

Bodo LASS

THÈSE
présentée pour obtenir
le grade de *DOCTEUR*

Domaine : *MATHÉMATIQUE*

Titre : CALCUL COMBINATOIRE ENSEMBLISTE

Soutenue le 17 décembre 2001 devant la Commission d'Examen :

MM. Pierre Cartier, examinateur,
Dominique Foata, directeur de thèse,
Jean-Pierre Jouanolou, rapporteur interne,
Alain Lascoux, examinateur,
Eberhard Triesch, codirecteur de thèse,
Xavier Viennot, rapporteur externe,
Doron Zeilberger, rapporteur externe.

2001 xxx/TS-xx

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
Département de Mathématique
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Unité de Recherche : UMR N° 7501
STRASBOURG

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

par

Bodo LASS

A.M.S. Subject Classification (2000) : 05A15, 05A18, 05C15, 05C30, 05C70, 05E05, 05E35, 17B56 (primary); 05A20, 05C05, 05C10, 05C20, 05C25, 05C38, 05C45, 05C80, 05D15, 12D10, 14H10, 17B65, 20M05, 33C45, 55U10, 60C05, 81Q30, 81T18 (secondary).

Mots clefs : polynôme chromatique, orientations acycliques, monoïde de commutation, graphe complémentaire, couplages, polynôme des tours, coefficients de linéarisation, chemins hamiltoniens, circuits hamiltoniens, tournoi, fonctions symétriques, polynôme de couplage, transformation de Fourier, localisation des zéros, semi-invariants, intégrales de Gauss, produits de Wick, diagrammes de Feynman, transformation de Bargmann-Segal, complexe de graphes, orientations, caractéristique d'Euler, cohomologie, algèbres de Lie, surjections, transformation de Laplace, espace de modules des courbes, circuits eulériens.

Titre : CALCUL COMBINATOIRE ENSEMBLISTE

Soutenue le 17 décembre 2001 devant la Commission d'Examen :

MM. Pierre Cartier, examinateur,
Dominique Foata, directeur de thèse,
Jean-Pierre Jouanolou, rapporteur interne,
Alain Lascoux, examinateur,
Eberhard Triesch, codirecteur de thèse,
Xavier Viennot, rapporteur externe,
Doron Zeilberger, rapporteur externe.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	3
<i>CHAPITRE 0.</i> Introduction	5
<i>CHAPITRE 1.</i> Applications des fonctions d'ensembles	11
<i>PARTIE 1.1.</i> Orientations acycliques et le polynôme chromatique	13
<i>PARTIE 1.2.</i> Variations sur le thème $E + \bar{E} = XY$	43
<i>PARTIE 1.3.</i> Matching polynomials and duality	71
<i>PARTIE 1.4.</i> Le polynôme de couplage multidimensionnel	85
<i>CHAPITRE 2.</i> Applications de la combinatoire	109
<i>PARTIE 2.1.</i> Une conjecture de Kontsevich et Shoikhet	111
<i>PARTIE 2.2.</i> On the combinatorics of the graph-complex	115
<i>PARTIE 2.3.</i> Nombres hyperharmoniques	123
<i>PARTIE 2.4.</i> Démonstration combinatoire de la formule de Harer-Zagier	135
Zusammenfassung	143

À Dominique FOATA et Eberhard TRIESCH

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je tiens à exprimer tous mes remerciements et gratitude à Dominique Foata. Ce qu'il m'a apporté depuis son invitation chaleureuse à Strasbourg, son aide et assistance, son allant permanent et sa disponibilité, ses conseils judicieux et ses suggestions jusqu'aux conversations téléphoniques avec son épouse pour élucider des subtilités de la langue anglaise, tout ceci est au-delà de toute expression. Aussi me limiterai-je à dire que je prise profondément son enthousiasme et l'éclectisme de ses intérêts.

Je ne saurais oublier d'exprimer ici toute ma reconnaissance à Eberhard Triesch, qui m'a initié à la combinatoire algébrique. Sa conjecture sur les fonctions injectives reste, à mon avis, la plus passionnante de toute la combinatoire énumérative. Elle est notamment à l'origine des fonctions d'ensembles.

Guo-Niu Han m'a fait le grand plaisir de proposer la date de son habilitation pour la soutenance de ma thèse. Je suis très honoré par le jury prestigieux qu'il m'a imparti de cette manière.

Je remercie vivement Alain Lascoux de son merveilleux cadeau « Mehta : Matrix Theory » et de son addition des alphabets, qui m'ont été très utiles tous les deux.

Jean-Pierre Jouanolou a fidèlement écouté mes exposés au séminaire, et a bien voulu rapporter sur mes travaux. Je l'en remercie, ainsi que Xavier Viennot et Doron Zeilberger, mes deux rapporteurs externes. Doron Zeilberger m'a beaucoup encouragé par son enthousiasme pour ma démonstration de la formule de Harer-Zagier, tandis que Xavier Viennot m'a motivé, lors du magnifique Séminaire Lotharingien de Combinatoire au Domaine Saint-Jacques, de trouver une meilleure démonstration du théorème de Heilmann et Lieb sur les zéros du polynôme de couplage : c'est la preuve combinatoire de la formule de Mehler, imaginée par Foata, qui prend le relais.

Je voudrais remercier cordialement Pierre Cartier pour une stimulante introduction, un beau soir au Domaine-Saint-Jacques, au monde surprenant de la physique, faute de quoi le polynôme de couplage multidimensionnel n'aurait pas vu le jour. De plus, il m'a gentiment accueilli à l'École Normale Supérieure pour discuter sur mes travaux récents, ce qui m'a beaucoup aidé.

Ma gratitude s'adresse également à tous ceux qui m'ont livré des problèmes en or. Je pense notamment à Boris Shoikhet et ses complexes de graphes ainsi qu'à Dominique Foata et sa fratrie du collectionneur. C'était une grande expérience d'écrire un article en collaboration avec lui et Guo-Niu Han, débouchant sur des résultats qui figurent parmi mes favoris.

Mes remerciements vont aussi au Graduiertenkolleg d'Aix-la-Chapelle « Analyse und Konstruktion in der Mathematik », à Eberhard Triesch et à Olivier Debarre, qui m'ont soutenu financièrement. Je garde un souvenir tout ébloui du voyage à Prague pour participer au Midsummer Combinatorial Workshop. Toutefois, ce sont bien les Séminaires Lotharingiens qui, à l'aube de l'Euro et du grand projet européen gagné par Christian Krattenthaler, ont conduit à cette extraordinaire coopération entre l'ancienne capitale de l'Europe Aix-la-Chapelle et sa capitale actuelle Strasbourg. C'est à cette occasion que j'adresse mes remerciements à Patrick Foulon de m'avoir abrité dans le Collège Doctoral Européen, ainsi qu'à tous ceux qui veulent bien accepter la rédaction de ma thèse dans les deux langues administratives de notre Union Européenne.

Je m'intéresse beaucoup aux relations entre la combinatoire et d'autres domaines. À ce titre, je voudrais finalement remercier tous ceux qui ont organisé des séminaires avec une forte connotation combinatoire, et témoigner ma reconnaissance envers Michel Duflo et Michèle Vergne pour avoir présenté mes deux Notes à l'Académie des Sciences.

Introduction

Cette thèse intitulée « Calcul combinatoire ensembliste » regroupe plusieurs travaux de combinatoire énumérative et algébrique, qui utilisent les opérateurs différentiels et l'algèbre des fonctions d'ensembles, fort utile dès qu'apparaissent des partitions d'ensembles. Ces techniques combinatoires ont été appliquées, en géométrie algébrique, au calcul de la caractéristique d'Euler de l'espace de modules des courbes de genre g . Elles ont aussi permis de démontrer une conjecture de Kontsevich-Shoikhet sur les cohomologies des algèbres de Lie. Enfin, de nouveaux résultats sur les polynômes de couplage, les polynômes chromatiques, ainsi que sur les relations entre fonctions d'ensembles et fonctions symétriques ont été obtenus. Tout ceci est regroupé dans les rubriques suivantes :

Grâce aux résultats classiques de Strebel sur les différentielles quadratiques, par exemple, le calcul de la caractéristique d'Euler de l'espace de modules des courbes de genre g est un problème purement combinatoire. Il fut d'abord résolu par Harer et Zagier [12], qui l'ont réduit à une formule qui est, en fait, beaucoup plus puissante que le résultat sur la caractéristique d'Euler lui-même.

Considérons un $2m$ -gone et orientons ses $2m$ côtés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Si l'on colle ces $2m$ côtés ainsi orientés par paires de façon que deux arcs d'orientations opposées forment une arête non-orientée, on obtient une surface de Riemann. Il y a naturellement $(2m - 1)!! := (2m)! / (2^m m!)$ identifications possibles. On désigne par $\varepsilon_g(m)$ le nombre d'identifications qui conduisent à une surface orientée de genre g . Alors on a pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ étant fixé) :

FORMULE DE HARER-ZAGIER

$$\sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^{m+1-2g} = \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \cdot (2m - 1)!! \cdot 2^{n-1} \cdot \binom{m}{n-1}.$$

Harer et Zagier ont commencé leur démonstration par une approche combinatoire. Pour aboutir, cependant, ils ont dû utiliser l'intégration sur un ensemble gaussien de matrices aléatoires, tout en remerciant d'autres mathématiciens de leur aide en cette matière. Notre Note aux Comptes-Rendus [19] reproduite dans

le chapitre 2.4 se veut une réponse à la suggestion faite dans leur article : «It would be nice to have a direct (geometrical/combinatorial) proof.»

Nous relient, en effet, deux théorèmes combinatoires classiques, à savoir le calcul des arborescences et le théorème dit BEST sur les circuits eulériens. Ceci fournit une démonstration nettement plus élémentaire *et* plus courte que toutes les autres preuves obtenues jusqu'à présent par Itzykson-Zuber [14], Jackson [15] et Zagier [24] lui-même.

Par ailleurs, Itzykson et Zuber ont simplifié l'intégration sur les matrices aléatoires à l'aide des oscillateurs harmoniques et de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Nous avons réussi à réduire cette démonstration de moitié en nous appuyant sur la théorie de dualité des polynômes de couplage.

Le polynôme de couplage $\mu(G, x)$ d'un graphe (pondéré) G fut introduit par Heilmann et Lieb [13] dans un article classique en physique statistique. La théorie de dualité, cependant, n'a été étudiée que par Lovász, Viennot et Godsil [10], qui ont trouvé plusieurs relations entre le polynôme de couplage d'un graphe G et les couplages de son complément \overline{G} . Dans le chapitre 1.3, nous prolongeons leurs travaux en prouvant, notamment, que les fonctions de couplage $e^{-x^2/2}\mu(G, x)$ et $e^{-x^2/2}\mu(\overline{G}, x)$ sont, en effet, des transformées de Fourier.

Notre technique de démonstration repose sur l'utilisation de l'algèbre des fonctions d'ensembles fournissant des preuves très courtes et explicatives, que l'on peut généraliser à plusieurs dimensions sans aucune modification après avoir imaginé un polynôme de couplage multidimensionnel (voir chapitre 1.4). Ceci permet notamment de mieux comprendre le rôle de la transformation de Bargmann-Segal-Wiener et de celle de Wick ainsi que le rôle des opérateurs différentiels dans notre démonstration de la formule de Harer-Zagier.

Toutefois, le théorème principal de Heilmann et Lieb, que tous les zéros de $\mu(G, x)$ sont réels, n'est plus vrai à plusieurs dimensions : nous avons, effectivement, découvert une famille de graphes dont le polynôme de couplages multidimensionnel n'a aucun zéro réel. Dans le cas d'une dimension, cependant, nous avons trouvé une démonstration du théorème de Heilmann et Lieb, qui nous semble plus simple que toutes les preuves différentes de ces derniers auteurs (voir chapitre 1.3) : une généralisation de la démonstration combinatoire (imaginée par Foata [6]) de la formule de Mehler implique, en particulier, une nouvelle inégalité, valable pour tout $x \in \mathbb{C}$ si G a n sommets : $|\mu(G, x)| \geq |\Im x|^n$.

Dans le problème traditionnel du collectionneur de vignettes, en s'appuyant sur le calcul combinatoire des surjections, nous avons notamment obtenu une formule explicite pour les nombres moyens $\mathbb{E}[X^{(k)}]$ de vignettes apparues exactement k fois :

$$1 - t + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X^{(k)}] \cdot t^k = \frac{1}{1 - t/m} \cdot \frac{1}{1 - t/(m-1)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - t/2}.$$

Nous sommes également arrivés à résoudre les équations aux différences, auxquelles on est automatiquement conduit si l'on veut prolonger la méthode des martingales. Ces résultats font l'objet d'une publication en commun avec Foata et Han et sont partiellement reproduites dans le chapitre 2.3.

L'exploration des aspects énumératifs des couplages dans les graphes bipartis correspond à l'étude des permanents des matrices quelconques. Dans le chapitre 1.4, nous avons utilisé la théorie des polynômes de couplage deux-dimensionnels pour obtenir des théorèmes de dualité symétriques, qui font intervenir des opérateurs différentiels. D'autre part, nous avons trouvé des théorèmes de dualité unifiant les résultats classiques de Chow-Gessel [4], Joni-Rota [16] et Foata-Zeilberger [7] qui ne sont pas symétriques par rapport à la bipartition du graphe (voir chapitre 1.2).

Nous appliquons ceci aux graphes orientés, c'est-à-dire aux matrices carrées, afin d'obtenir une relation fondamentale (imaginée par Berge [1]) entre les chemins et les circuits hamiltoniens d'un graphe (pondéré) et ceux de son complément. Exprimée dans le langage des fonctions d'ensembles, elle est à l'origine de beaucoup de résultats en combinatoire algébrique, jusqu'à présent non-reliés. Elle fournit notamment une preuve rapide de la conjecture de Chung-Graham [5] (démontrée d'abord par Chow et Gessel) et du théorème de parité de Rédei sur les tournois. De plus, on obtient plusieurs généralisations naturelles, prolongeant les recherches de Berge en la matière. Finalement, nous avons étudié les relations entre les fonctions d'ensembles et les fonctions symétriques, permettant, notamment, de donner des démonstrations rapides du théorème principal de la thèse de Chow [3] ainsi que d'autres résultats de Stanley [21] sur les fonctions symétriques. Dans ce contexte, nous avons révélé le rôle fondamental de l'addition des alphabets imaginée par Lascoux [18].

On attache à tout graphe connexe G avec n sommets son polynôme chromatique

$$\chi_G(\lambda) = \lambda \cdot [(\lambda - 1)^{n-1} - b_{n-2} \cdot (\lambda - 1)^{n-2} + \dots + (-1)^n b_1 \cdot (\lambda - 1)],$$

où b_1, b_2, \dots, b_{n-2} sont des entiers positifs correspondant à certains coefficients du polynôme de Tutte. Les nombres b_1, b_2, \dots, b_{n-2} sont probablement les invariants les plus petits (i. e. les plus puissants) que l'on peut associer à tout graphe (connexe) à partir de son polynôme chromatique. D'après Stanley [22] on sait que $|\chi_G(-1)|$ est égal au nombre d'orientations acycliques de G , un résultat qui fut raffiné par Greene-Zaslavsky [11], Viennot [23], Gebhard-Sagan [8] et Gessel [9]. Dans [20] (voir chapitre 1.1), nous l'avons affiné davantage en démontrant que b_k compte le nombre d'orientations acycliques de G de $k + 1$ composantes, dont le puits unique est un sommet fixé. De plus, nous avons découvert que, sous le jour des fonctions d'ensembles, le théorème de Cartier et Foata [2] sur l'inversion (de Möbius) dans le monoïde de commutation est une généralisation non-commutative directe du théorème de Stanley sur $\chi_G(-1)$.

Après que nous eûmes trouvé une démonstration simple d’une conjecture de Kontsevich et Shoikhet déjà établie (voir chapitre 2.1), Shoikhet nous a envoyé sa prépublication en commun avec Kontsevich [17], dans laquelle deux complexes de graphes furent introduits : le complexe sur l’espace pair (resp. impair) pour étudier la cohomologie de l’algèbre de Lie Ham_0 (resp. $\text{Ham}_0^{\text{odd}}$) des champs vectoriels hamiltoniens sans terme constant sur l’espace pair (resp. impair) de dimension infinie. Il nous a écrit que “*you obtain at first look a different graph-complex, but our idea with Kontsevich was that the two cohomologies coincide - and to prove it by something like an isomorphism of orientations. . . . So, up to me, a really interesting problem in this direction is to prove that the even and the odd graph-complexes give the same orientation.*” En introduisant des graphes « universellement orientés », nous avons effectivement réussi à construire un isomorphisme entre le complexe de graphes sur l’espace pair et sur l’espace impair, démontrant ainsi que les cohomologies de Ham_0 et $\text{Ham}_0^{\text{odd}}$ coïncident (voir chapitre 2.2). Selon Feigin, il semble difficile d’établir cette conjecture par d’autres moyens.

Références bibliographiques

- [1] C. Berge, Chemins hamiltoniens, ICC Research Report n° 67/2, 1967.
- [2] P. Cartier et D. Foata, « Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements », Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [3] T. Chow, « Symmetric Function Generalizations of Graph Polynomials », Ph.D. Thesis, MIT, 1995.
- [4] T. Chow, The path-cycle symmetric function of a digraph, *Advances in Math.* **118** (1996), 71-98.
- [5] F. R. K. Chung et R. L. Graham, On the cover polynomial of a digraph, *J. Combinatorial Theory, Series B* **65** (1995), 273-290.
- [6] D. Foata, A combinatorial proof of the Mehler formula, *J. Combinatorial Theory, Series A* **24** (1978), 367-376.
- [7] D. Foata et D. Zeilberger, Laguerre polynomials, weighted derangements and positivity, *SIAM J. Disc. Math.* **1** (1988), 425-433.
- [8] D. D. Gebhard et B. E. Sagan, Sinks in acyclic orientations of graphs, *J. Combinatorial Theory, Series B* **80** (2000), 130-146.
- [9] I. M. Gessel, Acyclic orientations and chromatic generating functions, *Discrete Math.* **232** (2001), 119-130.
- [10] C. D. Godsil, Hermite polynomials and a duality relation for matchings polynomials, *Combinatorica* **1** (1981), 257-262.
- [11] C. Greene et T. Zaslavsky, On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs, *Trans. AMS* **280** (1983), 97-126.
- [12] J. Harer et D. Zagier, The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Invent. math.* **85** (1986), 457-485.

- [13] O. J. Heilmann et E. H. Lieb, Theory of monomer-dimer systems, *Comm. Math. Physics* **25** (1972), 190-232.
- [14] C. Itzykson et J.-B. Zuber, Matrix integration and combinatorics of modular groups, *Comm. Math. Physics* **134** (1990), 197-207.
- [15] D. M. Jackson, Counting cycles in permutations by group characters, with an application to a topological problem, *Trans. AMS* **299** (1987), 785-801.
- [16] S. A. Joni et G.-C. Rota, A vector space analog of permutations with restricted position, *J. Combinatorial Theory, Series A* **29** (1980), 59-73.
- [17] M. Kontsevich et B. Shoikhet, Formality conjecture, geometry of complex manifolds and combinatorics of the graph-complex, preprint.
- [18] A. Lascoux, Couper les alphabets en quatre, <http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al>; version anglaise : Alphabet splitting, dans : Algebraic Combinatorics and Computer Science, A Tribute to Gian-Carlo Rota (H. Crapo et D. Senato, eds.), Springer-Verlag, Milano (2001), 431-444.
- [19] B. Lass, Démonstration combinatoire de la formule de Harer-Zagier, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **333** (2001), 155-160.
- [20] B. Lass, Orientations acycliques et le polynôme chromatique, *Europ. J. Combinatorics* **22** (2001), 1101-1123.
- [21] R. P. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, *Advances in Math.* **111** (1995), 166-194.
- [22] R. P. Stanley, Acyclic orientations of graphs, *Discrete Math.* **5** (1973), 171-178.
- [23] G. X. Viennot, Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas, *Combinatoire énumérative*, Proc. Colloq., Montréal/Can. 1985, *Lect. Notes Math.* **1234** (1986), 321-350.
- [24] D. Zagier, On the distribution of the number of cycles of elements in symmetric groups, *Nieuw Archief voor Wiskunde Ser. IV* **13** (1995), 489-495.

Applications des fonctions d'ensembles

Ce chapitre regroupe tous les travaux qui utilisent l'algèbre des fonctions d'ensembles. Pour permettre une lecture indépendante des quatre parties qui composent ce chapitre, nous avons reproduit, à quatre reprises, les règles de base de l'algèbre de ces fonctions, et chaque fois dans le paragraphe numéroté 2, intitulé « Outils algébriques ». On trouve, cependant, à la fin de chaque paragraphe 2, des techniques de calcul spécifiques au problème étudié dans cette partie.

1.1 Orientations acycliques et le polynôme chromatique

1.2 Variations sur le thème $E + \bar{E} = XY$

1.3 Matching polynomials and duality

1.4 Le polynôme de couplage multidimensionnel

Orientations acycliques et le polynôme chromatique (*)

On attache à tout graphe G son polynôme chromatique $\chi_G(\lambda)$, qui dénombre ses colorations régulières avec λ couleurs. D'après Stanley, on sait que $|\chi_G(-1)|$ est égal au nombre d'orientations acycliques du graphe, un résultat qui fut raffiné par Greene et Zaslavsky. Nous nous proposons de l'affiner davantage en interprétant, avec l'aide de certaines orientations acycliques, les coefficients de $\chi_G(\lambda)$ développé en puissances de λ et surtout en puissances de $(\lambda-1)$. L'utilisation systématique des fonctions génératrices des fonctions d'ensembles permet d'avoir des démonstrations très courtes et explicatives. Elles se veulent une réponse à la suggestion faite par Gebhard et Sagan, qui ont déjà trouvé des démonstrations combinatoires de deux résultats de Greene et Zaslavsky. Les fonctions d'ensembles permettent aussi d'établir une série d'interprétations nouvelles de l'invariant β_G de Crapo. Cet article donne également un nouvel éclat aux résultats classiques de Cartier, Foata, Viennot, Brenti, Gessel et Stanley.

The chromatic polynomial $\chi_G(\lambda)$, which is associated with each graph G , enumerates its regular colorations with λ colors. Stanley showed that $|\chi_G(-1)|$ is equal to the number of acyclic orientations of the graph, a result that was refined by Greene and Zaslavsky. The purpose of the paper is to show that a further refinement can be obtained by interpreting each coefficient of $\chi_G(\lambda)$, when the polynomial is developed with respect to powers of λ and $(\lambda-1)$. A systematic use of the generating functions for set functions enables us to have very short and instructive proofs. Gebhard and Sagan, who had already found combinatorial proofs of two results by Greene and Zaslavsky, suggested that further proofs were to be found. Finally, the set functions algebra allows us to establish a series of new interpretations for Crapo's β_G invariant. This paper also brings a new light to the classical results due to Cartier, Foata, Viennot, Brenti, Gessel and Stanley.

1. Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non-orienté. Une *orientation* de G est un graphe orienté obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête $e \in E$ par un des deux arcs (i. e. arêtes orientées) possibles. L'orientation est *acyclique* si elle ne contient pas de cycles orientés. Évidemment, le nombre d'orientations acycliques est égal à zéro si G contient une boucle (et égal à 1 si G ne contient aucune arête). De plus, des arêtes multiples de G doivent toutes être orientées de la même façon

(*) Article publié dans *European J. of Combinatorics*, t. **22**, p. 1101-1123, 2001.

pour que l'orientation devienne acyclique. Voilà pourquoi on peut supposer, sans restreindre la généralité, que G est simple, c'est-à-dire qu'il ne contient ni boucles ni arêtes multiples, lorsqu'on s'intéresse aux orientations acycliques.

On appelle *puits* (resp. *source*) d'une orientation de G un sommet qui n'est l'extrémité *initiale* (resp. *terminale*) d'aucun arc. Apparemment, de quelque façon que l'on choisisse une orientation de G , *chaque sommet isolé de G est toujours à la fois un puits et une source*, un fait qui nécessite une prise en charge particulière des sommets isolés lorsqu'il faut regarder des puits et des sources en même temps.

Une coloration $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ de G avec λ couleurs est dite *régulière* si les deux extrémités de chaque arête ont des couleurs différentes, c'est-à-dire $\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. Soit $\chi_G(\lambda)$ le nombre de ces colorations. C'est un des faits les plus classiques de la théorie des graphes (découlant à plusieurs reprises de cet article) que $\chi_G(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré $\mathbf{n} := |\mathbf{V}|$, appelé *polynôme chromatique*. Évidemment, $\chi_G(\lambda) = 0$ si G contient une boucle, et de nouveau on peut se cantonner aux graphes simples pour étudier le polynôme chromatique.

Les similarités constatées entre les orientations acycliques et le polynôme chromatique ne sont pas une coïncidence. En fait, si

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + c_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} c_1 \cdot \lambda,$$

alors il est classique que c_1, c_2, \dots, c_{n-1} sont des entiers positifs; et grâce à Stanley [21], on sait que $c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} + 1$ dénombre effectivement les orientations acycliques de G .

Ceci soulève immédiatement la question de savoir s'il est possible de partitionner, de façon canonique, l'ensemble des orientations acycliques en blocs de cardinalités $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 1$. En effet, si les sommets de G sont numérotés, c'est-à-dire $V = \{1, 2, \dots, n\}$, alors une telle partition est possible en attachant, à chaque orientation acyclique, une partition de V constituée par k blocs, appelés *composantes* de l'orientation acyclique. La même construction de ces composantes fut imaginée par Greene et Zaslavsky [12] (dans un contexte géométrique) et par Viennot [27] (dans le cadre des empilements de pièces). Un des buts de cet article est de populariser leur résultat, qui est resté plutôt inconnu sauf pour le cas d'une seule composante : le fait que c_1 dénombre les orientations acycliques d'une seule composante (ce sont par définition les orientations acycliques dont le sommet 1 est la seule source) se trouve dans [4] et dans le livre récent de Bollobás [1] (chapitre X, théorème 8), par exemple.

Suivons Sachs ([20], chapitre V.9.2) et appelons $\alpha_G := c_1$ *discriminant chromatique* du graphe G . Les nombres c_1, c_2, \dots, c_{n-1} sont définis indépendamment de la numérotation choisie et du fait que l'on s'intéresse aux sources ou plutôt aux puits des orientations acycliques. Voilà pourquoi α_G compte les orientations acycliques de G dont un sommet fixé est la seule source (ou bien le seul puits). C'était le leitmotif de l'article [9] de Gebhard et Sagan de donner trois preuves nouvelles

de ce théorème de Greene et Zaslavsky [12], que ces derniers avaient démontré en s'appuyant sur les arrangements d'hyperplans.

Supposons maintenant que G est connexe de sorte que α_G est strictement positif. Il est classique (voir [26], chapitre IX.2) que le polynôme chromatique admet alors le développement

$$\chi_G(\lambda) = \lambda \cdot [(\lambda - 1)^{n-1} - b_{n-2} \cdot (\lambda - 1)^{n-2} + \dots + (-1)^n b_1 \cdot (\lambda - 1)],$$

où b_1, b_2, \dots, b_{n-2} sont des entiers positifs correspondant à certains coefficients du polynôme de Tutte. Les nombres b_1, b_2, \dots, b_{n-2} sont probablement les invariants les plus petits (i. e. les plus puissants) que l'on peut associer à tout graphe (connexe) à partir de son polynôme chromatique. Leur positivité implique en particulier une unimodalité partielle des coefficients « ordinaires » de $\chi_G(\lambda)$, à savoir $1 \leq c_{n-1} \leq c_{n-2} \leq \dots \leq c_{\lceil n/2 \rceil}$ (voir [1], chapitre X, théorème 13). Numérotions les sommets du graphe G . Il est évident que

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2} + 1 = \alpha_G$$

dénombrer les orientations acycliques de G dont le sommet 1 est le seul puits; et la question se pose si l'on peut, de nouveau, trouver une partition canonique de l'ensemble de ces orientations en blocs de cardinalités $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}, 1$. Une telle partition existe effectivement, et de surcroît, c'est la même que nous connaissons déjà : b_k compte le nombre d'orientations acycliques de G de $k + 1$ composantes, dont le puits unique est égal à 1, si (et seulement si) la numérotation des sommets reflète bien la connexité du graphe. Ce résultat risque d'être absolument inconnu, puisque la positivité des nombres b_1, b_2, \dots, b_{n-2} constitue la première moitié du théorème principal de l'article tout récent [10] de Gessel, mais pour la démonstration, le lecteur est renvoyé à la littérature (i. e. au polynôme de Tutte), bien que le sujet dudit article soient des relations entre colorations et orientations acycliques !

Dans le cas particulier de l'invariant $\beta_G := b_1$ de Crapo [6] cependant, on retrouve le théorème classique de Greene et Zaslavsky [12] qui, grâce aux arrangements d'hyperplans, ont indentifié β_G comme nombre d'orientations acycliques de G n'ayant qu'une seule source et un seul puits, à savoir les deux sommets adjacents 2 et 1, respectivement. Gebhard et Sagan ont trouvé une preuve par induction de ce fait et ont pensé que le résultat mériterait d'autres démonstrations (voir [9]). Cet article se veut, entre autres, une réponse à leur suggestion. Nous donnons, en effet, une série d'interprétations apparemment nouvelles (incluant celle de Greene et Zaslavsky) de β_G , et nous les démontrons avec l'aide de l'algèbre des fonctions d'ensembles.

En fait, de notre point de vue, l'intérêt principal de cet article consiste en l'exploration de la méthode des fonctions génératrices dans le présent contexte, méthode

qui a déjà fait ses preuves dans beaucoup de situations différentes (voir [14]). Chacun de nos théorèmes s'obtient effectivement comme spécialisation d'une identité dans l'algèbre des fonctions d'ensembles et le passage entre ces différentes identités se fait toujours en quelques lignes. Ceci permet notamment de trouver des nouvelles démonstrations, très courtes et explicatives, des deux théorèmes de Greene et Zaslavsky mentionnés ci-dessus ainsi que de celui de Stanley sur $|\chi_G(-1)|$.

Il nous semble particulièrement surprenant que chacune de nos identités admettant une généralisation *non-commutative* apparaît déjà dans les travaux de Cartier-Foata [5], Foata [7] et Gessel [10]. De plus, c'est Gessel (voir [27], pages 343-344) qui a montré (sur toute une page à l'époque) comment on peut déduire le résultat de Stanley du théorème de Cartier et Foata (voir [5]) sur l'inversion (de Möbius) dans le monoïde de commutation. En fait, de notre point de vue, ce théorème de Cartier et Foata devient une généralisation non-commutative directe du théorème de Stanley [21] sans aucune démonstration supplémentaire. Ceci montre à quel point le livre de Cartier et Foata était visionnaire !

Cependant, pour aller plus loin dans le sens des théorèmes de Greene et Zaslavsky qui font intervenir des interprétations combinatoires du logarithme, il semble falloir se cantonner au cas *commutatif*. Cette nécessité fut d'abord révélée par Viennot (voir [27], proposition 5.10), qui a, de plus, établi l'équivalence du modèle de Cartier et Foata avec son modèle des empilements de pièces ainsi que, notamment, avec notre modèle préféré, à savoir les orientations acycliques d'un graphe (voir [27], page 325, c)). Grâce à cette équivalence, les théorèmes 3.2 et 5.1 de cet article deviennent effectivement des généralisations ou plutôt des raffinements de la proposition 5.10 de [27].

Après avoir expliqué notre méthode algébrique dans le paragraphe 2, nous l'appliquons pour le traitement du polynôme chromatique et des orientations acycliques dans les paragraphes 3, 4, 5 et 6. Trois appendices sont consacrés à la discussion, dans notre optique, des travaux de Cartier, Foata, Gessel, Viennot et Stanley mentionnés ci-dessus. En outre, nous considérons brièvement les développements du polynôme chromatique obtenus par Brenti, les graphes aléatoires étudiés par Welsh [28] et la fonction (symétrique) chromatique de Stanley (voir [22]).

2. Outils algébriques

Soit V un ensemble fini et

$$\begin{aligned} f : 2^V &\rightarrow A \\ V' \subseteq V &\mapsto f(V') \in A \end{aligned}$$

une fonction d'ensembles, où A est un anneau commutatif (avec 1).

Considérons la fonction génératrice

$$F_f(\nu) := \sum_{V' \subseteq V} f(V') \cdot \nu^{V'}, \quad \nu^\emptyset := 1,$$

à joindre aux règles de calcul suivantes ($V', V'' \subseteq V$) :

$$\nu^{V'} \cdot \nu^{V''} := \nu^{V'+V''}, \quad \text{où}$$

$$V' + V'' := \begin{cases} V' \cup V'', & \text{si } V' \cap V'' = \emptyset, \\ \dagger, & \text{si } V' \cap V'' \neq \emptyset, \end{cases} \quad \text{où}$$

$$\dagger + V' := \dagger, \quad \dagger + \dagger := \dagger, \quad \text{et} \quad \nu^\dagger := 0.$$

L'algèbre $A[V]$ de ces fonctions génératrices n'est pas une inconnue. En effet, on a l'isomorphisme

$$A[V] \simeq A[v_1, \dots, v_n] / \langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle,$$

si V contient n éléments.

EXEMPLE 2.1. Le produit fg de deux fonctions d'ensembles f, g est défini, pour tout $V' \subseteq V$, par

$$(fg)(V') := \sum_{V' = V'' \uplus V'''} f(V'') \cdot g(V''').$$

Il en résulte

$$F_{fg}(\nu) = F_f(\nu) \cdot F_g(\nu).$$

Pour $|V| = \infty$, soit $F(V)$ l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles finis de V . On a des projections canoniques $p_{V', V''} : A[V'] \rightarrow A[V'']$ ($V', V'' \in F(V), V' \supseteq V''$) et l'on pose

$$A[V] := \varprojlim A[V'], \quad V' \in F(V)$$

pour travailler avec des fonctions génératrices de la forme

$$F_f(\nu) = \sum_{V' \in F(V)} f(V') \cdot \nu^{V'}.$$

REMARQUE 2.1. Dans [14], les projections canoniques furent utilisées pour démontrer des propositions par analogie avec les propositions 3.2 et 4.1 de cet article. Deux de ces résultats sont directement équivalents à la proposition 5.3 de [27] et au lemme 1.2 de [2]. Cependant, l'interaction des projections avec l'analyse est moins intéressante. C'est pourquoi elles ne sont plus employées ici.

Soit

$$V := \sum_{v \in V} \nu^{\{v\}}$$

la fonction indicatrice des sous-ensembles de V de cardinalité 1 (l'usage double de V pour l'ensemble et pour un élément de $A[V]$ ne pourra pas être à l'origine de confusions). En multipliant la fonction génératrice V plusieurs fois par elle-même, on voit que $V^n/n!$ représente la fonction indicatrice des sous-ensembles de l'ensemble V de cardinalité n . L'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot V^n/n! = \sum_{V' \in \mathcal{F}(V)} f(|V'|) \cdot \nu^{V'}, \quad f : \mathbb{N} \rightarrow A,$$

fournit un plongement de l'anneau $A[[V]]$ des fonctions génératrices de type exponentiel dans l'anneau $A[V]$. Ce plongement est à l'origine de (presque?) toutes les applications de $A[[V]]$ en combinatoire, mais il nécessite l'existence d'un modèle combinatoire infini (qui ne fait intervenir que les cardinalités). Par conséquent, $A[V]$ donne plus de flexibilité et permet un traitement algébrique, qui reflète parfaitement les opérations classiques de la combinatoire. Outre cela, $A[V]$ est approprié, par excellence, aux calculs par ordinateur.

REMARQUE 2.2. L'anneau $\mathbb{Z}[[V]]$ n'est pas noethérien, mais il contient des fonctions importantes comme $\exp(V)$ et $\log(1 + V)$.

EXEMPLE 2.2. Si $\text{char } A = 2$, on a

$$\begin{aligned} (1 + V)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \cdot V^n/n! \\ &\equiv 1 + V \quad \text{et} \\ \log(1 + V) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot V^n/n! \\ &\equiv V + V^2/2 \end{aligned}$$

dans l'anneau $A[[V]]$. Ces identités sont à l'origine de maints résultats de parité en combinatoire.

Pour tout $t \in A$ posons $(t \cdot \nu)^{V'} := t^{|V'|} \cdot \nu^{V'}$, $V' \subseteq V$, et, par conséquent,

$$F_f(t\nu) = \sum_{\emptyset \subseteq V' \subseteq V} f(V') t^{|V'|} \nu^{V'}.$$

Il est évident que cette définition est compatible avec l'addition et la multiplication. Les cas particuliers les plus importants sont $t = -1$ et $t = 0$: $F_f(0) = F_f(0 \cdot \nu) = f(\emptyset)$.

Si $F_f(0) = 0$, alors $F_f(\nu)^n/n!$ est défini pour n'importe quel anneau A , parce qu'une partition en n sous-ensembles non-vides peut être ordonnée de $n!$ manières différentes. Voilà pourquoi $A![[V]]$ opère sur $A[V]$ par la substitution $G(F_f(\nu))$ définie pour tout $G \in A![[V]]$.

Finalement, on utilise les dérivées ∂^v pour tout $v \in V$ définies par

$$\partial^v \nu^{V'} := \begin{cases} \nu^{V'}, & \text{si } v \in V', \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formule de dérivation d'un produit

$$\partial^v [F_f(\nu) \cdot F_g(\nu)] = (\partial^v F_f(\nu)) \cdot F_g(\nu) + F_f(\nu) \cdot (\partial^v F_g(\nu))$$

est l'analogie algébrique du fait ensembliste le plus fondamental :

$$v \in V' \uplus V'' \quad \Leftrightarrow \quad v \in V' \quad \text{ou} \quad v \in V''.$$

La formule

$$\partial^v [G(F_f(\nu))] = G'(F_f(\nu)) \cdot \partial^v F_f(\nu), \quad G \in A![[V]],$$

en découle immédiatement.

