de $\mathcal{D}$ et tel que, avec les pull-back ${}^\tau\psi_i$: ${}^\tau\mathcal{E}_i \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E}'_i$, tous les diagrammes commutent.

1.1.3. Structures de niveau. — Soit $I \neq \emptyset$ un sous-schéma fermé fini de $X - \{\infty\}$; soit d'autre part $(\mathcal{E}_i, j, t)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur un schéma S, tel que l'image $z(S)$ du morphisme zéro associé soit disjointe de I. Dans ces conditions, la restriction $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}_i\,|_{I\times S}$ est indépendante (via j) de i, et t induit un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{E}_I \simeq \mathcal{E}_I$.

On définit alors une *structure de niveau* I sur $(\mathcal{E}_i, j, t)$ comme la donnée d'un isomorphisme $\mathcal{O}_{I\times S}$-linéaire $\iota : \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \simeq \mathcal{E}_I$, compatible à l'action à droite de $\mathcal{D}_I$ sur les deux membres, et rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
{}^\tau\mathcal{E}_I \arrow[rr, "t"] & & \mathcal{E}_I \\
& \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \arrow[ul, "{}^\tau\iota"] \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarque. — *Pour* $I = \prod_x \mathfrak{m}_x^{n_x}$*, une structure* ι *de niveau* I *sur* $(\mathcal{E}_i, j, t)$ *est équivalente à la donnée de* $\mathfrak{m}_x^{n_x}$*-structures de niveaux* ι_x *pour tout* $x \in V(I)$*. Dans le cas où* o *appartient à* $z(S)$*, avec cette définition, il n'existe pas de* $\mathfrak{m}_o^n$*-structure de niveau car* $t\,|_{\mathfrak{m}_o^n \times S}$ *n'est plus un isomorphisme. Il est possible cependant d'étendre la définition d'une* I*-structure de niveau aux niveaux divisant la caractéristique, en disant ce qu'est une «base de Drinfeld» (voir* [**Dr4**]*). Or ceci n'est sans doute pas si facile aux points où l'algèbre est ramifiée ; c'est pourquoi nous n'aurons pas usage de cette notion dans ce texte.*

1.1.4. Extension de la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique. — En imposant la condition sur le zéro (le morphisme z se factorise à travers $X - \{\infty\} - \mathcal{R}$), Laumon, Rapoport et Stuhler évitent les problèmes liés à la mauvaise réduction. Ici au contraire, notre but est d'étudier la réduction en une place o appartenant au lieu de ramification $\mathcal{R}$ de l'algèbre D, obtenant ainsi une situation analogue à la mauvaise réduction dans le cas des corps de nombres. Précisément, on suppose que D_o est un corps gauche d'invariant $1/d$ sur F_o. Il s'agit donc d'étendre la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique qui est donnée dans [**L-R-S**]. Une première approche, la plus naïve, consiste à modifier la condition (iii) comme suit :

(iii') *Zéro* : $\mathcal{E}_i / t\,({}^{\tau}\mathcal{E}_{i-1})$ est isomorphe comme $\mathcal{O}_{X\times S}$-module à l'image directe $(\Gamma_z)_* \mathcal{B}_i$ d'un $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{B}_i$ localement libre de rang d par une section $\Gamma_z : S \to X \times S$, graphe d'un morphisme de $\mathbb{F}_q$-schémas $z : S \to (X - \{\infty\} - \mathcal{R}) \cup \{o\}$.

Toutefois, cela n'est guère satisfaisant : afin d'obtenir un schéma de modules raisonnable (en l'occurrence plat), il s'avère nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire en la place o, dite «condition spéciale», qui sera énoncée ultérieurement. Il s'agit tout d'abord d'expliquer la construction du groupe π_o-divisible $Gr_o(\mathcal{E})$ que l'on associe à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$ et qui intervient dans l'énoncé de la condition «spéciale».

1.2. Modules divisibles portés par un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique

1.2.1. φ-faisceaux et schémas Gr. — Soit S un $\mathbb{F}_q$-schéma et Frob_S le Frobenius de S.

Définition 1.2.1. — Un φ-faisceau sur S est un faisceau $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_S$-module, localement libre de rang fini, et muni d'une application $\mathcal{O}_S$-linéaire $\varphi : \mathrm{Frob}_S^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

Soit $\mathbb{V}(\mathcal{F})$ le fibré vectoriel (géométrique) associé au faisceau dual $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_S)$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{V}(\mathcal{F}) = \mathrm{Spec}\left(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F})\right).$$

D'une part, le morphisme φ induit une application $\mathcal{O}_S$-linéaire $\mathbb{V}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Frob}_S^* \mathbb{V}(\mathcal{F})$, que nous noterons $\mathbb{V}(\varphi)$; d'autre part, on a le Frobenius $\mathrm{Frob}_{\mathbb{V}(\mathcal{F})} : \mathbb{V}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Frob}_S^* \mathbb{V}(\mathcal{F})$ qui est q-linéaire. Suivant Drinfeld (voir [**Dr6**]), on définit alors :

Définition 1.2.2. — Le S-schéma $Gr\left(\mathcal{F}\right)$ est le fibré en $\mathbb{F}_q$-vectoriels

$$Gr\left(\mathcal{F}\right) = \mathrm{Ker}\left(\mathbb{V}\left(\varphi\right) - \mathrm{Frob}_{\mathbb{V}(\mathcal{F})}\right).$$

Concrètement, pour tout schéma $T \xrightarrow{\alpha} S$, on a :

$$Gr\left(\mathcal{F}\right)(T) = \left\{h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{F}, \alpha_* \mathcal{O}_T\right), \quad h\left(\varphi(1 \otimes x)\right) = h(x)^q \quad \forall x \in \mathcal{F}\right\}.$$

Le foncteur Gr est un foncteur contravariant de la catégorie des φ-faisceaux sur S dans la catégorie des schémas en groupes sur S munis d'une action de $\mathbb{F}_q$. Donnons quelques propriétés de ce foncteur :

Proposition 1.2.3. — *(cf.* **[Dr6]**, *proposition 2.1)*

1) Pour tout φ-faisceau $\mathcal{F}$ sur S, le schéma $Gr\left(\mathcal{F}\right)$ est fini et localement libre ; si $\mathcal{F}$ est de rang n, alors $Gr\left(\mathcal{F}\right)$ est d'ordre égal à q^n.

2) Le faisceau $\mathrm{Lie}^* Gr\left(\mathcal{F}\right)$ (i.e. l'image inverse du faisceau des différentielles $\Omega^1_{Gr(\mathcal{F})/S}$ relativement à la section nulle $O_S : S \to Gr\left(\mathcal{F}\right)$) est canoniquement isomorphe au conoyau du morphisme $\varphi : \mathrm{Frob}_S^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

3) Le schéma $Gr\left(\mathcal{F}\right)$ est étale au-dessus de S si et seulement si φ est un isomorphisme.

4) Le foncteur Gr est exact.

5) Le foncteur Gr est pleinement fidèle.

Démonstration. — Les assertions étant de nature locale, on peut supposer $S = \mathrm{Spec}\left(R\right)$ affine et $\mathcal{F}$ libre de rang n sur S. Notons $\left(b_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ les coefficients de la matrice de l'application $\varphi : \mathrm{Frob}_S^* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dans une base de $\mathcal{F} \simeq R^n$ que l'on choisit. Après quelques calculs, on voit que $Gr\left(\mathcal{F}\right)$ est le sous-schéma fermé de $\mathbb{G}^n_{a,R}$ donné par le système d'équations :

$$x_j^q - \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i = 0, \quad 1 \le j \le n. \tag{1}$$

Le quotient de $R\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ par l'idéal des relations précédentes est un R-module libre de base les produits $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$, $0 \le m_i < q$, d'où la première assertion. Les propriétés 2) à 4) résultent directement du fait que $Gr\left(\mathcal{F}\right)$ est défini localement par le système d'équations donné précédemment.

Démontrons le point 5). Supposons $Gr\left(\mathcal{F}\right)$ donné par le système d'équations (1) et donnons-nous un morphisme

$$\alpha : Gr\left(\mathcal{F}\right) \to Gr\left(\mathcal{F}'\right) \hookrightarrow \mathbb{G}^n_{a,R}.$$

Désignant par B (resp. B') la matrice de φ (resp. φ'), nous allons montrer que α est la restriction d'une application linéaire $C : \mathbb{G}^n_{a,R} \to \mathbb{G}_{a,R}$ telle que $B'C = {}^\tau CB$, ce qui impliquera l'assertion. Tout d'abord, α définit pour chaque coordonnée de $\mathbb{G}^n_{a,R}$ un homomorphisme de schémas en groupes $h : Gr\left(\mathcal{F}\right) \to \mathbb{G}_{a,R}$, compatible avec l'action de $\mathbb{F}_q$. Montrons que ces morphismes h sont des fonctions linéaires $h = \sum_{i=1}^n c_i x_i$: écrivant $h = F(X_1, \ldots, X_n)$, où F est un polynôme dont on impose que le degré en chaque variable soit strictement inférieur à q, dire que h est un homomorphisme de schémas en groupes signifie que la restriction de la fonction polynôme $F(X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n) -$

$F(X_1, \dots, X_n) - F(Y_1, \dots, Y_n)$ à $Gr(\mathcal{F}) \times Gr(\mathcal{F})$ est nulle. Comme le degré en chaque variable est moins que q, ce polynôme est le polynôme nul. De manière similaire, la compatibilité de h avec l'action de $\mathbb{F}_q$ implique dans l'anneau des polynômes l'égalité $F(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda F(X_1, \dots, X_n)$ pour tout λ dans $\mathbb{F}_q$. Comme le degré de F en chaque variable est strictement inférieur à q, on en conclut que F est une fonction linéaire.

Désignons maintenant par C la matrice résultant des coefficients c_i, pour les n fonctions h. Notant X le vecteur colonne constitué des coordonnées x_i sur $Gr(\mathcal{F})$, l'équation de $Gr(\mathcal{F}')$ s'écrit $(CX)^q = B'CX$. Or $(CX)^q = {}^{\tau}CBX$, d'où l'égalité annoncée. $\square$

1.2.2. Application aux $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques. — La construction qui suit fournit, pour un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique, l'analogue du groupe p-divisible A_{p^∞} d'une variété abélienne A (o est l'analogue de p).

Soit $(\mathcal{E}_i, j, t)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur un $\mathbb{F}_q$-schéma S et de zéro z. On fixe une place $o \neq \infty$ de X ; le corps résiduel $\kappa(o)$ est de cardinal $q_o = q^{\deg(o)}$. Comme o est distinct du pôle, le $\mathcal{O}_o \boxtimes \mathcal{O}_S$-module $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{O}_o$ localement libre de rang d^2 est, via le morphisme j, indépendant de l'indice i. On le note $\mathcal{E}_o$ et on définit également $\mathcal{E}_{o,n} = \mathcal{E}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n$ pour tout entier n. L'image directe de $\mathcal{E}_{o,n}$ par la projection $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n) \times S \to S$, munie de l'application $\mathcal{O}_S$-linéaire induite par t_o, est alors un φ-faisceau sur S que l'on notera encore $(\mathcal{E}_{o,n}, t_o)$.

Définition 1.2.4. — Soit $Gr(\mathcal{E}_{o,n})$ le S-schéma associé au φ-faisceau $(\mathcal{E}_{o,n}, t_o)$ par le foncteur Gr du paragraphe précédent. Le groupe π_o-divisible associé au $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est alors :

$$Gr_o(\mathcal{E}) = \varinjlim_n Gr(\mathcal{E}_{o,n}).$$

Les propriétés suivantes du schéma $Gr_o(\mathcal{E})$ résultent directement de la proposition 1.2.3 :

Proposition 1.2.5. — *Pour tout entier $n \geq 1$, le S-schéma $Gr(\mathcal{E}_{o,n})$ est un schéma fini en $\mathcal{O}_o$-modules qui vérifie :*

(i) il existe un entier $N \geq 0$ tel que, en tant que S-schéma en $\kappa(o)$-espaces vectoriels ($\kappa(o) \subset \mathcal{O}_o$), le schéma $Gr(\mathcal{E}_{o,n})$ peut, localement pour la topologie étale sur S, s'injecter dans $\mathbb{G}_a^N$,

(ii) comme S-schéma en $\kappa(o)$-espaces vectoriels, la dimension de $Gr(\mathcal{E}_{o,n})$ est nd^2 (le schéma en groupes $Gr(\mathcal{E}_{o,n})$ est d'ordre $q_o^{nd^2}$),

(iii) la suite de S-schémas en $\mathcal{O}_o$-modules

$$0 \longrightarrow Gr(\mathcal{E}_{o,n}) \xrightarrow{i_n} Gr(\mathcal{E}_{o,n+1}) \xrightarrow{\pi_o^n} Gr(\mathcal{E}_{o,n+1})$$

est exacte.

Le S-schéma $Gr_o(\mathcal{E})$ est donc un schéma π_o-divisible en $\mathcal{O}_o$-modules, au sens de **[Lau]**, *définition 2.4.8.*

Notons que le schéma $Gr_o(\mathcal{E})$ est également muni d'une action de $\mathcal{D}_o$ qui prolonge celle de $\mathcal{O}_o$, puisque le morphisme $\varphi = t_o$ est compatible à l'action de $\mathcal{D}_o$ sur $\mathcal{E}_o$.

La proposition suivante précise la nature du groupe π_o-divisible $Gr_o(\mathcal{E})$ en toute place qui ne provient pas de la caractéristique o :

Proposition 1.2.6. — *Le schéma $Gr_o(\mathcal{E})$ est étale au-dessus de $S \setminus z^{-1}(\{o\})$.*

En effet, le morphisme $t_o : {}^\tau\mathcal{E}_o \otimes \kappa(s) \to \mathcal{E}_o \otimes \kappa(s)$ est un isomorphisme dès que $z(s) \neq o$; c'est alors un corollaire immédiat de la proposition 1.2.3 3).

Au contraire, on verra plus loin que $Gr_o(\mathcal{E})$ est infinitésimal en o (du moins lorsque $(\mathcal{E}_i, j, t)$ vérifie la condition «spéciale»).

Expliquons pour finir comment la notion de structure de niveau peut se traduire à l'aide du schéma Gr_o. Dans la situation qui nous intéresse, D_o est un corps gauche d'invariant $1/d$ sur F_o ; choisissant une uniformisante π_o de F_o, on peut décrire l'ordre maximal $\mathcal{D}_o$ comme l'algèbre des séries formelles non commutatives en une indéterminée Π_o soumises aux relations $\Pi_o a = a^{q_o}\Pi_o$ $(a \in \mathbb{F}_{q_o^d})$ et $\Pi_o^d = \pi_o$. On obtient ainsi un diagramme d'identifications :

(2)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_{q_o^d}[[\Pi_o]] \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{D}_o \\ \mathbb{F}_{q_o}[[\pi_o]] \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & \mathcal{O}_o \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Proposition 1.2.7. — *Supposons que $o \notin z(S)$; la donnée d'une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est équivalente à la donnée d'un isomorphisme $\mathcal{D}_o$-équivariant de S-schémas en $\mathcal{O}_o$-modules :*

$$\mathcal{D}_{o,n}^\vee \times S \xrightarrow{\sim} Gr_o(\mathcal{E})[\pi_o^n],$$

où $\mathcal{D}_{o,n}^\vee$ est le $\mathbb{F}_{q_o}$-dual de $\mathcal{D}_{o,n} = \mathfrak{m}_o^n\mathcal{D}_o \backslash \mathcal{D}_o$ et $Gr_o(\mathcal{E})[\pi_o^n] = Gr(\mathcal{E}_{o,n})$ désigne les point de π_o^n-torsion du module π_o-divisible $Gr_o(\mathcal{E})$.

Dès que l'on choisit un diagramme d'identifications (2), c'est équivalent à la donnée d'un isomorphisme $\mathcal{D}_o$-équivariant :

$$\mathcal{D}_o/\mathcal{D}_o\pi_o^n \times S \xrightarrow{\sim} Gr_o(\mathcal{E})[\pi_o^n].$$

Démonstration. — Par définition, une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j, t)$ consiste en la donnée d'un diagramme commutatif $\mathcal{D}_o$-équivariant :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}_{o,n} \otimes \mathcal{O}_S \arrow[dl, "\iota_{o,n}"'] \arrow[dr, "{}^\tau\iota_{o,n}"] & \\ \mathcal{E}_{o,n} & & {}^\tau\mathcal{E}_{o,n} \arrow[ll, "t_{o,n}"'] \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, il s'agit d'un isomorphisme $\mathcal{D}_o$-équivariant entre les φ-faisceaux $(\mathcal{E}_{o,n}, t_o)$ et $(\mathcal{D}_{o,n} \otimes \mathcal{O}_S, \mathrm{Id})$. Par ailleurs, on voit facilement que $Gr(\mathcal{D}_{o,n} \otimes \mathcal{O}_S) = S \times \mathcal{D}_{o,n}^\vee$. Le foncteur Gr étant pleinement fidèle (cf. proposition 1.2.3), une structure de niveau $\mathfrak{m}_o^n$ est donc équivalente à un isomorphisme $\mathcal{D}_o$-équivariant de S-schémas en $\mathcal{O}_o$-modules :

$$\mathcal{D}_{o,n}^\vee \times S \xrightarrow{\sim} Gr_o(\mathcal{E})[\pi_o^n].$$

Fixons maintenant un diagramme d'identifications (2). Notons $\mathrm{Tr} : D_o \to F_o$ la trace réduite ; elle vérifie (cf. [**W**] X §2 prop. 5) :

$$\mathrm{Tr}(xy) \in \mathcal{O}_o \ \forall x \in \mathcal{D}_o \Longleftrightarrow y \in \Pi_o^{1-d}\mathcal{D}_o.$$

Désignant par Rés : $F_o/\mathcal{O}_o \to \mathbb{F}_{q_o}$ le morphisme «résidu», on vérifie alors facilement que l'application

$$\begin{array}{ccccc} (\pi_o^n\mathcal{D}_o\backslash\mathcal{D}_o) & \otimes_{\mathbb{F}_{q_o}} & (\mathcal{D}_o/\mathcal{D}_o\pi_o^n) & \longrightarrow & \mathbb{F}_{q_o} \\ a_1 & \otimes & a_2 & \longmapsto & \text{Rés} \circ \mathrm{Tr}\left(a_2\Pi_o^{1-d-nd}a_1\right) \end{array}$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{D}_o$-modules à gauche

$$\mathcal{D}_o/\mathcal{D}_o\pi_o^n \xrightarrow{\sim} (\pi_o^n\mathcal{D}_o\backslash\mathcal{D}_o)^\vee,$$

d'où la deuxième assertion de la proposition. □

1.2.3. Rappels sur le module de coordonnées des $\mathcal{O}$-modules formels. — Dans ce paragraphe, $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique $p > 0$ et de corps résiduel fini $\kappa = \mathbb{F}_{p^r}$. On désigne par K le corps des fractions de $\mathcal{O}$ et on fixe une uniformisante π de K. Pour finir, soit B une $\mathcal{O}$-algèbre dans laquelle l'image de π est nilpotente.

Le mérite de cette théorie des «modules de coordonnnées» que l'on va rappeler est qu'elle ramène la théorie des $\mathcal{O}$-modules formels à de l'algèbre linéaire. Elle constitue un analogue en inégale caractéristique de la théorie de Dieudonné. En fait, on se contentera de citer les principaux résultats qui figurent dans [**Ge**] I et renvoie le lecteur à loc. cit. pour une exposition détaillée.

Définition 1.2.8. — Un *$\mathcal{O}$-module formel* est un groupe formel lisse X sur B muni d'une action de $\mathcal{O}$ telle que l'action induite sur l'espace tangent $\mathrm{Lie}\, X$ coïncide avec celle provenant de la structure de B-module de $\mathrm{Lie}\, X$.

Soient X_1 et X_2 deux $\mathcal{O}$-modules formels ; par définition, une *isogénie* $\alpha : X_1 \to X_2$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}$-modules formels dont le noyau est représentable par un schéma en groupes fini localement libre sur B. De plus, on dit que α est de hauteur h si $\mathrm{Ker}\,\alpha$ est de degré p^h sur B. On dira que le $\mathcal{O}$-module formel X est de hauteur finie lorsque l'endomorphisme $X(\pi)$ de X induit par π est une isogénie. Sa hauteur est alors la $\mathcal{O}$-hauteur de cette isogénie, c'est-à-dire le quotient h/r (c'est un entier).

A tout $\mathcal{O}$-module formel X sur B, on associe le B-module

$$M_X = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_{a,B})$$

(homomorphismes de groupes formels), lequel est muni par fonctorialité d'une action de $\mathcal{O}$. Soit

$$\begin{array}{cccc} Fr_p : & B & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & x^p \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{cccc} Fr_{p^r} : & B & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & x^{p^r} \end{array}\right)$$

le morphisme de Frobenius de la $\mathbb{F}_p$-algèbre (resp. $\mathbb{F}_{p^r}$-algèbre) B, et τ_p (resp. τ_{p^r}) l'isogénie de Frobenius

$$\mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow Fr_{p,*}\mathbb{G}_{a,B} \qquad (\text{resp.} \quad \mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow Fr_{p^r,*}\mathbb{G}_{a,B}).$$

La multiplication à gauche par τ_p sur M_X est Fr_p-semi-linéaire et induit donc un morphisme

$$F : Fr_p^* M_X \longrightarrow M_X.$$

Via cette application F, on peut considérer M_X comme un $B\left[\left[\tau_p\right]\right]$-module localement libre de rang $\dim X$ (cf. **[Ge]** prop. 2.1.1). Par ailleurs, l'application qui a tout $m \in M_X$ associe la différentielle

$$dm : \operatorname{Lie} X \longrightarrow \operatorname{Lie} \mathbb{G}_{a,B}$$

définit un isomorphisme de B-modules

$$D : \operatorname{Coker} F \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Lie} X)^{\vee}. \tag{3}$$

Le $\left(\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_p} B\right)$-module M_X est muni de deux actions de κ (via $\kappa \subset \mathcal{O}$ d'une part et la structure de κ-algèbre sur B d'autre part). Celles-ci induisent une graduation

$$M_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_{X,i}$$

avec

$$M_{X,i} = \left\{ m \in M_X \quad : \quad (\lambda \otimes 1)\, m = \left(1 \otimes \lambda^{p^i}\right) m \right\}.$$

La multiplication à gauche par τ_p est de degré 1 pour cette graduation et induit des morphismes B-linéaires $F_{p,i} : Fr_p^* M_{X,i} \to M_{X,i+1}$. Pour tout $n \geq 0$, on note $F_{p^n,i} : \left(Fr_p^n\right)^* M_{X,i} \to M_{X,i+n}$ le morphisme

$$F_{p,i+n-1} \circ Fr_p^* F_{p,i+n-2} \circ \cdots \circ \left(Fr_p^{n-1}\right)^* F_{p,i}$$

induit par la multiplication à gauche par τ_p^n. En particulier, on pose $F_0 = F_{p^r,0}$. Finalement, on vérifie que se donner (M_X, F) est équivalent à se donner $(M_{X,0}, F_0)$. Précisément, on a le «dictionnaire» suivant :

M_X	$M_{X,0}$
$B\left[\left[\tau_p\right]\right]$	$B\left[\left[\tau_{p^r}\right]\right]$
$D : \operatorname{Coker} F \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Lie} X)^{\vee}$	$\operatorname{Coker} F_0 \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Lie} X)^{\vee}$
Le rang de Coker $M(\varphi)$ est la hauteur de φ	Le rang de Coker $M(\varphi)_0$ est la $\mathcal{O}$-hauteur de φ

pour toute isogénie de $\mathcal{O}$-modules formels $\varphi : X_1 \to X_2$ et où $M(\varphi) : M_{X_2} \to M_{X_1}$ désigne le morphisme de modules gradués obtenu par fonctorialité.

Disons pour finir que le séparé complété $\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B$ de $\mathcal{O} \otimes_\kappa B$ pour la topologie $\pi \otimes 1$-adique agit encore sur $M_{X,0}$, parce que X est la limite de schémas en groupes finis locaux.

Définition 1.2.9. — Le foncteur module de coordonnées sur B est le foncteur M_B qui à un $\mathcal{O}$-module formel X sur B associe le $\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B$-module $M_B(X) = M_{X,0} \otimes_{(\mathcal{O}\otimes_\kappa B)} \mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B$ muni du Frobenius semi-linéaire F_0.

On note i le morphisme structural de la $\mathcal{O}$-algèbre B et Γ le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B & \longrightarrow & B \\ a\hat{\otimes}_\kappa b & \longmapsto & i(a).b \end{array}$$

Soit $\mathrm{Mod}\,\mathcal{C}(B)$ la sous-catégorie pleine de celle des $\left(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B\right)$-modules M munis d'un Frobenius

$$F : \left(\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}_\kappa Fr_{p^r}\right)^* M \longrightarrow M,$$

formée des objets tels que :

1. Le $\left(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B\right)$-module M est localement libre de rang fini ;
2. Il existe un B-module localement libre de type fini ω tel que $\mathrm{Coker}\, F = \Gamma_*(\omega)$;
3. Il existe un entier n tel que le morphisme
$$F^n : \left(\mathrm{Id}\,\hat{\otimes}_\kappa Fr_{p^r}^n\right)^* M/\pi M \longrightarrow M/\pi M$$
est le morphisme nul.

Théorème 1.2.10. — *(cf.* **[Ge]** *Th. 2.2.6) Le foncteur module de coordonnées M_B, de la catégorie des $\mathcal{O}$-modules formels X sur B de hauteur finie dans la catégorie* $\mathrm{Mod}\,\mathcal{C}(B)$, *est une anti-équivalence de catégories.*

A toutes fins utiles, notons que le rang du $\left(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B\right)$-module $M_B(X)$ est la $\mathcal{O}$-hauteur du $\mathcal{O}$-module formel X et que ω est un B-module localement libre de rang $\dim X$ (cela résulte de l'isomorphisme (3)).

Remarque 1.2.11. — Le foncteur quasi-inverse est G_B tel que pour toute B-algèbre R artinienne,

$$G_B(M,F)(R) = \left\{ g \in \mathrm{Hom}_B(M,R) : g(F(m)) = g(m)^{p^r} \quad \forall m \in M \right\}.$$

On rappelle aussi que la formation de M_B est compatible au changement de base :

Proposition 1.2.12. — *(cf.* **[Ge]** *Prop. 2.2.10) Soit C une B-algèbre et $X \otimes_B C$ le $\mathcal{O}$-module formel sur C obtenu par extension des scalaires. On a alors l'isomorphisme*

$$M_C(X \otimes_B C) \simeq \left(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa C\right) \otimes_{\left(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B\right)} M_B(X).$$

1.2.4. $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné et $\mathcal{O}$-modules divisibles. — Soit B une $\mathcal{O}$-algèbre locale artinienne, de morphisme structural i. On note toujours Γ le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B & \longrightarrow & B \\ a\hat{\otimes}_\kappa b & \longmapsto & i(a).b \end{array}$$

Définition 1.2.13. — Un *$\mathcal{O}$-module de Dieudonné* de rang d sur B est un $\left(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B\right)$-module M localement libre de rang d, muni d'un morphisme de Frobenius

$$F : \left(\mathrm{Id}_\mathcal{O}\,\hat{\otimes}_\kappa Fr_{p^r}\right)^* M \longrightarrow M$$

tel que $\mathrm{Coker}\, F \simeq \Gamma_*(\omega)$, où ω est un B-module localement libre de type fini.

Le Frobenius F sera dit *topologiquement nilpotent* s'il existe un entier n pour lequel

$$F^n : \left(\mathrm{Id}_\mathcal{O}\,\hat{\otimes}_\kappa Fr_{p^r}^n\right)^* M/\pi M \longrightarrow M/\pi M$$

est le morphisme nul.

On notera $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}\,(B)$ la catégorie des $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné de rang fini sur B. Ainsi la catégorie $\mathrm{Mod}\,\mathcal{C}\,(B)$ définie en 1.2.3 est la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}\,(B)$ dont les objets sont les modules M munis d'un Frobenius F topologiquement nilpotent. On a la :

Proposition 1.2.14. — *Soit (M, F) un $\mathcal{O}$-module de Dieudonné sur B. Il existe des $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné sur B, (M^{et}, F^{et}) et (M^c, F^c), ainsi qu'une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \left(M^{et}, F^{et}\right) \longrightarrow (M, F) \longrightarrow (M^c, F^c) \longrightarrow 0$$

tels que $F^{et} : \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_\kappa Fr_{p^r}\right)^* M^{et} \to M^{et}$ est bijectif et
$F^c : \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_\kappa Fr_{p^r}\right)^* M^c \to M^c$ est topologiquement nilpotent.

Une démonstration, pour B un corps, est donnée dans [**Lau**] (proposition 2.4.6) ; le cas général s'y ramène facilement (voir [**Boy**] Lemme 6.2.3).

Définition 1.2.15. — Un $\mathcal{O}$-module divisible sur une $\mathcal{O}$-algèbre B dans laquelle l'image de π est nilpotente est un $\mathrm{Spec}\, B$-faisceau G en $\mathcal{O}$-modules, pour la topologie f.p.p.f., tel que la multiplication par π est surjective et tel que, notant $G_n := \ker(\pi^n)$ pour tout entier $n \geq 1$, le $\mathcal{O}$-module G_1 est représentable par un $\mathrm{Spec}\, B$-schéma en groupes fini localement libre et l'on a $G = \varinjlim_n G_n$.

Dans le cas où B est artinienne, un $\mathcal{O}$-module divisible G sur B se décompose canoniquement :

$$0 \longrightarrow G^c \longrightarrow G \longrightarrow G^{et} \longrightarrow 0,$$

où G^c désigne la partie connexe et G^{et} le quotient étale maximal de G. On peut montrer que G^c est en fait un $\mathcal{O}$-module formel (même démonstration que celle donnée par Messing pour les groupes p-divisibles ; voir [**Me**]).

Proposition 1.2.16. — *Soit B une $\mathcal{O}$-algèbre dans laquelle l'image de π est nilpotente ; le foncteur M_B induit une anti-équivalence, de la catégorie des $\mathcal{O}$-modules divisibles sur B dans la catégorie* $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}\,(B)$, *qui prolonge l'équivalence du théorème 1.2.10.*

De plus, si B est une $\mathcal{O}$-algèbre locale artinienne, cette anti-équivalence respecte les décompositions canoniques de $(M, F) = M_B(G)$ et $G = G_B(M, F)$ en leurs parties étales et connexes.

Une preuve assez brève, lorsque B est une $\mathcal{O}$-algèbre locale artinienne, est donnée dans [**Boy**] (Prop. 6.2.6). Le résultat est sans doute vrai pour toute $\mathcal{O}$-algèbre (dans laquelle l'image de π est nilpotente) ; cependant, la preuve n'est peut-être pas immédiate. L'auteur espère revenir sur cette question dans un travail futur, afin d'écrire une démonstration détaillée. Par ailleurs, la preuve du théorème de Čerednik-Drinfeld (ou plutôt de son analogue) n'utilise que la version «modules formels – modules de coordonnées» de cette proposition (i.e. le théorème 1.2.10). En effet, on verra que le module divisible associé à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique «spécial» est un module formel.

1.2.5. $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné associé à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique. — Soit o une place de $X \setminus \{\infty\}$ et r le degré de $\kappa(o)$ sur $\mathbb{F}_q$. Soit $(\mathcal{E}_i, j, t)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur une $\mathcal{O}_o$-algèbre locale artinienne B (de morphisme structural le zéro $z : \mathcal{O}_o \to B$ de $(\mathcal{E}_i, j, t)$). On note toujours Fr_q (resp. Fr_{q_o}) le Frobenius arithmétique de la $\mathbb{F}_q$-algèbre (resp. $\kappa(o)$-algèbre) B et désigne par Γ_z (resp. $\widetilde{\Gamma}_z$) le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_o \otimes_{\mathbb{F}_q} B & \longrightarrow & B \\ a \otimes_{\mathbb{F}_q} b & \longmapsto & z(a).b \end{array} \qquad \left(\text{resp. } \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} B & \longrightarrow & B \\ a \hat{\otimes}_{\kappa(o)} b & \longmapsto & z(a).b \end{array}\right)$$

Puisque o et ∞ sont distincts, le $\mathcal{O}_o \otimes_{\mathbb{F}_q} B$-module $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{O}_o$ localement libre de rang d^2 est, via le morphisme j, indépendant de l'indice i ; on le note $\mathcal{E}_o$. Il est naturellement muni d'un Frobenius $t_o : \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_o} \otimes_{\mathbb{F}_q} Fr_q\right)^* \mathcal{E}_o \to \mathcal{E}_o$ issu du morphisme t. Il résulte également de la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique que le conoyau $\operatorname{Coker} t_o$ est l'image directe d'un B-module localement libre de rang d par le morphisme Γ_z.

De manière tout à fait similaire à la situation du paragraphe 1.2.3, la double action de $\kappa(o)$ fait de $\mathcal{E}_o$ un $\mathcal{O}_o \otimes_{\mathbb{F}_q} B$-module gradué. On pose $M = \mathcal{E}_{o,0}$ la composante de degré 0 et $F : \left(\mathrm{Id}_{F_o} \otimes_{\kappa(o)} Fr_{q_o}\right)^* M \to M$ le morphisme induit par t_o.

Il est alors aisé de vérifier que le $\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} B$-module $M_o = M \otimes_{\left(\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} B\right)} \left(\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} B\right)$ muni du Frobenius F_o déduit de F appartient à la catégorie $\operatorname{Mod} \mathcal{B}(B)$ dont les objets sont les $\mathcal{O}_o$-modules de Dieudonné. Notons que M_o est localement libre de rang d^2 et que $\operatorname{Coker} F_o$ est l'image directe d'un B-module localement libre de rang d par le morphisme $\widetilde{\Gamma}_z$.

Définition 1.2.17. — Soit $(\mathcal{E}_i, j, t)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur une $\mathcal{O}_o$-algèbre artinienne B.

Le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné sur B associé à $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est le couple (M_o, F_o) où

$$M_o = \mathcal{E}_{o,0} \otimes_{\left(\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} B\right)} \left(\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} B\right)$$

et $F_o : \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_o} \hat{\otimes}_{\kappa(o)} Fr_{q_o}\right)^* M_o \to M_o$ est le Frobenius induit par t_o.

La proposition suivante établit le lien entre les différentes notions rencontrées au cours de cette section. En fait, c'est un résultat immédiat, lorsque l'on compare la construction du schéma Gr_o avec la définition du foncteur G_B.

Proposition 1.2.18. — *Le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné (M_o, F_o) associé à $(\mathcal{E}_i, j, t)$ et le $\mathcal{O}_o$-module divisible $Gr_o(\mathcal{E})$ sur B associé à $(\mathcal{E}_i, j, t)$ (cf. définition 1.2.4) se correspondent par l'anti-équivalence de catégorie décrite au paragraphe 1.2.4.*

Remarque. — *De plus, M_o est muni d'une action à droite de $\mathcal{D}_o = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_o$ qui prolonge celle de $\mathcal{O}_o$ et commute avec F. On dit alors que le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné (M_o, F_o) associé à $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est un $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné (implicitement, cela sous-entend que M_o est de rang d^2 ; c'est un $\mathcal{D}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} B$-module localement libre de rang 1).*

1.3. La condition «spéciale»

La condition «spéciale» porte directement sur le $\mathcal{O}_o$-module divisible $Gr_o(\mathcal{E})$. Avant de l'énoncer, il nous faut procéder à quelques rappels sur les $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux. A ce propos, on citera les principaux résultats et renvoie le lecteur à [**Dr4**] et [**Ge**] I pour les détails.

1.3.1. $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux. — On reprend les notations de 1.2.3 : $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique $p > 0$ et de corps résiduel $\kappa = \mathbb{F}_{q'}$ $(q' = p^r)$. On a noté K le corps des fractions de $\mathcal{O}$ et fixé une uniformisante π de K. On désigne par $\mathcal{O}_d$ l'anneau des entiers de l'extension non-ramifiée de degré d, K_d, de K et par σ l'automorphisme de la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}_d$ qui induit l'automorphisme de Frobenius $Fr_{q'} : x \mapsto x^{q'}$ sur son corps résiduel $\mathbb{F}_{q'^d}$. La $\mathcal{O}$-algèbre $\mathcal{O}_D$, quotient de l'algèbre $\mathcal{O}_d\,[[\Pi]]$ des séries formelles non-commutatives en une indéterminée Π par les relations

$$\begin{aligned} &\Pi a = \sigma\,(a)\,\Pi \qquad (\forall a \in \mathcal{O}_d) \\ &\Pi^d = \pi \end{aligned}$$

est alors l'ordre maximal de l'algèbre à division centrale simple D d'invariant $1/d$ sur K (à isomorphisme près). Par ailleurs, on se donne une $\mathcal{O}$-algèbre B dans laquelle l'image de π est nilpotente.

Définition 1.3.1. — Un $\mathcal{O}_D$*-module formel* est un groupe formel lisse X sur B muni d'une action de $\mathcal{O}_D$ telle que le groupe formel avec action de $\mathcal{O}$ sous-jacent soit un $\mathcal{O}$-module formel.

Comme pour les $\mathcal{O}$-modules formels, on dira qu'un morphisme de $\mathcal{O}_D$-modules formels est une *isogénie* lorsque le morphisme de groupes formels sous-jacent est une isogénie.

Définition 1.3.2. — Un $\mathcal{O}_D$-module formel X sur B est dit *spécial* lorsque l'action de $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}_D$ induite sur l'espace tangent $\operatorname{Lie} X$ fait de $\operatorname{Lie} X$ un $\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} B$-module inversible.

Soit X un $\mathcal{O}_D$-module formel de hauteur finie sur B. Le module de coordonnées $M_B\,(X)$ de X est muni par fonctorialité d'une action de $\mathcal{O}_D$ qui en fait un $\mathcal{O}_D \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}} B$-module à droite. Via le foncteur quasi-inverse G_B de M_B, on dira également qu'un module de coordonnées (M, F), muni d'une action de $\mathcal{O}_D$ qui prolonge celle de $\mathcal{O}$, est spécial si le $\mathcal{O}_D$-module formel $G_B\,(M, F)$ est spécial. En fait, M est spécial si et seulement si l'action de $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}_D$ fait de $\operatorname{Coker} F$ un $\mathcal{O}_d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} B$-module inversible. En effet, rappelons la relation liant $\operatorname{Lie} X$ et $(M, F) = M_B\,(X)$: on a $\operatorname{Coker} F \simeq (\operatorname{Lie} X)^\vee$.

A partir de maintenant, on fixe un diagramme d'identifications

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_{q'^d}[[\Pi]] \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_D \\ \mathbb{F}_{q'}[[\pi]] \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & \mathcal{O} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Supposons de plus que B est muni d'une structure de $\mathcal{O}_d$-algèbre $\beta : \mathcal{O}_d = \mathbb{F}_{q'^d}\,[[\pi]] \to B$ qui prolonge sa structure de $\mathcal{O}$-algèbre. Le module de coordonnées M de X est alors muni de deux actions de $\mathbb{F}_{q'^d}$, obtenues en considérant les plongements $\mathbb{F}_{q'^d} \subset \mathcal{O}_D$ et $\mathbb{F}_{q'^d} \subset B$. Celles-ci induisent une graduation (on redécompose !)

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_i$$

où l'on pose $M_i = \operatorname{Ker}\left(a\hat{\otimes}1 - 1\hat{\otimes}a^{q'^i}\right)$, pour $a \in \mathbb{F}_{q'^d}$ quelconque engendrant $\mathbb{F}_{q'^d}$ sur $\mathbb{F}_{q'}$; ce sont des $\mathcal{O}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B$-modules à droite.

L'endomorphisme $\Pi\hat{\otimes}1$ est de degré un pour cette graduation et vérifie $\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)^d = \pi\hat{\otimes}1$. Il injecte donc M_i dans M_{i+1} et les M_i sont des $\mathcal{O}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B$-modules localement libres tous de même rang. En particulier, la hauteur de X est multiple de d. De même, le morphisme F définit une injection $F_i : \left(\operatorname{Id}_{\mathcal{O}}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}Fr_{q'}\right)^* M_i \to M_{i+1}$. Le conoyau $\operatorname{Coker} F = \Gamma_*(\omega)$, où ω désigne un B-module localement libre de type fini et Γ le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B & \longrightarrow & B \\ a\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}b & \longmapsto & \beta(a).b \end{array}$$

se décompose en somme directe de quotients $\operatorname{Coker} F_i = \Gamma_*(\omega_i)$.

