INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501 de l'Université Louis Pasteur et du CNRS
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES MARTINGALES D'AZÉMA

par

David KURTZ

AMS Subject classification : 60G44, 81S25.

Mots clés : Martingales normales, Propriété de représentation chaotique, Martingales d'Azéma, Espace de Fock, Calcul stochastique non commutatif.

Table des matières

Introduction

La première définition des intégrales stochastiques multiples remonte aux travaux de 1938 de Norbert Wiener [Wie]. On y trouve mention des chaos browniens (chaos de Wiener) et poissonniens (*discrete chaos*). Pour la définition moderne des intégrales multiples, il faudra attendre 1951 et la publication par le japonais Kiyosi Itô de l'article [Itô]. Dans ces travaux, se trouve déjà la preuve que les fonctionnelles L^2 du mouvement brownien et du processus de Poisson compensé se développent en somme d'intégrales stochastiques multiples par rapport à ces martingales. On dit que le mouvement brownien et le processus de Poisson compensé possèdent la propriété de représentation chaotique. C'est en 1989 et à la suite de travaux de Jacques Azéma [Azé] sur les fermés aléatoires que Michel Émery [Éme] découvrit une nouvelle classe de martingales possédant la propriété de représentation chaotique : les martingales d'Azéma.

Cette thèse est consacrée à divers aspects de l'étude des martingales d'Azéma. Ce thème de recherche est d'autant plus intéressant qu'il est, comme nous le verrons, situé à l'interface de deux théories : celle du calcul stochastique classique et celle du calcul stochastique non commutatif (ou quantique) fondée par Robin Hudson et Kalyanapuram Parthasarathy en 1984 [HuP].

Avant de décrire le contenu de ce travail, nous rappelons quelques définitions qui nous permettrons de situer plus précisément notre propos. Une martingale $X = (X^1,\dots,X^n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite *normale* si pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$ nous avons $\langle X^i,X^j\rangle_t = \delta^{ij}t$, où δ^{ij} désigne le symbole de Kronecker. Pour ces martingales, il est possible de définir des intégrales stochastiques itérées de la forme

$$J_\alpha(f) = \int_{C_k} f(t_1,\dots,t_k)\,\mathrm{d}X^{\alpha_1}_{t_1}\dots\mathrm{d}X^{\alpha_k}_{t_k}$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{d}X^{\alpha_k}_{t_k}\int_0^{t_k-}\mathrm{d}X^{\alpha_{k-1}}_{t_{k-1}}\cdots\int_0^{t_2-}\mathrm{d}X^{\alpha_1}_{t_1}f(t_1,\dots,f_k),$$

où $C_k = \{(t_1,\dots,t_k)\,;\,0 < t_1 < \dots < t_k\}$, α est un élément de l'ensemble $\mathcal{A}_k$ des applications de $\{1,\dots,k\}$ à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ et f appartient à $L^2(C_k)$. L'espace chaotique associé à une telle martingale X est le sous-espace fermé $\Xi(X)$ de $L^2(\sigma(X))$ engendré par les variables aléatoires $J_\alpha(f)$ lorsque k parcourt $\mathbb{N}$, α l'ensemble $\mathcal{A}_k$ et f l'espace de Hilbert $L^2(C_k)$. On dit que la martingale X possède la *propriété de* *représentation chaotique* (PRC) ou est une martingale *chaotique* si $\Xi(X) = L^2(\sigma(X))$. Le mouvement brownien et le processus de Poisson compensé sont des exemples de martingales chaotiques. Une martingale normale X possédant la PRC possède, en particulier, la propriété de représentation prévisible (PRP) et, dans ce cas, les martingales $[X^i,X^j]_t - \delta^{ij}t$ admettent des représentations en intégrales stochastiques par rapport à X. Cette remarque nous conduit à postuler l'existence de processus prévisibles H_k^{ij} tels que

$$[X^i,X^j]_t = \delta^{ij}t + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t H_k^{ij}(s)\,\mathrm{d}X_s^k\,.$$

Ces relations s'appellent une *équation de structure vectorielle* et ont été introduites par Michel Émery en dimension 1 comme point de départ pour l'étude de la PRC des martingales normales. Ces équations ont ensuite été étudiées par Michel Émery et Stéphane Attal en dimension supérieure [AE1]. La théorie des équations de structure et la compréhension de la propriété de représentation chaotique ont évolué depuis le développement, par Robin Hudson et Kalyanapuram Parthasarathy, d'un calcul stochastique non commutatif sur l'espace de Fock bosonique construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Cette théorie non commutative est en effet naturellement reliée aux martingales chaotiques qui en fournissent des interprétations probabilistes via un isomorphisme entre l'espace de Fock et l'espace chaotique associé à la martingale en question.

Les *martingales d'Azéma* sont les martingales normales X solutions d'une équation de structure de la forme :

$$[X^i,X^j]_t = \delta^{ij}t + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \varphi_k^{ij}(X_{s-})\,\mathrm{d}X_s^k\,,$$

où les φ_k^{ij} sont des fonctions affines satisfaisant à certaines conditions de symétrie. Pour de "bonnes" valeurs des paramètres φ_k^{ij}, ces processus fournissent, en dimension 1 et 2, des exemples de martingales normales à accroissements *non indépendants* et possédant la propriété de représentation chaotique (cf. [Éme, AE2]). Comme annoncé ci-dessus, les deux parties indépendantes de cette thèse sont consacrées à divers aspects de l'étude de ces processus.

Dans la première partie, basée sur la prépublication "Représentation nucléaire des martingales d'Azéma" [Ku2], nous explorons les liens existant entre les martingales d'Azéma unidimensionnelles et la théorie du calcul stochastique quantique de Hudson et Parthasarathy. Rappelons que ce calcul permet de construire des intégrales stochastiques de la forme

$$\int_0^t H_s\,\mathrm{d}a_s^{\varepsilon}\,, \qquad \varepsilon \in \{-, \circ\,, +\,, \times\},$$

où H est un processus adapté d'opérateurs sur l'espace de Fock Φ et a^+,a^-,a° sont les trois "bruits" quantiques de base : les processus de création, d'annihilation et de conservation, $a^\times$ étant le temps. Si nous considérons une martingale d'Azéma unidimensionnelle de paramètre $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, *i.e.* une solution X de l'équation de structure

$$[X]_t = t + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-})\,\mathrm{d}X_s, \qquad X_0 = 0,$$

nous pouvons définir, sur un domaine suffisamment régulier de $\Xi(X)(\simeq \Phi)$, l'opérateur $\mathbb{X}_t$ de multiplication par la variable aléatoire X_t. Les différentes extensions du calcul de Hudson et Parthasarathy dues à Paul-André Meyer, Stéphane Attal et Martin Lindsay [AtM, AtL] nous permettent de prouver que le processus d'opérateurs $\mathbb{X}$ est adapté et satisfait à l'équation différentielle stochastique linéaire non commutative

$$\mathbb{X}_t = a_t^+ + a_t^- + \int_0^t (\alpha + \beta \mathbb{X}_s)\,\mathrm{d}a_s^\circ\,.$$

En développant alors en somme d'intégrales stochastiques itérées la solution de cette équation, nous obtenons la représentation en noyau de Maassen–Meyer [Maa, Me4] des opérateurs de multiplication par X_t. Autrement dit, l'opérateur $\mathbb{X}_t$ peut s'écrire comme la somme d'intégrales stochastiques de la forme

$$\int_{C_k \times C_l \times C_m} k(s,t,u)\,\mathrm{d}a_{s_1}^+ \ldots \mathrm{d}a_{s_k}^+\,\mathrm{d}a_{t_1}^\circ \ldots \mathrm{d}a_{t_l}^\circ\,\mathrm{d}a_{u_1}^- \ldots \mathrm{d}a_{u_m}^-\,.$$

Nous déduisons de cette représentation l'action explicite des opérateurs de multiplication par les intégrales stochastiques de la forme $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}X_t$ sur les éléments de l'espace chaotique $\Xi(X)$. Nous pouvons alors démontrer une formule donnant le développement chaotique d'un produit de la forme

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}X_t \int_{C_n} g(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}X_{t_1}\ldots\mathrm{d}X_{t_n}\,,$$

c'est-à-dire du produit d'un élément du premier et du n-ième chaos de X. Nous terminons cette première partie en montrant qu'une condition d'auto-adjonction essentielle des opérateur $\mathbb{X}_t$ entraîne l'unicité en loi des solutions de l'équation de structure d'Azéma et la PRC pour ces processus. Ce critère nous permet de retrouver les caractérisations de Lévy et Watanabe du mouvement brownien (cas $\alpha = \beta = 0$) et du processus de Poisson compensé ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$) ainsi que la PRC de ces processus. Nous retrouvons aussi les résultats analogues pour les martingales d'Azéma dans le cas où β appartient à l'intervalle $[-2,0[$.

La deuxième partie de la thèse reprend les résultats obtenus dans la publication “Une caractérisation des martingales d'Azéma bidimensionnelles de type II” [Ku1]. Les martingales d'Azéma bidimensionnelles sont les solutions d'équations de structure de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} \mathrm{d}[X,X]_t &=& \mathrm{d}t &+& p(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t &+& r(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t &=& && r(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t &+& s(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t &=& \mathrm{d}t &+& s(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t &+& q(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t\,, \end{array}\right.$$

où p,q,r et s sont quatre fonctions affines vérifiant $\mathrm{d}t \otimes \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$ presque partout la relation

$$p(Z_-)s(Z_-) + q(Z_-)r(Z_-) = r(Z_-)^2 + s(Z_-)^2.$$

Stéphane Attal et Michel Émery ont montré [AE2] que ces martingales pouvaient être classées en trois types distincts selon les propriétés des fonctions affines p,q,r et s. Ils ont prouvé, en outre, que les martingales des types I et III sont caractérisées par des propriétés géométriques de leurs trajectoires. Les martingales du type I sont les martingales d'Azéma bidimensionnelles dont tous les sauts sont parallèles à deux directions fixes orthogonales. Les martingales du type III sont, quant à elles, les martingales d'Azéma bidimensionnelles qui ne sont pas du type I et qui vivent dans la réunion de deux droites orthogonales du plan.

Dans la publication précitée, nous proposons une caractérisation analogue pour les martingales du type II. Nous y démontrons le résultat suivant : une martingale d'Azéma bidimensionnelle est du type II si, et seulement si, sa projection sur une direction fixe du plan est un processus "somme de ses sauts". Pour arriver à préciser le concept de processus "somme de ses sauts", nous utilisons la théorie des semimartingales formelles de Laurent Schwartz [ScL]. Une étude précise des trajectoires des martingales solutions de l'équation de structure du type II, au moyen de la formule de compensation établie par Grégoire Taviot dans sa thèse de doctorat [Tav], est nécessaire pour prouver ce résultat.

Première partie

Martingales d'Azéma et calcul stochastique quantique

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous commençons par examiner les liens entre les martingales d'Azéma et le calcul stochastique non commutatif dans le cas discret. Cette étude sera le prétexte à l'introduction de la version discrète des outils de base du calcul stochastique non commutatif : espace de Fock (bébé Fock ou toy Fock space), opérateurs de création, d'annihilation et de conservation, noyaux de Maassen–Meyer. Puis et afin de pouvoir traiter le cas continu dans le prochain chapitre, nous rappelons les définitions de ces mêmes outils dans leurs versions continues.

Dans la suite, tous les processus stochastiques indexés par $\mathbb{R}_+$ considérés sont définis sur un espace probabilisé filtré complet $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$ satisfaisant aux conditions habituelles. Si X est un tel processus, $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$ désigne la filtration naturelle associée à X convenablement complétée et rendue continue à droite. Nous posons aussi $\mathcal{F}_\infty^X = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t^X$. Les martingales sont supposées càd-làg *partout*. Si X est une semimartingale, nous désignons par $[X]$ sa variation quadratique (crochet droit) et lorsqu'elle existe par $\langle X\rangle$ la projection duale prévisible de $[X]$ (crochet oblique). Nous convenons que ces crochets et les intégrales stochastiques usuelles sont pris nuls en 0.

1.1 Le cas discret

Soit $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ une martingale normale en ce sens que $\mathbb{E}[(\Delta X_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}^X] = 1$, où $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. Nous supposerons que $X_0 = 0$. À un tel processus nous associons un sous-espace Ξ de $L^2(\mathcal{F}_N^X)$ appelé *espace chaotique associé à* X. Il est défini comme l'espace vectoriel engendré par les variables aléatoires

$$Y_A = \prod_{n\in A} \Delta X_n\,,$$

lorsque A parcourt l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties de $\{1,\ldots,N\}$. Remarquez que $(Y_A)_{A\in\mathcal{P}}$ est une base orthonormée de Ξ. Lorsque $\Xi = L^2(\mathcal{F}_N^X)$, on dit que la martingale X possède la propriété de représentation chaotique (PRC). Il est bien connu (cf. [Éme]) qu'une martingale normale X possède la PRC si, et seulement si, elle satisfait à une équation de structure discrète de la forme

$$(\Delta X_n)^2 = 1 + \varphi_n \Delta X_n, \qquad X_0 = 0\,,$$

où $(\varphi_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ est un processus prévisible.

L'espace Ξ est isomorphe, en tant qu'espace de Hilbert, à l'espace $\Phi_N = \mathbb{C}^{\mathcal{P}}$ (souvent appelé bébé Fock ou toy Fock space). Notons $(x_A)_{A\in\mathcal{P}}$ la base orthonormée image de $(Y_A)_{A\in\mathcal{P}}$ par cet isomorphisme. et précisons quelques notations ensemblistes qui servirons encore plus loin. Si A est un élément de $\mathcal{P}$, on désigne par $|A|$ son cardinal. Si A et B sont deux éléments disjoints de $\mathcal{P}$, on note $A+B$ leur réunion. Une inégalité de la forme $A < B$ signifie $a < b$ pour tout $a \in A$, $b \in B$. On note $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ de cardinal k et l'on pose $\mathcal{P}_{\geqslant l} = \bigcup_{k\geqslant l}\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{\leqslant l} = \bigcup_{k\leqslant l}\mathcal{P}_k$. Finalement, on désigne par $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des éléments A de $\mathcal{P}$ tels que $A \leqslant n$.

Les opérateurs de création, d'annihilation et de conservation sont définis sur Φ_N par

$$\begin{aligned} a_n^+ x_A &= \mathbb{1}_{\{n\notin A\}} x_{A+\{n\}}\,, \\ a_n^- x_A &= \mathbb{1}_{\{n\in A\}} x_{A-\{n\}}\,, \\ a_n^\circ x_A &= \mathbb{1}_{\{n\in A\}} x_A = a_n^+ a_n^- x_A\,. \end{aligned}$$

Ces opérateurs vérifient

$$\begin{aligned} [a_k^+,a_l^+] &= [a_k^-,a_l^-] = 0, \\ [a_k^+,a_l^-] &= \mathbb{1}_{\{k=l\}}(2a_k^\circ - I), \end{aligned}$$

pour tout $1 \leqslant k,l \leqslant N$, où $[S,T] = ST - TS$ désigne le commutateur des opérateurs S et T. Nous posons aussi $a_A^\varepsilon = \prod_{n\in A} a_n^\varepsilon$ ($\varepsilon \in \{-,\circ,+\}$). La famille d'opérateurs $(a_A^+ a_B^\circ a_C^-)$ indexée par les triplets disjoints A,B,C d'éléments de $\mathcal{P}$ forme une base de l'espace des opérateurs de Φ_N dans lui-même (voir [Me4, p. 19]). La famille $T(A,B,C)$ des composantes d'un opérateur T dans cette base s'appelle le noyau de Maassen–Meyer de T.

Dans la suite, nous nous intéressons à une martingale normale solution de l'équation de structure d'Azéma, autrement dit telle que

$$(\Delta X_n)^2 = 1 + (\alpha + \beta X_{n-1})\Delta X_n\,, \qquad X_0 = 0, \tag{1.1}$$

où α et β sont deux paramètres réels et nous considérons la famille $(\mathbb{X}_n)$ d'opérateurs sur Ξ définis par

$$\mathbb{X}_n f = X_n f, \qquad f \in \Xi.$$

Le but de la fin de cette section est de calculer le noyau de Maassen–Meyer des opérateurs $\mathbb{X}_n$. Nous aurons besoin du résultat suivant (voir [Me2, Pa2]) :

PROPOSITION 1.1. *La famille d'opérateurs $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_n)$ satisfait à l'équation aux différences*

$$\Delta\mathbb{X}_n = a_n^+ + a_n^- + (\alpha + \beta\mathbb{X}_{n-1})a_n^\circ\,, \qquad \mathbb{X}_0 = 0, \tag{1.2}$$

où $\Delta\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_n - \mathbb{X}_{n-1}$ ($1 \leqslant n \leqslant N$).

PREUVE. Il suffit d'écrire en utilisant (1.1) que

$$\begin{aligned}\Delta\mathbb{X}_n Y_A &= \Delta X_n Y_A \\ &= \mathbb{1}_{\{n\in A\}} Y_{A-\{n\}} (\Delta X_n)^2 + \mathbb{1}_{\{n\notin A\}} Y_{A+\{n\}} \\ &= a_n^+ Y_A + a_n^- Y_A + (\alpha + \beta X_n) a_n^\circ Y_A\,.\end{aligned}$$

■

À partir de maintenant nous notons de la même manière l'opérateur $\mathbb{X}_n$ et la variable aléatoire X_n. Nous allons prouver le

THÉORÈME 1.2. *Pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$, l'opérateur X_n s'écrit*

$$X_n = \sum K_n(A,B,C) a_A^+ a_B^\circ a_C^-\,,$$

la somme étant étendue à tous les triplets A,B,C disjoints et où

$$\begin{aligned}K_n(A,B,C) = \beta^{|B|}\big(&\mathbb{1}_{\{|A|=1\,;\,A<B\leqslant n\,;\,C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,C<B\leqslant n\,;\,|C|=1\}}\big) \\ &+ \alpha\beta^{|B|-1}\mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,B\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)\,;\,C=\varnothing\}}\,.\end{aligned}$$

PREUVE. Pour tout $A \subset \{1,\ldots,N\}$, $|A| \geqslant 1$, posons

$$P_\alpha(A) = a^+_{\wedge A} a^\circ_{A-\{\wedge A\}} + a^\circ_{A-\{\wedge A\}} a^-_{\wedge A} + \alpha a^\circ_A\,,$$

avec les conventions $\wedge A = \min A$, $a^\varepsilon_\varnothing = I$ ($\varepsilon \in \{-,\circ,+\}$) et remarquons que si $A < n$ alors

$$P_\alpha(A) a_n^\circ = P_\alpha(A + \{n\}).$$

La conclusion du théorème est valide pour $n = 1$ puisqu'elle se réduit dans ce cas à $X_1 = P_\alpha(\{1\})$. Supposons cette conclusion vérifiée au rang n et remarquons qu'elle est équivalente à l'égalité suivante

$$X_n = \sum_{A\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)} \beta^{|A|-1} P_\alpha(A).$$

En utilisant alors l'équation (1.2), nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= X_n + \beta X_n a^\circ_{n+1} + P_\alpha(\{n+1\}) \\ &= \sum_{A\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)} \beta^{|A|-1} P_\alpha(A) + \sum_{A\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n)} \beta^{|A|} P_\alpha(A + \{n+1\}) + P_\alpha(\{n+1\}) \\ &= \sum_{B\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(n+1)} \beta^{|B|-1} P_\alpha(B),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de ce théorème. ■

Le prochain chapitre est consacré à la preuve des résultats analogues en temps continu : nous y prouvons que les opérateurs de multiplication par une martingale d'Azéma en temps continu satisfont à une équation différentielle stochastique non commutative puis qu'ils admettent des représentations en noyau de Maassen–Meyer. Pour ce faire, nous rappelons dans la prochaine section les définitions de base du calcul stochastique non commutatif. Nous y définissons l'espace de Fock bosonique construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ comme l'espace chaotique associé à une martingale normale.