REMARQUE 2.3. L'isomorphisme $A[V] \simeq A[v_1, \dots, v_n]/\langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle$ ne fait pas correspondre ∂^v à $\partial/\partial v_i$, mais à $v_i \partial/\partial v_i$. La dérivée partielle $\partial/\partial v_i$ n'a point d'analogie dans $A[V]$.

Pour $\emptyset \subseteq V' \subseteq V$, posons

$$\partial^{V'} := \prod_{v \in V'} \partial^v, \quad \text{i. e.} \quad \partial^{V'} \nu^{V''} = \begin{cases} \nu^{V''}, & \text{si } V' \subseteq V'', \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

en particulier, ∂^\emptyset est l'identité. Comme $(\partial^v)^2 = \partial^v$ pour tout $v \in V$, on a

$$\partial^{V'} \partial^{V''} = \partial^{V' \cup V''}, \quad V', V'' \subseteq V.$$

Les opérateurs différentiels n'étant pas des combinaisons linéaires des dérivations d'éléments ∂^v , $v \in V$, ne satisfont pas aux formules de dérivation ordinaires. En s'appuyant sur la définition $\partial^{V'} := \prod_{v \in V'} \partial^v$, cependant, on peut calculer des règles spécifiques pour eux :

PROPOSITION 2.1.

a) Soient $f, g : 2^V \rightarrow A$ des fonction d'ensembles, et soit $V' \subseteq V$ fixé. Alors

$$\partial^{V'} [F_f(\nu) \cdot F_g(\nu)] = \sum_{\emptyset \subseteq V'' \subseteq V'} \partial^{V''} F_f(\nu) \cdot \partial^{V' \setminus V''} F_g(\nu).$$

b) Soient $s, p \in V$, et soit $G \in A[[V]]$. Alors

$$\partial^{\{s,p\}} [G(F_f(\nu))] = G''(F_f(\nu)) \cdot \partial^s F_f(\nu) \cdot \partial^p F_f(\nu) + G'(F_f(\nu)) \cdot \partial^{\{s,p\}} F_f(\nu).$$

c) Soit t une variable (ou $t \in A$) et posons $D(t) := \sum_{\emptyset \subseteq V' \subseteq V} t^{|V'|} \partial^{V'}$. Alors

$$\begin{aligned} D(t)[F_f(\nu) \cdot F_g(\nu)] &= D(t)F_f(\nu) \cdot D(t)F_g(\nu); \quad \text{puisque} \\ D(t)F_f(\nu) &= F_f((t+1)\nu). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. Orientations acycliques et ensembles indépendants : sources ou puits

Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$, soit $G[V']$ le sous-graphe de $G = (V, E)$ engendré par V' : c'est le graphe dont les sommets sont les points de V' , et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans V' . Un sous-ensemble I de sommets est dit *indépendant*, si le sous-graphe engendré par I ne contient aucune arête.

Une coloration $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ de G avec λ couleurs est *régulière* (voir l'introduction) si et seulement si, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$, le sous-ensemble $c^{-1}(i)$ est un ensemble de sommets indépendant (ou vide). *Voilà pourquoi une coloration régulière avec λ couleurs n'est rien d'autre qu'une partition de V en λ ensembles indépendants, dont chacun peut être vide.*

Soit $I_G(\nu)$, $I_G(0) = 0$, la fonction indicatrice des sous-ensembles indépendants de G (la valeur de cette fonction indicatrice sur V' , $\emptyset \subset V' \subseteq V$, est égal à 1, si $G[V']$ ne contient aucune arête, et égal à 0 sinon) :

$$I_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset I \subseteq V, I \text{ indépendant}} \nu^I;$$

et posons

$$\chi_{G,\lambda}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \chi_{G[V']}(\lambda) \cdot \nu^{V'},$$

où $\chi_{G[V']}(\lambda)$ désigne le polynôme chromatique (i. e. le nombre de colorations régulières avec λ couleurs) de $G[V']$.

Rappelons que le coefficient linéaire de $\chi_G(\lambda)$ multiplié par $(-1)^{n-1}$, c'est-à-dire $(-1)^{n-1}\chi'_G(0)$, est appelé discriminant chromatique et noté α_G ; et généralisons la définition de l'invariant de Crapo donnée dans l'introduction en posant $\beta_G := (-1)^{n+i}\chi'_G(1)$, où i désigne le nombre de sommets isolés de G . Le lecteur familier avec β_G verra facilement que cette définition est équivalente à la sienne, si G contient au moins une arête. Si G ne contient aucune arête, on obtient $\beta_G = n$, une définition artificielle qui sera modifiée ci-dessous.

Évidemment, nous utilisons les mêmes définitions pour tous les sous-graphes engendrés, notant en particulier $i(G[V'])$ le nombre de sommets isolés de $G[V']$.

Puisqu'une multiplication dans l'algèbre $A[V]$ avec λ facteurs compte des partitions en λ ensembles, on a l'identité fondamentale (un facteur 1 correspond au fait qu'on peut choisir l'ensemble vide pour la couleur correspondante, i. e. ne pas utiliser cette couleur pour la coloration), que nous reproduisons dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. *On a*

$$1 + \chi_{G,\lambda}(\nu) = [1 + I_G(\nu)]^\lambda,$$

$$\frac{d}{d\lambda}[1 + \chi_{G,\lambda}(\nu)] = [1 + I_G(\nu)]^\lambda \cdot \log[1 + I_G(\nu)];$$

et, en particulier, pour le discriminant chromatique α_G et l'invariant de Crapo β_G , on a :

$$-\log[1 + I_G(-\nu)] = \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \alpha_{G[V']} \cdot \nu^{V'},$$

$$[1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] = \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} (-1)^{i(G[V'])} \beta_{G[V']} \cdot \nu^{V'}. \quad \blacksquare$$

EXEMPLE 3.1. Selon l'exemple 2.2, $I_G(\nu) + I_G(\nu)^2/2$ compte les discriminants chromatiques modulo 2. Par conséquent, α_G est impair si et seulement si le graphe G est connexe et biparti (voir [20], chapitre V.9.2). (Un graphe est biparti, si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes indépendantes.)

Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$, soit $a(G[V'])$ le nombre d'orientations acycliques du graphe $G[V']$ (voir l'introduction), et soit $a_S(G[V'])$ le nombre d'orientations acycliques de $G[V']$, dont l'ensemble des sources est égal à S , $\emptyset \subseteq S \subseteq V$. Évidemment, $a_S(G[V']) = 0$, si S n'est pas un sous-ensemble de V' . De plus, si $S = \emptyset$, alors on a toujours $a_S(G[V']) = 0$, puisque chaque orientation acyclique du graphe $G[V']$ ($|V'| > 0$) a au moins une source. Posons

$$A_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} a(G[V']) \cdot \nu^{V'}, \quad A_{G,S}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} a_S(G[V']) \cdot \nu^{V'}.$$

Le rapport fondamental entre les orientations acycliques et les sous-ensembles indépendants de G repose uniquement sur le fait que *l'ensemble des sources d'une orientation acyclique est toujours indépendant*.

Or, si $S', \emptyset \subseteq S' \subseteq V$, n'est pas indépendant (l'ensemble vide est indépendant), S' ne peut pas être un sous-ensemble de l'ensemble des sources. Si S' est indépendant, cependant, alors $[1 + A_G(\nu)] \cdot \nu^{S'}$ compte le nombre d'orientations acycliques telles que S' est un sous-ensemble de l'ensemble des sources; car ces orientations de $G[V']$, $S' \subseteq V' \subseteq V$, s'obtiennent en choisissant une orientation acyclique quelconque du graphe $G[V' \setminus S']$ et en orientant toutes les autres arêtes de S' à $V' \setminus S'$. Par conséquent, le principe d'inclusion-exclusion fournit le résultat suivant (voir [7], théorème 3.1, pour une généralisation non-commutative ayant la même démonstration) :

PROPOSITION 3.2. (Foata) *Pour tout $\emptyset \subseteq S \subseteq V$ on a*

$$[1 + A_G(\nu)] \cdot (-1)^{|S|} \partial^S [1 + I_G(-\nu)] = \partial^S [1 + A_{G,S}(\nu)],$$

les cas particuliers les plus intéressants étant $S = \emptyset$ et $S = \{s\}$ ($s \in V$) :

$$[1 + A_G(\nu)] \cdot [1 + I_G(-\nu)] = 1, \quad -[1 + A_G(\nu)] \cdot \partial^s I_G(-\nu) = A_{G,s}(\nu). \quad \blacksquare$$

Alors il découle des deux propositions précédentes (voir [21] ou [17], 9.46, ainsi que [5], théorème 2.4, et [27], proposition 5.1) :

THÉORÈME 3.1. (Stanley, Cartier-Foata, Gessel-Viennot) *Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$,*

$$[1 + I_G(-\nu)]^{-1} = 1 + A_G(\nu) = 1 + \chi_{G,-1}(-\nu)$$

dénombrer les orientations acycliques de $G[V']$. En particulier, on a $a(G) = (-1)^n \chi_G(-1)$, et ce nombre est toujours strictement positif. \blacksquare

Soit $s \in V$ fixé. Alors le théorème 3.1 et la proposition 3.2 impliquent

$$\partial^s - \log[1 + I_G(-\nu)] = -[1 + I_G(-\nu)]^{-1} \cdot \partial^s I_G(-\nu) = A_{G,s}(\nu).$$

Posons $A_G^*(\nu) := -\log[1 + I_G(-\nu)]$. Il s'ensuit (voir [12] ou [9] ainsi que [27], proposition 5.10) :

THÉORÈME 3.2. (Greene-Zaslavsky, Viennot) *Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$,*

$$-\log[1 + I_G(-\nu)] = A_G^*(\nu) = -\frac{d}{d\lambda} \chi_{G,0}(-\nu)$$

dénombrer les orientations acycliques de $G[V']$ n'ayant qu'une seule source fixée $s \in V'$. En particulier, on a $a_s(G) = (-1)^{n-1} \chi'_G(0) = \alpha_G$ pour tout $s \in V$, et ce nombre n'est jamais négatif. Plus précisément, il est égal à 0 si G n'est pas connexe, il est égal à 1 si G est un arbre, et il est plus grand que 1 dans tous les autres cas.

Démonstration. Seulement la toute dernière affirmation n'est pas encore évidente. Elle se démontre comme suit. Les plus courts chemins de $s \in V$ à n'importe quel autre sommet forment une arborescence avec s comme source unique. Une arête supplémentaire de G doit « passer de travers » par rapport à cette arborescence et peut être orientée de deux manières différentes sans qu'il y ait un cycle orienté. Enfin, chacune de ces deux orientations acycliques peut être prolongée à tout G . ■

Finalement, soit $a_k(G)$ le nombre d'orientations acycliques de $G = (V, E)$ avec (précisément) k sources et posons

$$a_G(t) := \sum_{k=1}^n a_k(G)t^k, \quad A_{G,t}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} a_{G[V']}(t) \cdot \nu^{V'},$$

($A_{G,1}(\nu) = A_G(\nu)$). Avec l'aide de la proposition 3.2 ainsi que de l'opérateur différentiel $D(t)$ de la proposition 2.1, c), on obtient :

THÉORÈME 3.3. *On a*

$$\begin{aligned} 1 + A_{G,t}(\nu) &= [1 + A_G(\nu)] \cdot D(-t)[1 + I_G(-\nu)] \\ &= \frac{1 + I_G((t-1)\nu)}{1 + I_G(-\nu)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Évidemment, tout ce qui fut énoncé pour les sources vaut également pour les puits. En particulier, $a_S(G[V'])$ (pour les sources) ou encore $a_P(G[V'])$ (pour les puits), $\emptyset \subset V' \subseteq V$, est égal à zéro, si $V' \setminus S$ (ou bien $V' \setminus P$) contient un sommet isolé dans le graphe $G[V']$.

4. Orientations acycliques et ensembles indépendants : sources et puits

Les sommets isolés posent des problèmes lorsqu'on veut regarder les sources et les puits en même temps; car ces sommets sont toujours les deux à la fois. Dans cette optique, la définition suivante se révèle raisonnable.

DÉFINITION 4.1. Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$, soit $I(G[V'])$ l'ensemble des sommets isolés de $G[V']$ ($|I(G[V'])| = i(G[V'])$). Si $\emptyset \subset S, P \subseteq V$ et $S \cap P = \emptyset$, notons $|a_{S,P}(G[V'])|$ le nombre d'orientations acycliques du graphe $G[V']$ telles que l'ensemble des sources est égal à $S \cup I(G[V'])$ et l'ensemble des puits est égal à $P \cup I(G[V'])$; et posons $a_{S,P}(G[V']) := (-1)^{I(G[V']) \setminus (S \cup P)} |a_{S,P}(G[V'])|$. Par définition, $a_{S,P}(G[V']) := 0$, si $S \cap P \neq \emptyset$.

Posons

$$A_{G,S,P}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} a_{S,P}(G[V']) \cdot \nu^{V'}.$$

Alors la proposition 3.2, ainsi que le principe d'inclusion-exclusion, impliquent (voir Gessel [10] pour une généralisation non-commutative et pondérée) :

PROPOSITION 4.1. (Gessel) *Pour $\emptyset \subset S, P \subseteq V$ on a :*

$$\begin{aligned} & [1 + A_G(\nu)] \cdot [(-1)^{|S|} \partial^S I_G(-\nu)] \cdot [(-1)^{|P|} \partial^P I_G(-\nu)] \\ &= A_{G,S}(\nu) \cdot [(-1)^{|P|} \partial^P I_G(-\nu)] = A_{G,P}(\nu) \cdot [(-1)^{|S|} \partial^S I_G(-\nu)] \\ &= A_{G,S,P}(\nu). \end{aligned}$$

Démonstration. Il ne s'agit que d'expliquer l'entrée des nombres négatifs due aux sommets isolés. Soit i un sommet isolé de G (pour les sous-graphes engendrés $G[V'], \emptyset \subset V' \subseteq V$, on a le même argument), alors $i \notin S$ implique

$$\partial^i A_{G,S}(\nu) = 0 \quad \text{et} \quad \partial^i (-1)^{|S|} \partial^S I_G(-\nu) = -\nu^i \cdot (-1)^{|S|} \partial^S I_G(-\nu),$$

où S peut être remplacé par P . Par conséquent, $i \notin (S \cup P)$ implique

$$\partial^i A_{G,S,P}(\nu) = -\nu^i \cdot A_{G,S,P}(\nu). \quad \blacksquare$$

Maintenant, pour $s, p \in V$ fixés, il découle de la proposition précédente ainsi que du théorème 3.1 (voir aussi la proposition 2.1) que :

$$\begin{aligned} & \partial^{\{s,p\}} \left([1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] \right) \\ &= [1 + I_G(-\nu)]^{-1} \cdot \partial^s I_G(-\nu) \partial^p I_G(-\nu) + \left(1 + \log[1 + I_G(-\nu)] \right) \cdot \partial^{\{s,p\}} I_G(-\nu) \\ &= A_{G,s,p}(\nu) + \left(1 + \log[1 + I_G(-\nu)] \right) \cdot \partial^{\{s,p\}} I_G(-\nu). \end{aligned}$$

Si s et p sont adjacents, alors $\partial^{\{s,p\}} I_G(-\nu) = 0$, et il s'ensuit

$$\partial^{\{s,p\}} \left([1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] \right) = A_{G,s,p}(\nu).$$

Cela implique le théorème suivant (voir [12] ou bien [9]), que nous représentons dans $A[V]$:

THÉORÈME 4.1. (Greene-Zaslavsky) *La fonction d'ensembles*

$$[1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] = \frac{d}{d\lambda} \chi_{G,1}(-\nu)$$

prend la valeur $(-1)^{|V'|} |V'|$ pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$, lorsque V' est indépendant (car $\exp(-V') \cdot \log[\exp(-V')] = -V' \cdot \exp(-V')$), et la valeur

$$a_{s,p}(G[V']) = (-1)^{|V'|} \chi'_{G[V']}(1) = (-1)^{|I|} \beta(G[V']) =$$

$$(-1)^{|I|} a_{s,p}(G[V' \setminus I]) = (-1)^{|V'|} \chi'_{G[V' \setminus I]}(1) = (-1)^{|I|} \beta(G[V' \setminus I]),$$

lorsque $G[V']$ contient une arête $\{s, p\}$ et I est l'ensemble des sommets isolés de $G[V']$. En particulier, si G ne contient aucun sommet isolé et $\{s, p\}$ est une arête de G , alors $a_{s,p}(G) = (-1)^n \chi'_G(1) = \beta(G)$ dénombre les orientations acycliques de G n'ayant qu'une seule source à s et qu'un seul puits à p . Ce nombre n'est jamais négatif et strictement positif si G est un bloc, c'est-à-dire si G est 2-connexe ou la seule arête $\{s, p\}$.

Démonstration. Seulement la toute dernière affirmation n'est pas encore évidente. Elle se démontre comme suit. Selon [13], chapitre 3.2, chaque graphe 2-connexe admet une « décomposition en oreilles » donnée par des chemins C_1, C_2, \dots, C_k tels que $C_1 = \{s, p\}$, $|V(C_i) \cap [V(C_1) \cup \dots \cup V(C_{i-1})]| = 2$ pour tout $2 \leq i \leq k$ et $V = V(C_1) \cup \dots \cup V(C_k)$. Cette décomposition permet de munir G d'une fonction injective $i : V \rightarrow [0, 1]$, $i(s) = 0$, $i(p) = 1$, qui augmente (ou diminue) le long de tous les chemins C_1, \dots, C_k de façon strictement monotone. Alors il ne s'agit que d'orienter chaque arête de son extrémité la plus petite (selon i) à son extrémité la plus grande. ■

Nous avons déjà interprété $[1 + I_G(-\nu)]^{-1}$ (théorème 3.1), $-\log[1 + I_G(-\nu)]$ en dérivant par rapport à un élément (théorème 3.2) et $[1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)]$ en dérivant deux fois (théorème 4.1). En effet, $-\log[1 - V]$ est l'intégrale de $[1 - V]^{-1}$. Cependant, l'intégrale de $-\log[1 - V]$ n'est pas $[1 - V] \cdot \log[1 - V]$, mais $[1 - V] \cdot \log[1 - V] - [-V]$. Voilà pourquoi le théorème principal de ce paragraphe est consacré à l'interprétation de $[1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu)$. Si l'on ajoute le terme $-I_G(-\nu)$ au membre de gauche de la dernière identité de la proposition 3.1, la valeur de $\beta_{G[V']}$ ne change que si V' est indépendant : dans ce cas $\beta_{G[V']}$ n'est plus égal à $|V'|$ mais à $|V'| - 1$ (toutes les deux définitions étant artificielles).

On utilisera donc l'identité

$$\sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} (-1)^{i(G[V'])} \beta_{G[V']} \cdot \nu^{V'} := [1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu).$$

Avec cette modification (et la définition 4.1) on a alors :

THÉORÈME 4.2. *Soit $V = \{1, \dots, n\}$ et soit i le nombre de sommets isolés de G . Alors le coefficient de ν^V dans $[1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu)$, c'est-à-dire $(-1)^i \beta_G$, est égal à*

$$a_{\{1\},\{2\}}(G) - a_{\{1,2\},\{3\}}(G) + a_{\{1,2,3\},\{4\}}(G) - \dots + (-1)^n a_{\{1,2,\dots,n-1\},\{n\}}(G),$$

où la somme précédente s'arrête dès que l'ensemble des sources $\{1, 2, \dots, k\}$ n'est plus indépendant.

Démonstration. Dérivons successivement par rapport à tous les éléments :

$$\begin{aligned} & \partial^{\{1\}} \left([1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu) \right) \\ &= \log[1 + I_G(-\nu)] \cdot \partial^{\{1\}} I_G(-\nu), \\ & \partial^{\{1,2\}} \left([1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu) \right) \\ &= A_{G,\{1\},\{2\}}(\nu) + \log[1 + I_G(-\nu)] \cdot \partial^{\{1,2\}} I_G(-\nu), \\ & \partial^{\{1,2,3\}} \left([1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu) \right) \\ &= \partial^{\{3\}} A_{G,\{1\},\{2\}}(\nu) - A_{G,\{1,2\},\{3\}}(\nu) + \log[1 + I_G(-\nu)] \cdot \partial^{\{1,2,3\}} I_G(-\nu), \\ & \quad \dots \\ & \partial^{\{1,2,\dots,k\}} \left([1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu) \right) \\ &= \partial^{\{3,\dots,k\}} A_{G,\{1\},\{2\}}(\nu) - \partial^{\{4,\dots,k\}} A_{G,\{1,2\},\{3\}}(\nu) + \partial^{\{5,\dots,k\}} A_{G,\{1,2,3\},\{4\}}(\nu) \\ & \quad - \dots + (-1)^k A_{G,\{1,2,\dots,k-1\},\{k\}}(\nu) + \log[1 + I_G(-\nu)] \cdot \partial^{\{1,2,\dots,k\}} I_G(-\nu), \\ & \quad \dots \\ & \partial^V \left([1 + I_G(-\nu)] \cdot \log[1 + I_G(-\nu)] - I_G(-\nu) \right) \\ &= \partial^V A_{G,\{1\},\{2\}}(\nu) - \partial^V A_{G,\{1,2\},\{3\}}(\nu) + \partial^V A_{G,\{1,2,3\},\{4\}}(\nu) \\ & \quad - \dots + (-1)^n \partial^V A_{G,\{1,2,\dots,n-1\},\{n\}}(\nu). \blacksquare \end{aligned}$$

5. Le polynôme chromatique : bases canoniques

Tout d'abord, il découle de la proposition 3.1 et du théorème 3.1 la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1. (Stanley [21], Gessel [10])

$$1 + \chi_{G,\lambda}(\nu) = [1 + I_G(\nu)]^\lambda, \quad 1 + \chi_{G,-\lambda}(-\nu) = [1 + A_G(\nu)]^\lambda. \quad \blacksquare$$

Soit $V = \{1, 2, \dots, n\}$, et regardons une orientation acyclique des arêtes de $G = (V, E)$. Notons V_1 l'ensemble des sommets accessibles (par des chemins orientés) à partir de $v_1 := 1$. Soit v_2 le plus petit sommet de $V \setminus V_1$, et soit V_2 l'ensemble des sommets de $V \setminus V_1$ accessibles de $v_2 \dots$. Finalement, soit v_k le plus petit sommet de $V \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1})$, et soit V_k l'ensemble des sommets de $V \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1})$ accessibles de v_k , $V = V_1 \uplus V_2 \uplus \dots \uplus V_k$. On appelle k le nombre de *composantes* de l'orientation acyclique. Ainsi une orientation acyclique de k composantes est constituée par une partition $V = V_1 \uplus \dots \uplus V_k$ en orientations acycliques avec des sources fixées v_1, \dots, v_k (le plus petit sommet v_i de chaque composante V_i est la source unique, et les arêtes entre deux composantes V_i et V_j avec $v_i < v_j$ sont toutes orientées de V_j à V_i). Or, puisque $A_G^*(\nu)$ compte des orientations acycliques avec une source unique fixée (ou bien des orientations acycliques d'une seule composante), $A_G^*(0) = 0$, il s'ensuit que $A_G^*(\nu)^k/k!$ compte des orientations acycliques de k composantes. En particulier, on a

$$\exp[A_G^*(\nu)] = 1 + A_G(\nu),$$

ce qui est la démonstration de Viennot (voir [27], proposition 5.10) du théorème 3.2, à savoir de l'identité

$$A_G^*(\nu) = -\log[1 + I_G(-\nu)],$$

avec l'aide du théorème 3.1, i. e. de l'identité $1 + A_G(\nu) = [1 + I_G(-\nu)]^{-1}$.

Notons $c(G)$ le nombre de *composantes connexes* de G , de sorte que chaque orientation acyclique de G a au moins $c(G)$ composantes, ce nombre minimal pouvant être atteint selon le théorème 3.2. On en déduit le résultat de Greene et Zaslavsky (voir [12] ou [26], chapitre IX.2), que nous reformulons dans l'algèbre des fonctions d'ensembles.

THÉORÈME 5.1. (Greene-Zaslavsky, Viennot) *On a*

$$\begin{aligned} 1 + \chi_{G,\lambda}(-\nu) &= \exp\left(\lambda \cdot \log[1 + I_G(-\nu)]\right) = \exp\left(-\lambda \cdot A_G^*(\nu)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left([-A_G^*(\nu)]^k / k! \right) \cdot \lambda^k. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + c_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} c_1 \cdot \lambda,$$

où c_k désigne le nombre d'orientations acycliques de G de k composantes, $c_{n-1} = |E|$, $c_1 = \alpha_G = a_{\{1\}}(G)$, $1 + c_{n-1} + c_{n-2} + \dots + c_1 = a(G)$; $c_k = 0$, si $k < c(G)$, et $c_k > 0$, si $k \geq c(G)$. ■

REMARQUE 5.1. Le théorème précédent montre que l'alternance des signes du polynôme chromatique est une conséquence directe de la positivité des discriminants chromatiques, c'est-à-dire de $A_G^*(\nu)$.

Un résultat plus puissant que l'alternance des signes du polynôme chromatique développé par rapport à la base des puissances λ^k est celui de l'alternance des signes par rapport à la base des puissances $(\lambda - 1)^k$, ce qui correspond au polynôme de Tutte. Pour la démontrer avec l'aide des orientations acycliques, supposons que G est connexe et que ses sommets sont numérotés avec les nombres $1, \dots, n$ de telle façon que le plus petit voisin de chaque sommet (sauf 1) porte un nombre plus petit que celui du sommet même. (De cette manière, la numérotation reflète bien la connexité.)

Dans cette situation, les sommets v_2, \dots, v_k d'une orientation acyclique de k composantes $V = V_1 \uplus \dots \uplus V_k$ (de nouveau, pour chaque composante V_i , son plus petit sommet v_i est sa source unique) ne peuvent pas être des puits; car, pour chacun de ces sommets v_i , son plus petit voisin se trouve toujours dans une composante plus petite (la « grandeur » d'une composante étant mesurée en fonction de son plus petit élément) de sorte que l'arête correspondante a v_i comme extrémité initiale et le plus petit voisin comme extrémité terminale.

Si $v_1 = 1$ est un puits (i. e. $v_2 = 2$), alors la suppression des puits réduit le nombre de composantes de 1 (à savoir de la composante $V_1 = \{1\}$). D'autre part, en ajoutant les puits distincts de $v_1 = 1$, on les affecte automatiquement à la composante la plus petite d'où ils sont accessibles (c'est la composante du plus petit voisin ou une composante encore plus petite).

Par conséquent, pour chaque ensemble de sommets indépendant I tel que $1 = v_1 \in I$, le coefficient de ν^V dans $[A_G^*(\nu)^k / k!] \cdot \nu^I$ compte le nombre d'orientations acycliques de $k + 1$ composantes de G telles que I est un sous-ensemble des puits. Voilà pourquoi le principe d'inclusion-exclusion implique que le coefficient de ν^V

dans $[A_G^*(\nu)^k/k!] \cdot [-\partial^{\{1\}}I_G(-\nu)]$ compte le nombre d'orientations acycliques de $k+1$ composantes de G , dont le puits unique est égal à 1 (pour $k=1$ il s'agit bien du nombre $a_{\{2\},\{1\}}(G)$).

Notons $b(G)$ le nombre de *blocs* de G (voir le théorème 4.1), de sorte que chaque orientation acyclique de G telle que le sommet 1 est son puits unique a au moins $b(G)+1$ composantes; pour une telle orientation il est nécessaire et suffisant, que le plus petit sommet de tout bloc soit son puits unique. Selon le théorème 4.1 le nombre minimal de $b(G)+1$ composantes peut être atteint. Nous avons démontré le théorème principal de ce paragraphe (voir [26], chapitre IX.2).

THÉORÈME 5.2. *On a*

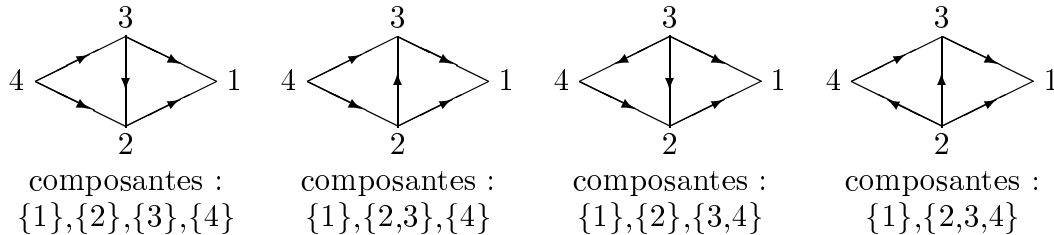
$$\begin{aligned} -\partial^{\{1\}}\chi_{G,\lambda}(-\nu) &= \lambda \cdot [1 + I_G(-\nu)]^{\lambda-1} \cdot [-\partial^{\{1\}}I_G(-\nu)] \\ &= \lambda \cdot \exp\left(-(\lambda-1) \cdot A_G^*(\nu)\right) \cdot [-\partial^{\{1\}}I_G(-\nu)] \\ &= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left([-A_G^*(\nu)]^k/k! \right) \cdot [-\partial^{\{1\}}I_G(-\nu)] \cdot (\lambda-1)^k. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\chi_G(\lambda) = \lambda \cdot [(\lambda-1)^{n-1} - b_{n-2} \cdot (\lambda-1)^{n-2} + \dots + (-1)^n b_1 \cdot (\lambda-1)],$$

où b_k désigne le nombre d'orientations acycliques de G de $k+1$ composantes, dont le puits unique est égal à 1, $b_{n-2} = |E| - (n-1)$, $b_1 = \beta_G = a_{\{2\},\{1\}}(G)$, $1 + b_{n-2} + \dots + b_1 = \alpha_G = a_{\{1\}}(G)$; $b_k = 0$, si $k < b(G)$, et $b_k > 0$, si $k \geq b(G)$. ■

EXEMPLE 5.1. Le graphe donné dans les dessins suivants admet quatre orientations acycliques, dont le puits unique est 1 : une de quatre composantes, deux de trois composantes et une de deux composantes. Voilà pourquoi son polynôme chromatique s'écrit : $\lambda[(\lambda-1)^3 - 2(\lambda-1)^2 + (\lambda-1)] = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$.



6. Le polynôme chromatique : bases exotiques

Notons $\chi(G)$ le nombre chromatique de G , i. e. le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier les sommets de G de façon régulière.

Afin d'obtenir le développement du polynôme chromatique du graphe $G = (V, E)$ dans les deux bases

$$\lambda^k := k! \binom{\lambda}{k}, \quad \lambda^{\bar{k}} := k! \binom{\lambda}{k} = k! \binom{\lambda + k - 1}{k} = k! (-1)^k \binom{-\lambda}{k}$$

nous utilisons la proposition 5.1 et la formule du binôme.

PROPOSITION 6.1. (Brenti [3])

$$1 + \chi_{G, \lambda}(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} I_G(\nu)^k \binom{\lambda}{k}, \quad 1 + \chi_{G, -\lambda}(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} [-I_G(\nu)]^k \binom{\lambda}{k},$$

$$1 + \chi_{G, -\lambda}(-\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} A_G(\nu)^k \binom{\lambda}{k}, \quad 1 + \chi_{G, \lambda}(-\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} [-A_G(\nu)]^k \binom{\lambda}{k}.$$

Alors, avec $|V| = n$, on a

$$\begin{aligned} \chi_G(\lambda) &= \lambda^n + i_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + i_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} + \dots + i_1 \cdot \lambda \\ &= \lambda^{\bar{n}} - a_{n-1} \cdot \lambda^{\overline{n-1}} + a_{n-2} \cdot \lambda^{\overline{n-2}} - \dots + (-1)^{n-1} a_1 \cdot \lambda, \end{aligned}$$

où les i_k sont des entiers positifs (dénombrant des partitions en ensembles indépendants non-vides) et les a_k sont des entiers strictement positifs (dénombrant des partitions en orientations acycliques), $1 \leq k \leq n-1$. En particulier, $i_{n-1} = \binom{n}{2} - |E|$, $a_{n-1} = \binom{n}{2} + |E|$, $a_1 = a(G)$ et i_1 est égal à 1 si $|E| = 0$ et égal à 0 sinon. De plus, on a $i_k = 0$, si $k < \chi(G)$, et $i_k > 0$, si $k \geq \chi(G)$. ■

Le résultat sur les nombres a_k constitue un des théorèmes principaux de [3] (à savoir le théorème 5.5 qui est directement équivalent au théorème 5.3). Remarquons que la démonstration de Brenti (par induction simultanée sur le nombre des sommets et des arêtes du graphe) est la plus longue de tout l'article [3], bien que Brenti remercie l'arbitre « for suggesting a simplification in the proof of theorem 5.3 ».

Brenti [3] a également regardé

$$\frac{p_G(x)}{(1-x)^{n+1}} := \sum_{\lambda=0}^{\infty} \chi_G(\lambda) \cdot x^\lambda \quad \Rightarrow \quad -\frac{p_G(\frac{1}{x})}{(1-\frac{1}{x})^{n+1}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \chi_G(-\lambda) \cdot x^\lambda,$$

où l'implication est une conséquence de [23], chapitre 4.2. Dans cet esprit, nous nous proposons de trouver plusieurs expressions pour

$$\bar{P}_{G,x}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \frac{p_{G[V']}(x)}{(1-x)^{|V'|+1}} \cdot \nu^{V'}.$$

PROPOSITION 6.2. *On a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \bar{P}_{G,x}(\nu) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} [1 + I_G(\nu)]^\lambda \cdot x^\lambda = \frac{1}{1-x[1 + I_G(\nu)]} \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \left[1 - \frac{x}{1-x} I_G(\nu)\right]^{-1} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x \cdot I_G(\nu)}{1-x}\right)^k, \\ \frac{1}{1-x} - \bar{P}_{G,\frac{1}{x}}(-\nu) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} [1 + A_G(\nu)]^\lambda \cdot x^\lambda = \frac{1}{1-x[1 + A_G(\nu)]} \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \left[1 - \frac{x}{1-x} A_G(\nu)\right]^{-1} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x \cdot A_G(\nu)}{1-x}\right)^k, \\ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} \cdot \bar{P}_{G,\frac{1}{x}}(\nu) &= \frac{1}{x - [1 + I_G(\nu)]} = \frac{1}{x-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{I_G(\nu)}{x-1}\right)^k, \\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \cdot \bar{P}_{G,x}(-\nu) &= \frac{1}{x - [1 + A_G(\nu)]} = \frac{1}{x-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A_G(\nu)}{x-1}\right)^k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

REMARQUE 6.1. On n'a pas besoin de s'appuyer sur [23], chapitre 4.2, puisque l'identité fondamentale

$$\frac{1}{1-y} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{y}}$$

implique évidemment

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \overline{P}_{G,x}(\nu) &= \frac{1}{1-x[1+I_G(\nu)]} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}[1+A_G(-\nu)]} \Rightarrow \\ \frac{1}{1-x[1+A_G(\nu)]} &= 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}} - \overline{P}_{G,\frac{1}{x}}(-\nu) = \frac{1}{1-x} - \overline{P}_{G,\frac{1}{x}}(-\nu). \end{aligned}$$

Calculons aussi la fonction génératrice

$$P_{G,x}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} p_{G[V']}(x) \cdot \nu^{V'}.$$

PROPOSITION 6.3. (Tomescu [25], Gansner-Vo [8], Brenti [3]) *On a*

$$\begin{aligned} 1 + P_{G,x}(\nu) &= \left(1 - \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right)^k, \\ 1 + x \cdot P_{G,\frac{1}{x}}(x\nu) &= \left(1 - \frac{x \cdot A_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x \cdot A_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right)^k, \\ 1 + P_{G,\frac{1}{x}}(x\nu) &= \left(1 - \frac{I_G[(x-1)\nu]}{x-1}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{I_G[(x-1)\nu]}{x-1}\right)^k, \\ 1 + \frac{1}{x} \cdot P_{G,x}(\nu) &= \left(1 - \frac{A_G[(x-1)\nu]}{x-1}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A_G[(x-1)\nu]}{x-1}\right)^k. \end{aligned}$$

Alors, avec les nombres i_k et a_k de la proposition 6.1 on a notamment

$$\begin{aligned} p_G(x) &= n! \cdot x^n + i_{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{n-1}(1-x) + i_{n-2} \cdot (n-2)! \cdot x^{n-2}(1-x)^2 + \\ &\quad \dots + i_2 \cdot 2 \cdot x^2(1-x)^{n-2} + i_1 \cdot x(1-x)^{n-1} \\ &= n! \cdot x + a_{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x(x-1) + a_{n-2} \cdot (n-2)! \cdot x(x-1)^2 + \\ &\quad \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x(x-1)^{n-2} + a_1 \cdot x(x-1)^{n-1}. \blacksquare \end{aligned}$$

Supposons que $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Pour $\emptyset \subset V', V'' \subseteq V$ soit $V' < V''$ si et seulement si $v' < v''$ pour tout $v' \in V'$ et $v'' \in V''$. De plus, pour des ensembles de sommets non vides, deux à deux disjoints et indépendants I_1, \dots, I_k , soit $G[\{I_1, \dots, I_k\}]$ le graphe dont les sommets sont les k ensembles I_1, \dots, I_k et tel que $\{I_{i_1}, \dots, I_{i_j}\}$, $\emptyset \subset \{i_1, \dots, i_j\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, est un ensemble de j sommets

indépendants si et seulement si $I_{i_1} \cup \dots \cup I_{i_j}$ est indépendant dans le graphe G et (après une permutation appropriée de $\{i_1, \dots, i_j\}$) $I_{i_1} < \dots < I_{i_j}$ (voir [8]). Alors la proposition précédente ainsi que le théorème 3.1 impliquent :

$$\begin{aligned}
& 1 + P_{G,x}(\nu) \\
&= \left(1 - \sum_{\substack{\emptyset \subset I \subseteq V \\ I \text{ indépendant}}} x(1-x)^{|I|-1} \cdot \nu^I \right)^{-1} \\
&= \left(1 + \sum_{\substack{\emptyset \subset I \subseteq V \\ I \text{ indépendant}}} \nu^I \cdot \sum_{j=1}^{|I|} \binom{|I|-1}{j-1} \cdot (-x)^j \right)^{-1} \\
&= \left(1 + \sum_{\substack{\emptyset \subset I \subseteq V \\ I \text{ indépendant}}} \sum_{\substack{I_1 \uplus \dots \uplus I_j = I \\ I_1 < \dots < I_j}} (-x\nu^{I_1}) \cdot \dots \cdot (-x\nu^{I_j}) \right)^{-1} \\
&= 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \sum_{\substack{I_1 \uplus \dots \uplus I_k = V' \\ I_1, \dots, I_k \text{ indépendants}}} a(G[\{I_1, \dots, I_k\}]) \cdot (x\nu^{I_1}) \cdot \dots \cdot (x\nu^{I_k}).
\end{aligned}$$

Nous avons démontré la proposition suivante.