Proposition 1.3.3. — *Avec les notations précédentes, M est spécial si et seulement si les ω_i sont des B-modules localement libres tous de même rang égal à un.*

En effet, la décomposition précédente correspond à une décomposition du dual de l'espace tangent $\operatorname{Lie} X$ en $(\operatorname{Lie} X)^\vee = \bigoplus_i (\operatorname{Lie} X)_i^\vee$, où :

$$(\operatorname{Lie} X)_i^\vee = \left\{c \in (\operatorname{Lie} X)^\vee : \left(a\hat{\otimes}1\right)c = \left(1\hat{\otimes}a^{q'^i}\right)c \quad \forall a \in \mathbb{F}_{q'^d}\right\}.$$

On suppose à partir de maintenant que B est intègre ; l'image de π dans B est donc nulle. Avec les notations précédentes et désignant par τ le pull-back par $\operatorname{Id}_{\mathcal{O}_d}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}Fr_{q'}$, on dit que $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est *critique* si l'application

$$\overline{\Pi}_i : M_i/F\left({}^\tau M_{i-1}\right) \longrightarrow M_{i+1}/F\left({}^\tau M_i\right)$$

à travers laquelle se factorise $\Pi\hat{\otimes}1$ est l'application nulle. Autrement dit, l'indice i est critique si

$$\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)(M_i) \subset F\left({}^\tau M_i\right).$$

Montrons que, sous l'hypothèse B intègre, l'un au moins des $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est critique. Cela résulte de l'observation suivante : l'application $\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)^d = \pi\hat{\otimes}1$ induit l'application nulle sur l'espace tangent $\operatorname{Lie} X$ mais se factorise comme une composée d'applications $\overline{\Pi}_i$ entre B-modules localement libres. Nécessairement l'un des $\overline{\Pi}_i$ est nul.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.3.4. — *(cf.* **[Dr4]** *§2) Tous les $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux X de hauteur d^2 sur une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_{q'^d}$ sont ($\mathcal{O}_D$-linéairement) isogènes ; de plus, on a $\operatorname{End}_{\mathcal{O}_D} X \otimes K \simeq \mathrm{M}_d(K)$.*

Démonstration. — Commençons par un rappel (cf. **[Ge]** proposition 2.2.11) : un morphisme $\varphi : X \to X'$ de $\mathcal{O}$-modules formels est une isogénie si et seulement si le morphisme $M(\varphi) \otimes \mathrm{Id}_K : M_{X'} \otimes_{\mathcal{O}} K \to M_X \otimes_{\mathcal{O}} K$ est un isomorphisme. La classe d'isogénie du $\mathcal{O}_D$-module formel X est donc déterminée par le K-module de Dieudonné $(M \otimes_{\mathcal{O}} K, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Id}_K)$ sur $B = \overline{\mathbb{F}}_{q'}$ muni de l'action de D induite (dans sa classe d'isomorphisme). Or les injections $\Pi\hat{\otimes}1 : M_i \hookrightarrow M_{i+1}$ induisent par tensorisation avec K des isomorphismes $\Pi_{i,K} : M_{i,K} \xrightarrow{\sim} M_{i+1,K}$ entre $K\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B$-modules libres de rang d (on note $M_{i,K} = M_i \otimes_{\mathcal{O}} K$; en fait, les $M_{i,K}$ sont des $\overline{\mathbb{F}}_{q'}((\pi))$-espaces vectoriels). Ces isomorphismes sont compatibles avec le Frobenius $F_K = F \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Id}_K$, au sens où

$$F_{i+1,K} \circ \left(\mathrm{Id}_K \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}} Fr_{q'}\right)^* \Pi_{i,K} = \Pi_{i+1,K} \circ F_{i,K}.$$

Le module de Dieudonné $(M \otimes_{\mathcal{O}} K, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Id}_K)$ est donc déterminé par la donnée d'un des modules de Dieudonné $\left(M_{i,K}, \Pi_{i,K}^{-1} \circ F_{i,K}\right)$.

Choisissons un indice critique i et raisonnons sur le réseau M_i de $M_{i,K}$. Le fait que i est critique implique que M_i est stable par $\Pi_{i,K}^{-1} \circ F_{i,K}$ et que l'application

$$\Pi_{i,K}^{-1} \circ F_{i,K} : \left(\mathrm{Id}_K \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}} Fr_{q'}\right)^* M_i \longrightarrow M_i$$

est bijective. En effet, l'inclusion $\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)(M_i) \subset F({}^\tau M_i)$ est une égalité car les réseaux $\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)(M_i)$ et $F({}^\tau M_i)$ ont même indice dans M_{i+1}. On prouve cette dernière assertion comme suit : puisque M est spécial, les B-modules $M_{i+1}/F({}^\tau M_i)$ sont libres de rang un pour tout i ; considérant alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M_{i+1} \arrow[r, hook, "\Pi\hat{\otimes}1"] & M_{i+2} \\ {}^\tau M_i \arrow[u, hook, "F"] \arrow[r, hook, "{}^\tau\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)"'] & {}^\tau M_{i+1}, \arrow[u, hook, "F"'] \end{tikzcd}$$

on voit que le rang du B-module libre $M_{i+1}/\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)M_i$ est indépendant de i. Par ailleurs, $M/\left(\pi\hat{\otimes}1\right)M$ est un B-module libre de rang d^2, donc $M/\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)M$ est libre de rang d ; il se décompose en une somme directe

$$M/\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)M = \bigoplus_{i=1}^{d} M_{i+1}/\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)M_i.$$

Ainsi $M_{i+1}/\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)M_i$ est de rang un, donc de même rang que $M_{i+1}/F({}^\tau M_i)$, pour tout i.

Comme B est algébriquement clos, il existe d'après **[Zi2]** VI §4 Lemma 6.25 une base $e_1, \ldots, e_d$ de M_i sur $\mathcal{O}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B$ telle que $\Pi_{i,K}^{-1} \circ F_{i,K}(e_j) = e_j$ pour tout $1 \leq j \leq d$. Les e_j constituent également une base de $M_{i,K}$ sur $K\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B$, donc $\left(M_{i,K}, \Pi_{i,K}^{-1} \circ F_{i,K}\right)$ est bien déterminé (à isomorphisme près).

Enfin, les correspondances $X \mapsto (M_X \otimes_{\mathcal{O}} K, F_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Id}_K) \mapsto \left(M_{i,K}, \Pi_{i,K}^{-1} \circ F_{i,K}\right)$ induisent des isomorphismes :

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D} X \otimes K = \mathrm{End}_D(M_X \otimes_{\mathcal{O}} K, F_X \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Id}_K) = \mathrm{End}_K\left(M_{i,K}, \Pi_{i,K}^{-1} \circ F_{i,K}\right).$$

Or $\mathrm{End}_K\left(M_{i,K},\Pi_{i,K}^{-1}\circ F_{i,K}\right)\simeq \mathrm{M}_d(K)$, puisqu'un endomorphisme K-linéaire de $M_{i,K}$ commute à l'action $Fr_{q'}$-semi-linéaire $\Pi_{i,K}^{-1}\circ F_{i,K}$ si et seulement si sa matrice dans la base $e_1,...,e_d$ est à coefficients dans $\left(K\otimes_{\mathbb{F}_{q'}}B\right)^{Fr_{q'}}=K$. □

Pour finir, on va construire un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial Φ de hauteur d^2 sur $\overline{\mathbb{F}}_{q'}$ et donner une description du module de coordonnées M_Φ associé. Ils constitueront, à la vue du théorème 1.3.4, des «exemples fondamentaux». Reprenons les notations de la preuve précédente : on supposera pour simplifier que 0 est critique (on raisonne à isogénie près). On note e_j^0 $(0\le j\le d-1)$ les vecteurs d'une base de M_0 sur $\mathcal{O}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B$ vérifiant $F\left(e_j^0\right)=\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)\left(e_j^0\right)$. Les vecteurs $e_j^i=\left(\Pi\hat{\otimes}1\right)^i\left(e_j^0\right)$ $(0\le j\le d-1)$ constituent alors une base de M_i pour tout i. Regroupons ces vecteurs selon l'ordre suivant : on note M_j' le sous-$\mathcal{O}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q'}}B$-module de M engendré par les e_j^i $(0\le i\le d-1)$. On a alors $F\left(e_j^i\right)=e_j^{i+1}$ $(0\le i\le d-2)$ et $F\left(e_j^{d-1}\right)=\pi e_j^0$. Le module de coordonnées (M,F) obtenu est donc isomorphe à une somme de d copies du sous-module M_0' caractérisé par un Frobenius $Fr_{q'}$-semi-linéaire vérifiant les relations précédentes. On le note M_Φ ; il est bien spécial en vertu de la proposition 1.3.3, et de hauteur d^2. On vérifie facilement, compte tenu de la description explicite précédente, que le $\mathcal{O}_D$-module formel correspondant est le suivant : en tant que groupe formel, $\Phi=\mathbb{G}_{a,B}^d$. Notons τ l'isogénie de Frobenius de $\mathbb{G}_{a,B}^d$; une matrice carrée de taille d à coefficients dans $B[[\tau]]$ définit de manière évidente un endomorphisme du groupe formel $\mathbb{G}_{a,B}^d$. L'action de $\mathcal{O}_D=\mathbb{F}_{q'^d}[[\Pi]]$ sur Φ est donnée par $\Phi:\mathbb{F}_{q'^d}[[\Pi]]\to\mathrm{End}\,\mathbb{G}_{a,B}^d$ défini comme suit :

$$\begin{aligned}\Phi(a)&=\mathrm{diag}\left(a,a^{q'},\ldots,a^{q'^{d-1}}\right)\quad\left(a\in\mathbb{F}_{q'^d}\right)\\ \Phi(\Pi)&=\tau\,\mathrm{Id}\,.\end{aligned}$$

1.3.2. Enoncé de la condition spéciale . — A partir de maintenant, nous supposerons que *o est une place de F telle que D_o est un corps gauche d'invariant* $1/d$ sur F_o. C'est en effet dans un tel contexte que l'on peut parler de $\mathcal{D}_o$-modules formels. Nous notons $\mathcal{O}_o^{(d)}$ l'anneau des entiers de l'extension non ramifiée de degré d de F_o ; cet anneau se plonge dans $\mathcal{D}_o$ (plongement bien défini à conjugaison près). Comme précédemment, $\kappa(o)$ désigne le corps résiduel de $\mathcal{O}_o$, de cardinal $q_o=q^{\deg(o)}$.

Etant donné un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i,j,t)$ sur un $\mathbb{F}_q$-schéma S, nous disposons du groupe π_o-divisible $Gr_o(\mathcal{E})$ défini en 1.2.2. La condition spéciale porte directement sur ce groupe.

Définition 1.3.5. — On dit que $(\mathcal{E}_i,j,t)$ est *spécial* s'il vérifie la condition supplémentaire suivante :

(v) [*Cond. spéciale*] : Pour chaque point géométrique $s=\mathrm{Spec}\,\kappa(s)$ de caractéristique o de S (*i.e.* tel que $z(s)=o$), l'action de $\mathcal{O}_o^{(d)}$ sur $\mathrm{Lie}\left(Gr_o(\mathcal{E})_s\right)$ se décompose comme la somme des d plongements $\mathcal{O}_o^{(d)}\otimes\kappa(o)\simeq\mathbb{F}_{q_o^d}\hookrightarrow\kappa(s)$.

Cette définition appelle à quelques commentaires.

(a) Tout d'abord, interprétons la condition spéciale en terme du $\mathcal{D}_o$-module divisible $G = Gr_o(\mathcal{E})_s$, pour $s = \operatorname{Spec}\kappa(s)$ un point géométrique de caractéristique o de S. Clairement, G ne peut être étale, lorsque la condition sur $\operatorname{Lie}(G)$ est satisfaite ; dans ce cas $G^{et} = \operatorname{Spec}\kappa(s) \times (F_o/\mathcal{O}_o)^j$, où j est un entier positif strictement inférieur à d^2. Or l'algèbre D_o agit sur G^{et}. Un calcul direct des dimensions couplé au lemme suivant montre alors que $j = 0$; autrement dit, $Gr_o(\mathcal{E})_s$ est un $\mathcal{D}_o$-module formel sur $\operatorname{Spec}\kappa(s)$.

Lemme 1.3.6. — *Soit D une algèbre à division de centre k. Tout D-module M (non nul) est isomorphe à une somme directe de copies de D. En particulier, la plus petite représentation (non triviale) de D sur k est donnée par $\rho : D \hookrightarrow \operatorname{End} D$, c'est-à dire D agissant sur elle-même par multiplication à gauche.*

Démonstration. — Puisque l'algèbre D est semi-simple, tout D-module est somme de D-modules simples. Or un tel module simple M est donné par un idéal maximal I $(M \simeq D/I)$; comme D est simple, nécessairement $M \simeq D$. □

Finalement, dire que $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique spécial sur S équivaut à dire que le groupe formel $Gr_o(\mathcal{E})$ associé est un $\mathcal{D}_o$-module formel spécial, au sens où $Gr_o(\mathcal{E})_s$ est spécial pour tout point géométrique s de S qui provient de la caractéristique o.

(b) La condition spéciale est une condition au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_o$. Soit S un $\mathcal{O}_o$-schéma ; quitte à effectuer un changement de base étale (ce qui ne change en rien la structure de l'algèbre de Lie du groupe π_o-divisible $Gr_o(\mathcal{E})$), on peut toujours supposons que S est en fait un schéma sur l'extension non ramifiée $\mathcal{O}_o^{(d)}$ de degré d de $\mathcal{O}_o$. Notons σ l'automorphisme de la $\mathcal{O}_o$-algèbre $\mathcal{O}_o^{(d)}$ induisant l'automorphisme de Frobenius $x \longmapsto x^q$ sur le corps résiduel. Le $\mathcal{O}_S$-module $\operatorname{Lie} Gr_o(\mathcal{E})$ est alors muni d'une action de l'anneau $\mathcal{O}_o^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o^{(d)}$, isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_o^{(d)}$. Cette action décompose $\operatorname{Lie} Gr_o(\mathcal{E})$ en la somme directe de d modules projectifs $\bigoplus_{i=1}^d \operatorname{Lie}^i(Gr_o(\mathcal{E}))$, de telle sorte que $\mathcal{O}_o^{(d)}$ opère sur la i^{e} composante par le composé du morphisme structural $\mathcal{O}_o^{(d)} \to \mathcal{O}_S$ avec la puissance σ^i de l'automorphisme σ. La condition spéciale signifie que le rang de chacun de ces d modules sur $\mathcal{O}_S$ est égal à 1 en chaque point géométrique de caractéristique o de S.

Cela a encore un sens en fibre générique de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_o$ et la condition est alors automatiquement vérifiée. En effet, notant $\overline{F}_o$ une clôture séparable du corps des fractions F_o de $\mathcal{O}_o$, l'action de $\mathcal{D}_o$ sur le $\overline{F}_o \otimes \mathcal{O}_o^{(d)} \simeq \overline{F}_o^d$-module $\operatorname{Lie}(Gr_o(\mathcal{E})) \otimes \overline{F}_o$ libre de rang 1 induit une injection $\mathcal{D}_o \hookrightarrow \operatorname{End}\left(\overline{F}_o^d\right) = \mathrm{M}_d\left(\overline{F}_o\right)$. Or l'unique application $\mathcal{D}_o \otimes \overline{F}_o = \mathrm{M}_d\left(\overline{F}_o\right) \hookrightarrow \mathrm{M}_d\left(\overline{F}_o\right)$ correspond à la représentation que l'on s'imagine, c'est-à-dire l'algèbre $\mathrm{M}_d\left(\overline{F}_o\right)$ opérant sur elle-même par multiplication à gauche ; de plus, dans cette représentation, $\mathcal{O}_o^{(d)} \hookrightarrow \mathcal{D}_o$ agit via $\mathcal{O}_o^{(d)} \hookrightarrow \operatorname{End}\left(\mathcal{O}_o^{(d)}\right) = \mathrm{M}_d(\mathcal{O}_o)$. L'action de $\mathcal{D}_o$ sur $\operatorname{Lie}(Gr_o(\mathcal{E})) \otimes \overline{F}_o$ fait donc bien intervenir tous les d plongements $\mathcal{O}_o^{(d)} \hookrightarrow \overline{F}_o$ (à travers l'isomorphisme canonique $\overline{F}_o \otimes \mathcal{O}_o^{(d)} \simeq \overline{F}_o^d$).

Parce que le rang d'un $\mathcal{O}_S$-module projectif est localement constant, on voit que la condition spéciale est une condition à la fois ouverte et fermée. Ainsi elle est satisfaite dès qu'elle l'est en un seul point géométrique de chaque composante connexe du schéma S.

1.4. Analogue du Théorème de Serre et Tate

Soient S le spectre d'un anneau R local artinien et $\overline{S} \subset S$ le sous-schéma fermé défini par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul. Soit $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur $\overline{R} = R/\mathfrak{m}$, de caractéristique $\bar{z} : \overline{S} \to \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_o)$. On ne fixe pas le relèvement $z : S \to \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_o)$ de $\bar{z}$ (qui fait de R une $\mathcal{O}_o$-algèbre telle que l'image de π_o est nilpotente). Notons $Def_R\left(\overline{\mathcal{E}}\right)$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) déformations de $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$ définies sur R. D'autre part, soit $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné associé à $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$. On désigne par $Def_R\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) déformations de $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ définies sur R. Dans ce qui suit, dès que nous parlerons de $\mathcal{D}$-faisceau elliptique spécial, il sera implicitement sous-entendu que l'algèbre D est, en la place o, un corps gauche D_o d'invariant $1/d$.

Théorème 1.4.1. — *L'application qui à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique associe son $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné (cf. définition 1.2.17) induit une bijection $Def_R\left(\overline{\mathcal{E}}\right) \to Def_R\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$. De plus, cette application préserve la spécialité.*

Ainsi, en vertu de l'anti-équivalence de catégories entre modules de Dieudonné et modules divisibles (cf. proposition 1.2.4), déformer un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique spécial revient à déformer le $\mathcal{D}_o$-module formel $Gr_o\,(\mathcal{E})$ sous-jacent. Cet énoncé constitue donc l'analogue pour les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques du théorème de Serre et Tate dans le cadre des variétés abéliennes. La preuve se fait en calculant plus précisément les espaces de déformations des deux types d'objets en question. Signalons que l'étude des déformations des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques a déjà été esquissée dans [**L-R-S**] (remark 4.10) en tant que méthode alternative à la démonstration de la lissité du schéma de modules des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques. Ces idées ont été mises en forme plus tard par Boyer dans sa thèse (voir [**Boy**]).

1.4.1. Déformation des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques. — On reprend les notations précédentes ; notant $\Gamma_{\bar{z}}$ le graphe du morphisme $\bar{z}$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow {}^{\tau}\overline{\mathcal{E}}_0 \xrightarrow{\bar{t}} \overline{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow \left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

où $\overline{\mathcal{B}}$ est un $\overline{R}$-module libre de rang d. On va voir que relever $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$ en un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}, j, t)$ défini sur R revient en fait à relever cette suite exacte, démontrant ainsi la :

Proposition 1.4.2. — *Il n'y a pas d'obstruction à relever le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$. L'ensemble des relèvements est un torseur sous le groupe*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{R}}\left(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right).$$

Notons que $\mathfrak{m}$ est un module sur $\overline{R}$, parce que c'est un idéal de carré nul. On commence par relever les modules $\overline{\mathcal{E}}_i$, ce qui fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 1.4.3. — *Il n'y a pas d'obstruction à relever le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{S}}$-module à droite $\overline{\mathcal{E}}_i$ localement libre de rang un. L'ensemble des relèvements est un torseur sous le groupe*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right).$$

Démonstration. — Il résulte de [**I**] Chap. IV Prop. 3.1.5, que l'obstruction à relever un $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{S}}$-module à droite $\overline{\mathcal{E}}_i$ localement libre de rang un se trouve dans le groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$. Or cette obstruction est nulle, ainsi qu'il résulte de la suite spectrale locale-globale pour les *Ext*. En effet, les faisceaux $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ sont nuls pour $n \geq 1$, du fait que le $(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{S}})$-module $\overline{\mathcal{E}}_i$ est localement libre ; d'autre part, comme $X \times \overline{S}$ est de dimension 1 (puisque $\overline{S}$ est le spectre d'une algèbre artinienne et X est une courbe), la cohomologie $\mathrm{H}^n\left(X \times \overline{S}, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right)$ est également nulle pour tout $n \geq 2$. Finalement, la suite spectrale pour les *Ext* est dégénérée, les seuls termes non nuls étant les $\mathrm{H}^n\left(X \times \overline{S}, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right)$ pour $n = 0, 1$. Il en résulte un isomorphisme $0 = \mathrm{H}^2\left(X \times \overline{S}, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$, d'où la nullité de l'obstruction.

L'obstruction étant nulle, l'ensemble des relèvements est alors un torseur sous le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \overline{\mathcal{E}}_i \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$. □

Le morphisme de Frobenius Frob_S se factorise à travers $\overline{S}$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mathrm{Frob}_S"] \arrow[dr, "\mathrm{Frob}_{S,\overline{S}}"'] & S \\ & \overline{S} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En effet, l'image de $r \in R$ par Frob_S ne dépend que de la classe de r modulo $\mathfrak{m}$ (puisque $\mathfrak{m}^2 = 0$). Ainsi le pull-back ${}^\tau\mathcal{E}_i$ d'un relèvement $\mathcal{E}_i$ de $\overline{\mathcal{E}}_i$ ainsi que l'application ${}^\tau j$ sont donnés indépendamment du relèvement par :

$${}^\tau\mathcal{E}_i = \left(\mathrm{id}_X \times \mathrm{Frob}_{S,\overline{S}}\right)^* \overline{\mathcal{E}}_i \qquad \text{et} \qquad {}^\tau j = \left(\mathrm{id}_X \times \mathrm{Frob}_{S,\overline{S}}\right)^* \overline{j}.$$

Il s'agit maintenant de relever l'application $\bar{t}:\ {}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0 \to \overline{\mathcal{E}}_1$, autrement dit nous cherchons un module $\mathcal{E}_1$ et un morphisme $t:\ {}^\tau\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ rendant commutatif le diagramme :

(5)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}\otimes\mathfrak{m}"'] & {}^\tau\mathcal{E}_0 \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & {}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] & \overline{\mathcal{E}}_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ecrivant la décomposition canonique :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}\otimes\mathfrak{m}"'] & {}^\tau\mathcal{E}_0 \arrow[r] \arrow[d] & {}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\bar{t}\otimes\mathfrak{m}) * {}^\tau\mathcal{E}_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & {}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r, dotted] & \mathcal{E}_1 \arrow[r, dotted] & \overline{\mathcal{E}}_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on voit que le problème se résume à trouver une extension $\mathcal{E}_1$ de $\overline{\mathcal{E}}_1$ par $\overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}$ telle que le pull-back $\mathcal{E}_1 * \bar{t}$ de $\mathcal{E}_1$ par $\bar{t}$ soit le push-out $(\bar{t}\otimes\mathfrak{m}) * {}^\tau\mathcal{E}_0$ de ${}^\tau\mathcal{E}_0$ par $\bar{t}\otimes\mathfrak{m}$. L'obstruction à cela résulte de la non surjectivité de l'application :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_1, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) \xrightarrow{\bar{t}^*} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left({}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right).$$

Considérons la suite exacte longue obtenue en appliquant à la suite exacte courte (4) le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(-, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$:

$$\begin{gathered}
0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_1, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right) \to \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left({}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right) \to \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_1, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right) \xrightarrow{\bar{t}^*} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left({}^\tau\overline{\mathcal{E}}_0, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right).
\end{gathered} \tag{6}$$

On voit donc que l'obstruction précédente se situe dans le groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right)$.

Utilisons à nouveau la suite spectrale locale-globale pour les *Ext*. Pour les mêmes raisons que précédemment, la cohomologie $\mathrm{H}^n\left(X \times \overline{S}, -\right)$ est nulle pour tout $n \geq 2$. Par ailleurs, le fait que $\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}$ est un faisceau gratte-ciel au-dessus du zéro o et $\mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1$ un module localement libre implique la nullité des faisceaux $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right)$ et $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right)$ pour tout $n \geq 2$, alors que le faisceau $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \mathfrak{m}\overline{\mathcal{E}}_1\right)$ est également un faisceau gratte-ciel au-dessus de o. Finalement, la suite spectrale pour les *Ext* est encore dégénérée, le seul terme non nul étant maintenant le groupe $\mathrm{H}^0\left(X \times \overline{S}, \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right)$. On conclut comme précédemment : l'isomorphisme $0 = \mathrm{H}^2\left(X \times \overline{S}, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ implique la nullité de l'obstruction. On a également un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left(X \times \overline{S}, \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right) ;$$

le faisceau $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ étant concentré au point o, sa fibre en o coïncide alors avec $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$. De plus, la fibre en o du faisceau $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{R}}\left(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ (c'est vrai pour tout module admettant tel $\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}$ une résolution par des modules localement libres), d'où l'isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{R}}\left(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right). \tag{7}$$

Calculons l'espace des relèvements : tout d'abord, il résulte de la nullité du groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ et de la longue suite exacte (6) que l'ensemble des classes de congruences d'extensions $\mathcal{E}_1$ de $\overline{\mathcal{E}}_1$ par $\overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}$ vérifiant $\mathcal{E}_1 * \bar{t} = (\bar{t} \otimes \mathfrak{m}) * {}^{\tau}\mathcal{E}_0$ est un torseur sous :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) / \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left({}^{\tau}\overline{\mathcal{E}}_0, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right).$$

L'extension $\mathcal{E}_1$ étant fixée, l'ensemble des classes de congruences d'applications t : ${}^{\tau}\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ relevant $\bar{t}$, c'est à dire faisant commuter le diagramme (5), est donné par :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left({}^{\tau}\overline{\mathcal{E}}_0, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) / \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\overline{\mathcal{E}}_1, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right)\\ &\simeq \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left({}^{\tau}\overline{\mathcal{E}}_0, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right).\end{aligned}$$

On en conclut donc que l'ensemble des relèvements de la suite exacte (4) est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\Gamma_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$, lequel est encore isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\otimes_{\mathbb{F}_q}\overline{R}}\left(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ par (7). La proposition 1.4.2 est ainsi démontrée, modulo le fait annoncé que relever le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$ revient à relever la suite exacte (4).

Démontrons ce dernier point : on suppose donc construit $\mathcal{E}_1$ ainsi que l'application t : ${}^{\tau}\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$; en outre, on connaît les modules ${}^{\tau}\mathcal{E}_i$ pour tout i et les applications ${}^{\tau}j$. Les morphismes t et j étant des isomorphismes locaux en dehors des places o et ∞ respectivement, lesquelles sont distinctes, il existe alors un unique diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook, "{}^{\tau}j"] \arrow[ur, hook, "t"] & {}^{\tau}\mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "{}^{\tau}j"] \arrow[ur, hook, "t"] & {}^{\tau}\mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "{}^{\tau}j"] \arrow[ur, hook, "t"] & {}^{\tau}\mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "{}^{\tau}j"] \arrow[ur, hook, "t"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui inclut les éléments déjà construits. Les vérifications sont alors immédiates : les $\mathcal{E}_i$ sont des $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}$-modules à droite localement libres de rang un et les applications j et t des injections $\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}$-linéaires. La condition de périodicité $\mathcal{E}_{i+d} = \mathcal{E}_i\left(\{\infty\} \times S\right)$ découle de la périodicité des ${}^{\tau}\mathcal{E}_i$. Puisque $pr_{\overline{S}}\left(\overline{\mathcal{E}}_{i+1}/\bar{t}\left({}^{\tau}\overline{\mathcal{E}}_i\right)\right)$ est un $\overline{R}$-module libre de rang d, il en est de même de $pr_S\left(\mathcal{E}_{i+1}/t\left({}^{\tau}\mathcal{E}_i\right)\right)$ par le lemme de Nakayama ; le conoyau $\mathcal{E}_{i+1}/t\left({}^{\tau}\mathcal{E}_i\right)$ concentré en o est donc l'image directe $\left(\Gamma_z\right)_* \mathcal{B}_i$ d'un R-module $\mathcal{B}_i$ localement libre de rang d par la section Γ_z, graphe d'un morphisme z relevant $\bar{z}$. De même, $\mathcal{E}_{i+1}/j\left(\mathcal{E}_i\right)$ est isomorphe comme $\mathcal{O}_{X\times S}$-module à l'image directe $\left(\Gamma_\infty\right)_* \mathcal{A}_i$ d'un R-module $\mathcal{A}_i$ localement libre de rang d par la section ∞.

Le diagramme $\left(\mathcal{E}_i, j, t\right)$ constitue donc un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique qui est une déformation de $\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \bar{j}, \bar{t}\right)$; la démonstration de la proposition 1.4.2 est achevée.

1.4.2. Déformation des $\mathcal{D}_o$-modules de Dieudonné. — Poursuivant avec les notations précédentes, on se donne un $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ défini sur $\overline{R}$ et muni d'une action de $\mathcal{D}_o$ qui prolonge celle de $\mathcal{O}_o$. On rappelle que si le Frobenius $\overline{F}_o$ est topologiquement nilpotent, alors $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ est un $\mathcal{O}_o$-module de coordonnées ; il est dit spécial si le $\mathcal{D}_o$-module formel qui lui correspond est spécial.

Proposition 1.4.4. — *Il n'y a pas d'obstruction à relever le $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$. L'ensemble des relèvements est un torseur sous le groupe*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}\overline{R}}\left(\mathrm{Coker}\, \overline{F}_o, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right).$$

De plus, si $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ *est en fait un module de coordonnées spécial, alors il en est de même des relèvements.*

Démonstration. — Relever le $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ revient à relever la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}^{\tau}\overline{M}_o \xrightarrow{\overline{F}_o} \overline{M}_o \longrightarrow \left(\overline{\Gamma}_{\bar{z}}\right)_* \overline{\omega} \longrightarrow 0 \tag{8}$$

où $\overline{\omega}$ désigne un $\overline{R}$-module libre de rang fini et $\overline{\Gamma}_{\bar{z}}$ le morphisme $a\hat{\otimes}b \in \mathcal{O}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}\overline{R} \mapsto \bar{z}(a)\, b \in \overline{R}$. La preuve est de ce fait similaire à celle de la proposition 1.4.2, bien que plus simple étant donné que l'on manipule ici des modules et non des faisceaux, ce qui rend inutile par exemple le recours à la suite spectrale locale-globale pour les *Ext*.

Tout d'abord, le $\mathcal{D}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}\overline{R}$-module localement libre de rang un $\overline{M}_o$ se relève de manière unique (à isomorphisme près) en un module M_o. On est donc amené à considérer les applications F_o telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}^{\tau}\overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{F}_o\otimes\mathfrak{m}"'] & {}^{\tau}M_o \arrow[r] \arrow[d, dotted, "F_o"'] & {}^{\tau}\overline{M}_o \arrow[r] \arrow[d, "\overline{F}_o"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] & M_o \arrow[r] & \overline{M}_o \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{9}$$

Considérant la suite exacte longue obtenue en appliquant à la suite exacte courte (8) le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}\overline{R}}\left(-, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$, on voit que l'ensemble des classes de congruences d'applications $F_o :\ {}^{\tau}M_o \to M_o$ relevant $\overline{F}_o$, c'est-à-dire faisant commuter le diagramme (9), est donné par :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o}\overline{R}}\left({}^{\tau}\overline{M}_o, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) / \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}\overline{R}}\left(\overline{M}_o, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right) \\ \simeq\ &\mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}\overline{R}}\left({}^{\tau}\overline{M}_o, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)\right) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\overline{\Gamma}_{\bar{z}}\right)_* \overline{\omega}, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right). \end{aligned}$$

L'ensemble des relèvements de la suite exacte (8), c'est-à-dire du $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$, est donc un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\overline{\Gamma}_{\bar{z}}\right)_* \overline{\omega}, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$ (vérification immédiate : $\mathrm{Coker}\, F_o = (\Gamma_z)_* \,\omega$, pour un certain morphisme $z : S \to \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_o)$ relevant $\bar{z}$).

Supposons maintenant que $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ est un module de coordonnées spécial, et soit (M_o, F_o) un relèvement de $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ vu comme $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné. Montrons que le Frobenius F_o est topologiquement nilpotent ; on a un diagramme commutatif, où π_o désigne une uniformisante de $\mathcal{O}_o$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}^{\tau^n}\left(\overline{M}_o/\pi_o\overline{M}_o\right) \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{F}_o^n"'] & {}^{\tau^n}\left(M_o/\pi_o M_o\right) \arrow[r] \arrow[d, "F_o^n"'] & {}^{\tau^n}\left(\overline{M}_o/\pi_o\overline{M}_o\right) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{F}_o^n"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \left(\overline{M}_o/\pi_o\overline{M}_o\right) \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] & M_o/\pi_o M_o \arrow[r] & \overline{M}_o/\pi_o\overline{M}_o \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Choisissant l'entier n tel que $\overline{F}_o^n = 0$, on voit que l'application F_o^n est à valeurs dans $\left(\overline{M}_o/\pi_o\overline{M}_o\right) \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m} \subset M_o/\pi_o M_o$; puisque l'idéal $\mathfrak{m}$ est de carré nul, il vient donc $F_o^{2n} = 0$. Il reste à montrer que le module de coordonnées (M_o, F_o) vérifie la condition spéciale. Pour cela, on peut toujours supposer, quitte à effectuer un changement de base étale, que $\overline{R}$ est une algèbre sur l'extension non ramifiée $\mathcal{O}_d$ de degré d de $\mathcal{O}$. Le module de coordonnées (M_o, F_o) se décompose alors suivant la double action de $\mathbb{F}_{q_o^d}$; écrivant $\mathrm{Coker}\overline{F}_o = \left(\Gamma_{\overline{z}}\right)_* (\overline{\omega}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \left(\Gamma_{\overline{z}}\right)_* (\overline{\omega}_i)$, où les $\overline{\omega}_i$ sont des $\overline{R}$-modules libres de rang un (voir proposition 1.3.3), cette décomposition se relève en $\mathrm{Coker}F_o = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\Gamma_z)_* (\omega_i)$, et les R-modules ω_i sont libres de rang un également par le lemme de Nakayama. Le lecteur notera que ces dernières vérifications reviennent à remarquer que la condition spéciale pour les modules de coordonnées (ou de manière équivalente les modules formels) est vérifiée dès qu'elle l'est sur la fibre spéciale, qui reste inchangée par déformation. En résumé, (M_o, F_o) est spécial et la démonstration de la proposition 1.4.4 est terminée. □

1.4.3. Preuve du théorème. — On reprend les notations du debut de section ; pour $\left(\overline{\mathcal{E}}_i, \bar{j}, \bar{t}\right)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur $\overline{R}$ et $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné associé, rappelons que $Def_R\left(\overline{\mathcal{E}}\right)$ (resp. $Def_R\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$) désigne l'ensemble des (classes d'isomorphie de) déformations de $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$ (resp. $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$) définies sur R.

Fixons une déformation $(\mathcal{E}_i^0, j^0, t^0)$ de $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$ et soit (M_o^0, F_o^0) le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné sur R correspondant, qui est une déformation de $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$. D'après les propositions 1.4.2 et 1.4.4, les déformations de $\left(\overline{\mathcal{E}}, \bar{j}, \bar{t}\right)$ et $\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right)$ par rapport à ces points bases sont en bijection avec les groupes

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\overline{\Gamma}_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} \overline{R}}\left(\mathrm{Coker}\overline{F}_o, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right)$$

respectivement.

Considérons l'application qui à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$ de pure caractéristique o défini sur R associe le $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné (M_o, F_o) sur R correspondant ; elle induit une application

$$Def_R\left(\overline{\mathcal{E}}\right) \longrightarrow Def_R\left(\overline{M}_o, \overline{F}_o\right),$$

ou encore, avec le choix des points bases précédent, un morphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\overline{\Gamma}_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} \overline{R}}\left(\mathrm{Coker}\overline{F}_o, \overline{M}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right). \tag{10}$$

Concrètement, si $\mathcal{E}_o$ désigne la fibre au point o des modules $\mathcal{E}_i$, on rappelle que M_o n'est rien d'autre que le séparé complété pour la topologie $\pi_o \hat{\otimes} 1$-adique de la partie de degré zéro $\mathcal{E}_{o,0}$ de $\mathcal{E}_o$ (pour la graduation issue de la double action du corps résiduel $\kappa(o)$; cf. paragraphe 1.2.3) ; de même, F_o est induit par t_o, de sorte que le conoyau $\mathrm{Coker}F_o$ coïncide avec $\mathcal{B} = pr_S(\mathrm{Coker}t)$, vu comme $\left(\mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} R\right)$-module via le morphisme $\Gamma_z : \mathcal{O}_o \hat{\otimes}_{\kappa(o)} R \to R$. De surcroît, on a déjà remarqué dans la preuve de la proposition 1.4.2 que localiser au point o induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{S}}}\left(\left(\overline{\Gamma}_{\bar{z}}\right)_* \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{R}}\left(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{E}}_o \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{m}\right).$$

Un module $\mathcal{E}_o$ étant complètement déterminé par sa partie de degré zéro, on voit donc, après complétion, que le morphisme (10) est un isomorphisme.

Pour finir, la spécialité est clairement conservée, puisque la condition spéciale porte justement sur la fibre spéciale qui reste inchangée par déformation.

1.5. Unicité de la classe d'isogénie

On rappelle que F est le corps des fonctions de la courbe X, avec donc $\mathbb{F}_q$ comme corps des constantes. On s'est fixé une place o de F et note $\kappa(o)$ le corps résiduel, de degré r sur $\mathbb{F}_q$. Soit $\bar{\kappa}(o)$ une clôture algébrique de $\kappa(o)$; on désigne toujours par Fr_q le Frobenius arithmétique $x \mapsto x^q$. D'autre part, on rappelle que l'algèbre à division $\mathcal{D}$ est, en la place o, un corps gauche $\mathcal{D}_o$ d'invariant $1/d$. Le but de cette section est de montrer que tous les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques spéciaux sur $\bar{\kappa}(o)$ sont «isogènes», au sens de la définition 1.5.7. La preuve nécessite une bonne connaissance de certains objets qui interviennent naturellement, d'où en préliminaire quelques rappels sur les φ-espaces et les F_x-modules de Dieudonné. Le lecteur pourra trouver dans **[L-R-S]** Appendice A la preuve des résultats cités.

1.5.1. Rappels sur les φ-espaces et les φ-paires. —

Définition 1.5.1. — Avec les notations précédentes :

1. Un φ-espace (sur $\bar{\kappa}(o)$) est un $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)$-espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une application $\mathrm{Id}_F \otimes_{\mathbb{F}_q} Fr_q$-semi-linéaire bijective $\varphi : V \to V$.

   Un morphisme α entre deux φ-espaces (V_1, φ_1) et (V_2, φ_2) est une application $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)$-linéaire $V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2$ telle que $\varphi_2 \circ \alpha = \alpha \circ \varphi_1$.

2. Une φ-paire est une paire $\left(\tilde{F}, \tilde{\Pi}\right)$ où $\tilde{F}$ est une algèbre commutative de dimension finie sur F et $\tilde{\Pi}$ un élément de $\tilde{F}^* \otimes \mathbb{Q}$ qui vérifie la propriété suivante : pour toute F-sous-algèbre stricte F' de $\tilde{F}$, $\tilde{\Pi}$ n'appartient pas au sous-groupe $F'^* \otimes \mathbb{Q}$ de $\tilde{F}^* \otimes \mathbb{Q}$.

A chaque φ-espace (V, φ) (non nul), Drinfeld associe une φ-paire $\left(F_{(V,\varphi)}, \Pi_{(V,\varphi)}\right)$; voir **[L-R-S]** A.4 pour la construction explicite. Il prouve ainsi que la catégorie des φ-espaces est semi-simple et classifie ses objets :

Théorème 1.5.2 **(classification des φ-espaces sur $\bar{\kappa}(o)$)**
(cf. **[L-R-S]** *th. A.6)*

(i) La catégorie des φ-espaces sur $\bar{\kappa}(o)$ est abélienne, F-linéaire et semi-simple ;

(ii) L'application $(V, \varphi) \longmapsto \left(F_{(V,\varphi)}, \Pi_{(V,\varphi)}\right)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de φ-espaces irréductibles et l'ensemble des classes d'isomorphismes de φ-paires $\left(\tilde{F}, \tilde{\Pi}\right)$, où $\tilde{F}$ est un corps ;

(iii) Si $\tilde{F}/F$ est une extension finie de corps et si $\tilde{\Pi} \in \tilde{F}^* \otimes \mathbb{Q}$, soit $d\left(\tilde{\Pi}\right)$ le plus petit dénominateur commun des rationnels $\deg(\tilde{x})\, \tilde{x}\left(\tilde{\Pi}\right)$, où $\tilde{x}$ décrit l'ensemble des places de $\tilde{F}$ et $\deg(\tilde{x}) = [\kappa(\tilde{x}) : \mathbb{F}_q]$. Alors pour tout φ-espace irréductible (V, φ), on a :

$$\dim_{F \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)}(V) = \left[F_{(V,\varphi)} : F\right] d\left(\Pi_{(V,\varphi)}\right)$$

et $\mathrm{End}\,(V,\varphi)$ *est une algèbre à division centrale sur* $F_{(V,\varphi)}$ *de dimension* $d\left(\Pi_{(V,\varphi)}\right)^2$ *et d'invariants*

$$\mathrm{inv}_{\tilde{x}}\left(\mathrm{End}\,(V,\varphi)\right) = -\deg\left(\tilde{x}\right)\tilde{x}\left(\Pi_{(V,\varphi)}\right) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

en les places $\tilde{x}$ *de* $F_{(V,\varphi)}$.

Terminons ces rappels par un dernier résultat dont nous aurons besoin :

Lemme 1.5.3. — *Si* $\left(\tilde{F},\tilde{\Pi}\right)$ *est une* φ*-paire et si* N *est un entier non nul tel que* $\tilde{\Pi}^N \in \tilde{F}^*$ *(plus exactement,* $\tilde{\Pi}^N$ *appartient à l'image de* $\tilde{F}^*$ *dans* $\tilde{F}^*\otimes\mathbb{Q}$*) alors* $\tilde{F} = F\left[\tilde{\Pi}^N\right]$.

Démonstration. — Soit $F' = F\left[\tilde{\Pi}^N\right] \subset \tilde{F}$, alors $\tilde{\Pi} \in F'^*\otimes\mathbb{Q}$; donc $F' = \tilde{F}$. □

1.5.2. F_x-modules de Dieudonné sur $\bar{\kappa}\,(o)$. —

Définition 1.5.4. — Soit x une place de F. Un F_x-module de Dieudonné sur $\bar{\kappa}\,(o)$ est un $F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\bar{\kappa}\,(o)$ -module N de type fini, muni d'une application $\mathrm{Id}_{F_x}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}Fr_q$-semi-linéaire bijective $\psi : N \to N$.

Un morphisme α entre deux F_x-module de Dieudonné (N_1,ψ_1) et (N_2,ψ_2) est une application $F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\bar{\kappa}\,(o)$-linéaire $N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2$ tel que $\psi_2\circ\alpha = \alpha\circ\psi_1$.