1.2 Éléments de calcul stochastique quantique

Espace chaotique

Une martingale $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ est dite *normale* si le processus $X_t^2 - t$ est une martingale, autrement dit si $\langle X \rangle_t = t$. Pour une telle martingale, il est possible [Me3] de définir des intégrales stochastiques itérées de la forme

$$\begin{aligned} J_n(f) = \int_{C_n} & f(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}X_{t_1} \ldots \mathrm{d}X_{t_n} \\ & = \int_0^\infty \mathrm{d}X_{t_n} \int_0^{t_n -} \mathrm{d}X_{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2 -} \mathrm{d}X_{t_1} f(t_1, \ldots, t_n) \,, \end{aligned}$$

où $C_n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n \, ; \, t_1 < \cdots < t_n\}$ et f est un élément de $L^2(C_n)$ $(n \geqslant 1)$. Pour $n = 0$, nous posons $C_0 = \{\varnothing\}$, $L^2(C_0) = \mathbb{C}$ et $J_0(c) = c$. Ces intégrales vérifient, en outre, la formule d'isométrie suivante :

$$(1.3) \qquad <J_n(f), J_n(g)> = \mathbb{E}\big[\overline{J_n(f)} J_n(g)\big] = \int_{C_n} \overline{f}(t_1, \ldots, t_n) g(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n \,.$$

Le sous-espace fermé $\Xi_n = J_n(L^2(C_n))$ de $L^2(\mathcal{F}_\infty^X)$ s'appelle *n-ième chaos* de X. On peut montrer que les chaos d'ordre différents sont orthogonaux. Le sous-espace $\Xi = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Xi_n$ de $L^2(\mathcal{F}_\infty^X)$ s'appelle *espace chaotique* associé à la martingale X. Il est constitué des variables aléatoires $\mathcal{F}_\infty^X$-mesurables qui sont de carré intégrable et représentables sous la forme

$$F = \sum_{n \geqslant 0} J_n(f_n) = \mathbb{E}[F] + \sum_{n \geqslant 1} \int_{C_n} f_n(t_1, \ldots, t_n) \, \mathrm{d}X_{t_1} \ldots \mathrm{d}X_{t_n} \,.$$

Lorsque l'espace chaotique est égal à l'espace $L^2(\mathcal{F}_\infty^X)$, on dit que la martingale normale X possède *la propriété de représentation chaotique* (PRC). Le mouvement brownien, le processus de Poisson compensé et certaines martingales d'Azéma sont des exemples de martingales normales ayant cette propriété (voir théorème 2.13, p. 28).

Notation courte

Nous introduisons maintenant la notation courte de Guichardet [Gui] qui permet d'identifier l'espace chaotique Ξ à un espace L^2 qui n'est autre que l'espace de Fock bosonique construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

L'ensemble $\mathbb{R}_+$ étant totalement ordonné, nous pouvons identifier $\bigcup_{n \geqslant 0} C_n$ avec $\mathcal{P} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n$ étant l'ensemble des parties de $\mathbb{R}_+$ à n éléments. Chacun des ensembles $\mathcal{P}_n$ hérite ainsi de la structure d'espace mesuré de C_n (C_0 étant l'espace probabilisé à un point) ce qui permet de munir $\mathcal{P}$ d'une tribu notée $\mathcal{B}$ et d'une mesure μ. Pour tout borélien E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des éléments A de $\mathcal{P}$ tels que $A \subset E$. Nous notons simplement $\mathcal{P}(t)$ l'ensemble $\mathcal{P}([0,t])$. Si A est un élément de $\mathcal{P}$, on pose

$A_{t]} = A \cap [0,t]$, $A_{t)} = A \cap [0,t)$ et $A_{(t} = A \cap (t,\infty)$. Nous utilisons plus loin les notations ensemblistes introduites dans la section précédente. Rappelons qu'en particulier $\mathcal{P}_{\leqslant n} = \bigcup_{k \leqslant n} \mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{\geqslant n} = \bigcup_{k \geqslant n} \mathcal{P}_k$.

La tribu $\mathcal{B}$ n'est autre que la tribu engendrée par les applications N_E définies par $N_E(A) = |A \cap E|$, E parcourant les boréliens de $\mathbb{R}_+$ et, en notant simplement $\mathrm{d}A$ l'élément de volume $\mu(\mathrm{d}A)$ sur $\mathcal{P}$, nous pouvons écrire que pour toute fonction f $\mathcal{B}$-mesurable et $\geqslant 0$ sur $\mathcal{P}$

$$\int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}A = f(\varnothing) + \sum_{n \geqslant 1} \int_{C_n} f(\{t_1, \dots, t_n\})\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n\,.$$

L'espace $\Phi = L^2(\mathcal{P},\mathcal{B},\mu)$ s'appelle *l'espace de Guichardet*: c'est *l'espace de Fock bosonique* construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Si l'on note $\Phi_{t]}$ l'espace $L^2(\mathcal{P}[0,t])$ et $\Phi_{[t}$ l'espace $L^2(\mathcal{P}[t,\infty))$, alors l'application

$$\Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t} \to \Phi, \quad f \otimes g \mapsto (A \mapsto f(A_{t]})g(A_{[t}))$$

s'étend en un isomorphisme unitaire entre les espaces de Hilbert $\Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t}$ et Φ. On dit que l'espace de Fock possède une structure de produit tensoriel continu. Dans la suite, il nous arrivera d'identifier $\Phi_{t]}$ et $\Phi_{[t}$ à des sous-espaces de Φ.

Dans ce contexte, posons pour toute fonction f appartenant à $L^2(\mathcal{P})$

$$\int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A = f(\varnothing) + \sum_{n \geqslant 1} \int_{C_n} f(\{t_1, \dots, t_n\})\,\mathrm{d}X_{t_1} \dots \mathrm{d}X_{t_n}\,.$$

Remarquez qu'en vertu de la formule d'isométrie (1.3), nous pouvons écrire que

$$\left\| \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A \right\|^2 = \int_{\mathcal{P}} |f(A)|^2\,\mathrm{d}A,$$

et par conséquent l'application $f \mapsto F = \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A$ est l'isomorphisme annoncé entre l'espace de Guichardet et Ξ. Dans la suite, il nous arrivera d'identifier sans précaution l'élément f de Φ avec l'élément F de Ξ et, dans ce cas, nous écrirons que $f \equiv F$. Il est aisé de vérifier que si $f \in \Phi_{t]}$, $g \in \Phi_{[t}$ avec $f \equiv F$ et $g \equiv G$, alors $f \otimes g \equiv FG$.

Remarque. Le bébé Fock est souvent considéré comme l'analogue discret de l'espace de Fock. Formellement, la base orthonormée discrète (x_A) du bébé Fock est maintenant remplacée par la base continue $(\mathrm{d}X_A/\sqrt{\mathrm{d}A})$. Cette analogie peut être précisée en des termes mathématiques précis (voir [At1]).

Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, la classe d'équivalence de la fonction $A \mapsto \prod_{t \in A} u(t)$ appartient à $L^2(\mathcal{P})$ et est notée $\varepsilon(u)$. Le vecteur $\varepsilon(0)$ est appelé *état vide* et est noté $\mathbb{1}$. Le sous-espace

$$\mathcal{E} = \mathrm{vect}\{\varepsilon(u); u \in L^2(\mathbb{R}_+)\}$$

de Φ s'appelle le *domaine exponentiel*. Nous considérons aussi le domaine $\mathcal{E}_{lb} = \mathrm{vect}\{\varepsilon(u); u \in L^2_{lb}(\mathbb{R}_+)\}$, où $L^2_{lb}(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable et localement bornées sur $\mathbb{R}_+$. Le domaine $\mathcal{T}$ des vecteurs-test de Maassen est constitué des éléments f de Φ tels que

(i) $\exists T \geqslant 0 : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{P}(T)$,

(ii) $\exists c, M \geqslant 0 : |f(A)| \leqslant cM^{|A|}, \forall A \in \mathcal{P}$.

Les domaines

$$\Phi_p = \{f \in \Phi\,;\, \textstyle\int_{\mathcal{P}} |f(A)|^2 p^{|A|} < \infty\}, \qquad p \geqslant 1,$$

sont les échelles de Fock. Nous notons $\mathcal{K}$ le domaine $\bigcap_{p\geqslant 1} \Phi_p$ et $\mathcal{D}$ le domaine dont les éléments f vérifient les conditions suivantes :

(i) $\exists N \in \mathbb{N},\ T > 0 : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$,

(ii) $\exists M \geqslant 0 : |f| \leqslant M$.

Tous les domaines précédents sont denses dans l'espace de Fock.

Calcul stochastique abstrait sur l'espace de Fock

Dans ce paragraphe, nous introduisons des opérateurs sur l'espace de Fock qui seront indispensables pour définir les intégrales stochastiques non commutatives. Les définitions suivantes sont extraites de [At2] et le lecteur pourra s'y reporter pour plus de détails.

Pour tout $f \in \Phi$, on pose

$$(P_t f)(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}(t)}(A) f(A), \qquad t \geqslant 0.$$

L'opérateur P_t est la projection orthogonale sur le sous-espace fermé de $L^2(\mathcal{P})$ constitué des fonctions à support dans $\mathcal{P}(t)$. Dans la suite, on identifie cet espace à $\Phi_{t]}$. On pose aussi

$$(D_t f)(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}(t)}(A) f(A + \{t\}), \qquad t \geqslant 0.$$

On peut alors montrer que

$$|f(\varnothing)|^2 + \int_0^\infty \int_{\mathcal{P}} |(D_t f)(A)|^2 \,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t = \|f\|^2,$$

de sorte que $D_t f$ est un élément de l'espace de Guichardet pour presque tout $t \geqslant 0$. Plus généralement, on peut montrer que, pour μ-presque tout B dans $\mathcal{P}$, la classe d'équivalence de la fonction $D_B f$ $(= D_{t_1} \cdots D_{t_n} f$, si $B = \{t_1 < \cdots < t_n\})$ est un élément de Φ.

Une famille $(g_t)_{t\geqslant 0}$ d'éléments de Φ est dite *Itô intégrable* si :

(i) $t \mapsto g_t$ est mesurable,

(ii) $g_t \in \Phi_{t]}$ pour tout $t \geqslant 0$,

(iii) $\int_0^\infty \|g_t\|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$.

Pour un tel processus, nous pouvons définir son intégrale d'Itô qui est l'élément $\int_0^\infty g_t \,\mathrm{d}\chi_t$ de Φ défini par

$$\left(\int_0^\infty g_t \,\mathrm{d}\chi_t\right)(A) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}_{\geqslant 1}}(A) g_{\vee A}(A-),$$

où $\vee A = \max A$ et $A- = A - \{\vee A\}$. De plus, la formule d'isométrie suivante est vérifiée :

$$\left\| \int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t \right\|^2 = \int_0^\infty \|g_t\|^2 \, \mathrm{d}t.$$

L'intégrale d'Itô $\int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t$ ne dépend donc que de la classe d'équivalence de g en tant qu'élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+,\Phi)$.

Liens avec le calcul stochastique usuel

Nous indiquons ici comment les opérateurs définis ci-dessus sont naturellement reliés à la théorie classique du calcul stochastique. Le lecteur pourra se reporter à [DMM, chapitre XXI] pour les détails.

Soient X une martingale normale et $F = \int_{\mathcal{P}} f(A) \, \mathrm{d}X_A$ une variable aléatoire appartenant à l'espace chaotique de X. Si on pose $F_t = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t^X]$, alors il est facile de vérifier que F_t est la variable aléatoire $\int_{\mathcal{P}} (P_t f)(A) \, \mathrm{d}X_A$.

Considérons une courbe mesurable $G = (G_t)_{t \geqslant 0}$ à valeurs dans Ξ, adaptée à la filtration $\mathcal{F}^X$, où $G_t = \int_{\mathcal{P}} g_t(A) \, \mathrm{d}X_A$, et vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |G_t|^2 \, \mathrm{d}t\right] < \infty.$$

Cette condition d'intégrabilité nous permet de choisir, pour tout $t \geqslant 0$, un élément dans la classe de G_t de telle sorte que le processus G soit mesurable en (t,ω). Le processus $(g_t)_{t \geqslant 0}$ est Itô intégrable et si ${}^pG$ désigne la projection prévisible du processus mesurable G, on peut écrire que

$$\int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t \equiv \int_0^\infty {}^p(G_t) \, \mathrm{d}X_t \, .$$

Pour le voir, on commence par remarquer que la propriété est vraie pour des processus G de la forme $G = \sum_{i=1}^m G_i \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}$, où $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_m < \infty$ et $G_i = \int_{\mathcal{P}} g_i(A) \, \mathrm{d}X_A$ avec g_i dans $\Phi_{t_i]}$. En effet, pour un tel processus on prouve facilement que

$$\int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t = \sum_{i=1}^m g_i \otimes \chi(t_i,t_{i+1}],$$

où $\chi(t_i,t_{i+1}]$ est l'élément de $\Phi_{[t_i}$ définit par

$$(\chi(t_i,t_{i+1}])(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } |A| \neq 1 \\ \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), & \text{si } A = \{t\}. \end{cases}$$

Par suite, on a

$$\int_0^\infty g_t \, \mathrm{d}\chi_t \equiv \sum_{i=1}^m G_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \int_0^\infty G_t \, \mathrm{d}X_t \, ,$$

et le résultat général s'en déduit par densité des processus élémentaires dans les espaces $L^2(\mathbb{R}_+,\Phi)$ et $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathfrak{P}^X, \mathrm{d}t \otimes \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega))$ où $\mathfrak{P}^X$ désigne la tribu prévisible relative à la filtration $\mathcal{F}^X$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Finalement, la courbe adaptée $\int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\, \mathrm{d}X_A$ étant un élément de $L^2(\mathbb{R}_+,\Xi)$ on peut en choisir une version mesurable en (t,ω) puis considérer sa projection prévisible H. L'ensemble optionnel $\{H \neq \int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\, \mathrm{d}X_A\}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt de sorte que H appartient à la classe de $\int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\, \mathrm{d}X_A$ dans $L^2(\mathbb{R}_+,\Xi)$ et donc vérifie la condition

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |H_t|^2 \,\mathrm{d}t\right] < \infty.$$

On peut alors prouver que la variable aléatoire F admet la représentation prévisible

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty H_t \,\mathrm{d}X_t\,.$$

Il suffit pour ce faire et d'après ce qui précède de vérifier que, sur l'espace de Fock,

$$f = f(\varnothing) + \int_0^\infty D_t f \,\mathrm{d}\chi_t\,,$$

ce qui est immédiat au vu des définitions.

Intégrales stochastiques non commutatives

Nous consacrons le reste de cette section à un rappel succint des principales définitions du calcul stochastique non commutatif de Hudson et Parthasarathy [HuP, Pa1] en adoptant le point de vue d'Attal et Meyer [AtM, AtL].

Ce calcul stochastique permet de définir des intégrales de la forme

$$\int_0^t H_s \,\mathrm{d}a_s^\varepsilon\,, \qquad \varepsilon \in \{-, \circ\,, +\,, \times\},$$

où H est un processus adapté d'opérateurs sur $L^2(\mathcal{P})$ et a^+, a^-, a° sont les processus de création, d'annihilation et de conservation sur l'espace de Fock, $a^\times$ étant le temps. Nous commençons par les nécessaires définitions. Un domaine Dom de Φ est dit *adapté* si, pour tout $f \in \mathrm{Dom}$,

$$\begin{cases} P_t f \in \mathrm{Dom}, \text{ pour tout } t \geqslant 0, \\ D_t f \in \mathrm{Dom}, \text{ pour presque tout } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Les domaines $\mathcal{E}, \mathcal{E}_{lb}, \mathcal{T}, \Phi_p, \mathcal{K}$ et $\mathcal{D}$ introduits précédemment sont des domaines adaptés. Un opérateur K de domaine adapté Dom est dit *adapté à l'instant* t si, pour tout $f \in \mathrm{Dom}$, nous avons

$$\begin{cases} P_t K f = K P_t f, \\ D_s K f = K D_s f, \text{ pour presque tout } s \geqslant t. \end{cases}$$

Soit $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ un processus adapté d'opérateurs (H_t est adapté à l'instant t pour tout $t \geqslant 0$) de domaine commun et adapté Dom. Alors, le processus adapté d'opérateurs T est l'intégrale stochastique non commutative $\int_0^{\cdot} H_s \, \mathrm{d}a_s^\varepsilon$ sur le domaine Dom si, pour tout f dans Dom, l'équation suivante a un sens (du point de vue des domaines et de l'intégrabilité) et est vérifiée

$$T_t f = \int_0^\infty T_{t\wedge s} D_s f \, \mathrm{d}\chi_s + \begin{cases} \int_0^t H_s P_s f \, \mathrm{d}\chi_s, & \text{si } \varepsilon = + \\ \int_0^t H_s D_s f \, \mathrm{d}\chi_s, & \text{si } \varepsilon = \circ \\ \int_0^t H_s D_s f \, \mathrm{d}s, & \text{si } \varepsilon = - \\ \int_0^t H_s P_s f \, \mathrm{d}s, & \text{si } \varepsilon = \times. \end{cases}$$

Ces équations sont connues sous le nom *d'équations Attal–Meyer*. Attal et Lindsay (voir [AtL, théorème 8.4]) ont montré que ces équations admettent une solution partout ou elles ont un sens. Si l'on pose $a^\varepsilon(H)_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}a_s^\varepsilon$, ces solutions sont données par les formules explicites suivantes :

$$\begin{aligned} \big(a^+(H)_t f\big)(A) &= \sum_{s\in A_{t]}} \big(H_s P_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}), \\ \big(a^\circ(H)_t f\big)(A) &= \sum_{s\in A_{t]}} \big(H_s D_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}), \\ \big(a^-(H)_t f\big)(A) &= \int_0^t \big(H_s D_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}) \, \mathrm{d}s, \\ \big(a^\times(H)_t f\big)(A) &= \int_0^t \big(H_s P_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

En considérant le processus adapté $H_t = \mathbb{1}_{[0,t]} I$, on retrouve la définition des opérateurs a_t^+,a_t^- et a_t° :

$$\big(a_t^+ f\big)(A) = \sum_{s\in A_{s]}} f(A - \{s\}), \quad \big(a_t^- f\big)(A) = \int_0^t f(A + \{s\}) \, \mathrm{d}s, \quad \big(a_t^\circ f\big)(A) = |A_{t]}| f(A).$$

Enfin, et pour poursuivre l'analogie avec le cas discret esquissée dans la section précédente, on peut dire que les éléments différentiels $\mathrm{d}a_t^+/\sqrt{\mathrm{d}t}$, $\mathrm{d}a_t^-/\sqrt{\mathrm{d}t}$ et $\mathrm{d}a_t^\circ$ correspondent aux opérateurs a_n^+,a_n^- et a_n° du bébé Fock.

Chapitre 2

Représentation nucléaire des martingales d'Azéma

Dans ce chapitre, nous montrons comment les résultats obtenus dans le cas discret peuvent se généraliser en temps continu. Après quelques rappels sur les martingales d'Azéma, nous prouvons qu'elles satisfont à une équation différentielle stochastique non commutative puis qu'elles admettent une représentation en noyau de Maassen–Meyer. Grâce à ces résultats, nous pouvons montrer une formule de Kabanov chaotique ainsi qu'un critère pour qu'une martingale d'Azéma possède la propriété de représentation chaotique.