PROPOSITION 6.4. (Linial [15], Gansner-Vo [8], Tomescu [25]) *On a*

$$1 + P_{G,x}(\nu) = 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \sum_{\substack{I_1 \uplus \dots \uplus I_k = V' \\ I_1, \dots, I_k \text{ indépendants}}} a(G[\{I_1, \dots, I_k\}]) \cdot (x\nu^{I_1}) \cdot \dots \cdot (x\nu^{I_k}).$$

En particulier,

$$p_G(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x$$

où les p_k , $1 \leq k \leq n$, sont des entiers positifs tels que $p_n + p_{n-1} + \dots + p_1 = p_G(1) = n!$. De plus, $p_n = a_1 = a(G)$ et p_1 est égal à 1 si $|E| = 0$ et égal à 0 sinon. Si $\chi(G)$ est le nombre chromatique de G , alors $p_k = 0$, si $k < \chi(G)$, et $p_k > 0$, si $k \geq \chi(G)$, $p_{\chi(G)} = i_{\chi(G)} \cdot \chi(G)!$. ■

Brenti [3] a aussi introduit et étudié beaucoup de polynômes qui ne furent jamais considérés auparavant. À partir du polynôme chromatique, leurs fonctions

d'ensembles peuvent être définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 1 + \chi_{G,\lambda}(\nu) &= [1 + I_G(\nu)]^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda}{k} I_G(\nu)^k, \\
 1 + \sigma_{G,\lambda}(\nu) &= \exp[\lambda I_G(\nu)] = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_G(\nu)^k / k!, \\
 1 + \bar{\sigma}_{G,\lambda}(\nu) &= [1 - \lambda I_G(\nu)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_G(\nu)^k, \\
 1 + \chi_{G,\lambda}(\nu) &= [1 + A_G(-\nu)]^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda}{k} [-A_G(-\nu)]^k, \\
 1 + \tau_{G,\lambda}(\nu) &= \exp[\lambda A_G(\nu)] = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_G(\nu)^k / k!, \\
 1 + \bar{\tau}_{G,\lambda}(\nu) &= [1 - \lambda A_G(\nu)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_G(\nu)^k.
 \end{aligned}$$

Finalement, une comparaison avec la proposition 6.2 fournit les identités

$$\begin{aligned}
 1 + (1-x) \cdot \bar{P}_{G,x}(\nu) &= 1 + \bar{\sigma}_{G, \frac{x}{1-x}}(\nu) \quad \text{et} \\
 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \bar{P}_{G,x}(-\nu) &= 1 + \bar{\tau}_{G, \frac{1}{x-1}}(\nu), \quad \text{d'où}
 \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.5. (Brenti [3])

$$\bar{P}_{G,x}(\nu) = \frac{1}{1-x} \cdot \bar{\sigma}_{G, \frac{x}{1-x}}(\nu) = \frac{x}{1-x} \cdot \bar{\tau}_{G, \frac{1}{x-1}}(-\nu). \quad \blacksquare$$

7. Appendice I : Les travaux de Gessel et Stanley

Une dérivation de notre polynôme chromatique par rapport à plusieurs éléments fournit :

$$\begin{aligned}
 1 + \chi_{G,\lambda}(\nu) &= [1 + I_G(\nu)]^\lambda, \\
 \partial^s \chi_{G,\lambda}(\nu) / \lambda &= [1 + I_G(\nu)]^{\lambda-1} \cdot \partial^s I_G(\nu), \\
 \partial^{\{s,p\}} \chi_{G,\lambda}(\nu) / \lambda(\lambda-1) &= [1 + I_G(\nu)]^{\lambda-2} \cdot \partial^s I_G(\nu) \partial^p I_G(\nu), \\
 \partial^{\{s,p,q\}} \chi_{G,\lambda}(\nu) / \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) &= [1 + I_G(\nu)]^{\lambda-3} \cdot \partial^s I_G(\nu) \partial^p I_G(\nu) \partial^q I_G(\nu),
 \end{aligned}$$

si $\{s, p\}$ (resp. $\{s, p, q\}$) est une arête (resp. un triangle) de G , des conditions que l'on supposera toujours satisfaites dans la suite.

À l'aide du théorème 3.1 et de la proposition 3.2, on déduit des expressions positives :

$$\begin{aligned} 1 + \chi_{G,-\lambda}(-\nu) &= [1 + A_G(\nu)]^\lambda, \\ \partial^s \chi_{G,-\lambda}(-\nu)/\lambda &= [1 + A_G(\nu)]^\lambda \cdot A_{G,s}(\nu), \\ \partial^{\{s,p\}} \chi_{G,-\lambda}(-\nu)/\lambda(\lambda+1) &= [1 + A_G(\nu)]^\lambda \cdot A_{G,s}(\nu) A_{G,p}(\nu), \\ \partial^{\{s,p,q\}} \chi_{G,-\lambda}(-\nu)/\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) &= [1 + A_G(\nu)]^\lambda \cdot A_{G,s}(\nu) A_{G,p}(\nu) A_{G,q}(\nu), \end{aligned}$$

où les trois premières égalités reprennent les théorèmes 3.2, 3.4 et 3.3 de Gessel [10], respectivement. Grâce à la proposition 4.1, on peut récrire la troisième expression de la façon suivante :

$$\partial^{\{s,p\}} \chi_{G,-\lambda}(-\nu)/\lambda(\lambda+1) = [1 + A_G(\nu)]^{\lambda+1} \cdot A_{G,s,p}(\nu).$$

Cependant, cette expression n'est particulièrement intéressante que si $\lambda = -1$, puisque, en général, $A_{G,s,p}(\nu)$ n'est pas positif, au moins pour certains sous-graphes engendrés de G . Le cas $\lambda = -1$ fut utilisé par Gessel [10] pour démontrer son théorème 3.1 correspondant au théorème 4.1 de cet article.

Dans l'esprit du paragraphe 6, calculons

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\infty} [1 + \chi_{G,\lambda}(\nu)] \cdot x^\lambda &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\partial^s \chi_{G,\lambda}(\nu)}{\lambda} \cdot x^{\lambda-1} &= \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{\partial^{\{s,p\}} \chi_{G,\lambda}(\nu)}{\lambda(\lambda-1)} \cdot x^{\lambda-2} \\ &= \frac{1}{1 - x[1 + I_G(\nu)]}, &= \frac{\partial^s I_G(\nu)}{1 - x[1 + I_G(\nu)]}, &= \frac{\partial^s I_G(\nu) \partial^p I_G(\nu)}{1 - x[1 + I_G(\nu)]}, \end{aligned}$$

et posons

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \chi_G(\lambda) \cdot x^\lambda &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\chi_G(\lambda)}{\lambda} \cdot x^{\lambda-1} &= \sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{\chi_G(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)} \cdot x^{\lambda-2} \\ =: \frac{p_G(x)}{(1-x)^{n+1}}, &=: \frac{q_G(x)}{(1-x)^n}, &=: \frac{r_G(x)}{(1-x)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Pour les fonctions d'ensembles $P_{G,x}(\nu)$, $Q_{G,x}(\nu)$ et $R_{G,x}(\nu)$ dénombrant les polynômes p , q et r , respectivement, on obtient alors l'analogie de la proposition 6.3 :

PROPOSITION 7.1. *On a*

$$\begin{aligned} 1 + P_{G,x}(\nu) &= \left(1 - \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right)^{-1}, \\ \partial^s Q_{G,x}(\nu) &= \left(1 - \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial^s I_G[(1-x)\nu]}{1-x}, \\ \partial^{\{s,p\}} R_{G,x}(\nu) &= \left(1 - \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial^s I_G[(1-x)\nu]}{1-x} \frac{\partial^p I_G[(1-x)\nu]}{1-x}. \end{aligned}$$

Alors avec les nombres i_k des propositions 6.1 et 6.3 on a notamment ($i_1 = 0$ si $\{s, p\}$ est une arête de G)

$$\begin{aligned}
 p_G(x) &= n! \cdot x^n + i_{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{n-1}(1-x) + \\
 &\quad \dots + i_2 \cdot 2 \cdot x^2(1-x)^{n-2} + i_1 \cdot x(1-x)^{n-1}, \\
 q_G(x) &= (n-1)! \cdot x^{n-1} + i_{n-1} \cdot (n-2)! \cdot x^{n-2}(1-x) + \\
 &\quad \dots + i_2 \cdot x(1-x)^{n-2} + i_1 \cdot (1-x)^{n-1}, \\
 r_G(x) &= (n-2)! \cdot x^{n-2} + i_{n-1} \cdot (n-3)! \cdot x^{n-3}(1-x) + \\
 &\quad \dots + i_2 \cdot (1-x)^{n-2}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Pour des ensembles de sommets non vides, deux à deux disjoints et indépendants I_1, \dots, I_k , utilisons de nouveau le graphe $G[\{I_1, \dots, I_k\}]$ introduit dans le paragraphe 6. Si, pour le sommet $s \in V$, il existe un $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $s \in V_i$, notons $a_s(G[\{I_1, \dots, I_k\}])$ le nombre d'orientations acycliques du graphe $G[\{I_1, \dots, I_k\}]$ dont le sommet correspondant à V_i est la source unique. De même, si pour les deux extrémités de l'arête $\{s, p\}$, il existe des $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tels que $s \in V_i$ et $p \in V_j$, notons $a_{s,p}(G[\{I_1, \dots, I_k\}])$ le nombre d'orientations acycliques du graphe $G[\{I_1, \dots, I_k\}]$ dont le sommet correspondant à V_i est la source unique et dont le sommet correspondant à V_j est le puits unique (nous supposons ici que G ne contient aucun sommet isolé, voir la définition 4.1).

On démontre alors exactement comme dans le paragraphe 6 (en s'appuyant, de plus, sur les propositions 3.2 et 4.1) :

PROPOSITION 7.2. (Gessel [10]) *On a*

$$\begin{aligned}
 P_{G,x}(\nu) &= \sum_{\substack{\emptyset \subset I_1 \uplus \dots \uplus I_k \subseteq V \\ I_1, \dots, I_k \text{ indépendants}}} a(G[\{I_1, \dots, I_k\}]) \cdot (x\nu^{I_1}) \cdot \dots \cdot (x\nu^{I_k}), \\
 \partial^s Q_{G,x}(\nu) &= \sum_{\substack{s \in I_1 \uplus \dots \uplus I_k \subseteq V \\ I_1, \dots, I_k \text{ indépendants}}} x^{-1} \cdot a_s(G[\{I_1, \dots, I_k\}]) \cdot (x\nu^{I_1}) \cdot \dots \cdot (x\nu^{I_k}), \\
 \partial^{\{s,p\}} R_{G,x}(\nu) &= \sum_{\substack{s,p \in I_1 \uplus \dots \uplus I_k \subseteq V \\ I_1, \dots, I_k \text{ indépendants}}} x^{-2} \cdot a_{s,p}(G[\{I_1, \dots, I_k\}]) \cdot (x\nu^{I_1}) \cdot \dots \cdot (x\nu^{I_k}).
 \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
 p_G(x) &= p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x, \\
 q_G(x) &= q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \dots + q_1 x + q_0, \\
 r_G(x) &= r_{n-2} x^{n-2} + r_{n-3} x^{n-3} + \dots + r_1 x + r_0,
 \end{aligned}$$

où les p_k , q_k et r_k sont des entiers positifs (dans le cas des r_k il faut supposer, de plus, que G ne contient aucun sommet isolé) tels que $p_G(1) = n!$, $q_G(1) = (n-1)!$ et $r_G(1) = (n-2)!$ ainsi que $p_n = a(G)$, $q_{n-1} = a_s(G)$ et $r_{n-2} = a_{s,p}(G)$. Si $\chi(G)$ est le nombre chromatique de G et $k < \chi(G)$, alors $p_k = 0$, $q_{k-1} = 0$ et $r_{k-2} = 0$ ainsi que $p_{\chi(G)} = i_{\chi(G)} \cdot \chi(G)!$, $q_{\chi(G)-1} = i_{\chi(G)} \cdot (\chi(G)-1)!$ et $r_{\chi(G)-2} = i_{\chi(G)} \cdot (\chi(G)-2)!$. Si $k \geq \chi(G)$, on a $p_k > 0$, et $q_{k-1} > 0$ si G est connexe. ■

Évidemment, on a aussi les expressions directes :

PROPOSITION 7.3.

$$\begin{aligned} x \cdot Q_{G,x}(\nu) &= -\log\left(1 - \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right), \\ x^2 \cdot R_{G,x}(\nu) &= \left(1 - \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right) \cdot \log\left(1 - \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x}\right) \\ &\quad + \frac{x \cdot I_G[(1-x)\nu]}{1-x} \cdot [1 - \log(1-x)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notons que la positivité des coefficients du polynôme $r_G(x)$ est le résultat principal de l'article [10] de Gessel (démontré sur plus qu'une page à l'aide du théorème fondamental de Stanley sur les P -partitions) tandis que le polynôme $q_G(x)$ n'y figure pas.

Remarquons finalement que Stanley [22] a introduit et étudié la fonction chromatique $X_G = X_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$ que l'on peut, avec l'aide des fonctions d'ensembles, définir comme suit :

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} X_{G[V']} \cdot \nu^{V'} := \prod_{i=1}^{\infty} \left[1 + I_G(x_i \cdot \nu)\right] = \exp\left[\sum_{i=1}^{\infty} -A_G^*(-x_i \cdot \nu)\right].$$

8. Appendice II : se passer des fonctions d'ensembles

On pourrait être fâché de cette volonté systématique d'imposer les fonctions d'ensembles ou, qui pis est, leurs fonctions génératrices. C'est pourquoi il nous semble particulièrement important de bien expliciter plusieurs méthodes permettant de s'en passer. Comme indiqué dans le paragraphe 2, il s'agit de construire des modèles combinatoires infinis qui ne font intervenir que les cardinalités.

Remplaçons donc chaque sommet $v \in V$ de notre graphe simple $G = (V, E)$ par une famille infinie V_v de sommets, et relierons (par une arête) deux sommets $u' \in V_u$ et $v' \in V_v$ avec $u, v \in V$ et $u \neq v$, si et seulement si u et v sont reliés dans le

graphe G . Ces définitions sont assez naturelles tandis qu'il n'est point clair s'il faut relier deux sommets différents d'un même ensemble V_v . En effet, pour tout $v \in V$, on a le choix de laisser V_v comme ensemble indépendant infini ou bien de le remplacer par un graphe complet infini. Si l'on se décide, pour tout $v \in V$, en faveur du graphe complet (resp. de l'ensemble indépendant), le graphe infini obtenu à partir de G est noté G_∞ (resp. G_∞).

Soit $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Alors les fonctions d'ensembles (ou bien leur fonctions génératrices) comme $I_{G_\infty}(\nu)$, $\chi_{G_\infty, \lambda}(\nu)$, $A_{G_\infty}(\nu)$, $A_{G_\infty}^*(\nu)$ et $A_{G_\infty, t}(\nu)$ (partout, G_∞ peut être remplacé par G_∞) sont, en effet, des fonctions génératrices du type exponentiel en des variables (algébriquement) indépendantes v_1, v_2, \dots, v_n , dont le coefficient de $(v_1^{i_1}/i_1!) \cdot \dots \cdot (v_n^{i_n}/i_n!)$ compte l'invariant respectif du graphe obtenu à partir de G en remplaçant le sommet 1 par i_1 exemplaires, le sommet 2 par i_2 exemplaires, \dots , le sommet n par i_n exemplaires. Évidemment, tous ces invariants peuvent être interprétés avec l'aide du seul graphe G , et les théorèmes démontrés dans les paragraphes précédents fournissent des identités pour eux. En particulier, l'identité $1 + A_{G_\infty}(\nu) = [1 + I_{G_\infty}(-\nu)]^{-1}$ n'est rien d'autre que la proposition 5.1 de [27] tandis que l'identité $\log[1 + A_{G_\infty}(\nu)] = A_{G_\infty}^*(\nu)$ n'est rien d'autre que la proposition 5.10 de [27]. (Pour mettre les points sur les i , il faut ajouter que Viennot a remplacé les variables v_1, v_2, \dots, v_n par des séries sans terme constant et qu'il n'a pas mentionné que, pour chaque ensemble de ses pièces, le nombre de pyramides formées de ces pièces est divisible par le nombre de pièces, puisque, pour chaque pièce fixée, le nombre de pyramides ayant cette pièce en guise d'extrémité est toujours le même.)

En fait, même les inconditionnels des fonctions génératrices en une seule variable x peuvent s'y retrouver, puisque, dans toutes les identités pour le graphe G_∞ ou G_∞ , on peut remplacer (ν) par $(x \cdot \nu)$ (même pour les fonctions d'ensembles). La substitution $\nu = 1$, i. e. $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 1$, est alors bien définie (ceci est un véritable avantage des fonctions génératrices du type exponentiel par rapport aux fonctions d'ensembles). Par exemple, le coefficient de x^k , $k > 0$, dans $I_{G_\infty}(x)$ compte, pour notre graphe G , le nombre d'ensembles indépendants de cardinalité k ; et la spécialisation $1 + A_{G_\infty}(x) = [1 + I_{G_\infty}(-x)]^{-1}$ du théorème 3.1 n'est rien d'autre que la relation de réciprocity du chapitre 2.1.2 de [24].

Une méthode tout à fait différente pour obtenir des fonctions génératrices (du type exponentiel) en la seule variable V consiste à remplacer $G = (V, E)$ par le graphe aléatoire $G(p, q)$, $p + q = 1$, sur un ensemble infini V de sommets, pour lequel la probabilité d'avoir une arête entre deux sommets quelconques est égal à p , $0 \leq p \leq 1$ (et tous ces événements sont indépendants). De cette manière, tous les coefficients de nos fonctions génératrices (pour les fonctions d'ensembles) deviennent des variables aléatoires, qui, dans les identités, ne sont multipliées que si elles sont indépendantes. Alors, grâce à la multiplicativité de l'espérance mathématique dans cette situation (et sa linéarité sans restriction) on peut, dans toutes les identités déjà démontrées, remplacer chaque variable aléatoire par sa valeur moyenne.

Notons, qu'un ensemble de n sommets du graphe $G(p, q)$ est indépendant avec la probabilité $q^{\binom{n}{2}}$. On en déduit pour les espérances mathématiques :

PROPOSITION 8.1.

$$1 + I_{G(p,q)}(V) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \cdot V^n/n!. \quad \blacksquare$$

Alors, si $A_{G(p,q)}(V)$ compte le nombre moyen d'orientations acycliques, le théorème 3.1 implique (voir [28], paragraphe 5) :

PROPOSITION 8.2. (Welsh, Janson)

$$1 + A_{G(p,q)}(V) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \cdot (-V)^n/n! \right]^{-1}. \quad \blacksquare$$

Notons $a(n, m)$ le nombre de graphes orientés de façon acyclique, qui ont n sommets marqués et m arêtes. Il s'ensuit :

PROPOSITION 8.3. (Liskovec [16], Rodionov [19]) *Soit $p + q = 1$. Alors on a*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} a(n, m) \cdot p^m q^{\binom{n}{2}-m} \right] \cdot V^n/n! = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \cdot (-V)^n/n! \right]^{-1}. \quad \blacksquare$$

Regardons la spécialisation $p = q = 1/2$ et posons $a(n) := \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} a(n, m)$. On obtient alors le résultat de Stanley (voir [21] ou [23], chapitre 3.15) :

PROPOSITION 8.4. (Stanley, Robinson [18])

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot V^n/(2^{\binom{n}{2}} n!) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-V)^n/(2^{\binom{n}{2}} n!) \right]^{-1}. \quad \blacksquare$$

Évidemment, tous les autres résultats de cet article peuvent être spécialisés de la même façon que le théorème 3.1. Cette spécialisation « probabiliste » du théorème 3.3 fournit notamment un des deux théorèmes principaux de l'article [11], que Gessel a démontré en établissant une relation de récurrence, dont il a imaginé la solution à l'aide des « bons dénominateurs ».

9. Appendice III : se passer de la commutativité

Soit $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, un graphe simple. Associons à ses n sommets des variables v_1, v_2, \dots, v_n et supposons que tout monôme contenant une de ces variables au moins deux fois est nul. Ceci ne restreint pas la généralité de nos considérations parce que, selon l'appendice précédent, on peut remplacer G par G_∞ pour obtenir précisément les mêmes résultats que dans [5] ou dans [27]. À la différence de tous les autres paragraphes, cependant, nous ne supposons la loi commutative pour deux variables v_i et v_j que s'il n'y a pas d'arête entre les deux sommets $i, j \in V$. L'algèbre associative ainsi obtenue est notée $A[V]$ comme dans le cas commutatif. Il n'est pas difficile de démontrer que chaque monôme de $A[V]$ correspond, de façon bijective, à une orientation acyclique du graphe engendré par les sommets qui correspondent aux variables du monôme. Pour écrire le monôme, commençons par les variables des sources de l'orientation acyclique (ces variables commutent mutuellement puisque l'ensemble des sources est indépendant). En appliquant la même procédure au graphe engendré par les sommets des autres variables du monôme, on finit par obtenir une partition canonique des sommets du monôme en ensembles indépendants. Celle-ci est appelée *V-décomposition* ou *forme normale de Foata* (voir [24] ainsi que [5], théorème 1.2).

Notons $A_G(\nu)$, $A_G(0) = 0$, la somme de tous les monômes différents de $A[V]$ de sorte qu'on recouvre la fonction $A_G(\nu)$ déjà introduite en soumettant toutes les variables à la loi commutative. Si $I_G(\nu)$, $I_G(0) = 0$, désigne la somme de tous les monômes dont les variables commutent mutuellement (ce sont les monômes correspondant aux ensembles indépendants), alors la démonstration même de la proposition 3.2, i. e. le principe d'inclusion-exclusion, implique encore que le produit $[1 + I_G(-\nu)] \cdot [1 + A_G(\nu)]$ dénombre les orientations acycliques sans aucune source. Autrement dit, on a établi le théorème de Cartier et Foata sur l'inversion (de Möbius) dans le monoïde de commutation, à savoir l'identité (voir [5], théorème 2.4) $[1 + I_G(-\nu)] \cdot [1 + A_G(\nu)] = 1$.

Cependant, les coefficients de $-\log[1 + I_G(-\nu)]$ ne sont pas toujours des entiers dans le cas non-commutatif et la règle $\partial^s - \log[1 + I_G(-\nu)] = -[1 + I_G(-\nu)]^{-1} \cdot \partial^s I_G(-\nu)$ n'est plus valable. Voilà pourquoi nous nous sommes imposés, dans cet article, la commutativité pour toutes les variables.

Remerciements. En tout premier lieu, je voudrais remercier vivement D. Foata de son accueil chaleureux à Strasbourg et de ses explications stimulantes en ce qui concerne le livre [5]. Son aide et assistance sont au-delà de toute expression. Je remercie aussi E. Triesch pour tout son appui dans mon projet de thèse véritablement lotharingien.

Références bibliographiques

- [1] B. Bollobás, «Modern Graph Theory», Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [2] M. Bousquet-Mélou, q-Énumération de polyominos convexes, *J. Combin. Theory, Ser. A* **64** (1993), 265-288.
- [3] F. Brenti, Expansions of chromatic polynomials and log-concavity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), 729-756.
- [4] T. H. Brylawski et J. G. Oxley, «The Tutte polynomial and its applications», in: *Matroid Applications*, (ed. : N. White) Cambridge University Press, Cambridge (1992), 123-225.
- [5] P. Cartier et D. Foata, «Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements», Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [6] H. Crapo, A higher invariant for matroids, *J. Combin. Theory* **2** (1967), 406-417.
- [7] D. Foata, A noncommutative version of the matrix inversion formula, *Adv. Math.* **31** (1979), 330-349.
- [8] E. R. Gansner, K. P. Vo, The chromatic generating function, *Linear and Multilinear Algebra* **22** (1987), 87-93.
- [9] D. D. Gebhard et B. E. Sagan, Sinks in acyclic orientations of graphs, *J. Combin. Theory, Ser. B* **80** (2000), 130-146.
- [10] I. M. Gessel, Acyclic orientations and chromatic generating functions, *Discrete Math.* **232** (2001), 119-130.
- [11] I. M. Gessel, Counting acyclic digraphs by sources and sinks, *Discrete Math.* **160** (1996), 253-258.
- [12] C. Greene et T. Zaslavsky, On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **280** (1983), 97-126.
- [13] A. Huck, «Flüsse und Wege in Graphen», Bonn, 1997.
- [14] B. Lass, «Funktionen zählen», Diplomarbeit, 1997.
- [15] N. Linial, Graph colouring and monotone functions on posets, *Discrete Math.* **58** (1986), 97-98.
- [16] V. A. Liskovec, O chisle maksimalnyh vershin sluchajnogo aciklicheskogo orgrafa, *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **20** (1975), 412-421.
- [17] L. Lovász, «Combinatorial Problems and Exercises», Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993.
- [18] R. W. Robinson, Counting labeled acyclic digraphs, in: *New Directions in the Theory of Graphs, Proc. Third Ann Arbor Conference on Graph Theory*, (ed. : F. Harary) Academic Press, New York (1971), 239-273.
- [19] V. I. Rodionov, Javnaja formula dlja chisla pomechennyh aciklicheskih orientirovannyh grafov, *Avtomorfnye funkicii i teorija chisel*, Sb. nauch. tr., Izhevsk (1987), 22-25.
- [20] H. Sachs, «Einführung in die Theorie der endlichen Graphen», Teil II, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1972.
- [21] R. P. Stanley, Acyclic orientations of graphs, *Discrete Math.* **5** (1973), 171-178.

- [22] R. P. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, *Advances in Math.* **111** (1995), 166-194.
- [23] R. P. Stanley, «Enumerative Combinatorics», Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [24] V. Strehl, Counting domino tilings of rectangles via resultants, à paraître dans *Adv. Appl. Math.* (2001).
- [25] I. Tomescu, Graphical Eulerian numbers and chromatic generating functions, *Discrete Math.* **66** (1987), 315-318.
- [26] W. T. Tutte, «Graph Theory», Addison-Wesley, 1984.
- [27] G. X. Viennot, Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas, *Combinatoire énumérative*, Proc. Colloq., Montréal/Can. 1985, *Lect. Notes Math.* **1234** (1986), 321-350.
- [28] D. J. A. Welsh, Counting colourings and flows in random graphs, *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty*, Volume 2, Keszthely (Hungary), 1993, *Bolyai Society Mathematical Studies* **2** (1996), 491-505.

Variations sur le thème $\mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}} = \mathbf{XY}$ (*)

Soit $G=(X,Y;E)$ un graphe biparti et $\overline{G}=(X,Y;\overline{E})$ le graphe biparti complémentaire. Notons $p(G,r)$ le nombre des r -couplages de G . Il est classique que le vecteur $[p(\overline{G},r)]_{r=1,2,\dots}$ est déterminé par $[p(G,r)]_{r=1,2,\dots}$. Nous explicitons ce fait en démontrant des théorèmes de dualité nouveaux, généralisant et globalisant notamment les résultats de Chow, Foata, Gessel, Joni, Rota et Zeilberger. Pour des graphes orientés on obtient ainsi une preuve rapide de l'identité fondamentale de Berge entre des chemins et des circuits hamiltoniens. Exprimée dans le langage des fonctions d'ensembles, celle-ci implique immédiatement la conjecture de Chung et Graham (établie d'abord par Chow et Gessel) ainsi que les théorèmes de parité de Rédei sur les tournois, de Lovász sur les graphes non-orientés et de Camion et Rao sur les graphes auto-complémentaires. Finalement, nous étudions les relations entre les fonctions d'ensembles et les fonctions symétriques. Le théorème principal de la thèse de Chow devient ainsi une conséquence directe de l'identité de Berge.

Let $G=(X,Y;E)$ be a bipartite graph with bipartite complement $\overline{G}=(X,Y;\overline{E})$. The number of r -matchings of G is denoted by $p(G,r)$. It is classical that the vector $[p(\overline{G},r)]_{r=1,2,\dots}$ is determined by $[p(G,r)]_{r=1,2,\dots}$. We make this statement more explicit by proving new duality theorems, generalizing and globalizing the results of Chow, Foata, Gessel, Joni, Rota and Zeilberger, in particular. For oriented graphs this provides a short proof of Berge's fundamental identity between Hamiltonian paths and circuits. Expressed in terms of set functions, the identity immediately implies the Chung-Graham conjecture (first derived by Chow and Gessel) as well as Rédei's, Lovász', and Camion's and Rao's parity results for tournaments, non-oriented and self-complementary graphs, respectively. Finally, we study the relations between set functions and symmetric functions and show that the main theorem in Chow's Ph.D. Thesis becomes a direct consequence of Berge's identity.

1. Introduction

Soient X et Y deux ensembles disjoints de cardinalité n et m , respectivement. Un graphe biparti $G = (X, Y; E)$ est dit simple si et seulement si l'ensemble de ses arêtes E est un sous-ensemble de $X \times Y$. Pour de tels graphes on définit le *graphe biparti complémentaire* par $\overline{G} := (X, Y; \overline{E})$ avec $\overline{E} := (X \times Y) \setminus E$. On appelle *r -couplage* de G un ensemble de r arêtes tel que deux quelconques des arêtes du couplage sont non-adjacentes. Notons $p(G, r)$ le nombre des r -couplages

(*) Article à paraître dans *Advances in Appl. Math.*

de G et posons $p(G, 0) := 1$. Traditionnellement, on interprète X (resp. Y) comme un ensemble de lignes (resp. colonnes) d'un échiquier rectangulaire de sorte qu'un couplage devient un ensemble de tours non-attaquantes. C'est pourquoi on appelle

$$\rho(G, x) := \sum_{r=0}^{\min(n,m)} (-1)^r p(G, r) \cdot x^{n-r}$$

le *polynôme des tours*. Il est classique (voir le livre [28] de Riordan, chapitre 7.7) que $\rho(\overline{G}, x)$ est complètement déterminé par $\rho(G, x)$. Toutefois, aucune relation simple reliant $\rho(\overline{G}, x)$ et $\rho(G, x)$ n'a été imaginée jusqu'à présent. D'autre part, inspirés par la définition visionnaire du polynôme de recouvrement de Chung et Graham [12], Chow (et Gessel) [9] ont introduit le polynôme *factoriel* des tours comme étant

$$\rho!(G, z) := \sum_{r=0}^{\min(n,m)} p(G, r) \cdot z^{\overline{m-r}},$$

où $z^{\overline{k}} := z(z-1) \cdots (z-k+1)$. Nous l'appellerons, ci-après, *polynôme de Chow*. Il a déjà fait ses preuves dans l'étude des diagrammes de Ferrers (voir [15]), parce qu'il se factorise naturellement (voir [19] et [31], théorème 2.4.1). De plus, il satisfait une relation de dualité tout à fait remarquable

$$\rho!(\overline{G}, z) = (-1)^m \rho!(G, m - n - 1 - z),$$

imaginée par Chow (et Gessel) [9] dans le cas $n = m$. Outre cette généralisation, nous établissons la nouvelle formule

$$\rho!(\overline{G}, z) = \frac{1}{\Gamma(z + 1 + n - m)} \int_0^\infty x^z \cdot e^{-x} \rho(G, x) \cdot dx,$$

dont la spécialisation $n = m$ et $z = 0$ fut trouvée par Joni, Rota et Zeilberger [21], puisque $\rho!(\overline{G}, 0)$ compte le nombre des couplages parfaits de \overline{G} lorsque $n = m$. Ce résultat permet notamment d'interpréter des intégrales de produits de polynômes de Laguerre généralisés comme nombre de dérangements (voir [3], [4], [5], [14], [16], [18], [20], [29], [34]).

Suivant Godsil ([17], page 157), on peut, en effet, définir les polynômes de Laguerre comme des polynômes des tours des graphes bipartis complets $K_{n,m} := (X, Y; X \times Y)$ avec $|X| = n$ et $|Y| = m$. Autrement dit, pour tout $a \in \mathbb{N}$, nous posons

$$Le_n^{(a)}(x) := \rho(K_{n, n+a}, x).$$

Comme $\rho(K_{n, n+a} \uplus K_{m+a, m}, x) = x^a \cdot Le_n^{(a)}(x) \cdot Le_m^{(a)}(x)$, l'identité de Joni, Rota et Zeilberger implique alors

$$\rho!(\overline{K_{n, n+a} \uplus K_{m+a, m}}, 0) = \int_0^\infty Le_n^{(a)}(x) \cdot Le_m^{(a)}(x) \cdot x^a e^{-x} dx$$

(voir [18]), ce qui fournit notamment l'orthogonalité de nos polynômes $Le_n^{(a)}(x)$ par rapport à $x^a e^{-x} dx$. Voilà pourquoi notre définition des polynômes de Laguerre $Le_n^{(a)}(x)$ correspond bien à la définition classique. Notre normalisation, cependant, est choisie de façon que le premier coefficient, i. e. le coefficient de x^n , vaille 1.

Il nous semble également utile d'introduire les *polynômes des tours symétriques* (par rapport à la bipartition) en deux variables

$$\begin{aligned}\rho(G, x, y) &:= \sum_{r=0}^{\min(n,m)} (-1)^r p(G, r) \cdot x^{n-r} y^{m-r} = y^{m-n} \cdot \rho(G, xy), \\ \overline{\rho}(G, x, y) &:= \sum_{r=0}^{\min(n,m)} p(G, r) \cdot x^{n-r} y^{m-r} = (-1)^n y^{m-n} \cdot \rho(G, -xy),\end{aligned}$$

si $G = (X, Y; E)$ est biparti avec $|X| = n$ et $|Y| = m$. Pour ces polynômes, nous démontrons plusieurs théorèmes de dualité qui font intervenir des opérateurs différentiels. En particulier, nos identités nouvelles

$$\begin{aligned}\rho(\overline{G}, x, y) &= e^{xy} \cdot \overline{\rho}(G, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}) \cdot e^{-xy} \\ &= (x/y)^{n-m} \cdot \rho(\overline{G}, y, x) \\ &= (x/y)^{n-m} \cdot e^{xy} \cdot \overline{\rho}(G, -\frac{d}{dx}, -\frac{d}{dy}) \cdot e^{-xy}\end{aligned}$$

impliquent

$$\begin{aligned}Le_n^{(m-n)}(x) &= \rho(K_{n,m}, x, 1) = [e^{xy} \cdot (-\frac{d}{dx})^m (-\frac{d}{dy})^n \cdot e^{-xy}]_{y=1} \\ &= e^x \cdot (-\frac{d}{dx})^m [x^n e^{-x}] \\ &= x^{n-m} \cdot e^x \cdot (-\frac{d}{dx})^n [x^m e^{-x}],\end{aligned}$$

où la toute dernière identité est la formule de Rodrigues pour les polynômes de Laguerre généralisés. Dans le cas $n = m$, nous établissons également le théorème de dualité suivant pour le polynôme des tours lui-même :

$$\begin{aligned}\rho(\overline{G}, -x) &= (-1)^n \cdot \exp\left[\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\right] \rho(G, x), \\ \rho(\overline{G}, x) &= (-1)^n \cdot \exp\left[-\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\right] \rho(G, -x).\end{aligned}$$

Nous démontrons tous nos résultats à l'aide des fonctions génératrices pour les fonctions d'ensembles. Cette méthode algébrique permet, par excellence, d'automatiser l'utilisation de plusieurs méthodes classiques de la combinatoire énumérative et algébrique, et notamment l'utilisation du principe d'inclusion-exclusion et de l'inversion de Möbius sur l'ensemble partiellement ordonné des partitions d'un ensemble. L'algèbre des fonctions d'ensembles est introduite dans le paragraphe 2.

Dans le paragraphe 3, elle est appliquée pour le traitement du polynôme des tours et de sa parenté. Ceci fournit des démonstrations particulièrement courtes et explicatives et permet même de prolonger tous nos résultats à l'étude des permanents des matrices quelconques.