Les F_x-modules de Dieudonné forment une catégorie qui est F_x-linéaire, abélienne, noethérienne et artinienne.

Remarque. — *Soit* $\iota_o : \kappa\,(x) \hookrightarrow \bar{\kappa}\,(o)$ *un* $\mathbb{F}_q$*-plongement et pour tout* $j \in \mathbb{Z}/\deg\,(o)\,\mathbb{Z}$ *soit* $\iota_j = Fr_q^j\circ\iota_o$*. Nous avons alors une décomposition canonique*

$$F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\bar{\kappa}\,(o) = \prod_{j\in\mathbb{Z}/\deg(x)\mathbb{Z}} F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_j}\bar{\kappa}\,(o)$$

($\kappa\,(x)$ *se plonge naturellement dans* F_x*) et chaque facteur est un corps. De ce fait, se donner un* F_x*-module de Dieudonné* (N,ψ) *revient à se donner une collection de* $F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_j}\bar{\kappa}\,(o)$*-espaces vectoriels* N_j *de dimension finie et des applications bijectives semi-linéaires* $\psi_j : N_j \to N_{j+1}$*. Via*

$$F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x)}Fr_q : F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_j}\bar{\kappa}\,(o) \xrightarrow{\sim} F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_{j+1}}\bar{\kappa}\,(o)\,,$$

c'est équivalent à la donnée d'un seul espace vectoriel N_0 *sur* $F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_0}\bar{\kappa}\,(o)$ *muni d'une application bijective* $F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_0}Fr_q^{\deg(x)}$*-semi-linéaire*

$$\Psi_0 = \psi_{\deg(x)-1}\circ\cdots\circ\psi_0 : N_0 \longrightarrow N_0.$$

Un F_x*-module de Dieudonné sur* $\bar{\kappa}\,(o)$ *peut donc être vu comme un* $F_x\hat{\otimes}_{\kappa(x)}\bar{\kappa}\,(o)$*-module, et les deux points de vue sont équivalents.*

Il existe une classification des F_x-modules de Dieudonné sur le corps algébriquement clos $\bar{\kappa}\,(o)$, analogue à celle que l'on connaît en inégale caractéristique. Soient d et r

deux entiers tels que $d \geq 1$ et $(d,r)=1$; avec les notations de la remarque précédente, considérons l'espace vectoriel

$$N_0 = \left(F_x \hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_0} \bar{\kappa}\,(o)\right)^d$$

sur $F_x \hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_0} \bar{\kappa}\,(o)$ ayant pour base canonique $e_1, \ldots, e_d$. On le munit de l'application bijective $F_x \hat{\otimes}_{\kappa(x),\iota_0} Fr_q^{\deg(x)}$-semi-linéaire définie par

$$\Psi_0\,(e_i) = \begin{cases} \pi_x^r e_d & \text{si } i=1 \\ e_{i-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

La paire (N_0, Ψ_0) définit un F_x-modules de Dieudonné que nous noterons $(N_{d,r}, \psi_{d,r})$; on vérifie facilement que sa classe d'isomorphisme est indépendante du choix de ι_0 et de l'uniformisante π_x de $\mathcal{O}_x$.

Théorème 1.5.5 **(classification des F_x-modules de Dieudonné sur $\bar{\kappa}\,(o)$)** *(cf.* **[L-R-S]** *théorème B.3)*

(i) La catégorie abélienne des F_x-modules de Dieudonné sur $\bar{\kappa}\,(o)$ est semi-simple ;

(ii) Les $(N_{d,r}, \psi_{d,r})$ $(d, r \in \mathbb{Z},\ d \geq 1,\ (d,r)=1)$ sont irréductibles et tout F_x-modules de Dieudonné irréductible est isomorphe à l'un d'entre eux et un seul ;

(iii) End$(N_{d,r}, \psi_{d,r})$ *est une algèbre à division centrale sur F_x d'invariant $-r/d$ (modulo $\mathbb{Z}$).*

On dispose d'un foncteur exact F-linéaire :

$$(V,\varphi) \longmapsto (V_x, \varphi_x) = \left(F_x \hat{\otimes}_F V, F_x \hat{\otimes}_F \varphi\right),$$

de la catégorie des φ-espaces dans celle des F_x-modules de Dieudonné.

Proposition 1.5.6. — *(cf.* **[L-R-S]** *proposition B.4) Soit (V,φ) un φ-espace irréductible et $\left(\tilde{F}, \tilde{\Pi}\right) = \left(F_{(V,\varphi)}, \Pi_{(V,\varphi)}\right)$ la φ-paire correspondante. Pour toute place $\tilde{x}$ de $\tilde{\Pi}$ au-dessus de x, posons $(V_{\tilde{x}}, \varphi_{\tilde{x}}) = \tilde{F}_{\tilde{x}} \otimes_{\tilde{F}} (V,\varphi)$. Alors le scindage canonique $F_x \otimes_F \tilde{F} = \prod_{\tilde{x}|x} \tilde{F}_{\tilde{x}}$ induit une décomposition*

$$(V_x, \varphi_x) = \bigoplus_{\tilde{x}|x} (V_{\tilde{x}}, \varphi_{\tilde{x}})$$

de (V_x, φ_x) comme F_x-module de Dieudonné. De plus, pour tout $\tilde{x} \mid x$, $(V_{\tilde{x}}, \varphi_{\tilde{x}})$ est (non canoniquement) isomorphe à $(N_{d_{\tilde{x}}, r_{\tilde{x}}}, \psi_{d_{\tilde{x}}, r_{\tilde{x}}})^{s_{\tilde{x}}}$, où les entiers $d_{\tilde{x}}, r_{\tilde{x}}$ et $s_{\tilde{x}}$ sont uniquement déterminés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} d_{\tilde{x}}, s_{\tilde{x}} \geq 1, \qquad (d_{\tilde{x}}, r_{\tilde{x}}) = 1, \\ r_{\tilde{x}}/d_{\tilde{x}} = \deg(\tilde{x})\, \tilde{x}\left(\tilde{\Pi}\right) / \left[\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x\right], \\ d_{\tilde{x}} s_{\tilde{x}} = d\left(\tilde{\Pi}\right)\left[\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x\right]. \end{cases}$$

1.5.3. Fibre générique d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique. — A un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$ de caractéristique o sur $\bar{\kappa}(o)$, c'est-à-dire dont le zéro est le morphisme $\operatorname{Spec} \bar{\kappa}(o) \to \operatorname{Spec} \kappa(o) \hookrightarrow X$, on associe un φ-espace (V, φ) et un homomorphisme de F-algèbre

$$\lambda : D^{opp} \longrightarrow \operatorname{End}(V, \varphi)$$

de la façon suivante. Soit V la fibre générique de $\mathcal{E}_0$; via le morphisme j on peut identifier V à la fibre générique de $\mathcal{E}_i$ pour tout i. L'application t induit alors une application bijective $F \otimes_{\mathbb{F}_q} Fr_q$-semi-linéaire bijective $\varphi : V \to V$ et (V, φ) est un φ-espace sur $\bar{\kappa}(o)$. De plus, l'action (à droite) de D sur V commute avec φ et fournit le morphisme λ.

Définition 1.5.7. — Le triplet (V, φ, λ) est appelé *la fibre générique* du $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$. Deux faisceaux elliptiques sont dits *isogènes* si leurs fibres génériques sont isomorphes.

Remarque. — *Peut-être devrait-on, par analogie au cas des variétés abéliennes, appeler* quasi-isogénie *entre* $(\mathcal{E}_i, j, t)$ *et* $(\mathcal{E}'_i, j', t')$ *un tel isomorphisme entre leurs fibres génériques* (V, φ, λ) *et* (V', φ', λ') *et réserver le terme isogénie pour une collection de morphismes* $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}'_i$ *qui font commuter tous les diagrammes évidents.*

Si x est une place de F, on considère le F_x-module de Dieudonné sur $\bar{\kappa}(o)$

$$(V_x, \varphi_x) = \left(F_x \hat{\otimes}_F V, \operatorname{Id}_{F_x} \hat{\otimes} \varphi\right),$$

muni du morphisme de F_x-algèbres $\lambda_x : D^{opp} \to \operatorname{End}(V_x, \varphi_x)$. On pose

$$M_x = H^0\left(\operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_x \hat{\otimes} \bar{\kappa}(o)\right), \mathcal{E}_0\right),$$

qui est un $\mathcal{D}_x$-réseau stable sous $\lambda_x(D^{opp})$, où l'on appelle réseau dans V_x tout sous-$\mathcal{O}_x \hat{\otimes} \bar{\kappa}(o)$-module de type fini de V_x qui engendre V_x sur $F_x \hat{\otimes} \bar{\kappa}(o)$.

Lemme 1.5.8. — *(*[**L-R-S**]*, lemme 9.3) Les F_x-modules de Dieudonné (V_x, φ_x) et réseaux M_x vérifient les propriétés suivantes :*

(i) Si $x = \infty$, on a

$$\varphi_\infty(M_\infty) \supset M_\infty$$
$$\varphi_\infty^d(M_\infty) = \pi_\infty^{-1} M_\infty$$
$$\dim_{\bar{\kappa}(o)}\left(\varphi_\infty(M_\infty)/M_\infty\right) = d$$

pour toute uniformisante π_∞ de $\mathcal{O}_\infty$;

(ii) Si $x = o$, on a

$$\pi_o M_o \subset \varphi_o(M_o) \subset M_o$$

pour toute uniformisante π_o de $\mathcal{O}_o$. De plus, le $\kappa(o) \otimes \bar{\kappa}(o)$-module $M_o/\varphi_o(M_o)$ est de longueur d et il est supporté par la composante connexe de $\operatorname{Spec}(\kappa(o) \otimes \bar{\kappa}(o))$ *qui correspond à l'inclusion $\kappa(o) \hookrightarrow \bar{\kappa}(o)$;*

(iii) Si $x \neq o, \infty$, on a

$$\varphi_x(M_x) = M_x\,;$$

(iv) *Toute base du $F \otimes \bar{\kappa}(o)$-espace vectoriel V appartient et engendre le $\mathcal{O}_x \hat{\otimes} \bar{\kappa}(o)$-sous-module M_x de V_x pour presque toutes places $x \neq o, \infty$ de F.*

1.5.4. Tous les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques spéciaux sur $\bar{\kappa}(o)$ sont isogènes. — On continue avec les mêmes notations que précédemment. Le lemme suivant est démontré dans [**L-R-S**] (Lemme 9.6) ; la preuve ne faisant pas intervenir le caractère déployé ou non de l'algèbre D en la place o, le résultat reste valable dans notre situation.

Lemme 1.5.9. — *Le φ-espace (V, φ) est isotypique,* i.e. *isomorphe à $(W, \psi)^n$ pour un certain φ-espace irréductible (W, ψ) et un certain entier positif n.*

Equivalence de Morita : soit $x \notin \mathcal{R}$ une place de bonne réduction ; le couple $(D_x, \mathcal{D}_x)$ s'identifie alors à $(M_d(F_x), M_d(\mathcal{O}_x))$. Soit $E_{1,1}$ l'idempotent associé au premier vecteur de base et $(V'_x, \varphi'_x) = (V_x, \varphi_x) E_{1,1}$ (c'est encore un F_x-module de Dieudonné sur $\bar{\kappa}(o)$). Par équivalence de Morita, on a des décompositions $(V_x, \varphi_x) \simeq (V'_x, \varphi'_x)^d$ et $M_x \simeq (M'_x)^d$, où l'action de D_x (resp. $\mathcal{D}_x$) sur (V_x, φ_x) (resp. M_x) devient l'action naturelle à droite de $M_d(F_x)$ (resp. $M_d(\mathcal{O}_x)$) sur $(V'_x, \varphi'_x)^d$ (resp. $(M'_x)^d$).

L'équivalence de Morita s'applique en particulier en la place ∞ ; on peut alors montrer le :

Lemme 1.5.10. — *(cf.* [**L-R-S**]*, lemme 9.8) Le F_∞-module de Dieudonné $(V'_\infty, \varphi'_\infty)$ est isomorphe à $(N_{d,-1}, \psi_{d,-1})$ et le réseau M'_∞ satisfait les propriétés :*

$$\left\{ \begin{array}{c} M'_\infty \subset \varphi'_\infty(M'_\infty) \\ (\varphi'_\infty)^d (M'_\infty) = \pi_\infty^{-1} M'_\infty \\ \dim_{\bar{\kappa}(o)} (\varphi'_\infty(M'_\infty)/M'_\infty) = 1 \end{array} \right.$$

pour toute uniformisante π_∞ de $\mathcal{O}_\infty$.

C'est en fait une conséquence directe d'un second lemme :

Lemme 1.5.11. — *(cf.* [**L-R-S**]*, lemme B.7) Soit (N, ψ) un F_x-module de Dieudonné sur $\bar{\kappa}(o)$; sont équivalents :*

(i) il existe un réseau $M \subset N$ tel que $\psi(M) \subset M$, $\psi^n(M) \subset \pi_x M$ pour toute uniformisante π_x de $\mathcal{O}_x$ et un certain entier positif n, et $\dim_{\bar{\kappa}(o)}(M/\psi(M)) = 1$;

(ii) (N, ψ) est isomorphe à $(N_{d,1}, \psi_{d,1})$ pour un certain entier $d \geq 0$.

Ainsi $(V_\infty, \varphi_\infty) \simeq (N_{d,-1}, \psi_{d,-1})^d$; la connaissance locale en la place ∞ du φ-espace (V, φ) permet de démontrer la :

Proposition 1.5.12. — *(cf.* [**L-R-S**]*, proposition 9.9) Soit $\left(\tilde{F}, \tilde{\Pi}\right)$ la φ-paire associée au φ-espace (V, φ) (c'est également la φ-paire associée à (W, ψ)) ; alors :*

(i) $\tilde{F}$ est un corps et $\left[\tilde{F} : F\right]$ divise d ;

(ii) $F_\infty \otimes_F \tilde{F}$ est un corps, et si $\tilde{\infty}$ est l'unique place de $\tilde{F}$ qui divise ∞, on a $\deg(\tilde{\infty})\, \tilde{\infty}\left(\tilde{\Pi}\right) = -\left[\tilde{F} : F\right]/d$.

Si $\tilde{x}$ est une place de $\tilde{F}$ qui divise $x \neq o, \infty$, alors le réseau M_x vérifie $\varphi_x(M_x) = M_x$; comme dans le cas de la place ∞, on a un lemme :

Lemme 1.5.13. — *(cf.* **[L-R-S]**, *lemme B.6) Soit (N, ψ) un F_x-module de Dieudonné sur $\bar{\kappa}(o)$; sont équivalents :*

(i) il existe un réseau $M \subset N$ tel que $\psi(M) = M$;

(ii) l'application canonique $N^{\psi}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\bar{\kappa}(o) \to N$ est bijective, où N^{ψ} désigne l'ensemble des éléments de N laissés invariants par ψ ;

(iii) (N, ψ) est isomorphe à $(N_{1,0}, \psi_{1,0})^d$ pour un certain entier $d \geq 0$.

On en conclut que le F_x-module de Dieudonné (V_x, φ_x) est isotypique, de type $(N_{1,0}, \psi_{1,0})$. Puis, en vertu de la proposition 1.5.6 :

$$0 = \deg(\tilde{x})\, \tilde{x}\left(\tilde{\Pi}\right) / \left[\tilde{F}_{\tilde{x}} : F_x\right].$$

Ainsi $\tilde{x}\left(\tilde{\Pi}\right) = 0$, autrement dit $\tilde{\Pi}$ est une unité partout, à l'exception seulement des places de $\tilde{F}$ au-dessus de o et ∞.

Plaçons-nous maintenant en $x = o$. Si (M_o, ψ_o) désigne le $\mathcal{D}_o$-module de Dieudonné associé au $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$ (cf. 1.2.5 ; c'est un $\mathcal{D}_o$-module de coordonnées spécial, puisque $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est spécial), le F_o-module de Dieudonné (V_o, φ_o) n'est rien d'autre que $(M_o, \psi_o) \otimes_{\mathcal{O}_o} F_o$. Or on a vu que tous les $\mathcal{D}_o$-modules formels spéciaux de hauteur d^2 sur $\bar{\kappa}(o)$ sont isogènes ; de plus, on en a donné un «modèle» Φ et on a décrit le $\mathcal{D}_o$-module de coordonnées spécial M_Φ correspondant (voir 1.3.1). On voit facilement que $M_\Phi \otimes_{\mathcal{O}_o} F_o$ n'est rien d'autre qu'une somme de d copies du F_o-module de Dieudonné noté $(N_{d,1}, \psi_{d,1})$ dans cette section. En résumé : $(V_o, \varphi_o) \simeq (N_{d,1}, \psi_{d,1})^d$. Nous pouvons maintenant démontrer :

Proposition 1.5.14. — *Tous les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques spéciaux (de caractéristique o) sur $\bar{\kappa}(o)$ sont isogènes. L'algèbre* $\mathrm{End}(V, \varphi, \lambda)$ *est isomorphe à l'algèbre $\overline{D}$ déduite de D en changeant les invariants en o et ∞ (c'est-à-dire que $\overline{D}$ est non ramifiée en o, $\overline{D}_\infty \simeq D_o$ et $\overline{D}_x \simeq D_x$ pour tout $x \neq o, \infty$).*

Démonstration. — La clé de la preuve réside dans l'exploitation des données locales précédentes, qui permettent de contrôler les valuations de $\tilde{\Pi}$. On montrera uniquement l'unicité à isogénie près (pas l'existence).

Soit $\delta \in F$ vérifiant $o(\delta) = m$, $\infty(\delta) = -m$, et δ est une unité ailleurs. Un tel élément existe bien pour m assez grand ; on choisira de plus m tel que $\tilde{\Pi}^{dm} \in \tilde{F}^*$. Montrons que $\tilde{\Pi}^{dm}$ et δ ont mêmes valuations en toutes les places de $\tilde{F}$.

Si $\tilde{o}$ est une place au-dessus de o, il résulte de l'étude préliminaire de (V_o, φ_o) et de la proposition 1.5.6 l'égalité :

$$\deg(\tilde{o})\, \tilde{o}\left(\tilde{\Pi}\right) / \left[\tilde{F}_{\tilde{o}} : F_o\right] = 1/d.$$

Soit $\tilde{e}$ l'indice de ramification (*i.e.* $o = \tilde{o}^{\tilde{e}}$) ; compte tenu de la relation $\tilde{e}\deg(\tilde{o}) = \left[\tilde{F}_{\tilde{o}} : F_o\right]$, l'égalité précédente se réécrit $\tilde{o}\left(\tilde{\Pi}\right) = \tilde{e}/d$. Finalement $\tilde{o}\left(\tilde{\Pi}^{dm}\right) = m\tilde{e}$; c'est également $\tilde{o}(\delta) = \tilde{e}o(\delta)$. En la place ∞, on a de manière similaire :

$$\deg(\tilde{\infty})\,\tilde{\infty}\left(\tilde{\Pi}\right) / \left[\tilde{F} : F\right] = -1/d\,;$$

on en conclut $\tilde{\infty}\left(\tilde{\Pi}^{dm}\right) = \tilde{\infty}(\delta)$ comme avant. Pour finir, $\tilde{\Pi}^{dm}$ et δ sont des unités en toutes les autres places qui ne divisent pas ∞ et o.

Ainsi $\tilde{\Pi}^{dm}/\delta$ appartient à $\mathbb{F}_q^*$ et est une racine de l'unité ; il existe donc N et N' tels que $\tilde{\Pi}^N = \delta^{N'}$. Or d'après le lemme 1.5.3, on a $\tilde{F} = F\left[\tilde{\Pi}^N\right]$. Finalement $\tilde{F} = F$ et la φ-paire $\left(\tilde{F}, \tilde{\Pi}\right) = \left(F, \tilde{\Pi}\right)$ est bien déterminée (à isomorphisme près) par les valuations de $\tilde{\Pi}$: $o\left(\tilde{\Pi}\right) = 1/d$, $\infty\left(\tilde{\Pi}\right) = -1/d$ et $x\left(\tilde{\Pi}\right) = 0$ si $x \neq o, \infty$. Par le théorème de classification 1.5.2, le φ-espace (V, φ) est également déterminé à isomorphisme près.

Remarquons que $(V, \varphi) = (W, \psi)^d$ (*i.e.* $n = d$ dans le lemme 1.5.9). En effet, $d\left(\tilde{\Pi}\right)$ est le ppcm des dénominateurs de $\deg(\tilde{o})\,\tilde{o}\left(\tilde{\Pi}\right)$ et $\deg(\tilde{\infty})\,\tilde{\infty}\left(\tilde{\Pi}\right)$, en l'occurrence d . Or dans l'isomorphisme $(W_\infty, \psi_\infty) \simeq (N_{d,-1}, \psi_{d,-1})^s$, on a $ds = d\left(\tilde{\Pi}\right)$, d'où $s = 1$; puisque $(V_\infty, \varphi_\infty) \simeq (N_{d,-1}, \psi_{d,-1})^d$, il faut $n = d$.

Il en résulte que l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}(V, \varphi)$ est isomorphe à $M_d(H)$, où H désigne l'algèbre centrale simple de dimension d^2 sur F qui se ramifie exactement en o et ∞ et dont les invariants sont les suivants : $\mathrm{inv}_o(H) = -1/d$ et $\mathrm{inv}_\infty(H) = 1/d$. En effet, on connaît la nature locale de (W, ψ) ; d'où l'assertion, sachant que $\mathrm{End}(N_{d,r}, \psi_{d,r})$ est une algèbre à division centrale sur F_x d'invariant $-r/d$.

Finalement, se donner une action de D revient à plonger D^{opp} dans $M_d(H)$. Soit $\overline{D}$ l'algèbre définie dans l'énoncé du théorème. Place par place, on vérifie que $D^{opp} \otimes \overline{D}$ est isomorphe à $M_d(H)$. Cela prouve à la fois l'existence d'un plongement $D^{opp} \hookrightarrow M_d(H)$ et le fait que l'algèbre $\mathrm{End}(V, \varphi, \lambda)$ (laquelle s'identifie au commutant de D^{opp} dans $M_d(H)$) est isomorphe à $\overline{D}$.

L'unicité à isogénie des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques spéciaux signifie que tous les plongements $D^{opp} \hookrightarrow M_d(H)$ sont conjugués, ce qui résulte du théorème de Skolem-Noether. $\square$

CHAPITRE 2

UNIFORMISATION «À LA ČEREDNIK - DRINFELD»

2.1. Le problème de modules des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques

2.1.1. L'espace de modules $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$: rappels. — Fixons un sous-schéma fini *non vide* I de $X - \{\infty\}$. Pour $z : S \to X'$ un schéma au-dessus de $X' = X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}$, notons $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques sur S, de zéro z, munis d'une structure de niveau I.

Le premier résultat essentiel démontré dans [**L-R-S**] est le :

Théorème 2.1.1. — *Le foncteur $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ est représentable par un schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ quasi-projectif sur X' :*

$$\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \xrightarrow{\textit{zéro}} X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}. \tag{11}$$

Ce schéma est lisse et purement de dimension relative $(d-1)$ au-dessus de X'. Lorsque D est une algèbre à division, c'est un X'-schéma projectif.

Donnons un aperçu de la preuve : tout d'abord, Laumon, Rapoport et Stuhler démontrent un résultat de semi-stabilité des fibrés $\mathcal{E}_i$ qui interviennent dans la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique : il existe une constante C telle que, pour tout $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$ sur un corps et tout sous-fibré vectoriel non nul $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_0$, on ait

$$\frac{\deg \mathcal{F} - C}{\operatorname{rg} \mathcal{F}} < \frac{\deg \mathcal{E}_0 - C}{\operatorname{rg} \mathcal{E}_0} \tag{12}$$

(où deg désigne le degré et rg le rang). Ils utilisent pour cela les propriétés de la filtration canonique de Harder-Narasimhan-Quillen (voir [**Ha-Na**]).

Lorsque I est de degré $\geq C$ (on peut faire cette hypothèse, quitte à passer ensuite au quotient par un groupe fini) et que $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est muni d'une structure de niveau I, l'inégalité (12) signifie que $\mathcal{E}_0$ est stable en tant que fibré muni d'une structure de niveau. Or il existe un $\mathbb{F}_q$-schéma quasi-projectif et lisse qui classifie de tels objets. On montre alors l'existence d'un $\mathbb{F}_q$-schéma $\mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}$ classifiant les suites

$$\cdots \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_{-1} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_0 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_1 \overset{j}{\hookrightarrow} \cdots$$

de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang un, munis d'une structure $\mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \simeq \mathcal{E}_I$ de niveau I, et vérifiant les conditions (i), (ii) et (iv) de la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique.

D'autre part, il existe un $\mathbb{F}_q$-schéma $\mathrm{Hecke}_{\mathrm{X},\mathcal{D},\mathrm{I}}$ classifiant les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur, hook, "t"] & \mathcal{E}'_{i-1} \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur, hook, "t"] & \mathcal{E}'_i \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur, hook, "t"] & \mathcal{E}'_{i+1} \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur, hook, "t"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dont les deux rangs sont des suites de $\mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}$ et tels que les morphismes t soient des injections $\mathcal{O}_{X\times S}$-linéaires (compatibles à l'action de $\mathcal{D}$ et aux structures de niveau) qui vérifient la condition (*iii*) de la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique. Les auteurs de **[L-R-S]** montrent que le schéma $\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I}$ est lisse et quasi-projectif sur $\mathbb{F}_q$, et que le morphisme

$$\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I} \xrightarrow{(z,r_1)} (X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}) \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I},$$

donné par le morphisme zéro et par le premier rang, est lisse de dimension relative $d-1$.

On conclut alors à la représentatibilité de $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ par un schéma quasi-projectif lisse de dimension relative $d-1$ en remarquant que c'est le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I} \arrow[d, "(\mathrm{Id},\mathrm{Frob})"] \\
\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I} \arrow[r, "(r_1,r_2)"] \arrow[d, "z"] & \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I} \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I} \\
X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}. &
\end{tikzcd}$$

La dernière assertion du théorème se démontre en vérifiant le critère valuatif de propreté, lequel résulte du lemme suivant («potentiellement bonne réduction») :

Lemme 2.1.2. — *Supposons que D soit une algèbre à division. Soit $\mathcal{O} \supseteq \mathbb{F}_q$ un anneau de valuation discrète de corps des fractions noté K, et soit $x = (\mathcal{E}, j, t)$ un point de $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}(K)$. Alors il existe une extension finie K' de K et un point $\tilde{x} = \left(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{j}, \tilde{t}\right)$ de $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ à valeurs dans la clôture intégrale $\mathcal{O}'$ de K dans K', telle que l'image de $\tilde{x}$ dans $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}(K')$ coïncide avec celle de x.*

Pour démontrer ce lemme, Laumon, Rapoport et Stuhler utilisent un théorème de réduction semi-stable (**[Dr7]** §3) développé par Drinfeld dans un travail sur la compactification des espaces de modules de Shtukas.

On a donc :

Proposition 2.1.3. — *Supposons que D soit une algèbre à division. Alors le morphisme (11) est propre.*

2.1.2. Prolongement de $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ au-dessus de o. — Rappelons que o désigne une place de F telle que D_o *est un corps gauche d'invariant* $1/d$ *sur* F_o et I un sous-schéma fermé fini *non vide* de $X - \{\infty\}$ *ne contenant pas* o. Afin d'alléger les notations, on notera toujours $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques *spéciaux* définis sur un schéma S et munis d'une structure de niveau I.

Théorème 2.1.4. — *Le foncteur $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ est représentable par un schéma projectif sur $(X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}) \cup \{o\}$ qui prolonge le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$.*

Démonstration. — Examinant les divers arguments avancés dans la preuve du théorème 2.1.1 dont on a rappelé les étapes, on constate que l'hypothèse sur le zéro z (qui évite le lieu de ramification $\mathcal{R}$ de l'algèbre D) intervient uniquement au niveau du schéma $\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I}$ au-dessus de $(X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}) \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}$; rappelons la situation : un objet de $X' \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}(S)$ correspond à un morphisme $z : S \to X'$ et à une suite $\ldots \hookrightarrow \mathcal{E}_i \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_{i+1} \hookrightarrow \ldots$ de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang un munis d'une structure de niveau I. Compléter cette donnée par une seconde rangée $(\mathcal{E}'_i)$ avec des morphismes $t_i : \mathcal{E}'_i \to \mathcal{E}_i$ satisfaisant toutes les conditions requises est équivalent à se donner un sous $\mathcal{O}_{X\times S}$-module $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_0$ localement libre de rang d^2, laissé stable par $\mathcal{D}$, et tel que $\mathcal{E}_0/\mathcal{E}'$ soit localement libre de rang d sur $\mathcal{O}_S$ et de support le graphe Γ_z de z (parce que $z(S) \not\ni \infty$, la donnée des morphismes t_i est équivalente à la donnée de t_0).

On raisonne alors comme Lafforgue pour les Chtoucas de Drinfeld (cf. [**L**] I §2 lemme 8) : considérons le foncteur qui à $S' \to S$ associe l'ensemble des suites exactes

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E}_0 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

où $\mathcal{E}'$ est localement libre de rang d^2 comme $\mathcal{O}_{X\times S'}$-module, et où $\mathcal{Q}$ est supporté par le graphe du composé $z' : S' \to S \to X$ et est localement libre de rang d sur $\mathcal{O}_{S'}$. En posant $\mathcal{Q}' = (\mathrm{Id}, z')^* \mathcal{Q}$, cela revient à considérer l'ensemble des $\mathcal{O}_{S'}$-modules quotients $\mathcal{Q}'$ de $(\mathrm{Id}, z')^* \mathcal{E}_0 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ qui sont localement libres de rang d. Ce foncteur est donc représentable par un morphisme $S_1 \to S$ qui est grassmannien, donc projectif. Notons $\mathcal{E}'_1$ et $\mathcal{Q}_1$ les faisceaux canoniques sur $X \times S_1$. Il s'agit alors de regarder, pour tout morphisme de schéma $S' \to S_1$, quand est-ce que l'action de $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{S'}$ se prolonge à $\mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} \mathcal{O}_{S'}$ et à $\mathcal{Q}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{S_1}} \mathcal{O}_{S'}$. Cela revient à demander que soit annulé l'homomorphisme $\mathcal{E}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \to \mathcal{Q}_1$ par le changement de base $S' \to S_1$. Cette condition est représentable par une immersion fermée $S_2 \hookrightarrow S_1$: cela résulte du lemme suivant.

***Lemme 2.1.5* (cf. [L] I §2 lemme 3)**. — *Soient $Z \to Y$ un morphisme projectif de schémas, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux faisceaux cohérents sur Z tels que $\mathcal{G}$ soit plat sur $\mathcal{O}_Y$ et $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un homomorphisme global.*

Alors il existe une immersion fermée $Y_0 \hookrightarrow Y$ telle que, pour tout morphisme de schémas $Y' \to Y$, l'homomorphisme α soit annulé par le changement de base $Y' \to Y$ si et seulement si $Y' \to Y$ se factorise à travers Y_0.

Cela montre que $\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I} \to (X' \cup \{o\}) \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}$ est représentable et quasi-projectif. Remarquons que la restriction de ce morphisme au-dessus de l'ouvert $X' \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}$ est lisse de dimension relative $d-1$: c'est l'argument de [**L-R-S**] : parce que $X' \cap \mathcal{R} = \emptyset$, alors $z^*\mathcal{D}$ est une algèbre d'Azumaya (c'est-à-dire isomorphe à $\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_S)$ localement pour la topologie étale) lorsque $z(S) \subset X'$. Or si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, se donner un $\mathcal{O}_{S'}$-module quotient $\mathcal{Q}'$ de $(\mathrm{Id}, z)^* \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ sur S' qui soit localement libre de rang d et compatible avec l'action à droite de $\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_{S'})$ revient, par équivalence de Morita, à se donner un $\mathcal{O}_{S'}$-module quotient d'un certain fibré de rang d qui soit inversible. On voit donc que S_2 est l'espace projectif sur S associé à ce fibré ; il est lisse et de dimension relative $d-1$.

Mis à part le point précédent, les autres arguments de **[L-R-S]** s'appliquent à la lettre. Comme la condition spéciale est ouverte (et fermée : voir les remarques suivant l'énoncé de la condition spéciale), on en conclut la représentabilité du foncteur $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ par un schéma quasi-projectif sur $(X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}) \cup \{o\}$. La projectivité résulte alors du lemme 2.1.2, qui reste en fait valable dans ce nouveau contexte (c'est-à-dire pour $\mathcal{O}$ une $\mathcal{O}_o$-algèbre de valuation discrète ; avec les notations de ce lemme, $\tilde{\mathcal{E}}$ est automatiquement spécial car il provient de la caractéristique o, cf. 1.3.2). □

Remarque. — *1. Si on oublie la condition «spéciale», le foncteur obtenu est encore représentable et projectif sur $(X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}) \cup \{o\}$. Cependant, sans cette condition, il n'y a pas d'uniformisation rigide-analytique en la place o.*

2. Le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ prolongé n'est plus lisse (sur X). Ceci n'est pas en contradiction avec l'absence d'obstruction à déformer un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique (cf. paragraphe 1.4.1) : en effet, la théorie des déformations étudiée est absolue et non relative au-dessus de X.

3. On peut montrer, par exemple en utilisant l'analogue du théorème de Čerednik que nous allons prouver, que $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_o$ est plat sur $\mathcal{O}_o$.

2.1.3. Les opérateurs de Hecke. — Rappelons que $\mathbb{A}$ désigne l'anneau des adèles de F, c'est-à-dire le produit restreint des F_x relativement aux $\mathcal{O}_x$ quand x décrit l'ensemble des places de F ; son sous-anneau des entiers est $O_{\mathbb{A}} = \prod_{x \in |X|} \mathcal{O}_x$. On définit aussi, pour $T \subset |X|$ un sous-ensemble fini, les idéaux $\mathbb{A}_T = \prod_{x \in T} F_x$ et $O_T = \prod_{x \in T} \mathcal{O}_x$, ainsi que les anneaux quotients $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}/\mathbb{A}_T$, $O^T = O_{\mathbb{A}}/O_T$ puis $\mathbb{A}^*_T = \operatorname{Ker}\left(\mathbb{A}^* \to \left(\mathbb{A}^T\right)^*\right)$, $O^*_T = \operatorname{Ker}\left(O^*_{\mathbb{A}} \to \left(O^T\right)^*\right)$. Notons pour finir $(F^*)^T = F^* \cap O^*_T$, le sous-groupe de F^* constitué des éléments qui sont des unités en toutes les places dans T.

Suivant **[L-R-S]**, nous définissons dans ce paragraphe l'action (à droite) de $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) = (D \otimes \mathbb{A}^{\infty,o})^*$ sur le système projectif

$$\mathcal{E}\ell\ell^{\infty,o}_{X,\mathcal{D}} := \varprojlim_{I \cap \{\infty,o\} = \emptyset} \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}.$$

2.1.3.1. action naturelle de $(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o})^*$. — Si $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur S, muni d'une structure $\iota : \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{I \times S}$ de niveau I, et g est un élément du groupe $(\mathcal{D}_I)^*$, alors $\iota \circ g$ définit une nouvelle structure de niveau I sur $(\mathcal{E}_i, j, t)$. Cette construction est de plus fonctorielle. Ainsi, pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \setminus \{\infty, o\}$, on a une action à droite du groupe $(\mathcal{D}_I)^*$ sur le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$.

Et pour $I \hookrightarrow J$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés de $X \setminus \{\infty, o\}$, l'action à droite de $(\mathcal{D}_I)^*$ et $(\mathcal{D}_J)^*$ sont compatibles via l'homomorphisme de groupes $(\mathcal{D}_J)^* \to$

$(\mathcal{D}_I)^*$ et le morphisme de schémas $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},J} \to \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$. On obtient donc une action à droite de

$$(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}^{\infty,o})^* = \varprojlim_{I\cap\{\infty,o\}=\emptyset} (\mathcal{D}_I)^*$$

sur $\mathcal{E}\ell\ell^{\infty,o}_{X,\mathcal{D}}$.

2.1.3.2. action de $(F^*)^{\infty,o} \setminus (\mathbb{A}^{\infty,o})^*$. — Si $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur S, muni d'une structure ι de niveau I, et $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, muni d'une structure de niveau I, c'est-à-dire d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_I$-modules

$$\iota_{\mathcal{L}} : \mathcal{O}_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_I,$$

alors $(\mathcal{E}'_i, j', t') := (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_i, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} j, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} t)$ définit un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur S muni d'une structure de niveau I donnée par $\iota_{\mathcal{L}} \otimes \iota$. Notons que pour tout point géométrique s de S, les caractéristiques d'Euler-Poincaré vérifient :

$$\chi\left(\mathcal{E}'_i|_{X\times s}\right) = \chi\left(\mathcal{E}_i|_{X\times s}\right) + d^2 \deg\left(\mathcal{L}\right).$$

Il faut donc opérer une translation des indices afin que $(\mathcal{E}'_i, j', t')$ vérifie la condition de normalisation dans la définition d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique.

Ces constructions sont fonctorielle ; ainsi, pour tout sous-schéma fermé fini $I \hookrightarrow X \setminus \{\infty, o\}$, on a une action sur le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ du groupe $\mathrm{Pic}_I(X)$ des faisceaux inversibles sur X munis d'une structure de niveau I. Et pour $I \hookrightarrow J$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés de $X \setminus \{\infty, o\}$, l'action de $\mathrm{Pic}_I(X)$ et celle de $\mathrm{Pic}_J(X)$ sont compatibles via l'homomorphisme de groupes $\mathrm{Pic}_J(X) \to \mathrm{Pic}_I(X)$ et le morphisme de schémas $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},J} \to \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$.

Par ailleurs, on remarque que l'on a un isomorphisme canonique (préservant les degrés)

$$\mathrm{Pic}^{\infty,o}(X) := \varprojlim_{I\cap\{\infty,o\}=\emptyset} \mathrm{Pic}_I(X) \simeq F^*\backslash\mathbb{A}^*/\mathcal{O}^*_{\infty,o} \simeq (F^*)^{\infty,o} \setminus (\mathbb{A}^{\infty,o})^*,$$

où à l'idèle de composante en $x \neq \infty, o$ égale à une uniformisante π_x et toutes les autres composantes égales à 1 correspond le faisceau inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-x)$, muni d'une structure de niveau $\iota^{\infty,o} : O^{\infty,o} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}$ donnée par des structures locales triviales en dehors de la place x et telle que $\iota^{\infty,o}_x$ est la multiplication par π_x. Via cet isomorphisme, on obtient donc une action de $(F^*)^{\infty,o} \setminus (\mathbb{A}^{\infty,o})^*$ sur $\mathcal{E}\ell\ell^{\infty,o}_{X,\mathcal{D}}$.

2.1.3.3. action de $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$. — Notons que $(\mathbb{A}^{\infty,o})^*$ s'identifie au centre et $(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o})^*$ à un sous-groupe de $(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{A}^{\infty,o})^* = (D \otimes_F \mathbb{A}^{\infty,o})^* = D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$. Nous allons définir sur le schéma $\mathcal{E}\ell\ell^{\infty,o}_{X,\mathcal{D}}$ une action à droite de $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ qui prolonge les actions précédemment définies. Pour cela, introduisons le semi-groupe

$$\Gamma = D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \cap (\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}).$$

Il est immédiat que $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ est engendré par Γ et $(\mathbb{A}^{\infty,o})^*$. Donc il suffit de définir une action de Γ sur le schéma $\mathcal{E}\ell\ell^{\infty,o}_{X,\mathcal{D}}$ qui prolonge celle de $(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o})^*$ et qui coïncide avec celle de $(\mathbb{A}^{\infty,o})^*$ sur l'intersection $\Gamma \cap (\mathbb{A}^{\infty,o})^* = (\mathbb{A}^{\infty,o})^* \cap O^{\infty,o}$.

Soit donc $g \in \Gamma$ et $(\mathcal{E}_i, j, t)$ un objet de $\mathcal{E}\ell\ell^{\infty,o}_{X,\mathcal{D}}(S)$, c'est à dire un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur S muni d'une structure de niveau

$$\iota^{\infty,o} : (\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}) \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}.$$

L'élément g de $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}$ induit (par multiplication à gauche) un endomorphisme de $(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}) \boxtimes \mathcal{O}_S$. Via $\iota^{\infty,o}$, il induit aussi un endomorphisme de $\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}$, noté $[g]$.

On cherche à définir le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}'_i, j', t') = (\mathcal{E}_i, j, t) \cdot g$. Tout d'abord, prenons pour $\mathcal{E}'_i$ le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_S$-module obtenu comme produit fibré dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'_i \arrow[r, dotted, "\alpha_i"] \arrow[d, dotted, "\beta_i"] & \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} \arrow[d, "{[g]}"] \\
\mathcal{E}_i \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}.
\end{tikzcd}$$

On remarque que $[g]$ est injectif et de conoyau plat sur $\mathcal{O}_S$. De plus, la composée

$$\gamma_i : \mathcal{E}_i \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} \xrightarrow{\mathrm{proj}} \mathrm{Coker}[g]$$

est un homomorphisme surjectif : cela résulte du fait que $\gamma_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}$ est surjectif, puisque $\mathrm{Coker}[g] \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} = \mathrm{Coker}[g]$. Ainsi, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{E}'_i \xrightarrow{\beta_i} \mathcal{E}_i \xrightarrow{\gamma_i} \mathrm{Coker}[g] \to 0.$$

On en déduit que la formation de $\mathcal{E}'_i$ est compatible aux changements de base, et que $\mathcal{E}'_i$ est plat sur $\mathcal{O}_S$ et même localement libre de rang d^2. Par tensorisation, on a également une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E}'_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} \to \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} \to \mathrm{Coker}[g] \to 0,$$

ce qui montre que α_i induit un isomorphisme $\mathcal{E}'_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} \underset{\alpha_i \otimes 1}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}$.