2.1 L'équation $\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}a_t^+ + \mathrm{d}a_t^- + (\alpha + \beta Y_t)\,\mathrm{d}a_t^\circ$

Martingales d'Azéma

Les martingales d'Azéma apparaissent pour la première fois dans l'article [Éme]. On appelle martingale d'Azéma de paramètre $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ toute martingale normale solution de l'équation de structure

$$[X]_t = t + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-})\,\mathrm{d}X_s\,, \qquad X_0 = 0. \tag{2.1}$$

Un théorème de Meyer [Me1] nous assure de l'existence de tels processus pour toutes valeurs des paramètres α et β. Émery a prouvé que l'équation de structure précédente admettait une solution unique en loi. Nous pouvons donc parler de *la* martingale d'Azéma de paramètre (α,β). Il a aussi montré que ces processus possèdent la PRC lorsque β appartient à l'intervalle $[-2,0]$. Nous redémontrons plus loin une partie de ces résultats (voir théorème 2.13, p. 28). Dans toute la suite, nous supposons que β est un réel différent de 0 et nous posons $q = 1 + \beta$.

Nous admettons le lemme suivant dont on trouvera une preuve en examinant la démonstration du lemme 7 de [Éme]. En nous inspirant des notations d'Émery, nous désignons par $\Xi_n^T(a)$ l'ensemble des éléments du n-ième chaos de X provenant de l'intégration de fonctions à support inclus dans le simplexe croissant tronqué $C_n(T) = \{(t_1, \ldots, t_n)\,;\, t_1 < \cdots < t_n \leqslant T\}$ et bornées par une constante $a \geqslant 0$.

Lemme 2.1. *Soient X une martingale normale solution de (2.1), F un élément de $\Xi_n^T(a)$ $(n \geqslant 0)$ et G un élément de $\Xi_1^T(b)$. Alors*

$$GF \in \bigoplus_{k=0}^{n+1} \Xi_k^T(c_n ab),$$

où $c_0 = 1$, $c_n = c(\alpha)(1 - c(\beta))^n/(1 - c(\beta)) + c(\beta)^n$ $(n \geqslant 1)$ avec $c(\alpha) = 1 + T + |\alpha|$ et $c(\beta) = 1 + |\beta|$.

À partir de maintenant, $\Xi(X)(\simeq \Phi)$ est l'espace chaotique associé à une martingale d'Azéma de paramètre (α,β). Rappelons que $\mathcal{D}$ désigne le domaine adapté de Φ des fonctions bornées et à support inclus dans $\mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$ pour un $N \geqslant 1$ et un $T > 0$. Notons provisoirement $\mathbb{X}_t$ l'opérateur de domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathbb{X}_t f \equiv X_t \int_{\mathcal{P}} f(A)\, \mathrm{d}X_A\,.$$

Le lemme suivant nous assure que cet opérateur est bien défini.

Lemme 2.2. *L'opérateur $(\mathbb{X}_t,\mathcal{D})$ laisse invariant le domaine $\mathcal{D}$. De plus, si f est un élément de $\mathcal{D}$ à support dans $\mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$ et borné par $M \geqslant 0$, alors pour tout $0 \leqslant t \leqslant T$*

$$\|\mathbb{X}_t f\| \leqslant C_N M \exp(T/2), \qquad \textit{avec} \qquad C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n\,.$$

Preuve. Soit $f = \sum_{n=0}^{N} f_n$ un élément de $\mathcal{D}$ à support dans $\mathcal{P}(T)$ et borné par M. En vertu du lemme précédent, nous pouvons écrire que

$$X_t \int_{\mathcal{P}} f_n(A)\, \mathrm{d}X_A \in \bigoplus_{k=0}^{n+1} \Xi_k^T(c_n M).$$

Nous en déduisons immédiatement la première partie du lemme. Pour la seconde partie, il suffit de constater que la relation précédente implique l'inégalité suivante

$$\|\mathbb{X}_t f_n\|^2 \leqslant M^2 c_n^2 \sum_{k \geqslant 0} \int_{0<t_1<\cdots<t_k<T} \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k = M^2 c_n^2 \exp(T).$$

∎

Remarquez que l'opérateur $\mathbb{X}_t$ étant symétrique sur $\mathcal{D}$, il est fermable. Dans la suite, nous notons de la même manière l'opérateur $\mathbb{X}_t$ et la variable aléatoire X_t.

L'équation différentielle stochastique non commutative

Il est bien connu dans la communauté des probabilités non commutatives (voir par exemple [Me4, Pa2, ScM]) que les martingales d'Azéma doivent, au moins formellement et du point de vue algébrique, être solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathbb{Y}_t = a_t^+ + a_t^- + \int_0^t (\alpha + \beta \mathbb{Y}_s)\,\mathrm{d}a_s^\circ\,.$$

Nous profitons des nouvelles possibilités du calcul stochastique non commutatif, qui permettent en particulier de s'affranchir du domaine exponentiel, pour prouver que le processus des opérateurs de multiplication par une martingale d'Azéma est effectivement l'unique solution de cette équation différentielle.

Théorème 2.3. *Le processus d'opérateurs X est adapté et vérifie sur $\mathcal{D}$ l'équation différentielle stochastique non commutative*

$$X_t = a_t^+ + a_t^- + \int_0^t (\alpha + \beta X_s)\,\mathrm{d}a_s^\circ\,. \tag{2.2}$$

Preuve. Soient f un élément de $\mathcal{D}$ à support inclus dans $\mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$ et borné par $M \geqslant 0$, F la variable aléatoire $\int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A$, H la projection prévisible du processus $\int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\,\mathrm{d}X_A$ et F_t une version càd-làg de la martingale $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t^X]$. Nous avons $F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty H_s\,\mathrm{d}X_s$ et, d'après la formule d'Itô et l'équation de structure (2.1), nous pouvons écrire que

$$X_t F = \int_0^\infty X_{(t\wedge s)-} H_s\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t F_{s-}\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t H_s\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-}) H_s\,\mathrm{d}X_s\,. \tag{2.3}$$

Considérons la courbe adaptée et à valeurs L^0 définie par $s \mapsto G_s = X_{t\wedge s} H_s$. L'ensemble optionnel $\{H \neq \int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\,\mathrm{d}X_A\}$ étant réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, on peut écrire que $\mathrm{d}t \otimes \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$-presque partout

$$G = X_{t\wedge\cdot} \int_{\mathcal{P}} (Df)(A)\,\mathrm{d}X_A\,.$$

Par conséquent, la courbe G est, presque pour tout $t \geqslant 0$, à valeurs dans Ξ. Elle vérifie de plus et d'après le lemme 2.2

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |G_s|^2\,\mathrm{d}s\right] = \int_0^T \|X_{t\wedge s} D_s f\|^2\,\mathrm{d}s \leqslant T C_{N-1}^2 M^2 \exp(T),$$

puisque $D_s f$ est à support inclus dans $\mathcal{P}_{\leqslant N-1}(T)$ et est borné par M presque pour tout $s \geqslant 0$ et que $D_s f = 0$ pour presque tout $s \geqslant T$. La courbe adaptée $s \mapsto g_s = X_{t\wedge s} D_s f$ est donc Itô intégrable et il vient

$$\int_0^\infty g_s\,\mathrm{d}\chi_s = \int_0^\infty X_{t\wedge s} D_s f\,\mathrm{d}\chi_s \equiv \int_0^\infty {}^p(G_s)\,\mathrm{d}X_s = \int_0^\infty X_{(t\wedge s)-} H_s\,\mathrm{d}X_s\,,$$

puisque, d'après les propriétés de la projection prévisible, la prévisibilité de H et le fait que $X_{t\wedge\cdot}$ est une martingale, on a

$$^pG = H\,{}^pX_{t\wedge\cdot} = HX_{(t\wedge\cdot)-}\,.$$

Des raisonnements analogues nous conduisent aux égalités

$$\int_0^t P_s f\,\mathrm{d}\chi_s \equiv \int_0^t F_{s-}\,\mathrm{d}X_s\,,$$
$$\int_0^t D_s f\,\mathrm{d}s \equiv \int_0^t H_s\,\mathrm{d}s\,.$$

Par suite, nous déduisons de l'égalité (2.3) que

$$\text{(2.4)}\quad X_tF \equiv X_tf = \int_0^\infty X_{t\wedge s}D_sf\,\mathrm{d}\chi_s + \int_0^t P_sf\,\mathrm{d}\chi_s + \int_0^t D_sf\,\mathrm{d}s + \int_0^t(\alpha+\beta X_s)D_sf\,\mathrm{d}\chi_s\,.$$

Pour prouver l'adaptation de l'opérateur X_t à l'instant t, nous utilisons la proposition 4.2 de [AtL]. Il s'agit donc de prouver que, pour tout f dans $\mathcal{D}$,

(i) $X_tP_tf = P_tX_tf$,

(ii) $X_t(f-P_tf) = X_t\int_t^\infty D_sf\,\mathrm{d}\chi_s = \int_t^\infty X_tD_sf\,\mathrm{d}\chi_s$.

La première condition est immédiate au vu de la propriété $X_t\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t^X] = \mathbb{E}[X_tF|\mathcal{F}_t^X]$. La seconde est conséquence de (2.4) si l'on remarque que

$$P_u\int_t^\infty D_sf\,\mathrm{d}\chi_s = D_u\int_t^\infty D_sf\,\mathrm{d}\chi_s = 0,\qquad\text{pour presque tout } u<t$$

et que

$$D_u\int_t^\infty D_sf\,\mathrm{d}\chi_s = D_uf,\qquad\text{pour presque tout } u\geqslant t.$$

Finalement, la deuxième partie du théorème est immédiate car (2.4) n'est autre que l'équation Attal–Meyer associée à (2.2) sur $\mathcal{D}$. ■

Nous déduisons de ce théorème le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.4. *L'action de l'opérateur* $(X_t,\mathcal{D})$ *est uniquement déterminée par les paramètres réels* α *et* β.

PREUVE. Il suffit de prouver que l'équation (2.2) admet une unique solution sur $\mathcal{D}$. Considérons donc un processus d'opérateurs adapté Y différence de deux solutions de notre équation sur $\mathcal{D}$. Sur ce domaine, Y vérifie

$$Y_t = \beta\int_0^t Y_s\,\mathrm{d}a_s^\circ\,.$$

Il s'agit de prouver que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$, nous avons $Y_t f = 0$. Au vu du théorème 8.4 de [AtL] (voir aussi p. 15), le processus Y doit vérifier la relation μ-presque sûre

$$\big(Y_t f\big)(A) = \beta \sum_{s \in A_{t]}} \big(Y_s D_s D_{A_{(s}} f\big)(A_{s)}),$$

où $D_B = D_{t_1} \cdots D_{t_n}$ si $B = \{t_1 < \cdots < t_n\}$, $A_{t]} = A \cap [0,t]$, $A_{(s} = A \cap (s,\infty)$ et $A_{s)} = A \cap [0,s)$. Il est alors immédiat que $(Y_t f)(\varnothing) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$. Supposons donc que, pour $n \geqslant 1$, la propriété $(Y_t f)(A) = 0$, pour presque tout $A \in \mathcal{P}_{\leqslant n-1}$, tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$, soit vérifiée. Alors, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}$, nous avons

$$\big(Y_t f\big)(B) = \beta \sum_{s \in A_{t]}} \big(Y_s D_s D_{B_{(s}} f\big)(B_{s)}) = 0,$$

pour presque tout $B \in \mathcal{P}_n$ puisque $D_s D_{B_{(s}} f \in \mathcal{D}$ pour presque tout $B \in \mathcal{P}_n$ et que $|B_{s)}| \leqslant n-1$. Par suite, $Y_t = 0$ sur $\mathcal{D}$ pour tout $t \geqslant 0$, ce qui achève la preuve de ce corollaire. ■

2.2 Développement en noyau de Maassen–Meyer

Résolution de l'équation différentielle stochastique

Partant de l'équation différentielle stochastique non commutative

$$X_t = a_t^+ + a_t^- + \int_0^t (\alpha + \beta X_s)\, \mathrm{d}a_s^\circ\,,$$

nous pouvons développer *formellement* X_t en intégrales stochastiques itérées non commutatives de sorte que

$$\begin{aligned} X_t = {} & \int_{0<t_1<t} \mathrm{d}a_{t_1}^+ + \beta \int_{0<t_1<t_2<t} \mathrm{d}a_{t_1}^+\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ + \beta^2 \int_{0<t_1<t_2<t_3<t} \mathrm{d}a_{t_1}^+\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_3}^\circ + \cdots \\ & + \int_{0<t_1<t} \mathrm{d}a_{t_1}^- + \beta \int_{0<t_1<t_2<t} \mathrm{d}a_{t_1}^-\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ + \beta^2 \int_{0<t_1<t_2<t_3<t} \mathrm{d}a_{t_1}^-\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_3}^\circ + \cdots \\ & + \alpha \int_{0<t_1<t} \mathrm{d}a_{t_1}^\circ + \alpha\beta \int_{0<t_1<t_2<t} \mathrm{d}a_{t_1}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ + \alpha\beta^2 \int_{0<t_1<t_2<t_3<t} \mathrm{d}a_{t_1}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_2}^\circ\, \mathrm{d}a_{t_3}^\circ + \cdots \end{aligned}$$

ou en notation courte et sous la forme normale, c'est-à-dire avec les différentielles dans l'ordre $+, \circ, -$,

$$X_t = \int_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}\times\mathcal{P}} K_t(A,B,C)\, \mathrm{d}a_A^+\, \mathrm{d}a_B^\circ\, \mathrm{d}a_C^- \tag{2.5}$$

avec

$$\begin{aligned} K_t(A,B,C) = \beta^{|B|}\big(& \mathbb{1}_{\{A\in\mathcal{P}_1\,;\, A<B\leqslant t\,;\, C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\, C<B\leqslant t\,;\, C\in\mathcal{P}_1\}} \\ & + \alpha\beta^{-1}\mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\, B\in\mathcal{P}_{\geqslant 1}(t)\,;\, C=\varnothing\}}\big). \end{aligned}$$

Le lecteur pourra comparer le résultat de ce calcul formel avec le développement en noyau de Maassen–Meyer obtenu dans le cas discret (cf. théorème 1.2, p. 9).

En utilisant les résultats de la théorie des opérateurs définis par des noyaux, nous prouvons maintenant que l'expression du membre de droite de (2.5) définit bien un opérateur sur un domaine contenant $\mathcal{D}$. Pour ce faire, on considère la famille K'_t définie par

$$\begin{aligned} K'_t(A,B,C) &= \sum_{V\subset B} K_t(A,V,C) \\ &= q^{|B_{(\vee A,t]}|}\mathbb{1}_{\{A\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,C=\varnothing\}} + q^{|B_{(\vee C,t]}|}\mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,C\in\mathcal{P}_1(t)\}} \\ &\qquad\qquad + \alpha\frac{q^{|B_{t]}|}-1}{q-1}\mathbb{1}_{\{A=C=\varnothing\}}, \end{aligned}$$

où $B_E = B\cap E$ pour tout B dans $\mathcal{P}$ et E borélien de $\mathbb{R}_+$. Si l'on pose (voir [BeL])

$$\|K_t\|^2_{a,b,c} = \int_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}} \sup_B \frac{|K'_t(A,B,C)|^2}{a^{|A|}b^{2|B|}c^{|C|}}\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}C,$$

nous pouvons écrire que, pour tout $a,c>0$ et $b = 1\vee|q|$,

$$\|K_t\|^2_{a,b,c} \leqslant \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)t + 4|\alpha\beta^{-1}|^2.$$

L'inégalité précédente entraîne (voir [BeL, prop. 2.2.] ou [Me4, p. 100]) que l'expression

$$(2.6)\qquad \big(\mathbb{K}_t f\big)(A) = \int_{\mathcal{P}} \sum_{U+V+W=A} K_t(U,V,M)f(V+W+M)\,\mathrm{d}M$$

définit un opérateur $\mathbb{K}_t$ dont le domaine de définition contient $\Phi_{b^2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon>0$ et laissant stable le domaine $\mathcal{K}$.

Comme $K_t(A,B,C) = 0$ à moins que $A,B,C\subset[0,t]$, l'opérateur $\mathbb{K}_t$ est t-adapté sur le domaine adapté $\mathcal{K}$. D'autre part, un résultat classique sur les opérateurs définis par des noyaux (cf. [Lin, proposition 3.1]) nous apprend que le noyau K_t est uniquement déterminé par l'action de $\mathbb{K}_t$ sur le domaine $\mathcal{D}$. Finalement et puisque $K_t(A,B,C) = \overline{K_t}(C,B,A)$, l'opérateur $\mathbb{K}_t$ est symétrique sur son domaine de définition, donc il est fermable.

Le résultat suivant est la clé de ce chapitre.

PROPOSITION 2.5. *Le processus adapté d'opérateurs $\mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle stochastique non commutative (2.2) sur $\mathcal{D}$.*

Pour prouver cette proposition nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 2.6. *Soient $t\geqslant 0$ et $f\in\mathcal{T}$ tel que* $\operatorname{supp} f\subset\mathcal{P}(T)$ *et $|f(A)|\leqslant cM^{|A|}$ pour tout $A\in\mathcal{P}$. Alors, il existe deux constantes $\tilde c$ et $\tilde M$ telles que pour tout $s\in[0,t]$*

(i) $(\mathbb{K}_s f)(A) = 0$, *dès que A n'est pas inclus dans $[0,T\vee t]$,*

(ii) $|(\mathbb{K}_s f)(A)|\leqslant \tilde c\tilde M^{|A|}$, $\forall A\in\mathcal{P}$.

Preuve. Soit donc $f \in \mathcal{T}$ comme dans l'énoncé et remarquons que pour tout $s \in [0,t]$ nous avons

(j) $K_s(A,B,C) = 0$, dès que l'un des A, B ou C n'est pas inclus dans $[0,t]$,

(jj) $|K_s(A,B,C)| \leqslant (2 + |\alpha\beta^{-1}|)(|\beta| \vee 1)^{|A|+|B|+|C|}$, $\forall A,B,C \in \mathcal{P}$.

Il est clair d'après (j) et (2.6) que (i) est vérifié. Pour prouver (ii), nous posons $c_1 = c \vee (2 + |\alpha\beta^{-1}|)$, $M_1 = M \vee (|\beta| \vee 1)$ et nous écrivons que

$$|(\mathbb{K}_s f)(H)| \leqslant \int_{\mathcal{P}(T)} \sum_{A+B+C=H} c_1 M_1^{|A|+|B|+|U|} c_1 M_1^{|B|+|C|+|U|} \,\mathrm{d}U$$

$$\leqslant c_1^2 \exp(TM_1^2)(3M_1^2)^{|H|}.$$

La condition (ii) est alors vérifiée avec $\tilde{c} = c_1^2 \exp(TM_1^2)$ et $\tilde{M} = 3M_1^2$. ■

Preuve de la proposition 2.5. Nous allons prouver un résultat un peu plus général, à savoir que le processus d'opérateurs $\mathbb{K}$ satisfait à (2.2) sur le domaine adapté $\mathcal{T}$ des vecteurs-test de Maassen.

Nous commençons par prouver que les équations d'Attal–Meyer associées à notre équation différentielle stochastique sont définies pour tout vecteur-test. Soit donc $f \in \mathcal{T}$ tel que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{P}(T)$ et $|f(A)| \leqslant cM^{|A|}$ pour tout $A \in \mathcal{P}$. Il s'agit de prouver que la courbe mesurable $(\mathbb{K}_{t\wedge s} D_s f)_{s\geqslant 0}$ est Itô intégrable. Le processus d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant adapté sur $\mathcal{T}$, il est clair que $\mathbb{K}_{t\wedge s} D_s f \in \Phi_{s]}$ pour tout $s \geqslant 0$. D'autre part et pour presque tout $s \geqslant 0$, $D_s f$ est un vecteur-test à support dans $\mathcal{P}(T)$ et tel que $|D_s f(A)| \leqslant cMM^{|A|}$ pour tout A dans $\mathcal{P}$. Par conséquent et en vertu du lemme précédent, il existe deux constantes $\tilde{c}$ et $\tilde{M}$ telles que

$$\int_0^\infty \|\mathbb{K}_{s\wedge t} D_s f\|^2 \,\mathrm{d}s = \int_0^T \|\mathbb{K}_{s\wedge t} D_s f\|^2 \,\mathrm{d}s \leqslant T\tilde{c}^2 \exp((t \vee T)\tilde{M}^2),$$

ce qui prouve notre assertion.