Pour des matrices carrées on obtient ainsi une preuve rapide d'une généralisation pondérée d'une identité fondamentale de Berge entre les chemins et les circuits hamiltoniens d'un graphe orienté simple $G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$, et ceux de son complément $\overline{G} = (V, \overline{E})$, $\overline{E} = (V \times V) \setminus E$. Appelons *bi-chemin hamiltonien* une partition de V en deux chemins hamiltoniens non-vides. Si $\text{cyc}(G)$ désigne le nombre de circuits hamiltoniens de G , $\text{lin}(G)$ le nombre de chemins hamiltoniens et $\text{bilin}(G)$ le nombre de bi-chemins hamiltoniens, alors Berge a imaginé le théorème de dualité suivant :

$$\text{lin}(\overline{G}) \equiv \text{lin}(G) \pmod{2}, \quad \text{bilin}(\overline{G}) \equiv \text{bilin}(G) \pmod{2},$$

$$\text{lin}(\overline{G}) + \text{bilin}(\overline{G}) \equiv \text{lin}(G) + \text{bilin}(G) \equiv \text{cyc}(\overline{G}) + \text{cyc}(G) \pmod{2}$$

(voir [7] ainsi que [6], chapitre 10, théorème 1 et exercice 9). La démonstration de Berge, cependant, contient un résultat nettement plus puissant que nous appelons *identité de Berge*. Exprimée dans le langage des fonctions d'ensembles, cette identité fondamentale prend toute sa force et implique immédiatement tous les résultats des paragraphes 4 et 5, et notamment la conjecture de Chung et Graham (établie d'abord par Chow et Gessel), l'identité de Foata et Zeilberger sur les polynômes de Laguerre, les théorèmes de parité de Rédei sur les tournois, de Lovász sur les graphes non-orientés et de Camion et Rao sur les graphes auto-complémentaires. Les démonstrations de ces résultats données par Berge, Camion, Chow, Foata, Gessel, Lovász, Moon, Rao, Szele et Zeilberger s'étendent parfois sur plusieurs pages (voir [8], [10], [16], [27], [33], [24], 5.19-20, [26], p. 21-23).

Dans le paragraphe 6, nous étudions les relations les plus importantes entre les fonctions d'ensembles et les fonctions symétriques. Nous généralisons plusieurs théorèmes de Stanley [30] et simplifions ses démonstrations. Finalement, nous montrons que le théorème principal de la thèse de Chow [11] est une conséquence directe de l'identité de Berge.

2. Outils algébriques

Soit V un ensemble fini et

$$\begin{aligned} f : 2^V &\rightarrow A \\ V' \subseteq V &\mapsto f(V') \in A \end{aligned}$$

une *fonction d'ensembles*, où A est un *anneau commutatif* (avec 1). Considérons la fonction génératrice

$$F_f(\nu) := \sum_{V' \subseteq V} f(V') \cdot \nu^{V'}, \quad \nu^\emptyset := 1,$$

à joindre aux règles de calcul suivantes ($V', V'' \subseteq V$) :

$$\nu^{V'} \cdot \nu^{V''} := \nu^{V'+V''}, \quad \text{où}$$

$$V' + V'' := \begin{cases} V' \cup V'', & \text{si } V' \cap V'' = \emptyset, \\ \dagger, & \text{si } V' \cap V'' \neq \emptyset, \end{cases} \quad \text{où}$$

$$\dagger + V' := \dagger, \quad \dagger + \dagger := \dagger, \quad \text{et} \quad \nu^\dagger := 0.$$

L'algèbre $A[V]$ de ces fonctions génératrices n'est pas une inconnue. En effet, on a l'isomorphisme

$$A[V] \simeq A[v_1, \dots, v_n] / \langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle,$$

si V contient n éléments.

EXEMPLE 2.1. Le produit fg de deux fonctions d'ensembles f, g est défini, pour tout $V' \subseteq V$, par

$$(fg)(V') := \sum_{V'=V'' \uplus V'''} f(V'') \cdot g(V''').$$

Il en résulte

$$F_{fg}(\nu) = F_f(\nu) \cdot F_g(\nu).$$

Pour $|V| = \infty$, soit $F(V)$ l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles finis de V . On a des projections canoniques $p_{V', V''} : A[V'] \rightarrow A[V'']$ ($V', V'' \in F(V), V' \supseteq V''$) et l'on pose

$$A[V] := \varprojlim A[V'], \quad V' \in F(V)$$

pour travailler avec des fonctions génératrices de la forme

$$F_f(\nu) = \sum_{V' \in F(V)} f(V') \cdot \nu^{V'}.$$

Soit

$$V := \sum_{v \in V} \nu^{\{v\}}$$

la fonction indicatrice des sous-ensembles de V de cardinalité 1 (l'usage double de V pour l'ensemble et pour un élément de $A[V]$ ne pourra pas être à l'origine de confusions). En multipliant la fonction génératrice V plusieurs fois par elle-même, on voit que $V^n/n!$ représente la fonction indicatrice des sous-ensembles de l'ensemble V de cardinalité n . L'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot V^n/n! = \sum_{V' \in F(V)} f(|V'|) \cdot \nu^{V'}, \quad f : \mathbb{N} \rightarrow A,$$

fournit un plongement de l'anneau $A![[V]]$ des fonctions génératrices de type exponentiel dans l'anneau $A[V]$. Ce plongement est à l'origine de (presque?) toutes les applications de $A![[V]]$ en combinatoire, mais il nécessite l'existence d'un modèle combinatoire infini (qui ne fait intervenir que les cardinalités). Par conséquent, $A[V]$ donne plus de flexibilité et permet un traitement algébrique, qui reflète parfaitement les opérations classiques de la combinatoire. Outre cela, $A[V]$ est approprié, par excellence, aux calculs par ordinateur.

REMARQUE 2.1. L'anneau $\mathbb{Z}![[V]]$ n'est pas noethérien, mais il contient des fonctions importantes comme $\exp(V)$ et $\log(1 + V)$.

EXEMPLE 2.2. Si $\text{char } A = 2$, on a

$$\begin{aligned} (1 + V)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \cdot V^n / n! \\ &\equiv 1 + V \quad \text{et} \\ \log(1 + V) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot V^n / n! \\ &\equiv V + V^2/2 \end{aligned}$$

dans l'anneau $A![[V]]$. Ces identités sont à l'origine de maints résultats de parité en combinatoire.

Pour tout $t \in A$ posons $(t \cdot \nu)^{V'} := t^{|V'|} \cdot \nu^{V'}$, $V' \subseteq V$, et, par conséquent,

$$F_f(t\nu) = \sum_{\emptyset \subseteq V' \subseteq V} f(V') t^{|V'|} \nu^{V'}.$$

Il est évident que cette définition est compatible avec l'addition et la multiplication. Les cas particuliers les plus importants sont $t = -1$ et $t = 0$: $F_f(0) = F_f(0 \cdot \nu) = f(\emptyset)$.

Si $F_f(0) = 0$, alors $F_f(\nu)^n/n!$ est défini pour n'importe quel anneau A , parce qu'une partition en n sous-ensembles non-vides peut être ordonnée de $n!$ manières différentes. Voilà pourquoi $A![[V]]$ opère sur $A[V]$ par la substitution $G(F_f(\nu))$ définie pour tout $G \in A![[V]]$.

Finalement, on utilise les dérivées ∂^v pour tout $v \in V$ définies par

$$\partial^v \nu^{V'} := \begin{cases} \nu^{V'}, & \text{si } v \in V', \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formule de dérivation d'un produit

$$\partial^v [F_f(\nu) \cdot F_g(\nu)] = (\partial^v F_f(\nu)) \cdot F_g(\nu) + F_f(\nu) \cdot (\partial^v F_g(\nu))$$

est l'analogie algébrique du fait ensembliste le plus fondamental:

$$v \in V' \uplus V'' \quad \Leftrightarrow \quad v \in V' \quad \text{ou} \quad v \in V''.$$

La formule

$$\partial^v [G(F_f(\nu))] = G'(F_f(\nu)) \cdot \partial^v F_f(\nu), \quad G \in A![[V]],$$

en découle immédiatement.

REMARQUE 2.2. L'isomorphisme $A[V] \simeq A[v_1, \dots, v_n] / \langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle$ ne fait pas correspondre ∂^v à $\partial / \partial v_i$, mais à $v_i \partial / \partial v_i$. La dérivée partielle $\partial / \partial v_i$ n'a point d'analogue dans $A[V]$.

EXEMPLE 2.3.

- a) Étant données $f, g : 2^V \rightarrow A$, alors l'équivalence suivante n'est rien d'autre que le principe d'inclusion-exclusion :

$$F_g(\nu) = \exp[V] \cdot F_f(\nu) \quad \Leftrightarrow \quad F_f(\nu) = \exp[-V] \cdot F_g(\nu).$$

- b) Étant données $f, g : 2^V \rightarrow A$ avec $f(\emptyset) = g(\emptyset) = 0$, l'équivalence

$$1 + F_g(\nu) = \exp[F_f(\nu)] \quad \Leftrightarrow \quad F_f(\nu) = \log[1 + F_g(\nu)]$$

s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} g(V') &= \sum_{V' = B_1 \uplus \dots \uplus B_k} f(B_1) \cdots f(B_k) \quad \forall V' \subseteq V \quad \Leftrightarrow \\ f(V') &= \sum_{V' = B_1 \uplus \dots \uplus B_k} (-1)^{k-1} (k-1)! \cdot g(B_1) \cdots g(B_k) \quad \forall V' \subseteq V \end{aligned}$$

et n'est rien d'autre que l'inversion de Möbius pour des fonctions multiplicatives généralisées sur l'ensemble partiellement ordonné des partitions de V (voir [1], chapitre V.1.C ou [13], chapitre 5.2). Par ailleurs, on peut se servir de ∂^v pour obtenir le résultat dérivé

$$[1 + F_g(\nu)] \cdot \partial^v F_f(\nu) = \partial^v F_g(\nu),$$

qui, par suite de la profusion de méthodes inductives ou récursives, est souvent beaucoup plus connu que le résultat « pur ». En outre, ce résultat dérivé a l'avantage de n'utiliser qu'un seul produit, permettant des calculs par ordinateur particulièrement rapides.

3. Le polynôme des tours et sa parenté

Soit $G = (X, Y; E)$ un graphe biparti simple et soit $\overline{G} = (X, Y; \overline{E})$ son complément biparti. Posons $V := X \uplus Y$ et définissons $X, Y, E, \overline{E} \in A[V]$ par

$$X := \sum_{x \in X} \nu^{\{x\}}, \quad Y := \sum_{y \in Y} \nu^{\{y\}}, \quad E := \sum_{e \in E} \nu^e, \quad \overline{E} := \sum_{e \in \overline{E}} \nu^e,$$

où chaque arête $e \in E$ (resp. $e \in \overline{E}$) est considéré comme un sous-ensemble de V de cardinalité deux. La définition du complément biparti implique alors l'identité suivante, qui est à l'origine de tous les résultats de cet article.

LEMME FONDAMENTAL. *Dans l'algèbre $A[V] = A[X \uplus Y]$, on a*

$$\mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}} = \mathbf{X}\mathbf{Y}. \quad \blacksquare$$

Pour $\emptyset \subseteq X' \subseteq X$ et $\emptyset \subseteq Y' \subseteq Y$, notons $G[X', Y']$ le sous-graphe de G engendré par $X' \cup Y'$ (c'est le graphe dont les sommets sont les éléments de $X' \cup Y'$ et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans $X' \cup Y'$). Alors $\exp[E]$ compte, pour chaque $X' \subseteq X$ et $Y' \subseteq Y$, le nombre des couplages parfaits de $G[X', Y']$. Voilà pourquoi la proposition suivante est une conséquence immédiate des définitions du polynôme des tours et de sa parenté (voir l'introduction).

PROPOSITION 3.1. *On a*

$$\begin{aligned} \sum_{X' \subseteq X} \sum_{Y' \subseteq Y} \rho(G[X', Y'], z) \cdot \nu^{X' \cup Y'} &= \exp[E] \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!} \cdot \frac{Y^j}{j!} \cdot z^j \\ &= \exp[E] \cdot \exp[X] \cdot (1 + Y)^z \quad \text{et} \\ \sum_{X' \subseteq X} \sum_{Y' \subseteq Y} \rho(G[X', Y'], x) \cdot \nu^{X' \cup Y'} &= \exp[-E] \cdot \exp[xX] \cdot \exp[Y], \\ \sum_{X' \subseteq X} \sum_{Y' \subseteq Y} \rho(G[X', Y'], x, y) \cdot \nu^{X' \cup Y'} &= \exp[-E] \cdot \exp[xX] \cdot \exp[yY], \\ \sum_{X' \subseteq X} \sum_{Y' \subseteq Y} \overline{\rho}(G[X', Y'], x, y) \cdot \nu^{X' \cup Y'} &= \exp[E] \cdot \exp[xX] \cdot \exp[yY]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Il est classique que $\rho(\overline{G}, x)$ est complètement déterminé par $\rho(G, x)$, un résultat que Riordan [28], chapitre 7.7, démontra à l'aide de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2. Soit $G = (X, Y; E)$ un graphe biparti simple avec $|X| = n$ et $|Y| = m$. Alors on a pour le polynôme des tours du graphe biparti complémentaire $\overline{G} = (X, Y; \overline{E})$ l'identité

$$\rho(\overline{G}, x) = \sum_{r=0}^{\min(n,m)} p(G, r) \cdot \rho(K_{n-r, m-r}, x).$$

Démonstration. En utilisant l'algèbre $A[V] = A[X \uplus Y]$, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho(K_{i,j}, x) \cdot \frac{X^i}{i!} \cdot \frac{Y^j}{j!} = \exp[xX + Y - XY].$$

Par conséquent, l'identité suivante implique bien notre proposition :

$$\exp[xX + Y - \overline{E}] = \exp[xX + Y - XY + E] = \exp[E] \cdot \exp[xX + Y - XY]. \blacksquare$$

Pour les polynômes des tours symétriques, nous pouvons établir des théorèmes de dualité apparemment nouveaux.

THÉORÈME 3.1. Pour tout graphe biparti simple $G = (X, Y; E)$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\rho}(\overline{G}, x, y) &= e^{-xy} \cdot \rho(G, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dx}) \cdot e^{xy}, \\ \rho(\overline{G}, x, y) &= e^{xy} \cdot \overline{\rho}(G, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}) \cdot e^{-xy}. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème de Taylor formel on a

$$f(x + a, y + b) = \exp\left[\frac{d}{dx}a + \frac{d}{dy}b\right] \cdot f(x, y)$$

pour des variables x, y, a, b et une série formelle f . Il s'ensuit

$$\begin{aligned} &\exp[-xy] \cdot \exp\left[\frac{d}{dy}X + \frac{d}{dx}Y - E\right] \cdot \exp[xy] \\ &= \exp[-xy] \cdot \exp[-E] \cdot \exp\left[\frac{d}{dx}Y + \frac{d}{dy}X\right] \cdot \exp[xy] \\ &= \exp[-xy] \cdot \exp[-E] \cdot \exp[(x + Y)(y + X)] \\ &= \exp[xX + yY + \overline{E}]. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est démontrée de la même façon. \blacksquare

Comme $\left[\left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dy}\right)^i (xy)^j\right]_{y=1} = \left(\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\right)^i x^j$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, nous obtenons le corollaire suivant pour le polynôme des tours lui-même.

COROLLAIRE 3.1. Soit $G = (X, Y; E)$ un graphe biparti simple tel que $|X| = |Y| = n$. Alors on a pour le polynôme des tours de $\overline{G} = (X, Y; \overline{E})$ les identités

$$\begin{aligned}\rho(\overline{G}, -x) &= (-1)^n \cdot e^{-x} \rho\left(G, \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\right) e^x, \\ \rho(\overline{G}, x) &= (-1)^n \cdot e^x \rho\left(G, -\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\right) e^{-x}. \blacksquare\end{aligned}$$

Au lieu de reproduire des généralisations du corollaire précédent au cas $|X| \neq |Y|$ (qui sont moins belles), nous préférons donner une autre forme des théorèmes de dualité faisant intervenir des opérateurs différentiels.

THÉORÈME 3.2. Pour tout graphe biparti simple $G = (X, Y; E)$, on a

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(\overline{G}, x, y) &= \exp\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dy}\right] \cdot \rho(G, x, y), \\ \rho(\overline{G}, x, y) &= \exp\left[-\frac{d}{dx} \frac{d}{dy}\right] \cdot \overline{\rho}(G, x, y).\end{aligned}$$

Démonstration. Puisque $\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \exp[xX + yY - E] = XY \cdot \exp[xX + yY - E]$, nous avons

$$\begin{aligned}\exp[xX + yY + \overline{E}] &= \exp[XY] \cdot \exp[xX + yY - E] \\ &= \exp\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dy}\right] \cdot \exp[xX + yY - E].\end{aligned}$$

L'opérateur différentiel $\exp\left[-\frac{d}{dx} \frac{d}{dy}\right]$ est l'inverse de $\exp\left[\frac{d}{dx} \frac{d}{dy}\right]$. \blacksquare

Le corollaire 3.2 se déduit du théorème 3.2 de la même façon que le corollaire 3.1 se déduit du théorème 3.1.

COROLLAIRE 3.2. Soit $G = (X, Y; E)$ un graphe biparti simple tel que $|X| = |Y| = n$. Alors on a pour le polynôme des tours de $\overline{G} = (X, Y; \overline{E})$ les identités

$$\begin{aligned}\rho(\overline{G}, -x) &= (-1)^n \cdot \exp\left[\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\right] \rho(G, x), \\ \rho(\overline{G}, x) &= (-1)^n \cdot \exp\left[-\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}\right] \rho(G, -x). \blacksquare\end{aligned}$$

Terminons ce paragraphe avec le théorème de dualité pour le polynôme de Chow dont nous avons mentionné les spécialisations classiques dans l'introduction.

THÉORÈME 3.3. Soit $G = (X, Y; E)$ un graphe biparti simple avec $|X| = n$ et $|Y| = m$. Alors on a

$$\begin{aligned}\rho!(\overline{G}, z) &= (-1)^m \rho!(G, m - n - 1 - z) \\ &= \frac{1}{\Gamma(z + 1 + n - m)} \int_0^\infty x^z \cdot e^{-x} \rho(G, x) \cdot dx.\end{aligned}$$

Démonstration. La proposition 3.1 permet d'exprimer la première identité dans le langage des fonctions d'ensembles. En fait, pour représenter le facteur $(-1)^m$, il suffit de multiplier chaque élément de Y (et de E) par -1 . Autrement dit, il faut démontrer

$$\begin{aligned} \exp[\overline{E}] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^i Y^j}{i! j!} z^j &= \exp[-E] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^i (-Y)^j}{i! j!} (j - i - 1 - z)^j \\ \Leftrightarrow \exp[\overline{E}] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^i Y^j}{i! j!} \binom{z}{j} &= \exp[-E] \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^i Y^j}{i! j!} \binom{i+z}{j} \\ \Leftrightarrow \exp[\overline{E}] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!} (1+Y)^z &= \exp[-E] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!} (1+Y)^{i+z} \\ \Leftrightarrow \exp[E + \overline{E}] \exp[X] &= \exp[X(1+Y)]. \end{aligned}$$

Pour établir l'identité

$$(-1)^m \rho!(G, m - n - 1 - z) = \frac{1}{\Gamma(z + 1 + n - m)} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^z \rho(G, x) \cdot dx,$$

il suffit de constater que le coefficient de $p(G, r)$ (voir l'introduction) dans le membre de gauche et dans le membre de droite vaut

$$\begin{aligned} (-1)^m (m - n - 1 - z)^{\overline{m-r}} &= (-1)^r (z + n - r)^{\overline{m-r}} = (-1)^r \frac{\Gamma(z + 1 + n - r)}{\Gamma(z + 1 + n - m)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(z + 1 + n - m)} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^z (-1)^r x^{n-r} \cdot dx. \blacksquare \end{aligned}$$

REMARQUE 3.1. Dans le sens de Gessel et Stanley, il faudrait également étudier les fonctions génératrices des suites de nombres $\rho!(G, z)$, $z \in \mathbb{Z}$, une étude que nous ne reproduisons pas ici.

REMARQUE 3.2. Pour plusieurs applications (voir [3], [4], [5] et [16], par exemple), il est indispensable de prolonger nos résultats aux graphes bipartis *pondérés* $G_w = (X, Y; E, w)$, où $w : X \uplus Y \rightarrow A$ (resp. $E : X \times Y \rightarrow A$) est une fonction attachant un poids à chaque sommet (resp. arête) du graphe. Par définition, $\{x, y\}$ est une arête de G_w si et seulement si $E(\{x, y\}) \neq 0$, de sorte qu'un graphe biparti simple est un graphe biparti pondéré tel que $w(x) = w(y) = 1$ et $E(\{x, y\}) \in \{0, 1\}$ pour tout $x \in X$ et $y \in Y$.

Le *complément pondéré* $\overline{G}_w = (X, Y; \overline{E}, w)$ du graphe $G_w = (X, Y; E, w)$ est défini par

$$E(\{x, y\}) + \overline{E}(\{x, y\}) = w(x) \cdot w(y)$$

pour tout $x \in X$ et $y \in Y$. En posant

$$X := \sum_{x \in X} w(x) \cdot \nu^{\{x\}}, \quad Y := \sum_{y \in Y} w(y) \cdot \nu^{\{y\}},$$

$$E := \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} E(\{x, y\}) \cdot \nu^{\{x, y\}}, \quad \bar{E} := \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \bar{E}(\{x, y\}) \cdot \nu^{\{x, y\}},$$

notre lemme fondamental

$$E + \bar{E} = XY$$

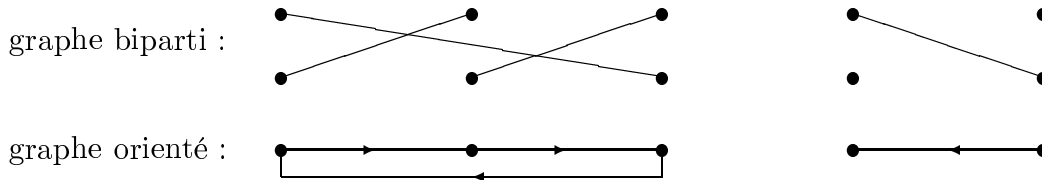
reste alors valable.

Un r -couplage de G_w , finalement, est un recouvrement de tous les n sommets de X et de tous les m sommets de Y par r arêtes non-adjacentes, $n - r$ sommets de X et $m - r$ sommets de Y . Le poids du r -couplage est égal au produit des poids de ses r arêtes, ses $n - r$ sommets de X et ses $m - r$ sommets de Y .

Notons $p(G_w, r)$ la somme des poids de tous les r -couplages de G_w , $p(G_w, 0) = [\prod_{x \in X} w(x)] \cdot [\prod_{y \in Y} w(y)]$. De cette manière, la proposition 3.1 ainsi que tous les autres résultats de ce paragraphe restent effectivement valables pour les graphes bipartis pondérés. Autrement dit, nous avons établi des théorèmes de dualité pour les permanents des matrices de dimensions $n \times m$.

4. Chemins et circuits hamiltoniens

Supposons dorénavant que $|X| = |Y| = n$ et fixons une bijection entre X et Y . Ceci nous permet d'identifier le graphe biparti simple $G = (X, Y; E)$, $E \subseteq X \times Y$, à un graphe orienté simple $G = (V, E)$ avec $|V| = n$ et $E \subseteq V \times V$.



Notons que V n'est plus égal à $X \uplus Y$ à partir de ce paragraphe. La définition du graphe biparti complémentaire fournit une définition naturelle du graphe orienté complémentaire, à savoir $\bar{G} = (V, \bar{E})$, où $\bar{E} = (V \times V) \setminus E$. En particulier, G contient une boucle autour de $v \in V$ si et seulement si \bar{G} n'a pas de boucle autour de v . Un r -couplage du graphe biparti, finalement, n'est rien d'autre qu'une partition de V en plusieurs circuits hamiltoniens et $n - r$ chemins hamiltoniens du graphe orienté, de sorte que tous les résultats du paragraphe précédent peuvent être interprétés dans le langage des graphes orientés.

Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$, notons $G[V']$ le sous-graphe du graphe orienté $G = (V, E)$ qui est engendré par V' (c'est le graphe dont les sommets sont les éléments de V'

et dont les arcs sont les arcs de G ayant leurs deux extrémités dans V'). Soit $\text{cyc}(G[V'])$ le nombre de circuits hamiltoniens de $G[V']$ et soit $\text{lin}(G[V'])$ le nombre de chemins hamiltoniens de $G[V']$, où un seul sommet $v \in V$ est un chemin hamiltonien de $G[\{v\}]$ dont v est à la fois le sommet initial et le sommet terminal, alors qu'une boucle autour de v est bien un circuit hamiltonien de $G[\{v\}]$. Les deux éléments

$$\text{cyc}_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \text{cyc}(G[V']) \cdot \nu^{V'}, \quad \text{lin}_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \text{lin}(G[V']) \cdot \nu^{V'}$$

de l'algèbre $A[V]$, $|V| = n$, sont au centre du reste de cet article. En fait, si l'on pose $n = m$ et $z = 0$ dans la première identité du théorème 3.3, alors le membre de gauche de cette identité est égal au coefficient de ν^V dans $\exp[\text{cyc}_{\overline{G}}(\nu)]$, tandis que le membre de droite est égal au coefficient de ν^V de la fonction d'ensembles $\exp[\text{cyc}_G(-\nu)] \cdot [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-1}$. Autrement dit, notre théorème 3.3 implique la relation

$$\exp[\text{cyc}_{\overline{G}}(\nu)] = \exp[\text{cyc}_G(-\nu)] \cdot [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-1},$$

imaginée par Berge [7] sans utiliser les fonctions d'ensembles. En intervertissant les rôles de G et \overline{G} , nous obtenons le théorème suivant, qui est à l'origine de tous les résultats des paragraphes 4 et 5.

THÉORÈME 4.1. (Identité de Berge) *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté simple. Alors on a*

$$1 + \text{lin}_{\overline{G}}(\nu) = [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-1} = \exp[\text{cyc}_{\overline{G}}(\nu) - \text{cyc}_G(-\nu)],$$

$$\log[1 + \text{lin}_{\overline{G}}(\nu)] = -\log[1 + \text{lin}_G(-\nu)] = \text{cyc}_{\overline{G}}(\nu) - \text{cyc}_G(-\nu) \quad \text{et}$$

$$[1 + \text{lin}_G(-\nu)] \cdot \partial^v \text{lin}_{\overline{G}}(\nu) = -[1 + \text{lin}_{\overline{G}}(\nu)] \cdot \partial^v \text{lin}_G(-\nu) = \partial^v [\text{cyc}_{\overline{G}}(\nu) - \text{cyc}_G(-\nu)]$$

pour chaque sommet $v \in V$. ■

REMARQUE 4.1. Pour des applications futures, il est indispensable de prolonger nos résultats aux graphes orientés pondérés $G_{it} = (V, E, i, t)$, où $i, t : V \rightarrow A$ et $E : V \times V \rightarrow A$ sont des fonctions attachant des poids à chaque sommet et arc, respectivement. Par définition, (u, v) est un arc de G_{it} si et seulement si $E((u, v)) \neq 0$, de sorte qu'un graphe orienté simple est un graphe orienté pondéré tel que $i(v) = t(v) = 1$ et $E((u, v)) \in \{0, 1\}$ pour tout $u, v \in V$. Le complément pondéré $\overline{G}_{it} = (V, \overline{E}, i, t)$ du graphe $G_{it} = (V, E, i, t)$ est défini par

$$E((u, v)) + \overline{E}((u, v)) = i(u) \cdot t(v)$$

pour tout $u, v \in V$. Finalement, le poids d'un circuit hamiltonien est égal au produit des poids de ses arcs, tandis que le poids d'un chemin hamiltonien est égal

au produit des poids de ses arcs multiplié par $t(u) \cdot i(v)$ si u (resp. v) est le sommet initial (resp. terminal) du chemin.

Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$, notons $\text{cyc}(G_{it}[V'])$ (resp. $\text{lin}(G_{it}[V'])$) la somme des poids de tous les circuits (resp. chemins) hamiltoniens de $G_{it}[V']$. Avec ces définitions, notre remarque 3.2 permet de conclure que le théorème 4.1 reste valable pour les graphes orientés pondérés. Autrement dit, nous avons établi un théorème de dualité pour les matrices carrées de dimension $n \times n$. En fait, la diagonale principale d'une matrice carrée fournit une bijection canonique entre l'ensemble des lignes et l'ensemble des colonnes (voir le début de ce paragraphe). Remarquons finalement que les autres résultats des paragraphes 4 et 5 peuvent également être prolongés au cas pondéré. Nous laissons au lecteur le soin d'explicitier ceci.

Grâce à notre exemple 2.2, on peut simplifier le théorème 4.1 sensiblement en le considérant modulo 2 :

$$1 + \text{lin}_{\overline{G}}(\nu) \equiv 1 + \text{lin}_G(\nu) \pmod{2},$$

$$\text{lin}_{\overline{G}}(\nu) + \text{lin}_{\overline{G}}(\nu)^2/2 \equiv \text{lin}_G(\nu) + \text{lin}_G(\nu)^2/2 \equiv \text{cyc}_{\overline{G}}(\nu) + \text{cyc}_G(\nu) \pmod{2}.$$

Puisque le coefficient de ν^V dans $\text{lin}_G(\nu)^2/2$ compte le nombre de bi-chemins hamiltoniens de $G = (V, E)$ (voir l'introduction), nous avons établi le résultat principal de l'article [7] de Berge (voir [6], chapitre 10, théorème 1 et exercice 9).

COROLLAIRE 4.1. (Berge) *Pour tout graphe orienté simple $G = (V, E)$, on a*

$$\text{lin}(\overline{G}) \equiv \text{lin}(G) \pmod{2}, \quad \text{bilin}(\overline{G}) \equiv \text{bilin}(G) \pmod{2},$$

$$\text{lin}(\overline{G}) + \text{bilin}(\overline{G}) \equiv \text{lin}(G) + \text{bilin}(G) \equiv \text{cyc}(\overline{G}) + \text{cyc}(G) \pmod{2}. \quad \blacksquare$$

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté simple. Chung et Graham [12] (resp. D'Antona et Munarini [2]) ont introduit et étudié le polynôme $C!(G, x, y)$ (resp. $C(G, x, z)$) appelé *polynôme de recouvrement* (resp. *polynôme de recouvrement géométrique*). À l'aide des fonctions d'ensembles, on peut définir ces polynômes comme suit :

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} C!(G[V'], x, y) \cdot \nu^{V'} := \exp[x \cdot \text{cyc}_G(\nu)] \cdot [1 + \text{lin}_G(\nu)]^y,$$

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} C(G[V'], x, z) \cdot \nu^{V'} := \exp[x \cdot \text{cyc}_G(\nu)] \cdot \exp[z \cdot \text{lin}_G(\nu)].$$

Il est évident que nos définitions sont équivalentes à celles proposées par Chung et Graham [12], D'Antona et Munarini [2] et Chow [10]. Chung et Graham ont posé la question de savoir si $C!(\overline{G}, x, y)$ est déterminé par $C!(G, x, y)$. Une réponse affirmative fut trouvée par Chow (et Gessel) [10], qui ont établi une belle relation entre les deux polynômes, soulignant davantage le caractère visionnaire de

la définition de Chung et Graham. Nous montrons que la relation imaginée par Chow (et Gessel) ainsi que notre relation entre $C!(\overline{G}, x, y)$ et $C(G, x, z)$ sont des corollaires directs de l'identité de Berge. Les différentes démonstrations de Chow et Gessel [10] sont toutes plus longues.

THÉORÈME 4.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté simple avec $|V| = n$. Alors on a*

$$\begin{aligned} C!(\overline{G}, x, y) &= (-1)^n C!(G, x, -x - y) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(x + y)} \int_0^\infty e^{-z} \cdot C(G, x, -z) \cdot z^{x+y} \cdot \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Démonstration. Dans le langage des fonctions d'ensembles, la première identité du corollaire s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \exp[x \cdot \text{cyc}_{\overline{G}}(\nu)] \cdot [1 + \text{lin}_{\overline{G}}(\nu)]^y &= \exp[x \cdot \text{cyc}_G(-\nu)] \cdot [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-x-y} \\ \Leftrightarrow (\exp[\text{cyc}_{\overline{G}}(\nu) - \text{cyc}_G(-\nu)])^x &= [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-x}. \end{aligned}$$

La seconde identité se vérifie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(x + y)} \int_0^\infty e^{-z} \cdot \exp[x \cdot \text{cyc}_G(-\nu)] \cdot \exp[-z \cdot \text{lin}_G(-\nu)] \cdot z^{x+y-1} \cdot dz \\ &= \exp[x \cdot \text{cyc}_G(-\nu)] \cdot \frac{1}{\Gamma(x + y)} \int_0^\infty \exp(-z[1 + \text{lin}_G(-\nu)]) \cdot z^{x+y-1} \cdot dz \\ &= \exp[x \cdot \text{cyc}_G(-\nu)] \cdot \frac{1}{\Gamma(x + y)} \int_0^\infty e^{-t} \cdot \left(\frac{t}{1 + \text{lin}_G(-\nu)} \right)^{x+y-1} \cdot \frac{dt}{1 + \text{lin}_G(-\nu)} \\ &= \exp[x \cdot \text{cyc}_G(-\nu)] \cdot [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-x-y} \cdot \frac{1}{\Gamma(x + y)} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x+y-1} \cdot dt \\ &= \exp[x \cdot \text{cyc}_G(-\nu)] \cdot [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-x-y}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

REMARQUE 4.2. Évidemment, le théorème 4.1 est aussi une conséquence immédiate du théorème 4.2. Le théorème 4.1, cependant, est bien le chaînon essentiel entre l'algèbre et la combinatoire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, soit K_n le *graphe orienté complet* avec n sommets. Évidemment, son complément ne contient aucun arc, et l'on a $\text{cyc}(K_n) = (n - 1)!$ et $\text{lin}(K_n) = n!$. Définissons le graphe infini complet K_∞ dans le sens du paragraphe 2 pour obtenir les identités

$$\begin{aligned} \text{cyc}_{K_\infty}(\nu) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{cyc}(K_n) \cdot V^n / n! = -\log(1 - V), \\ \text{lin}_{K_\infty}(\nu) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{lin}(K_n) \cdot V^n / n! = \frac{V}{1 - V}. \end{aligned}$$

Les polynômes de Laguerre généralisés $Le_n^{(\alpha)}(z)$ furent introduits dans l'introduction pour $\alpha \in \mathbb{N}$. La proposition suivante est facile à établir pour eux (voir notre relation entre graphes bipartis et graphes orientés). De plus, elle nous servira de définition des polynômes de Laguerre pour $\alpha \notin \mathbb{N}$. L'orthogonalité par rapport à $z^\alpha e^{-z} dz$ des polynômes $Le_n^{(\alpha)}(z)$ ainsi définis sera une conséquence immédiate de notre corollaire 4.2.

PROPOSITION 4.1. *On a*

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Le_n^{(\alpha)}(z) \cdot V^n / n! &= (1 + V)^{-\alpha-1} \cdot \exp\left[\frac{z \cdot V}{1 + V}\right] \\ &= \exp[(\alpha + 1) \cdot \text{cyc}_{K_\infty}(-\nu)] \cdot \exp[-z \cdot \text{lin}_{K_\infty}(-\nu)]. \end{aligned}$$

Autrement dit, $Le_n^{(\alpha)}(z) = (-1)^n \cdot C(K_n, \alpha + 1, -z)$. ■

Soit $K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k}$ l'union disjointe des graphes complets K_{n_1}, \dots, K_{n_k} de sorte que l'on a l'identité évidente

$$Le_{n_1}^{(\alpha)}(z) \cdots Le_{n_k}^{(\alpha)}(z) = (-1)^{n_1 + \dots + n_k} \cdot C(K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k}, \alpha + 1, -z).$$

Le théorème 4.2 implique donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.2. *On a*

$$\begin{aligned} C!(\overline{K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k}}, \alpha + 1, \beta) \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^\infty e^{-z} \cdot \left(\prod_{h=1}^k Le_{n_h}^{(\alpha)}(z) \right) \cdot z^{\alpha+\beta} \cdot dz. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le cas le plus important du corollaire précédent, à savoir $\beta = 0$, fut imaginé par Foata et Zeilberger [16, théorème 1]. Si, de plus, on pose $k = 2$, alors on obtient l'orthogonalité par rapport à $z^\alpha e^{-z} dz$ pour nos polynômes $Le_n^{(\alpha)}(z)$ définis à l'aide de la proposition 4.1. Ceci montre qu'ils s'agit bien des polynômes de Laguerre (généralisés) classiques.

REMARQUE 4.3. Dans le sens de la remarque 4.1, choisissons des poids $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et définissons le graphe orienté pondéré $(K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k})_{it}$ en posant $i(v) := \lambda_h$ si et seulement si v est un sommet de K_{n_h} , alors que tous les autres poids sont conservés, i. e. $t(v) = 1$ pour chaque sommet, par exemple. De cette manière, on a

$$Le_{n_1}^{(\alpha)}(\lambda_1 z) \cdots Le_{n_k}^{(\alpha)}(\lambda_k z) = (-1)^{n_1 + \dots + n_k} \cdot C((K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k})_{it}, \alpha + 1, -z)$$

et le cas $\beta = 0$ de l'identité

$$\begin{aligned} & C!((\overline{K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k}})_{it}, \alpha + 1, \beta) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^\infty e^{-z} \cdot \left(\prod_{h=1}^k L e_{n_h}^{(\alpha)}(\lambda_h z) \right) \cdot z^{\alpha + \beta} \cdot dz \end{aligned}$$

n'est rien d'autre que le théorème 2 de [16], c'est-à-dire le théorème principal de cet article de Foata et Zeilberger.