Puis, on définit les homomorphismes j', t' comme étant ceux induits par j, t dans les sous-modules $\mathcal{E}'_i$, ${}^{\tau}\mathcal{E}'_i$ de $\mathcal{E}_i$, ${}^{\tau}\mathcal{E}_i$. Pour finir, on met sur $(\mathcal{E}'_i, j', t')$ la structure de niveau définie comme la composée

$$\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow[\iota^{\infty,o}]{\sim} \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o} \xrightarrow[(\alpha_i \otimes 1)^{-1}]{\sim} \mathcal{E}'_i \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o}.$$

Comme on a vu, cette construction est fonctorielle. De plus, si $g \in \Gamma$ est en fait un élément de $(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o})^*$, alors $[g]$ est un isomorphisme. Par conséquent, β_i est également un isomorphisme et l'on voit que l'action de $g \in (\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} O^{\infty,o})^*$ coïncide avec celle définie en 2.1.3.1. De même, si g est un élément de $(\mathbb{A}^{\infty,o})^* \cap O^{\infty,o}$, alors $\mathcal{E}'_i = \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(g^{-1})$ et l'on reconnaît l'action définie en 2.1.3.2.

2.2. Le théorème de Drinfeld

Cette section se compose essentiellement de rappels : après une brève description du demi-plan supérieur généralisé Ω^d de Drinfeld et de son modèle formel $\widehat{\Omega}^d$, nous énonçons le théorème de Drinfeld et précisons les actions naturelles des groupes $\mathrm{GL}_d(K)$

et D^*. Pour finir, nous expliquons la construction d'un système projectif de revêtements étales Σ_n^d de l'espace analytique rigide $\Omega^d \otimes_K \widehat{K}^{nr}$ dont le groupe de Galois est le complété profini $\widehat{\mathcal{O}}_D^*$ de $\mathcal{O}_D^*$.

Soient K un corps local non archimédien, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K et π une uniformisante de $\mathcal{O}$. Soient $\kappa = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ le corps résiduel, p la caractéristique de κ et q son ordre. On note C le complété d'une clôture algébrique de K et $|\ |$ la norme sur C normalisée par $|\pi| = q^{-1}$; la valuation (normalisée) est donnée par $v(x) = \log_q |x|$. On choisit également une clôture algébrique $\bar{\kappa}$ de κ et note $\mathcal{O}^{nr}$ l'hensélisé strict (= extension non ramifiée maximale) de $\mathcal{O}$ de corps résiduel $\bar{\kappa}$.

2.2.1. Le schéma formel $\widehat{\Omega}^d$. — Pour tout entier $d \geq 1$, Drinfeld a construit dans [**Dr1**] une variété rigide-analytique Ω^d sur K dont l'ensemble des points à valeur dans une extension finie $L \subset C$ de K est

$$\mathbb{P}^{d-1}(L) - \bigcup_{H/K} H(L)$$

(où H parcourt l'ensemble des hyperplans rationnels sur K de $\mathbb{P}^{d-1}$), et qui est un analogue non-archimédien des espaces hermitiens symétriques, pour le cas du groupe linéaire GL_d. Dans le cas particulier où $d = 2$, cette variété avait déjà été considérée par Mumford (voir [**M**]), qui l'obtenait comme fibre générique au sens de Raynaud ([**Ra1**]) d'un certain $\mathcal{O}$-schéma formel construit par éclatements successifs à partir de $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ (de sorte que la fibre spéciale de ce schéma formel est un arbre de droites projectives).

Deligne a alors construit un schéma formel $\widehat{\Omega}^d$, localement de type fini sur $\mathcal{O}$, dont la fibre générique au sens de Raynaud est Ω^d. En bref, on retiendra que $\widehat{\Omega}^d$ est un $\mathcal{O}$-schéma formel tel que pour toute extension finie L de K on a :

$$\widehat{\Omega}^d(\mathcal{O}_L) = \mathbb{P}^{d-1}(L) - \bigcup_{H/K} H(L);$$

de plus, il est muni d'une action de $\mathrm{PGL}_d(K)$ et le complexe simplicial dual de sa fibre spéciale est l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$.

Le lecteur trouvera dans [**Bo-Ca**] ou [**Ge**] plusieurs descriptions fonctorielles de $\widehat{\Omega}^d$. Voir également [**Bo-Ca**] ou [**De-Hu**] §3 pour une description de la structure rigide-analytique sur Ω^d.

A partir de maintenant, fixons un entier $d \geq 2$, donnons-nous un corps gauche D d'invariant $1/d$ sur K et notons $\mathcal{O}_D$ son anneau des entiers. Drinfeld définit dans [**Dr4**] un problème de modules G pour les $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux (cf. paragraphe 1.3.1), munis d'une rigidification convenable. Le théorème de Drinfeld affirme alors la représentabilité du foncteur G par le $\mathcal{O}$-schéma formel $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$.

Dans un premier temps, expliquons la donnée de rigidification.

2.2.2. Rigidification. — Choisissons un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial Φ sur $\bar{\kappa}$, que l'on fixe. Soient B une $\mathcal{O}^{nr}$-algèbre noethérienne où l'image de π est nilpotente et X un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de hauteur d^2 sur B ; pour finir, notons $\overline{B} = B/\pi B$. On appelle *rigidification* de X la donnée d'une quasi-isogénie de hauteur zéro $\rho : \Phi_{\overline{B}} \to X_{\overline{B}}$, où $\Phi_{\overline{B}}$ est déduit de Φ par changement de base (on rigidifie la fibre spéciale uniquement).

Sur $\bar{\kappa}$, la multiplication par π est une isogénie de hauteur d^2 de Φ dans lui-même ; par changement de base, il en est de même sur $\overline{B}$ de la multiplication par π de $\Phi_{\overline{B}}$ dans lui-même. En particulier, $\Phi_{\overline{B}}$ est π-divisible et le $\mathcal{O}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\Phi_{\overline{B}}, X_{\overline{B}})$ est sans torsion (**[Zi2]**, 5.31).

Par définition, une *quasi-isogénie* $\rho : \Phi_{\overline{B}} \to X_{\overline{B}}$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\Phi_{\overline{B}}, X_{\overline{B}}) \otimes_{\mathcal{O}} K$ tel que $\pi^n\rho$ soit une isogénie pour n entier suffisamment grand. Noter, d'après ce qui précède, que $\pi^n\rho$ détermine ρ sans ambiguïté ; la hauteur de ρ est alors définie comme la différence $ht(\pi^n\rho) - d^2n$, pour un tel entier n. En particulier, ρ est de hauteur zéro si $\pi^n\rho$ est de hauteur d^2n.

On montre qu'un homomorphisme $\alpha : \Phi_{\overline{B}} \to X_{\overline{B}}$ est une isogénie si et seulement si il existe un entier m et un homomorphisme $\beta : X \to \Phi_{\overline{B}}$ tel que $\beta \circ \alpha = \pi^m$ (**[Zi2]**, Satz 5.25). Par suite, un élément ρ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\Phi_{\overline{B}}, X_{\overline{B}}) \otimes_{\mathcal{O}} K$ est une quasi-isogénie si et seulement si il admet un inverse dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\Phi_{\overline{B}}, X_{\overline{B}}) \otimes_{\mathcal{O}} K$.

2.2.3. Enoncé du Théorème. — D'après la proposition 1.3.4, tous les $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux de hauteur d^2 sur $\bar{\kappa}$ sont isogènes ; soit Φ l'un d'autre eux, que l'on fixe, ainsi qu'un isomorphisme

$$\mathrm{GL}_d(K) = (\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(\Phi) \otimes_{\mathcal{O}} K)^* .$$

Rappelons que $\mathcal{O}^{nr}$ désigne l'hensélisé strict de $\mathcal{O}$, de corps résiduel $\bar{\kappa}$.

Définition 2.2.1. — Soit $\overline{\mathcal{N}ilp}$ la catégorie des $\mathcal{O}^{nr}$-algèbres noethériennes où l'image de π est nilpotente. On définit un foncteur $\overline{G}$ sur $\overline{\mathcal{N}ilp}$ en associant à $B \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{N}ilp}$ l'ensemble $\overline{G}(B)$ des classes d'isomorphie de couples (X, ρ) consistant en :

1. un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial X de hauteur d^2 sur B.
2. une quasi-isogénie de hauteur zéro $\rho : \Phi_{B/\pi B} \to X_{B/\pi B}$.

Le résultat fondamental de Drinfeld est le :

Théorème 2.2.2. — *Le foncteur $\overline{G}$ est représentable par le $\widehat{\mathcal{O}}^{nr}$-schéma formel $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$*

Définition 2.2.3. — Soit $\mathcal{N}ilp$ la catégorie des $\mathcal{O}$-algèbres où l'image de π est nilpotente. On définit un foncteur G sur $\mathcal{N}ilp$ en associant à $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}ilp$ l'ensemble $G(B)$ des couples formés :

1. d'un κ-homomorphisme $\psi : \bar{\kappa} \to B/\pi B$.
2. d'une classe d'isomorphie de couples (X, ρ) consistant en :
   - un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial X de hauteur d^2 sur B.
   - une quasi-isogénie de hauteur zéro $\rho : \psi_*\Phi \to X_{B/\pi B}$.

Si $B \to B'$ est un morphisme de $\mathcal{N}ilp$, on définit de manière évidente une application $G(B) \to G(B')$ en associant à ψ son composé avec $B/\pi B \to B'/\pi B'$ et au couple (X, ρ) le couple $\left(X_{B'}, \rho_{B'/\pi B'}\right)$ qui s'en déduit par extension des scalaires de B à B'.

Le foncteur G n'est autre que le foncteur déduit de $\overline{G}$ par restriction des scalaires de $\mathcal{O}^{nr}$ à $\mathcal{O}$. En effet, il revient au même de se donner un κ-homomorphisme $\psi : \bar{\kappa} \to B/\pi B$ ou un $\mathcal{O}$-homomorphisme $\tilde{\psi} : \mathcal{O}^{nr} \to B$ faisant de B une $\mathcal{O}^{nr}$-algèbre $B_{\tilde{\psi}} \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{N}ilp}$, et un élément de $G(B)$ correspond à un couple formé de $\tilde{\psi}$ et d'un élément de $\overline{G}\left(B_{\tilde{\psi}}\right)$.

Du théorème 2.2.2, on déduit par restriction des scalaires la variante :

Théorème 2.2.4. — *(cf.* **[Dr4]** *§2) Le foncteur G est représentable par le $\mathcal{O}$-schéma formel $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$.*

2.2.4. Action des groupes $\mathrm{GL}_d(K)$ et D^*. —

2.2.4.1. Action de $\mathrm{GL}_d(K)$. — On rappelle que $Fr : \bar{\kappa} \to \bar{\kappa}$ désigne l'homomorphisme de Frobenius $Fr(x) = x^q$ et $\mathrm{Frob} : Fr_*^{-1}\Phi \to \Phi$ le morphisme (ou isogénie) de Frobenius. C'est un $\bar{\kappa}$-homomorphisme de $\mathcal{O}_D$-modules formels du $\mathcal{O}_D$-module formel $Fr_*^{-1}\Phi$ déduit de Φ par extension des scalaires via Fr^{-1}. Plus précisément, c'est une isogénie de hauteur d (égale à la dimension de Φ).

Via l'identification $\mathrm{GL}_d(K) = \left(\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(\Phi) \otimes_{\mathcal{O}} K\right)^*$, un élément g de $\mathrm{GL}_d(K)$ définit une quasi-isogénie de Φ de hauteur dn si $v(\det g) = n$. Ainsi $g^{-1} \circ \mathrm{Frob}^n : Fr_*^{-1}\Phi \to \Phi$ est une quasi-isogénie de hauteur nulle. On définit une action de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur le foncteur G en posant, pour $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}ilp$ et (ψ, X, ρ) représentant un élément de $G(B)$:

$$g \cdot (\psi, X, \rho) = \left(\psi \circ Fr^{-n}, X, \rho \circ \psi_*\left(g^{-1} \circ \mathrm{Frob}^n\right)\right).$$

Notons $\widetilde{Fr} : \mathcal{O}^{nr} \to \mathcal{O}^{nr}$ le relèvement du κ-homomorphisme $Fr : \bar{\kappa} \to \bar{\kappa}$ en un $\mathcal{O}$-homomorphisme.

Proposition 2.2.5. — *(cf.* **[Dr4]** *§2 ou* **[Bo-Ca]***, théorème 9.3) L'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur le foncteur G correspond à l'action sur le schéma formel $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ définie par l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_d(K)$ sur $\widehat{\Omega}^d$ et l'action $g \mapsto \widetilde{Fr}^{-v(\det g)}$ sur $\mathcal{O}^{nr}$.*

2.2.4.2. Action de D^*. — Soit $N_{D/K} : D^* \to K^*$ la norme réduite : tout élément de D^* s'écrit $g = \Pi^n \cdot g_0$ avec $g_0 \in \mathcal{O}_D^*$ et $n = v\left(N_{D/K}\, g\right)$.

Pour tout $g \in D^*$, notons ${}^gX$ le $\mathcal{O}_D$-module formel qui coïncide avec X en tant que $\mathcal{O}$-module, mais où l'action de $a \in \mathcal{O}_D$ sur ${}^gX$ est identique à l'action de $g^{-1}ag$ sur X.

L'action de $\mathcal{O}_D$ sur Φ associe à g^{-1} une quasi-isogénie $\mathcal{O}_D$-équivariante de hauteur $-dn$ si $v\left(N_{D/K}\, g\right) = n$. Ainsi $g^{-1} \circ \mathrm{Frob}^n : Fr_*^{-n}\Phi \to {}^g\Phi$ est une quasi-isogénie $\mathcal{O}_D$-équivariante de hauteur nulle. On définit une action de D^* sur le foncteur G en posant, pour $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}ilp$ et (ψ, X, ρ) représentant un élément de $G(B)$:

$$g \cdot (\psi, X, \rho) = \left(\psi \circ Fr^{-n},\ {}^gX, \rho \circ \psi_*\left(g^{-1} \circ \mathrm{Frob}^n\right)\right).$$

Proposition 2.2.6. — *(cf.* **[Dr4]** *§2 ou* **[Bo-Ca]***, théorème 9.5) L'action de D^* sur le foncteur G correspond à l'action sur le schéma formel $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ définie par l'action $g \mapsto \widetilde{Fr}^{-v\left(N_{D/K}\, g\right)}$ sur $\mathcal{O}^{nr}$.*

2.2.5. Construction d'un système de revêtements de $\Omega^d \otimes_K \widehat{K}^{nr}$. — Puisqu'il représente le foncteur G, le schéma formel $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ est muni d'un $\mathcal{O}_D$-module formel «universel», noté X. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $X(\pi^n)$ l'endomorphisme de X au-dessus de $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ qui traduit l'action de $\pi^n \in \mathcal{O}_D$. En chaque point géométrique s de $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ (c'est-à-dire de sa fibre spéciale), la restriction de $X(\pi^n)$ à la fibre X_s est une isogénie dont la hauteur est constante et égale à $d^2 n$. Utilisant alors des résultat de Th. Zink ([**Zi1**]), on en déduit que $X(\pi^n)$ est une isogénie. Par suite, son noyau, que nous notons X_n^d, est représentable par un schéma formel en groupes, fini, et localement libre sur $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$, de rang $q^{d^2 n}$. Il est clair d'autre part que X_n^d est muni d'une action de $(\mathcal{O}_D / \pi^n \mathcal{O}_D)$.

Fait. — *Le module des différentielles relatives* $\Omega^1_{X_n^d / \widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}}$ *est annulé par* π^n.

Démonstration. — Il suffit de le vérifier sur la section nulle, et cela résulte de la définition d'un $\mathcal{O}_D$-module formel. En effet, π^n doit opérer sur $\mathrm{Lie}(X)$ via le morphisme structural, et il en résulte que, localement sur $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$, l'algèbre affine de X_n^d est engendrée par d «coordonnées» $x_1, \ldots, x_d$ vérifiant des équations $F_i(x_1, \ldots, x_d) = 0$ ($i = 1$ ou $2 \ldots$ ou d), avec

$$F_i = \pi^n x_i + (\text{termes de degré } \geq 2).$$

On a donc bien, sur la section nulle, $\pi^n dx_i = 0$. □

Notons alors $\mathcal{X}_n^d$ l'espace rigide associé à X_n^d, c'est-à-dire sa fibre générique au sens de Raynaud ([**Ra1**]). Il résulte de ce que l'on vient de voir et du fait que le morphisme naturel $X_d^n \to \widehat{\Omega}^d$ est fini que $\mathcal{X}_n^d$ est un revêtement fini étale de $\Omega^d \hat{\otimes}_K \widehat{K}^{nr}$ (l'espace rigide sur $\widehat{K}^{nr}$ déduit de Ω^d par extension des scalaires), fibré en $(\mathcal{O}_D/\pi^n \mathcal{O}_D)$-modules. On a des inclusions $\mathcal{X}_{n-1}^d \hookrightarrow \mathcal{X}_n^d$, où $\mathcal{X}_{n-1}^d$ apparaît comme le sous-espace des points de $\mathcal{X}_n^d$ tués par π^n. Nous noterons $\mathcal{X}_{n-i/d}^d$ $(1 \leq i \leq d-1)$ l'espace intermédiaire constitué des points de $\mathcal{X}_n^d$ tués par Π^{dn-i} ; ces espaces viennent raffiner la filtration que constituent les $\mathcal{X}_n^d$.

On sait d'autre part que le cardinal des fibres de $\mathcal{X}_n^d$ est égal à $q^{d^2 n}$, c'est-à-dire au cardinal de $(\mathcal{O}_D/\pi^n \mathcal{O}_D)$. Il est immédiat d'en déduire que ces fibres sont des $(\mathcal{O}_D/\pi^n \mathcal{O}_D)$-modules libres de rang 1 : tout élément de $\mathcal{X}_n^d - \mathcal{X}_{n-1/d}^d$ en constitue une base.

Considérons alors le supplémentaire $\Sigma_n^d = \mathcal{X}_n^d - \mathcal{X}_{n-1/d}^d$, constitué des points de $\mathcal{X}_n^d$ «exactement tués par π^n». Il résulte de tout ce qui précède que Σ_n^d constitue un *revêtement étale Galoisien de* $\Omega^d \otimes_K \widehat{K}^{nr}$*, de groupe de Galois* $(\mathcal{O}_D/\pi^n \mathcal{O}_D)^*$. Pour n variable, les Σ_n^d forment un système projectif via l'isogénie π qui induit des morphismes : $X_{n+1}^d \to X_n^d$, $\mathcal{X}_{n+1}^d \to \mathcal{X}_n^d$, $\Sigma_{n+1}^d \to \Sigma_n^d$; le groupe de Galois de ce système est le complété profini $\widehat{\mathcal{O}}_D^*$ de $\mathcal{O}_D^*$.

Il est important enfin de noter que les revêtements qu'on vient de construire sont *équivariants* relativement à l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ considérée en 2.2.4.1 : il est clair en effet que cette dernière se relève en une action sur le $\mathcal{O}_D$-module universel X, d'où une action sur X_n^d, $\mathcal{X}_n^d$, Σ_n^d.

Remarque. — *1. Utilisant par exemple des résultats de Elkik (*[**El**]*), on peut montrer que la catégorie des revêtements étales finis de $\Omega^d \hat{\otimes}_K \widehat{K}^{nr}$ est équivalente à celle des revêtements étales finis de $\Omega^d \otimes_K K^{nr}$. la construction ci-dessus définit donc un système de revêtements étales, encore notés Σ_n^d, de $\Omega^d \otimes_K K^{nr}$.*

2. On remarquera que cette construction de Σ_n^d est de nature purement rigide-analytique : bien que l'on sache «abstraitement» que Σ_n^d doit provenir d'un certain schéma formel $\widehat{\Sigma}_n^d$, ce dernier n'est pas construit (il faudrait pour cela définir ce qu'est une «base de Drinfeld» dans la présente situation).

2.3. Analogue du théorème de Čerednik-Drinfeld

2.3.1. Notations. — Considérons l'algèbre à division $\overline{D}$ définie dans la proposition 1.5.14 ($\overline{D}$ se déduit de D en échangeant les invariants en les places o et ∞). On note $\overline{D}(\mathbb{A}) = \overline{D} \otimes \mathbb{A}$ et $\overline{D}\left(\mathbb{A}^T\right) = \overline{D} \otimes \mathbb{A}^T$ pour $T \subset |X|$ fini ; ainsi $\overline{D}(\mathbb{A})$ (resp. $\overline{D}\left(\mathbb{A}^T\right)$) est le produit restreint des D_x relativement aux $\mathcal{D}_x$ quand x décrit $|X|$ (resp. $|X| \setminus T$). Désignons par $\overline{D}^*$ le groupe multiplicatif de l'algèbre $\overline{D}$; c'est un groupe réductif sur F tel que pour toute F-algèbre R :

$$\overline{D}^*(R) = \left(\overline{D} \otimes R\right)^* \quad (\text{et donc } \overline{D}^*(F) = \overline{D}^*).$$

En particulier, $\overline{D}^*(F_o) \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)$ car $\overline{D}$ est déployé en la place o. On considérera également dans ce qui suit $\overline{D}^*(\mathbb{A}) = \left(\overline{D} \otimes \mathbb{A}\right)^*$ et $\overline{D}^*\left(\mathbb{A}^T\right) = \left(\overline{D} \otimes \mathbb{A}^T\right)^*$.

Pour $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique de caractéristique o (défini sur $S = \operatorname{Spec} \bar{\kappa}(o)$), on note toujours $(V(\mathcal{E}), \varphi, \lambda)$ sa fibre générique ; c'est un φ-espace muni via λ d'une action de D à droite (cf. 1.5.3). Localement en chaque place x de F, on a les F_x-modules de Dieudonné sur $\bar{\kappa}(o)$ correspondant, avec action de D_x, notés $(V_x(\mathcal{E}), \varphi_x, \lambda_x) = (V(\mathcal{E}), \varphi, \lambda) \hat{\otimes}_F F_x$. On dispose également des $\mathcal{D}_x$-réseaux $M_x = H^0\left(\operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_x \hat{\otimes} \bar{\kappa}(o)\right), \mathcal{E}_0\right)$ stables sous D_x. Ces derniers vérifient les propriétés du lemme 1.5.8 ; en vertu du lemme 1.5.13, l'application canonique $V_x^{\varphi_x}(\mathcal{E}) \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o) \to V_x(\mathcal{E})$ est bijective pour tout $x \neq \infty, o$ (notant $V_x^{\varphi_x}(\mathcal{E})$ l'ensemble des éléments de $V_x(\mathcal{E})$ laissés invariants par φ_x).

Considérons le produit restreint $(V^{\infty,o}(\mathcal{E}), \varphi^{\infty,o})$ des $(V_x(\mathcal{E}), \varphi_x)$ relativement aux M_x et en dehors des places ∞, o ; il est muni d'une action à droite de $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$ donnée par le produit restreint $\lambda^{\infty,o}$ des λ_x. Il résulte des rappels précédents que l'application canonique

$$\left((V^{\infty,o}(\mathcal{E}))^{\varphi^{\infty,o}} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o), \mathrm{Id}_{V^{\infty,o}} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} Fr\right) \longrightarrow (V^{\infty,o}(\mathcal{E}), \varphi^{\infty,o})$$

est un isomorphisme, où Fr désigne le Frobenius $Fr(x) = x^q$ de $\bar{\kappa}(o)$. Soit d'autre part $V_x = D_x$ vu comme D_x-module à droite et $V^{\infty,o}$ le produit restreint des V_x relativement aux ordres $\mathcal{D}_x \subset D_x$ pour $x \neq \infty, o$ (c'est également $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$ vu comme $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$-module à droite). Clairement, $(V^{\infty,o}(\mathcal{E}))^{\varphi^{\infty,o}}$ est un $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$-module libre de rang un, donc isomorphe à $V^{\infty,o}$. Fixons un tel isomorphisme ; il en résulte un isomorphisme

$$\operatorname{End}(V^{\infty,o}(\mathcal{E}), \varphi^{\infty,o}, \lambda^{\infty,o}) \simeq \operatorname{End}_{D(\mathbb{A}^{\infty,o})}(V^{\infty,o}) = D(\mathbb{A}^{\infty,o}).$$

En vertu de la proposition 1.5.14, les endomorphismes de la fibre générique $(V(\mathcal{E}), \varphi, \lambda)$ s'identifient à $\overline{D}$; le choix d'un tel isomorphisme détermine également un isomorphisme $\overline{D}(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq \mathrm{End}(V^{\infty,o}(\mathcal{E}), \varphi^{\infty,o}, \lambda^{\infty,o})$. Finalement, ces divers choix conduisent à un isomorphisme $\overline{D}(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq D(\mathbb{A}^{\infty,o})$. Nous fixons par la suite un isomorphisme de groupes $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$, obtenu à partir de l'isomorphisme précédent entre les algèbres $\overline{D}(\mathbb{A}^{\infty,o})$ et $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$. Soit également un isomorphisme $\overline{D}^*(F_o) \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)$, que l'on fixe.

Enfin, notons $O^{\infty,o} = \prod_{x\neq\infty,o} \mathcal{O}_x \subset \mathbb{A}^{\infty,o}$ et $\mathcal{D}^{\infty,o} = \prod_{x\neq\infty,o} \mathcal{D}_x \subset D(\mathbb{A}^{\infty,o})$; pour $I \subset X$ un sous-schéma fini fermé non vide tel que $I \cap \{\infty, o\} = \emptyset$ et $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux correspondant, on définit

$$K_I^{\infty,o} = \mathrm{Ker}\left[(\mathcal{D}^{\infty,o})^* \longrightarrow (\mathfrak{I}^{\infty,o}\mathcal{D}^{\infty,o}\backslash\mathcal{D}^{\infty,o})^*\right].$$

Le groupe $K_I^{\infty,o}$ est un sous-groupe ouvert compact de $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$. En particulier, via l'identification $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) = D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$, on peut considérer $K_I^{\infty,o}$ comme un sous-groupe (ouvert compact) de $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$. Pour finir, on introduit l'ensemble suivant de doubles classes, noté Z_I :

$$Z_I = K_I^{\infty,o}\backslash\overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)/\overline{D}^*(F)$$

(où $\overline{D}^*(F)$ agit à droite sur $\overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)$ et $K_I^{\infty,o}$ à gauche). Cet ensemble est muni d'une action à gauche évidente du groupe $\overline{D}^*(F_o) = \mathrm{GL}_d(F_o)$, et le quotient par cette action est fini.

Pour $I \hookrightarrow J$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés de $X \setminus \{\infty, o\}$, l'inclusion $K_J^{\infty,o} \subset K_I^{\infty,o}$ induit un morphisme $Z_J \twoheadrightarrow Z_I$. Les ensembles Z_I constituent donc pour I de plus en plus grand un système projectif où opère le groupe $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$.

2.3.2. Enoncé du théorème. — A partir de maintenant, seul nous importe le problème de modules au-dessus de $\mathcal{O}_o$; autrement dit, on regarde $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ comme un schéma sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_o$.

Théorème 2.3.1. — *Avec les conventions et notations précédentes, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_o$-schémas formels :*

$$\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I} \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)\setminus\left[\left(\widehat{\Omega}^d\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o}\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}\right)\times Z_I\right]$$

où $\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I}$ désigne le complété formel de $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ le long de sa fibre spéciale. Ces isomorphismes sont compatibles, lorsque I varie, avec les morphismes de projection. L'isomorphisme des deux systèmes projectifs ainsi obtenu est compatible à l'action sur les deux membres du groupe $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$. Enfin, ces isomorphismes se relèvent en des isomorphismes entre les $\mathcal{D}_o$-modules formels spéciaux naturellement portés par les deux membres.

Remarque. — *L'isomorphisme du théorème peut s'exprimer comme une uniformisation rigide-analytique :*

$$(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an} \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)\setminus\left[\left(\Omega^d\hat{\otimes}_{F_o}\widehat{F}_o^{nr}\right)\times Z_I\right]$$

où $(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an}$ désigne l'espace rigide-analytique sur F_o sous-jacent à $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ (c.-à-d. la fibre générique de $\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I}$, au sens de Raynaud [**Ra1**]*). En fait, il n'est pas nécessaire de compléter ; la formule ci-dessus reste vraie en remplaçant $\hat{\otimes}_{F_o}\widehat{F}_o^{nr}$ par $\otimes_{F_o}F_o^{nr}$ (la complétion est tuée dans le quotient).*

2.3.3. Commentaires. — Commençons par quelques éclaircissements sur l'énoncé qui précède :

1. Rappelons que l'action de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ sur $\widehat{\Omega}^d\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o}\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ que nous considérons est obtenue à partir de l'action naturelle sur $\widehat{\Omega}^d$ et de l'action $g \mapsto \widetilde{Fr}^{-v(\det g)}$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ (cf. 2.2.4.1). Cette action est définie seulement au-dessus de $\mathcal{O}_o$ et non pas de $\mathcal{O}_o^{nr}$.
2. L'action naturelle du groupe $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ sur le système projectif des $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ (voir paragraphe 2.1.3) est une action à droite, tandis que celle du groupe $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ sur le système des Z_I est une action à gauche. Pour pouvoir les comparer, il faut donc changer le sens d'une de ces actions : on le fait en composant avec l'inversion $g \mapsto g^{-1}$; autrement dit, via l'identification $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) = \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ choisie en 2.3.1, un élément g de $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ agit sur le système des Z_I par g^{-1}.
3. Le $\mathcal{D}_o$-module formel porté par $\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I}$ est le groupe formel $Gr_o(\mathfrak{E})$ associé par la construction du paragraphe 1.2.2 au $\mathcal{D}$-faisceau elliptique universel $\mathfrak{E}$ donné par le problème de modules correspondant à $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$. Celui porté par le membre de droite provient de la description modulaire de $\Omega^d\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o}\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ (cf. 2.2.3).

Pour finir, expliquons pourquoi le quotient $\mathrm{GL}_d(F_o)\backslash\left[\left(\widehat{\Omega}^d\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o}\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}\right)\times Z_I\right]$ qui figure dans l'énoncé du théorème n'est rien d'autre qu'une réunion finie de formes tordues de courbes de Mumford (cf. [**M**]). Examinant l'action de $\overline{D}^*(F_o)\simeq \mathrm{GL}_d(F_o)$ sur Z_I, on voit que ce dernier ensemble se décompose en un nombre fini d'orbites contenant chacune la double classe d'un élément x dont la o-composante x_o est égale à 1 ; le stabilisateur Γ_x de x est alors donné par :

$$\Gamma_x = \overline{D}^*(F)\cap x^{-1}K_I^{\infty,o}x,$$

où l'intersection est prise dans $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ puis, vue comme sous-groupe de $\overline{D}^*(F)$, injectée dans $\overline{D}^*(F_o)$. Ainsi le quotient en question apparaît comme la réunion d'un nombre fini de quotients de la forme :

$$\Gamma_{x_i}\backslash\left(\widehat{\Omega}^d\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o}\widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}\right),$$

où les Γ_{x_i} sont les différents stabilisateurs décrits précédemment. Ce sont des sous-groupes discrets et co-compacts dans $\overline{D}^*(F_o)$. Par ailleurs, on vérifie sans mal que ces stabilisateurs contiennent chacun une puissance $\pi_o^{n_i}\,\mathrm{Id}_d$ de la matrice $\pi_o\,\mathrm{Id}_d$. On peut donc commencer par passer au quotient par l'action de $\pi_o^{n_i}\,\mathrm{Id}_d$ (qui agit trivialement sur $\widehat{\Omega}^d$), obtenant ainsi le produit tensoriel de $\widehat{\Omega}^d$ par l'extension non ramifiée de degré dn_i, notée $\mathcal{O}_o^{(dn_i)}$, de $\mathcal{O}_o$. C'est pourquoi le quotient ci-dessus peut encore s'écrire :

$$\Gamma_i\backslash\left(\widehat{\Omega}^d\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o}\mathcal{O}_o^{(dn_i)}\right).$$

Après extension des scalaires à $\mathcal{O}_o^{(dn_i)}$, cela devient isomorphe à une réunion finie de quotients «à la Mumford», de la forme $\Gamma_i'\backslash\widehat{\Omega}^d$ (cf. **[M]** ou **[Ra2]**), où Γ_i' désigne l'image dans le groupe $\mathrm{PGL}_d(F_o)$ du sous-groupe de Γ_i constitué des éléments dont le déterminant est une unité (une justification détaillée de ces affirmations est donnée, dans un contexte similaire, au paragraphe 2.3.5.5). Ces groupes Γ_i' sont des sous-groupes de Schottky de $\mathrm{PGL}_d(F_o)$ (voir **[M]** Def. 1.3 ou **[Mu]** §1 C) ; en particulier, ils opèrent librement sur l'immeuble de Bruhat-Tits I de $\mathrm{PGL}_d(F_o)$ auquel s'identifie le complexe simplicial dual de la fibre spéciale de $\widehat{\Omega}^d$ (voir 2.2.1). On peut montrer que le complexe simplicial dual de la fibre spéciale de $\Gamma_i'\backslash\widehat{\Omega}^d$ s'identifie au complexe quotient $\Gamma_i'\backslash I$.

Pour nous résumer, on voit donc que le quotient qui figure dans l'énoncé du théorème est la réunion de formes tordues galoisiennes (sur des extensions non ramifiées) de quotients à la Mumford.

2.3.4. Généralisation : addition d'une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau. — On met maintenant une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau en la place o. Par rapport à ce qui précède, I désigne donc un sous-schéma fermé fini de $X-\{\infty\}$ tel que la multiplicité de o dans I soit un entier $n>0$. Munir un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E},j,t)$, de zéro z, d'une structure de niveau I n'a de sens que si $z(S)$ est disjoint de $V(I)$. Autrement dit, le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ n'existe qu'en fibre générique.

Cependant, l'espace analytique $(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an}$ sur F_o sous-jacent à $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est bien défini (bien que l'on sache abstraitement que $(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an}$ doit provenir d'un certain schéma formel, ce dernier n'est pas construit à priori, comme pour les revêtements Σ_n^d). Comparativement au théorème 2.3.1, on obtient également une uniformisation rigide-analytique de nos schémas de modules $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$, mais en termes des revêtements Σ_n^d de $\Omega^d\hat{\otimes}_{F_o}\widehat{F}_o^{nr}$ définis au paragraphe 2.2.5 :

Théorème 2.3.2. — *Il existe un isomorphisme d'espaces rigides-analytiques :*

$$(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an}\simeq \mathrm{GL}_d(F_o)\backslash\left[\Sigma_n^d\times Z_{I^o}\right].$$

Ces isomorphismes sont compatibles, lorsque I varie (i.e. n et I^o varient), aux opérations de projection, et l'isomorphisme ainsi obtenu entre les deux systèmes projectifs est équivariant par l'action du groupe $D^*(\mathbb{A}^\infty)\simeq\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})\times D_o^*$.

Remarque. — *Comme plus haut, on voit que le membre de droite de la formule est une réunion finie de formes tordues galoisiennes de quotients $\Gamma_i\backslash\Sigma_n^d$, pour des sous-groupes de congruences $\Gamma_i\subset\mathrm{GL}_d(F_o)$.*

Par ailleurs, on s'aperçoit facilement qu'il ne change rien de considérer Σ_n^d comme revêtement de $\Omega^d\hat{\otimes}_{F_o}\widehat{F}_o^{nr}$ ou bien de $\Omega^d\otimes_{F_o}F_o^{nr}$ (cf. 2.2.5, remarque 1).

Expliquons comment le théorème 2.3.2 se déduit du théorème 2.3.1. Le problème de modules correspondant à $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I^o}$ définit sur le $\mathcal{O}_o$-schéma $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I^o}$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique «universel» $\mathfrak{E}$. Alors $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$, vu comme $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I^o}$-schéma, classifie les isomorphismes $\mathcal{D}_o$-linéaires ν entre la π_o^n-torsion $Gr_o(\mathfrak{E})[\pi_o^n]$ du groupe $Gr_o(\mathfrak{E})$ et $\mathcal{D}_o\otimes_{\mathcal{O}_o}(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$ (cf. proposition 1.2.7). La donnée d'un tel isomorphisme revient plus simplement à la donnée d'un point exactement d'ordre q^{d^2n} dans $Gr_o(\mathfrak{E})[\pi_o^n]$.

Utilisant les notations et définitions du paragraphe 2.2.5, on a, d'après la dernière assertion du théorème 2.3.1, un isomorphisme de $\mathcal{D}_o$-modules formels sur $\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I^o}$:

$$Gr_o(\mathfrak{E}) \simeq \mathrm{GL}_d(F_o) \setminus [X \times Z_{I^o}],$$

et donc également au niveau de la π_o^n-torsion :

$$Gr_o(\mathfrak{E})[\pi_o^n] \simeq \mathrm{GL}_d(F_o) \setminus \left[X_n^d \times Z_{I^o}\right].$$

D'où un isomorphisme au-dessus de $(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I^o})^{an}$:

$$(Gr_o(\mathfrak{E})[\pi_o^n])^{an} \simeq \mathrm{GL}_d(F_o) \setminus \left[\mathcal{X}_n^d \times Z_{I^o}\right].$$

Finalement, on a donc bien :

$$(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an} \simeq \mathrm{GL}_d(F_o) \setminus \left[\Sigma_n^d \times Z_{I^o}\right].$$

2.3.5. Preuve du théorème 2.3.1. —

2.3.5.1. Notations. — Nous commençons par fixer un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique spécial $\mathcal{E}_\Phi$ sur $S = \mathrm{Spec}\,\bar{\kappa}(o)$, de $\mathcal{D}_o$-module formel associé Φ (Φ est donc spécial). Puisque le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ est propre, sa fibre spéciale est donc non vide et un tel $\mathcal{E}_\Phi$ existe bien. Choisissons d'autre part une identification $\overline{D} = \mathrm{End}(V(\mathcal{E}_\Phi), \varphi_\Phi, \lambda_\Phi)$ (et donc $\overline{D}^*(F) = \overline{D}^* = \mathrm{Aut}(V(\mathcal{E}_\Phi), \varphi_\Phi, \lambda_\Phi))$. Cela induit une identification :

$$\overline{D}^{opp}(F_o) = \overline{D}^{opp} \otimes F_o = \mathrm{M}_d^{opp}(F_o) = \mathrm{End}_{\mathcal{D}_o}(\Phi) \otimes F_o$$

puisque $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_o}(\Phi) \otimes F_o$ s'identifie à $[\mathrm{End}(V_o(\mathcal{E}_\Phi), \varphi_{\Phi,o}, \lambda_{\Phi,o})]^{opp}$ via l'anti-équivalence de catégories entre modules de coordonnées munis d'une action de $\mathcal{D}_o$ et $\mathcal{D}_o$-modules formels. On en retiendra une identification

$$\overline{D}^*(F_o) = \mathrm{GL}_d(F_o) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_o}(\Phi) \otimes F_o$$

obtenue en composant avec l'inversion $g \mapsto g^{-1}$.

Nous fixons pour finir un isomorphisme $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$-équivariant :

$$\nu_\Phi = (\nu_{\Phi,x}) : V^{\infty,o} \xrightarrow{\sim} (V^{\infty,o}(\mathcal{E}_\Phi))^{\varphi_\Phi^{\infty,o}}$$

compatible à l'isomorphisme fixé entre $\overline{D}(\mathbb{A}^{\infty,o})$ et $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$ (cf. 2.3.1) : cela signifie que, via $\nu_{\Phi,x}$, l'action de $\overline{D} = \mathrm{End}(V(\mathcal{E}_\Phi), \varphi_\Phi, \lambda_\Phi)$ induite sur V_x est donnée par le composé :

$$\overline{D} \hookrightarrow \overline{D}(F_x) \simeq D(F_x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{D_x}(V_x)$$

(action par multiplication à droite).

2.3.5.2. Algébrisations. — Soit S un $\mathcal{O}_o$-schéma où l'image de π_o est nilpotente et X un $\mathcal{D}_o$-module formel spécial sur S. On note $z : S \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_o$ le morphisme structural.

Définition 2.3.3. — Une *algébrisation* de X est la donnée d'un couple $(\mathcal{E}, \varepsilon)$ constitué d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, j, t)$ sur S (de zéro z), et d'un isomorphisme $\mathcal{D}_o$-équivariant $\varepsilon : \widehat{\mathcal{E}} \xrightarrow{\sim} X$ entre X et le groupe formel $\widehat{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$. Lorsque $\mathcal{E}$ est de plus muni d'une structure de niveau I, on parle d'algébrisation avec structure de niveau I.

(On notera que le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}, j, t)$ est alors spécial).

Désignons par $\mathcal{A}lg_I(\Phi)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'algébrisations, avec structure de niveau I, de Φ. Il est fondamental pour la suite de déterminer cet ensemble, lorsque $S = \operatorname{Spec} \bar{\kappa}(o)$ et z est le morphisme $S \to \operatorname{Spec} \kappa(o) \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_o$.

Pour $I \subset X$ un sous-schéma fini fermé non vide de $X \setminus \{\infty, o\}$ et $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux correspondant, une structure ι de niveau I sur $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est équivalente à la donnée pour tout $x \neq \infty, o$ d'un morphisme $(\mathfrak{I}_x\mathcal{D}_x \backslash \mathcal{D}_x)$-équivariant

$$\iota_x : (\mathfrak{I}_x\mathcal{D}_x \backslash \mathcal{D}_x) \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{I}_x\mathcal{E}_x \backslash \mathcal{E}_x$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{I}_x\mathcal{D}_x \backslash \mathcal{D}_x) \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o) \arrow[dl, "\iota_x"'] \arrow[dr, "{}^{\tau}\iota_x"] & \\
\mathfrak{I}_x\mathcal{E}_x \backslash \mathcal{E}_x & & {}^{\tau}(\mathfrak{I}_x\mathcal{E}_x \backslash \mathcal{E}_x) \arrow[ll, "t_x"']
\end{tikzcd}$$

On peut donc également voir ι comme une classe $\bar{\iota}$ modulo $K_I^{\infty,o}$ d'isomorphismes $\mathcal{D}^{\infty,o}$-équivariants :

$$\iota : \mathcal{D}^{\infty,o} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes O^{\infty,o}$$

tels que l'action de $t^{\infty,o} = \prod_{x \neq \infty,o} t_x$ sur le membre de droite corresponde à celle de $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}^{\infty,o}} \otimes Fr$ sur celui de gauche (avec les notations de 2.3.1).