Par suite, en vertu d'un théorème d'extension dû à Attal et Meyer (cf. [AtM, théorème 2]) et de la symétrie de l'opérateur $\mathbb{K}_t$, il suffit de prouver le résultat sur le domaine $\mathcal{E}_{lb}$. Or, sur ce domaine, l'opérateur $\int_0^t \mathbb{K}_s \,\mathrm{d}a_s^\circ$ admet la représentation nucléaire (cf. [Me4, p. 145]) dont le noyau est donné par la formule suivante :

$$L_t(A,B,C) = \mathbb{1}_{\{B \in \mathcal{P}_{\geqslant 1}(t)\}} K_{\vee B}(A, B-, C).$$

Il suffit donc pour conclure de remarquer que la relation

$$K_t(A,B,C) = \mathbb{1}_{\{A\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,B=C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{C\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,A=B=\varnothing\}}$$

$$+ \alpha\mathbb{1}_{\{B\in\mathcal{P}_1(t)\,;\,A=C=\varnothing\}} + \beta L_t(A,B,C),$$

valable pour tout $A,B,C \in \mathcal{P}$, est équivalente à (2.2) sur $\mathcal{E}_{lb}$. ■

Au vu du théorème 2.3 et du corollaire 2.4, nous venons de démontrer que l'opérateur de multiplication par la variable aléatoire X_t admet une représentation nucléaire. Plus précisément, nous avons le

Théorème 2.7. *L'opérateur X_t de multiplication par une martingale d'Azéma admet la représentation en noyau de Maassen–Meyer donnée par le noyau K_t.*

Comme conséquence de ce résultat, nous obtenons l'action explicite des opérateurs X_t sur $\mathcal{D}$, résultat déjà connu pour $\beta \in [-2,0]$ (cf. [Pa2, p. 556]).

PROPOSITION 2.8. *Pour tout f dans $\mathcal{D}$, nous avons*

$$\big(X_t f\big)(A) = \sum_{s \in A_{t]}} q^{|A_{(s,t]}|} f(A - \{s\}) + \int_0^t q^{|A_{(s,t]}|} f(A + \{s\})\,\mathrm{d}s + \alpha \frac{q^{|A_{t]}|} - 1}{q-1} f(A).$$

Lorsque $\beta = -1$ et $\alpha = 0$, la martingale solution de l'équation de structure correspondante s'appelle *première martingale d'Azéma* (voir [Yor, p. 79]) et, dans ce cas, la formule précédente prend la forme particulière suivante :

$$\big(X_t f\big)(A) = f(A - \vee(A_{t]})) + \int_{\vee(A_{t]})}^t f(A + \{s\})\,\mathrm{d}s.$$

PREUVE. Pour tout $f \in \mathcal{D}$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}\big(X_t f\big)(A) &= \int_{\mathcal{P}} \sum_{U+V+W=A} K_t(U,V,M) f(V + W + M)\,\mathrm{d}M \\ &= \sum_{s \in A_{t]}} \Big(\sum_{V \subset A} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{s<V\leqslant t\}}\Big) f(A - \{s\}) \\ &\quad + \int_0^t \Big(\sum_{V \subset A} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{s<V\leqslant t\}}\Big) f(A + \{s\})\,\mathrm{d}s + \alpha\beta^{-1} \sum_{V \subset A : |V| \geqslant 1} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{V \leqslant t\}} f(A),\end{aligned}$$

d'où le résultat en remarquant que

$$\sum_{V \subset A} \beta^{|V|} \mathbb{1}_{\{s<V\leqslant t\}} = q^{|A_{(s,t]}|}.$$

■

Une formule de Kabanov chaotique

Comme application de ce qui précède, nous obtenons une formule de Kabanov donnant le développement chaotique du produit d'un élément du premier chaos avec un élément du n-ième chaos de la martingale d'Azéma de paramètre (α,β). Sur ce sujet, le lecteur pourra consulter [RuV, théorème 3.1, p.57] et [PSV, théorème III.1] qui proposent des formules analogues (bien que différentes dans la forme).

Dans la suite φ désigne une fonction bornée et à support compact dans $\mathbb{R}_+$. Nous notons $\mathbb{J}(\varphi)$ l'opérateur de domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathbb{J}(\varphi) f \equiv J_1(\varphi) \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A = \int_0^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}X_t \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A\,.$$

D'après le lemme 2.1, cet opérateur est bien défini et laisse stable le domaine $\mathcal{D}$.

PROPOSITION 2.9. *L'opérateur $\mathbb{J}(\varphi)$ admet sur $\mathcal{D}$ la représentation en intégrale stochastique suivante :*

$$\mathbb{J}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t) I \, \mathrm{d}a_t^+ + \int_0^\infty \varphi(t) I \, \mathrm{d}a_t^- + \int_0^\infty \varphi(t)(\alpha + \beta X_t) \, \mathrm{d}a_t^\circ .$$

PREUVE. Elle est quasiment identique à celle du théorème 2.3. ■

Formellement, l'opérateur $\mathbb{J}(\varphi)$ admet donc une représentation nucléaire dont le noyau J_φ est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} J_\varphi(A,B,C) = \varphi(A) \mathbb{1}_{\{|A|=1\,;\,B=C=\varnothing\}} + \varphi(C) \mathbb{1}_{\{A=B=\varnothing\,;\,|C|=1\}} \\ + \alpha\varphi(B) \mathbb{1}_{\{A=C=\varnothing\,;\,|B|=1\}} + \beta \mathbb{1}_{\{B \in \mathcal{P}_{\geqslant 1}\}} \varphi(\vee B) K_{\vee B}(A, B-, C), \end{aligned}$$

où $\vee B = \max B$, $B- = B - \{\vee B\}$ et où $\varphi(A) = \varphi(t)$ si $|A| = 1$, $A = \{t\}$. En développant l'égalité précédente, il vient

$$\begin{aligned} J_\varphi(A,B,C) = \varphi(A) \mathbb{1}_{\{|A|=1\,;\,B=C=\varnothing\}} + \varphi(C) \mathbb{1}_{\{A=B=\varnothing\,;\,|C|=1\}} + \alpha\varphi(B) \mathbb{1}_{\{A=C=\varnothing\,;\,|B|=1\}} \\ + \mathbb{1}_{\{|B|\geqslant 1\}} \beta^{|B|} \varphi(\vee B) \big(\mathbb{1}_{\{A \in \mathcal{P}_1\,;\,A<B\,;\,C=\varnothing\}} + \mathbb{1}_{\{A=\varnothing\,;\,C<B\,;\,C\in\mathcal{P}_1\}} + \alpha\beta^{-1} \mathbb{1}_{\{|B|\geqslant 2\,;\,A=C=\varnothing\}} \big). \end{aligned}$$

Soit $T > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,T]$. Alors

(i) $J_\varphi(A,B,C) = 0$, dès que l'un des A, B ou C n'est pas inclus dans $[0,T]$,

(ii) $|J_\varphi(A,B,C)| \leqslant 2(2 + |\alpha| + |\alpha\beta^{-1}|) \|\varphi\|_\infty (|\beta| \vee 1)^{|A|+|B|+|C|}$, $\forall A,B,C \in \mathcal{P}$,

et donc, d'après un théorème de Maassen (voir [Maa] ou [Me4, p. 96]), le noyau J_φ définit via la formule (2.6) un opérateur dont le domaine contient (au moins) le domaine $\mathcal{T}$. Cet opérateur coïncide avec $\mathbb{J}(\varphi)$ sur $\mathcal{D}$. On peut calculer l'action de l'opérateur de multiplication par $J_1(\varphi)$ et l'on obtient que, pour tout f dans $\mathcal{D}$, (avec la notation $\wedge A = \min A$)

$$\begin{aligned} \big(\mathbb{J}(\varphi) f\big)(A) = \sum_{t \in A} \varphi(t) f(A - \{t\}) + \int_0^\infty \varphi(t) f(A + \{t\}) \, \mathrm{d}t + \alpha \sum_{t\in A} \varphi(t) f(A) \\ + \sum_{V \subset A\,:\,|V|\geqslant 1} \varphi(\vee V) \beta^{|V|} \sum_{t \in A\,:\,t < \wedge V} f(A - \{t\}) \\ + \sum_{V \subset A\,:\,|V|\geqslant 1} \varphi(\vee V) \beta^{|V|} \int_0^{\wedge V} f(A + \{t\}) \, \mathrm{d}t \\ + \alpha\beta^{-1} \sum_{V\subset A\,:\,|V|\geqslant 2} \varphi(\vee V) \beta^{|V|} f(A). \end{aligned}$$

Nous déduisons de la formule précédente le

THÉORÈME 2.10. *Soit f une fonction sur C_n bornée et à support compact. Pour tout $(t_1, \ldots, t_{n+1})$ dans C_{n+1}, nous notons A_n^- l'ensemble $\{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$, A_n° l'ensemble $\{t_1, \ldots, t_n\}$ et A_n^+ l'ensemble $\{t_1, \ldots, t_{n+1}\}$. Alors*

$$J_1(\varphi) J_n(f) = J_{n-1}(h^-) + J_n(h^\circ) + J_{n+1}(h^+),$$

où

$$
\begin{aligned}
h^-(t_1,\dots,t_{n-1}) &= \int_0^\infty \varphi(t) f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n-1} (q^{l-k+1}-1)\varphi(t_l)\int_0^{t_k} f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

$$
h^\circ(t_1,\dots,t_n) = \alpha f(A_n^\circ)\Bigg(\sum_{k=1}^n \varphi(t_k) + \sum_{k=2}^n \frac{q^k-1-k(q-1)}{q-1}\varphi(t_k)\Bigg),
$$

$$
\begin{aligned}
h^+(t_1,\dots,t_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(t_k) f(A_n^+ - \{t_k\}) \\
&\qquad + \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n+1} (q^{l-k+1}-1)\varphi(t_l)\sum_{m=1}^{k-1} f(A_n^+ - \{t_m\}).
\end{aligned}
$$

PREUVE. Étendons f en une fonction $\tilde f$ sur $\mathcal{P}$ et à support dans $\mathcal{P}_n$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
h^-(t_1,\dots,t_{n-1}) &= \big(\mathbb{J}(\varphi)\tilde f\big)(A_n^-) \\
&= \int_0^\infty \varphi(t) f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n-1} \varphi(t_l)\int_0^{t_k} f(A_n^- + \{t\})\,\mathrm{d}t \sum_{V\,:\,\wedge V=t_k,\,\vee V=t_l} \beta^{|V|},
\end{aligned}
$$

d'où le résultat en remarquant que

$$
\sum_{V\,:\,\wedge V=t_k,\,\vee V=t_l} \beta^{|V|} = q^{l-k+1}-1.
$$

Les deux autres égalités se démontrent de la même manière en remarquant que

$$
\begin{aligned}
h^\circ(t_1,\dots,t_n) &= \big(\mathbb{J}(\varphi)\tilde f\big)(A_n^\circ), \\
h^+(t_1,\dots,t_{n+1}) &= \big(\mathbb{J}(\varphi)\tilde f\big)(A_n^+).
\end{aligned}
$$

■

2.3 Opérateurs de multiplication et PRC

Dans cette section, nous prouvons que l'auto-adjonction essentielle des opérateurs $(X_t,\mathcal{D})$ introduits à la section 2.1 entraîne l'unicité en loi des martingales solutions de l'équation de structure

$$
[X]_t = t + \int_0^t (\alpha + \beta X_{s-})\,\mathrm{d}X_s, \qquad X_0 = 0, \tag{2.7}
$$

ainsi que la PRC pour cette loi. Ce résultat nous permettra de retrouver les caractérisations de Lévy et Watanabe du mouvement brownien (cas où $\alpha = \beta = 0$) et du processus de Poisson compensé (cas où $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$) ainsi que le fait que ces martingales possèdent la PRC. Nous retrouverons aussi les résultats analogues pour les martingales d'Azéma lorsque β appartient à l'intervalle $[-2,0[$.

THÉORÈME 2.11. *Soit X une martingale solution de l'équation de structure (2.7) et $(X_t,\mathcal{D})$ l'opérateur de multiplication correspondant. Supposons que, pour tout $t \geqslant 0$, la fermeture dans l'espace de Fock de l'opérateur X_t soit auto-adjoint. Alors, la loi de la martingale correspondante est uniquement déterminée par les paramètres réels α et β et elle possède la propriété de représentation chaotique.*

Nous aurons besoin du lemme technique suivant.

LEMME 2.12. *Soient $\mathcal{C}_n$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞ à support compact et ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. Alors, si*

$$\hat{f}(t_1,\ldots,t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(\lambda_1 t_1+\cdots+\lambda_n t_n)} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,\mathrm{d}\lambda_1\ldots\mathrm{d}\lambda_n$$

désigne la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f, l'image $\hat{\mathcal{C}}_n$ de $\mathcal{C}_n$ par cette application est dense dans $L^2(\nu)$.

PREUVE. La régularité de la mesure ν nous assure que l'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\nu)$. Par convolution et puisque la mesure ν est une mesure finie, le même résultat est vrai pour $\mathcal{C}_n$. Remarquons alors que l'adhérence de $\hat{\mathcal{C}}_n$ dans la topologie de la convergence uniforme contient $\mathcal{C}_n$. En effet, si f est un élément de $\mathcal{C}$, il existe g dans l'espace de Schwartz tel que $\hat{g} = f$ et une suite (g_n) dans $\mathcal{C}_n$ tels que $g_n \to g$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent tels que $\|\hat{g}_n - f\|_\infty \leqslant \|g_n - g\|_1 \to 0$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que l'adhérence de $\hat{\mathcal{C}}_n$ dans $L^2(\nu)$ contient elle aussi $\mathcal{C}_n$. ∎

PREUVE DU THÉORÈME 2.11. Supposons donc que l'opérateur $\overline{X_t|\mathcal{D}}$ soit auto-adjoint pour tout $t \geqslant 0$ et notons $(U(\lambda,t))_{\lambda\in\mathbb{R}}$ le groupe unitaire associé.

Nous commençons par remarquer que $U(\lambda,t)$ est l'opérateur de multiplication par la variable aléatoire $\mathrm{e}^{i\lambda X_t}$. En effet, d'après le théorème de Nelson sur les vecteurs analytiques, nous avons

$$U(\lambda,t)f \equiv \sum_{k\geqslant 0} \frac{i^k \lambda^k X_t^k}{k!} F,$$

pour tout $F = \int_{\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A$ appartenant à une partie dense $\mathcal{L}$ de Ξ. La convergence du membre de droite étant presque sûre à extraction d'une sous-suite près, nous pouvons écrire que

$$U(\lambda,t)f \equiv \mathrm{e}^{i\lambda X_t} F, \qquad F \in \mathcal{L}.$$

Il est alors facile de se convaincre que le même résultat est vrai pour tout $F \in \Xi$. Nous en déduisons que les fonctions caractéristiques

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i(\lambda_1 X_{t_1}+\cdots+\lambda_n X_{t_n})}\right] = <\mathbb{1},U(\lambda_1,t_1)\cdots U(\lambda_n,t_n)\mathbb{1}>$$

sont uniquement déterminées par l'action des opérateurs X_t sur $\mathcal{D}$, donc par les paramètres α et β et la loi de la martingale X est uniquement déterminée par l'équation de structure (2.7).

Pour la PRC, remarquons que notre hypothèse entraîne que la multiplication par les variables aléatoires $\mathrm{e}^{i\lambda X_t}$ laisse stable l'espace chaotique de X. Par conséquent, elles appartiennent elles-mêmes à cet espace et donc aussi les variables aléatoires de la forme

$$\begin{aligned}\hat{f}(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(\lambda_1 X_{t_1}+\cdots+\lambda_n X_{t_n})} f(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\,\mathrm{d}\lambda_1\dots\mathrm{d}\lambda_n \\ = \lim_{k\to+\infty} 2^{-nk} \sum_{\lambda\in D_{n,k}} \mathrm{e}^{i(\lambda_1 X_{t_1}+\cdots+\lambda_n X_{t_n})} f(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\end{aligned}$$

où $D_{n,k} = \{(k_1 2^{-k},\dots,k_n 2^{-k})\,;\,(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n\}$ et f est une fonction continue à support compact. Nous déduisons alors du lemme précédent que, pour tout $n\geqslant 1$ et tout $(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$, l'espace $L^2(\sigma(X_{t_1},\dots,X_{t_n}))$ est inclus dans Ξ. Mais, ceci entraîne que $L^2(\mathcal{F}_\infty^X)$ est inclus dans Ξ, autrement dit que la martingale X possède la PRC. ■

REMARQUE. Nous pensons que ce théorème pourrait permettre de démontrer que toutes les martingales d'Azéma possèdent la PRC. Il faudrait démontrer que les opérateurs $(X_t,\mathcal{D})$ sont essentiellement auto-adjoints, autrement dit il faudrait prouver que l'image de $\mathcal{D}$ par l'opérateur $X_t + iI$ est dense dans Φ pour tout $t\geqslant 0$. Il est possible que les formules explicites de la proposition 2.8 (voir p. 24) soit un bon point de départ pour une telle étude.

Nous terminons cette partie en démontrant le théorème suivant qui est une application du précédent dans les "bons" cas. Les résultats énoncés ne sont guère nouveaux puisqu'ils figurent déjà tous dans [Éme]; mais la preuve que nous en proposons est, à notre connaissance, inédite.

THÉORÈME 2.13. *Soit X une martingale normale solution de l'équation de structure*

$$[X]_t = t, \qquad X_0 = 0.$$

Alors, la loi de X est celle d'un mouvement brownien standard et cette loi possède la PRC.

Soit Y une martingale normale solution de l'équation de structure

$$[Y]_t = t + \alpha Y_t, \qquad Y_0 = 0.$$

Alors, il existe un processus de Poisson standard N tel que $Y_t = \alpha(N_{t/\alpha^2} - t/\alpha^2)$. De plus, la loi d'un tel processus possède la PRC.

Soit X une martingale solution de l'équation de structure (2.7) avec β appartenant à l'intervalle $[-2,0[$. Alors, la loi de la martingale X est uniquement déterminée par les paramètres réels α et β et possède la PRC.

Preuve. Soit donc X une martingale solution de l'équation de structure $[X]_t = t$. D'après le théorème 2.3 (voir p. 19), l'opérateur X_t correspondant est égal à $Q_t = a_t^+ + a_t^-$. Cet opérateur est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}$. Pour le voir, remarquons que si $f \in \mathcal{D}$ est tel que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{P}_{\leqslant N}(T)$, $|f| \leqslant M$ alors

(i) $\operatorname{supp} Q_t f \subset \mathcal{P}_{\leqslant N+1}(T)$,

(ii) $|Q_t f| \leqslant (N+1+t)M$.

Nous en déduisons que $Q_t\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ et que pour tout $n \geqslant 1$

$$\|Q_t^n f\| \leqslant M \exp(T/2) \prod_{k=1}^{n} (N+k+t).$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n \|Q_t^n f\|/n!$ est donc au moins égal à 1 et, en vertu du théorème de Nelson sur les vecteurs analytiques, ceci nous assure de l'auto-adjonction essentielle de l'opérateur X_t sur $\mathcal{D}$. L'unicité en loi et la PRC de la martingale X sont alors des conséquences du théorème précédent. Il suffit maintenant pour conclure de se rappeler que la loi dans l'état vide du processus d'opérateurs Q est celle d'un mouvement brownien.