5. Tournois et graphes non-orientés

Un *tournoi* $G = (V, E)$ est un graphe orienté simple sans boucles et tel que pour deux sommets distincts $u, v \in V$ on ait toujours exactement l'une des relations $(u, v) \in E$ ou bien $(v, u) \in E$. Si $G = (V, E)$ est un tournoi, alors chaque sommet de \overline{G} contient une boucle et l'on a $\text{lin}_{\overline{G}}(\nu) = \text{lin}_G(\nu)$ ainsi que $\text{cyc}_{\overline{G}}(\nu) = V + \text{cyc}_G(\nu)$. Voilà pourquoi le théorème 4.1 implique le résultat suivant.

THÉORÈME 5.1. *Pour chaque tournoi $G = (V, E)$, on a*

$$\begin{aligned} 1 + \text{lin}_G(\nu) &= [1 + \text{lin}_G(-\nu)]^{-1} = \exp[V] \cdot \exp[\text{cyc}_G(\nu) - \text{cyc}_G(-\nu)] \quad \text{et} \\ \log[1 + \text{lin}_G(\nu)] &= -\log[1 + \text{lin}_G(-\nu)] = V + \text{cyc}_G(\nu) - \text{cyc}_G(-\nu). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Grâce à notre exemple 2.2, on peut simplifier le théorème précédent sensiblement en le considérant modulo 2 :

$$1 + \text{lin}_G(\nu) \equiv \exp[V] \pmod{2}, \quad \text{lin}_G(\nu) + \text{lin}_G(\nu)^2/2 \equiv V \pmod{2}.$$

On n'obtient ainsi rien d'autre que les théorèmes classiques de Rédei et de Berge, formulés dans le langage des fonctions d'ensembles (voir [6], chapitre 10, théorème 6 et exercice 9). La démonstration du théorème de Rédei imaginée par Berge est plus longue, bien qu'elle simplifie déjà considérablement les preuves classiques (voir [33], [26], p. 21-23).

COROLLAIRE 5.1. (Rédei, Berge) *Pour chaque tournoi $G = (V, E)$ tel que $|V| > 1$, on a $\text{lin}(G) \equiv \text{bilin}(G) \equiv 1 \pmod{2}$. \blacksquare*

Finalement, soit $E \uplus \overline{E} = \binom{V}{2}$ une partition de la famille des sous-ensembles de cardinalité 2 de l'ensemble V , et soient $G = (V, E)$ et $\overline{G} = (V, \overline{E})$ deux graphes simples non-orientés qui sont complémentaires. Pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$, notons $G[V']$ le sous-graphe de G engendré par V' (c'est le graphe dont les sommets sont les éléments de V' et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs deux extrémités

dans V'). Soit $\text{hc}(G[V'])$ (resp. $\text{hp}(G[V'])$) le nombre de circuits (resp. chemins) hamiltoniens de $G[V']$, où $\text{hc}(G[V']) := 0$ (resp. $\text{hp}(G[V']) := 0$) si $|V'| < 3$ (resp. $|V'| < 2$). Posons

$$\text{HC}_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \text{hc}(G[V']) \cdot \nu^{V'}, \quad \text{HP}_G(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \text{hp}(G[V']) \cdot \nu^{V'}$$

ainsi que $E := \sum_{e \in E} \nu^e$ et $\bar{E} := \sum_{e \in \bar{E}} \nu^e$ de sorte que $E + \bar{E} = V^2/2$ dans l'algèbre $A[V]$.

Suivant la suggestion de Berge (voir [6], préface), remplaçons chaque arête de G et de \bar{G} par deux arcs d'orientations opposées et munissons chaque sommet de \bar{G} d'une boucle pour obtenir deux graphes simples orientés qui sont complémentaires. Tout circuit (resp. chemin) hamiltonien non-orienté conduit à deux circuits (resp. chemins) hamiltoniens orientés. De plus, une arête non-orienté (resp. un sommet) conduit à un circuit (resp. chemin) hamiltonien orienté. Par conséquent, le théorème 4.1 fournit le résultat suivant.

THÉORÈME 5.2. *Soient $G = (V, E)$ et $\bar{G} = (V, \bar{E})$ deux graphes simples non-orientés qui sont complémentaires. Alors on a*

$$\begin{aligned} 1 + V + 2\text{HP}_{\bar{G}}(\nu) &= [1 - V + 2\text{HP}_G(-\nu)]^{-1} \\ &= \exp[V + \bar{E} + 2\text{HC}_{\bar{G}}(\nu) - E - 2\text{HC}_G(-\nu)], \\ \log[1 + V + 2\text{HP}_{\bar{G}}(\nu)] &= -\log[1 - V + 2\text{HP}_G(-\nu)] \\ &= V + \bar{E} - E + 2[\text{HC}_{\bar{G}}(\nu) - \text{HC}_G(-\nu)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pour obtenir des relations plus simples modulo 2, commençons par développer la fonction exponentielle dans le théorème précédent modulo 4 :

$$\begin{aligned} &\exp[V + \bar{E} + 2\text{HC}_{\bar{G}}(\nu) - E - 2\text{HC}_G(-\nu)] \\ &\equiv \exp[\log(1 + V) + 2(\bar{E} + \text{HC}_{\bar{G}}(\nu) + \text{HC}_G(\nu) + V^3/3! + V^4/4!)] \\ &\equiv [1 + V][1 + 2(\bar{E} + \text{HC}_{\bar{G}}(\nu) + \text{HC}_G(\nu) + V^3/3! + V^4/4!)] \pmod{4}. \end{aligned}$$

On en tire le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.2. *Pour tout graphe simple non-orienté $G = (V, E)$, on a*

$$\begin{aligned} \text{HP}_{\bar{G}}(\nu) + \bar{E}(1 + V) &\equiv \text{HP}_G(\nu) + E(1 + V) \\ &\equiv [\text{HC}_{\bar{G}}(\nu) + \text{HC}_G(\nu)][1 + V] + V^3/3! + V^4/4! + V^5/5! \pmod{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Un chemin (resp. circuit) de $G = (V, E)$ ($|V| = n$) est dit *élémentaire* s'il ne rencontre pas deux fois le même sommet. Notons $\text{hp}_k(G)$ (resp. $\text{hc}_k(G)$) le nombre

de chemins (resp. circuits) élémentaires de k sommets, $k \geq 3$. En particulier, $\text{hp}_n(G) = \text{hp}(G)$ (resp. $\text{hc}_n(G) = \text{hc}(G)$) dénombre les chemins (resp. circuits) hamiltoniens de G , et l'on a

$$\text{hp}_k(G) = \sum_{V' \in \binom{V}{k}} \text{hp}(G[V']), \quad \text{hc}_k(G) = \sum_{V' \in \binom{V}{k}} \text{hc}(G[V']),$$

si $\binom{V}{k}$ désigne l'ensemble des sous-ensembles de V de cardinalité k . Multiplions l'identité du corollaire 5.2 par $V^h/h!$, $h \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \text{HP}_{\overline{G}}(\nu) \frac{V^h}{h!} + \overline{E}(1+V) \frac{V^h}{h!} &\equiv \text{HP}_G(\nu) \frac{V^h}{h!} + E(1+V) \frac{V^h}{h!} \\ &\equiv [\text{HC}_{\overline{G}}(\nu) + \text{HC}_G(\nu)] \left[\frac{V^h}{h!} + (h+1) \frac{V^{h+1}}{(h+1)!} \right] \\ &\quad + \binom{h+3}{3} \frac{V^{h+3}}{(h+3)!} + \binom{h+4}{4} \frac{V^{h+4}}{(h+4)!} + \binom{h+5}{5} \frac{V^{h+5}}{(h+5)!} \pmod{2}. \end{aligned}$$

En regardant le coefficient de ν^V nous déduisons le corollaire suivant, puisque $(h+1)$ et $\binom{h+5}{5}$ sont pairs si h est un nombre impair.

COROLLAIRE 5.3. *Soient $G = (V, E)$ et $\overline{G} = (V, \overline{E})$ deux graphes simples non-orientés qui sont complémentaires, et soient k et h deux entiers avec $k \geq 5$, $h \geq 1$ et $k+h = n = |V|$. Si h est impair, alors on a modulo 2 :*

$$\begin{aligned} \text{hp}_k(\overline{G}) &\equiv \text{hp}_k(G) \equiv \text{hc}_k(\overline{G}) + \text{hc}_k(G), \\ \text{hp}_{k+1}(\overline{G}) &\equiv \text{hp}_{k+1}(G) \equiv \text{hc}_k(\overline{G}) + \text{hc}_k(G) + \text{hc}_{k+1}(\overline{G}) + \text{hc}_{k+1}(G), \\ \text{hp}_k(\overline{G}) + \text{hp}_{k+1}(\overline{G}) &\equiv \text{hp}_k(G) + \text{hp}_{k+1}(G) \equiv \text{hc}_{k+1}(\overline{G}) + \text{hc}_{k+1}(G). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

L'identité $\text{hp}_{k+1}(\overline{G}) \equiv \text{hp}_{k+1}(G) \pmod{2}$ fut imaginée par Lovász [24, 5.19] dans le cas particulier $k+1 = n$.

Un graphe simple non-orienté $G = (V, E)$ est appelé *auto-complémentaire* si et seulement si G et \overline{G} sont isomorphes. Pour de tels graphes, notre corollaire 5.3 fournit le théorème principal de l'article [27] de Rao, que ce dernier a démontré sur plusieurs pages.

COROLLAIRE 5.4. (Rao) *Soit $G = (V, E)$ un graphe auto-complémentaire avec $|V| = n$. Alors $\text{hp}_k(G)$ est pair pour tout $5 < k \leq n$. \blacksquare*

Le cas le plus important du théorème précédent, à savoir $k = n$, fut imaginé par Camion [8].

6. Fonctions symétriques et fonctions d'ensembles

Dans l'introduction de sa thèse [11], Chow a suggéré une direction prometteuse pour étendre son étude des fonctions symétriques et saisir ainsi davantage de problèmes en combinatoire. Il nous semble que les fonctions d'ensembles permettent, par excellence, de réaliser cette idée de Chow.

Soient donc $f, g : 2^V \rightarrow A$ deux fonctions d'ensembles telles que $f(\emptyset) = g(\emptyset) = 0$. Nous définissons, pour chaque $\emptyset \subset V' \subseteq V$, la *fonction symétrique de Stanley* $ST_{f,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots)$ et la *fonction symétrique de Chow* $CH_{g,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots)$ par

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} ST_{f,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot \nu^{V'} := \prod_{i=1}^{\infty} [1 + F_f(x_i \cdot \nu)],$$

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} CH_{g,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots) \cdot \nu^{V'} := \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} F_g(x_i \cdot \nu) \right],$$

respectivement (voir le début du paragraphe 2). La relation fondamentale entre la fonction symétrique de Chow et celle de Stanley est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 6.1. *Si $\log[1 + F_f(\nu)] = F_g(\nu)$ ou bien $1 + F_f(\nu) = \exp[F_g(\nu)]$, alors on a pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$*

$$ST_{f,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots) = CH_{g,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Démonstration. On a en effet

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} ST_{f,V'}(x_1, x_2, \dots) \cdot \nu^{V'} &= \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} \log[1 + F_f(x_i \cdot \nu)] \right] \\ &= 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} CH_{g,V'}(x_1, x_2, \dots) \cdot \nu^{V'}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EXEMPLE 6.1. Les fonctions symétriques de Stanley les plus fondamentales (voir [22], [32, chapitre 7], [25, chapitre 1.2]) sont la fonction symétrique élémentaire $e_n = \Lambda^n(x_1, x_2, x_3, \dots)$ et la fonction symétrique complète $h_n = S^n(x_1, x_2, x_3, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1 + V &= 1 + F_f(\nu) &\Rightarrow & ST_{f,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots) = |V'|! \cdot e_{|V'|}, \\ (1 - V)^{-1} &= 1 + F_f(\nu) &\Rightarrow & ST_{f,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots) = |V'|! \cdot h_{|V'|}. \end{aligned}$$

Les fonctions symétriques les plus simples, cependant, sont bien les sommes des puissances $p_n = \psi_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$. À l'aide de cette base de l'espace

des fonctions symétriques, on définit l'involution ω par $\omega(p_n) := (-1)^{n-1}p_n$. Grâce à l'exemple précédent, le théorème suivant devient une généralisation directe des identités classiques $\omega(e_n) = h_n$ et $\omega(h_n) = e_n$.

THÉORÈME 6.2. *Pour des fonctions d'ensembles $f, g : 2^V \rightarrow A$ telles que $f(\emptyset) = g(\emptyset) = 0$, on a*

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \omega(ST_{f,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots)) \cdot \nu^{V'} = \prod_{i=1}^{\infty} [1 + F_f(-x_i \cdot \nu)]^{-1},$$

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \omega(CH_{g,V'}(x_1, x_2, x_3, \dots)) \cdot \nu^{V'} = \exp\left[-\sum_{i=1}^{\infty} F_g(-x_i \cdot \nu)\right].$$

Démonstration. Supposons, sans restreindre la généralité, que $1 + F_f(\nu) = \exp[F_g(\nu)]$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \omega\left(\prod_{i=1}^{\infty} [1 + F_f(x_i \cdot \nu)]\right) &= \omega\left(\exp\left[\sum_{i=1}^{\infty} F_g(x_i \cdot \nu)\right]\right) \\ &= \exp\left[\omega\left(\sum_{i=1}^{\infty} F_g(x_i \cdot \nu)\right)\right] = \exp\left[-\sum_{i=1}^{\infty} F_g(-x_i \cdot \nu)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} [1 + F_f(-x_i \cdot \nu)]^{-1}. \blacksquare \end{aligned}$$

Dans l'article [23], nous avons introduit, pour chaque graphe simple non-orienté $G = (V, E)$, la fonction indicatrice des ensembles de sommets indépendants $I_G(\nu)$ ainsi que la fonction d'ensembles $A_G(\nu)$ (resp. $A_G^*(\nu)$) dénombrant les orientations acycliques (resp. avec une seule source fixée) pour tous les sous-graphes engendrés de G . Nous avons établi les identités

$$[1 + I_G(-\nu)]^{-1} = 1 + A_G(\nu), \quad -\log[1 + I_G(-\nu)] = \log[1 + A_G(\nu)] = A_G^*(\nu).$$

Stanley [30] a introduit et étudié la fonction chromatique $X_G = X_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$, qui est, par excellence, une fonction symétrique « de Stanley » :

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} X_{G[V']} \cdot \nu^{V'} := \prod_{i=1}^{\infty} [1 + I_G(x_i \cdot \nu)].$$

Le corollaire suivant formule plusieurs théorèmes principaux de l'article [30] de Stanley dans le langage des fonctions d'ensembles.

COROLLAIRE 6.1. (Stanley) *On a*

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} X_{G[V']} \cdot \nu^{V'} = \prod_{i=1}^{\infty} [1 + I_G(x_i \cdot \nu)] = \exp \left[- \sum_{i=1}^{\infty} A_G^*(-x_i \cdot \nu) \right],$$

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \omega(X_{G[V']}) \cdot \nu^{V'} = \prod_{i=1}^{\infty} [1 + A_G(x_i \cdot \nu)] = \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} A_G^*(x_i \cdot \nu) \right]. \blacksquare$$

Selon Stanley [30], une série formelle $p = p(x, y)$ en deux ensembles de variables $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ est appelée *fonction supersymétrique* si et seulement si p est symétrique par rapport aux variables x_i et y_j et

$$p(x, y)|_{y_1 = -x_1} = p(x, y)|_{y_1 = x_1 = 0}.$$

Notons ω_y l'involution ω n'agissant que sur les variables y en supposant que x_1, x_2, x_3, \dots sont des constants. Si $p(x)$ est une fonction symétrique, définissons la *superfication* $p(x/y)$ de p par

$$p(x/y) := \omega_y(p(x, y)),$$

c'est-à-dire en remplaçant les variables x_1, x_2, \dots par $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ (c'est une soi-disante *addition des deux alphabets*) et en utilisant ω_y ensuite. Pour les fonctions symétriques de Stanley et de Chow, notre théorème 6.2 donne le résultat suivant.

THÉORÈME 6.3. *Soient $f, g : 2^V \rightarrow A$ telles que $f(\emptyset) = g(\emptyset) = 0$, alors on a*

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} ST_{f, V'}(x/y) \cdot \nu^{V'} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + F_f(x_i \cdot \nu)}{1 + F_f(-y_i \cdot \nu)},$$

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} CH_{g, V'}(x/y) \cdot \nu^{V'} = \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} (F_g(x_i \cdot \nu) - F_g(-y_i \cdot \nu)) \right]. \blacksquare$$

Le théorème précédent implique immédiatement le corollaire suivant, qui exprime le théorème 4.3 de [30] dans le langage des fonctions d'ensembles. La démonstration proposée par Stanley est la plus longue de tout l'article [30] et utilise les fonctions de Schur.

COROLLAIRE 6.2. (Stanley) *On a*

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} X_{G[V']}(x/y) \cdot \nu^{V'} = \left(\prod_{i=1}^{\infty} [1 + I_G(x_i \cdot \nu)] \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{\infty} [1 + A_G(y_i \cdot \nu)] \right). \blacksquare$$

Étudions finalement la thèse de Chow [11] ou bien son article [10]. Il est utile de noter nos alphabets $(x) = (x_1, x_2, \dots)$ et $(y) = (y_1, y_2, \dots)$ de sorte que $(-x) = (-x_1, -x_2, \dots)$ et $(-y) = (-y_1, -y_2, \dots)$. L'addition des alphabets $(x) + (y)$ déjà introduite peut être généralisée en considérant des combinaisons linéaires quelconques $\lambda(x) + \mu(y)$, $\lambda, \mu \in A$, où il faut faire attention que $-(-x) \neq (x)$, puisque $(-x)$ est une multiplication des variables par -1 tandis que $-(x)$ est une soustraction de l'alphabet (x) (voir [22]). Le théorème suivant est évident ou bien une définition.

THÉORÈME 6.4. *Soient $f, g : 2^V \rightarrow A$ telles que $f(\emptyset) = g(\emptyset) = 0$, alors on a pour tout $\lambda, \mu \in A$:*

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} ST_{f, V'} [\lambda(x) + \mu(y)] \cdot \nu^{V'} = \prod_{i=1}^{\infty} \left[\left(1 + F_f(x_i \nu)\right)^\lambda \left(1 + F_f(y_i \nu)\right)^\mu \right],$$

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} CH_{g, V'} [\lambda(x) + \mu(y)] \cdot \nu^{V'} = \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda \cdot F_g(x_i \nu) + \mu \cdot F_g(y_i \nu) \right) \right].$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \omega \left(ST_{f, V'} [\lambda(x) + \mu(y)] \right) &= ST_{f, V'} [\lambda(x) - \mu(-y)], \\ ST_{f, V'} [(x)/(y)] &= ST_{f, V'} [(x) - (-y)], \\ \omega \left(ST_{f, V'} [(x)] \right) &= ST_{f, V'} [-(-x)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Soient $\text{cyc}_G(\nu)$, $\text{lin}_G(\nu)$, $\text{cyc}_{\overline{G}}(\nu)$ et $\text{lin}_{\overline{G}}(\nu)$ quatre fonctions d'ensembles quelconques qui satisfont à l'identité de Berge, c'est-à-dire au théorème 4.1. Nous définissons, pour chaque $\emptyset \subset V' \subseteq V$, la *fonction symétrique de Chow-Stanley* $CS_{G[V']}[(x); (y)]$ par

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} CS_{G[V']}[(x); (y)] \cdot \nu^{V'} := \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} \text{cyc}_G(x_i \nu) \right] \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 + \text{lin}_G(y_j \nu) \right].$$

Maintenant nous sommes en mesure de formuler notre généralisation du théorème principal de la thèse de Chow [11].

THÉORÈME 6.5. (Théorème de dualité pour la fonction de Chow-Stanley)

Pour tous $\lambda_c, \lambda_l, \mu_c, \mu_l \in A$, on a

$$\begin{aligned} CS_{\overline{G}}[\lambda_c(x) + \mu_c(y); \lambda_l(x) + \mu_l(y)] \\ = CS_G[\lambda_c(-x) + \mu_c(-y); -(\lambda_c + \lambda_l)(-x) - (\mu_c + \mu_l)(-y)]. \end{aligned}$$

Démonstration. Dans le langage des fonctions d'ensembles, il s'agit de démontrer l'identité suivante, que nous établissons à l'aide de l'identité de Berge :

$$\begin{aligned}
& \exp\left[\lambda_c \sum_{i=1}^{\infty} \text{cyc}_{\overline{G}}(x_i \nu)\right] \cdot \exp\left[\mu_c \sum_{j=1}^{\infty} \text{cyc}_{\overline{G}}(y_j \nu)\right] \cdot \\
& \left(\prod_{i=1}^{\infty} [1 + \text{lin}_{\overline{G}}(x_i \nu)]\right)^{\lambda_l} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\infty} [1 + \text{lin}_{\overline{G}}(y_j \nu)]\right)^{\mu_l} \\
= & \exp\left[\lambda_c \sum_{i=1}^{\infty} \text{cyc}_G(-x_i \nu)\right] \cdot \exp\left[\mu_c \sum_{j=1}^{\infty} \text{cyc}_G(-y_j \nu)\right] \cdot \\
& \left(\prod_{i=1}^{\infty} [1 + \text{lin}_G(-x_i \nu)]\right)^{-\lambda_c - \lambda_l} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\infty} [1 + \text{lin}_G(-y_j \nu)]\right)^{-\mu_c - \mu_l} \\
\Leftrightarrow & \left(\exp\left[\sum_{i=1}^{\infty} (\text{cyc}_{\overline{G}}(x_i \nu) - \text{cyc}_G(-x_i \nu))\right]\right)^{\lambda_c} \cdot \\
& \left(\exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} (\text{cyc}_{\overline{G}}(y_j \nu) - \text{cyc}_G(-y_j \nu))\right]\right)^{\mu_c} \\
= & \left(\prod_{i=1}^{\infty} [1 + \text{lin}_G(-x_i \nu)]\right)^{-\lambda_c} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\infty} [1 + \text{lin}_G(-y_j \nu)]\right)^{-\mu_c} \cdot \blacksquare
\end{aligned}$$

Posons $\lambda_c = \mu_l = 1$ et $\lambda_l = \mu_c = 0$ pour obtenir le théorème principal de la thèse de Chow [11] et de l'article [10].

COROLLAIRE 6.3. (Chow) *On a*

$$\begin{aligned}
CS_{\overline{G}}[(x); (y)] &= CS_G[(-x); -(-x) - (-y)] \\
&= \left[\omega_y(CS_G[(-x); (y)])\right]_{y \rightarrow (x, y)} \cdot \blacksquare
\end{aligned}$$

Chow a également trouvé un deuxième cas particulier du théorème 6.5, à savoir $\lambda_c = -2$, $\mu_c = 0$ et $\lambda_l = \mu_l = 1$.

COROLLAIRE 6.4. (Chow) *On a*

$$\begin{aligned}
CS_{\overline{G}}[-2(x); (x) + (y)] &= CS_G[-2(-x); (-x) - (-y)] \\
&= \omega_y(CS_G[-2(-x); (-x) + (y)]). \blacksquare
\end{aligned}$$

Tous les autres cas du théorème 6.5 sont nouveaux. De notre point de vue, cependant, le théorème 6.5 et l'identité de Berge sont aussi des corollaires immédiats des résultats de Chow. Par ailleurs, Chow [10, paragraphe 6] a posé la question de mieux comprendre le rôle des inversions qu'il a considérées. Il nous semble, que l'addition des alphabets répond parfaitement à cette question. Au moins, il devient évident qu'il s'agit bien d'inversions, un fait que Chow a dû démontrer.

Remarquons finalement, que Gessel a aussi imaginé une démonstration de l'identité

$$CS_{\overline{G}}[0; (y)] = \omega_y(CS_G[0; (y)]),$$

qui se trouve dans l'intersection des deux résultats de Chow. Cette preuve de Gessel reproduite dans [10], cependant, s'étend, elle aussi, sur plus d'une page tout en utilisant les fonctions de Schur.

Remerciements. En tout premier lieu, je tiens à remercier D. Foata de toute son aide et assistance et notamment de ses explications stimulantes en ce qui concerne l'article [16]. Mes remerciements vont aussi à A. Lascoux, qui m'a recommandé, lors du magnifique Séminaire Lotharingien de Combinatoire 44 au Domaine Saint-Jacques, son article [22] «sur l'importance de l'addition dans l'œuvre mathématique de Gian-Carlo Rota». C'est ainsi que je me suis rendu compte de l'importance de la soustraction (des alphabets) dans les œuvres de T. Chow et de R. Stanley.

Références bibliographiques

- [1] M. Aigner, «Combinatorial Theory», Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.
- [2] O. M. D'Antona et E. Munarini, The cycle-path indicator polynomial of a digraph, *Advances in Appl. Math.* **25** (2000), 41-56.
- [3] R. Askey et G. Gasper, Convolution structures for Laguerre polynomials, *J. Analyse Math.* **31** (1977), 48-68.
- [4] R. Askey et M. Ismail, Permutation problems and special functions, *Canad. J. Math.* **28** (1976), 853-874.
- [5] R. Askey, M. Ismail et T. Koornwinder, Weighted permutation problems and Laguerre Polynomials, *J. Combin. Theory Ser. A* **25** (1978), 277-287.
- [6] C. Berge, «Graphes», Bordas, Paris, 1983.
- [7] C. Berge, Chemins hamiltoniens, ICC Research Report n° 67/2, 1967.
- [8] P. Camion, Hamiltonian chains in self-complementary graphs, *Cahiers Centre Études Recherche Opér.* **17** (1975), 173-183.
- [9] T. Chow, A short proof of the rook reciprocity theorem, *Electronic J. Combin.* **3** (1996), R10.

- [10] T. Chow, The path-cycle symmetric function of a digraph, *Advances in Math.* **118** (1996), 71-98.
- [11] T. Chow, «Symmetric Function Generalizations of Graph Polynomials», Ph.D. Thesis, MIT, 1995.
- [12] F. R. K. Chung et R. L. Graham, On the cover polynomial of a digraph, *J. Combin. Theory Ser. B* **65** (1995), 273-290.
- [13] P. Doubilet, G.-C. Rota, R. Stanley, On the foundations of combinatorial theory (VI), dans : Proceedings of the Sixth Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. II, University of California Press, Berkeley (1972), 267-318.
- [14] S. Even et J. Gillis, Derangements and Laguerre polynomials, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79** (1976), 135-143.
- [15] D. Foata et M.-P. Schützenberger, On the rook polynomials of Ferrers relations, dans : Combinatorial Theory and its Applications, vol. 2 (P. Erdős, A. Renyi et V. T. Sós, eds.), *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **4** (1970), North-Holland, Amsterdam, 431-436.
- [16] D. Foata et D. Zeilberger, Laguerre polynomials, weighted derangements and positivity, *SIAM J. Disc. Math.* **1** (1988), 425-433.
- [17] C. D. Godsil, «Algebraic Combinatorics», Chapman & Hall, New York, 1993.
- [18] C. D. Godsil, Hermite polynomials and a duality relation for matchings polynomials, *Combinatorica* **1** (1981), 257-262.
- [19] J. R. Goldman, J. T. Joichi, D. E. White, Rook theory I, Rook equivalence of Ferrers boards, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), 485-492.
- [20] D. M. Jackson, Laguerre polynomials and derangements, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **80** (1976), 213-214.
- [21] S. A. Joni et G.-C. Rota, A vector space analog of permutations with restricted position, *J. Combinatorial Theory, Series A* **29** (1980), 59-73.
- [22] A. Lascoux, Couper les alphabets en quatre, <http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al>; version anglaise : Alphabet splitting, dans : Algebraic Combinatorics and Computer Science, A Tribute to Gian-Carlo Rota (H. Crapo et D. Senato, eds.), Springer-Verlag, Milano (2001), 431-444.
- [23] B. Lass, Orientations acycliques et le polynôme chromatique, *Europ. J. Combinatorics* **22** (2001), 1101-1123.
- [24] L. Lovász, «Combinatorial Problems and Exercises», Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993.
- [25] I. G. Macdonald, «Symmetric Functions and Hall Polynomials», Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [26] J. W. Moon, «Topics on tournaments», Holt, Rinehart and Winston, New York-Montreal, 1968.
- [27] S. B. Rao, The number of open chains of length three and the parity of the number of open chains of length k in self-complementary graphs, *Discrete Math.* **28** (1979), 291-301.
- [28] J. Riordan, «An Introduction to Combinatorial Analysis», Wiley, New York, 1958.

- [29] M. de Sainte-Catherine et G. Viennot, Combinatorial interpretation of integrals of products of Hermite, Laguerre and Tchebycheff polynomials, dans : Polynômes orthogonaux et applications (C. Brezinski, et al., eds.), Bar-le-Duc, 1984, *Lecture Notes in Mathematics* **1175** (1985), Springer-Verlag, Berlin, 120-128.
- [30] R. P. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, *Advances in Math.* **111** (1995), 166-194.
- [31] R. P. Stanley, «Enumerative Combinatorics», Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [32] R. P. Stanley, «Enumerative Combinatorics», Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [33] T. Szele, Kombinatorische Untersuchungen über gerichtete vollständige Graphen, *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 145-168.
- [34] G. Viennot, « Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux », Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal, 1983.

Matching polynomials and duality (*)

Let G be a simple graph on n vertices. An r -matching in G is a set of r independent edges. The number of r -matchings in G will be denoted by $p(G, r)$. We set $p(G, 0) = 1$ and define the matching polynomial of G by $\mu(G, x) := \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \cdot p(G, r) \cdot x^{n-2r}$ and the signless matching polynomial of G by $\bar{\mu}(G, x) := \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} p(G, r) \cdot x^{n-2r}$.

It is classical that the matching polynomials of a graph G determine the matching polynomials of its complement \bar{G} . We make this statement more explicit by proving new duality theorems by the generating function method for set functions. In particular, we show that the matching functions $e^{-x^2/2} \mu(G, x)$ and $e^{-x^2/2} \mu(\bar{G}, x)$ are, up to a sign, real Fourier transforms of each other.

Moreover, we generalize Foata's combinatorial proof of the Mehler formula for Hermite polynomials to matching polynomials. This provides a new short proof of the classical fact that all zeros of $\mu(G, x)$ are real. The same statement is also proved for a common generalization of the matching polynomial and the rook polynomial.

1. Introduction

Let V be a finite set of vertices, $n := |V|$; and let $G = (V, E)$ be a simple graph, i. e. E , the set of edges, is a subset of $\binom{V}{2}$, the family of all 2-element subsets of V . The *complement* of G is the graph $\bar{G} = (V, \bar{E})$ with $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$.

An r -*matching* in G is a set of r edges of G , no two of which have a vertex in common. Clearly, $r \leq \lfloor n/2 \rfloor$. If $r = \lfloor n/2 \rfloor$, then an r -matching of G is called *perfect* if n is even and *quasi-perfect* if n is odd. Let $p(G, r)$ be the number of r -matchings in G , with the convention that $p(G, 0) := 1$. The matching polynomial of G is (see [3], chapter 1)

$$\mu(G, x) := \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \cdot p(G, r) \cdot x^{n-2r},$$

while the signless matching polynomial reads

$$\bar{\mu}(G, x) := \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} p(G, r) \cdot x^{n-2r}.$$

(*) Article à paraître dans *Combinatorica*

In particular, $\bar{\mu}(G, 0)$ counts the number of perfect matchings of G and $\bar{\mu}(G, 1)$ counts the number of arbitrary matchings of G .

These polynomials were introduced by Heilmann and Lieb [5], who, motivated by statistical physics, mainly studied their zeros. They obtained many estimations on the locations of those zeros and provided several different proofs for their main theorem that all zeros of $\mu(G, x)$ are real. Another proof of this theorem was obtained by Godsil, which he reproduced in his recent book [3] together with all the classical proofs. However, all those proofs rely on a recursive approach (via the deletion of a special vertex) towards the matching polynomial. One of the purposes of this paper is to give a short proof that avoids this traditional deletion technique.

We generalize the combinatorial proof of the Mehler formula for Hermite polynomials imagined by Foata (see [2]). To state and derive our extension of the Mehler formula we need an adequate algebraic tool, the algebra of generating functions for set functions. This algebra is developed in the next section. In section 4 we show that our generalization of the Mehler formula immediately implies that $|\mu(G, x)|^2 \geq [(\Im x)^2]^n + 2|E| \cdot [(\Im x)^2]^{n-1}$ for every $x \in \mathbb{C}$, i. e. that all the zeros of $\mu(G, x)$ are real. Moreover, this fact holds for a common generalization of the matching polynomial and the rook polynomial.

Section 3 is entirely devoted to questions of duality. It is evident that $\mu(G, x)$ and $\bar{\mu}(G, x)$ contain the same information, a convenient relation between those polynomials being

$$\mu(G, x) = (-i)^n \cdot \bar{\mu}(G, xi), \quad |V| = n, \quad i = \sqrt{-1}.$$

The observation that $\mu(G, x)$ and $\bar{\mu}(G, x)$ determine $\mu(\bar{G}, x)$ and $\bar{\mu}(\bar{G}, x)$, however, seems to have first been made by Lovász, [8] 5.18. His proof, based on the inclusion-exclusion principle, does not seem to be too difficult although it is marked with an asterisk in his book. We prefer to give an explicit calculation involving several new duality theorems. In particular, we show that the matching functions $e^{-x^2/2}\mu(G, x)$ and $e^{-x^2/2}\mu(\bar{G}, x)$ are, up to a sign, real Fourier transforms of each other.

Matching polynomials generalize many classical orthogonal polynomials, namely Hermite polynomials (the matching polynomials of complete graphs), Tchebycheff polynomials of both kinds (paths and cycles) and Laguerre polynomials (complete bipartite graphs), see [9] chapter 6. The complete graph K_n on n vertices can be defined as the complement of the edgeless graph \bar{K}_n on those vertices. Clearly, $\mu(\bar{K}_n, x) = \bar{\mu}(\bar{K}_n, x) = x^n$. The Hermite polynomials will be (by definition) the matching polynomials of the complete graphs, i. e. $He_n(x) := \mu(K_n, x)$. The reader will recognize the classical definition of the Hermite polynomials as a special case of the second equality in our duality theorem (d/dx), replacing \bar{G} by K_n .

The first step towards the duality theory developed here was the combinatorial interpretation of integrals over products of Hermite polynomials (see [9], VI-34,

remark 21, or the recent book [1], chapter 6.9):

$$\overline{\mu}(K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot \mu(K_{n_1}, x) \dots \mu(K_{n_k}, x) \cdot dx,$$

where $K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k}$ denotes the vertex disjoint union of the complete graphs K_{n_1}, \dots, K_{n_k} . Even this formula has been neglected in physics (for instance, in [5] there is no consideration of duality at all) as can be seen from the fact that Itzykson and Zuber [6] need a whole page to solve their integral (3.5), the result being evident from the previous formula.

The second step was the realization, due to Godsil [4], that, more generally,

$$\overline{\mu}(\overline{G}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot \mu(G, x) \cdot dx,$$

the equation $\mu(K_{n_1}, x) \dots \mu(K_{n_k}, x) = \mu(K_{n_1} \uplus \dots \uplus K_{n_k}, x)$ being evident.

Finally, the last step of duality theory is the derivation of direct formulas for the matching polynomials of the complementary graph. In this context Godsil mainly proposed

$$\mu(\overline{G}, x) = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} p(G, r) \cdot \mu(K_{n-2r}, x),$$

but also the more explicit formula

$$\overline{\mu}(\overline{G}, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot \mu(G, x + y) \cdot dx$$

is a specialization of theorem 2.4 in [4], that Godsil did not reproduce in his book [3].

We propose two new duality theorems by means of differential operators, a slight modification of Godsil's last theorem together with a scalar product formula and, finally, the Fourier transform interpretation.

Our proofs of section 3 make use of generating functions for set functions. We must say that the set function machinery developed in the next section has been the adequate tool for deriving those duality theorems.

2. Algebraic tools

Let V be a finite set and

$$\begin{aligned} f &: 2^V \rightarrow A \\ V' \subseteq V &\mapsto f(V') \in A \end{aligned}$$

be a set function, where A is a commutative ring with 1. Consider the generating function

$$F_f(\nu) := \sum_{V' \subseteq V} f(V') \cdot \nu^{V'}, \quad \nu^\emptyset := 1,$$

subject to the following multiplication rules ($V', V'' \subseteq V$):

$$\nu^{V'} \cdot \nu^{V''} := \nu^{V'+V''}, \quad \text{where}$$

$$V' + V'' := \begin{cases} V' \cup V'', & \text{if } V' \cap V'' = \emptyset, \\ \dagger, & \text{if } V' \cap V'' \neq \emptyset, \end{cases} \quad \text{where}$$

$$\dagger + V' := \dagger, \quad \dagger + \dagger := \dagger, \quad \text{and} \quad \nu^\dagger := 0.$$

The algebra $A[V]$ of those generating functions is not unknown. In fact, we have the isomorphism

$$A[V] \simeq A[v_1, \dots, v_n] / \langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle,$$

if V contains n elements.