Revenons à $\mathcal{A}lg_I(\Phi)$: c'est l'ensemble des classes d'isomorphie de triplets $(\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\iota})$ où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur $\bar{\kappa}(o)$, où ε est un isomorphisme $\mathcal{D}_o$-équivariant entre $\widehat{\mathcal{E}}$ et Φ, et $\bar{\iota}$ une classe modulo $K_I^{\infty,o}$ d'isomorphismes ι tels que décrits précédemment. La description suivante s'avère plus commode pour ce qui suit : on peut voir encore $\mathcal{A}lg_I(\Phi)$ comme l'ensemble des classes d'isogénie de triplets $(\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur $\bar{\kappa}(o)$, où ε est une quasi-isogénie (équivariante) entre $\widehat{\mathcal{E}}$ et Φ, et où enfin $\bar{\nu}$ est une classe modulo $K_I^{\infty,o}$ d'isomorphismes $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$-équivariants :

$$\nu : \left(V^{\infty,o} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o), \mathrm{Id}_{V^{\infty,o}} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} Fr\right) \xrightarrow{\sim} \left(V^{\infty,o}(\mathcal{E}), \varphi^{\infty,o}\right),$$

lesquels sont encore équivalents à la donnée d'isomorphismes $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$-équivariants :

$$\nu = (\nu_x) : V^{\infty,o} \xrightarrow{\sim} \left(V^{\infty,o}(\mathcal{E})\right)^{\varphi^{\infty,o}}.$$

En résumé, $\mathcal{A}lg_I(\Phi)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de triplets $(\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$, où $(\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu}) \sim (\mathcal{E}', \varepsilon', \bar{\nu}')$ si et seulement si il existe une isogénie $\alpha = (\alpha_x) : (\mathcal{E}, \varphi, \lambda) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}', \varphi', \lambda')$ rendant commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
V_x^{\varphi_x}(\mathcal{E}) \arrow[rr, "\alpha_x"] & & V_x^{\varphi'_x}(\mathcal{E}') \\
 & V_x \arrow[ul, "\nu_x"] \arrow[ur, "\nu'_x"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{E}} \arrow[rr, "\alpha_o"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \widehat{\mathcal{E}'} \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\
 & \Phi &
\end{tikzcd}$$

La limite projective $\mathcal{A}lg_\infty(\Phi)$ des $\mathcal{A}lg_I(\Phi)$ est l'ensemble des tels triplets $(\mathcal{E}, \varepsilon, \nu)$; cette description met en évidence une action sur $\mathcal{A}lg_\infty(\Phi)$ du groupe $\overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty) = \overline{D}^*(F_o) \times \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$, telle que la composante suivant $\overline{D}^*(F_o)$ agisse par composition à gauche sur ε, et celle suivant $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ par composition à droite sur ν. Cette action est transitive, ainsi qu'il résulte de l'unicité de la classe d'isogénie de $\mathcal{E}$ (c'est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique spécial sur $\bar{\kappa}(o)$; voir 1.5.4). En effet, utilisant les identifications de 2.3.5.1, on considère l'élément de $\mathcal{A}lg_\infty(\Phi)$ donné par le triplet :

$$\mathcal{E}_\Phi, \quad \varepsilon_\Phi : \widehat{\mathcal{E}}_\Phi = \Phi, \quad \prod_{x \neq \infty, o} \nu_{\Phi,x}.$$

Si $\alpha : (V(\mathcal{E}), \varphi, \lambda) \xrightarrow{\sim} (V(\mathcal{E}_\Phi), \varphi_\Phi, \lambda_\Phi)$ désigne un isomorphisme entre fibres génériques, on voit alors que : $\gamma \cdot (\mathcal{E}, \varepsilon, \nu) = (\mathcal{E}', \varepsilon', \nu')$, où $\gamma = (\gamma_x) \in \overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)$ est défini par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{E}} \arrow[r, "\varepsilon", "\sim"'] \arrow[d, "\alpha_o"'] & \Phi \arrow[d, "\gamma_o"] \\ \widehat{\mathcal{E}}_\Phi \arrow[r, equal, "\varepsilon_\Phi"] & \Phi \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "\nu_x", "\sim"'] \arrow[d, "\gamma_x"'] & V_x^{\varphi_x}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\alpha_x"] \\ V_x \arrow[r, "\nu_{\Phi,x}", "\sim"'] & V_x^{\varphi_x}(\mathcal{E}_\Phi) \end{tikzcd}$$

D'autre part, le stabilisateur de ce triplet de base $(\mathcal{E}_\Phi, \varepsilon_\Phi, \nu_\Phi)$ est le sous-groupe $\overline{D}^*(F) \subset \overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)$. Cela ressort de la commutativité des diagrammes ci-dessous, où γ désigne un élément de $\overline{D}^*(F)$ et γ_x ses images dans $\overline{D}^*(F_x)$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_\Phi \arrow[d, "\gamma"'] \\ \mathcal{E}_\Phi \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{E}}_\Phi \arrow[r, equal, "\varepsilon_\Phi"] \arrow[d, "\widehat{\gamma}"'] & \Phi \arrow[d, "\gamma_o"] \\ \widehat{\mathcal{E}}_\Phi \arrow[r, equal, "\varepsilon_\Phi"] & \Phi \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "\nu_{\Phi,x}", "\sim"'] \arrow[d, "\gamma_x"'] & V_x^{\varphi_x}(\mathcal{E}_\Phi) \arrow[d, "V_x(\gamma)"] \\ V_x \arrow[r, "\nu_{\Phi,x}", "\sim"'] & V_x^{\varphi_x}(\mathcal{E}_\Phi) \end{tikzcd}$$

On en déduit une bijection entre $\mathcal{A}lg_\infty(\Phi)$ et l'espace homogène $\overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)/\overline{D}^*(F)$. D'où il résulte une bijection :

$$\mathcal{A}lg_I(\Phi) \simeq K_I^{\infty,o} \backslash \overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)/\overline{D}^*(F) = Z_I.$$

2.3.5.3. Construction du morphisme Θ. — Le but de ce paragraphe est de définir un morphisme Θ de la fibre spéciale $\left[\left(\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o} \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}\right) \otimes \kappa(o)\right] \times Z_I = \left(\widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)\right) \times Z_I$ vers la fibre spéciale $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa(o)$.

Soit donc S un $\kappa(o)$-schéma. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques sur S, rappelons qu'une quasi-isogénie (= isogénie dans **[L-R-S]**) est un isomorphisme entre fibres génériques $(V(\mathcal{E}), \varphi, \lambda) \xrightarrow{\sim} (V(\mathcal{E}'), \varphi', \lambda')$ (notons que la notion de fibre générique, définie dans **[L-R-S]** pour $S = \operatorname{Spec} \bar{\kappa}(o)$ uniquement, garde bien un sens pour tout $\kappa(o)$-schéma). Nous appellerons "*o-quasi-isogénie*" un morphisme $g : (V(\mathcal{E}), \varphi, \lambda) \to (V(\mathcal{E}'), \varphi', \lambda')$ qui, en toute place $x \neq o, \infty$, induit (par tensorisation $\otimes_F F_x$) un isomorphisme D_x-linéaire $g_x : (V_x(\mathcal{E}), \varphi_x) \xrightarrow{\sim} (V_x(\mathcal{E}'), \varphi'_x)$ entre F_x-modules de Dieudonné sur S, ce dernier provenant (par tensorisation $\otimes_{\mathcal{O}_x} F_x$) d'un isomorphisme $\mathcal{D}_x$-linéaire $\tilde{g}_x : \mathcal{E}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_x$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_x \arrow[r, "\tilde{g}_x", "\sim"'] & \mathcal{E}'_x \\ {}^\tau\mathcal{E}_x \arrow[r, "{}^\tau\tilde{g}_x", "\sim"'] \arrow[u, "t_x"] & {}^\tau\mathcal{E}'_x, \arrow[u, "t'_x"'] \end{tikzcd}$$

et enfin, tel que, en $x=\infty$, g_∞ provient d'une série d'isomorphismes $\tilde{g}_{\infty,i} : (\mathcal{E}_i)_\infty \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}'_i)_\infty$ faisant commuter tous les diagrammes évidents.

Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.3.4. — *Soient X_1 et X_2 deux $\mathcal{D}_o$-modules formels spéciaux sur S, et $f : X_1 \to X_2$ une quasi-isogénie. Soit d'autre part $(\mathcal{E}_1, \varepsilon_1)$ une algébrisation de X_1. Il existe alors une algébrisation $(\mathcal{E}_2, \varepsilon_2)$ de X_2, et une o-quasi-isogénie $h : (V(\mathcal{E}_1), \varphi_1, \lambda_1) \to (V(\mathcal{E}_2), \varphi_2, \lambda_2)$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{E}}_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "\widehat{h}=G_S(h_o)"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \widehat{\mathcal{E}}_2 \arrow[r, "\varepsilon_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

Le triplet $(\mathcal{E}_2, \varepsilon_2, h)$ est uniquement déterminé à isomorphisme près par cette propriété. Si de plus $\mathcal{E}_1$ est muni d'une structure de niveau I, alors (via h) il en est de même de $\mathcal{E}_2$.

Démonstration. — On rappelle que M_S désigne le foncteur ($\mathcal{D}_o$-modules formels) $\to$ (modules de coordonnées munis d'une action de $\mathcal{D}_o$), et G_S le foncteur quasi-inverse. On note $(M, F) = M_S(X_2)$.

Les données sont les suivantes : la fibre générique $(\mathcal{E}_1)_\eta$, un isomorphisme $(\mathcal{E}_1)_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_2)_x$ pour tout $x \neq o, \infty$, en $x=\infty$ des isomorphismes $(\mathcal{E}_{1,i})_\infty \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_{2,i})_\infty$, et en $x=o$ un isomorphisme $(\mathcal{E}_1)_o \otimes_{\mathcal{O}_o} F_o \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} M \otimes_{\mathcal{O}_o} F_o$. On voit facilement que le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $\mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_{2,i}, j_2, t_2)$ défini comme suit convient : les sections locales s de $\mathcal{E}_{2,i}$ sont les sections méromorphes de $\mathcal{E}_{1,i}$, régulières hors o, et en o telles que $\alpha \circ s$ soit un élément du $\mathcal{O}_o$-module libre M. Le morphisme t_2 provient de t_1 et de F. L'unicité à isomorphisme près est claire également. ☐

Utilisant le théorème de Drinfeld (théorème 2.2.4), ainsi que la bijection $\mathcal{A}lg_I(\Phi) \simeq Z_I$ (cf. 2.3.5.2), on voit que se donner une section de $\left(\widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)\right) \times Z_I$ au-dessus d'un $\kappa(o)$-schéma connexe $S = \operatorname{Spec} B$ revient à se donner :

1. Un homomorphisme $\psi : \bar{\kappa}(o) \to B$;
2. Une classe d'isomorphie de couples (X, ρ) avec :
   - X un $\mathcal{D}_o$-module formel spécial sur S ;
   - $\rho : \psi_*\Phi \to X$ une quasi-isogénie de hauteur 0 ;
3. Une algébrisation $(\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ de Φ avec structure de niveau I.

Partant de ces données, on applique le lemme 2.3.4 ci-dessus avec $X_1 = \psi_*\Phi$, $X_2 = X$, $f = \rho$, $\mathcal{E}_1 = \psi_*\mathcal{E}$, $\varepsilon_1 = \psi_*\varepsilon$; on trouve ainsi une algébrisation de X avec structure de niveau I, c'est-à-dire un point de $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}(B)$. On a ainsi défini un morphisme de foncteurs, d'où le morphisme cherché de $\kappa(o)$-schémas :

$$\Theta : \left(\widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)\right) \times Z_I \longrightarrow \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa(o).$$

2.3.5.4. Le morphisme Θ est invariant par l'action sur le membre de gauche du groupe $\mathrm{GL}_d(F_o)$. — Rappelons que, d'après 2.2.4.1, l'action d'un élément g de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ sur le foncteur G est donnée par (en posant $n = v(\det g)$) :

$$g \cdot (\psi, X, \rho) = \left(\psi \circ Fr^{-n}, X, \rho \circ \psi_*\left(g^{-1} \circ \mathrm{Frob}^n\right)\right).$$

D'autre part, l'action sur Z_I dont il a été question en 2.3.5.2 peut également être décrite en terme du lemme 2.3.4 : l'image $(\mathcal{E}_1, \varepsilon_1, \bar{\nu}_1) = g \cdot (\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ est caractérisée par l'existence d'une o-quasi-isogénie $h_g : (\mathcal{E}, \varphi, \lambda) \to (\mathcal{E}_1, \varphi_1, \lambda_1)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{E}} \arrow[r, "\varepsilon", "\sim"'] \arrow[d, "\widehat{h}_g"'] & \Phi \arrow[d, "g"] \\
\widehat{\mathcal{E}}_1 \arrow[r, "\varepsilon_1", "\sim"'] & \Phi.
\end{tikzcd}$$

Notons $(\mathcal{E}_2, \varepsilon_2, \bar{\nu}_2)$ l'algébrisation de X associée au point défini par $(\psi, X, \rho, \mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$; on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\psi_*\widehat{\mathcal{E}} \arrow[r, "\psi_*\varepsilon", "\sim"'] \arrow[d, "\widehat{h}"'] & \psi_*\Phi \arrow[d, "\rho"] \\
\widehat{\mathcal{E}}_2 \arrow[r, "\varepsilon_2", "\sim"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Le point défini par :

$$\left(\psi_1 = \psi \circ Fr^{-n}, X, \rho_1 = \rho \circ \psi_*\left(g^{-1} \circ \mathrm{Frob}^n\right), \mathcal{E}_1, \varepsilon_1, \bar{\nu}_1\right)$$

a pour image la même algébrisation de X, ainsi qu'il résulte de la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\psi_{1*}\widehat{\mathcal{E}}_1 \arrow[r, "\psi_{1*}\varepsilon", "\sim"'] \arrow[d, "\psi_*\mathrm{Frob}^n"'] & \psi_{1*}\Phi \arrow[d, "\psi_*\mathrm{Frob}^n"] \\
\psi_*\widehat{\mathcal{E}}_1 \arrow[r, "\psi_*\varepsilon_1", "\sim"'] \arrow[d, "\psi_*\widehat{h}_g^{-1}"'] & \psi_*\Phi \arrow[d, "\psi_* g^{-1}"] \\
\psi_*\widehat{\mathcal{E}} \arrow[r, "\psi_*\varepsilon", "\sim"'] \arrow[d, "\widehat{h}"'] & \psi_*\Phi \arrow[d, "\rho"] \\
\widehat{\mathcal{E}}_2 \arrow[r, "\varepsilon_2", "\sim"'] & X
\end{tikzcd}$$

(la commutativité du carré supérieur résulte directement de l'égalité $\psi_1 = \psi \circ Fr^{-n}$; le carré central n'est rien d'autre que le pull-back par ψ d'un diagramme écrit plus haut).

Finalement, on voit donc que Θ se factorise en un morphisme de $\kappa(o)$-schémas :

$$\overline{\Theta} : \mathrm{GL}_d(F_o) \backslash \left[\left(\widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)\right) \times Z_I\right] \longrightarrow \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa(o).$$

2.3.5.5. $\overline{\Theta}$ *est un isomorphisme.* — Rappelons que $\widehat{\Omega}^d$ est un schéma sur $\mathcal{O}_o$ tel que $\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes} \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}$ représente le foncteur G défini en 2.2.3. On voit que le quotient ci-dessus n'est rien d'autre que la fibre spéciale du quotient $\mathrm{GL}_d(F_o) \setminus \left[\left(\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes} \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr} \right) \times Z_I \right]$ qui figure dans l'énoncé du théoréme de Čerednik-Drinfeld.

Il est commode d'étendre les scalaires de $\kappa(o)$ à $\bar{\kappa}(o)$. Expliquons pourquoi le schéma obtenu à partir du quotient précédent s'identifie au schéma défini sur $\bar{\kappa}(o)$ suivant :

$$\mathrm{GL}'_d(F_o) \setminus \left(\widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)} \times Z_I \right),$$

où l'on note GL'_d le sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ constitué des g tels que $v(\det g) = 0$ et où $\widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)}$ est déduit de $\widehat{\Omega}^d$ par extension des scalaires ($\widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)} = \widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)$ sans l'action de GL_d sur $\bar{\kappa}(o)$). En termes modulaires, $\widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)}$ représente le foncteur $\overline{G}$ qui classifie les couples (X, ρ), et GL'_d y opère par composition sur ρ.

Désignant par des indices différents les deux copies du corps $\bar{\kappa}(o)$, le schéma $\left[\left(\widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o)^{(1)} \right) \otimes_{\kappa(o)} \bar{\kappa}(o)^{(2)} \right] \times Z_I$ obtenu par extension des scalaires se décompose en une somme de copies du schéma $\widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)} \times Z_I$, via la décomposition canonique

$$\begin{array}{ccc} \bar{\kappa}(o)^{(1)} \otimes_{\kappa(o)} \bar{\kappa}(o)^{(2)} & = & \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\kappa}(o)/\kappa(o))} \bar{\kappa}(o) \\ x \otimes y & \mapsto & (\sigma x.y)_\sigma = (u_\sigma). \end{array}$$

Puisqu'un élément $g \in \mathrm{GL}_d(F_o)$ agit sur $\bar{\kappa}(o)^{(1)}$ selon la puissance du Frobenius $Fr^{-v(\det g)}$, l'action du groupe $\mathrm{GL}_d(F_o)$ se traduit par une permutation $(u_\sigma) \mapsto \left(u_{\sigma + v(\det g)}\right)$ des copies, avec l'identification habituelle $\mathrm{Gal}(\bar{\kappa}(o)/\kappa(o)) = \widehat{\mathbb{Z}}$. Cette action n'est pas transitive, mais le fait de quotienter d'abord par le centre $Z(\mathrm{GL}_d(F_o)) = d\mathbb{Z}$ du groupe donne lieu à une action transitive de $\mathrm{PGL}_d(F_o)$ sur le quotient $\bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)} \times Z_I$ obtenu. Cet espace homogène peut être décrit comme le quotient d'un élément par son stabilisateur, en l'occurrence $\mathrm{GL}'_d(F_o) \setminus \left(\widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)} \times Z_I \right)$, ce qui démontre l'assertion.

Le morphisme $\overline{\Theta}_{\bar{\kappa}(o)}$ déduit de $\overline{\Theta}$ par extension des scalaires provient d'un morphisme de $\bar{\kappa}(o)$-schémas :

$$\Theta_1 : \widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)} \times Z_I \longrightarrow \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\kappa}(o).$$

Ce dernier associe à un point $(X, \rho, \mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ défini sur une $\bar{\kappa}(o)$-algèbre B l'algébrisation de X obtenue par application du lemme 2.3.4 avec $X_1 = \Phi_B$, $X_2 = X$, $f = \rho$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_B$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_B$.

Montrons que $\overline{\Theta}_{\bar{\kappa}(o)}$ induit une *bijection entre les ensembles de $\bar{\kappa}(o)$-points des deux schémas* :

Injectivité : supposons que deux $\bar{\kappa}(o)$-points $x = (X, \rho, \mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ et $x' = (X', \rho', \mathcal{E}', \varepsilon', \bar{\nu}')$ admettent par Θ_1 la même image $\mathcal{E}_2$, un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique spécial sur $\bar{\kappa}(o)$ muni d'une structure de niveau I. Alors, parce que $\mathcal{E}_2$ est à la fois une algébrisation de X et de X', on voit que X s'identifie naturellement à X'. Via l'identification $\mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_o}(\Phi) \otimes_{\mathcal{O}_o} F_o = \mathrm{GL}_d(F_o)$, on voit ensuite que ρ et ρ' diffèrent par composition par un élément $g \in \mathrm{GL}'_d(F_o)$: en effet, la $\mathcal{O}_o$-hauteur de la quasi-isogénie $g = \rho'^{-1} \circ \rho$ est $d.v(\det g) = 0$, puisque ρ et ρ' sont de hauteur nulle. On constate enfin que l'algébrisation avec structure de niveau $(\mathcal{E}', \varepsilon', \bar{\nu}')$ de Φ est l'image par g de l'algébrisation $(\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$. Cela résulte de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{E}} \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\hat{h}_g"'] & \Phi \arrow[d, "g"] \\ \widehat{\mathcal{E}'} \arrow[r, "\varepsilon'"] & \Phi \end{tikzcd}$$

où $\hat{h}_g$ provient de la o-quasi-isogénie $h_g = h'^{-1} \circ h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, notant $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2$ (resp. $h' : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}_2$) la o-quasi-isogénie obtenue par application du lemme 2.3.4 lorsque l'on exprime que $\mathcal{E}_2$ est l'image par Θ_1 du point x (resp. x').

Les deux points sont donc bien déduits l'un de l'autre par l'action d'un élément de $\mathrm{GL}'_d(F_o)$.

Surjectivité : $\mathcal{E}_2$ étant donné, notons X son $\mathcal{D}_o$-module formel sous-jacent. Parce que tous les $\mathcal{D}_o$-modules formels spéciaux de hauteur d^2 sur $\bar{\kappa}(o)$ sont isogènes (cf. théorème 1.3.4), il existe une quasi-isogénie $\rho : \Phi \to X$. On peut même supposer, quitte à composer avec un endomorphisme convenable de Φ, que ρ est de hauteur 0.

Appliquant le lemme 2.3.4 à l'algébrisation $\mathcal{E}_2$ de X et à ρ^{-1}, on obtient une algébrisation $(\mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ de Φ avec structure de niveau I. Il est alors clair que $\mathcal{E}_2$ est l'image de $(X, \rho, \mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ par Θ_1.

Prouvons maintenant que Θ_1 est *étale* : soit B une $\bar{\kappa}(o)$-algèbre, et $B' \to B$ un épaississement de B, de noyau un idéal de carré nul ; soit $x = (X, \rho, \mathcal{E}, \varepsilon, \bar{\nu})$ un point à valeurs dans B de $\widehat{\Omega}^d_{\bar{\kappa}(o)} \times Z_I$, et $y = \mathcal{E}_2$ son image par Θ_1. Déformer x en un B'-point x' revient à déformer le $\mathcal{D}_o$-module formel X : en effet, la quasi-isogénie ρ se déforme uniquement (cf. par exemple **[Zi2]** 5.31), et le schéma Z_I est constant ; on applique alors le théorème de Serre et Tate (cf. théorème 1.4.1 ; à noter : au paragraphe 1.4 est étudiée la théorie absolue des déformations. Lorsque $z : \mathcal{O}_o \to B$ est fixé, c'est-à-dire lorsque l'on regarde les déformations relatives, le fait que les déformations absolues se correspondent implique bien qu'il en est de même des déformations relatives). On voit donc que Θ_1 met en bijection les déformations x' de x et celles y' de y : la bijection réciproque associe à une déformation de $\mathcal{E}_2$ la déformation sous-jacente du groupe formel $\widehat{\mathcal{E}_2} \simeq X$.

Par suite $\overline{\Theta}_{\bar{\kappa}(o)}$ est étale ; comme il est aussi bijectif sur les $\bar{\kappa}(o)$-points, c'est finalement un isomorphisme.

Le résultat annoncé vient en corollaire : $\overline{\Theta}$ *est un isomorphisme.*

2.3.5.6. Fin de la démonstration. — On vient ainsi d'obtenir un isomorphisme comme celui prédit par le théorème 2.3.1, mais seulement pour l'instant entre les fibres spéciales. Remarquons cependant que, par construction, cet isomorphisme se relève aux $\mathcal{D}_o$-modules formels spéciaux naturellement portés par les deux membres. De plus, il est immédiat et formel de vérifier que ces isomorphisme, lorsque I varie, sont compatibles entre eux, et que le système projectif qu'ils constituent est $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$-équivariant.

La possibilité de prolonger $\overline{\Theta}$ en un isomorphisme entre les deux schémas formels va résulter du théorème de Serre-Tate.

Soit B une $\mathcal{O}_o$-algèbre telle que l'image de l'uniformisante π_o de $\mathcal{O}_o$ est nilpotente, et $B_0 = B/\pi_o B$. La donnée d'un B_0-point x_0 du schéma $\mathrm{GL}_d(F_o) \backslash \left[\left(\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes} \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}\right) \times Z_I\right]$ munit (par image réciproque) B_0 d'un $\mathcal{D}_o$-module formel spécial X_0. On voit que *déformer ce point x_0 de B_0 à B revient à déformer X_0* : la question étant en effet locale, on est ramené à la résoudre pour le foncteur G, ce qui est évident (argument déjà cité : la quasi-isogénie ρ se déforme uniquement).

En définitive, se donner un B-point x du schéma quotient ci-dessus revient à se donner sa restriction x_0 à B_0, plus une déformation X sur B de X_0. De même, il est clair que se donner un B-point y du schéma $\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I}$ revient à se donner sa restriction y_0 à B_0 et une déformation $\mathcal{E}$ sur B du $\mathcal{D}$-faisceau elliptique spécial $\mathcal{E}_0$ sur B_0 défini par y_0. Or si x_0 et y_0 se correspondent par l'isomorphisme $\overline{\Theta}$, alors X_0 s'identifie au $\mathcal{D}_o$-module formel spécial $\widehat{\mathcal{E}_0}$ naturellement porté par $\mathcal{E}_0$. Le théorème de Serre-Tate (cf. théorème 1.4.1) affirme que les déformations de $\mathcal{E}_0$ correspondent bijectivement à celles de $\widehat{\mathcal{E}_0}$, et donc de X : cela définit de façon naturelle un isomorphisme entre les schémas formels $\mathrm{GL}_d(F_o) \backslash \left[\left(\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes} \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}\right) \times Z_I\right]$ et $\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I}$, qui prolonge $\overline{\Theta}$, et qui possède visiblement toutes les propriétés souhaitées.

La preuve du théorème 2.3.1 est donc achevée.

PARTIE II

REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DANS LA COHOMOLOGIE DE L'ESPACE DE DRINFELD EN ÉGALE CARACTÉRISTIQUE : PREUVE DE LA CONJECTURE DE DRINFELD-CARAYOL

Introduction

Fixons un nombre premier ℓ, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$ (ainsi qu'un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$), et donnons-nous un corps local non archimédien K (il est donc isomorphe soit à un corps p-adique, soit au corps $\mathbb{F}_q((t))$ des séries de Laurent formelles en une variable sur un corps fini). Nous notons κ le corps résiduel de K, de caractéristique p et cardinal q. Nous désignons par $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K et par ϖ une uniformisante. Enfin, on s'intéressera aux représentations (définies sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) des trois groupes suivants : $\mathrm{GL}_d(K)$, le groupe D_d^* des éléments inversibles du corps gauche D_d sur K d'invariant $1/d$ (unique à isomorphisme près) et le groupe de Weil W_K de K (constitué des éléments de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui induisent sur κ une puissance entière d'un élément de Frobenius).

La théorie du corps de classes local établit l'existence d'un isomorphisme

$$Cl : W_K^{ab} \xrightarrow{\sim} K^* = \mathrm{GL}_1(K).$$

Comme généralisation non-abélienne de ce résultat, Langlands a conjecturé l'existence pour chaque entier d de bijections naturelles σ_d entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles du groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ d'une part et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations continues semi-simples de degré d du groupe de Weil W_K d'autre part. Cette conjecture a été précisée au fil des ans : les bijections en question doivent être caractérisées par certaines propriétés (voir paragraphe 3.1.1.2 pour un énoncé précis). Cette «correspondance de Langlands locale» (pour GL_d) a été démontrée pour $K = \mathbb{F}_q((t))$ par Laumon, Rapoport et Stuhler en 1993 (**[L-R-S]**) et, dans le cas des corps p-adique, par Harris et Taylor (**[H-T]**) d'une part, et Henniart (**[He2]**) d'autre part, en 1998 (voir également **[Ca3]** pour une présentation des deux démonstrations).

Langlands a également prédit, avec Jacquet, l'existence d'une seconde famille de bijections, entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_d(K)$ d'une part, et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles du groupe D_d^* d'autre part (il l'ont fait pour $d = 2$). La «correspondance de Jacquet-Langlands locale» (caractérisée également par certaines propriétés : voir paragraphe 3.1.1.1) a été démontrée en 1984 par Rogawski (**[Ro]**), Deligne, Kazhdan et Vignéras (**[D-K-V]**) dans le cas des corps p-adique (du moins pour les cuspidales) et en 1999 par Badulescu dans le cas d'égale caractéristique p (**[Ba1]**). En fait, ces deux correspondances ne sont que des cas particuliers parmi les nombreuses fonctorialités prédites par la théorie de Langlands.

Carayol propose dans **[Ca2]** une réalisation géométrique conjecturale des correspondances locales de Langlands et de Jacquet-Langlands : il définit deux représentations (dites «représentations locales fondamentales») $\mathcal{U}_d^v$ et $\mathcal{U}_d^r$ du groupe produit $\mathrm{GL}_d \times D_d^* \times W_K$, provenant respectivement de la cohomologie de variétés de cycles évanescents ℓ-adiques (associés par la théorie de Berkovich à des schémas formels issus des espaces de déformations des $\mathcal{O}$-modules formels introduits par Drinfeld) et de la cohomologie ℓ-adique à support compact (définie par Berkovich) de revêtements rigides-analytiques Σ_n^d (définis par Drinfeld dans **[Dr1]**) du «demi-plan de Poincaré généralisé» Ω^d_K. En fait, la représentation $\mathcal{U}^v_d$ a été considérée tout d'abord par Deligne (vers 1970) dans le cas $d = 2$ et $K = \mathbb{Q}_p$, puis étudiée par Carayol, toujours pour GL_2, dans le cas des corps p-adiques quelconques. De son côté, Drinfeld suggère dans l'introduction de [**Dr1**] que toute représentation supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(K)$ est réalisée dans la «cohomologie» des revêtements galoisiens Σ^d_n. Carayol précise ces idées dans son article [**Ca2**] sous la forme d'une conjecture, que nous appellerons «conjecture de Drinfeld-Deligne-Carayol» (plus exactement, conjecture de «Drinfeld-Carayol» dans le cas rigide-analytique, et conjecture de «Deligne-Carayol» dans le cas des cycles evanescents). Cette conjecture affirme que, pour π une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_d(K)$, les composantes π-isotypiques des représentations locales fondamentales doivent être données par :

$$\mathcal{U}^v_d(\pi) = \mathrm{JL}(\pi^\vee) \otimes \left(\sigma_d(\pi) \otimes |\ |^{\frac{1-d}{2}}\right),$$
$$\mathcal{U}^r_d(\pi) = \mathrm{JL}(\pi^\vee) \otimes \left(\sigma_d(\pi^\vee) \otimes |\ |^{\frac{1-d}{2}}\right).$$

Pour résumer les choses : l'une et l'autre des deux représentations locales fondamentales $\mathcal{U}^v_d$ et $\mathcal{U}^r_d$ doivent constituer une construction géométrique simultanée des correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands locales pour les cuspidales (noter toutefois la légère différence entre les formules précédentes). Ce qu'il advient des autres représentations (en particulier des séries discrètes non cuspidales) n'est pas encore clair. Toutefois, le lecteur pourra trouver dans [**S-S**] un calcul complet de la cohomologie de l'espace Ω^d. Par ailleurs, la relation entre les représentations $\mathcal{U}^v_d$ et $\mathcal{U}^r_d$ demeure un autre mystère.

Cette seconde partie de ma thèse est consacrée à la preuve du quatrième volet (manquant à ce jour) de la conjecture de Drinfeld-Deligne-Carayol : le cas où K est d'égale caractéristique p, versant rigide-analytique (c'est-à-dire relatif à $\mathcal{U}^r_d$). Le tableau suivant résume les contributions à la preuve de la conjecture, sous ses quatre aspects :

	versant rigide analytique	versant cycles-évanescents
corps p-adiques	Harris ([**H1**] ; 1997) complété par Harris-Taylor ([**H-T**])	Harris-Taylor ([**H-T**] ; 1998)
cas d'égale caractéristique p	Hausberger (2000)	Boyer ([**Boy**] ; 1998)

Détaillons un peu plus le cas qui nous concerne : notant

$$\Psi^i_{d,n} = \mathrm{H}^i_c\left(\left(\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}\,\Sigma^d_n\right)_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

(où $\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}$ désigne la restriction des scalaires «à la Weil», au sens du paragraphe 3.1.2), la représentation locale fondamentale $\mathcal{U}^r_d$ est la limite inductive notée désormais

$$\Psi^{d-1}_d = \varinjlim_n \Psi^{d-1}_{d,n}$$

(cohomologie en degré médian $d-1$). On vérifie qu'elle est munie d'une action (admissible) du produit $\mathrm{GL}_d(K) \times D^*_d \times W_K$. La preuve de la conjecture de Drinfeld-Deligne-Carayol relative à Ψ^{d-1}_d procède par voie globale : on utilise le théorème d'uniformisation (que j'ai établi dans la partie I) des variétés de modules $\mathcal{E}\ell\ell$ des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques (introduites par Laumon, Rapoport et Stuhler dans [**L-R-S**]), et la méthode (inventée par Deligne ([**De**]) et développée par différents auteurs (voir [**Ca2**], [**H1**], [**H-T**])) de comparaison entre la représentation locale Ψ_d et la cohomologie globale de la variété modulaire $\mathcal{E}\ell\ell$.

Le plan de cette partie est le suivant : le premier paragraphe est consacré à la présentation de la conjecture de Drinfeld-Carayol, qui est énoncée après quelques rappels sur les correspondances locales de Langlands et de Jacquet-Langlands. Le second paragraphe est de nature globale : il est dédié aux variétés de modules des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques. Notamment, on résume les résultats établis par Laumon, Rapoport et Stuhler dans [**L-R-S**] et rappelle le théorème d'uniformisation rigide-analytique (analogue du théorème de Čerednik-Drinfeld ; cf. partie I). La conjecture de Drinfeld-Carayol est démontrée au troisième paragraphe : on construit la suite spectrale de Hochschild-Serre, on montre que sa partie cuspidale est dégénérée, puis on conclut. Enfin, il figure en appendice une brève exposition de la théorie cohomologique (ℓ-adique) des espaces analytiques de Berkovich. On y démontre notamment un théorème de lissité de l'action sur les groupes de cohomologie à support propre, dû à Berkovich, et établit quelques résultats utilisés lors de la construction de la suite spectrale mentionnée plus haut.

Je remercie vivement Vladimir Berkovich qui m'a transmis, expliqué et autorisé à reproduire ici quelques notes non publiées qui figurent au sein du paragraphe 3. Outre sa très belle théorie, ses commentaires ont été inestimables.

3.1. La conjecture de Drinfeld-Carayol

Soient K un corps local non archimédien *d'égale caractéristique* p, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers, ϖ une uniformisante et κ le corps résiduel, de cardinal q. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et note K^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de K (dans $\overline{K}$) ; les anneaux des entiers respectifs sont $\overline{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{O}^{nr}$, de corps résiduels $\overline{\kappa}$, une clôture algébrique de κ. Le groupe de Weil de K est noté W_K ; c'est le sous-groupe de $G_K = \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K\right)$ constitué des éléments qui induisent sur $\overline{\kappa}$ une puissance entière du Frobenius. Il est muni de la topologie pour laquelle le sous-groupe d'inertie I_K de $\mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K\right)$, avec sa topologie de Krull, est un sous-groupe ouvert de W_K et $W_K/I_K \simeq \mathbb{Z}$ est doté de la topologie discrète. On fixe également dans ce qui suit un nombre premier ℓ différent de p, ainsi qu'un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$.

3.1.1. Les correspondances locales de Jacquet-Langlands et de Langlands. —

3.1.1.1. La correspondance de Jacquet-Langlands locale. — Soit D_d «l'» algèbre à division de centre K et d'invariant $1/d$. Désignons par $\mathcal{A}_D$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations complexes admissibles irréductibles du groupe D_d^*. D'autre part, soit $\mathcal{A}_d(K)$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations complexes admissibles irréductibles du groupe $\mathrm{GL}_d(K)$. On note $\mathcal{A}_d^d(K)$ le sous-ensemble constitué des représentations qui sont *essentiellement de carré intégrable* (i.e. les coefficients matriciels sont intégrables modulo le centre) ; parmi ces dernières figurent les représentations *cuspidales*.

Tant les éléments de $\mathcal{A}_D$ que ceux de $\mathcal{A}_d^d(K)$ admettent des caractères : c'est clair pour les premiers (ces représentations sont de dimension finie) ; pour les seconds, on définit d'abord un caractère distribution, dont on montre que sa restriction aux éléments réguliers semi-simples (i.e. dont le polynôme caractéristique est irréductible et à racines simples dans $\overline{K}$) est une fonction (voir [**Le**]).

On dit que $\delta \in D_d^*$ et un élément semi-simple g de $\mathrm{GL}_d(K)$ sont associés si le polynôme caractéristique réduit de δ coïncide avec le polynôme caractéristique de g (dans ce cas, g est automatiquement elliptique).

Théorème 3.1.1 **(Badulescu, en égale caractéristique** p**)**
Il existe une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_d^d(K) & \longrightarrow & \mathcal{A}_D \\ \pi & \longmapsto & \mathrm{JL}(\pi) \end{array}$$

caractérisée par la propriété que les caractères de π *et* $\mathrm{JL}(\pi)$ *coïncident au signe* $(-1)^{d-1}$ *près sur les éléments associés réguliers.*

Ce théorème a été démontré par I.Badulescu dans sa thèse (voir [**Ba1**] ou [**Ba2**]). Auparavant, on disposait d'un résultat plus faible, dû à G.Henniart, qui figure en appendice dans [**He1**] (Henniart définit dans loc. cit. une injection de l'ensemble des représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_d(K)$ dans $\mathcal{A}_D$, vérifiant les propriétés caractérisant JL).

Dans ce qui suit, on considérera non pas des représentations complexes mais à valeur dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. La notion de représentation «essentiellement de carré intégrable» est une notion «algébrique» (c'est évident pour les cuspidales ; pour les autres, cela résulte du cas cuspidal et du théorème de classification de Zelevinski des séries discrètes pour GL_d). On peut donc transporter la bijection du théorème précédent, via l'isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$ choisi : désormais, les éléments de $\mathcal{A}_D$ et $\mathcal{A}_d^d(K)$ seront vues comme des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations.

Pour finir, soulignons que la correspondance de Jacquet-Langlands locale, qui intervient dans la formulation de la conjecture de Drinfeld-Carayol, ne sera exploitée que dans le contexte global du lemme 3.2.8.

3.1.1.2. La correspondance de Langlands locale. — Pour tout entier $d \geq 1$, désignons par $\mathcal{A}_d^0(K)$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations cuspidales irréductibles à caractère central d'ordre fini de $\mathrm{GL}_d(K)$, et par $\mathcal{G}_d^0(K)$ l'ensemble des (classes d'équivalences de) représentations continues complexes irréductibles de degré d du groupe W_K, de caractère central d'ordre fini.

Théorème 3.1.2 **(Laumon, Rapoport et Stuhler, en égale caractéristique p)**
Il existe une famille de bijections :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_d^0(K) & \longrightarrow & \mathcal{G}_d^0(K) \\ \pi & \longmapsto & \sigma_d(\pi) \end{array}$$

telles que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(i) le déterminant de $\sigma_d(\pi)$ correspond par l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local au caractère central de π. En particulier, σ_1 est donné par cet isomorphisme ;

(ii) (torsion) pour tout quasi-caractère $\chi \in \mathcal{A}_d^0(K)$, on a :

$$\sigma_d\left(\pi \otimes \chi\right) = \sigma_d(\pi) \otimes \sigma_1(\chi)\,;$$

(iii) pour chaque paire de représentations $\pi \in \mathcal{A}_d^0(K)$, $\pi' \in \mathcal{A}_{d'}^0(K)$, on a l'identité des facteurs locaux :

$$L\left(\sigma_d(\pi) \otimes \sigma_{d'}(\pi'), s\right) = L\left(\pi \times \pi', s\right), \quad \epsilon\left(\sigma_d(\pi) \otimes \sigma_{d'}(\pi'), s, \psi\right) = \epsilon\left(\pi \times \pi', s, \psi\right)$$

(où ψ désigne un caractère additif non trivial de K) ;

(iv) (contragrédiente) pour $\pi \in \mathcal{A}_d^0(K)$, on a : $\sigma_d(\pi^\vee) = \sigma_d(\pi)^\vee$.

A vrai dire, le théorème précédent est démontré dans **[L-R-S]** non pas pour des représentations à valeurs complexes, mais pour des représentations ℓ-adiques : la géométrie des variétés de modules des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques fournit (sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) la correspondance (dite «de Hecke») $r_d(\pi) = \sigma_d(\pi) \otimes |\ |^{\frac{1-d}{2}}$ (c.f. paragraphe 3.2.3). En fait, cela revient au même : tant du côté automorphe que galoisien, les objets considérés admettent des définitions purement algébriques, et on peut transporter la bijection via l'isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$ choisi. A partir de maintenant, on regardera $\mathcal{A}_d^0(K)$ et $\mathcal{G}_d^0(K)$ comme des ensembles de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations (une représentation complexe $\sigma \in \mathcal{G}_d^0(K)$, par continuité et par le fait que son caractère central est d'ordre fini, se factorise par un quotient fini, de sorte que la représentation sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ qui lui correspond est bien continue pour la topologie ℓ-adique).

Soulignons également que la correspondance de Langlands locale, qui apparaît dans la formulation de la conjecture de Drinfeld-Carayol, sera utilisée dans ce texte uniquement sous la forme de la proposition 3.2.10, due à Laumon-Rapoport et Stuhler.