Soit Y une martingale solution de $[Y]_t = t + \alpha Y_t$. L'opérateur Y_t correspondant est égal à $Q_t + \alpha a_t^\circ$. Un raisonnement analogue à celui ci-dessus nous montre qu'il est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}$. Pour conclure, nous remarquons que sa loi dans l'état vide est celle d'un processus de Poisson compensé d'intensité $1/\alpha^2$ et de saut d'amplitude α (voir [Me4, p. 74]).

Finalement, soit X une solution de l'équation de structure (2.7) avec $\beta \in [-2,0[$ et X_t l'opérateur de multiplication correspondant. L'opérateur $\mathbb{K}_t$ défini dans la section précédente est une extension de X_t dont le domaine contient le domaine $\mathcal{E}_{lb}$. Or, on peut montrer que $\mathbb{K}_t$ est un opérateur borné sur ce domaine (voir [Pa2, théorèmes 4.3 et 4.9]). Par conséquent, l'opérateur X_t est symétrique et borné donc essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{D}$ et le théorème 2.11 nous permet encore une fois de conclure. ■

Deuxième partie

Une caractérisation des martingales d'Azéma bidimensionnelles de type II

Chapitre 3

Position du problème

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et résultats de base de la théorie des équations de structure vectorielles telle que développée par Stéphane Attal, Michel Émery [AE1] et Grégoire Taviot dans sa thèse de doctorat [Tav]. Nous démontrons aussi quelques résultats nouveaux qui nous servirons par la suite. Nous étudions, en particulier, quelques aspects de la théorie qui sont spécifiques à la dimension 2.

Nous rappelons ensuite la définition des martingales d'Azéma multidimensionnelles. Dans [AE2], où ces processus apparaissent pour la première fois, les auteurs se sont intéressés plus particulièrement au cas bidimensionnel. Ils ont prouvé l'existence des martingales d'Azéma en dimension 2 et ont montré que ces processus pouvaient être classés en trois types distincts. Ces résultats sont complétés par une caractérisation des martingales des type I et III selon des propriétés géométriques de leurs trajectoires. Nous rappelons ci-dessous ces résultats (voir théorème 3.6, p. 42).

Signalons au passage l'existence de la note [KuP], écrite en collaboration avec Anthony Phan. Elle contient la correction d'une légère erreur détectée dans [AE2] par le premier auteur ainsi que des exemples de martingales normales convergentes dus au second auteur.

Suivant les notations de [AE1], nous notons E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle, g la forme bilinéaire définie sur $E \times E$ par le produit scalaire euclidien et $\|e\|$ la norme euclidienne du vecteur e; la forme g est un élément du produit tensoriel $E^* \otimes E^*$, où E^* désigne le dual de E. L'isomorphisme canonique entre E et son dual E^* permet de munir E^* d'une structure d'espace euclidien. Nous notons g^* la forme bilinéaire définie sur $E^* \times E^*$ par le produit scalaire; c'est un élément de $E \otimes E$. Les coordonnées sur E, dans un repère orthonormé, sont notées $(x^1, \ldots, x^n)$ ou (x,y) si $n = 2$. Tous les processus considérés sont définis sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$ satisfaisant aux conditions habituelles. Toutes les martingales étudiées sont supposées continues à droite et pourvues de limite à gauche (càd-làg) *partout*. Nous notons μ la mesure $\mathrm{d}t\otimes\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, m le processus défini par $m(t) = t$ et nous convenons que tous les crochets et intégrales stochastiques sont pris nuls en zéro. Les relations entre variables aléatoires sont valables à $\mathbb{P}$-équivalence près. De même et sauf mention expresse du contraire, les relations entre processus sont valables à ensemble évanescent près.

3.1 Équations de structure vectorielles

Martingales normales

Une martingale X à valeurs dans E est dite *normale* si le processus $X \otimes X - g^* m$, à valeurs dans $E \otimes E$, est une martingale. Dans un repère orthonormé, cette définition équivaut à la condition $\langle X^i, X^j \rangle = \delta^{ij} m$ pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$, où δ^{ij} désigne le symbole de Kronecker. Lorsque de plus X possède la propriété de représentation prévisible, la martingale $[X,X] - g^* m$ est une intégrale stochastique par rapport à X. Il existe donc un tenseur prévisible H à valeurs dans $E^* \otimes E \otimes E$, intégrable relativement à X dans le domaine des martingales locales et tel que

$$[X,X] = g^* m + \int H \,\mathrm{d}X. \tag{3.1}$$

En coordonnées, cette équation s'écrit (en utilisant la convention de sommation d'Einstein sur les indices croisés)

$$[X^i, X^j] = \delta^{ij} m + \int H^{ij}_k \,\mathrm{d}X^k. \tag{3.2}$$

Ces formules s'appellent une *équation de structure vectorielle*. Le tenseur prévisible H apparaissant dans de telles équations est défini par la martingale X à l'équivalence μ-presque sûre près et est μ-presque partout *doublement symétrique* (voir ci-dessous pour la définition d'un tel tenseur et [AE1, proposition 3]). Lorsque ce tenseur est fonction de la limite à gauche X_-, l'équation de structure correspondante est dite *markovienne.*

Tenseurs doublement symétriques et systèmes droits

Considérons un élément H de $E^* \otimes E \otimes E$, c'est-à-dire une application linéaire de E dans $E \otimes E$. Ce tenseur est dit *doublement symétrique* si ses coordonnées $(H^{ij}_k)_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n}$ dans un repère orthonormé vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} H^{ij}_k & \text{est symétrique en } i,j,k, \\ H^{ij}_k H^{kl}_m & \text{est symétrique en } i,j,l,m. \end{cases} \tag{3.3}$$

Les tenseurs doublement symétriques sont les tenseurs qui se diagonalisent dans une base orthonormée (cf. [AE1, théorème 1]). Plus précisément, nous pouvons associer à un tel tenseur H une unique partie Σ de E, composée de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux, telle que

$$H = \sum_{\sigma \in \Sigma} \frac{\sigma^* \otimes \sigma \otimes \sigma}{\|\sigma\|^2}. \tag{3.4}$$

La partie Σ s'appelle *système droit* associé à H et est constituée des vecteurs x de $E \backslash \{0\}$ tels que $H(x) = x \otimes x$ (cf. [AE1, corollaire 1]). Nous associons au système droit Σ le vecteur

$$\delta = -\sum_{\sigma \in \Sigma} \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2}, \tag{3.5}$$

et l'application linéaire de $E \otimes E$ dans E

$$\psi = \sum_{\sigma \in \Sigma} \frac{\sigma^* \otimes \sigma^* \otimes \sigma}{\|\sigma\|^4}. \tag{3.6}$$

Si le cardinal de l'ensemble Σ est égal à la dimension de l'espace euclidien E, nous disons que le tenseur H est *non dégénéré*. Il est aisé de vérifier que, si H est non dégénéré, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\psi \circ H = \mathrm{id}, \quad \psi(g^*) = -\delta. \tag{3.7}$$

Remarquons encore que les applications $H \mapsto \delta$ et $H \mapsto \psi$, définies sur l'ensemble des tenseurs doublement symétriques, sont de classe de Baire 1 et que leurs restrictions à l'ensemble des tenseurs doublement symétriques H tels que $\operatorname{Card} \Sigma = l$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$ (qui est une sous-variété de l'espace vectoriel $E^* \otimes E \otimes E$) sont de classe C^∞ (voir [AE1, proposition 2]).

Propriétés des solutions d'une équation de structure

Soit X une martingale normale à valeurs dans E et solution de l'équation de structure (3.1). Notons $\Sigma(t)$ le système droit associé au tenseur doublement symétrique $H(t)$ et Π_t la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $\Sigma(t)^\perp$ de E. Nous rappelons que, d'après la proposition 3 de [AE1], la martingale X est quasi-continue à gauche, que si T est un instant de saut (supposé fini) de X, nous avons $\Delta X_T \in \Sigma(T)$, et que la partie martingale continue de X est donnée par la formule :

$$X^c = \int \Pi(\mathrm{d}X). \tag{3.8}$$

Les égalités (3.5) et (3.6) nous permettent d'associer au processus prévisible H deux nouveaux processus prévisibles : le processus δ à valeurs dans E et le processus ψ à valeurs dans $E^* \otimes E^* \otimes E$. Suivant Taviot (voir [Tav]), nous appelerons *dérive* de X le premier de ces processus. La justification de cette terminologie est contenue dans le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. *Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$. Supposons que le tenseur prévisible H soit non dégénéré μ-presque partout sur l'intervalle stochastique $]\!]S,T[\![$ et que cet intervalle ne contienne aucun instant de saut de X. Dans ce cas, nous avons*

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} \,\mathrm{d}X = \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} + \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} \delta \,\mathrm{d}m.$$

PREUVE. Au vu de la formule (3.8), la condition de non dégénérescence entraîne que $\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}X^c = 0$. Par suite, nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}[X,X] = \sum_{S\wedge\cdot<s\leqslant T\wedge\cdot} \Delta X_s \otimes \Delta X_s = \Delta X_T \otimes \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}\,.$$

L'équation de structure (3.1) nous conduit alors à

$$g^* \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}m + \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} H\,\mathrm{d}X = \Delta X_T \otimes \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}\,,$$

et en intégrant le processus prévisible ψ relativement à la semimartingale vectorielle $g^*m + \int H\,\mathrm{d}X$, il vient

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}X = \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\delta\,\mathrm{d}m + \psi_T(\Delta X_T \otimes \Delta X_T)\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}\,,$$

puisque les égalités $\psi \circ H = \mathrm{id}$ et $\psi(g^*) = -\delta$ sont vraies μ-presque partout sur $]\!]S,T]\!]$. Il ne reste plus qu'à remarquer que la relation $\Delta X_T \in \Sigma(T) \cup \{0\}$ entraîne $\psi_T(\Delta X_T \otimes \Delta X_T) = \Delta X_T$ et le résultat. ■

Formule de compensation

Dans sa thèse de doctorat, Taviot a calculé explicitement le système de Lévy d'une martingale normale X vérifiant l'équation de structure (3.1) (voir [Tav, théorème 3.1.2]). Nous rappelons ici ce résultat et quelques unes de ses conséquences.

Le processus X est toujours une martingale normale solution de l'équation de structure (3.1). La formule de compensation suivante est vérifiée pour tout temps d'arrêt T et tout processus positif h défini sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, prévisible en (ω,t) et s'annulant au point 0 de E :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{0<t\leqslant T} h(\,\cdot\,,t,\Delta X_t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{\sigma\in\Sigma(t)} \frac{h(\,\cdot\,,t,\sigma)}{\|\sigma\|^2}\,\mathrm{d}t\right]. \tag{3.9}$$

Noter que la même formule est vraie pour un processus h non nécessairement positif pourvu que la variable aléatoire $\sum_{0<t\leqslant T} |h(\,\cdot\,,t,\Delta X_t)|$ soit intégrable. Par exemple, si X est une martingale localement à variation intégrable, cette formule permet de calculer le compensateur prévisible C de la somme des sauts de X. Plus précisément, elle donne $C = -\int \delta\,\mathrm{d}m$.

De cette formule, Taviot a déduit une condition nécessaire et suffisante sur le vecteur aléatoire de dérive δ pour qu'une telle martingale X n'ait qu'un nombre fini de sauts sur un intervalle borné. Il a prouvé que, presque sûrement, le nombre de sauts de X avant l'instant t est fini si, et seulement si, la fonction $s \mapsto \delta_s$ est de carré intégrable sur l'intervalle $[0,t]$ (voir [Tav, proposition 3.2.3]).

Nous terminons ces rappels généraux par un résultat affirmant que le temps passé par certaines martingales solutions d'équation de structure dans l'ensemble des points d'accumulation de leurs sauts est nul.

LEMME 3.2. *Soit X une martingale purement discontinue solution de l'équation de structure (3.1) supposée markovienne et à coefficients continus. Autrement dit, il* *existe une application $h : E \to E^* \otimes E \otimes E, x \mapsto h(x)$ dépendant continûment de x et telle que $H = h(X_-)$. Soit J l'ensemble optionnel $\{\Delta X \neq 0\}$. Alors, l'adhérence $\overline{J}$ de J est un ensemble μ-négligeable.*

Preuve. En considérant les temps d'arrêt $R_q = \inf\{t > q\,;\, \Delta X_t \neq 0\}$ $(q \in \mathbb{Q}_+)$, nous pouvons écrire que $(\overline{J})^c = \bigcup_q]\!]q,R_q[\![$. Nous allons prouver que l'ensemble prévisible $A = \bigcup_q]\!]q,R_q]\!]$ contient J ce qui, en vertu de la formule de compensation, entraînera $\mu(A^c) = 0$ et le résultat puisqu'à un ensemble μ-négligeable près $A^c = \overline{J}$.

Il s'agit donc de montrer que l'ensemble prévisible $B = \{\int_{\cdot - 1/m}^{\cdot} \|\delta\|^2 = \infty, \forall m\}$ des points qui sont limites à gauche d'instants de saut de X ne contient aucun graphe d'instant de saut. Autrement dit et toujours en vertu de la formule de compensation, il suffit de prouver que $\mu(B) = 0$. Pour ce faire, nous allons vérifier que B est inclus dans l'ensemble prévisible $\{\operatorname{Card}\Sigma \leqslant n-1\}$, où Σ est le système droit associé au tenseur doublement symétrique $h(X_-)$.

Soit (t,ω) un élément de B. Il existe une suite t_m de réels tels que $t_m < t$, $t_m \uparrow t$ et $\Delta X_{t_m}(\omega) \neq 0$. La trajectoire $X_.(\omega)$ étant càd-làg, nous avons $\Delta X_{t_m}(\omega) \to 0$. À chacun des systèmes droits $\Sigma(t_m,\omega)$ nous faisons alors correspondre un n-uplet $S_m = (s_m^1, \ldots, s_m^n)$ en choisissant un ordre sur ses éléments et en complétant par le vecteur nul autant de fois que nécessaire. Nous supposerons de plus que $s_m^1 = \Delta X_{t_m}(\omega)$. Puisque $\sum_{s \in S_m} \|s\|^2 = \|h(X_{t_m-})\|^2$ et $h(X_{t_m-}) \to h(X_{t-})$ (où l'espace $E^* \otimes E \otimes E$ est muni de la norme euclidienne usuelle), la suite (S_m) est relativement compacte dans E^n et, à extraction d'une sous-suite près, converge vers une limite $S = (0, s^2, \ldots, s^n)$. Il suffit alors de constater que $\{s \in S\,;\, s \neq 0\}$ est égal à $\Sigma(t,\omega)$, pour en déduire que $\operatorname{Card}\Sigma(t,\omega) \leqslant n-1$.

Pour conclure, il suffit maintenant de remarquer que d'après la formule (3.8) l'ensemble $\{\operatorname{Card}\Sigma \leqslant n-1\}$ est μ-négligeable dès que X est une martingale purement discontinue. ■

3.2 Le cas bidimensionnel

Généralités

Fixons un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ et remarquons qu'en vertu des conditions (3.3) un tenseur doublement symétrique de coordonnées $(H_k^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ ne dépend que des quantités

$$(3.10) \qquad p = H_1^{11}, \quad q = H_2^{22}, \quad r = H_2^{11} = H_1^{21} = H_1^{12}, \quad s = H_1^{22} = H_2^{12} = H_2^{21},$$

qui doivent vérifier la relation

$$(3.11) \qquad ps + qr = r^2 + s^2.$$

(Pour plus de détails sur cet argument le lecteur pourra se reporter à [AE2, p. 11]). Par suite, les martingales solutions d'une équation de structure bidimensionnelle sont les martingales normales Z dont les coordonnées (X,Y) dans un repère orthonormé vérifient

$$\text{(3.12)} \qquad \left\{ \begin{array}{lclclcl} \mathrm{d}[X,X]_t & = & \mathrm{d}t & + & P_t\,\mathrm{d}X_t & + & R_t\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t & = & & & R_t\,\mathrm{d}X_t & + & S_t\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t & = & \mathrm{d}t & + & S_t\,\mathrm{d}X_t & + & Q_t\,\mathrm{d}Y_t\,, \end{array} \right.$$

où P,Q,R et S sont quatre processus prévisibles vérifiant μ-presque partout la relation

$$\text{(3.13)} \qquad PS + QR = R^2 + S^2.$$

Nous pouvons donner des formules explicites pour les coordonnées de la partie martingale continue d'un tel processus. C'est le contenu de la proposition suivante dont seule la seconde partie sera utilisée dans la suite.

PROPOSITION 3.3. *Soit Z une martingale normale dont les coordonnées (X,Y) vérifient l'équation de structure (3.12). La partie martingale continue de Z est donnée par les formules suivantes :*

$$X^c = \int \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{y_\sigma^2}{\|\sigma\|^2} \right) \mathrm{d}X - \int \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{x_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2}\,\mathrm{d}Y,$$
$$Y^c = \int \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{x_\sigma^2}{\|\sigma\|^2} \right) \mathrm{d}Y - \int \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma=1\}} \frac{x_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2}\,\mathrm{d}X,$$

où $\sigma = (x_\sigma,y_\sigma)$ désigne l'unique élément de Σ lorsque $\mathrm{Card}\,\Sigma = 1$. *De plus, nous avons*

$$\mathbb{E}\big[(X_t^c)^2\big] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \left(\frac{y_{\sigma_s}^4}{\|\sigma_s\|^4} + \frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4} \right) \mathrm{d}s \right],$$
$$\mathbb{E}\big[(Y_t^c)^2\big] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \left(\frac{x_{\sigma_s}^4}{\|\sigma_s\|^4} + \frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4} \right) \mathrm{d}s \right].$$

PREUVE. D'après la formule (3.8), nous savons que $\mathrm{d}Z^c = \Pi(\mathrm{d}Z)$, où Π est la projection orthogonale sur le sous espace $\Sigma^\perp$ de E. Or

$$\Pi = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{id}, & \text{si } \mathrm{Card}\,\Sigma = 0 \\ \Pi_\sigma\,, & \text{si } \mathrm{Card}\,\Sigma = 1 \text{ et } \Sigma = \{\sigma\} \\ 0, & \text{si } \mathrm{Card}\,\Sigma = 2, \end{array} \right.$$

où Π_σ désigne la projection sur $\{\sigma\}^\perp$. Il suffit alors de remarquer que

$$\Pi_\sigma(x,y) = \left(\frac{xy_\sigma^2 - yx_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2},\quad \frac{yx_\sigma^2 - xx_\sigma y_\sigma}{\|\sigma\|^2} \right),$$

pour en déduire la première partie de la proposition. Comme $\langle X,Y\rangle = 0$, nous pouvons de plus écrire que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_t^c)^2\big] &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}}\frac{y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^2}\right)\mathrm{d}X_s\right.\\ &\qquad\qquad\left. - \int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}}\frac{x_{\sigma_s}y_{\sigma_s}}{\|\sigma_s\|^2}\,\mathrm{d}Y_s\right)^2\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}}\frac{y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^2}\right)^2\mathrm{d}s\right]\\ &\qquad\qquad + \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}}\frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4}\,\mathrm{d}s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}} + \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}}\left(\frac{y_{\sigma_s}^4}{\|\sigma_s\|^4} + \frac{x_{\sigma_s}^2 y_{\sigma_s}^2}{\|\sigma_s\|^4}\right)\mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$

L'espérance de $(Y_t^c)^2$ se calcule de la même manière. ■

Détermination de systèmes droits

La fin de cette section contient la partie calculatoire de ce travail. Nous y montrons une propriété géométrique du système droit associé à un tenseur doublement symétrique de dimension 2. Cette propriété nous permettra, entre autres choses, le calcul explicite du système droit et du vecteur de dérive associés à certains tenseurs doublement symétriques.