EXAMPLE. For $V' \subseteq V$ put

$$(fg)(V') := \sum_{V'' \oplus V''' = V'} f(V'') \cdot g(V''')$$

($f, g, fg: 2^V \rightarrow A$). Then

$$F_{fg}(\nu) = F_f(\nu) \cdot F_g(\nu).$$

For $|V| = \infty$ let $F(V)$ be the partially ordered set of finite subsets of V . We have the canonical projections $p_{V', V''}: A[V'] \rightarrow A[V'']$ ($V', V'' \in F(V), V' \supseteq V''$) and define

$$A[V] := \varprojlim_{V' \in F(V)} A[V'],$$

in order to work with generating functions of the form

$$F_f(\nu) = \sum_{V' \in F(V)} f(V') \cdot \nu^{V'}.$$

Let

$$V := \sum_{v \in V} \nu^{\{v\}}$$

be the generating function for the indicator function of the subsets of V of cardinality 1 (the double use of V for the set itself on the one hand and for an element of $A[V]$ on the other hand will never cause confusion). In the product V^n each

subset of cardinality n occurs $n!$ times, so that $V^n/n!$ represents the indicator function of the subsets of the set V of cardinality n . The identity

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot V^n/n! = \sum_{V' \in \mathcal{F}(V)} f(|V'|) \cdot \nu^{V'}, \quad f: \mathbb{N} \rightarrow A,$$

provides an imbedding of the ring $A![V]$ of generating functions of exponential type (usually the variable is called x instead of V) into our ring $A[V]$. It is at the origin of (almost?) all applications of $A![V]$ into combinatorics, but it requires the existence of an infinite combinatorial model depending just on cardinalities. Consequently, $A[V]$ gives more flexibility and closeness to combinatorics. In addition to that $A[V]$ is ideally suited for computer calculations (for more details and lots of different applications see [7]).

REMARK. The ring $\mathbb{Z}![V]$ is not noetherian, but it contains the important functions $\exp(V)$ and $\log(1 + V)$.

EXAMPLE. If $\text{char } A = 2$, then we have

$$\begin{aligned} (1 + V)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \cdot V^n/n! \\ &\equiv 1 + V \quad \text{and} \\ \log(1 + V) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot V^n/n! \\ &\equiv V + V^2/2 \end{aligned}$$

in the ring $A![V]$. These identities are at the origin of lots of results of parity in combinatorics.

For all $t \in A$ we put $(t\nu)^{V'} := t^{|V'|} \cdot \nu^{V'}$, $V' \subseteq V$, and therefore

$$F_f(t\nu) = \sum_{\emptyset \subseteq V' \subseteq V} f(V') t^{|V'|} \cdot \nu^{V'}.$$

It is evident that this definition is compatible with the addition and the multiplication. Most important are the special cases $t = -1$ and $t = 0$: $F_f(0) = F_f(0 \cdot \nu) = f(\emptyset)$. If $F_f(0) = 0$, then $F_f(\nu)^n/n!$ is defined for any ring A , because a partition into n nonempty subsets can be ordered in $n!$ different ways. Thus we have an operation of $A![V]$ on $A[V]$ via the substitution $G(F_f(\nu))$ defined for any $G \in A![V]$.

Finally, define for any $f, g: 2^V \rightarrow A$ the function $f * g: 2^V \rightarrow A$ by

$$(f * g)(V') := f(V') \cdot g(V')$$

for each $V' \subseteq V$ and define the Hadamard product to be

$$F_f(\nu) * F_g(\nu) := F_{f*g}(\nu).$$

3. Duality theorems

Let $G = (V, E)$ be a finite simple graph and let $\overline{G} = (V, \overline{E})$ be its complement. We have identified V with the generating function of the indicator function of the one-element subsets of V , and we have realized that $V^2/2$ corresponds to the indicator function of the two-element subsets of V . Similarly, we identify E and \overline{E} with the generating functions of the indicator functions of $E, \overline{E} \subseteq 2^V$. Since every two-element subset of V either belongs to E or to \overline{E} , we have the following fundamental identity, valid in the ring $A[V]$:

$$\mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}} = \mathbf{V}^2/2.$$

Let $p(G)$ be the number of perfect matchings (if $|V| \equiv 0 \pmod{2}$) or quasi-perfect matchings (if $|V| \equiv 1 \pmod{2}$), and let $c(G)$ be the number of arbitrary matchings of G . We denote by $G[V']$ the subgraph of G induced by $V' \subseteq V$, i. e. its vertices are the elements of V' and its edges are the edges of G having both endpoints in V' . Then the perfect matchings are counted by $\exp[E]$, the quasi-perfect matchings by $V \cdot \exp[E]$, and altogether we have the identities

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} p(G[V']) \cdot \nu^{V'} &= (1 + V) \cdot \exp[E], \\ 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} c(G[V']) \cdot \nu^{V'} &= \exp[V + E]. \end{aligned}$$

The following proposition was proved in [8], 5.18, for the case of perfect matchings:

PROPOSITION. $c(\overline{G}) \equiv p(G) \pmod{2}$.

Proof. Using the previous three identities we have

$$\exp[V + \overline{E}] = \exp[V + V^2/2 - E] \equiv \exp[\log(1 + V) + E] = (1 + V) \cdot \exp[E]. \quad \blacksquare$$

From the very definitions of the matching polynomials we have the following generating functions:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \mu(G[V'], x) \cdot \nu^{V'} &= \exp[xV - E], \\ 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \overline{\mu}(G[V'], x) \cdot \nu^{V'} &= \exp[xV + E]. \end{aligned}$$

Considering the first equality for the complete graph K_∞ on an infinite set of vertices yields the classical generating function of exponential type for Hermite polynomials:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n, x) \cdot V^n/n! = \exp[xV - V^2/2].$$

We are now in a position to provide a very short proof of Godsil's duality theorem:

DUALITY THEOREM. (Godsil)

$$\mu(\overline{G}, x) = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} p(G, r) \cdot \mu(K_{n-2r}, x).$$

Proof. Using the set function algebra developed in section 2 we have:

$$\exp[xV - \overline{E}] = \exp[xV - V^2/2 + E] = \exp[E] \cdot \exp[xV - V^2/2]. \quad \blacksquare$$

We can further establish the new identities:

DUALITY THEOREM FOR THE MATCHING POLYNOMIALS $(\frac{d^2}{dx^2})$.

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(\overline{G}, x) &= \exp\left[\frac{d^2}{dx^2}/2\right] \cdot \mu(G, x), \\ \mu(\overline{G}, x) &= \exp\left[-\frac{d^2}{dx^2}/2\right] \cdot \overline{\mu}(G, x). \end{aligned}$$

Proof. As in the preceding proof,

$$\begin{aligned} \exp[xV + \overline{E}] &= \exp[V^2/2] \cdot \exp[xV - E] \\ &= \exp\left[\frac{d^2}{dx^2}/2\right] \cdot \exp[xV - E], \end{aligned}$$

because $\frac{d}{dx} \exp[xV - E] = V \cdot \exp[xV - E]$. The differential operator $\exp\left[-\frac{d^2}{dx^2}/2\right]$ is the inverse of $\exp\left[\frac{d^2}{dx^2}/2\right]$. \blacksquare

DUALITY THEOREM FOR THE MATCHING POLYNOMIALS $(\frac{d}{dx})$.

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(\overline{G}, x) &= e^{-x^2/2} \cdot \mu(G, \frac{d}{dx}) \cdot e^{x^2/2}, \\ \mu(\overline{G}, x) &= e^{x^2/2} \cdot \overline{\mu}(G, -\frac{d}{dx}) \cdot e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Proof. By the Taylor formula we know that

$$f(x + a) = \exp\left[\frac{d}{dx}a\right] \cdot f(x)$$

for variables x, a and a formal power series f . It follows that

$$\begin{aligned} &\exp[-x^2/2] \cdot \exp\left[\frac{d}{dx}V - E\right] \cdot \exp[x^2/2] \\ &= \exp[-x^2/2] \cdot \exp[-E] \cdot \exp\left[\frac{d}{dx}V\right] \cdot \exp[x^2/2] \\ &= \exp[-x^2/2] \cdot \exp[-E] \cdot \exp[(x + V)^2/2] \\ &= \exp[xV + \overline{E}]. \end{aligned}$$

The second equality is proved in the same way. \blacksquare

Specializing the second equality of the preceding theorem to Hermite polynomials, i. e. replacing \overline{G} by K_n , provides the classical definition of Hermite polynomials. However, we actually could not find the specialization to Hermite polynomials of the first equality, i. e. the differential operator $He_n(d/dx)$, in the literature.

Finally, we can prove several integral formulae:

DUALITY THEOREM FOR THE MATCHING POLYNOMIALS (f).

$$\bar{\mu}(\bar{G}, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/2} \cdot \mu(G, x) \cdot dx.$$

Proof. Using the invariance of the integral with respect to translations we get:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2/2] \cdot \exp[xV - E] \cdot dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-s^2/2] \cdot \exp[(s+y)V - E] \cdot ds \\ &= \exp[yV + \bar{E}] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(s-V)^2/2] \cdot ds \\ &= \exp[yV + \bar{E}] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-t^2/2] \cdot dt \\ &= \exp[yV + \bar{E}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

For graphs $G' = (V', E')$ and $G'' = (V'', E'')$ we have

SCALAR PRODUCT FORMULA.

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\overline{G' \uplus G''}, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(G', x) \cdot \mu(G'', x) \cdot e^{-x^2/2} \cdot dx \\ &= \bar{\mu}(\bar{G}', \frac{d}{dx}) \cdot \bar{\mu}(\bar{G}'', x) \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Proof. The first equality being evident from the previous theorem, we just have to prove the second one:

$$\begin{aligned} & \exp\left[\frac{d}{dx}V' + \bar{E}'\right] \cdot \exp[xV'' + \bar{E}''] \Big|_{x=0} \\ &= \exp[\bar{E}'] \cdot \exp[(x+V')V'' + \bar{E}''] \Big|_{x=0} \\ &= \exp[V'V'' + \bar{E}' + \bar{E}'']. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

REMARK. If $G' = K_n$ and $G'' = K_m$, then the scalar product formula counts the number of perfect matchings of the complete bipartite graph $\overline{K_n \uplus K_m}$, which is equal to zero, if $n \neq m$, and equal to $n!$, if $n = m$. This is the orthogonality of the Hermite polynomials.

The previous duality theorem implies $\mu(\overline{G}, y) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-yi)^2/2} \cdot \mu(G, x) \cdot dx$. It follows:

DUALITY THEOREM FOR THE MATCHING POLYNOMIAL (\mathbb{C}).

$$e^{-y^2/2} \mu(\overline{G}, y) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xyi} \cdot e^{-x^2/2} \mu(G, x) \cdot dx. \quad \blacksquare$$

If we call $e^{-x^2/2} \mu(G, x)$ matching function of G , then this matching function is even for n even and odd for n odd. Therefore it follows:

DUALITY THEOREM FOR THE MATCHING POLYNOMIAL (\mathbb{R}).

$$\begin{aligned} & e^{-y^2/2} \mu(\overline{G}, y) \cdot (-1)^{n/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \cos(xy) \cdot e^{-x^2/2} \mu(G, x) \cdot dx, \quad n \text{ even}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & e^{-y^2/2} \mu(\overline{G}, y) \cdot (-1)^{(n-1)/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \sin(xy) \cdot e^{-x^2/2} \mu(G, x) \cdot dx, \quad n \text{ odd}. \end{aligned}$$

Thus the matching functions of \overline{G} and G are, up to an eventual multiplication by -1 , real Fourier transforms of one another. \blacksquare

4. Zeros

From now on every edge $\{u, v\} \in E$ of our graph $G = (V, E)$ will get a positive real weight $w_{\{u, v\}}$ (we can assume that the two-element subsets of V which are not edges get the weight zero). This weighted graph will be denoted by $G_w = (V, E_w)$. In particular, E_w will be identified with the generating function of the set function which attributes the value 0 to all subsets of V with the only exception of the edges of G , which get their own weights. The (weighted) matching polynomial can be defined with the help of its generating function:

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \mu(G_w[V'], x) \cdot \nu^{V'} = \exp[xV - E_w].$$

We see, that every matching is counted with respect to its weight: the product of the weights of its edges.

A Hamiltonian cycle of G_w is a cyclic order of V and its weight is the product of the weights of its $n = |V|$ edges corresponding to two consecutive vertices in the

cyclic order. In particular, if the edge corresponding to two consecutive vertices in the cyclic order does not belong to the graph (equivalently, has weight zero), then the weight of that “Hamiltonian cycle” is equal to zero. Let $\text{cyc}(G_w)$ be the sum of the weights of all Hamiltonian cycles of G_w , with the convention that $\text{cyc}(G_w) = 1$ if $n = 1$. We assume that the weight of each edge in the complete graph K_n is equal to 1, so that $\text{cyc}(K_n) = (n - 1)!$.

A Hamiltonian path of G_w is a linear order of V and its weight is the product of the weights of its $n - 1$ edges corresponding to two consecutive vertices in the linear order. Let $\text{lin}(G_w)$ be the sum of the weights of all Hamiltonian paths of G_w , with the convention that $\text{lin}(G_w) = 1$ if $n = 1$. Clearly, $\text{lin}(K_n) = n!$.

Let us put

$$\text{cyc}_{G_w}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \text{cyc}(G_w[V']) \cdot \nu^{V'}, \quad \text{lin}_{G_w}(\nu) := \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \text{lin}(G_w[V']) \cdot \nu^{V'}.$$

Considering the infinite graph K_∞ yields

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{cyc}(K_n) \cdot V^n / n! = -\log(1 - V), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{lin}(K_n) \cdot V^n / n! = \frac{V}{1 - V}.$$

Usually (in undirected graphs) one does not distinguish between the two different directions of Hamiltonian cycles or paths. In this sense $\text{cyc}_{G_w}(\nu)$ and $\text{lin}_{G_w}(\nu)$ count them “twice”. Now we can prove our generalization of the Mehler formula:

THEOREM. Using the Hadamard product $*$ we have:

$$\begin{aligned} & \exp[xV - E_w] * \exp[yV - E_w] \\ &= \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(\nu) + \frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \\ & \quad \exp\left[-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(\nu) - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(-\nu)\right]. \end{aligned}$$

Proof. Two matchings of G_w to be considered in the left hand side of the theorem provide a partition of V into even Hamiltonian cycles (to be counted “twice”, because the matchings can be interchanged), even (according to the number of vertices) Hamiltonian paths (to be counted with the factor $-x^2$ or $-y^2$, because the number of edges of the paths is odd) and odd Hamiltonian paths (to be counted with the factor $2xy$). Thus the left hand side is equal to

$$\begin{aligned} & \exp\left[\frac{\text{cyc}_{G_w}(\nu) + \text{cyc}_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot 2\right] \cdot \\ & \exp\left[\frac{\text{lin}_{G_w}(\nu) + \text{lin}_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot (-x^2 - y^2)\right] \cdot \\ & \exp\left[\frac{\text{lin}_{G_w}(\nu) - \text{lin}_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot 2xy\right]. \end{aligned}$$

But this is precisely the right hand side of the theorem. \blacksquare

Specializing to K_∞ yields the Mehler formula:

COROLLARY. (Mehler)

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n, x) \mu(K_n, y) \cdot V^n / n! = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \cdot \exp\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot \frac{V}{1+V} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \cdot \frac{V}{1-V}\right]. \blacksquare$$

Replacing y in the previous theorem by the complex conjugate number \bar{x} yields:

COROLLARY.

$$\begin{aligned} & \exp[xV - E_w] * \exp[\bar{x}V - E_w] \\ &= \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(\nu) + \frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \\ & \quad \exp\left[(\Im m x)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(\nu) - (\Re e x)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(-\nu)\right] \\ &= \exp\left[(\Im m x)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(\nu)\right] \cdot \left(\exp[(\Re e x)V - E_w] * \exp[(\Re e x)V - E_w]\right). \end{aligned}$$

Therefore $|\mu(G_w, x)|^2 \geq [(\Im m x)^2]^n + 2W \cdot [(\Im m x)^2]^{n-1}$ for every $x \in \mathbb{C}$, where W is the sum of the weights of all edges of G_w . In particular, all zeros of $\mu(G_w, x)$ are real. \blacksquare

We finish this article by considering a common generalization of the matching polynomial and the classical rook polynomial. Thus we do not just have our weighted graph $G'_w = (V', E'_w)$, but also a bipartite graph $G''_w = (V', V''; E''_w)$. In other words, we have a graph $G_w = (V, E_w)$ with vertex set $V := V' \uplus V''$, edge set $E_w := E'_w \uplus E''_w$ and, in particular, no edges between vertices of V'' . The weights of the edges of G'_w are still assumed to be positive, whereas the weights of the edges of G''_w are supposed to be such that for each $v'' \in V''$ the weights of the edges incident with v'' all have the same sign, i. e. they are all positive or all negative.

Let $\exp[xV' + V'' - E'_w - E''_w]$ be the generating function of our generalized matching polynomials, and let $\text{cyc}_{G_w}(\nu)$ count the Hamiltonian cycles “twice”. Moreover, let $\text{lin}_{G_w}(\nu)$, $\text{lin}'_{G_w}(\nu)$, $\text{lin}''_{G_w}(\nu)$ count the Hamiltonian paths “twice” which have both endpoints in V' , one endpoint in V' and one endpoint in V'' , both endpoints in V'' , respectively. (Note that $\text{lin}_{G_w}(\nu)$ is nonnegative by our restrictions on the weights.) It follows:

THEOREM.

$$\begin{aligned} & \exp[xV' + V'' - E'_w - E''_w] * \exp[yV' + V'' - E'_w - E''_w] \\ &= \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(\nu) + \frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \\ & \quad \exp\left[-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(\nu) - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \\ & \quad \exp\left[-\frac{x+y}{2} \cdot \text{lin}'_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \exp\left[-\text{lin}''_{G_w}(-\nu)\right]. \end{aligned}$$

Proof. Clearly, both sides of the equality are equal to

$$\begin{aligned} & \exp\left[\frac{\text{cyc}_{G_w}(\nu) + \text{cyc}_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot 2\right] \cdot \\ & \exp\left[\frac{\text{lin}_{G_w}(\nu) + \text{lin}_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot (-x^2 - y^2)\right] \cdot \exp\left[\frac{\text{lin}_{G_w}(\nu) - \text{lin}_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot 2xy\right] \cdot \\ & \exp\left[\frac{\text{lin}'_{G_w}(\nu) + \text{lin}'_{G_w}(-\nu)}{4} (-x - y)\right] \cdot \exp\left[\frac{\text{lin}'_{G_w}(\nu) - \text{lin}'_{G_w}(-\nu)}{4} (x + y)\right] \cdot \\ & \exp\left[\frac{\text{lin}''_{G_w}(\nu) + \text{lin}''_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot (-2)\right] \cdot \exp\left[\frac{\text{lin}''_{G_w}(\nu) - \text{lin}''_{G_w}(-\nu)}{4} \cdot 2\right]. \blacksquare \end{aligned}$$

It follows:

COROLLARY.

$$\begin{aligned} & \exp[xV' + V'' - E'_w - E''_w] * \exp[\bar{x}V' + V'' - E'_w - E''_w] \\ & = \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(\nu) + \frac{1}{2} \cdot \text{cyc}_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \\ & \quad \exp\left[(\Im x)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(\nu) - (\Re x)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \\ & \quad \exp\left[-(\Re x) \cdot \text{lin}'_{G_w}(-\nu)\right] \cdot \exp\left[-\text{lin}''_{G_w}(-\nu)\right] \\ & = \exp\left[(\Im x)^2 \cdot \text{lin}_{G_w}(\nu)\right] \cdot \\ & \quad \left(\exp\left[(\Re x)V' + V'' - E'_w - E''_w\right] * \exp\left[(\Re x)V' + V'' - E'_w - E''_w\right]\right). \end{aligned}$$

Since $\text{lin}_{G_w}(\nu)$ is nonnegative, all zeros of our generalized matching polynomial are real. \blacksquare

Acknowledgements: First of all, I would like to thank cordially D. Foata to have made the redaction of this article possible by inviting me to the IRMA in Strasbourg and by explaining to me his combinatorial proof of the Mehler formula. His help and support are undescrivable. I also want to express my gratitude to A. Frank for his recommendation of the beautiful book [3] (otherwise [7], chapter 3.1, would not exist), and especially to E. Triesch (without him [7] would not exist).

References

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, « Special Functions », Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 71, Cambridge University Press, 1999.
- [2] D. Foata, A combinatorial proof of the Mehler formula, *J. Combinatorial Theory Ser. A* **24** (1978), 367-376.
- [3] C. D. Godsil, « Algebraic Combinatorics », Chapman & Hall, 1993.
- [4] C. D. Godsil, Hermite polynomials and a duality relation for matchings polynomials, *Combinatorica* **1** (1981), 257-262.
- [5] O. J. Heilmann, E. H. Lieb, Theory of monomer-dimer systems, *Comm. Math. Physics* **25** (1972), 190-232.
- [6] C. Itzykson, J.-B. Zuber, Matrix integration and combinatorics of modular groups, *Comm. Math. Physics* **134** (1990), 197-207.
- [7] B. Lass, « Funktionen zählen », Diplomarbeit, 1997.
- [8] L. Lovász, « Combinatorial Problems and Exercises », Akadémiai Kiadó, 1993.
- [9] G. Viennot, « Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux », Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal, 1983.

Le polynôme de couplage multidimensionnel (*)

À P. Cartier et A. K. Zvonkin

Heilmann et Lieb ont introduit le polynôme de couplage $\mu(G,x)$ d'un graphe $G=(V,E)$. Nous prolongeons leur définition en munissant chaque sommet de G d'une forme linéaire N -dimensionnelle (ou bien d'un vecteur) et chaque arête d'une forme symétrique bilinéaire. On attache donc à tout r -couplage de G le produit des formes linéaires des sommets qui ne sont pas saturés par le couplage, multiplié par le produit des poids des r arêtes du couplage, où le poids d'une arête est la valeur de sa forme évaluée sur les deux vecteurs de ses extrémités. En multipliant par $(-1)^r$ et en sommant sur tous les couplages, nous obtenons notre polynôme de couplage N -dimensionnel. Si $N=1$, le théorème principal de l'article de Heilmann et Lieb affirme que tous les zéros de $\mu(G,x)$ sont réels. Si $N=2$, cependant, nous avons trouvé des graphes exceptionnels où il n'y a aucun zéro réel, même si chaque arête est munie du produit scalaire canonique. Toutefois, la théorie de la dualité développée dans [11] reste valable en N dimensions. Elle donne notamment une nouvelle interprétation à la transformation de Bargmann-Segal, aux diagrammes de Feynman et aux produits de Wick.

Heilmann and Lieb have introduced the matching polynomial $\mu(G,x)$ of a graph $G=(V,E)$. We extend their definition by equipping every vertex of G with an N -dimensional linear form (or a vector) and every edge with a symmetric bilinear form. To every r -matching of G we associate the product of the linear forms of the vertices not saturated by the matching, multiplied by the product of the weights of the r edges of the matching, where the weight of an edge is the value of its form evaluated on the two vectors of its ends. Multiplying by $(-1)^r$ and summing over all matchings, we get our N -dimensional matching polynomial. If $N=1$, then the Heilmann-Lieb theorem affirms that all zeros of $\mu(G,x)$ are real. If $N=2$, however, we have found exceptional graphs where there is no real zero at all, even if every edge is equipped with the canonical scalar product. Nevertheless, the duality theory developed in [11] remains valid in N dimensions. In particular, it brings a new light to the Bargmann-Segal transform, to the Feynman diagrams and to the Wick products.

1. Introduction

Soit V un ensemble fini de cardinalité n . Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple si et seulement si l'ensemble de ses arêtes E est un sous-ensemble de $\binom{V}{2}$, l'ensemble

(*) Article écrit uniquement pour cette thèse

des sous-ensembles de V de cardinalité 2. Pour de tels graphes on définit le *graphe complémentaire* par $\overline{G} := (V, \overline{E})$ avec $\overline{E} := \binom{V}{2} \setminus E$. Pour tout $r \geq 0$, on appelle *r-couplage* de G un ensemble de r arêtes tel que deux quelconques des arêtes du couplage sont non-adjacentes. Si $r = n/2$, alors le couplage est dit *parfait*.

Considérons, par ailleurs, un espace euclidien \mathbf{R} de dimension N , $\mathbf{R} = \mathbb{R}^N$, muni de son produit scalaire canonique $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ ($n = |V|$ est toujours le nombre de sommets de G). Soit e_1, \dots, e_N la base (orthonormale) canonique de \mathbf{R} avec l'aide de laquelle on interprète les polynômes et les dérivées partielles (ou ∇) de manière usuelle. De plus, soit $\langle x, y \rangle_P := \langle x, Py \rangle$, $P = P^T$ et $P > 0$, un produit scalaire supplémentaire.

Associons à chaque sommet $v \in V$ du graphe $G = (V, E)$ un vecteur $a_v \in \mathbf{R}$ et à chaque arête $\{u, v\} \in E$ le produit scalaire $\langle a_u, a_v \rangle_P$; et notons $a_P G = (a_P V, a_P E)$ ce graphe enrichi. Regardons maintenant un couplage de $a_P G$ et multiplions le produit des produits scalaires des arêtes du couplage par le produit des produits scalaires $\langle x, a_v \rangle_P$, $x \in \mathbf{R}$, des sommets de $a_P G$, qui ne sont pas saturés par le couplage. C'est un polynôme homogène de degré $n - 2r$ ($n = |V|$), si le couplage contient r arêtes. Par sommation sur tous les couplages de $a_P G$ (resp. après multiplication du polynôme homogène par $(-1)^r$) on obtient le polynôme de couplage non signé $\overline{\mu}(a_P G, x)$ (resp. le polynôme de couplage signé ou ordinaire $\mu(a_P G, x)$). Puisque tout vecteur a_v , $v \in V$, intervient, dans chaque polynôme homogène de degré $n - 2r$, précisément une fois (dans un facteur $\langle a_u, a_v \rangle_P$ si v est saturé par le couplage et dans un facteur $\langle x, a_v \rangle_P$ sinon), les polynômes $\mu(a_P G, x)$ et $\overline{\mu}(a_P G, x)$ sont linéaires en les vecteurs a_v (et égaux à zéro, s'il existe un $v \in V$ tel que $a_v = 0$). De plus, ils satisfont la relation évidente

$$\mu(a_P G, x) = (-i)^n \cdot \overline{\mu}(a_P G, i \cdot x), \quad |V| = n, \quad i = \sqrt{-1}.$$

EXEMPLE 1.1. Soit $K_n = (V, \binom{V}{2})$ le graphe complet de n sommets de sorte que le graphe complémentaire $\overline{K_n} = (V, \emptyset)$ n'a aucune arête. Associons à chaque $v \in V$ un vecteur $a_v \in \mathbf{R}$. Pour les polynômes de couplage des deux graphes enrichis complémentaires $a_P K_n$ et $\overline{a_P K_n}$, on a alors

$$\begin{aligned} \mu(\overline{a_P K_n}, x) &= \overline{\mu}(\overline{a_P K_n}, x) = \prod_{v \in V} \langle x, a_v \rangle_P; \\ \mu(a_P K_2, x) &= \langle x, a_u \rangle_P \langle x, a_v \rangle_P - \langle a_u, a_v \rangle_P, \\ \overline{\mu}(a_P K_2, x) &= \langle x, a_u \rangle_P \langle x, a_v \rangle_P + \langle a_u, a_v \rangle_P, \\ \mu(a_P K_3, x) &= \langle x, a_u \rangle_P \langle x, a_v \rangle_P \langle x, a_w \rangle_P - \langle x, a_u \rangle_P \langle a_v, a_w \rangle_P \\ &\quad - \langle x, a_v \rangle_P \langle a_u, a_w \rangle_P - \langle x, a_w \rangle_P \langle a_u, a_v \rangle_P, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

REMARQUE 1.1. En physique, le polynôme $\mu(a_P K_n, x)$ est appelé *polynôme de Wick* et noté $\Phi(x|a_1, \dots, a_n)$ ou bien : $\prod_{v \in V} \langle x, a_v \rangle_P$: (voir [3],[6],[14]).

Soient $G = (V, E)$ et $\overline{G} := (V, \overline{E})$ deux graphes complémentaires *quelconques*. Associons à chaque $v \in V$ un vecteur $a_v \in \mathbf{R}$ pour obtenir deux graphes enrichis complémentaires, à savoir $a_P G = (aV, a_P E)$ et $\overline{a_P G} = (aV, \overline{a_P E})$ (dans le cas classique unidimensionnel, on a $a_v = 1$ pour chaque $v \in V$ ainsi que $P = 1$). A priori, il n'est point clair de savoir si les polynômes de couplage $\mu(\overline{a_P G}, x)$ et $\overline{\mu}(a_P G, x)$ du graphe complémentaire $\overline{a_P G}$ sont déterminés par les polynômes de couplages $\mu(a_P G, x)$ et $\overline{\mu}(a_P G, x)$ du graphe $a_P G$ lui-même. Lovász [13, 5.18], et Godsil [7], [8] ont établi un tel résultat dans le cas unidimensionnel. Leurs démonstrations, cependant, semblent difficiles à généraliser. Toutefois, les démonstrations fournies dans [11] se généralisent presque sans aucune modification. En effet, nous démontrons que $\overline{\mu}(a_P G, x)$ est la transformée de Bargmann-Segal-Wiener de $\mu(a_P G, x)$ et $\mu(\overline{a_P G}, x)$ est la transformée de Wick de $\overline{\mu}(a_P G, x)$, c'est-à-dire

$$\overline{\mu}(\overline{a_P G}, x) = BS[\mu(a_P G, x)], \quad \mu(\overline{a_P G}, x) = : \overline{\mu}(a_P G, x) :$$

Plus précisément, nous établissons les identités

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(\overline{a_P G}, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbf{R}} \mu(a_P G, z) \cdot \mu(x_P K_n, z) \cdot e^{-\langle z, z \rangle_P / 2} \cdot d_P z \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-\langle z-x, z-x \rangle_P / 2} \cdot \mu(a_P G, z) \cdot d_P z \\ &= e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot \mu(a_P G, \nabla_P) \cdot e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \\ &= \exp[\Delta_P / 2] \cdot \mu(a_P G, x) \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \mu(\overline{a_P G}, x) &= e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot \overline{\mu}(a_P G, -\nabla_P) \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \\ &= \exp[-\Delta_P / 2] \cdot \overline{\mu}(a_P G, x), \end{aligned}$$

où

$$d_P z := \sqrt{\det(P)/(2\pi)^N} \cdot d^N z \quad (P = 2\pi \cdot Id \Rightarrow d_P z = d^N z),$$

$$\nabla_P := P^{-1} \nabla, \quad \Delta_P := \langle \nabla_P, \nabla_P \rangle_P = \langle \nabla, \nabla \rangle_{P^{-1}}.$$

REMARQUE 1.2. L'opérateur Δ_P n'est rien d'autre que la forme générale de ce que l'on appelle *opérateur elliptique de degré 2*.

Puisque l'espace des polynômes est engendré (comme espace vectoriel) par les polynômes de couplages, nos relations offrent également une panoplie de définitions possibles pour la transformation de Bargmann-Segal ou celle de Wick, et la question se pose si elles sont toutes bien connues. En fait, lors du Séminaire Lotharingien de Combinatoire 44, Cartier [2] s'est servi de la première formule intégrale

pour définir la transformation de Bargmann-Segal. Il a défini la transformation de Wick, cependant, de manière tout à fait combinatoire à l'aide de l'identité $\mu(a_P K_n, x) = : \prod_{v \in V} \langle x, a_v \rangle_P :$. Finalement, il a utilisé l'identité $\mu(a_P K_n, x) = e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot \overline{\mu(a_P K_n, -\nabla_P)} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2}$ pour définir les polynômes de Wick (i. e. d'Hermité). Dans son article [3], qui, cependant, n'aborde que le cas unidimensionnel, il a finalement proposé la deuxième formule intégrale et la deuxième formule différentielle pour définir la transformation de Bargmann-Segal (et la deuxième formule différentielle pour la transformation de Wick). Voilà pourquoi notre première formule différentielle est apparemment nouvelle en tant que possibilité supplémentaire de définir la transformation de Bargmann-Segal. Au moins, il nous semble certain que les polynômes de couplage permettent de mieux comprendre les rôles des deux transformations !

Finalement, l'importance des polynômes de couplage multidimensionnels est soulignée par le fait surprenant que les fonctions de couplage $e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \mu(\overline{a_P G}, x)$ et $e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \mu(a_P G, x)$ sont effectivement des transformées de Fourier.

EXEMPLE 1.2. Soit $V = T_1 \uplus \dots \uplus T_k$, et soient K_{t_1}, \dots, K_{t_k} des graphes complets dont l'ensemble des sommets est T_1, \dots, T_k , respectivement. Pour le polynôme de couplage du graphe enrichi $a_P K_{t_1} \uplus \dots \uplus o_P K_{t_k}$, on a l'identité évidente

$$\begin{aligned} \mu(a_P K_{t_1} \uplus \dots \uplus o_P K_{t_k}, z) &= \mu(a_P K_{t_1}, z) \cdots \mu(o_P K_{t_k}, z) \\ &= : \prod_{v \in T_1} \langle z, a_v \rangle_P : \cdots : \prod_{v \in T_k} \langle z, o_v \rangle_P : \end{aligned}$$

Le cas $x = 0$ de notre seconde identité intégrale pour la transformation de Bargmann-Segal permet alors de conclure que

$$\begin{aligned} &\overline{\mu(a_P K_{t_1} \uplus \dots \uplus o_P K_{t_k}, 0)} \\ &= \int_{\mathbf{R}} : \prod_{v \in T_1} \langle z, a_v \rangle_P : \cdots : \prod_{v \in T_k} \langle z, o_v \rangle_P : \cdot e^{-\langle z, z \rangle_P / 2} d_P z \end{aligned}$$

compte le nombre des couplages parfaits (pondérés) du graphe multiparti-complet enrichi $\overline{a_P K_{t_1} \uplus \dots \uplus o_P K_{t_k}}$. Ce résultat correspond à la formule 3) du paragraphe « Diagrams » dans le livre récent [14, chapitre 2.2] et au corollaire 8.3.2 du livre [6]. Notons que les auteurs de ces livres indentifient tous les sommets de T_1 , tous les sommets de T_2, \dots , et tous les sommets de T_k de sorte qu'ils n'ont que k sommets à considérer. Les arêtes à l'intérieur des blocs T_1, \dots, T_k deviennent ainsi des boucles (« self-lines »). Dans le résultat principal du paragraphe 8.3 du livre [6] de Glimm et Jaffe, ces boucles sont munies de produits scalaires différents comme décrit dans notre résumé et notre remarque 3.1. Par ailleurs, le cas $k = 2$ n'est rien d'autre que l'orthogonalité des polynômes de Wick puisque le nombre des couplages parfaits (pondérés) du graphe biparti-complet enrichi $\overline{a_P K_{t_1} \uplus o_P K_{t_2}}$ est égal à zéro si $t_1 \neq t_2$ et égal au permanent $\text{per}(\langle a_u, o_v \rangle_P)$ si $t_1 = t_2$.

Nous démontrons tous nos théorèmes principaux à l'aide de l'algèbre des fonctions d'ensembles fournissant des preuves très courtes et explicatives là où les cas particuliers classiques de nos résultats mentionnés dans l'exemple précédent furent établis dans les livres de Glimm, Jaffe, Malyshev et Minlos en utilisant des intégrations partielles, ce qui conduit à des démonstrations plus longues (voir, par exemple, [14], p. 39-41). Les fonctions d'ensembles permettent aussi de mieux comprendre les semi-invariants étudiés dans le calcul des probabilités ainsi que la bigèbre des partitions introduite par Lando et Zvonkin dans [10]. Nous explicitons tout ceci dans le paragraphe suivant. Le paragraphe 3, cependant, est consacré aux théorèmes de dualité commentés abondamment dans cette introduction.

Finalement, nous étudions le diviseur $\text{div}[\mu(a_P G, x)]$ dans le paragraphe 4. Nous avons conjecturé que le théorème de Heilmann et Lieb affirmant que tous les zéros de $\mu(G, x)$ sont réels (si $N = 1$) peut être prolongé à plusieurs dimensions. En fait, nous démontrons un théorème restreignant très fortement la classe des contre-exemples possibles. Bien que ce résultat puisse être raffiné en utilisant le dernier théorème de [11], il existe, en effet, de très rares graphes enrichis dont le polynôme de couplage n'a aucun zéro réel, réfutant ainsi notre conjecture. Nous en explicitons une famille et souhaitons voir avec nos collègues physiciens si de tels graphes sont importants ou même connus.

2. Outils algébriques

Soit V un ensemble fini et

$$\begin{aligned} f : 2^V &\rightarrow A \\ V' \subseteq V &\mapsto f(V') \in A \end{aligned}$$

une *fonction d'ensembles*, où A est un *anneau commutatif* (avec 1). Considérons la fonction génératrice

$$F_f(\nu) := \sum_{V' \subseteq V} f(V') \cdot \nu^{V'}, \quad \nu^\emptyset := 1,$$

à joindre aux règles de calcul suivantes ($V', V'' \subseteq V$) :

$$\nu^{V'} \cdot \nu^{V''} := \nu^{V'+V''}, \quad \text{où}$$

$$V' + V'' := \begin{cases} V' \cup V'', & \text{si } V' \cap V'' = \emptyset, \\ \dagger, & \text{si } V' \cap V'' \neq \emptyset, \end{cases} \quad \text{où}$$

$$\dagger + V' := \dagger, \quad \dagger + \dagger := \dagger, \quad \text{et} \quad \nu^\dagger := 0.$$

L'algèbre $A[V]$ de ces fonctions génératrices n'est pas une inconnue. En effet, on a l'isomorphisme

$$A[V] \simeq A[v_1, \dots, v_n] / \langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle,$$

si V contient n éléments.