3.1.2. La représentation locale fondamentale. — Pour tout entier $d \geq 1$, Drinfeld a construit dans [**Dr1**] une variété rigide-analytique Ω^d sur K dont l'ensemble des points à valeur dans une extension finie $L \subset \widehat{\overline{K}}$ de K est

$$\mathbb{P}^{d-1}(L) - \bigcup_{H/K} H(L)$$

(où H parcourt l'ensemble des hyperplans rationnels sur K de $\mathbb{P}^{d-1}$), et qui est un analogue non-archimédien des espaces hermitiens symétriques, pour le cas du groupe linéaire GL_d (voir également [**Bo-Ca**] ou [**De-Hu**] pour une description de la structure rigide-analytique sur Ω^d). D'après la théorie de Raynaud, l'espace rigide Ω^d provient d'un schéma formel sur $\mathcal{O}$; un tel modèle formel, noté $\widehat{\Omega}^d$, a effectivement été construit plus tard par Deligne (manuscript non publié). Drinfeld découvre alors (voir [**Dr1**]) que le schéma formel $\widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ peut être interprété comme espace de modules pour certains groupes formels particuliers, les «$\mathcal{O}_D$-modules formels (spéciaux)». Ici, $\mathcal{O}_D$ désigne «l'» ordre maximal du corps gauche $D = D_d$ d'invariant $1/d$, déjà considéré dans le paragraphe précédent. Il en résulte, sur le schéma formel $\widehat{\Omega}^d \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{nr}$, un $\mathcal{O}_D$-module formel universel, noté X. Désignant par X_n^d le groupe des points de π^n-torsion dans X, et par $\mathcal{X}_n^d$ l'espace rigide associé, Drinfeld considère l'ensemble des points «exactement tués» par π^n :

$$\Sigma_n^d = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_D}\left(\mathcal{X}_n^d, \mathcal{O}_D/\pi^n\mathcal{O}_D\right).$$

C'est un revêtement étale Galoisien de $\Omega^d \otimes_K \widehat{K}^{nr}$, de groupe de Galois $(\mathcal{O}_D/\pi^n\mathcal{O}_D)^*$. Pour n variable, les Σ_n^d forment un système projectif, les morphismes de transition étant données par l'action de π ; le groupe de Galois de ce système est le complété profini $\widehat{\mathcal{O}}_D^*$ de $\mathcal{O}_D^*$.

On voit (au moins ensemblistement) que Ω^d est muni d'une action du groupe linéaire projectif $\mathrm{PGL}_d(K)$. Drinfeld considère l'action semi-linéaire sur $\Omega^d \otimes_K \widehat{K}^{nr}$ du groupe produit $\mathrm{GL}_d(K) \times D^*$, obtenu en tordant l'action précédente (factorisée à travers $\mathrm{PGL}_d(K)$) par l'action suivante sur $\widehat{K}^{nr}$:

$$(g,b) \in \mathrm{GL}_d(K) \times D^* \longmapsto \varphi_q^{\mathrm{val}(\det(g).N(b))},$$

où l'on note $\varphi_q \in \mathrm{Gal}\,(K^{nr}/K)$ le Frobenius géométrique et $N : D^* \to K^*$ la norme réduite. En fait, l'action ainsi définie admet une interprétation modulaire naturelle, et par conséquent se relève en une action (à gauche) du groupe $\mathrm{GL}_d(K) \times D^*$ sur le système de revêtements Σ_n^d.

On désire maintenant rajouter une action galoisienne, en faisant agir le produit $\mathrm{GL}_d(K) \times D^* \times W_K$. Considérons la restriction des scalaires, de $\widehat{K}^{nr}$ à K, de l'espace Σ_n^d : si l'on étend à nouveau les scalaires à $\widehat{K}^{nr}$, on obtient un $\widehat{K}^{nr}$-espace rigide qui est l'union disjointe des $\Sigma_n^d \otimes_{\widehat{K}^{nr},\sigma} \widehat{K}^{nr}$, où σ varie au sein du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{nr}/K)$. Cet espace est trop gros, de sorte que l'on considère plutôt la restriction «à la Weil», au sens suivant :

$$\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}\, \Sigma_n^d = \coprod_{r\in\mathbb{Z}} \Sigma_n^d \otimes_{\widehat{K}^{nr},\varphi_q^r} \widehat{K}^{nr}.$$

C'est un espace rigide sur $\widehat{K}^{nr}$, muni d'une donnée de descente à K définie sur le groupe de Weil uniquement. Désignons par $\left(\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}\, \Sigma_n^d\right)_{\overline{K}}$ l'espace obtenu par extension des scalaires à $\widehat{\overline{K}}$ (c'est l'union disjointe de ses composantes $\Sigma_n^d \otimes_{\widehat{K}^{nr},\varphi_q^r} \widehat{\overline{K}}$). L'action de W_K sur $\left(\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}\, \Sigma_n^d\right)_{\overline{K}}$ est la suivante : le groupe d'inertie I_K agit de manière évidente sur chaque composante ; de plus, $w \in W_K$ translate ces composantes indexées par $\mathbb{Z}$ par $+\,\mathrm{val}\,(\mathrm{Cl}(w)^{-1})$, où l'on note $\mathrm{Cl} : W_K \to K^*$ l'application de réciprocité de la théorie du corps de classe (normalisée de telle manière qu'au Frobenius φ_q corresponde l'uniformisante ϖ). Cette action commute avec la précédente, d'où une action du groupe produit $G = \mathrm{GL}_d(K) \times D^* \times W_K$ sur $\left(\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}\, \Sigma_n^d\right)_{\overline{K}}$. Le stabilisateur d'une composante $\left(\Sigma_n^d\right)_{\overline{K}}$ est le sous-groupe $\mathfrak{P}_d$ constitué des triplets (g, b, w) qui vérifient $\det(g)N(b)\,\mathrm{Cl}(w)^{-1} \in \mathcal{O}^*$.

Considérons enfin la cohomologie ℓ-adique à support compact (définie par Berkovich ; voir paragraphe A.1) du K-espace analytique $\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}\, \Sigma_n^d$:

$$\Psi_{d,n}^i = \mathrm{H}_c^i\left(\left(\mathrm{Res}'_{\widehat{K}^{nr}/K}\, \Sigma_n^d\right)_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right).$$

Définition 3.1.3. — Nous appelons *représentation locale fondamentale* la limite inductive $\Psi_d^i = \varinjlim_n \Psi_{d,n}^i$, pour $i = d-1$ (cohomologie en degré médian).

Il s'agit d'une représentation ℓ-adique du groupe G ; en fait, on voit facilement que Ψ_d^i est l'induite compacte de $\mathfrak{P}_d$ à G de la limite sur n des représentations $\mathrm{H}_c^i\left(\left(\Sigma_n^d\right)_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$. C'est de cette dernière manière qu'est définie – traditionnellement – la représentation locale fondamentale (cf. **[Ca2]**).

3.1.3. Enoncé de la conjecture. — Fixons un caractère d'ordre fini ξ de K^* à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$. on note $\Psi_d^i(\xi)$ la composante ξ-isotypique de Ψ_d^i. Un élément z du centre K^* de $\mathrm{GL}_d(K)$ (ou de D^*) agit alors sur $\Psi_d^i(\xi)$ via le scalaire $\xi(z)$.

Rappelons que G désigne le groupe produit $\mathrm{GL}_d(K) \times D^* \times W_K$. On dira qu'une représentation Π de G (sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) est *admissible* si elle provient par extension des scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ d'une représentation Π_E de G définie sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$, la représentation Π_E étant une représentation admissible (au sens usuel) du groupe produit $H = \mathrm{GL}_d(K) \times D^*$ telle que, pour tout compact $M \subset H$, l'action de W_K sur l'espace Π_E^M des invariants sous M est continue. Nous notons $\mathcal{A}_G$ la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations admissibles de G. Les objets irréductibles Π de $\mathcal{A}_G$ sont les produits tensoriels $\pi \otimes \rho \otimes \sigma$, où π (resp. ρ) est une représentation irréductible admissible de $\mathrm{GL}_d(K)$ (resp. D^*) définie sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ (dépendant de Π) et σ une représentation ℓ-adique irréductible de W_K définie sur E. Le lecteur pourra consulter, par exemple, la thèse de Boyer ([**Boy**]) pour une preuve détaillée de cette affirmation.

Proposition 3.1.4. — *Les représentations $\Psi_d^i(\xi)$ appartiennent à la catégorie $\mathcal{A}_G$.*

Ce fait sera démontré plus loin (cf. proposition 3.3.1 (i.)). Il repose principalement sur des résultats de Berkovich. La conjecture de Drinfeld-Carayol précise alors la décomposition de $\Psi_d^i(\xi)$:

Théorème 3.1.5. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_d(K)$, de caractère central ξ. Alors π intervient dans la décomposition en éléments irréductibles de $\Psi_d^i(\xi)$ si et seulement si $i = d-1$. La composante π-isotypique de la représentation locale fondamentale est :*

$$\Psi_d^{d-1}(\xi)[\pi] = \mathrm{JL}(\pi^\vee) \otimes \left(\sigma_d(\pi^\vee) \otimes |\ |^{\frac{1-d}{2}}\right).$$

On rappelle que, pour W un objet de $\mathcal{A}_G$ et π une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_d(K)$, la composante π-isotypique de W est définie par

$$W[\pi] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(K)}(\pi, W).$$

Remarque. — *Pour $\pi \in \mathcal{A}_d^d(K) \setminus \mathcal{A}_d^0(K)$, la question reste ouverte.*

3.2. Variétés de Drinfeld : uniformisation, cohomologie

A partir de maintenant, nous modifions légèrement nos notations : D sera désormais une algèbre à division *globale* de dimension d^2 sur le corps des fonctions $F = \mathbb{F}_q(X)$ d'une courbe algébrique X lisse, projective et géométriquement connexe sur le corps $\mathbb{F}_q$ (avec q une puissance p^e d'un nombre premier p). On fixe deux places de F, notées ∞ et o ; la place ∞ jouera le rôle d'une place archimédienne et o sera l'analogue de p (par analogie avec le cas arithmétique). On désignera par $\mathcal{O}_o$ et F_o les complétés respectifs de $\mathcal{O}_{X,x}$ et F en o ; le corps résiduel de $\mathcal{O}_o$ est $\kappa(o)$. On suppose que D est déployée à l'infini (c'est-à-dire que $D \otimes_F F_\infty \simeq M_d(F_\infty)$) et que le complété $D_o = D \otimes F_o$ en o est «le» corps gauche sur F_o d'invariant $1/d$ (noté précédemment $D = D_{d,F_o}$). Nous nous donnons également un faisceau d'ordres maximaux $\mathcal{D}$ sur X et notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des mauvaises places, où l'algèbre D_x n'est pas déployée.

3.2.1. L'espace de modules des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques. — Les variétés de «$\mathcal{D}$-modules elliptiques» introduites par Laumon, Rapoport et Stuhler ([**L-R-S**]) sont des variantes compactes des variétés de modules des faisceaux elliptiques de Drinfeld (voir [**Dr1**], [**Dr2**] ou [**Dr3**]). Nous renvoyons le lecteur à [**L-R-S**] ou à la première partie de cette thèse pour tout ce qui concerne les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques. Ces derniers sont munis d'une structure de niveau I, pour I un sous-schéma fermé fini non vide de $X - \{\infty\}$.

***Théorème 3.2.1* (Laumon, Rapoport, Stuhler)**. — *Le problème de modules des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques munis d'une structure de niveau I est représentable par un* *schéma projectif $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ sur $X' = X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}$. Ce schéma est lisse et purement de dimension relative $(d-1)$ au-dessus de X'.*

Dans la partie I, nous avons défini un problème de modules au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_o$, étendant ainsi le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ afin d'étudier la mauvaise réduction en la place o. On montre que le schéma de modules obtenu, noté encore $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ (pour I ne contenant pas o), est un schéma projectif sur $(X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}) \cup \{o\}$ (mais il n'est plus lisse ; sa fibre spéciale au-dessus de $\operatorname{Spec}\kappa(o)$ est un diviseur à croisements normaux, cf. paragraphe suivant).

Pour I de plus en plus grand, les schémas $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ constituent un système projectif $\mathcal{E}\ell\ell^{\infty,o}_{X,\mathcal{D}} := \varprojlim_{I\cap\{\infty,o\}=\emptyset} \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ sur lequel opère à droite $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) = (D\otimes\mathbb{A}^{\infty,o})^*$ (l'action est définie via les opérateurs de Hecke).

3.2.2. L'analogue du théorème de Čerednik-Drinfeld. — Considérons maintenant l'algèbre à division $\overline{D}$ déduite de D en échangeant les invariants en les places o et ∞. Nous notons $\overline{D}^*$ le groupe multiplicatif de l'algèbre $\overline{D}$; c'est un groupe réductif sur F tel que $\overline{D}^*(R) = \left(\overline{D}\otimes R\right)^*$ pour toute F-algèbre R. En particulier, $\overline{D}^*(F_o) \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)$ et $\overline{D}^*(F_\infty)$ est le corps gauche d'invariant $1/d$. En fait, l'algèbre $\overline{D}$ intervient naturellement dans la situation : c'est l'algèbre des endomorphismes de la «fibre générique» d'un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique («spécial») défini sur une clôture algébrique $\overline{\kappa}(o)$ du corps résiduel $\kappa(o)$. Nous fixons par la suite un isomorphisme de groupes $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ (obtenu à partir d'un isomorphisme entre les algèbres $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$ et $\overline{D}(\mathbb{A}^{\infty,o})$ qui est compatible avec l'action de $D(\mathbb{A}^{\infty,o})$ et la description précédente de $\overline{D}$; voir I 2.3.1).

Pour $I \subset X$ un sous-schéma fini fermé non vide tel que $I\cap\{\infty,o\} = \emptyset$ et $\mathfrak{I}\subset\mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux correspondant, on définit le sous-groupe de congruences :

$$K_I^{\infty,o} = \operatorname{Ker}\left[(\mathcal{D}^{\infty,o})^* \longrightarrow (\mathfrak{I}^{\infty,o}\mathcal{D}^{\infty,o}\backslash\mathcal{D}^{\infty,o})^*\right],$$

où l'on a noté $\mathcal{D}^{\infty,o} = \prod_{x\neq\infty,o}\mathcal{D}_x \subset D(\mathbb{A}^{\infty,o})$. C'est est un sous-groupe ouvert compact de $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$. En particulier, via l'identification $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) = D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$, on peut considérer $K_I^{\infty,o}$ comme un sous-groupe (ouvert compact) de $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$. Pour finir, on introduit l'ensemble suivant de doubles classes, noté Z_I :

$$Z_I = K_I^{\infty,o}\backslash\overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)/\overline{D}^*(F)$$

(où $\overline{D}^*(F)$ agit à droite sur $\overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)$ et $K_I^{\infty,o}$ à gauche). Cet ensemble est muni d'une action à gauche évidente du groupe $\overline{D}^*(F_o) = \mathrm{GL}_d(F_o)$, et le quotient par cette action est fini.

Pour $I \hookrightarrow J$ deux sous-schémas fermés finis emboîtés de $X\setminus\{\infty,o\}$, l'inclusion $K_J^{\infty,o}\subset K_I^{\infty,o}$ induit un morphisme $Z_J \twoheadrightarrow Z_I$. Les ensembles Z_I constituent donc pour I de plus en plus grand un système projectif où opère le groupe $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Čerednik-Drinfeld, ou plutôt son analogue :

***Théorème 3.2.2* (Hausberger).** — *Soit $(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an}$ l'espace rigide-analytique sur F_o sous-jacent à $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$. Il existe un isomorphisme de F_o-espaces analytiques :*

$$(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an} \simeq \mathrm{GL}_d\left(F_o\right) \backslash \left[\left(\Omega^d \hat{\otimes}_{F_o} \widehat{F}_o^{nr}\right) \times Z_I\right].$$

En fait, il n'est pas nécessaire de compléter ; la formule ci-dessus reste vraie en remplaçant $\hat{\otimes}_{F_o} \widehat{F}_o^{nr}$ par $\otimes_{F_o} F_o^{nr}$ (la complétion est tuée dans le quotient).

Remarque 3.2.3. — 1. L'espace analytique $(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an}$ sur F_o peut être vu comme la fibre générique au sens de Raynaud [**Ra1**] du complété formel $\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I}$ du $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_o$-schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ le long de sa fibre spéciale. L'uniformisation rigide-analytique du théorème 3.2.2 provient alors d'un isomorphisme de $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_o$-schémas formels :

$$\widehat{\mathcal{E}\ell\ell}_{X,\mathcal{D},I} \simeq \mathrm{GL}_d\left(F_o\right) \backslash \left[\left(\widehat{\Omega}^d \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o} \widehat{\mathcal{O}}_o^{nr}\right) \times Z_I\right].$$

2. L'action naturelle du groupe $D^*\left(\mathbb{A}^{\infty,o}\right)$ sur le système projectif des $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ est une action à droite, tandis que celle du groupe $\overline{D}^*\left(\mathbb{A}^{\infty,o}\right)$ sur le système des Z_I est une action à gauche. Pour pouvoir les comparer, il faut donc changer le sens d'une de ces actions : on le fait en composant avec l'inversion $g \mapsto g^{-1}$.

La raison profonde de cette uniformisation en la place o est la suivante : l'espace de Drinfeld Ω^d est un espace de modules pour des groupes formels d'un certain type (les $\mathcal{D}_o$-modules formels spéciaux). L'uniformisation provient alors de ce que les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques «spéciaux» sur $\overline{\kappa}(o)$ (voir I 1.3 pour la définition de la condition «spéciale») sont tous isogènes et portent naturellement des modules formels qui sont de ce type.

Rajoutons maintenant une structure de niveau en la place o (ce qui permet de définir une action du groupe D_o^*). Bien que nous ne disposions plus d'un modèle formel du F_o-espace analytique $(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an}$, puisque le schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ n'existe qu'en fibre générique, nous pouvons écrire une uniformisation rigide-analytique, cette fois en terme des revêtements Σ_n^d de Drinfeld :

Théorème 3.2.4. — *Soit I un sous-schéma fermé fini non vide de $X-\{\infty\}$. Il existe un isomorphisme de F_o-espaces analytiques :*

$$(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an} \simeq \mathrm{GL}_d\left(F_o\right) \backslash \left[\Sigma_n^d \times Z_{I^o}\right],$$

où n est la multiplicité de o dans I.

Ce théorème est essentiellement une conséquence formelle du précédent : l'isomorphisme du théorème de Čerednik-Drinfeld se relève en un isomorphisme entre les groupes formels universels provenant des descriptions modulaires des espaces $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ et Ω^d ; on regarde alors les points de π_o^n-torsion.

Remarque 3.2.5. — Dans la formule du théorème 3.2.4, l'espace analytique Σ_n^d est regardé au-dessus de F_o par restriction des scalaires. Pour notre application, il est préférable de restreindre les scalaires à la Weil (voir paragraphe 3.1.2), ce qui ne change en rien la formule du théorème :

$$(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I})^{an} \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)\backslash \left[\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right) \times Z_{I^o}\right],$$

puisque la différence entre Res et Res′ est tuée dans le quotient. Par ailleurs, ce quotient n'est rien d'autre, au-dessus de F_o^{nr} (il y a des twist galoisiens au-dessus de F_o), qu'une union finie de quotients $\Gamma\backslash\Sigma_n^d$, pour des groupes de Schottky $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_d(F_o)$ (si $n = 0$, ce sont des quotients de Mumford).

Terminons par mentionner les actions de groupes : le groupe $D^*(\mathbb{A}^\infty)$ (resp. $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \times D^*(F_o)$) agit sur le système projectif des $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ (resp. des quotients analytiques écrits plus haut). Les isomorphismes du théorème de Čerednik-Drinfeld sont compatibles, lorsque I varie (i.e. n et I^o varient), avec les applications de transition et sont $D^*(\mathbb{A}^\infty)$-équivariants, via l'isomorphisme $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ fixé (on a changé également le sens de l'action de $D^*(F_o)$ sur les quotients analytiques, via $g \mapsto g^{-1}$).

3.2.3. Cohomologie de l'espace de modules $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D}}$. — Nous poursuivons avec les notations du paragraphe précédent et rappelons ici les résultats fondamentaux établis par Laumon, Rapoport et Stuhler dans [**L-R-S**]. Pour alléger les écritures, nous noterons simplement $\mathcal{E}\ell\ell_I$ les schémas $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$, et $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F} = \mathcal{E}\ell\ell_I \times_X \operatorname{Spec} F$.

Les variétés $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F}$ sont projectives et lisses de dimension $d-1$ sur F. Pour $I' \supset I$, la restriction de la structure de niveau définit une projection (finie étale) de $\mathcal{E}\ell\ell_{I',F}$ sur $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F}$. On note $\mathcal{E}\ell\ell_F$ la limite projective des $\mathcal{E}ll_{I,F}$. L'action à droite de $D^*(\mathbb{A}^\infty)$ sur $\mathcal{E}\ell\ell_F$ se décrit via les correspondances de Hecke : rappelons que K_I^∞ désigne le sous-groupe de congruences

$$K_I^\infty = \mathrm{Ker}\left[(\mathcal{D}^\infty)^* \longrightarrow (\mathfrak{I}^\infty\mathcal{D}^\infty\backslash\mathcal{D}^\infty)^*\right],$$

pour $I \subset X \setminus \{\infty\}$ un sous-schéma fini fermé non vide (et $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux correspondant) ; un élément $g \in D^*(\mathbb{A}^\infty)$ (ou plutôt sa double classe modulo K_I^∞) induit la correspondance :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{E}\ell\ell_F/\left(K_I^\infty \cap g^{-1}K_I^\infty g\right) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathcal{E}\ell\ell_F/K_I^\infty \arrow[dr] & & \mathcal{E}\ell\ell_F/K_I^\infty \arrow[ll, dashed] \arrow[dl] \\
& \operatorname{Spec} F, &
\end{tikzcd}$$

avec α le morphisme qui provient de l'inclusion $K_I^\infty \cap g^{-1}K_I^\infty g \subset K_I^\infty$, tandis que β provient de l'action de g^{-1} sur $\mathcal{E}\ell\ell_F$ et de l'injection $u \mapsto gug^{-1}$ de $K_I^\infty \cap g^{-1}K_I^\infty g$ dans K_I^∞.

Fixons un nombre premier $\ell \neq p$; on s'intéresse aux espaces de cohomologie ℓ-adique

$$H_I^n = \mathrm{H}^n\left(\mathcal{E}\ell\ell_{I,F} \otimes_F \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right) \qquad (0 \leq n \leq 2d-2).$$

Ce sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une $\mathbb{Q}_\ell$-structure et d'une action (continue) du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Par ailleurs, l'action à droite de

$D^*(\mathbb{A}^\infty)$ sur $\mathcal{E}\ell\ell_F$ induit une action à gauche (définie sur $\mathbb{Q}_\ell$ et commutant à celle de Galois) sur la limite inductive $H^n = \varinjlim_{I \not\ni \infty} H^n_I$. Le groupe produit $D^*(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ opère donc sur H^n.

Dans ce qui suit, seul nous intéresse l'action du produit $D^*(\mathbb{A}^\infty) \times W_{F_o}$, où $o \neq \infty$ est une place fixée de F ; on considérera plutôt les espaces de cohomologie

$$H^n_{o,I} = \mathrm{H}^n\left(\mathcal{E}\ell\ell_{I,F} \otimes_F \overline{F_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right),$$

ainsi que leur limite inductive H^n_o. Comme $(H^n_o)^{K^\infty_I} = H^n_{o,I}$ est de dimension finie, l'action de $D^*(\mathbb{A}^\infty)$ sur H^n_o est admissible.

Considérons les semi-simplifiés $(H^n_o)^{ss}$ des H^n_o. Ces représentations se décomposent en composantes isotypiques suivant les (classes d'équivalence de) représentations admissibles irréductibles Π^∞ de $D^*(\mathbb{A}^\infty)$:

$$(H^n_o)^{ss} = \bigoplus_{\Pi^\infty} \Pi^\infty \otimes V^n_{\Pi^\infty},$$

où les $V^n_{\Pi^\infty}$ sont des représentations ℓ-adiques de dimension finie de W_{F_o}. Le résultat central de **[L-R-S]** décrit ces décompositions (où l'on note St la représentation de Steinberg) :

Théorème 3.2.6. — *(cf.* **[L-R-S]** *théorème 4.12) Seules peuvent intervenir non trivialement, dans les décompositions isotypiques des $(H^n_o)^{ss}$, des représentations telles que, ou bien $\Pi^\infty \otimes 1$, ou bien $\Pi^\infty \otimes \mathrm{St}_\infty$, soit automorphe. Dans le premier cas, Π^∞ se factorise sous la forme $\chi^\infty \circ \mathrm{Nr}$, où χ^∞ est un caractère de $(\mathbb{A}^\infty)^*$ tel que $\chi^\infty \otimes 1$ soit un caractère de Hecke de $\mathbb{A}^*$. Dans le second cas, les $V^n_{\Pi^\infty}$ son nuls pour $n \neq d-1$, tandis que $V^{d-1}_{\Pi^\infty}$ est une représentation semi-simple de dimension $m(\Pi)d$ de W_{F_o} ($m(\Pi)$ désigne la multiplicité de Π ; voir loc. cit. pour les propriétés caractérisant $V^{d-1}_{\Pi^\infty}$).*

Expliquons comment Laumon, Rapoport et Stuhler construisent l'application $\pi \mapsto \sigma_d(\pi)$ de la correspondance de Langlands locale (cf. paragraphe 3.1.1.2), en faisant usage du théorème précédent. Partant du corps local K, on choisit un corps global F et une place o de F tel que le complété F_o soit isomorphe à K (nous fixons un tel isomorphisme). Choisissons ensuite deux autres places ∞ et o' (distinctes et distinctes de o). Fixant l'entier $d \geq 1$, nous notons D l'algèbre à division de centre F, de dimension d^2 et d'invariants :

$$\mathrm{inv}_x(D) = \begin{cases} 1/d & \text{si } x = o \\ -1/d & \text{si } x = o' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme suivant, démontré dans **[L-R-S]** au moyen d'une formule des traces de Selberg simplifiée, permet de voir toute $\pi \in \mathcal{A}^0_n(K)$ comme composante en o d'une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$:

Lemme 3.2.7. — *(cf.* **[L-R-S]** *15.10) Donnons-nous $\pi \in \mathcal{A}^0_n(K)$ et une place $x \notin \{o, o', \infty\}$ de F. Il existe alors une représentation automorphe parabolique $\widetilde{\Pi} = \otimes \widetilde{\Pi}_v$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ telle que $\widetilde{\Pi}_\infty \simeq \mathrm{St}_\infty$, $\widetilde{\Pi}_o \simeq \pi$, et que $\widetilde{\Pi}_{o'}$ et Π_x soient cuspidales.*

Puis on transfert $\widetilde{\Pi}$ au groupe $D^*(\mathbb{A}^\infty)$; c'est un cas particulier de la correspondance de Jacquet-Langlands généralisée, qu'on aimerait bien faire marcher en général :

Lemme 3.2.8. — *(cf.* **[L-R-S]** *15.11) Soit $\widetilde{\Pi}$ comme dans le lemme précédent. Il existe alors une unique représentation automorphe Π de $D^*(\mathbb{A})$ telle que, pour tout $v \notin \{o, o'\}$, on ait $\Pi_v \simeq \widetilde{\Pi}_v$. On a $\Pi_v \simeq \mathrm{JL}\left(\widetilde{\Pi}_v\right)$, pour $v = o$ et o'. De plus, la multiplicité $m(\Pi)$ vaut 1.*

Remarque. — *Ces deux lemmes sont (respectivement) des cas particuliers des deux assertions du théorème suivant ; la démonstration m'en a été indiquée par G. Henniart et I. Badulescu :*

Théorème 3.2.9. — *Soit S un ensemble fini de places de F.*

1. *(cf.* **[Ba1]** *théorème 1.11.8) Supposons que pour tout $v \in S$ on se donne une représentation essentiellement de carré intégrable π_v de $\mathrm{GL}_d(F_v)$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale $\widetilde{\Pi}$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ telle que, pour tout $v \in S$, on ait $\widetilde{\Pi}_v \simeq \pi_v$.*
2. *(cf.* **[He1]** *Appendix A.4) Supposons que l'algèbre à division D soit scindée en dehors de S. Donnons-nous une représentation automorphe cuspidale $\widetilde{\Pi}$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ telle que $\widetilde{\Pi}_v$ soit essentiellement de carré intégrable en toute place $v \in S$ et qu'en une place $v \notin S$ au moins $\widetilde{\Pi}_v$ soit cuspidale. Alors il existe une unique représentation automorphe Π de $D^*(\mathbb{A})$ telle que $\Pi^S \simeq \widetilde{\Pi}^S$. Elle vérifie : $\Pi_v \simeq \widetilde{\Pi}_v$ si D est déployée en v et $\Pi_v \simeq \mathrm{JL}\left(\widetilde{\Pi}_v\right)$ si D_v est ramifiée. De plus, la multiplicité $m(\Pi)$ vaut 1.*

Démonstration. — (du point 2.) En appliquant la formule des traces simples de Deligne-Kazhdan comme dans **[D-K-V]**, on arrive à l'égalité des caractères :

$$\Theta_{\widetilde{\Pi}_S} = \sum_{\Pi \in \mathcal{A}(\widetilde{\Pi})} m(\Pi)\Theta_{\Pi_S},$$

où $\mathcal{A}(\widetilde{\Pi})$ désigne l'ensemble des représentations automorphes Π de $D^*(\mathbb{A})$ telles que $\Pi^S \simeq \widetilde{\Pi}^S$. Notons S' l'ensemble des places $v \in S$ telles que D_v est ramifiée ; pour $v \in S'$, la correspondance de Jacquet-Langlands locale donne l'égalité $\Theta_{\Pi_v} = (-1)^{d-1}\Theta_{\mathrm{JL}(\widetilde{\Pi}_v)}$. Comme D est ramifiée en un nombre pair de places, si d est pair (puisque la somme des invariants est 0 dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$), on obtient l'égalité suivante :

$$\prod_{v \in S'} \Theta_{\widetilde{\Pi}_v} \prod_{v \in S \setminus S'} \Theta_{\mathrm{JL}(\widetilde{\Pi}_v)} - \sum_{\Pi \in \mathcal{A}(\widetilde{\Pi})} m(\Pi)\Theta_{\Pi_S} = 0,$$

où désormais toutes les représentations qui interviennent sont des représentations de $D^*(\mathbb{A}_S)$. Le résultat découle alors de l'indépendance des caractères sur $D^*(\mathbb{A}_S)$. $\square$

On applique maintenant le théorème 3.2.6 : il correspond à Π une représentation $V^d_{\Pi^\infty}$ de dimension d du groupe de Weil W_{F_o}. Notons $\Sigma(\Pi)$ la représentation obtenue en tordant $V^d_{\Pi^\infty}$ par $|\ |^{\frac{d-1}{2}}$ (cette opération rend le déterminant d'ordre fini), et $\Sigma(\pi)$

l'ensemble des représentations $\Sigma(\Pi)$, pour tous les choix possibles de $\widetilde{\Pi}$. Laumon, Rapoport et Stuhler démontrent que, pour tout $\pi \in \mathcal{A}_d^0(K)$, l'ensemble $\Sigma(\pi)$ est réduit à un seul élément $\sigma(\pi)$, que l'application $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ est injective et qu'elle satisfait à toutes les propriétés requises. Ils concluent par la conjecture de Langlands locale numérique, prouvée par Henniart.

Pour notre application, nous retiendrons :

Proposition 3.2.10. — *Soit Π la représentation automorphe de $D^*(\mathbb{A})$ obtenue à partir de π en appliquant les lemmes 3.2.7 et 3.2.8. Alors la composante $\Pi^{\infty,o}$-isotypique de $(H_o^n)^{ss}$ est nulle sauf pour $n = d-1$. Dans ce dernier cas, on a :*

$$\left(\left(H_o^{d-1}\right)^{ss}[\Pi^{\infty,o}]\right)_o = \mathrm{JL}(\pi) \otimes \left(\sigma_d(\pi) \otimes |\,|^{\frac{1-d}{2}}\right).$$

3.3. Preuve de la conjecture de Drinfeld-Carayol

3.3.1. Construction de la suite spectrale de Hochschild-Serre. — On reprend les notations du paragraphe 3.2. Fixons un nombre premier ℓ distinct de la caractéristique p du corps résiduel de F_o, ainsi qu'une clôture algébrique $\overline{F}_o$ de F_o. L'objet de cette section est de démontrer la :

Proposition 3.3.1. — *(i) Pour tout entier $0 \leq j \leq 2(d-1)$, le groupe de cohomologie à support compact*
$\mathrm{H}_c^j\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right)(d-1)$ est une $\mathbb{Q}_\ell$-représentation admissible du groupe $\mathrm{GL}_d(F_o)$ (où $(d-1)$ indique comme toujours un twist de Tate).

(ii) La cohomologie ℓ-adique de l'espace analytique $\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d$ et la cohomologie ℓ-adique du schéma $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ sont reliées par la suite spectrale :

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_d(F_o)-\text{mod. lisse}}\left(\mathrm{H}_c^{2(d-1)-j}\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right)(d-1), \mathcal{A}_{I^o}^\infty\right) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}\left(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \otimes \overline{F}_o, \mathbb{Q}_\ell\right),$$

où $\mathcal{A}_{I^o}^\infty$ est l'espace des formes automorphes sur Z_{I^o} triviales à l'infini. De plus, les suites spectrales obtenues lorsque I varie (donc également la multiplicité n de o dans I) sont compatibles avec les applications de transition ; les systèmes projectifs obtenus sont équivariants pour l'action de $D^*(\mathbb{A}^\infty)$ et celle du groupe de Weil W_{F_o}.

En passant à la limite projective sur I^o, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.2. — *Il existe une suite spectrale $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$-équivariante :*

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_d(F_o)-\text{mod. lisse}}\left(\mathrm{H}_c^{2(d-1)-j}\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right)(d-1), \mathcal{A}_{\overline{D}}^\infty\right) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}\left(\mathcal{E}\ell\ell_n^\infty \otimes \overline{F}_o, \mathbb{Q}_\ell\right),$$

où $\mathcal{E}\ell\ell_n^\infty := \varprojlim_{I \not\ni \infty,\ \mathrm{mult}_o(I)=n} \mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ et où $\mathcal{A}_{\overline{D}}^\infty$ désigne l'espace des formes automorphes sur $\overline{D}^*(\mathbb{A})$ triviales à l'infini. De plus, les suites spectrales obtenues lorsque n varie *sont compatibles avec les applications de transition ; les systèmes projectifs obtenus sont* $D^*(\mathbb{A}^\infty)\times W_{F_o}$*-équivariants.*

Nous procédons de manière similaire à **[H1]** §2.

3.3.1.1. Définition d'un recouvrement admissible de $\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d$ *par des ouverts distingués.* — Soit Δ l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(F_o)$ et $\Delta_{\mathbb{R}}$ sa réalisation géométrique (qui s'identifie aux classes de proportionnalité de normes sur le F_o-espace vectoriel F_o^d). Il existe une application $\mathrm{GL}_d(F_o)$-équivariante $\lambda : \Omega^d \longrightarrow \Delta_{\mathbb{R}}$, dont l'image est $\Delta_{\mathbb{Q}}$ et qui permet de définir la structure rigide-analytique sur le demi-plan généralisé de Drinfeld Ω^d (voir **[Dr4]**, **[Bo-Ca]** ou **[De-Hu]**). Nous utilisons cette application afin de définir un recouvrement admissible de Ω^d ainsi que des revêtements Σ_n^d. Fixons $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$; pour tout sommet $s\in\Delta$, on considère le ε-voisinage $V(s,\varepsilon)$ de l'étoile de s dans la première subdivision barycentrique. Les ensembles $\lambda^{-1}(V(s,\varepsilon))$ constituent un recouvrement de Ω^d par des ouverts distingués, au sens de Berkovich (ils sont de la forme $V\setminus U$, avec $U\subset V$ des polydisques, cf. loc. cit.). De même, les revêtements Σ_n^d de $\Omega^d\hat{\otimes}\widehat{F}_o^{nr}$ sont recouverts par les ouverts analytiques distingués $U_n(s)=\lambda_n^{-1}(V(s,\varepsilon))$, lorsque s décrit l'ensemble des sommets de l'immeuble Δ et où λ_n désigne l'application composée $\Sigma_n^d\to\Omega^d\hat{\otimes}\widehat{F}_o^{nr}\to\Omega^d\to\Delta_{\mathbb{R}}$.

Notons Δ_i l'ensemble des simplexes de Δ de dimension i. Pour $\delta=(s_1,\dots,s_i)$ dans Δ_i, on définit $B(\delta,\varepsilon)=\bigcap_{k=1}^i V(s_k,\varepsilon)\subset\Delta_{\mathbb{R}}$ et $U_n(\delta)=\bigcap_{k=1}^i U_n(s_k)=\lambda_n^{-1}(V(\delta,\varepsilon))$. Finalement, soit $\varphi\in\mathrm{Gal}(F_o^{nr}/F_o)$ le Frobenius géométrique ; pour tout entier $r\in\mathbb{Z}$, on considère l'ouvert distingué $U_n(\delta,r)=U_n(\delta)\otimes_{\widehat{F}_o^{nr},\varphi^r}\widehat{F}_o^{nr}$ de $\Sigma_n^d\otimes_{\widehat{F}_o^{nr},\varphi^r}\widehat{F}_o^{nr}$. Alors l'espace rigide-analytique $\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d=\coprod_{r\in\mathbb{Z}}\Sigma_n^d\otimes_{\widehat{F}_o^{nr},\varphi^r}\widehat{F}_o^{nr}$ est recouvert par $\{U_n(\delta,r)\}_{(\delta,r)\in\Delta_0\times\mathbb{Z}}$. C'est un recouvrement admissible localement fini, de nerf $\Delta\times\mathbb{Z}=\bigcup_i(\Delta_i\times\mathbb{Z})$.

D'après le lemme A.1.3 de Berkovich, on a :

Fait 1. — *Il existe une suite spectrale*

$$\mathrm{E}_1^{i,j}=\bigoplus_{\delta\in\Delta_{-i}}\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathrm{H}}_c^j\left(U_n(\delta,r)_{\overline{F}_o},\mathbb{Q}_\ell\right)\Longrightarrow\mathrm{H}_c^{i+j}\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o},\mathbb{Q}_\ell\right).$$

(rappel : nous notons $X_{\overline{F}_o}=X\hat{\otimes}_{\widehat{F}_o^{nr}}\widehat{\overline{F}}_o$, pour tout $\widehat{F}_o^{nr}$-espace analytique X).

3.3.1.2. calcul de $\mathrm{H}_c^{\cdot}\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o},\mathbb{Q}_\ell\right)$ *à l'aide d'un complexe* $\mathcal{P}^{\cdot}$ *de* $\mathbb{Q}_\ell-\mathrm{GL}_d(F_o)$*-modules projectifs lisses.* — Le groupe $\mathrm{GL}_d(F_o)$ permute les éléments du recouvrement $\{U_n(\delta,r)\}_{(\delta,r)\in\Delta_0\times\mathbb{Z}}$: rappelons que l'action sur $\mathbb{Z}$ est donnée par $(g,r)\mapsto r+\mathrm{val}\det g$. Pour δ un simplexe dans Δ, on note $S(\delta)\subset\mathrm{GL}_d(F_o)$ le sous-groupe ouvert compact (modulo le centre) fixant δ. Le stabilisateur de l'ouvert $U_n(\delta,r)$, ou encore celui de (δ,r), est alors $S'(\delta)=S(\delta)\cap\mathrm{GL}'_d(F_o)$, où $\mathrm{GL}'_d(F_o)$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ constitué des éléments dont le déterminant est une unité de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_o$. Ce stabilisateur $S'(\delta)$ est un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_d(F_o)$.

Le groupe $\mathrm{GL}_d(F_o)$ contient un pro-p-sous-groupe ouvert (considérer le système fondamental de voisinages de 1 formé des compacts $K_i=1+\pi_o^i\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_o)$), où p désigne la caractéristique résiduelle de F_o, qui est distincte du nombre premier ℓ que l'on s'est donné. On peut donc appliquer la proposition A.4.1 de l'appendice à l'ouvert distingué

$U_n(\delta, r)$ du $\mathrm{GL}_d(F_o)$-espace $\mathrm{Res}' \Sigma_n^d$: l'action de $S'(\delta)$ sur les groupes $\widetilde{\mathrm{H}}_c^j (U_n(\delta, r), \mathbb{Q}_\ell)$ est lisse ; on sait construire un complexe $C_n^\cdot(\delta, r)$ de $\mathbb{Q}_\ell - S'(\delta)$-modules lisses calculant la cohomologie :

$$h^j\left(C_n^\cdot(\delta, r)\right) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}_c^j\left(U_n(\delta, r)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right) \quad \forall j \geq 0$$

(isomorphismes $S'(\delta)$-équivariants). La construction de ces complexes est fonctorielle : pour $\delta \subset \delta'$ deux simplexes emboîtés et $r \in \mathbb{Z}$, on a des applications canoniques $C_n^\cdot(\delta', r) \to C_n^\cdot(\delta, r)$.