Dans la suite, H désigne un tenseur doublement symétrique de dimension 2 et (les notations étant celles de la formule (3.10)) (p,q,r,s) ses coordonnées dans un repère orthonormé fixé une fois pour toute. Rappelons que, dans ce cas, la relation $ps + qr = r^2 + s^2$ est vérifiée. Le système droit associé à un tel tenseur est l'ensemble Σ des vecteurs z appartenant à $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et tels que $H(z) = z \otimes z$, autrement dit est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées (x,y) vérifient le système suivant :

$$(3.14)\qquad \left\{\begin{array}{lcll} x^2 &=& px + ry & \text{(i)}\\ xy &=& rx + sy & \text{(ii)}\\ y^2 &=& sx + qy & \text{(iii)}\\ (x,y) &\neq& (0,0) & \text{(iv).}\end{array}\right.$$

Désignons par A et B les points du plan de coordonnées respectives (p,r) et (s,q), par $\mathcal{C}$ le cercle centré au milieu du segment $[A,B]$ et passant par l'origine $O = (0,0)$ et par $\mathcal{D}$ la droite (passant par A et B) d'équation

$$(3.15)\qquad \begin{array}{lcll} sx - ry &=& ps - r^2 = s^2 - qr, & \text{si } (r,s) \neq (0,0)\\ qx + py &=& pq, & \text{si } r = s = 0.\end{array}$$

La droite $\mathcal{D}$ n'est pas définie si $p = q = r = s = 0$ et nous convenons que, dans ce cas, $\mathcal{D}$ est le plan tout entier.

PROPOSITION 3.4. *L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les équations (i), (ii) et (iii) ci-dessus est $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \cup \{O\}$.*

PREUVE. Commençons par traiter les cas triviaux. Si $p = q = r = s = 0$, nous avons $\mathcal{C} = \{O\}$ et O est la seule solution du système. Si $r = s = 0$ et $(p,q) \neq (0,0)$, il est aisé de vérifier que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{A,B\}$ et que les solutions du système sont $\{A,B,O\}$.

Supposons maintenant que $(r,s) \neq (0,0)$ et soit (x,y) une solution non nulle du système. En ajoutant membre à membre (i) et (iii), nous obtenons $(x,y) \in \mathcal{C}$. En multipliant (i) par s et (ii) par $-r$ puis en additionnant ces deux nouvelles équations, nous obtenons

$$x(sx - ry) = (ps - r^2)x = (s^2 - qr)x.$$

De même, en multipliant (ii) par s et (iii) par $-r$ puis en additionnant ces équations, il vient

$$y(sx - ry) = (s^2 - qr)y = (ps - r^2)y.$$

Puisque l'un au moins des réels x ou y est non nul, l'une de ces équations se simplifie en $(x,y) \in \mathcal{D}$.

Réciproquement, nous supposons toujours que $(r,s) \neq (0,0)$ et nous considérons un point $(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Il s'agit d'établir (i), (ii) et (iii). L'équation du cercle entraîne

$$r^2x^2 + r^2y^2 = r^2(p + s)x + r(r + q)ry.$$

En y remplacant ry par $sx - (ps - r^2)$ (équation de $\mathcal{D}$), nous trouvons

$$\begin{aligned}(r^2 + s^2)x^2 - \big(2s(ps - r^2) + r^2(p + s) + rs(r + q)\big)x \\ + (ps - r^2)^2 + (ps - r^2)r(r + q) = 0,\end{aligned}$$

qui se simplifie en

$$(r^2 + s^2)x^2 - (r^2 + s^2)(p + s)x + (r^2 + s^2)(ps - r^2) = 0.$$

Donc $x^2 = (p + s)x - (ps - r^2) = (p + s)x - (sx - ry) = px + ry$, c'est-à-dire (i). Puis, l'égalité (iii) se déduit de (i) et de l'équation du cercle. Enfin, pour établir (ii), multiplions l'équation de $\mathcal{D}$ par x, puis remplaçons x^2 par $px + ry$, pour obtenir

$$rxy = r(rx + sy).$$

De même, en multipliant par y l'équation de $\mathcal{D}$ et en y remplaçant y^2 par $sx + qy$, nous obtenons

$$sxy = s(rx + sy).$$

Comme l'un au moins des réels r ou s est différent de zéro, nous en déduisons l'égalité (ii), ce qui achève cette preuve. ■

Nous terminons cette section en calculant le système droit et le vecteur de dérive associés à des tenseurs doublement symétriques ayant les mêmes propriétés que ceux qui apparaîtront dans les équations de structure associées aux martingales d'Azéma de type II.

COROLLAIRE 3.5. *Considérons un tenseur doublement symétrique H de coordonnées (p,q,r,s). Supposons que $r - q = s = 0$ et que $r \neq 0$. Dans ce cas, le système droit Σ est constitué de deux vecteurs σ_1 et σ_2 dont les coordonnées sont données par les formules suivantes :*

$$\sigma_1 = \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + r^2}\,, r\right), \qquad \sigma_2 = \left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + r^2}\,, r\right).$$

De plus, nous avons

$$\delta = -\left(\frac{\sigma_1}{\|\sigma_1\|^2} + \frac{\sigma_2}{\|\sigma_2\|^2}\right) = \left(0, -\frac{1}{r}\right).$$

Si $r - q = s = 0$, $r = 0$ et $p \neq 0$, le système droit Σ est constitué du seul vecteur $\sigma = (p,0)$ et dans ce cas $\delta = (-1/p,0)$.

PREUVE. Elle est immédiate compte tenu de la proposition 3.4. ■

Martingales d'Azéma bidimensionnelles

Une martingale normale X à valeurs dans E est une *martingale d'Azéma* si elle vérifie, dans tout repère orthonormé, une équation de structure markovienne de la forme

$$\mathrm{d}[X^i,X^j]_t = \delta^{ij}\,\mathrm{d}t + \varphi_k^{ij}(X_{t-})\,\mathrm{d}X_t^k, \tag{3.16}$$

où les φ_k^{ij} sont n^3 fonctions affines sur E telles que μ-presque partout le tenseur $\varphi(X_-)$ soit doublement symétrique. En dimension 1, cette équation se réduit à

$$\mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + (\alpha + \beta X_{t-})\,\mathrm{d}X_t\,. \tag{3.17}$$

Émery a montré que, pour toute condition initiale $X_0 = x$, cette équation admettait une solution unique en loi : la martingale d'Azéma unidimensionnelle de paramètres α et β (voir [Éme]).

Les martingales d'Azéma bidimensionnelles sont, quant à elles, les martingales normales Z dont les coordonnées (X,Y) dans un repère orthonormé vérifient

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} \mathrm{d}[X,X]_t & = & \mathrm{d}t & + & p(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & r(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t & = & & & r(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & s(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t & = & \mathrm{d}t & + & s(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t & + & q(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t\,, \end{array}\right. \tag{3.18}$$

où p,q,r et s sont quatre fonctions affines sur $\mathbb{R}^2$ telle que la relation suivante soit vraie μ-presque partout :

$$p(Z_-)s(Z_-) + q(Z_-)r(Z_-) = r(Z_-)^2 + s(Z_-)^2. \tag{3.19}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de l'article [AE2] (théorème 2, p. 14). Il établit une classification des martingales d'Azéma bidimensionnelles en trois types et caractérise les martingales des types I et III par des propriétés géométriques de leurs trajectoires.

THÉORÈME 3.6. *Les martingales bidimensionnelles dont les coordonnées dans un repère orthonormé satisfont à l'équation de structure markovienne (3.18) peuvent être classées en trois types.*

Le type I contient les martingales d'Azéma dont tous les sauts sont parallèles à l'une ou l'autre de deux directions fixes orthogonales.

Le type II est formé des martingales d'Azéma telles qu'il existe un repère orthonormé dans lequel leurs coordonnées vérifient l'équation de structure (3.18) avec $r - q = s = 0$, *sans que* p *et* r *ne soient colinéaires.*

Pour toute condition initiale dans $\mathbb{R}^2$, *les équations de structure (3.18) correspondant aux types I et II admettent une solution.*

Le type III est constitué des martingales d'Azéma qui vivent dans la réunion de deux droites orthogonales et qui ne sont pas du type I. Dans ce cas, étant donné une condition initiale z *dans* $\mathbb{R}^2$, *l'équation de structure correspondante admet une solution si, et seulement si,* z *appartient à la réunion de ces deux droites.*

Chapitre 4

Le théorème de caractérisation

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une caractérisation des martingales d'Azéma bidimensionnelles du type II. Informellement, nous pouvons présenter cette propriété en disant qu'une martingales d'Azéma bidimensionnelle est du type II si, et seulement si, sa projection sur une direction fixe du plan est un processus "somme de ses sauts".

Pour préciser cet énoncé, nous sommes amenés à rappeler la définition des semimartingales formellement à variation finie ainsi que leurs propriétés élémentaires. Nous serons alors en mesure de proposer et de démontrer l'énoncé formel suivant : une martingale d'Azéma bidimensionnelle est du type II si, et seulement si, sa projection sur une direction fixe du plan est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts.

En utilisant judicieusement les résultats obtenus au chapitre précédent, il est assez simple de prouver que cette condition est suffisante. En revanche, la preuve que cette condition est nécessaire nous obligera, dans certains cas particuliers, à effectuer une étude fine des trajectoires du processus.

4.1 Semimartingales formellement à variation finie

La théorie des semimartingales formelles a été developpée par Laurent Schwartz et exposée dans un article paru en 1981 (voir [ScL]). Dans cet article, Schwartz définit la classe des semimartingales formelles comme un espace de mesures vectorielles formelles à valeurs dans L^0 et définies sur la tribu prévisible. Nous n'aurons pas besoin d'entrer dans les considérations, essentiellement topologiques, des travaux de Schwartz et nous nous en tiendrons à une définition fonctionnelle, facile d'accès et d'utilisation. En outre, cette dernière ne fera intervenir que de véritables semimartingales.

DÉFINITION 4.1. *Une semimartingale X sera dite* formellement à variation finie *s'il existe un processus prévisible borné et strictement positif Φ tel que la semimartingale $\int \Phi \, \mathrm{d}X$ soit un processus à variation finie.*

Il est aisé de vérifier que nous pouvons remplacer dans la définition précédente la condition $\Phi > 0$ par Φ *différent de* 0. Nous pouvons, tout aussi bien, remplacer la condition Φ *borné* par Φ *intégrable relativement à* X. Remarquez que la partie martingale continue d'une semimartingale formellement à variation finie est nulle.

DÉFINITION 4.2. *Soit X une semimartingale formellement à variation finie. S'il existe un processus prévisible borné et strictement positif Φ tel que $\int \Phi\,\mathrm{d}X$ soit à variation finie et*

$$\int \Phi\,\mathrm{d}X = \sum_{0<s\leqslant\cdot} \Phi_s \Delta X_s\,,$$

nous dirons que X est une semimartingale formellement à variation finie et somme de ses sauts.

Ici encore la condition Φ *strictement positif et borné* peut être assouplie en Φ *ne s'annulant pas et intégrable relativement à* X.

LEMME 4.3. *Soient X une semimartingale formellement à variation finie et somme de ses sauts et $S \leqslant T$ deux temps d'arrêt tels que l'intervalle $]\!]S,T[\![$ ne contienne aucun instant de saut de X. Alors*

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}X = \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}\,.$$

PREUVE. La semimartingale X étant formellement à variation finie et somme de ses sauts, il existe un processus borné et strictement positif Φ tel que $\int \Phi\,\mathrm{d}X = \sum \Phi\Delta X$. En particulier,

$$\int \Phi \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}X = \Phi_T \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$$

et il ne reste plus qu'à intégrer le processus prévisible Φ^{-1} par rapport aux deux membres de l'égalité précédente pour trouver le résultat annoncé. ■

Les définitions ci-dessus se localisent sur un ensemble prévisible A : nous dirons qu'une semimartingale X est formellement à variation finie (respectivement formellement à variation finie et somme de ses sauts) sur A si la même propriété est vraie pour $\int \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}X$. La proposition suivante est très utile lorsqu'il s'agit de prouver qu'un processus est formellement à variation finie.

PROPOSITION 4.4. *Une semimartingale X est formellement à variation finie (respectivement formellement à variation finie et somme de ses sauts) sur un ensemble prévisible A s'il existe une suite (A_n) d'ensembles prévisibles recouvrant A telle que, pour chaque n, X soit formellement à variation finie (respectivement formellement à variation finie et somme de ses sauts) sur A_n.*

La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant dû à Dellacherie (voir [Del]). Pour la commodité du lecteur, nous en reproduisons ici une preuve.

LEMME 4.5. *Soit (U_n) une suite de variables aléatoires réelles (ou p.s. finies) et positives. Il existe une suite (λ_n) de réels strictement positifs telle que la variable aléatoire $\sum_n \lambda_n U_n$ soit finie p.s.*

PREUVE. Si U est une variable aléatoire réelle positive alors, d'après le théorème de Lebesgue, $\mathbb{E}[\lambda U \wedge 1] \to 0$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Nous pouvons donc choisir une suite (λ_n) de réels strictement positifs telle que $\sum_n \mathbb{E}[\lambda_n U_n \wedge 1] < \infty$. D'après le théorème de Beppo–Levi, ceci entraîne que $\mathbb{E}[\sum_n (\lambda_n U_n \wedge 1)] < \infty$. Ainsi, la somme $\sum_n (\lambda_n U_n \wedge 1)$ est finie p.s. et le résultat s'en déduit immédiatement. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.4. Nous pouvons supposer, et ceci sans perte de généralité, que les A_n sont deux à deux disjoints et que $A_n \subset [0,n] \times \Omega$. Soient Φ_n des processus prévisibles vérifiant $0 < \Phi_n \leqslant 1$ et tels que les processus $B^n = \int \Phi_n \mathbb{1}_{A_n}\, \mathrm{d}X$ soient à variation finie et égaux, le cas échéant, à $\sum \Phi_n \mathbb{1}_{A_n} \Delta X$. D'après le lemme 4.5, il existe une suite (λ_n) de réels strictement positifs telle que

$$\sum_n \lambda_n \int_0^\infty |\,\mathrm{d}B_t^n| < \infty \quad \text{p.s.} \tag{4.1}$$

Posons $\Phi = \sum_n \lambda_n \Phi_n \mathbb{1}_{A_n}$. Le processus prévisible Φ est intégrable relativement à la semimartingale X (car Φ est borné), strictement positif sur A et nous pouvons écrire d'après le théorème de convergence dominée stochastique que

$$\int \Phi \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}X = \sum_n \lambda_n \int \Phi_n \mathbb{1}_{A_n \cap A}\,\mathrm{d}X. \tag{4.2}$$

La variation totale du membre de droite de (4.2) étant finie p.s., le processus $\int \Phi \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}X$ est à variation finie. Si de plus, X est formellement à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des A_n, il vient

$$\int \Phi \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}X = \sum_n \lambda_n \sum \Phi_n \mathbb{1}_{A_n \cap A} \Delta X = \sum \left(\sum_n \lambda_n \Phi_n \mathbb{1}_{A_n \cap A} \right) \Delta X = \sum \Phi \mathbb{1}_A \Delta X,$$

où l'intervertion des signes de sommation est justifiée par le théorème de Fubini et la condition (4.1). ■

Pour terminer cette section et en vue de références ultérieures, nous mettons en exergue la remarque quasiment triviale suivante :

LEMME 4.6. *Soient X une semimartingale et A, B des ensembles prévisibles tels que $\int \mathbb{1}_{A \triangle B}\,\mathrm{d}X = 0$. Alors, X est formellement à variation finie et somme de ses sauts sur A si, et seulement si, la même propriété est vraie sur B.*

4.2 Énoncé et preuve du théorème

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer un théorème permettant de caractériser celles des martingales d'Azéma bidimensionnelles qui sont de type II.

THÉORÈME 4.7. *Une martingale d'Azéma bidimensionnelle est du type II si, et seulement si, sa projection sur une direction fixe du plan est une martingale formellement à variation finie somme de ses sauts.*

La condition est suffisante

Considérons une martingale d'Azéma bidimensionnelle Z. Par hypothèse, il existe un vecteur unité e de E et un processus prévisible borné et strictement positif Φ tels que la martingale $X = g(e,Z)$, projection de X sur $\mathbb{R}e$, vérifie

$$\int \Phi \, \mathrm{d}X = \sum_{0<s\leqslant \cdot} \Phi \Delta X, \tag{4.3}$$

où le processus au membre de droite est supposé à variation finie. Complétons $\{e\}$ en un repère orthonormé (e,f) et posons $Y = g(f,Z)$. Il existe quatre fonctions affines p,q,r et s telles que Z satisfasse à l'équation de structure

$$\begin{cases} \mathrm{d}[X,X]_t &= \mathrm{d}t + p(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t + r(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t &= r(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t + s(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t &= \mathrm{d}t + s(Z_{t-})\,\mathrm{d}X_t + q(Z_{t-})\,\mathrm{d}Y_t \end{cases} \tag{4.4}$$

et telles que la relation suivante soit vérifiée μ-presque partout :

$$p(Z_-)s(Z_-) + q(Z_-)r(Z_-) = r(Z_-)^2 + s(Z_-)^2. \tag{4.5}$$

LEMME 4.8. *Sous ces hypothèses, la martingale Z est purement discontinue.*

PREUVE. La martingale X étant formellement à variation finie, elle est purement discontinue. Nous avons donc $\mathbb{E}[(X_t^c)^2] = 0$ et d'après la proposition 3.3 (p. 38), ceci entraîne que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=0\}}\,\mathrm{d}s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{g(e,\sigma_s)^2 g(f,\sigma_s)^2}{\|\sigma_s\|^4}\,\mathrm{d}s\right] = 0,$$

puis que

$$\mathbb{E}\big[(Y_t^c)^2\big] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\mathrm{Card}\,\Sigma_s=1\}} \frac{g(e,\sigma_s)^4}{\|\sigma_s\|^4}\,\mathrm{d}s\right],$$

où $\Sigma = \{\sigma\}$ lorsque $\mathrm{Card}\,\Sigma = 1$. Soit A l'ensemble $\{\mathrm{Card}\,\Sigma = 1\,;\, g(e,\sigma) \neq 0\}$. Le processus $\int \mathbb{1}_A \Phi\,\mathrm{d}X$ étant par hypothèse une martingale localement à variation intégrable et somme de ses sauts, le compensateur prévisible C de la somme de ses sauts est nul. Or, d'après la formule de compensation, nous savons que

$$C = \int \mathbb{1}_A \Phi \frac{g(e,\sigma)}{\|\sigma\|^2}\,\mathrm{d}m$$

et par conséquent $\mu(A) = 0$, puis $\mathbb{E}\big[(Y_t^c)^2\big] = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et le lemme est démontré. ■

Notons J l'ensemble aléatoire $\{\Delta Z \neq 0\}$. Les lemmes 4.8 et 3.2 (voir p. 36) nous permettent d'affirmer que l'adhérence $\overline{J}$ de J est un ensemble de μ-mesure nulle. Considérons alors $S \leqslant T$ deux temps d'arrêt tels que l'intervalle $]\!]S,T[\![$ ne contienne aucun instant de saut de Z. En vertu de la proposition 3.1 (voir p. 35), nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}\,\mathrm{d}X = \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} + \int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} g(e,\delta)\,\mathrm{d}m,$$

puis en utilisant le lemme 4.3 que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]} g(e,\delta)\,\mathrm{d}m = 0.$$

En prenant pour S et T les temps d'arrêt q et $R_q = \inf\{t > q\,;\, \Delta Z_t \neq 0\}$ $(q \in \mathbb{Q}_+)$ et en remarquant que $(\overline{J})^c = \bigcup_q]\!]q,R_q[\![$, cette dernière égalité entraîne que

$$g(e,\delta) = 0, \quad \mu\text{-presque partout sur } (\overline{J})^c,$$

puis, en vertu du fait que $\mu(\overline{J}) = 0$, que

$$g(e,\delta) = 0, \quad \mu\text{-presque partout.} \tag{4.6}$$

Puisque $\mathrm{d}Z^c = \Pi(\mathrm{d}Z) = 0$, où Π est la projection sur le sous-espace orthogonal au système droit asssocié à Z, le cardinal de ce système droit est 2 μ-presque partout. En notant σ_1 et σ_2 les deux éléments de ce système droit et en remarquant que par définition de δ nous avons

$$g(\delta,\sigma_1 - \sigma_2) = 0, \quad \mu\text{-presque partout,}$$

nous déduisons de (4.6) l'égalité μ-presque sûre

$$g(f,\sigma_1 - \sigma_2) = 0,$$

puisque, les vecteurs σ_1 et σ_2 étant orthogonaux, nous savons que δ est différent du vecteur nul μ-presque partout. Or, le vecteur $\sigma_1 - \sigma_2$ est (en utilisant les notations de la proposition 3.4) μ-presque partout le vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}$ est, μ-presque partout, une droite parallèle à l'axe des abscisses. Par conséquent, il existe un réel a tel que la fonction affine $y \mapsto y - a$ et celle définissant la droite $\mathcal{D}$ soient colinéaires. En comparant ce dernier point avec la définition donnée en (3.15, p. 39) de la droite $\mathcal{D}$ et en utilisant la relation (4.5), il est aisé de vérifier que

$$r(Z_-) - q(Z_-) = s(Z_-) = 0, \quad \mu\text{-presque partout.}$$

D'après le lemme 1 de [AE2] ceci entraîne $r - q = s = 0$, autrement dit Z est une martingale d'Azéma du type II.