REMARQUE 2.1. Si A est un corps, $A[V]$ est un anneau artinien local de longueur $2^{|V|}$.

EXEMPLE 2.1. Le produit fg de deux fonctions d'ensembles f, g est défini, pour tout $V' \subseteq V$, par

$$(fg)(V') := \sum_{V'=V'' \uplus V'''} f(V'') \cdot g(V''').$$

Il en résulte

$$F_{fg}(\nu) = F_f(\nu) \cdot F_g(\nu).$$

Pour $|V| = \infty$, soit $F(V)$ l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles finis de V . On a des projections canoniques $p_{V', V''} : A[V'] \rightarrow A[V'']$ ($V', V'' \in F(V), V' \supseteq V''$) et l'on pose

$$A[V] := \varprojlim A[V'], \quad V' \in F(V)$$

pour travailler avec des fonctions génératrices de la forme

$$F_f(\nu) = \sum_{V' \in F(V)} f(V') \cdot \nu^{V'}.$$

Soit

$$V := \sum_{v \in V} \nu^{\{v\}}$$

la fonction indicatrice des sous-ensembles de V de cardinalité 1 (l'usage double de V pour l'ensemble et pour un élément de $A[V]$ ne pourra pas être à l'origine de confusions). En multipliant la fonction génératrice V plusieurs fois par elle-même, on voit que $V^n/n!$ représente la fonction indicatrice des sous-ensembles de l'ensemble V de cardinalité n . L'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot V^n/n! = \sum_{V' \in F(V)} f(|V'|) \cdot \nu^{V'}, \quad f : \mathbb{N} \rightarrow A,$$

fournit un plongement de l'anneau $A![[V]]$ des fonctions génératrices de type exponentiel dans l'anneau $A[V]$. Ce plongement est à l'origine de (presque ?) toutes les applications de $A![[V]]$ en combinatoire, mais il nécessite l'existence d'un modèle

combinatoire infini (qui ne fait intervenir que les cardinalités). Par conséquent, $A[V]$ donne plus de flexibilité et permet un traitement algébrique, qui reflète parfaitement les opérations classiques de la combinatoire. Outre cela, $A[V]$ est approprié, par excellence, aux calculs par ordinateur.

REMARQUE 2.2. L'anneau $\mathbb{Z}![[V]]$ n'est pas noethérien, mais il contient des fonctions importantes comme $\exp(V)$ et $\log(1 + V)$.

Pour tout $t \in A$ posons $(t \cdot \nu)^{V'} := t^{|V'|} \cdot \nu^{V'}$, $V' \subseteq V$, et, par conséquent,

$$F_f(t\nu) = \sum_{\emptyset \subseteq V' \subseteq V} f(V') t^{|V'|} \nu^{V'}.$$

Il est évident que cette définition est compatible avec l'addition et la multiplication. Les cas particuliers les plus importants sont $t = -1$ et $t = 0$: $F_f(0) = F_f(0 \cdot \nu) = f(\emptyset)$.

Si $F_f(0) = 0$, alors $F_f(\nu)^n/n!$ est défini pour n'importe quel anneau A , parce qu'une partition en n sous-ensembles non-vides peut être ordonnée de $n!$ manières différentes. Voilà pourquoi $A![[V]]$ opère sur $A[V]$ par la substitution $G(F_f(\nu))$ définie pour tout $G \in A![[V]]$.

Finalement, on utilise les dérivées ∂^v pour tout $v \in V$ définies par

$$\partial^v \nu^{V'} := \begin{cases} \nu^{V'}, & \text{si } v \in V', \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formule de dérivation d'un produit

$$\partial^v [F_f(\nu) \cdot F_g(\nu)] = (\partial^v F_f(\nu)) \cdot F_g(\nu) + F_f(\nu) \cdot (\partial^v F_g(\nu))$$

est l'analogie algébrique du fait ensembliste le plus fondamental:

$$v \in V' \uplus V'' \quad \Leftrightarrow \quad v \in V' \quad \text{ou} \quad v \in V''.$$

La formule

$$\partial^v [G(F_f(\nu))] = G'(F_f(\nu)) \cdot \partial^v F_f(\nu), \quad G \in A![[V]],$$

en découle immédiatement.

REMARQUE 2.3. L'isomorphisme $A[V] \simeq A[v_1, \dots, v_n]/\langle v_1^2, \dots, v_n^2 \rangle$ ne fait pas correspondre ∂^v à $\partial/\partial v_i$, mais à $v_i \partial/\partial v_i$. La dérivée partielle $\partial/\partial v_i$ n'a point d'analogie dans $A[V]$.

EXEMPLE 2.2. (La bigèbre des partitions)

Soit V un ensemble fini de cardinalité n . Lando et Zvonkin [10] ont introduit et étudié la bigèbre $\mathfrak{B}(V)$ appelée *bigèbre des partitions*. Il s'agit d'associer à chaque $\emptyset \subset V' \subseteq V$ une variable notée (V') . En tant qu'algèbre, $\mathfrak{B}(V)$ est alors l'algèbre polynomiale commutative engendrée (sur \mathbb{Z}) par les $2^n - 1$ variables (V') , où $e := (\emptyset)$ peut être considéré comme élément d'unité. Par ailleurs, $\mathfrak{B}(V)$ est graduée en définissant l'ordre de la variable (V') comme étant $|V'|$. En ce qui concerne la structure d'algèbre, la comultiplication μ est un homomorphisme, que nous définissons en posant

$$(V')_1 := (V') \otimes e, \quad (V')_2 := e \otimes (V'),$$

$$\mu((V')) := (V')_1 + (V')_2 + \sum_{\emptyset \subset V'' \subset V'} (V'')_1 \cdot (V' \setminus V'')_2$$

pour tout $\emptyset \subset V' \subseteq V$. Un élément $b \in \mathfrak{B}(V)$ est appelé *primitif* si et seulement si $\mu(b) = b_1 + b_2 = b \otimes e + e \otimes b$. Par exemple, $(\{v\})$ est primitif pour tout $v \in V$.

Dans ce contexte, il est fort utile de considérer les fonctions génératrices

$$1 + F_V(\nu) := (\emptyset) \cdot 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} (V') \cdot \nu^{V'},$$

$$[1 + F_{V_1}(\nu)] := [1 + F_V(\nu)] \otimes e, \quad [1 + F_{V_2}(\nu)] := e \otimes [1 + F_V(\nu)].$$

On obtient ainsi une définition plus simple de la comultiplication

$$\mu[1 + F_V(\nu)] = [1 + F_{V_1}(\nu)] \cdot [1 + F_{V_2}(\nu)],$$

permettant de conclure que

$$\begin{aligned} \mu\left(\log[1 + F_V(\nu)]\right) &= \log\left(\mu[1 + F_V(\nu)]\right) = \log\left([1 + F_{V_1}(\nu)] \cdot [1 + F_{V_2}(\nu)]\right) \\ &= \log[1 + F_{V_1}(\nu)] + \log[1 + F_{V_2}(\nu)]. \end{aligned}$$

Autrement dit, chaque coefficient de $\log[1 + F_V(\nu)]$ est un élément primitif de la bigèbre $\mathfrak{B}(V)$. Ce résultat n'est rien d'autre que le théorème principal du chapitre 4.3.7 du livre [10].

EXEMPLE 2.3. (Semi-invariants)

Soit V un ensemble fini de cardinalité n . Associons à chaque $v \in V$ une variable aléatoire ξ_v , où des coïncidences $\xi_u = \xi_v$ pour $u \neq v$ ne sont pas interdits. En fait, ils sont même désirables si l'on veut calculer des moments supérieurs comme nous verrons tout de suite. Posons

$$\xi^V := \sum_{v \in V} \xi_v \cdot \nu^{\{v\}} \quad \Rightarrow \quad \exp[\xi^V] = 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \left(\prod_{v \in V'} \xi_v \right) \cdot \nu^{V'}$$

et définissons

$$1 + M_\xi(\nu) := \langle \exp[\xi V] \rangle := \mathbb{E}(\exp[\xi V]) = 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \mathbb{E}\left(\prod_{v \in V'} \xi_v\right) \cdot \nu^{V'}$$

pour calculer les espérances mathématiques appelés *moments*. Évidemment, nous supposons qu'ils sont finis. Nous définissons les *semi-invariants* ou *cumulants* comme étant les coefficients de

$$S_\xi(\nu) := \log[1 + M_\xi(\nu)]$$

(voir [4, chapitre 13] ou [16, chapitre II.12]). Le lecteur familier avec la théorie verra facilement l'équivalence de notre définition avec la sienne. Par ailleurs, nos outils algébriques permettent de déduire quelques autres relations entre les moments et les semi-invariants comme par exemple

$$1 + M_\xi(\nu) = \exp[S_\xi(\nu)], \quad [1 + M_\xi(\nu)] \cdot \partial^v S_\xi(\nu) = \partial^v M_\xi(\nu),$$

où la toute dernière relation est particulièrement utile pour des calculs rapides par ordinateur. Nous ne l'avons pas trouvée dans la littérature.

Soit $V = T_1 \uplus \dots \uplus T_k$. Posons $\xi_{T_i} := \prod_{v \in T_i} \xi_v$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et calculons tous les moments de la famille $\{\xi_{T_i}\}$, $i = 1, \dots, k$, à l'aide des semi-invariants de la famille $\{\xi_v\}$, $v \in V$. Selon la formule $1 + M_\xi(\nu) = \exp[S_\xi(\nu)]$, il s'agit de sommer sur toutes les partitions de V . Chacune d'entre elles se divise en plusieurs *composantes connexes* par rapport à la partition $V = T_1 \uplus \dots \uplus T_k$, c'est-à-dire elle définit une partition de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. Par conséquent, il faut sommer sur toutes les partitions $\{a_1, \dots, o_1\} \uplus \dots \uplus \{a_l, \dots, o_l\} = \{1, \dots, k\}$, où la contribution du bloc $\{a_1, \dots, o_1\}$, par exemple, est la somme sur toutes les partitions de l'ensemble $B_1 := T_{a_1} \cup \dots \cup T_{o_1}$ qui sont *connexes* par rapport à la partition $B_1 = T_{a_1} \uplus \dots \uplus T_{o_1}$. La contribution du bloc $\{a_1, \dots, o_1\}$, cependant, n'est rien d'autre qu'un des semi-invariants de la famille $\{\xi_{T_i}\}$, $i = 1, \dots, k$ (selon la formule $1 + M_\xi(\nu) = \exp[S_\xi(\nu)]$ appliquée à l'ensemble $\{1, \dots, k\}$). Autrement dit, nous avons établi le fait que les semi-invariants de la famille $\{\xi_{T_i}\}$ peuvent être calculés à l'aide des semi-invariants de la famille $\{\xi_v\}$ en sommant « sur toutes les partitions connexes ». Ce résultat fut démontré dans [14], p. 30-32, par induction et plusieurs calculs.

Pour chaque $\emptyset \subset V' \subseteq V$, introduisons maintenant les *polynômes de Wick* $:\left(\prod_{v \in V'} \xi_v\right):$ en posant

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} :\left(\prod_{v \in V'} \xi_v\right): \cdot \nu^{V'} &:= : \exp[\xi V] : := \exp[\xi V - S_\xi(\nu)] \\ &= \frac{\exp[\xi V]}{1 + M_\xi(\nu)} = \frac{\exp[\xi V]}{\langle \exp[\xi V] \rangle} \end{aligned}$$

(voir [3, chapitre 3.7] et [14], p. 37). C'est sans doute le leitmotif de tout cet article de choisir deux fonctions d'ensembles E_ξ et \overline{E}_ξ telles que

$$E_\xi + \overline{E}_\xi = S_\xi(\nu).$$

La linéarité de l'espérance mathématique implique alors

$$\begin{aligned} \langle \exp[\xi V - E_\xi] \rangle &= \langle \exp[\xi V] \rangle \cdot \exp[-E_\xi] = \exp[S_\xi(\nu)] \cdot \exp[-E_\xi] \\ &= \exp[\overline{E}_\xi]. \end{aligned}$$

Supposons finalement que le vecteur $\{\xi_v\}$ ($v \in V$) suit une loi gaussienne avec $\langle \xi_v \rangle = 0$ pour tout $v \in V$ de sorte que la fonction d'ensembles $S_\xi(\nu)$ vaut zéro sauf sur les sous-ensembles de V de cardinalité deux. Attachons donc à chaque arête $\{u, v\}$ du graphe complet $K_n = (V, \binom{V}{2})$ le poids $\langle \xi_u \xi_v \rangle$ et choisissons une partition $E \uplus \overline{E} = \binom{V}{2}$ telle que $G = (V, E)$. En posant

$$E_\xi := \sum_{\{u,v\} \in E} \langle \xi_u \xi_v \rangle \cdot \nu^{\{u,v\}}, \quad \overline{E}_\xi := \sum_{\{u,v\} \in \overline{E}} \langle \xi_u \xi_v \rangle \cdot \nu^{\{u,v\}}$$

on a effectivement $E_\xi + \overline{E}_\xi = S_\xi(\nu)$. Si $E = \emptyset$, alors notre identité précédente implique que $\langle \prod_{v \in V} \xi_v \rangle$ compte le nombre des couplages parfaits du graphe enrichi $K_n = (V, \binom{V}{2})$. Si E est l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités sont dans le même bloc de la partition $V = T_1 \uplus \dots \uplus T_k$, alors $\langle \exp[\xi V - E_\xi] \rangle = \exp[\overline{E}_\xi]$ implique que $\langle : \xi_{T_1} : \dots : \xi_{T_k} : \rangle$ compte le nombre des couplages parfaits du graphe multiparti-complet enrichi $\overline{G} = (V, \overline{E})$ (voir notre exemple 1.2). Ces deux résultats ne sont rien d'autre que les formules 1) et 3) du paragraphe « Diagrams » dans [14, chapitre 2.2], respectivement.

Dans la suite de cet article, nous n'adhérons plus à la vision probabiliste, et nous « remplaçons la matrice des variances-covariances par une matrice de formes symétriques bilinéaires ».

3. Polynômes de couplage et dualité

Soient $a_P G = (aV, a_P E)$ et $\overline{a_P G} = (aV, \overline{a_P E})$ deux graphes enrichis complémentaires (voir l'introduction). Maintenant nous pouvons définir les fonctions d'ensembles

$$a_P E := \sum_{\{u,v\} \in E} \langle a_u, a_v \rangle_P \cdot \nu^{\{u,v\}}, \quad \overline{a_P E} := \sum_{\{u,v\} \in \overline{E}} \langle a_u, a_v \rangle_P \cdot \nu^{\{u,v\}}.$$

Il faut faire attention que

$$aV := \sum_{v \in V} a_v \cdot \nu^{\{v\}}$$

ne correspond pas à une fonction d'ensembles au sens propre du terme, parce que \mathbf{R} n'est pas un anneau, mais cette difficulté disparaît sitôt que l'on a des produits scalaires comme

$$\langle x, aV \rangle_P = \sum_{v \in V} \langle x, a_v \rangle_P \cdot \nu^{\{v\}}, \quad \langle aV, aV \rangle_P / 2 = \sum_{\{u,v\} \in \binom{V}{2}} \langle a_u, a_v \rangle_P \cdot \nu^{\{u,v\}}$$

($x \in \mathbf{R}$). L'identité suivante est à l'origine de tous les résultats de ce paragraphe.

LEMME FONDAMENTAL. *On a*

$$\mathbf{a}_P \mathbf{E} + \overline{\mathbf{a}_P \mathbf{E}} = \langle \mathbf{aV}, \mathbf{aV} \rangle_P / 2. \quad \blacksquare$$

Pour $\emptyset \subset V' \subseteq V$, notons $a_P G[V']$ le sous-graphe enrichi de $a_P G$ engendré par V' : c'est le graphe dont les sommets sont les éléments de V' (munis des vecteurs a_v , $v \in V'$) et dont les arêtes sont les arêtes de $a_P G$ ayant leurs deux extrémités dans V' . Alors $\exp[a_P E]$ compte, pour chaque $V' \subseteq V$, le nombre des couplages parfaits du graphe enrichi $a_P G[V']$. Voilà pourquoi la proposition suivante est une conséquence immédiate des définitions des polynômes de couplage (voir l'introduction).

PROPOSITION 3.1. *On a*

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \mu(a_P G[V'], x) \cdot v^{V'} = \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E],$$

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \bar{\mu}(a_P G[V'], x) \cdot v^{V'} = \exp[\langle x, aV \rangle_P + a_P E]. \quad \blacksquare$$

Les fonctions génératrices deviennent des fonctions génératrices ordinaires de type exponentiel si et seulement s'il existe un vecteur $a \in \mathbf{R}$ tel que $a_v = a \forall v \in V$ et $G = K_\infty$ (ou $G = \overline{K_\infty}$).

PROPOSITION 3.2. *On a*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_P K_n, x) \cdot V^n / n! = \exp[\langle x, a \rangle_P \cdot V - \langle a, a \rangle_P \cdot V^2 / 2],$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(a_P K_n, x) \cdot V^n / n! = \exp[\langle x, a \rangle_P \cdot V + \langle a, a \rangle_P \cdot V^2 / 2]. \quad \blacksquare$$

Commençons par démontrer l'analogie N -dimensionnel du théorème 1.1 de [7], chapitre 1. C'est d'un cas très particulier dudit théorème que l'on s'est servi dans [17], chapitre 1.1.15, pour montrer l'utilité des fonctions génératrices ordinaires.

PROPOSITION 3.3. On a

- a) $\mu(a_P G' \uplus b_P G'', x) = \mu(a_P G', x) \cdot \mu(b_P G'', x),$
 $a_P G' = (aV', a_P E'), \quad b_P G'' = (bV'', b_P E'');$
- b) $\mu(a_P G, x) = \mu(a_P G \setminus e, x) - \langle a_u, a_v \rangle_P \cdot \mu(a_P G \setminus uv, x), \quad e = \{u, v\} \in E;$
- c) $\mu(a_P G, x) = \langle x, a_v \rangle_P \cdot \mu(a_P G \setminus v, x)$
 $- \sum_{\{u, v\} \in E} \langle a_u, a_v \rangle_P \cdot \mu(a_P G \setminus uv, x), \quad v \in V;$
- d) $\frac{\partial}{\partial x_i} \mu(a_P G, x) = \sum_{v \in V} \langle e_i, a_v \rangle_P \cdot \mu(a_P G \setminus v, x),$
 $\nabla_P \mu(a_P G, x) = \sum_{v \in V} a_v \cdot \mu(a_P G \setminus v, x),$
 $\Delta_P \mu(a_P G, x) = \sum_{u \neq v \in V} \langle a_u, a_v \rangle_P \cdot \mu(a_P G \setminus uv, x).$

L'analogie pour $\bar{\mu}(a_P G, x)$ s'obtient en remplaçant tous les signes $-$ par $+$.

Démonstration.

- a) $\exp[\langle x, aV' + bV'' \rangle_P - a_P E' - b_P E'']$
 $= \exp[\langle x, aV' \rangle_P - a_P E'] \cdot \exp[\langle x, bV'' \rangle_P - b_P E''];$
- b) $\exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E]$
 $= \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P (E \setminus e)] \cdot \exp[-\langle a_u, a_v \rangle_P uv]$
 $= \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P (E \setminus e)] \cdot (1 - \langle a_u, a_v \rangle_P uv)$
 $= \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P (E \setminus e)] - \langle a_u, a_v \rangle_P uv \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P (E \setminus e)];$
- c) $\partial^v \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E]$
 $= \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] \cdot \partial^v (\langle x, aV \rangle_P - a_P E)$
 $= \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] \cdot (\langle x, a_v \rangle_P v - \sum_{\{u, v\} \in E} \langle a_u, a_v \rangle_P uv)$
 $= \langle x, a_v \rangle_P v \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] - \sum_{\{u, v\} \in E} \langle a_u, a_v \rangle_P uv \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E];$
- d) $\frac{\partial}{\partial x_i} \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] = \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \langle x, aV \rangle_P$
 $= \langle e_i, aV \rangle_P \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E],$
 $\nabla_P \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] = aV \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E],$
 $\Delta_P \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] = \langle aV, aV \rangle_P \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E]. \quad \blacksquare$

Quittons les récursions pour cheminer dans le jardin des théorèmes de la dualité :

THÉORÈME DE LA DUALITÉ POUR LES POLYNÔMES DE COUPLAGE (Δ).

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\overline{a_P G}, x) &= \exp[\Delta_P/2] \cdot \mu(a_P G, x), \\ \mu(\overline{a_P G}, x) &= \exp[-\Delta_P/2] \cdot \bar{\mu}(a_P G, x).\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant la dernière identité de la démonstration de la proposition précédente, on obtient effectivement

$$\begin{aligned}\exp[\langle x, aV \rangle_P + \overline{a_P E}] &= \exp[\langle aV, aV \rangle_P/2] \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E] \\ &= \exp[\Delta_P/2] \cdot \exp[\langle x, aV \rangle_P - a_P E].\end{aligned}$$

L'opérateur $\exp[-\Delta_P/2]$ est l'inverse de $\exp[\Delta_P/2]$. ■

THÉORÈME DE LA DUALITÉ POUR LES POLYNÔMES DE COUPLAGE (∇).

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\overline{a_P G}, x) &= e^{-\langle x, x \rangle_P/2} \cdot \mu(a_P G, \nabla_P) \cdot e^{\langle x, x \rangle_P/2}, \\ \mu(\overline{a_P G}, x) &= e^{\langle x, x \rangle_P/2} \cdot \bar{\mu}(a_P G, -\nabla_P) \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P/2}.\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème de Taylor on a

$$f(x + a) = \exp[\langle \nabla, a \rangle] \cdot f(x) = \exp[\langle \nabla_P, a \rangle_P] \cdot f(x)$$

pour des vecteurs x, a et une série formelle f . Il s'ensuit

$$\begin{aligned}\exp[-\langle x, x \rangle_P/2] \cdot \exp[\langle \nabla_P, aV \rangle_P - a_P E] \cdot \exp[\langle x, x \rangle_P/2] \\ = \exp[-\langle x, x \rangle_P/2] \cdot \exp[-a_P E] \cdot \exp[\langle x + aV, x + aV \rangle_P/2] \\ = \exp[\langle x, aV \rangle_P + \overline{a_P E}].\end{aligned}$$

La deuxième identité est démontrée de la même façon. ■

EXEMPLE 3.1. Soient S et T deux ensembles disjoints. Un graphe biparti $G = (S, T; E)$ est dit simple si et seulement si l'ensemble de ses arêtes E est un sous-ensemble de $S \times T$. Pour de tels graphes on définit le graphe biparti complémentaire par $\overline{G} := (S, T; \overline{E})$ avec $\overline{E} := (S \times T) \setminus E$. Posons $N = 2$, $A = \mathbb{R}[s, t]$ et attachons à chaque $s' \in S$ (resp. $t' \in T$) le vecteur $a_{s'} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp. $a_{t'} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$). Pour $x = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ on a alors

$$\begin{aligned}P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle a_{s'}, a_{s'} \rangle_P = \langle a_{t'}, a_{t'} \rangle_P = 0, \quad \langle a_{s'}, a_{t'} \rangle_P = 1, \\ \langle x, a_{s'} \rangle_P = s, \quad \langle x, a_{t'} \rangle_P = t, \quad \langle x, x \rangle_P/2 = st, \quad \nabla_P = \begin{pmatrix} d/dt \\ d/ds \end{pmatrix}, \quad \Delta_P/2 = \frac{d}{ds} \frac{d}{dt}.\end{aligned}$$

Voilà pourquoi les polynômes de couplages $\mu(a_P G, x)$ et $\bar{\mu}(a_P G, x)$ du graphe enrichi $a_P G$ ne sont rien d'autre que les *polynômes des tours symétriques* $\rho(G, s, t)$ et $\bar{\rho}(G, s, t)$ introduits dans [12]. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}\mu(a_P G, x) &= \sum_{r=0}^{\min(|S|, |T|)} (-1)^r p(G, r) \cdot s^{|S|-r} t^{|T|-r} =: \rho(G, s, t), \\ \bar{\mu}(a_P G, x) &= \sum_{r=0}^{\min(|S|, |T|)} p(G, r) \cdot s^{|S|-r} t^{|T|-r} =: \bar{\rho}(G, s, t),\end{aligned}$$

si $p(G, r)$ désigne le nombre des r -couplages du graphe biparti $G = (S, T; E)$. Puisque $\langle a_{s'}, a_{s'} \rangle_P = \langle a_{t'}, a_{t'} \rangle_P = 0$ et $\langle a_{s'}, a_{t'} \rangle_P = 1$ pour tout $s' \in S$ et $t' \in T$, le graphe enrichi complémentaire $\overline{a_P G}$ correspond bien au graphe biparti complémentaire $\bar{G} = (S, T; \bar{E})$ et l'on a

$$\bar{\mu}(\overline{a_P G}, x) = \bar{\rho}(\bar{G}, s, t), \quad \mu(\overline{a_P G}, x) = \rho(\bar{G}, s, t).$$

Par conséquent, nos deux théorèmes de la dualité pour les polynômes de couplage impliquent

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\bar{G}, s, t) &= \exp\left[\frac{d}{ds} \frac{d}{dt}\right] \cdot \rho(G, s, t) = e^{-st} \cdot \rho\left(G, \frac{d}{dt}, \frac{d}{ds}\right) \cdot e^{st}, \\ \rho(\bar{G}, s, t) &= \exp\left[-\frac{d}{ds} \frac{d}{dt}\right] \cdot \bar{\rho}(G, s, t) = e^{st} \cdot \bar{\rho}\left(G, -\frac{d}{dt}, -\frac{d}{ds}\right) \cdot e^{-st}.\end{aligned}$$

Ces identités ne sont rien d'autre que les théorèmes 3.1 et 3.2 de [12].

Continuons notre promenade dans le jardin des théorèmes de la dualité :

THÉORÈME DE LA DUALITÉ POUR LES POLYNÔMES DE COUPLAGE (f).

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\overline{a_P G}, x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-\langle z-x, z-x \rangle_P / 2} \cdot \mu(a_P G, z) \cdot d_P z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbf{R}} \mu(a_P G, z) \cdot \mu(x_P K_n, z) \cdot e^{-\langle z, z \rangle_P / 2} \cdot d_P z.\end{aligned}$$

Démonstration. Utilisant l'invariance de l'intégrale par rapport aux translations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbf{R}} \exp[-\langle z-x, z-x \rangle_P / 2] \cdot \exp[\langle z, aV \rangle_P - a_P E] \cdot d_P z \\ &= \int_{\mathbf{R}} \exp[-\langle s, s \rangle_P / 2] \cdot \exp[\langle s+x, aV \rangle_P - a_P E] \cdot d_P s \\ &= \exp[\langle x, aV \rangle_P + \overline{a_P E}] \cdot \int_{\mathbf{R}} \exp[-\langle s-aV, s-aV \rangle_P / 2] \cdot d_P s \\ &= \exp[\langle x, aV \rangle_P + \overline{a_P E}] \cdot \int_{\mathbf{R}} \exp[-\langle t, t \rangle_P / 2] \cdot d_P t \\ &= \exp[\langle x, aV \rangle_P + \overline{a_P E}].\end{aligned}$$

Posons $V := 1$, $x := z$ et $a := x$ dans la proposition 3.2 :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_P K_n, z) / n! = \exp[\langle z, x \rangle_P - \langle x, x \rangle_P / 2].$$

Il en résulte ($\mu(x_P K_0, z) := 1$) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} e^{-\langle z-x, z-x \rangle_P / 2} \cdot \mu(a_P G, z) \cdot d_P z \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mu(a_P G, z) \cdot \exp[\langle z, x \rangle_P - \langle x, x \rangle_P / 2] \cdot e^{-\langle z, z \rangle_P / 2} \cdot d_P z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbf{R}} \mu(a_P G, z) \cdot \mu(x_P K_n, z) \cdot e^{-\langle z, z \rangle_P / 2} \cdot d_P z. \blacksquare \end{aligned}$$

Puisque l'espace des polynômes est engendré (comme espace vectoriel) par les polynômes de couplages, on tire des trois théorèmes précédents le corollaire suivant (pour l'identité $\mu(x_P K_n, z) = \Phi(z|x, \dots, x) = : \langle z, x \rangle_P^n$: voir notre remarque 1.1).

COROLLAIRE 3.1. *Soit $f(x)$ un polynôme quelconque, alors on a pour la transformée de Bargmann-Segal $BS[f(x)]$ et pour la transformée de Wick $:f(x):$ les identités suivantes*

$$\begin{aligned} BS[f(x)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbf{R}} f(z) : \langle z, x \rangle_P^n : e^{-\langle z, z \rangle_P / 2} d_P z \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-\langle z-x, z-x \rangle_P / 2} \cdot f(z) \cdot d_P z \\ &= e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot f(\nabla_P) \cdot e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \\ &= \exp[\Delta_P / 2] \cdot f(x), \\ :f(x): &= e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot f(-\nabla_P) \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \\ &= \exp[-\Delta_P / 2] \cdot f(x). \blacksquare \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.2. Évidemment, il n'est pas nécessaire de se restreindre aux polynômes. Posons donc $f(x) := \sqrt{\det(Q)} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_Q / 2}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ est une deuxième forme. Le corollaire précédent permet alors de conclure que

$$\begin{aligned} BS[\sqrt{\det(Q)} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_Q / 2}] &= \sqrt{\det(Q)} \cdot \exp[\Delta_P / 2] \cdot e^{-\langle x, x \rangle_Q / 2} \\ &= \sqrt{\det(Q)} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot \exp[\Delta_{PQ^{-1}P} / 2] \cdot e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \\ &= \sqrt{\det(R)} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_R / 2}, \quad R := (P^{-1} + Q^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
 & BS[\sqrt{\det(Q)} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_Q / 2}] \\
 &= \sqrt{\det(Q)} \cdot \int_{\mathbf{R}} e^{-\langle z-x, z-x \rangle_P / 2} \cdot e^{-\langle z, z \rangle_Q / 2} \cdot d_P z \\
 &= \sqrt{\det(Q)} \cdot \int_{\mathbf{R}} \exp[-\langle z, z \rangle_{P+Q} / 2 + \langle z, x \rangle_P - \langle x, x \rangle_P / 2] \cdot d_P z \\
 &= \sqrt{\det(Q)} \cdot \exp[-\langle x, x \rangle_{P-P(P+Q)^{-1}P} / 2] \cdot \\
 &\quad \sqrt{\frac{\det(P)}{\det(P+Q)}} \cdot \int_{\mathbf{R}} \exp[-\langle z - (P+Q)^{-1}Px, z - (P+Q)^{-1}Px \rangle_{P+Q} / 2] \cdot d_{P+Q} z \\
 &= \sqrt{\frac{\det(P)\det(Q)}{\det(P+Q)}} \cdot \exp[-\langle x, x \rangle_{P-P(P+Q)^{-1}P} / 2] \cdot \int_{\mathbf{R}} \exp[-\langle t, t \rangle_{P+Q} / 2] \cdot d_{P+Q} t \\
 &= \sqrt{\det(P^{-1} + Q^{-1})^{-1}} \cdot \exp[-\langle x, x \rangle_{(P^{-1}+Q^{-1})^{-1}} / 2],
 \end{aligned}$$

parce que $P - P(P+Q)^{-1}P = P(P+Q)^{-1}Q = (Q^{-1}(P+Q)P^{-1})^{-1} = (P^{-1} + Q^{-1})^{-1}$. L'identité $\sqrt{\det(Q)} \cdot \exp[\Delta_P / 2] \cdot e^{-\langle x, x \rangle_Q / 2} = \sqrt{\det(R)} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_R / 2}$ fut imaginée par Mehta (voir [15], p. 87-89, pour une démonstration différente).

Par ailleurs, les polynômes se décomposent en parties homogènes, qu'il ne faut connaître que sur l'ellipsoïde S_P^{N-1} donné par $\langle x, x \rangle_P = 1$ pour les connaître partout. Alors, soit f homogène de degré n , i. e. $f(r \cdot \omega) = r^n \cdot f(\omega)$, $\omega \in S_P^{N-1}$, et soit $d_P \omega$ tel que $d_P x = c(N) \cdot r^{N-1} \cdot dr \cdot d_P \omega$ et normalisé par $\int_{S_P^{N-1}} d_P \omega = 1$. Il en résulte:

COROLLAIRE 3.2. *Sans restreindre la généralité, soit n pair. Alors,*

$$\begin{aligned}
 & N \cdot (N+2) \cdot (N+4) \cdot \dots \cdot (N+n-2) \cdot \int_{S_P^{N-1}} f(\omega) \cdot d_P \omega \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot d_P x \\
 &= f(\nabla_P) \cdot e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \Big|_{x=0} \\
 &= \exp[\Delta_P / 2] \cdot f(x) \Big|_{x=0},
 \end{aligned}$$

et si $f(x) = \mu(\overline{a_P K_n}, x)$, le résultat est le nombre $\overline{\mu}(a_P K_n, 0)$ des couplages parfaits de $a_P K_n$. ■

Les identités de notre corollaire précédent sont des conséquences simples des résultats de l'article récent [5]. Toutefois, elles ne se trouvent pas dans cette note

de Folland. De plus, il nous semble que nos démonstrations sont plus courtes, bien que Folland ait utilisé des idées de Bargmann et Nelson pour simplifier les preuves de l'article [1] portant sur le même sujet.

EXEMPLE 3.3. On a

$$\int_{S^{N-1}} \langle x, \alpha \rangle^{2p} \cdot d\omega = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{N(N+2)(N+4) \dots (N+2p-2)} \cdot \langle \alpha, \alpha \rangle^p,$$

parce que chaque couplage parfait du graphe αK_{2p} contient p arêtes (auxquelles on avait affecté le poids $\langle \alpha, \alpha \rangle$), et le nombre des couplages parfaits de K_{2p} s'élève à $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)$ (voir [18], théorème 3.2). On a aussi

$$\int_{S^{N-1}} \langle x, \alpha_1 \rangle^2 \langle x, \alpha_2 \rangle^2 \cdot d\omega = \frac{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + 2 \cdot \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle^2}{N \cdot (N+2)},$$

parce que le graphe complet $\overline{\overline{\alpha_1 K_2}} \uplus \overline{\overline{\alpha_2 K_2}}$ contient trois couplages parfaits: deux de poids $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et un de poids $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle$ (voir [18], 6.5).

EXEMPLE 3.4. Par définition, un polynôme $f(x)$ est *harmonique* si et seulement si $\Delta_P f(x) = 0$. Soit $f(x)$ un polynôme homogène de degré $n > 0$ qui est harmonique. Le corollaire précédent permet alors de conclure que

$$N(N+2) \dots (N+n-2) \int_{S_P^{N-1}} f(\omega) \cdot d_P \omega = \exp[\Delta_P/2] \cdot f(x) \Big|_{x=0} = f(0) = 0.$$

Comme chaque polynôme $f(x)$ est harmonique si et seulement si toutes ses composantes homogènes sont harmoniques, on en tire l'identité classique

$$\int_{S_P^{N-1}} f(\omega) \cdot d_P \omega = \int_{S_P^{N-1}} f(0) \cdot d_P \omega = f(0)$$

pour tout polynôme harmonique.

Continuons notre étude des polynômes de couplage.

FORMULE POUR LE PRODUIT SCALAIRE. *Pour deux graphes enrichis $a_P G' = (aV', a_P E')$ et $b_P G'' = (bV'', b_P E'')$ on a*

$$\begin{aligned} \overline{\mu(a_P G' \uplus b_P G''), 0} &= \int_{\mathbf{R}} \mu(a_P G', x) \cdot \mu(b_P G'', x) \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot d_P x \\ &= \overline{\mu(a_P G', \nabla_P), \mu(b_P G'', x)} \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Démonstration. La première identité est évidente d'après le cas $x = 0$ du théorème précédent. Pour établir la seconde identité, nous utilisons de nouveau la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} & \exp[\langle \nabla_P, aV' \rangle_P + \overline{a_P E'}] \cdot \exp[\langle x, bV'' \rangle_P + \overline{b_P E''}] \Big|_{x=0} \\ &= \exp[\overline{a_P E'}] \cdot \exp[\langle x + aV', bV'' \rangle_P + \overline{b_P E''}] \Big|_{x=0} \\ &= \exp[\langle aV', bV'' \rangle_P + \overline{a_P E'} + \overline{b_P E''}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

COROLLAIRE 3.3. Soient $f(x)$ (resp. $g(x)$) deux polynômes et $\overline{f}(x)$ (resp. $\overline{g}(x)$) leurs transformées de Bargmann-Segal définies à l'aide d'une des formules du corollaire 3.1. Alors on a

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) \cdot g(x) \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot d_P x = \overline{f}(\nabla_P) \cdot \overline{g}(x) \Big|_{x=0}. \quad \blacksquare$$

Le théorème de la dualité (f) implique

$$\mu(\overline{a_P G}, y) = (-i)^n \cdot \overline{\mu(a_P G, yi)} = (-i)^n \cdot \int_{\mathbf{R}} e^{-\langle x - yi, x - yi \rangle_P / 2} \cdot \mu(a_P G, x) \cdot d_P x.$$

($|V| = n, i = \sqrt{-1}$). Il en résulte le théorème suivant.