Posons $U_n(i) = \coprod_{(\delta,r)\in\Delta-i\times\mathbb{Z}} U_n(\delta, r)$ et $Z^{i,j} = \bigoplus_{(\delta,r)\in\Delta-i\times\mathbb{Z}} C_n^j(\delta, r)$ (notons que les complexes $C_n^\cdot(\delta, r)$ calculant la cohomologie avec support sont covariants pour l'inclusion, d'où le signe - dans la définition de $Z^{i,j}$), de sorte que

$$h^j\left(Z^{-i,\cdot}\right) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}_c^j\left(U_n(i)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right) \quad \forall j \geq 0$$

(isomorphismes $\mathrm{GL}_d(F_o)$-équivariants). Alors le complexe total $\mathcal{P}^\cdot = \mathrm{Tot}^\cdot(Z^{\cdot,\cdot})$ associé au double complexe $Z^{\cdot,\cdot}$ calcule la cohomologie de l'espace entier $\mathrm{Res}' \Sigma_n^d$:

Fait 2. — *On a des isomorphismes* $\mathrm{GL}_d(F_o)$-*équivariants :*

$$h^j(\mathcal{P}^\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_c^j\left(\left(\mathrm{Res}' \Sigma_n^d\right)_{\overline{F_o}}, \mathbb{Q}_\ell\right) \quad \forall j \geq 0.$$

En effet, la situation est la suivante : les groupes $\widetilde{\mathrm{H}}_c^j\left(U_n(\delta, r)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right)$ forment un système de coefficients (au sens de **[G-M]**) contravariant sur le complexe simplicial $\Delta \times \mathbb{Z}$; le complexe résultant est le complexe de Čech $\check{C}_c^\cdot(\mathcal{U}, \mathbb{Q}_\ell)$, où $\mathcal{U}$ désigne le recouvrement de Čech $\{U_n(\delta, r)\}$. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition A.4.1 : utilisant les résolutions $R\Gamma_c$-acycliques $0 \to \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z} \longrightarrow T_m^\cdot$, $m \geq 0$, le double complexe défini par

$$\check{C}_c^i\left(\mathcal{U}, T^j\right) := \varprojlim_m \Gamma_c\left(U_n(i)_{\overline{F}_o}, T_m^j\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

vérifie l'égalité suivante dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}_\ell - \mathrm{GL}_d(F_o)$-modules :

$$\mathrm{Tot}^\cdot\left(\check{C}_c^\cdot(\mathcal{U}, T^\cdot)\right) = R\Gamma_c\left(\left(\mathrm{Res}' \Sigma_n^d\right)_{\overline{F_o}}, \mathbb{Q}_\ell\right)$$

(c'est une réécriture $\mathrm{GL}_d(F_o)$-équivariante du fait 1, dans le language de la catégorie dérivée). Le fait 2 découle alors de la remarque A.4.5 : il existe des quasi-isomorphismes équivariants canoniques (lorsque i varie)

$$Z^{-i,\cdot} \longrightarrow \check{C}_c^i(\mathcal{U}, T^\cdot)\,. \tag{13}$$

Poursuivons : soit O_i l'ensemble des orbites de $\Delta_i \times \mathbb{Z}$ sous l'action de $\mathrm{GL}_d(F_o)$. C'est un ensemble fini : on a $(\Delta_i \times \mathbb{Z})/\mathrm{GL}_d(F_o) \simeq \coprod_{\text{finie}} \mathbb{Z}/\operatorname{val}\det(S(\delta_k))$, où l'on a choisi des représentants δ_k des différentes classes de $\Delta_i/\mathrm{GL}_d(F_o)$; comme $S(\delta_k)$ contient le centre de $\mathrm{GL}_d(F_o)$, dont l'image par $\operatorname{val}\det$ est $d\mathbb{Z}$, on voit que le quotient est fini. Formellement, on a :

$$Z^{i,j} = \bigoplus_{(\delta,r)\in O_{-i}} \text{c-Ind}_{S'(\delta)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)} C_n^j(\delta, r),$$

où l'on note c-Ind l'induite compacte (cf. **[B-Z]**). Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 3.3.3. — *Soit V un k-espace vectoriel muni d'une action d'un groupe G (localement compact, totalement discontinu) et H un sous-groupe ouvert de G. On suppose que V se décompose sous la forme*

$$V = \bigoplus_{\overline{g} \in G/H} V_{\overline{g}}$$

de telle sorte que $g'(V_{\overline{g}}) \subset V_{\overline{g'g}} \quad \forall (g', g) \in G^2$ et que $V_{\overline{g}}$ soit une représentation lisse de H. Alors V s'identifie à $\text{c-Ind}_H^G V_{\overline{1}}$ comme représentation de G.

Démonstration. — A un élément $(v_{\overline{g}})_{\overline{g} \in G/H}$ on associe la fonction

$$\phi : g \in G \longmapsto g \cdot v_{\overline{g^{-1}}}.$$

Cela définit une un morphisme G-équivariant entre V et l'espace des fonctions $\phi : G \to V_{\overline{1}}$ qui vérifient :

i) $\phi(hg) = h \cdot \phi(g) \quad \forall (g, h) \in G \times H$;

ii) ϕ est à support dans un nombre fini de classes à gauche $H \backslash G$;

iii) ϕ est invariante à droite par l'action d'un sous-groupe ouvert de G.

C'est exactement de cette façon qu'est définie l'induite compacte. □

Comme $C_n^j(\delta, r)$ est une représentation lisse du groupe compact $S'(\delta)$, c'est une représentation finie (au sens de **[B-Z]** 2.40), donc projective dans la catégorie des représentations lisses de $S'(\delta)$ (voir lemme 3.3.7 plus loin). Puisque l'induite compacte conserve la lissité et la projectivité (cf. loc. cit. 2.29 : cela résulte de la réciprocité de Frobenius relativement à l'induite compacte), on voit que $\mathcal{P}^{\cdot}$ est un complexe de $\mathrm{GL}_d(F_o)$-modules projectifs lisses.

Afin de démontrer la première assertion de la proposition 3.3.1, il reste à voir que l'espace des invariants $\mathrm{H}_c^j\left(\left(\mathrm{Res}' \, \Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_l\right)^K$ sous l'action d'un sous-groupe compact ouvert K de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ est un $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel de dimension finie. Clairement, on peut supposer que K est un pro-p-groupe, de sorte que le foncteur $\mathrm{H}^0(K, \bullet)$ est exact sur les $\mathbb{Q}_l - G$-modules. On obtient donc en prenant les invariants sous K dans la suite spectrale figurant dans l'énoncé du fait 1 :

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{(\delta, r) \in (\Delta_{-i} \times \mathbb{Z})/K} \widetilde{\mathrm{H}}_c^j\left(U_n(\delta, r)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_l\right)^K \Longrightarrow \mathrm{H}_c^{i+j}\left(\left(\mathrm{Res}' \, \Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_l\right)^K.$$

Comme l'ensemble $(\Delta_{-i} \times \mathbb{Z})/K$ est fini, il suffit de montrer que les espaces vectoriels $\widetilde{\mathrm{H}}_c^j\left(U_n(\delta, r)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_l\right)^K$ sont de dimension finie. Ce résultat est dû à Berkovich, sachant que les $U_n(\delta, r)$ sont des ouverts distingués (lemme A.1.1).

3.3.1.3. application du théorème d'uniformisation. — Rappelons que l'on note Z_{I^o} l'ensemble des doubles classes

$$Z_{I^o} = K_I^{\infty, o} \backslash \overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty) / \overline{D}^*(F),$$

où $K_I^{\infty, o}$ est un sous-groupe de congruences (voir paragraphe 3.2.2). Le groupe $\mathrm{GL}_d(F_o)$ agit sur $\left(\mathrm{Res}' \, \Sigma_n^d\right) \times Z_{I^o}$ et d'après le théorème d'uniformisation rigide-analytique 3.2.4

et la remarque 3.2.5, on a un isomorphisme

$$\mathcal{E}\ell\ell_I^{an} \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)\backslash\left[\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)\times Z_{I^o}\right]. \tag{14}$$

Notons $[\delta, r, z]$ la classe de $(\delta, r, z) \in \Delta \times \mathbb{Z} \times Z_{I^o}$ sous $\mathrm{GL}_d(F_o)$ et $U_n[\delta, r, z] \subset \mathcal{E}\ell\ell_I^{an}$ l'image de $U_n(\delta, r) \times \{z\}$ par l'application

$$\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)\times Z_{I^o} \xrightarrow{p} \mathcal{E}\ell\ell_I^{an}$$

induite par l'isomorphisme (14).

Fait 3. — *Le groupe $\mathrm{GL}_d(F_o)$ agit librement sur $\Delta_i \times \mathbb{Z} \times Z_{I^o}$. De plus, pour $g \in \mathrm{GL}_d(F_o)$,*

$$(U_n(g\delta, gr)\times\{gz\}) \cap (U_n(\delta, r)\times\{z\}) \neq \emptyset \Longrightarrow g = 1.$$

Pour démontrer ce fait, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.4. — *Soit D une algèbre à division sur $F = \mathbb{F}_q(X)$ et $f \in \mathcal{O}_D^*$ vérifiant une relation de congruence non triviale. Alors f n'est pas de torsion.*

Démonstration. — Supposons $f^n = 1$ et montrons que $f = 1$. Écrivant $n = p^\alpha\beta$ ($\beta \neq 0$), il vient $f^n = \left(f^\beta\right)^{p^\alpha}$. On peut donc supposer que n est premier à p (injectivité du Frobenius dans $F(f)$). La relation de congruence, en une place v où $D_v = \mathrm{GL}_d\left(\mathbb{F}_{q'}((t))\right)$ pour un certain d et un certain $q' = q^e$, s'écrit $f = 1 + t^r M$, avec $r \geq 1$ et $M \in \mathrm{M}_d\left(\mathbb{F}_{q'}[[t]]\right)$. Alors :

$$f^\beta = 1 + \beta t^r M + (\text{termes de degré en } t \text{ supérieur à } r \text{ strictement}),$$

par la formule du binôme sur le corps commutatif $F(f)$. Ainsi $f^\beta = 1$ si et seulement si $M = 0$, donc si et seulement si $f = 1$. □

Démontrons maintenant le fait 3 : puisque l'action de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ sur $\mathbb{Z}$ est transitive, il vient :

$$\mathrm{GL}_d(F_o)\backslash\left(\Delta_i \times \mathbb{Z} \times Z_{I^o}\right) \simeq \mathrm{GL}'_d(F_o)\backslash\left(\Delta_i \times Z_{I^o}\right) \simeq \bigsqcup S'(\delta_j)\backslash Z_{I^o},$$

où l'on a choisi des représentants δ_j des différentes classes de Δ_i sous $\mathrm{GL}'_d(F_o)$. Il suffit donc de montrer qu'un sous-groupe compact ouvert H de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ (typiquement $S'(\delta_j)$) agit sans point fixe sur Z_{I^o} (ce qui sera vrai sous l'unique hypothèse que I^o est non vide).

Soit donc z un représentant d'une double classe de Z_{I^o} ; notant z' l'élément de $\overline{D}^*(\mathbb{A}^\infty)$ qui coincide avec z en toute place $v \neq o$ mais dont la o-composante est 1, le stabilisateur $\Gamma_{z'}$ de z' sous $\mathrm{GL}_d(F_o)$ est donné par :

$$\Gamma_{z'} = \overline{D}^*(F) \cap z'^{-1} K_I^{\infty,o} z',$$

où l'intersection est prise dans $\overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$ puis, vue comme sous-groupe de $\overline{D}^*(F)$, injectée dans $\overline{D}^*(F_o)$. Le stabilisateur de z est le conjugué $\Gamma_z = z_o \Gamma_{z'} z_o^{-1}$. Puisque H est compact et Γ_z discret, l'intersection $H \cap \Gamma_z$ est finie ; elle est en fait triviale, car Γ_z est sans torsion (cf. lemme précédent). Donc H agit librement sur Z_{I^o}, ce qui démontre la première assertion.

Montrons le second point : supposons $(U_n(g\delta, gr) \times \{gz\}) \cap (U_n(\delta, r) \times \{z\}) \neq \emptyset$; alors g laisse fixe r et z, donc appartient à $\Gamma_z \cap \mathrm{GL}'_d(F_o)$. De deux choses l'une : soit g laisse fixe un sommet de l'immeuble, auquel cas il appartient à un sous-groupe ouvert compact H et l'on conclut comme précédemment, soit il agit librement sur Δ_0. Dans ce dernier cas, le résultat découle du lemme suivant :

Lemme 3.3.5. —

$$g \text{ envoie un sommet } s \text{ sur un sommet voisin } \Longrightarrow \mathrm{val}(\det g) \not\equiv 0 \pmod{d}.$$

Démonstration. — Soit L un réseau qui représente la classe de s et $L' \subset L$ le représentant de $g.s$ tel que $L' \not\subset \pi L$. D'après la théorie des diviseurs élémentaires, il existe une $\mathcal{O}_o$-base $\epsilon = \{e_1, \ldots, e_d\}$ pour laquelle $L = \oplus \mathcal{O}_o\, e_i$ et $L' = \oplus \pi^{r_i} \mathcal{O}_o\, e_i$, $0 = r_1 \leq \ldots \leq r_d$. Puisque s et $g.s$ sont deux sommets voisins, il existe $0 < t < d$ tel que $r_1 = \cdots = r_t = 0$ et $r_{t+1} = \cdots = r_d = 1$. Soit $a \in K^*$ tel que $g(L) = aL'$; dans la base ϵ, la matrice de g s'écrit comme le produit dh de la matrice diagonale $d = \mathrm{diag}\,(\pi^{r_1}a, \ldots, \pi^{r_d}a)$ et d'une matrice $h \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_o)$. Par conséquent, $\mathrm{val}(\det g) \equiv -t \pmod{d}$, ce qui démontre l'assertion. $\square$

Les conséquences du fait 3 sont les suivantes : l'application $U_n(\delta', r') \times \{z'\} \to U_n[\delta, r, z]$ obtenue en restreignant p est un isomorphisme pour tout triplet $(\delta', r', z') \in [\delta, r, z]$ et l'ensemble $p^{-1}(U_n[\delta, r, z])$ est l'union disjointe d'une infinité de copies de $U_n[\delta, r, z]$ que $\mathrm{GL}_d(F_o)$ permute sans point fixe. Notant $U'_n(i) = \bigsqcup_{[\delta,r,z]\in O_i} U_n[\delta, r, z]$, où O_i désigne l'ensemble des orbites de $\Delta_i \times \mathbb{Z} \times Z_{I^o}$ sous $\mathrm{GL}_d(F_o)$, et $\widetilde{U}_n(i) = p^{-1}(U'_n(i)) = U_n(i) \times Z_{I^o}$, le revêtement

$$\widetilde{U}_n(i) \xrightarrow{p} U'_n(i) \simeq \widetilde{U}_n(i)/\,\mathrm{GL}_d(F_o)$$

est donc le revêtement trivial.

Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à ce revêtement de groupe $G = \mathrm{GL}_d(F_o)$: elle s'écrit comme une égalité dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels :

$$R_G\, R\Gamma\left(\widetilde{U}_n(i), \mathcal{F}\right) = R\Gamma\left(U'_n(i), p_*\mathcal{F}\right),$$

pour tout $\mathbb{Q}_\ell$-module étale $\mathcal{F}$ sur $\widetilde{U}_n(i)$, et où R_G désigne le foncteur dérivé de $M \mapsto M^G$. Comme il n'y a pas de G-cohomologie, cette égalité se réécrit (prenant $\mathcal{F} = \mathbb{Q}_\ell$ et étendant les scalaires à $\overline{F}_o$) :

$$R\Gamma\left(U'_n(i)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right) = R\Gamma\left(\widetilde{U}_n(i)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right)^{\mathrm{GL}_d(F_o)}. \tag{15}$$

3.3.1.4. calcul de $\mathrm{H}^{\cdot}\left(\mathcal{E}\ell\ell_I \otimes \overline{F}_o, \mathbb{Q}_\ell\right)$. — On dispose du recouvrement de Čech fini $\mathcal{U}' = \{U_n[\delta, r, z]\}$ de l'espace analytique $\mathcal{E}\ell\ell_I^{an}$. Considérons à nouveau la famille de complexes $T^{\cdot} = \{T^{\cdot}_m\}$ construite au cours de la démonstration de la proposition A.4.1 de l'appendice. Notant pr la projection $\mathrm{Res}'\,\Sigma^d_n \times Z_{I^o} \longrightarrow \mathrm{Res}'\,\Sigma^d_n$, puis définissant $T'^j_m = p_* pr^*(T^j_m)$, on vérifie facilement que $T'^{\cdot}_m$ est pour tout $m \geq 0$ une résolution $R\Gamma$-acyclique du faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{E}\ell\ell_I$ (car le revêtement p est trivial au-dessus de chaque $U_n[\delta, r, z]$). De plus, $\{T'^{\cdot}_m\}$ est pour tout $j \geq 0$ un faisceau ℓ-adique lisse (au sens du paragraphe A.1). On forme alors le double complexe de Čech $\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}', T'^{\cdot})$ défini par

$$\check{C}^i\left(\mathcal{U}', T'^j\right) := \varprojlim_m \Gamma\left(U'_n(i)_{\overline{F}_o}, T'^j_m\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \ ;$$

le lemme A.2.2 peut s'écrire comme une égalité dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Tot}^{\cdot}\left(\check{C}^{\cdot}\left(\mathcal{U}', T'^{\cdot}\right)\right) = R\Gamma\left(\mathcal{E}\ell\ell_I \otimes \overline{F_o}, \mathbb{Q}_\ell\right).$$

Désignons par $\mathcal{A}^\infty_{I^o}$ l'espace des formes automorphes sur Z_{I^o} triviales à l'infini. Nous allons voir qu'il existe des quasi-isomorphismes canoniques (lorsque i varie)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(Z^{-i,2(d-1)-\cdot}(d-1), \mathcal{A}^\infty_{I^o}\right) \longrightarrow \check{C}^i\left(\mathcal{U}', T'^{\cdot}\right). \tag{16}$$

Notant $\mathcal{P}^{\cdot}(\mathcal{E}\ell\ell_I)$ le complexe total associé au double complexe du membre de gauche, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}^{\cdot}(\mathcal{E}\ell\ell_I) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(\mathcal{P}^{2(d-1)-\cdot}(d-1), \mathcal{A}^\infty_{I^o}\right),$$

on aura ainsi démontré :

Fait 4. — *On a des isomorphismes* $\mathrm{GL}_d(F_o)$*-équivariants :*

$$h^j\left(\mathcal{P}^{\cdot}(\mathcal{E}\ell\ell_I)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^j\left(\mathcal{E}\ell\ell_I \otimes \overline{F}_o, \mathbb{Q}_\ell\right) \quad \forall j \geq 0.$$

Partons des quasi-isomorphismes (13) ; le complexe $\check{C}^i_c(\mathcal{U}, T^{\cdot})$ est un représentant de $R\Gamma(U_n(i), \mathbb{Q}_\ell)$ (vu dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}_\ell - \mathrm{GL}_d(F_o)$-modules). Appliquant le théorème de dualité de Poincaré, établi par Berkovich (cf. théorème A.2.1), on obtient des quasi-isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}\left(Z^{-i,2(d-1)-\cdot}(d-1), \mathbb{Q}_\ell\right) \longrightarrow \Gamma\left(U_n(i), T^{\cdot}\right),$$

où, par définition, $\Gamma(U_n(i), T^j) := \varprojlim_m \Gamma(U_n(i), T^j_m) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ (on pourrait également noter $\Gamma(U_n(i), T^{\cdot}) = \check{C}^i(\mathcal{U}, T^{\cdot})$). On utilise ensuite l'égalité suivante (toujours dans la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}_\ell - \mathrm{GL}_d(F_o)$-modules) :

$$R\Gamma\left(U_n(i) \times Z_{I^o}, \mathbb{Q}_\ell\right) = \mathrm{Hom}\left(Z_{I^o}, R\Gamma\left(U_n(i), \mathbb{Q}_\ell\right)\right)$$

(Z_{I^o} est un ensemble discret). Il en résulte des quasi-isomorphismes $\mathrm{GL}_d(F_o)$-équivariants canoniques (lorsque i varie) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\left(Z_{I^o}, \Gamma\left(U_n(i), T^{\cdot}\right)\right) & \longrightarrow & \Gamma\left(U_n(i) \times Z_{I^o}, pr^*T^{\cdot}\right) \\ \uparrow & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}\left(Z^{-i,2(d-1)-\cdot}(d-1), \mathrm{Hom}\left(Z_{I^o}, \mathbb{Q}_\ell\right)\right) & & \end{array}$$

où, par définition, $\Gamma(U_n(i) \times Z_{I^o}, pr^*T^j) := \varprojlim_m \Gamma(U_n(i) \times Z_{I^o}, pr^*T^j_m) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Finalement, on utilise l'égalité (15) ; on obtient ainsi les quasi-isomorphismes (16) annoncés, en prenant les invariants sous l'action de $\mathrm{GL}_d(F_o)$.

3.3.1.5. suite et fin. — Considérons le foncteur $F = R\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\bullet, \mathcal{A}^{\infty}_{I^o})$ défini sur la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}_\ell - \mathrm{GL}_d(F_o)$-modules lisses. Nous disposons de deux suites spectrales, relativement au foncteur F (cf **[EGA3]** chap. 0 11.4.3) :

$$\begin{aligned} {}'\,\mathrm{E}_2^{i,j} = h^i\left(R^j F(C^\cdot)\right) &\implies \mathbb{R}^{i+j}F(C^\cdot) \\ {}''\,\mathrm{E}_2^{i,j} = R^i F(h^j(C^\cdot)) &\implies \mathbb{R}^{i+j}F(C^\cdot), \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}^k F$ désigne le foncteur hyperdérivé. Prenant $C^\cdot = \mathcal{P}^{2(d-1)-\cdot}(d-1)$, qui est un complexe projectif (de sorte que $R^i F(C^\cdot) = 0$ pour tout $i > 0$), la première suite spectrale est dégénérée (cf. loc. cit. prop. 11.4.5). La seconde suite spectrale se réécrit donc :

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = R^i F(h^{2(d-1)-j}(\mathcal{P}^\cdot)(d-1)) \Longrightarrow h^{i+j}\left(F(\mathcal{P}^{2(d-1)-\cdot}(d-1))\right).$$

C'est exactement la suite spectrale de la proposition 3.3.1, puisque $R^i F = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\bullet, \mathcal{A}^{\infty}_{I^o})$ et l'on sait que :

$$\begin{aligned} h^k(\mathcal{P}^\cdot) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k_c\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma^d_n\right)_{\overline{F}_o}, \mathbb{Q}_\ell\right), \\ h^k\left(F(\mathcal{P}^{2(d-1)-\cdot}(d-1))\right) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k\left(\mathcal{E}\ell\ell_I \otimes \overline{F}_o, \mathbb{Q}_\ell\right). \end{aligned}$$

Enfin, d'après le théorème de comparaison établi par Berkovich (cf. th. A.1.4), l'écriture $\mathrm{H}^\cdot\left(\mathcal{E}\ell\ell_I \otimes \overline{F}_o, \mathbb{Q}_\ell\right)$ désigne indifféremment la cohomologie des espaces analytiques ou la cohomologie étale habituelle.

3.3.2. Dégénérescence de la partie cuspidale de la suite spectrale. — On se propose de démontrer dans ce paragraphe la dégénérescence de la suite spectrale figurant dans l'énoncé du corollaire 3.3.2.

On poursuit avec les notations précédentes. Soit π_o un élément de $\mathcal{A}^0_d(F_o)$, de caractère central ξ_o d'ordre fini. Appliquant le lemme 3.2.7, on regarde π_o comme la composante en o d'une représentation automorphe $\widetilde{\Pi}$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ vérifiant les conditions du lemme. Puis on transfert $\widetilde{\Pi}$ aux groupes $D^*(\mathbb{A})$ et $\overline{D}^*(\mathbb{A})$ (cf. lemme 3.2.8 ou théorème 3.2.9 2.) : on obtient finalement des représentations automorphes Π et $\overline{\Pi}$ respectivement, de multiplicité un, telles que

$$\begin{aligned} \Pi_o \simeq \mathrm{JL}(\pi_o), \quad \Pi_{o'} \simeq \mathrm{JL}(\widetilde{\Pi}_{o'}), \quad \text{et } \Pi^{o,o'} \simeq \widetilde{\Pi}^{o,o'}; \\ \overline{\Pi}_\infty \simeq \mathrm{JL}(\widetilde{\Pi}_\infty) = 1_\infty, \quad \overline{\Pi}_{o'} \simeq \mathrm{JL}(\widetilde{\Pi}_{o'}), \quad \text{et } \overline{\Pi}^{\infty,o'} \simeq \widetilde{\Pi}^{\infty,o'}. \end{aligned}$$

On voit que les représentations Π et $\overline{\Pi}$ coincident en dehors des places o et ∞ (rappel : $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$). De plus, $\overline{\Pi}$ est l'unique (à isomorphisme près) représentation automorphe ν de $\overline{D}^*(\mathbb{A})$ vérifiant $\nu^{\infty,o} \simeq \Pi^{\infty,o}$ (une telle représentation ν coïncide avec $\widetilde{\Pi}$ en dehors de $S = \{\infty, o, o'\}$; on applique le théorème 3.2.9 2.). Notant $W[\Pi^{\infty,o}]$ la composante $\Pi^{\infty,o}$-isotypique pour toute représentation semi-simple W de $D^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \simeq \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o})$, on a donc :

$$\left(\left(\mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}\right)[\Pi^{\infty,o}]\right)_o \simeq \pi_o, \tag{17}$$

comme représentation de $\overline{D}^*(F_o) \simeq \mathrm{GL}_d(F_o)$.

Revenons à la suite spectrale du corollaire 3.3.2. On considère à partir de maintenant la cohomologie étale à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (qui s'obtient à partir de $\mathrm{H}^\cdot(\bullet, \mathbb{Q}_\ell)$

par extension des coefficients). Après passage à la limite projective sur n, notre suite spectrale s'écrit :

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_d(F_o)-\text{mod. lisse}}\left(\Psi_d^{2(d-1)-j}(d-1), \mathcal{A}^{\infty}_{\overline{D}}\right) \Longrightarrow \left(H_o^{i+j}\right)^{ss} \tag{18}$$

(avec les notations des paragraphes 3.1.2 et 3.2.3). Elle est équivariante pour l'action de $D^*(\mathbb{A}^\infty) \times W_{F_o} \simeq \overline{D}^*(\mathbb{A}^{\infty,o}) \times D_o^* \times W_{F_o}$.

Pour toute représentation V admissible (au sens du début du paragraphe 3.1.2, en prenant $H = D^*(\mathbb{A}^\infty)$) du groupe produit $D^*(\mathbb{A}^\infty) \times W_{F_o}$, toute représentation admissible irréductible τ_o de D_o^* et toute représentation irréductible σ_o de W_{F_o}, nous notons $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(V)$ la multiplicité de $\overline{\Pi}^{\infty,o} \otimes \tau_o \otimes \sigma_o$ dans V (le lecteur pourra consulter [**Boy**] §3.1, par exemple, pour des rappels concernant la notion de multiplicité dans un tel contexte).

Lemme 3.3.6. — *On a* $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_2^{i,j}) = 0 \quad \forall i > 0.$

Nous allons montrer que les groupes

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_d(F_o)-\text{mod. lisse}}\left(\mathrm{H}_c^{2(d-1)-j}\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)(d-1), \pi_o\right)$$

sont nuls en dimension $i > 0$; étant donné la relation (17), le lemme en résultera. Rappelons que $\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d$ est l'union disjointes de copies, indexées par $\mathbb{Z}$, de l'espace de Drinfeld Σ_n^d. Le stabilisateur d'une composante connexe, pour l'action de $\mathrm{GL}_d(F_o)$, est le sous-groupe $\mathrm{GL}'_d(F_o)$ constitué des éléments dont le déterminant est une unité de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_o$. On a formellement :

$$\mathrm{H}_c^j\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right) = \text{c-Ind}_{\mathrm{GL}'_d(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)}\,\mathrm{H}_c^j\left(\left(\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)$$

(c-Ind désigne l'induite compacte ; on ignore l'action de Galois), d'où un isomorphisme de foncteurs (réciprocité de Frobenius, cf [**B-Z**] prop. 2.29) :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(\mathrm{H}_c^j\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)(d-1), \bullet\right)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}'_d(F_o)}\left(\mathrm{H}_c^j\left(\left(\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)(d-1), \mathrm{Res}_{\mathrm{GL}'_d(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)}\bullet\right).\end{aligned}$$

Il en résulte des isomorphismes

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_d(F_o)-\text{mod. lisse}}\left(\mathrm{H}_c^{2(d-1)-j}\left(\left(\mathrm{Res}'\,\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)(d-1), \pi_o\right)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}'_d(F_o)-\text{mod. lisse}}\left(\mathrm{H}_c^{2(d-1)-j}\left(\left(\Sigma_n^d\right)_{\overline{F}_o}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)(d-1), \mathrm{Res}_{\mathrm{GL}'_d(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)}\pi_o\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Harish-Chandra (voir [**B-Z**], théorème 3.21) appliqué à la représentation supercuspidale π_o, la restriction $\mathrm{Res}_{\mathrm{GL}'_d(F_o)}^{\mathrm{GL}_d(F_o)}\pi_o$ est une représentation *finie* (au sens de [**B-Z**] 2.40 : les coefficients matriciels sont des fonctions à support compact). Le résultat découle alors de l'isomorphisme (19) et du lemme suivant :

***Lemme 3.3.7* (Bernstein-Zelevinski)**. — *Soit (ρ, V) une représentation* finie *d'un groupe topologique G (unimodulaire, dénombrable à l'infini et tel qu'il existe un système fondamental de voisinages de l'élément neutre formé de sous-groupes compacts ouverts). Alors (ρ, V) est un objet projectif dans la catégorie des représentations lisses de G.*

Démonstration. — D'après le théorème 2.44 dans **[B-Z]**, toute représentation finie est complètement réductible ; on peut donc supposer V irréductible. On se donne alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} & (\rho, V) \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] & \\ (\pi', E') \arrow[r, "u"'] & (\pi, E) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et il s'agit de relever ϕ en un morphisme ψ. La clef est encore dans la preuve du théorème 2.44 de Bernstein et Zelevinski : ces derniers définissent une projection $p_\pi : E \to E$ (notée $\pi(\varepsilon^\rho)$ dans loc. cit.) qui commute à l'action de G et tel que, considérant également $p_{\pi'} : E' \to E'$ et tout $f \in \mathrm{Hom}_G(\pi', \pi)$ (par exemple $f = u$), on ait $f \circ p_{\pi'} = p_\pi \circ f$. De plus, $\mathrm{im}\, p_\pi$ (donc également $\mathrm{im}\, p_{\pi'}$) se scinde en une some directe de G-représentations isomorphes à V.

Soit $0 \neq v \in V$; puisque V est irréductible, il suffit de définir ψ sur des combinaisons linéaires finies $\sum_i \lambda_i \rho(g_i) v$. Choisissons un relèvement quelconque w de $\phi(v)$ *dans* $\mathrm{im}\, p_{\pi'}$. On définit alors :

$$\psi(\sum_i \lambda_i \rho(g_i) v) = \sum_i \lambda_i \pi'(g_i) w.$$

Cela a un sens, à condition qu'une somme $\sum_i \lambda_i \rho(g_i) v = 0$ donne une image nulle, autrement dit (appliquant ϕ), si un élément $\sum_i \lambda_i \pi'(g_i) w$ du noyau de u est le vecteur nul. Cela résulte de l'observation suivante : $\ker u \cap \mathrm{im}\, p_{\pi'} = \{0\}$. En effet, puisque u commute à p_π et $p_{\pi'}$, alors u envoie $\ker p_\pi$ (resp. $\mathrm{im}\, p_\pi$) dans $\ker p_{\pi'}$ (resp. $\mathrm{im}\, p_{\pi'}$). Supposons que $x = p_{\pi'}(y)$ appartienne au noyau de u ; on a $p_\pi(u(y)) = u(x) = 0$, donc y appartient au noyau de $p_{\pi'}$ et $x = 0$. □

Remarque 3.3.8. — Conservons les hypothèses du lemme précédent et supposons de plus que (ρ, V) soit irréductible. Alors (ρ, V) est également injective dans la catégorie des représentations lisses de G.

En effet, il s'agit de compléter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\pi, E) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\phi"'] & (\pi', E') \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & (\rho, V) & \end{tikzcd}$$

Ecrivant $E = \ker p_\pi \oplus \mathrm{im}\, p_\pi$ et $E' = \ker p_{\pi'} \oplus \mathrm{im}\, p_{\pi'}$, on sait que $\mathrm{im}\, p_\pi$ et $\mathrm{im}\, p_{\pi'}$ se scindent en une somme directe de copies de V, alors que les représentations $\ker p_\pi$ et $\ker p_{\pi'}$ ne contiennent aucun sous-facteur isomorphe à V. Nécessairement, $\phi|_{\ker p_\pi} = 0$; de plus, u respecte les décompositions précédentes. Il est alors clair que l'on peut construire un morphisme ψ.

Proposition 3.3.9. — *Pour tout entier* $0 \leq j \leq 2(d-1)$,

$$E_2^{0,j}[\Pi^{\infty,o}] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(\Psi_d^{2(d-1)-j}(d-1), \pi_o\right) \xrightarrow{\sim} \left(\left(H_o^j\right)^{ss}[\Pi^{\infty,o}]\right)_o$$

(isomorphismes entre représentations de $D_o^* \times W_{F_o}$*).*

Cette proposition signifie que la partie cuspidale de la suite spectrale (18) est dégénérée. Cela provient essentiellement du lemme précédent 3.3.6, en ajoutant un argument de comptage des multiplicités :

Démonstration. — La multiplicité $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(\bullet)$ est additive sur les suites exactes courtes et est positive sur les représentations effectives, de sorte qui si une représentation admissible V de $D^*(\mathbb{A}^\infty)\times W_{F_o}$ est telle que $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(V)=0$, alors il en est de même pour tout sous-quotient de V. Comme $E_r^{i,j}$ est un sous-quotient de $E_{r-1}^{i,j}$, on déduit alors du lemme 3.3.6, par récurrence sur r, que $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_r^{i,j})=0$ pour tout $i\neq 0$, tout j et tout $r\geq 2$.

Nous allons montrer que $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_2^{i,j})=m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_\infty^{i,j})\quad\forall i,j$; pour cela, nous avons besoin d'un lemme :

Lemme 3.3.10. — *Soient U,V et W trois représentations admissibles de $D^*(\mathbb{A}^\infty)\times W_{F_o}$ et $f:U\to V$, $g:V\to W$ deux morphismes équivariants. On suppose que les multiplicités $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(U)$ et $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(W)$ sont nulles. Alors on a l'égalité :*

$$m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(V)=m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(\ker g/\operatorname{im} f).$$

Démonstration. — La multiplicité $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(S)$ est nulle pour tout sous-quotient S de U ou W (argument déjà cité). Comme $V/\ker g$ s'identifie à un sous-espace de W, il est de multiplicité nulle, donc $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(\ker g)=m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(V)$. Par ailleurs, on a une surjection de U sur $\operatorname{im} f$, donc $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(\operatorname{im} f)=0$. Il en résulte l'égalité annoncée. □

Procédons par récurrence sur $r\geq 2$: si $i=r$, alors $E_r^{i,j}$ et $E_{r+1}^{i,j}$ sont tous deux de multiplicité nulle. Dans le cas contraire, on applique le lemme aux différentielles $d_r^{i,j}$: $E_r^{i,j}\to E_r^{i+r,j+r-1}$ et $d_r^{p-r,j-r+1}:E_r^{i-r,j-r+1}\to E_r^{i,j}$: on obtient $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_{r+1}^{i,j})=m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(\ker d_r^{i,j}/\operatorname{im} d_r^{p-r,j-r+1})=m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_r^{i,j})$. Finalement, puisque la suite $(E_r^{i,j})_r$ est stationnaire à partir d'un certain rang, il vient l'égalité $m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_2^{i,j})=m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_\infty^{i,j})$ annoncée.

On conclut facilement : comme E_∞^n est filtré par les $E_\infty^{i,j}$ pour $i+j=n$ et que les multiplicités précédentes sont nulles sauf pour $i=0$, on a alors

$$m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_2^{0,j})=m_{\overline{\Pi}^{\infty,o}\otimes\tau_o\otimes\sigma_o}(E_\infty^{j})\quad\forall j.$$

C'est vrai pour tout couple (τ_o,σ_o), d'où l'assertion de la proposition. □

3.3.3. Fin de la preuve. — La composante ξ_o-isotypique $\Psi_d^i(\xi_o)$ de la représentation Ψ_d^i étant par définition le plus grand quotient où le centre de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ agit par ξ_o, il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(\Psi_d^{2(d-1)-j}(d-1)(\xi_o),\pi_o\right)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(\Psi_d^{2(d-1)-j}(d-1),\pi_o\right)$ s'identifient naturellement. La proposition 3.3.9 affirme donc, pour tout entier $0\leq j\leq 2(d-1)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(\Psi_d^{2(d-1)-j}(d-1)(\xi_o),\pi_o\right)\simeq\left(\left(H_o^j\right)^{ss}[\Pi^{\infty,o}]\right)_o$$

(isomorphisme entre représentations de $D_o^*\times W_{F_o}$).

Récapitulons où nous en sommes : partant de $\pi_o \in \mathcal{A}_d^0(K)$, pour K un corps local d'égale caractéristique p, on s'est donné un corps global F tel que le complété F_o en o soit isomorphe à K. Le passage du local au global, via le théorème d'uniformisation de Čerednik-Drinfeld, a permit de relier les représentations $\Psi_d^i(\xi_o)$ aux représentations H_o^j construites par Laumon, Rapoport et Stuhler afin de démontrer la correspondance de Langlands locale en égale caractéristique. Concrètement, on a obtenu une suite spectrale dont la partie cuspidale dégénère, conduisant au résultat de la proposition 3.3.9. Au vu de la proposition 3.2.10, qui résume les résultats de **[L-R-S]** que nous utilisons, on a en fait démontré :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}\left(\Psi_d^{2(d-1)-j}(d-1)(\xi_o), \pi_o\right) = \begin{cases} \mathrm{JL}(\pi_o) \otimes \left(\sigma_d(\pi_o) \otimes |\ |^{\frac{1-d}{2}}\right) & \text{si } j = d-1; \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est équivalent à l'assertion de la conjecture de Drinfeld-Carayol. En effet, notant E l'espace de $\Psi = \Psi_d^{2(d-1)-j}(d-1)(\xi_o)$ et V l'espace de π_o,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_o, \Psi) & \times & \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\Psi, \pi_o) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ (f & , & g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

constitue une dualité parfaite : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_o, \pi_o) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ car π_o est irréductible. Soit $0 \neq g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\Psi, \pi_o)$; choisissant $\tilde{f} \neq 0$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(V, E/\ker g) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (car $\mathrm{im}\, g = V$), on peut relever $\tilde{f}$ en un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_o, \Psi)$, parce qu'une représentation cuspidale est projective dans la catégorie des représentations lisses de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ de caractère central fixé (sa restriction à $\mathrm{GL}'_d(F_o)$ est une représentation finie ; on utilise à nouveau le lemme 3.3.7 et le fait que $\mathrm{GL}_d(F_o)$ est engendré par son centre et par $\mathrm{GL}'_d(F_o)$). Un tel relèvement vérifie $g \circ f \neq 0$.

Prenons maintenant $f \neq 0$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_o, \Psi)$ et construisons un élément g de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\Psi, \pi_o)$ tel que $g \circ f \neq 0$: partant de $0 \neq \tilde{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\mathrm{im}\, f, V) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on utilise le fait qu'une représentation cuspidale est également injective dans la catégorie des représentations lisses de $\mathrm{GL}_d(F_o)$ de caractère central fixé (cela résulte de la remarque 3.3.8). Finalement, $B = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\Psi, \pi_o)$ est de dimension finie (on a calculé cet espace précédemment) et, notant $A = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_o)}(\pi_o, \Psi)$, on dipose d'injections $A \subset B^*$ et $B \subset A^*$; ces deux espaces sont donc de même dimension, et l'on a l'égalité $A = B^*$.

On en déduit :

$$\left(\Psi_d^j(\xi_o)\right)(d-1)[\pi_o] = \begin{cases} \mathrm{JL}(\pi_o^\vee) \otimes \left(\sigma_d(\pi_o^\vee) \otimes |\ |^{\frac{d-1}{2}}\right) & \text{si } j = d-1; \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à «simplifier» les twists de Tate ; la conjecture de Drinfeld-Carayol est démontrée.

APPENDICE A

COHOMOLOGIE l-ADIQUE DES ESPACES ANALYTIQUES, D'APRÈS BERKOVICH

A.1. Cohomologie à support compact

Dans [**B1**] et [**B2**], seulement la cohomologie étale à coefficients dans un faisceau de torsion est définie et étudiée. Ne disposant pas d'une théorie générale de la cohomologie ℓ-adique, nous donnons ci-dessous une définition de la cohomologie ℓ-adique à support compact, valable pour une certaine classe d'espaces analytiques qui inclut les revêtements Σ_n^d de Drinfeld. Les résultats qui suivent proviennent de notes non publiées de Berkovich, et sont entièrement dus à Berkovich qui a aimablement autorisé l'auteur à les reproduire ici.

Soit K un corps local non-archimédien, de corps résiduel κ de caractéristique p, et soit X un K-espace analytique. On supposera toujours dans ce qui suit que X est de Hausdorff. On dit que X est *quasi-algébrique* si tout point $x \in X$ possède un voisinage de la forme $V_1 \cup \ldots \cup V_n$, où chaque V_i est un affinoïde de X qui est isomorphe à un affinoïde de S_i^{an}, pour un certain schéma S_i de type fini sur K.

Remarque. — *Un K-espace analytique* lisse *est automatiquement quasi-algébrique.*

Par ailleurs, un sous-ensemble ouvert $\mathcal{U}$ de X est dit *distingué* s'il est de la forme $V \setminus U$, où $U \subset V$ sont deux domaines analytiques compacts de X. Il est clair que la classe des sous-ensembles ouverts distingués est stable par union et intersection finies.

Finalement, fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K ; pour tout K-espace analytique Y, nous noterons $Y_{\overline{K}} = Y \hat{\otimes}_K \widehat{\overline{K}}$. Fixons également un nombre premier $\ell \neq p$; un *faisceau ℓ-adique lisse* est un système projectif $F = \{F_n\}_{n \geq 0}$ de faisceaux finis localement constants F_n en $\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}$-modules tel que $F_{n+1} \otimes \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} F_n$.