La condition est nécessaire

Dans toute la suite Z est une martingale d'Azéma de type II. Il existe donc un repère orthonormé et deux fonctions affines non colinéaires p et r tels que les coordonnées (X,Y) de Z dans ce repère satisfont à

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{d}[X,X]_t &=& \mathrm{d}t + P_t\,\mathrm{d}X_t + R_t\,\mathrm{d}Y_t \\ \mathrm{d}[X,Y]_t &=& R_t\,\mathrm{d}X_t \\ \mathrm{d}[Y,Y]_t &=& \mathrm{d}t + R_t\,\mathrm{d}Y_t\,, \end{array}\right. \tag{4.7}$$

où $P = p(Z_-)$ et $R = r(Z_-)$. Noter qu'en vertu du corollaire 3.5 (voir p. 41) et de la formule (3.8, p. 35), la partie martingale continue de Z est donnée par la formule :

$$Z^c = \left(\int \mathbb{1}_{\{R=0\,;\,P=0\}}\,\mathrm{d}X, \quad \int \mathbb{1}_{\{R=0\}}\,\mathrm{d}Y \right). \tag{4.8}$$

Dans la suite a_r,b_r,c_r,a_p,b_p,c_p désignent des réels tels que $r(z) = a_r x + b_r y + c_r$ et $p(z) = a_p x + b_p y + c_p$.

Nous traitons séparément trois cas qui dépendent des conditions géométriques imposées par les fonctions affines p et r. Dans un premier temps, nous étudierons le cas où r est une fonction affine constante et le cas où r est une fonction affine non constante telle que la droite $\{r = 0\}$ ne soit pas verticale. Ces cas correspondent aux contraintes : $a_r = b_r = 0$ ou $b_r \neq 0$. Puis, nous étudierons le cas où r et p sont deux fonctions affines non constantes telles que la droite $\{r = 0\}$ soit verticale et rencontre la droite $\{p = 0\}$. C'est le cas où $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p \neq 0$. Enfin, le dernier cas regroupera celui où r est une fonction affine non constante telle que la droite $\{r = 0\}$ soit verticale et où p est soit une fonction affine constante, soit une fonction affine non constante telle que les droites $\{p = 0\}$ et $\{r = 0\}$ soient parallèles. En d'autres termes, nous supposerons que $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p = 0$.

Cas où $a_r = b_r = 0$ ou $b_r \neq 0$

Nous supposons donc dans un premier temps que la fonction affine r est soit une constante (nécessairement différente de 0 puisque p et r ne sont pas colinéaires), soit une fonction affine de la forme $r(x,y) = a_r x + b_r y + c_r$ avec $b_r \neq 0$.

LEMME 4.9. *Dans ces conditions, l'ensemble prévisible $\{R = 0\}$ est de μ-mesure nulle.*

PREUVE. Le résultat est trivial dans le cas où r est une fonction affine constante. Supposons donc que $r(x,y) = a_r x + b_r y + c_r$ avec $b_r \neq 0$. La formule de densité d'occupation (voir par exemple [Me4, chap. VI, 12.5]) nous apprend d'une part que

$$\int \mathbb{1}_{\{R=0\}}\,\mathrm{d}\langle r(Z)^c, r(Z)^c\rangle = 0. \tag{4.9}$$

En utilisant la formule (4.8) nous pouvons, d'autre part, écrire que

$$\langle r(Z)^c, r(Z)^c\rangle = \int (a_r^2 \mathbb{1}_{\{R=P=0\}} + b_r^2 \mathbb{1}_{\{R=0\}})\,\mathrm{d}m. \tag{4.10}$$

Comme par hypothèse $b_r \neq 0$, nous déduisons de (4.9) et (4.10) que $\int \mathbb{1}_{\{R=0\}}\,\mathrm{d}m = 0$ et le résultat. ∎

Remarquez que ce lemme et la formule (4.8) nous assurent que la martingale Z est purement discontinue. Il est aussi clair qu'en vertu de la formule de compensation

$$\sum \mathbb{1}_{\{R=0\,;\,\Delta X \neq 0\}} = 0. \tag{4.11}$$

Considérons U un instant de saut (supposé fini) de Z. Au vu du corollaire 3.5 (p. 41) une alternative se présente :

— ou bien $R_U \neq 0$ et dans ce cas $\Delta X_U \neq 0$ et $\Delta Y_U = R_U$,

— ou bien $R_U = 0$ et dans ce cas $\Delta X_U \neq 0$ et $\Delta Y_U = 0$.

D'après (4.11), la deuxième possibilité de l'alternative ne se produit pas et donc, en utilisant la deuxième équation de (4.7), nous pouvons écrire que

$$\int R\,\mathrm{d}X = [X,Y] = \sum \Delta X \Delta Y = \sum R\Delta X,$$

i.e. X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts sur l'ensemble prévisible $\{R \neq 0\}$. Cet ensemble étant μ-presque sûrement égal à $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, nous venons de prouver (cf. lemme 4.6) que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts partout.

Cas où $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p \neq 0$

Dans la suite, nous supposons que $r(x,y) = a_r x + c_r$ avec $a_r \neq 0$ et $p(x,y) = a_p x + b_p y + c_p$ avec $b_p \neq 0$. Soit $\widetilde{Z}$ la martingale définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{X} & = & X + \dfrac{c_r}{a_r} \\ \widetilde{Y} & = & Y + \dfrac{1}{b_p}\left(c_p - \dfrac{a_p}{a_r} c_r \right). \end{array} \right.$$

Il est clair que $\widetilde{X}$ est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts si, et seulement si, X l'est. Quitte alors à considérer $\widetilde{Z}$ en lieu et place de Z, nous pouvons supposer que Z vérifie l'équation de structure (4.7) avec $r(x,y) = a_r x$ et $p(x,y) = a_p x + b_p y$, la formule (4.8) se réduisant dans ce cas à

$$Z^c = \left(\int \mathbb{1}_{\{Z_- = 0\}}\,\mathrm{d}X, \quad \int \mathbb{1}_{\{X_- = 0\}}\,\mathrm{d}Y \right). \tag{4.12}$$

Lemme 4.10. *Dans ces conditions, les ensembles aléatoires $\{Z_- = 0\}$ et $\{Z = 0\}$ sont μ-négligeables.*

Preuve. La formule de densité d'occupation nous permet d'écrire que

$$\int \mathbb{1}_{\{r(Z_-) = 0\}}\,\mathrm{d}\langle r(Z)^c, r(Z)^c \rangle = 0,$$

et en développant le crochet oblique $\langle r(Z)^c, r(Z)^c \rangle$ il vient

$$a_r^2 \int \mathbb{1}_{\{X_- = 0\,;\, Z_- = 0\}}\,\mathrm{d}m = a_r^2 \int \mathbb{1}_{\{Z_- = 0\}}\,\mathrm{d}m = 0,$$

d'où le résultat pour l'ensemble $\{Z_- = 0\}$ puisque $a_r \neq 0$. Il suffit alors, pour compléter la preuve, de remarquer que $\{Z = 0\} \subset \{Z_- = 0\} \cup \{\Delta Z \neq 0\}$. ■

Fixons $\gamma > 0$ et introduisons les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{array}{ll} S_0^\gamma = 0 & \\ T_1^\gamma = \inf\{t > 0\,;\, Z_t = 0\}, & S_1^\gamma = \inf\{t > T_1^\gamma\,;\, \|Z_t\| > \gamma\} \\ T_2^\gamma = \inf\{t > S_1^\gamma\,;\, Z_t = 0\}, & S_2^\gamma = \inf\{t > T_2^\gamma\,;\, \|Z_t\| > \gamma\}, \ldots \end{array}$$

Il est clair que l'on a

$$\{Z=0\}=\bigcap_{k\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 1}[\![T_n^{1/k},S_n^{1/k}[\![\,.$$

Le lemme 4.10 permet donc d'écrire que

$$\mathbb{R}_+\times\Omega=\{Z\neq 0\}=\bigcup_{k\geqslant 1,n\geqslant 0}]\!]S_n^{1/k},T_{n+1}^{1/k}]\!]\,,$$

où ces égalités sont valides à équivalence μ-presque sûre près. Ainsi, en vertu de la proposition 4.4 (p. 44) et du lemme 4.6 (p. 45), il suffit pour montrer que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts de vérifier cette même propriété sur chacun des intervalles prévisibles $]\!]S_n^{1/k},T_{n+1}^{1/k}]\!]$.

Le réel $\gamma>0$ étant fixé, il s'agit de prouver que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des intervalles stochastiques $]\!]S_n^\gamma,T_{n+1}^\gamma]\!]$. Quitte à conditionner l'espace probabilisé sous-jacent par l'événement $\{S_n^\gamma<\infty\}$ et à considérer la martingale locale $\overline{Z}=(Z_{S_n^\gamma+t})_{t\geqslant 0}$ qui vérifie la même équation de structure que Z, nous pouvons supposer que

$$\left\{\begin{array}{l} S_n^\gamma=0\\ T_{n+1}^\gamma=T=\inf\{t>0\,;\,Z_t=0\}\\ \|Z_0\|\geqslant\gamma\,.\end{array}\right.\tag{4.13}$$

Nous introduisons alors les temps d'arrêt $S_m=\inf\{t>0\,;\,\|Z_t\|<1/m\}$ $(m\geqslant 1)$.

LEMME 4.11. *À un ensemble de μ-mesure nulle près, nous avons*

$$\bigcup_{m\geqslant 1}]\!]0,S_m]\!]=]\!]0,T]\!]\,.$$

PREUVE. Il suffit de prouver que $S=\lim_m\uparrow S_m=T$, autrement dit que l'événement $\{S<T\}$ est négligeable. Pour ce faire, nous supposons qu'au contraire l'un au moins des événements $A=\{S<T\,;S_m<S,\forall m\}$ ou $B=\{S<T\,;\,\exists p:S_m=S,\forall m\geqslant p\}$ est de probabilité strictement positive.

Si $\mathbb{P}[B]>0$, nous aurions $Z_S=0$ sur B et ceci contredirait la définition de T. Si $\mathbb{P}[A]>0$, nous pourrions écrire grâce à la formule de compensation et le lemme 4.10 que

$$\sum_{S_n<t\leqslant S}\mathbb{1}_{\{Z_{t-}=0\}}\|\Delta Z_t\|=0.$$

En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité précédente, il viendrait

$$\mathbb{1}_{\{Z_{S-}=0\}}\|\Delta Z_S\|=\|\Delta Z_S\|=0,\quad\text{sur } A$$

puisque, par définition des S_m, nous avons $Z_{S-}=0$. Mais ceci entrainerait $Z_S=0$ sur A, ce qui contredirait à nouveau la définition de T. ■

En notant S au lieu de S_m, nous sommes ainsi ramené (toujours en vertu de la proposition 4.4 et du lemme 4.6) à prouver la propriété de martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts de X sur un intervalle stochastique de la forme $]\!]0,S]\!]$, où nous pouvons supposer que

$$\left\{\begin{array}{l} \exists \gamma > 0 \,:\, \|Z_0\| \geqslant \gamma \\ S = \inf\{t > 0\,;\, \|Z_t\| < \eta\}, \qquad 0 < \eta < \gamma. \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Les réels strictement positifs γ et η étant fixés, nous choisissons un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $0 < \varepsilon < \eta$ et que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\forall z \in \mathbb{R}^2 \qquad \left(\left.\begin{array}{rcl} |x| & \leqslant & \varepsilon \\ \|z\| & \geqslant & \eta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |p(z)| > 2\varepsilon \\ (1-a_r^2)x + p(z) \neq 0 \\ l = \displaystyle\inf_{z\in E_+, z'\in E_-} |y - y'| > |a_r|\varepsilon \end{array}\right. \right), \tag{4.15}$$

où $E_+ = \{z\,;\, \|z\| \geqslant \eta\,, |x| \leqslant \varepsilon\,, y > 0\}$ et $E_- = \{z\,;\, \|z\| \geqslant \eta\,, |x| \leqslant \varepsilon\,, y < 0\}$. L'existence d'un tel ε est assurée par la condition $b_p \neq 0$. Fixons ensuite un réel ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et introduisons les temps d'arrêt

$$\begin{array}{ll} S_0 = 0 & \\ T_1 = \inf\{t > 0\,;\, |X_t| < \varepsilon'\} \wedge S, & S_1 = \inf\{t > T_1\,;\, |X_t| > \varepsilon\} \wedge S \\ T_2 = \inf\{t > S_1\,;\, |X_t| < \varepsilon'\} \wedge S, & S_2 = \inf\{t > T_2\,;\, |X_t| > \varepsilon\} \wedge S, \ldots \end{array}$$

Remarquons que, malgré les notations, ces temps d'arrêt dépendent de γ,η,ε et ε'. Le processus X étant càd-làg, nous avons $S_n \uparrow S$ et par suite l'égalité μ-presque sûre suivante est vérifiée :

$$]\!]0,S]\!] = \bigcup_{n\geqslant 0}]\!]S_n,T_{n+1}]\!] \cup \bigcup_{n\geqslant 1}]\!]T_n,S_n]\!]\,.$$

Nous nous sommes donc finalement ramené à prouver la propriété de martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts de X sur chacun des intervalles stochastiques de la forme $]\!]S_n,T_{n+1}]\!]$ et $]\!]T_n,S_n]\!]$.

Étudions pour commencer le comportement de X sur un intervalle de la forme $]\!]S_n,T_{n+1}]\!]$ $(n \geqslant 0)$.

PROPOSITION 4.12. *Pour tout $n \geqslant 0$, la martingale $\int \mathbb{1}_{]\!]S_n,T_{n+1}]\!]}\,\mathrm{d}X$ est à variation finie et somme de ses sauts. Plus précisément,*

$$X_{T_{n+1}\wedge t} - X_{S_n\wedge t} = \sum_{S_n\wedge t < s \leqslant T_{n+1}\wedge t} \Delta X_s\,,$$

où, pour tout $t \geqslant 0$, la somme au membre de droite est finie presque sûrement.

PREUVE. Quitte à conditionner l'espace probabilisé sous-jacent par l'événement correspondant, nous pouvons supposer que $S_n < S$. En appliquant alors la formule de compensation à la fonction $h = \mathbb{1}_{E\setminus\{0\}}$, il vient

$$\mathbb{E}\left[N_{T_{n+1}\wedge t} - N_{S_n\wedge t}\right] = \mathbb{E}\left[\int_{S_n\wedge t}^{T_{n+1}\wedge t} \|\delta_s\|^2\,\mathrm{d}s\right], \tag{4.16}$$

où $N = \sum_{0<s\leqslant \cdot} \mathbb{1}_{\{\Delta Z_s \neq 0\}}$.

Par définition des temps d'arrêt S_n et T_{n+1}, nous savons que $|X_-| \geqslant \varepsilon'$ sur $]\!]S_n,T_{n+1}]\!]$ et en vertu du corollaire 3.5, nous pouvons écrire que $\delta = (0, -(a_r X_-)^{-1})$ sur ce même intervalle. Or, ceci entraîne que le membre de droite de (4.16) est majoré par $t/(a_r\varepsilon')^2$ et donc que, presque sûrement, le nombre d'instant de sauts de Z compris dans l'intervalle $]\!]S_n \wedge t, T_{n+1} \wedge t]\!]$ est fini. Pour compléter la preuve, considérons la suite (U_k) des instants successifs de saut de X appartenant à $]\!]S_n \wedge t, T_{n+1} \wedge t]\!]$ (avec la convention $U_0 = S_n \wedge t$). En vertu de la proposition 3.1 et de l'expression de δ sur $]\!]S_n,T_{n+1}]\!]$, nous pouvons écrire que pour tout $k \geqslant 1$

$$\int \mathbb{1}_{]\!]U_{k-1},U_k]\!]}\, \mathrm{d}X = \Delta X_{U_k} \mathbb{1}_{[\![U_k,\infty[\![}\,,$$

puis, en sommant sur k, que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]S_n\wedge t,T_{n+1}\wedge t]\!]}\, \mathrm{d}X = \sum_{k\geqslant 1} \Delta X_{U_k} \mathbb{1}_{[\![U_k,\infty[\![}\,,$$

d'où le résultat désiré. ■

Nous terminons l'étude de ce cas particulier en prouvant le résultat suivant qui nous permettra de conclure que X est une martingale formellement à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des intervalles $]\!]T_n,S_n]\!]$ $(n \geqslant 1)$. Remarquons qu'en vertu de la proposition 4 de [Pha], on a $S_n < \infty$ sur l'événement $\{T_n < \infty\}$. Dans la suite, nous supposons que $T_n < \infty$.

PROPOSITION 4.13. *Soit $n \geqslant 1$ un entier et considérons le processus D^n défini par $D^n = \sum_{T_n\wedge\cdot<s<S_n\wedge\cdot} \Delta X_s$. Ce processus est décroissant si $P\mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \geqslant 0$, croissant si $P\mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \leqslant 0$. La martingale $\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}\, \mathrm{d}X$ est à variation finie et l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}\, \mathrm{d}X = D^n + \Delta X_{S_n} \mathbb{1}_{[\![S_n,\infty[\![}\,.$$

La preuve de cette proposition repose sur quelques lemmes que nous présentons maintenant.

LEMME 4.14. *Le signe de P est constant sur l'intervalle $]\!]T_n,S_n]\!]$.*

PREUVE. Fixons un entier $n \geqslant 1$. Par définition des temps d'arrêt T_n et S_n, nous savons que Z appartient à l'ensemble $E_+ \cup E_-$ sur $[\![T_n,S_n[\![$.

Supposons qu'un changement de signe de $p(Z)$ intervienne en un instant aléatoire U tel que $T_n \leqslant U < S_n$. En cet instant, le processus Z présente nécessairement un saut le faisant passer de E_+ en E_- ou de E_- en E_+. Par conséquent, $|\Delta Y_U| \geqslant l > |a_r|\varepsilon$. Mais, d'autre part, nous savons que $|\Delta Y_U| = |a_r X_{U-}| \leqslant |a_r|\varepsilon$ ce qui est absurde.