Lemme A.1.1 **(Berkovich)**. — *Soit $\mathcal{U}$ un sous-ensemble ouvert distingué d'un K-espace analytique quasi-algébrique X et soit A un anneau commutatif Noethérien de caractéristique n premier à p. Alors pour tout A-module fini, étale et localement constant F, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}_c^q(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F)$, $q \geq 0$, sont des A-modules finis.*

Démonstration. — Supposons pour commencer que X est compact et que $\mathcal{U} = X$. Alors l'assertion est prouvée dans [**B2**] 5.6, dans le cas $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La même preuve fonctionne pour A quelconque.

Dans le cas général, soit $\mathcal{U} = V \setminus U$, où $U \subset V$ sont deux sous-espaces analytiques compacts de X. Le lemme résulte alors de la suite exacte longue

$$\ldots \to \mathrm{H}^{q-1}(U_{\overline{K}}, F) \to \mathrm{H}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F) \to \mathrm{H}^q(V_{\overline{K}}, F) \to \mathrm{H}^q(U_{\overline{K}}, F) \to \ldots$$

□

***Proposition A.1.2* (Berkovich).** — *Soit $\mathcal{U}$ un sous-ensemble ouvert distingué d'un K-espace analytique quasi-algébrique X. Alors pour tout faisceau ℓ-adique lisse $F = \{F_n\}_{n\geq 0}$ sur X et tout entier $q \geq 0$, les groupes de cohomologie $\{\mathrm{H}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F_n)\}_{n\geq 0}$ forment un système projectif AR-ℓ-adique de groupes de ℓ-torsion finis.*

Démonstration. — L'assertion de la proposition est un corollaire immédiat de [**SGA5**], Exp. V 5.3.1, appliqué au ∂-foncteur exact $F \mapsto \mathrm{H}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F)$ défini sur la catégorie des faisceaux de ℓ-torsion finis localement constants. La condition nécessaire à l'application du résultat dans loc. cit. est vérifiée en vertu du lemme précédent. □

Nous pouvons maintenant définir la cohomologie d'un K-espace analytique quasi-algébrique X à coefficients dans un faisceau ℓ-adique lisse $F = \{F_n\}_{n\geq 0}$ sur X. Tout d'abord, pour $\mathcal{U} \subset X$ un ouvert distingué, nous posons

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F) = \varprojlim_n \mathrm{H}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F_n).$$

Il résulte de la proposition A.1.2 que $F \mapsto \widetilde{\mathrm{H}}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F)$ est un ∂-foncteur exact de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses sur X dans celle des $\mathbb{Z}_\ell$-modules finis. Puis, nous définissons

$$\mathrm{H}^q_c(X_{\overline{K}}, F) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{H}}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F).$$

La cohomologie à coefficients dans $F \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et $F \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ se déduit en posant

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F \otimes \mathbb{Q}_\ell) = \widetilde{\mathrm{H}}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F) \otimes \mathbb{Q}_\ell \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{H}}^q_c\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right) = \widetilde{\mathrm{H}}^q_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell,$$

puis en passant à la limite inductive sur $\mathcal{U}$ comme précédemment.

La situation suivante s'avère utile dans la pratique pour le calcul de la cohomologie ℓ-adique : supposons que soit donné un recouvrement localement fini $\{\mathcal{U}_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de X par des ouverts distingués. Ici, Δ désigne le nerf du recouvrement et $\mathcal{U}_\delta$ l'intersection de tous les ouverts correspondant aux sommets du simplexe $\delta \in \Delta$. Soit Δ_i l'ensemble des simplexes de Δ de dimension i.

***Lemme A.1.3* (Berkovich).** — *On dispose d'une suite spectrale :*

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{\delta\in\Delta_{-i}} \widetilde{\mathrm{H}}^j_c((\mathcal{U}_\delta)_{\overline{K}}, F) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}_c(X_{\overline{K}}, F).$$

Les différentielles sont induites par les inclusions $\mathcal{U}_{\delta'} \subset \mathcal{U}_\delta$, pour $\delta \subset \delta'$ deux simplexes emboîtés ; la cohomologie avec support est covariante pour l'inclusion, d'où le signe -. En fait, on reconnaît la cohomologie de Čech du recouvrement :

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \widetilde{\mathrm{H}}^j_c\left(\coprod_{\delta\in\Delta_{-i}} (\mathcal{U}_\delta)_{\overline{K}}, F\right) = \widetilde{\mathrm{H}}^j_c\left(\coprod_{j_0<\ldots<j_{-i}} (\mathcal{U}_{\delta_{j_0}})_{\overline{K}} \cap \ldots \cap \left(\mathcal{U}_{\delta_{j_{-i}}}\right)_{\overline{K}}, F\right).$$

Démonstration. — Soit Δ' le sous-complexe de Δ défini par un sous-ensemble fini $\Delta'_0 \subset \Delta_0$, et soit $X' = \bigcup_{\delta \in \Delta'_0} \mathcal{U}_\delta$. Alors il existe pour tout entier $n \geq 1$ une suite spectrale de groupes finis abéliens

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{\delta \in \Delta'_{-i}} \mathrm{H}_c^j \left((\mathcal{U}_\delta)_{\overline{K}}, F_n \right) \Longrightarrow \mathrm{H}_c^{i+j} \left(X'_{\overline{K}}, F_n \right).$$

Cela induit une suite spectrale similaire à coefficients dans F. Comme $\mathrm{H}_c^q (X_{\overline{K}}, F) = \varinjlim \mathrm{H}_c^q \left(X'_{\overline{K}}, F \right)$, nous obtenons donc la suite spectrale mentionnée. □

Ainsi la cohomologie ℓ-adique avec support peut-elle se calculer à l'aide d'un recouvrement de Čech. Une autre propriété essentielle que l'on utilise est la suivante (théorème de comparaison) :

***Théorème A.1.4* (Berkovich).** — *Soit X un schéma propre sur K et F un faisceau ℓ-adique lisse. Il existe pour tout $j \geq 0$ un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{H}_c^j (X, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_c^j (X^{an}, F^{an}).$$

Démonstration. — Berkovich donne dans **[B1]** 7.1.1 la preuve de ce théorème de comparaison pour $F = F_n$ un faisceau abélien de torsion. Etant donné la définition de la cohomologie ℓ-adique avec support, il suffit de passer à la limite sur n, ce qui tout à fait licite lorsque X est propre. □

Terminons par un résultat de dimension cohomologique :

***Proposition A.1.5* (Berkovich).** — *Soit X un K-espace analytique quasi-algébrique de dimension d et F un faisceau ℓ-adique lisse. Alors $\mathrm{H}_c^j (X, F) = 0$ pour tout $j > 2d$.*

Démonstration. — L'assertion, pour $F = F_n$ un faisceau abélien de torsion, résulte de **[B1]** Corollary 5.3.8. On passe à la limite sur n. □

A.2. Cohomologie sans support

Soit X un K-espace analytique quasi-algébrique, de dimension d, que l'on supposera toujours de Hausdorff et soit $F = \{F_n\}_{n \geq 0}$ un faisceau ℓ-adique lisse. Berkovich pose d'abord, pour $V \subset X$ un sous-domaine analytique *compact* :

$$\mathrm{H}^q (V_{\overline{K}}, F) = \varprojlim_n \mathrm{H}^q (V_{\overline{K}}, F_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell;$$

puis il définit la cohomologie ℓ-adique sans support de X, sachant que les sous-domaines analytiques compacts de X forment un ensemble filtré :

$$\mathrm{H}^q (X_{\overline{K}}, F) = \varprojlim_V \mathrm{H}^q (V_{\overline{K}}, F).$$

On peut également utiliser la variante suivante : définissant, pour $\mathcal{U}$ un ouvert distingué,

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q (\mathcal{U}_{\overline{K}}, F) = \varprojlim_n \mathrm{H}^q (\mathcal{U}_{\overline{K}}, F_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

on a l'égalité

$$\mathrm{H}^q\left(X_{\overline{K}}, F\right) = \varprojlim_{\mathcal{U}} \widetilde{\mathrm{H}}^q\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F\right).$$

Ceci a bien un sens car le lemme A.1.1 et la proposition A.1.2 sont également valables pour la cohomologie sans support, avec les mêmes démonstrations. Supposons maintenant que X soit *lisse* ; le théorème de dualité de Poincaré établi par Berkovich (voir [**B1**], thm. 7.3.1) fournit un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^q\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F_n\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_l}\left(\mathrm{H}_c^{2d-q}\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F_n\right)(d), \mathbb{Q}_l\right),$$

où (d) désigne un twist de Tate. En passant à la limite sur n, on obtient une dualité :

$$\widetilde{\mathrm{H}}^q\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}\left(\widetilde{\mathrm{H}}_c^{2d-q}\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, F\right)(d), \mathbb{Q}_\ell\right);$$

faisant croître $\mathcal{U}$, on démontre ainsi :

Théorème A.2.1 **(Berkovich)**. — *Soit X un K-espace analytique lisse de dimension d. Il existe une dualité de Poincaré :*

$$\mathrm{H}^q\left(X_{\overline{K}}, F\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}\left(\mathrm{H}_c^{2d-q}\left(X_{\overline{K}}, F\right)(d), \mathbb{Q}_\ell\right).$$

Autrement dit, la cohomologie ℓ-adique sans support est le dual algébrique de la cohomologie avec support $\mathrm{H}_c^{2d-\cdot}$, modulo un twist de Tate.

Le lemme suivant affirme qu'il est possible de calculer la cohomologie ℓ-adique sans support à l'aide d'un recouvrement de Čech, du moins sous certaines hypothèses.

Lemme A.2.2. — *Soit $\{\mathcal{U}_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ un recouvrement fini d'un K-espace quasi-algébrique compact X par des ouverts distingués. On dispose d'une suite spectrale :*

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{\delta\in\Delta_i} \widetilde{\mathrm{H}}^j\left(\left(\mathcal{U}_\delta\right)_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell\right) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}\left(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell\right).$$

Démonstration. — On dispose de la suite spectrale de Cartan-Leray, pour tout $n \geq 0$:

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{\delta\in\Delta_i} \mathrm{H}^j\left(\left(\mathcal{U}_\delta\right)_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}\right) \Longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}\left(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}\right).$$

Cette suite spectrale passe à la limite projective sur n, compte tenu des définitions et remarques en début de paragraphe. □

A.3. Espaces analytiques et actions de groupes

Un des intérêts de la théorie des espaces analytiques de Berkovich est qu'elle inclut un traitement des espaces avec opérateurs. Ces résultats étant non publiés à ce jour (voir cependant [**B3**]), nous incluons ci-dessous un résumé des notions que nous utiliserons.

A.3.1. G-espaces. — Soit X un K-espace analytique et $\mathcal{G}(X)$ le groupe des automorphismes de X. On munit $\mathcal{G}(X)$ de la topologie définie par la famille de sous-groupes

$$\mathcal{G}_\varepsilon(X) = \left\{ \sigma \in \mathcal{G}(X) \quad | \quad \sigma(\mathcal{U}_i) = \mathcal{U}_i, \sup_{x \in \mathcal{U}_i} |(\sigma^* f_{i,j} - f_{i,j})(x)| \leq t_{i,j} \right\},$$

où ε est la donnée suivante :
- une famille finie $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de sous-domaines analytiques compacts de X ;
- pour tout $i \in I$, une famille finie $\{f_{i,j}\}_{j \in J_i}$ de fonctions analytiques sur $\mathcal{U}_i$ et une famille $\{t_{i,j}\}_{j \in J_i}$ de nombres positifs.

(voir **[B2]** §6 pour de plus amples détails).

Définition A.3.1. — Une action d'un groupe topologique G sur un espace analytique X est dite *continue* si elle induit un homomorphisme continu $G \to \mathcal{G}(X)$. Un espace analytique muni d'une action continue d'un groupe topologique G est appelé un *G-espace.*

Exemple. — *Si G agit continûment sur un schéma formel $\mathfrak{X}$ localement de présentation finie sur K, alors l'action de G induite sur la fibre générique (au sens de Raynaud) $\mathfrak{X}_\eta$ de $\mathfrak{X}$ est continue, au sens de la définition précédente.*

En particulier, $\mathrm{GL}_d(K)$ *agit continûment sur le demi-plan supérieur généralisé de Drinfeld Ω_K^d défini sur un corps local K, ainsi que sur les revêtements Σ_n^d de Ω_K^d.*

Les couples $X(G)$, où G est un groupe topologique et X un G-espace, sont les objets de la catégorie des espaces analytiques avec opérateurs. Un morphisme $\varphi : X'(G') \to X(G)$ consiste en un homomorphisme continu de groupes topologiques $\nu_\varphi : G' \to G$ et un morphisme d'espaces analytiques $\varphi : X' \to X$ compatible avec l'homomorphisme ν_φ. Un morphisme $U(G) \to X(G)$ est par définition quasi-étale (resp. étale) si le morphisme sous-jacent $U \to X$ est quasi-étale (resp. étale). On renvoie le lecteur à **[B1]** §4 (resp. **[B2]** §3) pour les définitions relatives à la topologie étale (resp. quasi-étale) sur les espaces analytiques. Dans le cas d'un G-espace X, la topologie étale sur $X(G)$ est la topologie de Grothendieck sur la catégorie des morphisme étales $U(G) \to X(G)$, engendrée par la pré-topologie pour laquelle les recouvrements de $U(G) \to X(G)$ sont les familles $(U_i(G) \to X(G))_{i \in I}$ telles que $(U_i \to X)_{i \in I}$ est un recouvrement de $U \to X$ pour la topologie étale sur X. On note $X(G)_{ét}$ le site obtenu ainsi et $X(G)_{ét}^\sim$ le topos correspondant. Un morphisme $\varphi : X'(G') \to X(G)$ définit de manière évidente un morphisme de topos $\varphi : X'(G')_{ét}^\sim \to X(G)_{ét}^\sim$. Soit F' un faisceau étale sur $X'(G')$; on définit $\varphi_* F'$ par $\varphi_* F'(U(G)) = F'((X' \times_X U)(G'))$ pour tout morphisme étale $U(G) \to X(G)$. Si F est un faisceau étale sur $X(G)$, le faisceau $\varphi^* F$ est décrit comme suit : soit $C(Y(H)/X(G))$ la catégorie des morphismes $Y(H) \to V(G)$ au-dessus de $X(G)$, où V est étale au-dessus de X ; alors $\varphi^* F$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$(U'(G') \to X'(G')) \mapsto \varinjlim F(V(G)),$$

où la limite est prise sur la catégorie duale $C(U'(G')/X(G))^\circ$.

A.3.2. G-faisceaux. — Lorsque G est muni de la *topologie discrète* (on écrira G^d par la suite), on définit un *G-faisceau* étale sur X comme suit : c'est un faisceau étale F sur X muni d'une action de G sur F compatible avec l'action de G sur X (concrètement, pour tout morphisme étale $U \to X$ et tout $g \in G$, il existe une bijection fonctorielle $F(U) \xrightarrow{\sim} F({}^gU) : f \mapsto {}^gf$, où ${}^gU = U \times_{X,g^{-1}} X$, telle que ${}^{gh}f = {}^g\left({}^hf\right)$). Si F est un tel G-faisceau, alors pour tout morphisme étale $U(H) \to X(G)$, où H est un sous-groupe de G, l'ensemble $F(U)$ est muni d'une action canonique de H : pour $h \in H$, le morphisme $h^{-1} : U \to U$ induit un isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} {}^hU$ au-dessus de X ; ce dernier induit à son tour une bijection $\sigma(h) : F\left({}^hU\right) \xrightarrow{\sim} F(U)$, et l'action de H sur $F(U)$ est alors définie par $hf = \sigma(h)\left({}^hf\right)$.

Pour passer au cas d'un groupe topologique G quelconque, rappelons tout d'abord qu'en vertu du lemme clef 7.2 de [**B2**], pour un morphisme quasi-étale $U \to X$ fixé avec U compact, il existe des données ε et δ ainsi qu'un unique homomorphisme continu $\mathcal{G}_\varepsilon(X) \to \mathcal{G}_\delta(X)$ telle que le morphisme $U \to X$ commute avec l'action de $\mathcal{G}_\varepsilon(X)$. Il en résulte que l'action de G sur X se prolonge de manière canonique en une action continue sur U d'un sous-groupe ouvert convenable $G_U \subset G$. On remarque que, si F est un G^d-faisceau étale, alors pour tout morphisme quasi-étale $U \to X$ avec U compact, il existe une action canonique de G_U sur $F|_U$ compatible avec l'action de G sur X. En particulier, le groupe G_U agit sur $F(U)$.

Définition A.3.2. — Un *G-faisceau* étale sur un G-espace X est un G^d-faisceau étale F tel que pour tout morphisme quasi-étale $U \to X$ avec U compact l'action de G_U sur $F(U)$ est *discrète* (i.e. le stabilisateur de toute section $f \in F(U)$ est un sous-groupe ouvert de G_U).

Remarque A.3.3. — Il résulte directement de cette définition que si F est un G-faisceau sur X, alors $\Gamma_c(X, F)$ est un G-module lisse au sens de la théorie des représentations.

Soit X un G-espace. Considérons le morphisme $b : X(\{1\}) \to X(G)$; Berkovich montre que b^*F est un G-faisceau étale pour tout $F \in X(G)^{\sim}_{ét}$. Mieux encore :

***Théorème A.3.4* (Berkovich).** — *Soit X un G-espace ; le morphisme b^* induit une équivalence de catégories entre le topos $X(G)^{\sim}_{ét}$ et la catégorie des G-faisceaux étales sur X.*

Pour finir, soit Λ un anneau, que l'on regarde comme faisceau constant sur X muni de l'action canonique de G sur Λ_X (c'est donc un G-faisceau) ; nous appelons *$\Lambda - G$-module étale* sur X un faisceau F sur X qui est à la fois un Λ-module et un G-faisceau étale.

A.4. Résolution flasque de Godement et application

Soit X un G-espace et Λ un anneau. Berkovich applique la construction de la résolution flasque de Godement (voir [**SGA4**] Exp. XVII §4.2) au site étale $X(G)_{ét}$ afin de

construire, pour F un faisceau étale abélien sur $X(G)$, une résolution à droite $\mathcal{C}^{\cdot}(F)$ de F vérifiant (cf. loc. cit. §4.2.3) :
– $\mathcal{C}^m(F)$ est un faisceau flasque ;
– le foncteur $F \mapsto \mathcal{C}^m(F)$ est exact ;
– la fibre en un point $x \in X$ du complexe $\mathcal{C}^{\cdot}(F)$ est une résolution canoniquement scindée de F_x.

Cette construction est fonctorielle. De plus, elle conserve les structures supplémentaires (cf. remarque 4.2.5 dans loc. cit.). Par conséquent, si b^*F est un $\Lambda - G$-module étale, alors il en est de même des transformés $b^*\mathcal{C}^m(F)$.

Poursuivant, Berkovich montre que le faisceau $b^*\mathcal{C}^m(F)$ est *mou* pour tout $m \geq 0$ (au sens de **[B2]** §3). Ainsi, en vertu du lemme 3.2 de **[B2]**, si l'on suppose X paracompact, alors le complexe $b^*\mathcal{C}^{\cdot}(F)$ est $R\Gamma$-acyclique ; à fortiori :

$$\mathrm{H}_c^j(X, b^*\mathcal{C}^m(F)) = 0 \qquad \forall j > 0.$$

Dans **[H1]**, Harris esquisse comment utiliser la construction précédente afin de démontrer la lissité de l'action sur les groupes de cohomologie avec support en construisant notamment un complexe lisse qui calcule cette cohomologie. Nous énonçons ici le résultat dans sa généralité et détaillons la construction (voir également la version plus «sophistiquée» décrite dans **[H2]** §2).

***Proposition A.4.1* (Berkovich-Harris).** — *Soit X un G-espace quasi-algébrique sur K. On suppose que G contient un sous-groupe ouvert qui est un pro-p-groupe, avec $p \neq \ell$. Alors, pour tout ouvert distingué $\mathcal{U} \subset X$, l'action du stabilisateur $G_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ sur $\widetilde{\mathrm{H}}_c^j(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$, $j \geq 0$, est lisse (ceci est dû à Berkovich). On peut construire un complexe $C^{\cdot}(\mathcal{U})$ de $\mathbb{Q}_\ell - G_{\mathcal{U}}$-modules lisses (i.e. de $\mathbb{Q}_\ell$-modules munis d'une action lisse de $G_{\mathcal{U}}$) qui calcule la cohomologie avec support :*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_c^j(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} h^j(C^{\cdot}(\mathcal{U})) \quad \forall j \geq 0 \tag{20}$$

(isomorphismes $G_{\mathcal{U}}$-équivariants). Cette construction est fonctorielle en $\mathcal{U}$: pour $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ deux ouverts distingués emboîtés, il existe une application canonique $C^{\cdot}(\mathcal{U}) \to C^{\cdot}(\mathcal{U}')$ compatible aux isomorphismes (20) et aux actions (i.e. cette application est $G_{\mathcal{U}} \cap G_{\mathcal{U}'}$-équivariante).

Remarque. — *Ecrivant $\mathcal{U} = U \setminus V$, où U et V sont deux compacts analytiques et appliquant le lemme clef 7.2 de* **[B2]** *(cf. paragraphe A.3.2), on voit que $\mathcal{U}$ est invariant sous l'action d'un sous-groupe ouvert de G. Le stabilisateur $G_{\mathcal{U}}$ est donc ouvert.*

Démonstration. — Étant donnée la définition de la cohomologie ℓ-adique à support (valable pour un espace analytique quasi-algébrique ; voir section A.1) :

$$\widetilde{\mathrm{H}}_c^j(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) = \left(\varprojlim_n \mathrm{H}_c^j(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

nous construisons d'abord, pour tout n_geq1, une résolution $R\Gamma_c$- acyclique du $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} - G_{\mathcal{U}}$-module constant $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{U}_{\overline{K}}$ par des $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} - G_{\mathcal{U}}$-modules étales. Afin de donner un sens au passage à la limite sur n, nous suivons Harris (**[H2]** §2) et introduisons la notion suivante : un *système ℓ-divisible* T de $G_{\mathcal{U}}$-modules sur $\mathcal{U}_{\overline{K}}$ (resp. de G-modules sur $X_{\overline{K}}$) est une famille $\{T_n\}$ de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}-G_{\mathcal{U}}$-modules étales sur $\mathcal{U}_{\overline{K}}$ (resp. de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}-G$-modules étales sur $X_{\overline{K}}$), munie de morphismes $i = i_{n',n} : T_{n'} \to T_n$ et $j = j_{n,n-n'}$: $T_n \to T_{n-n'}$ pour tout $n > n' \geq 1$ tels que T_n est libre sur $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, i identifie $T_{n'}$ avec la $\ell^{n'}$-torsion dans T_n et la suite

$$0 \to T_{n'} \xrightarrow{i} T_n \xrightarrow{j} T_{n-n'} \to 0$$

est exacte.

Afin que la construction soit canonique, lorsque $\mathcal{U}$ varie, on écrira plutôt une résolution du faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ par des G-modules sur l'espace total $X_{\overline{K}}$; on considérera ensuite les restrictions à un ouvert $\mathcal{U}_{\overline{K}}$. La construction est basée sur la remarque suivante : si $T = \{T_n\}$ est un système ℓ-divisible de G-modules sur $X_{\overline{K}}$, alors il en est de même de $b^*\mathcal{C}^m b^{*-1}(T) = \{b^*\mathcal{C}^m b^{*-1}(T_n)\}$, relativement aux morphismes $b^*\mathcal{C}^m b^{*-1}(i)$ et $b^*\mathcal{C}^m b^{*-1}(j)$. Ceci résulte de l'exactitude du foncteur b^* et des propriétés du foncteur $\mathcal{C}^m$ énoncées plus haut. On obtient donc :

Lemme A.4.2. — *Pour tout n, le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ admet une résolution $R\Gamma_c$-acyclique :*

$$0 \to \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \to T_n^0 \to T_n^1 \cdots \to T_n^m \to \cdots$$

telle que $\{T_n^m\}$ est pour tout m un système ℓ-divisible de G-modules sur $X_{\overline{K}}$.

Mieux encore, il est possible de construire une résolution *finie*. En effet, si d désigne la dimension de X, on a déjà vu (voir proposition A.1.5) que $\mathrm{H}_c^j(U, F) = 0$ pour tout $j > 2d$, tout faisceau de torsion localement constant d'ordres premiers à la caractéristique résiduelle p et tout morphisme étale $U \to X_{\overline{K}}$. On utilise alors le foncteur de tronquature $\tau^{\leq m}$ sur les complexes, défini par :

$$\tau^{\leq m}(C^{\cdot})^i = C^i,\ i < m\ ; \quad \tau^{\leq m}(C^{\cdot})^m = \ker\left(C^m \to C^{m+1}\right)\ ; \quad \tau^{\leq m}(C^{\cdot})^i = 0,\ i > m.$$

Il résulte de la remarque précédente que les inclusions $\tau^{\leq m}(T_n^{\cdot}) \to T_n^{\cdot}$ sont des quasi-isomorphismes pour tout n et tout $m \geq 2d$. Nous posons alors $T_n'^{\cdot} = \tau^{\leq 2d+1}(T_n^{\cdot})$; on obtient (en oubliant les $'$ pour alléger les notations) :

Lemme A.4.3. — *Pour tout n, le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ admet une résolution $R\Gamma_c$-acyclique de longueur finie :*

$$0 \to \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \to T_n^0 \to T_n^1 \cdots \to T_n^m \to \cdots \to T_n^{2d+1} \to 0$$

telle que $\{T_n^m\}$ est pour tout m un système ℓ-divisible de G-modules sur $X_{\overline{K}}$.

En effet, le seul point à vérifier est l'injectivité du morphisme $i : T_{n'}^{2d+1} \to T_n^{2d+1}$ pour tout $n > n' \geq 1$. On s'en convainc en écrivant les diagrammes.

Calculons maintenant les groupes de cohomologie $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$: soit d_n^m la différentielle $\Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^m) \to \Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^{m+1})$; notons $Z_n^m = \ker d_n^m$ et $B_n^m = \mathrm{im}\, d_n^{m-1}$. Il résulte du lemme précédent un isomorphisme $G_{\mathcal{U}}$-équivariant pour tout $m \geq 0$:

$$\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} Z_n^m / B_n^m = h^m\left(\Gamma_c\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^{\cdot}\right)\right).$$

Le groupe de cohomologie $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est un $G_{\mathcal{U}}$-module lisse ($m \geq 0$ quelconque), en vertu de la remarque A.3.3. Par ailleurs, c'est un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-modules finis (cf. lemme A.1.1). Il en résulte l'existence d'un sous-groupe ouvert $H \subset G_{\mathcal{U}}$ agissant trivialement sur $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Etant donnée l'hypothèse sur G, on peut même supposer que H est un pro-p-sous-groupe normal ouvert de $G_{\mathcal{U}}$ (avec $p \neq \ell$). Par conséquent, H agit trivialement sur tous les groupes $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$, $n \geq 1$: cela résulte du lemme suivant.

Lemme A.4.4. — *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de ℓ-groupes abéliens finis et $\varphi \in Aut(B)$ tel que $\varphi|_A = \mathrm{Id}_A$ et $\varphi|_C = \mathrm{Id}_C$. Alors il existe $n \geq 0$ tel que $\varphi^{\ell^n} = \mathrm{Id}$.*

Démonstration. — Écrivant $\varphi(b) = b + a(b)$, où $a(b) \in A$, on voit que $\varphi^{\ell^n}(b) = b + \ell^n a(b) = b$ si l'on choisit n tel que $\ell^n = \mathrm{card}(A)$. $\square$

Utilisant ce lemme, on raisonne par récurrence sur n : la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \to 0$ induit une suite exacte

$$0 \to A \to \mathrm{H}_c^m\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}\right) \to C \to 0,$$

où A et C sont des sous-groupes de $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ respectivement. Le résultat découle alors du fait que le pro-p-groupe H est uniquement ℓ-divisible, donc toute ℓ-torsion est triviale.

A ce stade, la lissité de l'action de $G_{\mathcal{U}}$ sur les groupes de cohomologie ℓ-adique avec support $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est acquise : H, qui agit trivialement sur tous les groupes $\mathrm{H}_c^m(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$, agit trivialement sur la limite projective.

Remarque. — *En fait, il n'est pas nécessaire d'utiliser les résolutions $R\Gamma_c$-acycliques $T_n^\cdot$ afin d'établir la lissité de l'action : celle-ci résulte immédiatement de* [**B2**] *Corollary 7.8 (en utilisant le lemme précédent). Mais la construction du complexe $C^\cdot(\mathcal{U})$, qui est le coeur de la proposition A.4.1 (ce complexe sert dans la section 3.3.1), se base sur ces résolutions.*

Construisons maintenant le complexe $C^\cdot(\mathcal{U})$: on part du système ℓ-divisible $\{\Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^\cdot)\}$ de complexes de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} - G_{\mathcal{U}}$-modules (vérification immédiate, sachant que les complexes $T_n^\cdot$ sont $R\Gamma_c$-acycliques). Prenons les invariants sous l'action de H : l'inclusion

$$\Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^\cdot)^H \hookrightarrow \Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^\cdot)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes. En effet, puisque H est un pro-p-groupe, alors $\mathrm{H}^j(H, M) = 0$ pour tout module M qui est uniquement de ℓ-torsion et tout entier $j \geq 1$ (la multiplication par p dans M est bijective car p est premier à ℓ ; pour K un p-groupe, $\mathrm{H}^j(K, M)$ est de p-torsion pour tout $j > 0$, donc est nul. C'est encore vrai pour un pro-p-groupe par passage à la limite projective). Le foncteur $\mathrm{H}^0(H, \bullet)$ est donc exact sur les modules $\Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^m)$, d'où un isomorphisme

$$h^q\left(\Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^\cdot)^H\right) \simeq h^q\left(\Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^\cdot)\right)^H = h^q\left(\Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^\cdot)\right).$$

Notons $C_n^{\cdot H} = \Gamma_c(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^\cdot)^H$; on vérifie facilement que $\left\{C_n^{\cdot H}\right\}$ est un système ℓ-divisible de complexes de longueur finie (=2d+1) de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} - G_{\mathcal{U}}/H$-modules (toujours d'après l'exactitude du foncteur $\mathrm{H}^0(H,\bullet)$ sur les modules considérés). Les applications $j : C_n^{\cdot,H} \to C_{n'}^{\cdot,H}$, pour $n \geq n'$, étant surjectives, on voit que ce système ℓ-divisible satisfait une condition de Mittag-Leffler (cf. **[EGA3]** Chap. 0, Proposition 13.2.3), qui autorise à passer à la limite sur n :

$$\varprojlim_n h^m\left(C_n^{\cdot,H}\right) \simeq h^m\left(C^{\cdot,H}\right) \qquad \forall m \geq 0,$$

où l'on note $C^{\cdot,H} = \varprojlim_n C_n^{\cdot,H}$. Le complexe $C^{\cdot,H}(\mathcal{U}) = C^{\cdot,H} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ est donc un complexe de $\mathbb{Q}_\ell - G_{\mathcal{U}}/H$-modules lisses tel que :

$$h^m\left(C^{\cdot,H}(\mathcal{U})\right) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}_c^m\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell\right) \qquad \forall m \geq 0$$

(isomorphismes $G_{\mathcal{U}}/H$-équivariant).

Si l'on remplace H par un autre sous-groupe $H' \subset H$ normal ouvert de $G_{\mathcal{U}}$, on obtient un isomorphisme naturel $C^{\cdot,H}(\mathcal{U}) = \left[C^{\cdot,H'}(\mathcal{U})\right]^H$ (toujours d'après l'exactitude du foncteur $\mathrm{H}^0(H,\bullet)$ sur les modules considérés). Définissons alors $C^{\cdot}(\mathcal{U}) = \varinjlim_{H'\subset H} C^{\cdot,H'}(\mathcal{U})$. La lissité de ce complexe provient de ce qu'une limite inductive de modules lisses est lisse, et l'on dispose d'un isomorphisme $G_{\mathcal{U}}$-équivariant :

$$h^m\left(C^{\cdot}(\mathcal{U})\right) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}_c^m\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell\right).$$

Le complexe $C^{\cdot}(\mathcal{U})$ remplit donc le cahier des charges. □

Remarque A.4.5. — Travaillant dans la catégorie dérivée de celle des $\mathbb{Q}_\ell - G_{\mathcal{U}}$-modules, on dispose d'un quasi-isomorphisme de complexes :

$$C^{\cdot}(\mathcal{U}) \longrightarrow \varprojlim_n \Gamma_c\left(\mathcal{U}_{\overline{K}}, T_n^{\cdot}\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell =: D^{\cdot}(\mathcal{U}).$$

Ce morphisme est canonique, lorsque $\mathcal{U}$ varie : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} C^{\cdot}(\mathcal{U}') \arrow[r] \arrow[d] & D^{\cdot}(\mathcal{U}') \arrow[d] \\ C^{\cdot}(\mathcal{U}) \arrow[r] & D^{\cdot}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

pour $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ deux ouverts distingués emboîtés.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba1] I. Badulescu, *"Correspondance entre* GL_n *et ses formes intérieures en caractéristique positive"*, thèse, Université de paris XI Orsay (janvier 1999).

[Ba2] I. Badulescu, *"Orthogonalité des caractères pour* GL_n *sur un corps local de caractéristique non nulle"*, Manuscripta math. 101, 49-70 (2000).

[B1] V.G. Berkovich, *"Etale cohomology for non-archimedean analytic spaces"*, Publ. Math. I.H.E.S., 78 (1993), 5-161.

[B2] V.G. Berkovich, *"Vanishing cycles for formal schemes"*, Invent. Math., 115 (1994), 539-571.

[B3] V.G. Berkovich, *"Etale equivariant sheaves on p-adic analytic spaces"*, preprint (2000).

[B-Z] J. Bernstein et A.V. Zelevinski, *"Representations of the group* $GL(n,F)$*, where* F *is a non-archimedean local field "*, Russ. Math. Surv., 31 (1976), 1-68.

[Bo-Ca] J.-F. Boutot et H. Carayol, *"Uniformisation p-adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Čerednik et de Drinfeld"*, Astérisque n° 196-197 (1991), 45-149.

[Boy] P. Boyer, *"Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et conjecture de Langlands locale"*, Inv. Math. 138 (1999), n°3, 573-629.

[Ca1] H. Carayol, *"Variétés de Drinfeld Compactes, d'après Laumon, Rapoport et Stuhler"*, Séminaire Bourbaki, 44ème année (1991-92), n° 756.

[Ca2] H. Carayol, *"Non-Abelian Lubin-Tate Theory"*, dans : L. Clozel et J. Milne (ed), "*Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions",* vol. II, Persp. in Math. 11, 15-39, Acad. Press Boston (1990).

[Ca3] H. Carayol, *"Preuve de la conjecture de Langlands locale pour* GL_n *: travaux de Harris-Taylor et Henniart"*, Séminaire Bourbaki exp. 857 (1998-99).

[Č] I.V. Čerednik, *"Uniformization of Algebraic Curves by Discrete Arithmetic Subgroups of* $\mathrm{PGL}_2(k_w)$ *with compact quotients*, Math. U.S.S.R. Sbornik 29 (1976) n° 1, 55-78.

[De] P. Deligne, *"Lettre à Piatetskii-Shapiro"*, (1973).

[De-Hu] P. Deligne et D. Husemoller, *"Survey of Drinfeld Modules"*, dans "*Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry"*, Contemporary Mathematics 67, A.M.S, 1987, 25-91.

[D-K-V] P. DELIGNE, D.KAZHDAN et M.-F. VIGNÉRAS, *"Représentations des algèbres simples p-adiques "*, dans I.-N. BERNSTEIN, P. DELIGNE, D.KAZHDAN et M.-F. VIGNÉRAS" : *Représentations des groupes réductifs sur un corps local"*, Hermann (1984).

[Dr1] V.G. DRINFELD, *"Elliptic Modules"*, Math. USSR Sbornik 23 (1974), 561-592.

[Dr2] V.G. DRINFELD, *"Elliptic Modules II"*, Math. USSR Sbornik 31 (1977), 159-170.

[Dr3] V.G. DRINFELD, *"Commutative Subrings of certain Noncommutative Rings"*, Fonct. Anal. Appl. 11 (1977), 9-12.

[Dr4] V.G. DRINFELD, *"Coverings of p-adic symmetric domains"*, Funct. Anal. and Appl. 10 (1976), 107-115.

[Dr5] V.G. DRINFELD, *"Letter to H. Carayol"* (January 12th, 1980).

[Dr6] V.G. DRINFELD, *"Varieties of Modules of F-sheaves"*, Funct. Anal. and Appl. 21 (1987), 107-122.

[Dr7] V.G. DRINFELD, *"Cohomology of compactified manifolds of modules of F-sheaves of rank 2"*, Journal of Soviet math. 46, n° 1 (1989), 1789-1821.

[EGA3] A. GROTHENDIECK, *"Eléments de Géométrie Algébrique, III : Etude cohomologique des faisceaux cohérents"*, Publ. Math. IHES n°11 (1961).

[El] R. ELKIK, *"Solutions d'Equations à Coefficients dans un anneau Hensélien", Ann. Sci. E.N.S. 4ᵉ sér., 6* (1973), 553-604.

[G-M] S.I. GELFAND et YU.I. MANIN, *"Homological Algebra"*, Springer Verlag, Berlin (1999).

[Ge] A. GENESTIER, *"Espaces symétriques de Drinfeld"*, Astérisque n° 234 (1996).

[Gr] A. GROTHENDIECK, *"Sur quelques points d'algèbre homologique"*, Tôhoku Math J 9 (1957), 119-221.

[Ha-Na] G. HARDER ET M.S. NARASIMHAN, *"On the cohomology of moduli spaces of vector bundles on curves"*, Math. Annalen 212 (1975), 215-248.

[H1] M. HARRIS, *"Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces ; elaboration of Carayol's program"*, Invent. Math. 129 (1997), 75-119.

[H2] M. HARRIS, *"Galois properties of cohomological automorphic forms on $GL(n)$"*, J. Math. Kyoto Univ., vol. 39 n° 2 (1999), 299-318.

[H-T] M. HARRIS ET R. TAYLOR, *"On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties "*, preprint (1998).

[He1] G. HENNIART, *"On the local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(n)$ *: the cyclic case"*, Anal. Math. 123, 145-203 (1986).

[He2] G. HENNIART, *"Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique"*, Inv. Math. 139 (2000), n° 2, 439-455.

[I] L. ILLUSIE, *"Complexe cotangent et déformations. I, II"*, Lect. Notes in Math. 239,283, Berlin Heidelberg New York, Springer (1971, 1973).

[L] L. LAFFORGUE, *"Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson"*, Astéristique n° 243, SMF (1997).

[Lau] G. Laumon, *"Cohomology of Drinfeld Modular Varieties, part I"*, Cambridge University Press (1996).

[L-R-S] G. Laumon, M. Rapoport, U. Stuhler, *"$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence"*, Inv. Math. 113, 217-338 (1993).

[Le] B. Lemaire, *"Intégrabilité locale des caractères-distributions de* $\mathrm{GL}_n(F)$*, où* F *est un corps local non archimédien de caractéristique quelconque"*, Compos. Math. 100 (1996), 41-75.

[Me] W. Messing, *"Crystals associated to Barsotti-Tate groups"*, Lect. Notes in Math. 264, Berlin, Springer (1972).

[M] D. Mumford, *"An analytic construction of Degenerating curves over Complete Local Rings"*, Compositio Math. 24 (1972), Fasc. 3, 239-272.

[Mu] G.A. Mustafin, *"Nonarchimedean Uniformization"*, Math. USSR Sbornik 34 (1978), 187-214.

[R] M. Rapoport, *"On the bad reduction of Shimura varieties"*, dans : L. Clozel et J. Milne (ed), "*Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions"*, vol. II, Persp. in Math. 11, 253-321, Acad. Press Boston (1990).

[R-Z] M. Rapoport, T. Zink, *"Period spaces for p-divisible groups"*, Annals of Math. Studies 141 (1996).

[Ra1] M. Raynaud, *"Construction Analytique de Courbes en Géométrie non Archimédienne (d'après David Mumford)"*, Séminaire Bourbaki n° 427 (1972-73), Lect. Notes in Math. 383, Springer-Verlag (1974), 171-185.

[Ra2] M. Raynaud, *"Géomérie Analytique Rigide d'après Tate, Kiehl, ..."*, Table Ronde Anal. non Archim. , Bull. Soc. Math. Fr., Mém. 39-40 (1974), 319-327.

[Ro] J. Rogawski, *"Representations of* GL_n *and division algebras over a p-adic field "*, Duke Math. J. 50 (1983), 161-196.

[S-S] P. Schneider et U. Stuhler, *"The cohomology of p-adic symmetric spaces"*, Inv. Math. 105 (1991), 47-122.

[SGA3] Grothendieck, A. et al., *"SGA 3 : Schémas en Groupes I"*, Lect. Notes in Math. 151 (1970), Springer-Verlag.

[SGA4] Grothendieck, A. et al., *"SGA 4 : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas"*, Lect. Notes in Math. 305 (1973), Springer-Verlag.

[SGA5] Grothendieck, A. et al., *"SGA 5 : Cohomologie* ℓ*-adique et Fonctions L"*, Lect. Notes in Math. 589 (1977), Springer-Verlag.

[T] J. Tate, *"Rigid analytic spaces"*, Inventiones Math. 12 (1971), 257-289.

[W] A. Weil, *"Basic Number theory"*, Springer, Berlin (1985).

[Zi1] Th. Zink, *"Isogenien Formaler Gruppen über einem Lokal Noetherschen Schema"*, Math. Nachr 99 (1980), 273-283.

[Zi2] Th. Zink, *"Cartiertheorie Kommutativer Formaler Gruppen"*, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, Teubner (1984).