Ainsi, le signe de $p(Z)$ est constant sur l'intervalle $[\![T_n,S_n[\![$ et le lemme est démontré. ■

LEMME 4.15. *Soient n un entier $\geqslant 1$ et U un instant de saut de Z vérifiant la condition $T_n < U < S_n$. Alors $X_{U-} \neq 0$, $\Delta Y_U = a_r X_{U-}$ et*

$$\Delta X_U = \begin{cases} \dfrac{P_U}{2} + \sqrt{\dfrac{P_U^2}{4} + a_r^2 X_{U-}^2} = \sigma_1(U), \text{ si } P_U < 0 \\ \dfrac{P_U}{2} - \sqrt{\dfrac{P_U^2}{4} + a_r^2 X_{U-}^2} = \sigma_2(U), \text{ si } P_U > 0. \end{cases}$$

PREUVE. Au vu du lemme 4.14, le signe de P est constant sur $]\!]T_n,S_n]\!]$. Traitons par exemple le cas ou $P\mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \geqslant 0$.

Si $X_{U-} = 0$, nous aurions $\Delta X_U = P_U > 2\varepsilon$ en vertu du corollaire 3.5 (p. 41), de la définition des temps d'arrêt T_n et S_n et du choix de ε. Par conséquent et puisque $|X_{U\_}| \leqslant \varepsilon$, nous aurions aussi $X_U = X_{U-} + \Delta X_U > \varepsilon$ et ceci contredirait la définition de S_n. Ainsi, $X_{U-} \neq 0$.

Maintenant et toujours d'après le corollaire 3.5, nous savons que $\Delta X_U = \sigma_1(U)$ ou $\sigma_2(U)$ et que $\Delta Y_U = a_r X_{U-}$. Mais, si $\Delta X_U = \sigma_1(U)$ nous aurions $X_U = X_{U-} + \Delta X_U \geqslant X_{U-} + P_U > \varepsilon$ et la définition de S_n serait à nouveau contredite. Ainsi, $\Delta X_U = \sigma_2(U)$ et le lemme est démontré. ■

LEMME 4.16. *Le processus X est croissant sur l'intervalle $[\![T_n,S_n[\![$ si $P_{S_n} \leqslant 0$, et est décroissant sur ce même intervalle si $P_{S_n} \geqslant 0$.*

PREUVE. Montrons par exemple la première de ces assertions. Supposons donc que $P_{S_n} \geqslant 0$. D'après le lemme 4.14, cette condition nous assure que $P > 2\varepsilon$ sur $]\!]T_n,S_n]\!]$ et le lemme 4.15 donne $\Delta X \leqslant 0$ sur $]\!]T_n,S_n[\![$.

Il résulte de l'équation de structure (4.7) que la martingale $M_P = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} P \,\mathrm{d}X$ vaut $\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \mathrm{d}([X,X] - [Y,Y])$; elle est à variation finie donc à variation localement intégrable. Le processus $H = P^{-1}\mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}$ est intégrable relativement à M_P dans le domaine des martingales locales et $\int H \,\mathrm{d}M_P = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \mathrm{d}X = M$. Le processus H étant borné par $(2\varepsilon)^{-1}$, l'intégrale stochastique $\int H \,\mathrm{d}M_P$ est aussi égale à l'intégrale de Stieltjes $H \cdot M_P$. Par conséquent, la martingale M est elle aussi à variation localement intégrable et d'après la formule de compensation, le compensateur prévisible de la somme de ses sauts est donné par $\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}\mathbb{1}_{\{X_-=0\}}\frac{\mathrm{d}m}{P}$. Par suite, nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \,\mathrm{d}X = \sum_{T_n \wedge \cdot < s \leqslant S_n \wedge \cdot} \Delta X_s - \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]} \mathbb{1}_{\{X_-=0\}} \frac{\mathrm{d}m}{P}. \tag{4.17}$$

Or, le membre de droite de (4.17) est $\leqslant 0$ sur $[\![T_n,S_n[\![$ puisque chacun des termes de la somme est $\leqslant 0$ sur cet intervalle. Ceci achève la preuve de ce lemme. ■

LEMME 4.17. *Considérons les temps d'arrêt suivants :*

$$R_n^k = \inf\{t > T_n \,;\, |X_t| > k^{-1}\} \wedge S_n, \qquad k \geqslant 1,$$
$$R_n = \lim_k \downarrow R_n^k = \inf\{t > T_n \,;\, X_t \neq 0\} \wedge S_n.$$

Alors, $R_n = T_n$ sur l'événement $\{X_{T_n} = 0\}$.

PREUVE. Supposons que $X_{T_n} = 0$. Nous traiterons le cas où $P > 2\varepsilon$ sur $]\!]T_n,S_n]\!]$. Comme dans la preuve du lemme précédent, nous pouvons écrire que

$$X_{R_n} = X_{R_n} - X_{T_n} = \sum_{T_n < s \leqslant R_n} \Delta X_s - \int_{T_n}^{R_n} \mathbb{1}_{\{X_{s-}=0\}} \frac{\mathrm{d}s}{P_s}.$$

Comme par définition de nos temps d'arrêt $X\mathbb{1}_{[\![T_n,R_n[\![} = 0$, l'égalité précédente nous conduit à

$$0 = X_{R_n-} = -\int_{T_n}^{R_n} \mathbb{1}_{\{X_{s-}=0\}} \frac{\mathrm{d}s}{P_s} = -\int_{T_n}^{R_n} \frac{\mathrm{d}s}{P_s},$$

ce qui n'est possible que si $R_n = T_n$. ■

LEMME 4.18. *L'ensemble prévisible $\{X_- = 0\} \cap]\!]T_n,S_n]\!]$ est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible.*

PREUVE. Il suffit de montrer que l'ensemble prévisible $A = \{X_- = 0\} \cap]\!]T_n,S_n]\!]$ est le graphe d'un temps d'arrêt. Considérons le temps d'arrêt $V_n = \inf\{t > T_n\,; X_{t-} = 0\}$ et la variable aléatoire $\widetilde{V}_n = V_{n\{T_n < V_n \leqslant S_n\}}$. Cette dernière est aussi un temps d'arrêt puisque l'événement $\{T_n < V_n \leqslant S_n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_{S_n-}$. Nous allons prouver que $A = [\![\widetilde{V}_n]\!]$ et, pour fixer les idées, nous supposerons que $P > 2\varepsilon$ sur $]\!]T_n,S_n]\!]$.

Supposons pour commencer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $X_{T_n} \leqslant -\alpha$. D'après le lemme 4.16, ceci entraîne $X_- \leqslant -\alpha$ sur $]\!]T_n,S_n]\!]$. Nous avons donc d'une part $A = \varnothing$ et, puisque d'autre part ceci entraîne $\widetilde{V}_n = \infty$, l'égalité $A = [\![\widetilde{V}_n]\!]$ est vérifiée dans ce cas.

Supposons maintenant que $X_{T_n} = 0$. Le lemme 4.16 nous assure que $X_- \leqslant 0$ sur l'intervalle $]\!]T_n,S_n]\!]$; nous pouvons donc écrire (les notations étant celles du lemme 4.17) que $X_{R_n^k} \leqslant -k^{-1}$ sur l'événement $\{R_n^k \leqslant S_n\}$ et d'après ce qui précède ceci nous montre que $A \cap]\!]R_n^k,S_n]\!] = \varnothing$. Puisqu'en vertu du lemme 4.17 nous avons $R_n = T_n$, cette dernière égalité nous montre que $A = \varnothing$, que $\widetilde{V}_n = \infty$ et donc que $A = [\![\widetilde{V}_n]\!]$ dans ce cas aussi.

Supposons finalement que $X_{T_n} > 0$. Dans ce cas, nous avons $V_n > T_n$. Si $V_n > S_n$ nous avons $A = \varnothing$ et $\widetilde{V}_n = \infty$ et notre égalité est bien vérifiée. Si $V_n \leqslant S_n$ alors, par définition de V_n, nous avons $X_{V_n} = 0$. Écrivons alors que

$$A = (A \cap]\!]T_n,V_n[\![) \cup (A \cap [\![V_n]\!]) \cup (A \cap]\!]V_n,S_n]\!]).$$

Le premier ensemble apparaissant au membre de droite est vide par définition de V_n. Le deuxième est égal à $[\![V_n]\!]$ puisque $X_{V_n-} = 0$. En effet, dans le cas contraire nous aurions $\Delta X_{V_n} = -X_{V_n-} \neq 0$ et cette égalité nous conduirait alors à

$$X_{V_n-} + \frac{P_{V_n}}{2} = \pm\sqrt{\frac{P_{V_n}^2}{4} + a_r^2 X_{V_n-}^2}\,. \tag{4.18}$$

En élevant au carré l'égalité (4.18), en la développant puis en la divisant par X_{V_n-}, il viendrait

$$(1 - a_r^2)X_{V_n-} + P_{V_n} = 0,$$

ce qui est impossible au vu du choix de ε (voir la condition (4.15, p. 51)). Le troisième ensemble est vide car puisque $X_{V_n} = 0$, nous sommes ramené au cas précédent. Ainsi, notre égalité est aussi vérifiée dans ce cas et le lemme est démontré. ■

Preuve de la proposition 4.13. Fixons un entier $n \geqslant 1$. D'après le lemme 4.14, nous pouvons supposer par exemple que $P > 2\varepsilon$ sur l'intervalle $]\!]T_n,S_n]\!]$ (l'autre cas se traitant de manière tout à fait analogue).

Nous savons (voir la preuve du lemme 4.16) que la martingale $M = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}\,\mathrm{d}X$ est à variation localement intégrable et que le compensateur prévisible de la somme de ses sauts est le processus $C = \int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}\mathbb{1}_{\{X_-=0\}}\frac{\mathrm{d}m}{P}$. D'après le lemme 4.18, l'ensemble $\{X_- = 0\} \cap]\!]T_n,S_n]\!]$ est de μ-mesure nulle et donc $C = 0$.

Le processus D^n étant égal à $\sum_{0<s<\,\cdot} \Delta M_s$, il est à variation finie. Puisque de plus et d'après le lemme 4.15 les sauts de M apparaissant sur l'intervalle $]\!]T_n,S_n[\![$ sont tous négatifs, le processus D^n est aussi décroissant.

Ainsi, nous pouvons écrire que

$$\int \mathbb{1}_{]\!]T_n,S_n]\!]}\,\mathrm{d}X = \sum_{T_n\wedge\,\cdot\,<s\leqslant S_n\wedge\,\cdot} \Delta X_s = D^n + \Delta X_S \mathbb{1}_{[\![S,\infty[\![}\,,$$

ce qui achève la preuve de cette proposition. ■

Nous venons de démontrer que la martingale X est à variation finie et somme de ses sauts sur chacun des intervalles stochastiques de la forme $]\!]S_n,T_{n+1}]\!]$ et $]\!]T_n,S_n]\!]$. Comme $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est, à un ensemble μ-négligeable près, réunion dénombrable de tels ensembles prévisibles, ceci entraîne que la martingale X est formellement à variation finie et somme de ses sauts.

Remarque. Le lemme 4.18 entraîne que l'ensemble $\{X_- = 0\,; |Z_-| \geqslant \eta\}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisible et ce pour tout $\eta > 0$. La même propriété est donc vraie pour l'ensemble $\{X_- = 0\,;\ Z_- \neq 0\}$.

Cas où $a_r \neq 0, b_r = 0$ et $b_p = 0$

Ce cas étant plus simple mais analogue au précédent, nous nous contentons de donner les grandes lignes de la démonstration.

Quitte à considérer la martingale $\widetilde{Z}$ définie par

$$\begin{cases} \widetilde{X} &= X + \dfrac{c_r}{a_r} \\ \widetilde{Y} &= Y, \end{cases}$$

nous pouvons supposer que Z vérifie l'équation de structure (4.7) avec $r(x,y) = a_r x$ et $p(x,y) = a_p x + c_p$. La condition de non colinéarité de r et p nous assure que c_p est différent de 0, puis le fait que c_p soit différent de 0 nous permet de choisir un réel ε strictement positif vérifiant la condition suivante :

$$\text{(4.19)} \qquad \forall z \in \mathbb{R}^2 \qquad \left(|x| \leqslant \varepsilon \implies \begin{cases} |p(z)| > 2\varepsilon \\ \operatorname{sgn} p(z) = s(p) \end{cases} \right),$$

où $s(p) = \pm 1$ et dépend de la constante c_p. Cet ε étant fixé, considérons un réel ε' tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et introduisons les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned}
&S_0 = 0\\
&T_1 = \inf\{t > 0\,;\, |X_t| < \varepsilon'\}, \quad S_1 = \inf\{t > T_1\,;\, |X_t| > \varepsilon\}\\
&T_2 = \inf\{t > S_1\,;\, |X_t| < \varepsilon'\}, \quad S_2 = \inf\{t > T_2\,;\, |X_t| > \varepsilon\}, \ldots
\end{aligned}$$

La martingale Z étant càd-làg, nous avons $T_n \uparrow \infty$ et donc, à un ensemble de μ-mesure nulle près,

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega = \bigcup_{n \geqslant 0} \rrbracket S_n, T_{n+1} \rrbracket \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \rrbracket T_n, S_n \rrbracket\,.$$

Les résultats regroupés dans la proposition suivante se démontrent à l'aide des mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve des propositions 4.12 et 4.13. Ils nous assurent que la martingale X est une martingale *à variation finie* et somme de ses sauts, ce qui prouve notre assertion dans ce dernier cas et achève la preuve du théorème 4.7.

PROPOSITION 4.19. *Pour tout $n \geqslant 0$, la martingale $\int \mathbb{1}_{\rrbracket S_n, T_{n+1} \rrbracket}\, \mathrm{d}X$ est à variation finie et somme de ses sauts. Plus précisément,*

$$X_{T_{n+1} \wedge t} - X_{S_n \wedge t} = \sum_{S_n \wedge t < s \leqslant T_{n+1} \wedge t} \Delta X_s\,,$$

où, pour tout $t \geqslant 0$, la somme au membre de droite est finie presque sûrement.

Pour tout $n \geqslant 1$, le processus $D^n = \sum_{T_n \wedge \cdot < s < S_n \wedge \cdot} \Delta X_s$ est monotone : il est croissant si $s(p) = -1$, décroissant si $s(p) = +1$. La martingale $\int \mathbb{1}_{\rrbracket T_n, S_n \rrbracket}\, \mathrm{d}X$ est à variation finie et, plus précisément, nous avons

$$\int \mathbb{1}_{\rrbracket T_n, S_n \rrbracket}\, \mathrm{d}X = D^n + \Delta X_{S_n} \mathbb{1}_{\llbracket S_n, \infty \llbracket}\,.$$

De plus, l'ensemble prévisible $\{X_- = 0\}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

Bibliographie

[At1] Attal (S.). Approximating the Fock space with the toy Fock space. *Prépublication de l'institut Fourier*, **495** (2000).

[At2] Attal (S.). Classical and quantum stochastic calculus, *Quantum Prob. Communications X*, 1-52, World Scientific (1998).

[AE1] Attal (S.) & Émery (M.). Équations de structure pour des martingales vectorielles. *Séminaire de probabilités XXVIII*, LNM 1583, 256-278, Springer (1994).

[AE2] Attal (S.) & Émery (M.). Martingales d'Azéma bidimensionnelles. *Hommage à P.-A. Meyer et J. Neveu - Astérisque*, **236**, 9-21 (1996).

[AtM] Attal (S.) & Meyer (P.-A.). Interprétation probabiliste et extension des intégrales stochastiques non commutatives. *Séminaire de probabilités XXVII*, LNM 1557, 312-327, Springer (1993).

[AtL] Attal (S.) & Lindsay (J.M.). Quantum Stochastic Calculus — a Maximal Formulation. *Prépublication de l'Institut Fourier*, **456** (1999).

[Azé] Azéma (J.). Sur les fermés aléatoires. *Séminaire de probabilités XIX*, LNM 1123, 397-495, Springer (1985).

[BeL] Belavkin (V.P.) & Lindsay (J.M.). The Kernel of a Fock Space Operator II. *QP VIII*, 87-94 (1993).

[Del] Dellacherie (C.). Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. *Séminaire de probabilités XII*, LNM 649, 742-745, Springer (1978).

[DMM] Dellacherie (C.), Meyer (P.-A.) & Maisonneuve (B.). *Probabilités et potentiel, vol. E.* Hermann (1992).

[Éme] Émery (M.). On the Azéma Martingales. *Séminaire de probabilités XXIII*, LNM 1426, 66-87, Springer (1989).

[Gui] Guichardet (A.). *Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics.* LNM 261, Springer (1970).

[HuP] Hudson (R.L.) & Parthasarathy (K.R.). Quantum Ito's Formula and Stochastic Evolutions. *Comm. Math. Phys.*, **93**, 301-303 (1984).

[Itô] Itô (K.). Multiple Wiener Integral. *J. Math. Soc. Japan*, **3**, 157-169 (1951).

[Ku1] Kurtz (D.). Représentation nucléaire des martingales d'Azéma. *Prépublication de l'IRMA*, **12** (2001). À paraître dans *Séminaire de probabilités XXXVI.*

[Ku2] Kurtz (D.). Une caractérisation des martingales d'Azéma bidimensionnelles de type II. *Séminaire de probabilités XXXV*, LNM 1755, 98-119, Springer (2001).

[KuP] Kurtz (D.) & Phan (A.). Correction à un article d'Attal et Émery sur les martingales d'Azéma bidimensionnelles. *Séminaire de probabilités XXXV*, LNM 1755, 120-122, Springer (2001).

[Lin] Lindsay (J.M.). The Kernel of a Fock Space Operator I. *QP VIII*, 271-280 (1993)

[Maa] Maassen (H.). Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels. *QP II*, 361-374 (1985).

[Me1] Meyer (P.-A.). Construction de solutions d'équations de structure. *Séminaire de probabilités XXIII*, LNM 1372, 142-145, Springer (1989).

[Me2] Meyer (P.-A.). Équations de structure des martingales et probabilités quantiques. *Séminaire de probabilités XXIII*, LNM 1372, 139-141, Springer (1989).

[Me3] Meyer (P.-A.). Notions sur les intégrales multiples. *Séminaire de probabilités X*, LNM 511, 321-331, Springer (1976).

[Me4] Meyer (P.-A.). *Quantum Probability for Probabilists – 2nd ed.* LNM 1538, Springer (1995).

[Me5] Meyer (P.-A.). Un cours sur les intégrales stochastiques. *Séminaire de probabilités X*, LNM 511, 245-400, Springer (1976).

[Pa1] Parthasarathy (K.R.). *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus.* Birkhäuser (1992).

[Pa2] Parthasarathy (K.R.). Azéma Martingales and Quantum Stochastic Calculus. *Proceedings of the R.C. Bose Symposium on Probability, Statistics and design of Experiments*, 551-569, Wiley Eastern (1990).

[Pha] Phan (A.). Martingales d'Azéma asymétriques. Description élémentaire et unicité. *Séminaire de probabilités XXXV*, LNM 1755, 48-86, Springer (2001).

[PSV] Privault (N.), Solé (J.L.) & Vives (J.). Chaotic Kabanov formula for the Azéma martingales. Bernouilli 6, **4**, 633-651 (2000).

[RuV] Russo (F.) & Vallois (P.). Product of two multiple stochastic integrals with respect to a normal martingale. Stochastic Processes and their Applications 73, 47-68 (1998).

[ScM] Schürmann (M.). The Azéma Martingales as Components of Quantum Independent Increment Processes. *Séminaire de probabilités XXV*, LNM 1485, 24-30, Springer (1991).

[ScL] Schwartz (L.). Les semi-martingales formelles. *Séminaire de probabilités XV*, LNM 850, 413-489, Springer (1981).

[Tav] Taviot (G.). *Martingales et équations de structure : étude géométrique.* Thèse de doctorat, Université de Strasbourg I (1999).

[Wie] Wiener (N.). The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.*, **55**, 897-936 (1938).

[Yor] Yor (M.). *Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some Recents Martingales Problems.* Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser (1997).