THÉORÈME DE LA DUALITÉ POUR LE POLYNÔME DE COUPLAGES (\mathbb{C}).

$$e^{-\langle y, y \rangle_P / 2} \mu(\overline{a_P G}, y) = (-i)^n \cdot \int_{\mathbf{R}} e^{i\langle x, y \rangle_P} \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \mu(a_P G, x) \cdot d_P x. \quad \blacksquare$$

Puisque la fonction de couplages $e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \mu(a_P G, x)$ a la même parité que n , on en tire le dernier théorème de ce paragraphe.

THÉORÈME DE LA DUALITÉ POUR LE POLYNÔME DE COUPLAGES (\mathbb{R}).

$$\begin{aligned} & e^{-\langle y, y \rangle_P / 2} \mu(\overline{a_P G}, y) \cdot (-1)^{n/2} \\ &= \int_{\mathbf{R}} \cos \langle x, y \rangle_P \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \mu(a_P G, x) \cdot d_P x, \quad n \text{ pair,} \\ & e^{-\langle y, y \rangle_P / 2} \mu(\overline{a_P G}, y) \cdot (-1)^{(n-1)/2} \\ &= \int_{\mathbf{R}} \sin \langle x, y \rangle_P \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \mu(a_P G, x) \cdot d_P x, \quad n \text{ impair.} \end{aligned}$$

En d'autres termes, les fonctions de couplages de $\overline{a_P G}$ et de $a_P G$ sont, au signe près, des transformées de Fourier réelles l'une de l'autre. \blacksquare

REMARQUE 3.1. Comme tous les théorèmes de la dualité ne reposent que sur le lemme fondamental $a_P E + \overline{a_P E} = \langle aV, aV \rangle_P / 2$, il est naturel d'associer à chaque $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ deux produits scalaires $Q(\{u, v\})$ et $\overline{Q}(\{u, v\})$ tels que

$$\langle a_u, a_v \rangle_{Q(\{u, v\})} + \langle a_u, a_v \rangle_{\overline{Q}(\{u, v\})} = \langle a_u, a_v \rangle_P$$

ou juste deux nombres $q(\{u, v\})$ et $\overline{q}(\{u, v\})$ tels que $q(\{u, v\}) + \overline{q}(\{u, v\}) = \langle a_u, a_v \rangle_P$. Nous avons préféré le contexte classique du graphe complémentaire parce qu'il est suffisant pour la plupart des applications.

Une autre manière de prolonger nos résultats consiste à remplacer les coefficients réels de nos vecteurs $a_v, v \in V$, par des coefficients complexes, par exemple. De plus, on peut admettre des coefficients complexes pour la matrice P à la condition qu'elle reste *symétrique*. Autrement dit, on a alors $P = R + i \cdot Q$ ($i = \sqrt{-1}$) avec des matrices symétriques réelles R et Q . On voit ainsi que les deux identités des théorèmes de la dualité ∇ et Δ se réduisent l'une à l'autre en remplaçant P par $-P$. Pour assurer la convergence des intégrales (réelles !), cependant, il est indispensable que $\Re P = R > 0$, i. e. la matrice R doit correspondre à un produit scalaire.

4. Les zéros de $\mu(\mathbf{a}_P \mathbf{G}, \mathbf{x})$

Admettons des poids $w_{uv} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dans [9], il fallait $w_{uv} > 0$) pour chaque arête $\{u, v\} \in E$, de sorte qu'elle contribue le facteur $w_{uv} \langle a_u, a_v \rangle_P$ (comme arête d'un couplage) au lieu de $\langle a_u, a_v \rangle_P$ et notons $a_P G_w = (aV, a_P E_w)$ le graphe avec ces poids.

Soit $\text{div}[\mu(a_P G_w, x)] \in \text{Div}(\mathbf{R})$ le diviseur (effectif) de $\mu(a_P G_w, x)$, mais considérons-le dans l'espace projectif $\mathbb{P}\mathbf{R}$ ($= \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$; à moins que l'on ne le considère pas dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$). La fonction génératrice des polynômes de couplage homogénéisés $\mu(a_P G_w, x, x_0)$ s'écrit sous la forme

$$1 + \sum_{\emptyset \subset V' \subseteq V} \mu(a_P G_w[V'], x, x_0) \cdot v^{V'} = \exp[\langle x, aV \rangle_P - x_0^2 a_P E_w],$$

et dans l'hyperplan dit impropre, on a

$$\mu(a_P G_w, x, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{v \in V} \langle x, a_v \rangle_P = 0.$$

Comme $\mu(a_P G_w, x, x_0)$ est linéaire en tout $a_v, v \in V$, on peut (et on va) supposer pour un moment (sans changer $\text{div}[\mu(a_P G_w, x, x_0)]$) que $\langle a_v, a_v \rangle_P = 1$ pour tout $v \in V$ (s'il existe un $v \in V$ avec $a_v = 0$, alors $\mu(a_P G_w, x, x_0) \equiv 0$) et qu'il n'y a pas de $u \neq v$ avec $a_u = -a_v$ (on pourrait considérer les $a_v, v \in V$, comme points de $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{R})$). Soit

$$A = \{a_v | v \in V\}, \quad \text{et soit} \quad V = \biguplus_{a \in A} V_a$$

tel que, quel que soit $a \in A$, on ait $a_v = a$ pour tout $v \in V_a$. Alors,

$$\operatorname{div}[\mu(a_P G_w, x, 0)] = \sum_{a \in A} |V_a| \cdot V(\langle x, a \rangle_P).$$

Soit $a^* \in A$, et regardons $x^* \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tel que $\langle x^*, a^* \rangle_P = 0$ et $\langle x^*, a \rangle_P \neq 0$ pour tout $a \in A \setminus a^*$. Le développement de Taylor de $\mu(a_P G_w, x, x_0)$ aux alentours de $(x^*, 0)$ jusqu'à l'ordre $|V_{a^*}|$ s'écrit sous la forme

$$\mu(a_P G_w[V_{a^*}], x, x_0) \cdot \prod_{v \notin V_{a^*}} \langle x^*, a_v \rangle_P.$$

Il en résulte le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Si, pour tout $a \in A$, le polynôme de couplage unidimensionnel $\mu(G_w[V_a], x)$ a $|V_a|$ zéros réels différents (par exemple, parce que tous les poids des arêtes du graphe $G_w[V_a]$ sont positifs et $G_w[V_a]$ contient un chemin hamiltonien, voir [9], théorème 4.2), et si $V_i \subset \mathbf{R}$ sont les composantes (irréductibles) de $\operatorname{div}[\mu(a_P G_w, x)]$, alors*

$$\sum_i \deg(V_i) = \deg[\mu(a_P G_w, x)] = |V|. \blacksquare$$

REMARQUE 4.1. On ne peut pas étendre le théorème par continuité comme en une dimension, parce que $(\mathbb{R}$ est clos dans \mathbb{C} mais) \mathbf{R} n'est pas clos dans $\mathbb{P}\mathbf{R}$. Des conditions plus subtiles s'obtiennent en continuant le développement de Taylor (voir le dernier théorème de [11]), mais il semble préférable de les exposer dans un cadre différent.

THÉORÈME 4.2. *Tout zéro de $\mu(a_P G_w, x)$ est proche au moins d'un hyperplan $V(\langle x, a_v \rangle_P)$, $v \in V$. Plus précisément, soit $|a_P G_w|$ le graphe obtenu en remplaçant tous les poids $w_{uv} \langle a_u, a_v \rangle_P$ des arêtes $\{u, v\}$ par $|w_{uv} \langle a_u, a_v \rangle_P|$, soit B plus grand que tous les zéros du polynôme de couplage unidimensionnel $\mu(|a_P G_w|, x)$ (voir [9], théorème 4.3, pour de bonnes estimations de B), et supposons que $|\langle x, a_v \rangle_P| \geq B$ pour tout $v \in V$. Alors, pour tout $v \in V' \subseteq V$, on a*

$$\left| \frac{\mu(a_P G_w[V'], x)}{\mu(a_P G_w[V' \setminus v], x)} \right| \geq \frac{\mu(|a_P G_w[V']|, B)}{\mu(|a_P G_w[V' \setminus v]|, B)}$$

et, en particulier, $\mu(a_P G_w[V'], x) \neq 0$.

Démonstration. La démonstration (par induction et récursion) est la même que celle du théorème 4.5 dans [9]. \blacksquare

Puisque les polygones réguliers affines ne jouissent pas d'une si grande popularité, on va poser (sans restreindre la généralité !) $P = Id$ (et $N = 2$) pour un moment. Soit $w : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $w(k) = w(-k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $w(0) = 0$, et soit $G_w = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, E_w)$ le graphe avec $\{i, j\} \in E_w$ si et seulement si $w(i - j) \neq 0$, et, dans ce cas-là, $w_{ij} := w(i - j)$, $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si l'on note aG_w l'enrichissement de G_w par

$$a_k := \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k \cdot 2\pi/n) \\ \sin(k \cdot 2\pi/n) \end{pmatrix}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a alors la surprise suivante.

PROPOSITION 4.1. *On a*

$$\mu(aG_w, x, y) = \prod_{k=0}^{n-1} \langle \binom{x}{y}, a_k \rangle, \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Démonstration. On a effectivement

$$\begin{aligned} \mu(aG_w, 0, y) &= - \sum_{\{k,0\} \in E_w} w(k) \cdot \langle a_k, a_0 \rangle \cdot \mu(aG_w \setminus \{k, 0\}, 0, y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

parce que la symétrie $k \longleftrightarrow -k$ conserve $w_{ij} \langle a_i, a_j \rangle$ et change le signe de $\langle \binom{0}{y}, a_k \rangle$, et le nombre de ces dernières expressions est impair pour chaque couplage. Il en découle $\mu(aG_w, x, y) = x \cdot p(x, y)$, et, par symétrie, $\mu(aG_w, x, y) = \prod_{k=0}^{n-1} \langle \binom{x}{y}, a_k \rangle \cdot q(x, y)$. La démonstration s'achève en comparant les termes de degré n . ■

Si n est pair, la situation devient plus compliquée (puisque $a_k = -a_{k+n/2}$), et nous nous restreindrons au cas où il n'y a qu'un seul $(d, -d) \neq (0, 0)$ avec $w := w(d) = w(-d) \neq 0$. Ainsi, aG_w est l'union disjointe de (n, d) cycles et $\mu(aG_w, x, y)$ est le produit de leurs polynômes de couplage. C'est pourquoi l'on obtient un résultat plus lisible en supposant $(n, d) = 1$.

PROPOSITION 4.2. *Soit n pair, $n > 2$, et $(n, d) = 1$. Alors*

$$\begin{aligned} \mu(aG_w, x, y) &= \prod_{k=0}^{n-1} \langle \binom{x}{y}, a_k \rangle + 2 \cdot (-w \cdot \langle a_d, a_0 \rangle)^{n/2} \\ &= (-1)^{n/2} \left[\prod_{k=0}^{n/2-1} \langle \binom{x}{y}, a_k \rangle^2 + 2 \cdot [w \cdot \cos(d \cdot 2\pi/n)]^{n/2} \right]. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mu(aG_w, 0, y) &= -w \cdot \langle a_d, a_0 \rangle \cdot [\mu(aG_w \setminus \{d, 0\}, 0, y) + \mu(aG_w \setminus \{-d, 0\}, 0, y)] \\ &= 2 \cdot (-w \cdot \langle a_d, a_0 \rangle)^{n/2}.\end{aligned}$$

En effet, considérons un couplage du cycle aG_w et marchons, à partir de 0, dans les deux sens de aG_w (en même temps avec la même vitesse!) jusqu'à ce qu'il y ait le premier sommet non saturé par le couplage, et effectuons la symétrie $k \longleftrightarrow -k$ pour tous les sommets parcourus. Comme il n'y a qu'une seule expression du type $\langle \binom{0}{y}, a_k \rangle$ (pour le sommet non saturé), le signe change, et, finalement, il ne restent que les contributions des deux couplages parfaits de aG_w . Il en découle $\mu(aG_w, x, y) - 2 \cdot (-w \cdot \langle a_d, a_0 \rangle)^{n/2} = x \cdot p(x, y)$. La symétrie $\mu(aG_w, -x, y) = \mu(aG_w, x, y)$ entraîne $p(-x, y) = -p(x, y)$, i. e. $p(x, y) = x \cdot q(x, y)$; et, de nouveau par symétrie, on obtient

$$\mu(aG_w, x, y) - 2 \cdot (-w \cdot \langle a_d, a_0 \rangle)^{n/2} = \prod_{k=0}^{n/2-1} \langle \binom{x}{y}, a_k \rangle^2 \cdot r(x, y).$$

La démonstration s'achève en comparant les termes de degré n . ■

On n'a considéré les propositions précédentes qu'à cause du résultat suivant, hautement surprenant.

COROLLAIRE 4.1. *Pour tout $N > 1$ et tout P il existe des graphes $a_P G$ (rarissimes !) enrichis ordinaires (i. e. sans poids) tels que $\mu(a_P G, x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. ■*

Remerciements. En tout premier lieu, je voudrais remercier cordialement P. Cartier pour une passionnante introduction, un beau soir au Domaine-Saint-Jacques, au monde surprenant de la physique, faute de quoi le polynôme de couplages N -dimensionnel n'aurait pas vu le jour. J'exprime aussi toute ma gratitude à S. Eliahou d'avoir amélioré la clarté de deux définitions-clés, à G. Nebe et W. Plesken d'avoir invité B. Venkov ([18] étant la deuxième motivation des N dimensions), à A. Lascoux pour son merveilleux cadeau [15] et surtout à D. Foata pour toute son aide et assistance.

Références bibliographiques

- [1] J. A. Baker, Integration over spheres and the divergence theorem for balls, *American Math. Monthly* **104** (1997), 36-47.
- [2] P. Cartier, Communication personnelle, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 44, 2000.
- [3] P. Cartier, Mathemagics (A Tribute to L. Euler and R. Feynman), *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **B44d**, 71 pages, 2000.
- [4] D. Foata et A. Fuchs, Calcul des Probabilités, Dunod, Paris, 1998.
- [5] G. F. Folland, How to integrate a polynomial over a sphere, *American Math. Monthly* **108** (2001), 446-448.
- [6] J. Glimm et A. Jaffe, « Quantum Physics, A Functional Integral Point of View », Springer-Verlag, 1981.
- [7] C. D. Godsil, « Algebraic Combinatorics », Chapman & Hall, 1993.
- [8] C. D. Godsil, Hermite polynomials and a duality relation for matchings polynomials, *Combinatorica* **1** (1981), 257-262.
- [9] O. J. Heilmann et E. H. Lieb, Theory of monomer-dimer systems, *Comm. Math. Physics* **25** (1972), 190-232.
- [10] S. K. Lando et A. K. Zvonkin, « Embedded graphs », 2000.
- [11] B. Lass, Matching polynomials and duality, à paraître dans *Combinatorica*.
- [12] B. Lass, Variations sur le thème $E+\overline{E} = XY$, à paraître dans *Advances in Appl. Math.*
- [13] L. Lovász, « Combinatorial Problems and Exercises », Akadémiai Kiadó, 1993.
- [14] V. A. Malyshev et R. A. Minlos, « Gibbs Random Fields, Cluster Expansions », Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [15] M. L. Mehta, « Matrix Theory, Selected Topics and Useful Results », Les Éditions de Physique, 1989.
- [16] A. N. Shiryaev, « Вероятност' », Хаука, Москва, 1980.
- [17] R. P. Stanley, « Enumerative Combinatorics », Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [18] B. Venkov, Réseaux et designs sphériques (notes de J. Martinet), 1997.

CHAPITRE 2

Applications de la combinatoire

Ce chapitre regroupe tous les travaux portant sur des problèmes combinatoires rencontrés dans d'autres domaines des mathématiques, à savoir, les cohomologies des algèbres de Lie, dans les parties 2.1 et 2.2; les probabilités, pour le problème du collectionneur et de ses frères traité dans la partie 2.3; enfin, la géométrie algébrique, pour la caractéristique d'Euler de l'espace de modules des courbes de genre g , dans la partie 2.4.

2.1 Une conjecture de Kontsevich et Shoikhet et la caractéristique d'Euler

2.2 On the combinatorics of the graph-complex

2.3 Les nombres hyperharmoniques et la fratrie du collectionneur de vignettes

2.4 Démonstration combinatoire de la formule de Harer-Zagier

Une conjecture de Kontsevich et Shoikhet et la caractéristique d'Euler (*)

À *J.-P. Jouanolou et A. Al Amrani*,

dont j'ai oublié l'invitation à cause de cette Note

Salikhov [8] a démontré une conjecture de Kontsevich et Shoikhet [4] en la réduisant à la considération de trois familles de graphes, une considération qui ne fut explicitée que pour une de ces familles. Nous montrons que cette conjecture de Kontsevich et Shoikhet n'est, en fait, qu'un cas très particulier du théorème classique sur la caractéristique d'Euler, bien explicité par Teleman [10].

Salikhov [8] has proved a conjecture of Kontsevich and Shoikhet [4] by reducing it to the consideration of three families of graphs, a consideration which was left to the reader for two of those families. We show, that the conjecture is just a very particular case of the classical theorem on the Euler characteristic, well explicated by Teleman [10].

Les deux définitions et le théorème suivant constituent l'essentiel d'un article récent de Salikhov :

DÉFINITION 1 ([3]). Soit $G = (V, E)$ un multigraphe, c'est-à-dire on accepte la présence de boucles et d'arêtes multiples. Un automorphisme $P \in \text{Aut}(G)$ induit une permutation $|P_E|$ des arêtes de G et une transformation linéaire non-dégénérée $P_E \in \text{GL}(H_1(G, \mathbb{R}))$ sur le premier groupe d'homologie du graphe G (en tant qu'espace topologique) avec des coefficients réels. L'homomorphisme d'orientation de Kontsevich $\Theta_K : \text{Aut}(G) \rightarrow \{1, -1\}$ est défini par la formule $\Theta_K(P) := \text{sign}(|P_E|) \cdot \text{sign}(\det[P_E, H_1(G, \mathbb{R})])$.

DÉFINITION 2 ([4]). Soit $G = (V, E)$ un multigraphe. Orientons (à l'aide de flèches) les arêtes de G de façon arbitraire. Un automorphisme $P \in \text{Aut}(G)$ induit une permutation P_V des sommets de G et une fonction $\epsilon_P : E \rightarrow \{1, -1\}$ définie par $\epsilon_P(e) := 1$ (resp. $\epsilon_P(e) := -1$), si la permutation induite $|P_E|$ respecte (resp. renverse) l'orientation sur l'arête $e \in E$. L'homomorphisme d'orientation de Shoikhet $\Theta_S : \text{Aut}(G) \rightarrow \{1, -1\}$ est défini par la formule $\Theta_S(P) := \text{sign}(P_V) \cdot \prod_{e \in E} \epsilon_P(e)$.

(*) Note à paraître dans *Rev. Math. Pures Appl.*

Il est facile de montrer que le dernier produit est indépendant de l'orientation choisie pour chaque arête, et l'on a

THÉORÈME. ([8]) *Soit $G = (V, E)$ un multigraphe connexe. Alors pour tout $P \in \text{Aut}(G)$ on a $\Theta_K(P) = \Theta_S(P)$.*

Salikhov [8] démontre le théorème précédent sur plus de deux pages en le réduisant à la considération de trois familles de graphes, une considération qui ne fut explicitée que pour une de ces familles. Selon [8], ce théorème a été conjecturé par Kontsevich et Shoikhet dans [4], un article qui est situé dans le contexte de [1] et [3]. De plus, Salikhov [8] remercie «S. V. Duzhin for suggesting the problem and B. Shoikhet for useful discussions». Nous tenons à souligner que nous n'avons pas eu la chance de voir l'article de Kontsevich et Shoikhet [4] personnellement.

Avant de formuler les définitions ci-dessus, Salikhov [8] a introduit «the so-called *half-edge language*» pour décrire les multigraphes, bien que les deux définitions fassent plutôt appel aux concepts classiques de la théorie des graphes et de la topologie algébrique (de Hopf ou Lefschetz).

En fait, pour démontrer la conjecture de Kontsevich et Shoikhet, il suffit de remplacer la trace par le déterminant dans la démonstration du théorème du point fixe de Lefschetz (dans le cas particulier des complexes un-dimensionnels, voir [7], paragraphe 22). C'est ce que nous proposons d'explicitier dans cette Note.

Soit $C_1(G, \mathbb{R})$ (resp. $C_0(G, \mathbb{R})$) l'espace vectoriel engendré par les arêtes (resp. sommets) du graphe G . Le leitmotif de la topologie algébrique est d'associer à un automorphisme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_1(G, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial} & C_0(G, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow P_E & & \downarrow P_V & & \downarrow id & & \\
 0 & \longrightarrow & C_1(G, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial} & C_0(G, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où P_E désigne la permutation «signée» des arêtes orientées selon la définition 2. Dans cette situation, le polynôme caractéristique est une application d'Euler-Poincaré définie sur le groupe d'Euler-Grothendieck (voir [2] ainsi que [5], chapitre IV.3 et XV.4, ou bien la nouvelle édition [6], chapitre XIV.3 et XX.3). En particulier, on a la relation suivante pour les déterminants des transformations induites sur les espaces d'homologie réduits (voir [10] ou [9], paragraphe 64, exercice 28) :

$$\begin{aligned}
 & \det[P_E, \tilde{H}_1(G, \mathbb{R})] \cdot \det[id, \tilde{H}_{-1}(G, \mathbb{R})] / \det[P_V, \tilde{H}_0(G, \mathbb{R})] \\
 = & \det[P_E, C_1(G, \mathbb{R})] \cdot \det[id, C_{-1}(G, \mathbb{R})] / \det[P_V, C_0(G, \mathbb{R})].
 \end{aligned}$$

Évidemment, $C_{-1}(G, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\tilde{H}_{-1}(G, \mathbb{R}) = 0$ et $\tilde{H}_0(G, \mathbb{R}) = 0$ puisque G est connexe. De là, $\det[id, C_{-1}(G, \mathbb{R})] = \det[id, \tilde{H}_{-1}(G, \mathbb{R})] = \det[P_V, \tilde{H}_0(G, \mathbb{R})] = 1$; on en tire

$$\det[P_E, H_1(G, \mathbb{R})] = \det[P_E, \tilde{H}_1(G, \mathbb{R})] = \det[P_E, C_1(G, \mathbb{R})] / \det[P_V, C_0(G, \mathbb{R})].$$

Mais $\det[P_E, C_1(G, \mathbb{R})] = \text{sign}(|P_E|) \cdot \prod_{e \in E} \epsilon_P(e)$ et $\det[P_V, C_0(G, \mathbb{R})] = \text{sign}(P_V)$.

Ceci démontre bien la conjecture de Kontsevich et Shoikhet.

REMARQUE. On peut travailler partout avec des coefficients entiers (voir [7], paragraphe 22). En particulier, on sait *a priori* que $\det[P_E, H_1(G, \mathbb{R})] \in \mathbb{Z}$, d'où $\det[P_E, H_1(G, \mathbb{R})] \in \{1, -1\}$, puisque $\det[P_E, H_1(G, \mathbb{R})] \cdot \det[P_E^{-1}, H_1(G, \mathbb{R})] = 1$. En outre, on pourrait utiliser l'homologie non-réduite et supprimer l'hypothèse « connexe » si l'on fait intervenir la signature de la permutation induite sur les composantes connexes de G . Finalement, toutes sortes de généralisations de la conjecture de Kontsevich et Shoikhet aux endomorphismes (généralisés), aux complexes d'une dimension supérieure à un, etc. sont possibles. L'essentiel est l'applicabilité du résultat de Teleman [10].

Remerciements. Je voudrais remercier vivement D. Foata et J.-P. Jouanolou pour toute leur aide et assistance.

Références bibliographiques

- [1] D. B. Fuchs, « Kogomologii beskonechnomernykh algebr Lie », Nauka, 1984.
- [2] J. L. Kelley et E. H. Spanier, Euler characteristics, *Pacific J. Math.* **26** (1968), 317-339.
- [3] M. Kontsevich, Formal (non)-commutative symplectic geometry, dans : The Gelfand Mathematical Seminars 1990-1992, Birkhäuser, 1993, 173-187.
- [4] M. Kontsevich et B. Shoikhet, Formality conjecture, geometry of complex manifolds and combinatorics of graph-complex, preprint.
- [5] S. Lang, « Algebra », Addison-Wesley, 1965.
- [6] S. Lang, « Algebra, Third Edition », Addison-Wesley, 1997.
- [7] J. R. Munkres, « Elements of algebraic topology », Addison-Wesley, 1984.
- [8] K. Salikhov, On the orientation of graphs, arXiv:math.CO/0012252, 5 pages.
- [9] G. Scheja et U. Storch, « Lehrbuch der Algebra, Teil 2 », B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [10] S. Teleman, Sur la formule d'Euler-Poincaré-Hopf, *Rev. Math. Pures Appl.* **2** (1957), 551-554.

On the combinatorics of the graph-complex (*)

In their recent preprint [3] Kontsevich and Shoikhet have introduced two graph-complexes: the complex on the even (resp. odd) space in order to study the cohomology of the Lie algebra Ham_0 (resp. $\text{Ham}_0^{\text{odd}}$) of Hamiltonian vector fields vanishing at the origin on the infinite-dimensional even (resp. odd) space. We construct an isomorphism between those two graph-complexes, proving in particular that their cohomologies coincide. This solves a problem posed by Shoikhet.

Dans leur prépublication récente [3], Kontsevich et Shoikhet ont introduit deux complexes de graphes : le complexe sur l'espace pair (resp. impair) pour étudier la cohomologie de l'algèbre de Lie Ham_0 (resp. $\text{Ham}_0^{\text{odd}}$) des champs vectoriels hamiltoniens sans terme constant sur l'espace pair (resp. impair) de dimension infinie. Nous construisons un isomorphisme entre ces deux complexes de graphes, démontrant notamment que leur cohomologies coïncident. Ceci résoud un problème posé par Shoikhet.

Sur la combinatoire du complexe de graphes

Le problème de calculer les groupes de cohomologie de beaucoup d'algèbres de Lie peut être ramené au calcul des groupes de cohomologie de différents complexes de graphes (voir [1],[2],[3]). Un *complexe (cohomologique) de graphes* est un complexe

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{0} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} C^3 \xrightarrow{\delta} \dots$$

où C^n est l'espace vectoriel engendré par les *classes d'isomorphie* de paires (G, or_G) telles que G est un (multi)graphe de n sommets et or_G est une *orientation* d'un espace vectoriel réel (ou plutôt d'un ensemble fini) associé à G . Un *(multi)graphe* $G = (H; V, E)$ est un ensemble de *demi-arêtes* H ($|H| = 2m$) muni de deux partitions V et E . Les n blocs $v \in V$ sont appelés *sommets* tandis que les m blocs $e \in E$ de la deuxième partition sont des sous-ensembles de H de cardinalité deux, appelés *arêtes*. Une arête est une *boucle* si et seulement si ses deux demi-arêtes font partie du même sommet. Le *degré* d'un sommet $v \in V$ est sa cardinalité,

(*) Note à paraître dans *C.R. Acad. Sci. Paris*

c'est-à-dire le nombre de ses demi-arêtes. On dit que v est *pair* (resp. *impair*) si et seulement si son degré est pair (resp. impair). Notons Q (resp. O) l'ensemble des sommets pairs (resp. impairs) de G .

On *oriente* un ensemble fini (ou bien l'espace réel engendré par cet ensemble) en le munissant d'une *forme alternante* (multilinéaire) $[\cdot]$ prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, -1\}$. Évidemment, le nombre d'orientations différentes vaut deux. L'union disjointe de plusieurs ensembles orientés est naturellement *pseudo-orientée* (i. e. orientée par rapport à la partition) par le produit ordinaire des formes alternantes des blocs de la partition. Une *pseudo-orientation* d'un ensemble partitionné est alors une forme alternante par rapport à toutes les permutations respectant la partition. Évidemment, le nombre de pseudo-orientations est aussi égal à deux. L'orientation d'un graphe dite *paire* est la pseudo-orientation de l'union disjointe $V \uplus (\biguplus_{e \in E} e)$; autrement dit, on oriente l'ensemble V et, pour chaque arête $e \in E$, l'ensemble des deux demi-arêtes de e (voir [2],[3],[4]). L'orientation d'un graphe dite *impaire*, cependant, est la pseudo-orientation de l'union disjointe $Q \uplus (\biguplus_{v \in V} v)$, ce qui veut dire que l'on oriente l'ensemble Q des sommets pairs et, pour chaque sommet $v \in V$, l'ensemble des demi-arêtes de v (voir [3]).

Un *automorphisme* P du graphe G est une permutation P_H de l'ensemble des demi-arêtes H préservant les structures de V et de E . Voilà pourquoi P agit sur l'orientation paire (resp. impaire) par une multiplication avec un nombre noté $\Theta_{even}(P) \in \{1, -1\}$ (resp. $\Theta_{odd}(P)$). Pour la permutation T des deux demi-arêtes d'une boucle, on a, par exemple, $\Theta_{even}(T) = \Theta_{odd}(T) = -1$, puisque l'orientation d'une seule arête (pour l'orientation paire) et d'un seul sommet (pour l'orientation impaire) est renversée. De façon plus générale, nous démontrerons pour chaque automorphisme P que $\Theta_{even}(P) = \Theta_{odd}(P) = \text{sign}(P_H) \cdot \text{sign}(P_V)$, si P_V désigne la permutation induite sur l'ensemble des sommets de G . On impose la relation $(G, -\text{or}_G) = -(G, \text{or}_G)$, de sorte que $(G, \text{or}_G) = 0$ si et seulement si G a un automorphisme tel que $\Theta_{even}(P) = \Theta_{odd}(P) = -1$, comme dans le cas des boucles (d'où $C^1 = 0$). Par conséquent, les générateurs du complexe de graphes sont (à une multiplication par ± 1 près) les mêmes pour l'orientation paire et impaire. En fait, nous montrerons que ces deux orientations correspondent de façon naturelle à une orientation ordinaire de l'ensemble $H \uplus V$, que nous appelons *universelle*.

Cette correspondance permet également de comparer les différentielles, définies par Kontsevich et Shoikhet [3] de la manière suivante : Pour $\delta_{even}(G)$ et $\delta_{odd}(G)$ on prend toujours la somme sur *tous* les « gonflages » de *tous* les sommets de G , où un gonflage d'un sommet veut dire que l'ensemble de ses demi-arêtes est partitionné (de façon non-ordonnée) en deux blocs (ce sont des sommets nouveaux), qui sont reliés par une arête nouvelle (c'est-à-dire chaque bloc nouveau obtient une demi-arête nouvelle, et ces deux demi-arêtes nouvelles forment une arête). Évidemment, chaque gonflage augmente le nombre de sommets d'une unité. Soit $G = (H; V, E)$ avec $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; $E = \{e_1, \dots, e_m\}$; $v_1 = \{h_{a_1}, \dots, h_{x_1}, h_{y_1}, \dots, h_{b_1}\}$, $v_2 = \{h_{a_2}, \dots, h_{b_2}\}$, \dots , $v_n = \{h_{a_n}, \dots, h_{b_n}\}$; $e_1 = \{h_{i_1}, h_{t_1}\}$, \dots , $e_m = \{h_{i_m}, h_{t_m}\}$; et $H = \biguplus_{k=1}^n v_k = \biguplus_{k=1}^m e_k$. Considérons un gonflage de v_1 avec $v'_1 = \{h_{a_1}, \dots, h_{x_1}\}$, $v''_1 = \{h_{y_1}, \dots, h_{b_1}\}$ et avec la nouvelle

arête $\{h'_1, h''_1\}$. Pour l'orientation, Kontsevich et Shoikhet [3] définissent alors

$$\begin{aligned}
 & [v'_1, v''_1, v_2, \dots, v_n] \cdot [h'_1, h''_1] \prod_{k=1}^m [h_{i_k}, h_{t_k}] \\
 & := [v_1, v_2, \dots, v_n] \cdot \prod_{k=1}^m [h_{i_k}, h_{t_k}] \quad \text{sur l'espace pair et} \\
 & [v'_1, v''_1, v_2, \dots, v_n]_Q \cdot [h'_1, h_{a_1}, \dots, h_{x_1}] [h''_1, h_{y_1}, \dots, h_{b_1}] \prod_{k=2}^n [h_{a_k}, \dots, h_{b_k}] \\
 & := [v_1, v_2, \dots, v_n]_Q \cdot \prod_{k=1}^n [h_{a_k}, \dots, h_{b_k}] \quad \text{sur l'espace impair,}
 \end{aligned}$$

où $[\cdot]_Q$ signifie qu'il faut supprimer tous les sommets impairs entre les crochets. Nous démontrons le théorème suivant ($o := |O|$, $n := |V|$).

THÉORÈME. *Du point de vue de l'orientation universelle, il suffit de multiplier l'orientation de chaque graphe G par $(-1)^{n-o/2}$ pour obtenir un isomorphisme entre l'orientation paire et impaire qui est compatible avec les différentielles. C'est pourquoi le complexe sur l'espace pair et le complexe sur l'espace impair sont isomorphes.*

1. Introduction

The underlying vector space of the Lie algebra $\text{Ham}_0(N)$ of Hamiltonian vector fields vanishing at the origin *on the even space* is equal to $\bigoplus_{d \geq 2} S^d V$, where V is the defining $2N$ -dimensional representation of $\text{sp}(2N)$, $S^2 V = \text{sp}(2N)$, etc. It is classical (see [1] and [2]) that the cochain complex

$$C_{Lie}^\bullet(\text{Ham}_0(N); \mathbb{C}) = \bigoplus_{d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, \dots} \bigwedge^{d_2} (S^2 V) \wedge \bigwedge^{d_3} (S^3 V) \wedge \dots$$

is quasi-isomorphic to its sp -invariant part $[C_{Lie}^\bullet(\text{Ham}_0(N); \mathbb{C})]^{sp}$. Let us consider $\bigwedge^{d_2} (S^2 V) \wedge \bigwedge^{d_3} (S^3 V) \wedge \dots$ as a quotient space of $(V^{\otimes 2})^{\otimes d_2} \otimes (V^{\otimes 3})^{\otimes d_3} \otimes \dots$. If $2d_2 + 3d_3 + \dots =: 2m$ is even, then any perfect matching on $H := \{1, 2, \dots, 2m\}$ defines a (multi)graph $G = (H; V, E)$ with $2m$ half-edges in H , m edges in E and $n := d_2 + d_3 + \dots$ vertices in V , d_2 of which have degree 2, d_3 of which have degree 3, etc. There exists a canonical symplectic invariant in $\bigwedge^2 V \hookrightarrow V^{\otimes 2}$, that can be chosen in $V_i \otimes V_j$ for every edge $\{i, j\} \in E$ ($i, j \in H$) to obtain an invariant in $V^{\otimes 2m}$. By the main theorem of invariant theory those tensors form a basis of $[V^{\otimes 2m}]^{sp}$ and there are no invariants for $(2d_2 + 3d_3 + \dots)$ odd, if $2N = \dim(V)$ is sufficiently large. The (multi)graphs $G = (H; V, E)$ carry the *even orientation*

corresponding to the exterior product over the set of vertices (in the definition of the cochain complex) and to the exterior products over the set of half-edges of any edge (in the definition of the canonical symplectic invariants). In fact, the consideration of those oriented graphs modulo the action of symmetric groups provides a bijection with the elements of the complex $[C_{Lie}^\bullet(\text{Ham}_0(N); \mathbb{C})]^{sp}$. The differentials of this complex can be easily expressed in graph-theoretical terms (see Section 3). Therefore the cohomology of the resulting *graph-complex on the even space* is equal to the cohomology of Hamiltonian vector fields vanishing at the origin on the infinite-dimensional even space.

The underlying vector space of the Lie algebra $\text{Ham}_0^{odd}(N)$ of Hamiltonian vector fields vanishing at the origin *on the odd space* is equal to $\bigoplus_{d \geq 2} \bigwedge^d V$, where V is the defining N -dimensional representation of $\mathfrak{sp}^{odd}(N) = \mathfrak{o}(N)$, $\bigwedge^2 V = \mathfrak{sp}^{odd}(N)$, etc. The main difference from the even case is that the canonical invariant lies in $S^2 V \hookrightarrow V^{\otimes 2}$ and that the cochain complex is given by

$$C_{Lie}^\bullet(\text{Ham}_0^{odd}(N); \mathbb{C}) = \bigoplus_{d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, \dots} \bigwedge_{super}^{d_2} (\bigwedge^2 V) \wedge_{super} \bigwedge_{super}^{d_3} (\bigwedge^3 V) \wedge_{super} \dots,$$

where \wedge_{super} denotes the graded exterior product (which is anticommutative if the degrees of both factors are even and commutative otherwise). Therefore the cohomology of Hamiltonian vector fields vanishing at the origin on the infinite-dimensional odd space is equal to the cohomology of the *graph-complex on the odd space*, which differs from the graph-complex on the even space just by its orientation. In fact, the (multi)graphs $G = (H; V, E)$ carry the *odd orientation* corresponding to the graded exterior product over the set of vertices and to the exterior products over the set of half-edges of any vertex, and the differentials of the graph-complex on the odd space can be expressed in graph-theoretical terms with the help of the odd orientation.

With respect to this situation Shoikhet suggested that “*you obtain at first look a different graph-complex, but our idea with Kontsevich was that the two cohomologies coincide - and to prove it by something like an isomorphism of orientations. ... So, up to me, a really interesting problem in this direction is to prove that the even and the odd graph-complexes give the same orientation.*”

We solve this problem in the next two sections using still another orientation, which we call *universal* and which is more classical from the point of view of algebraic topology.

2. The generators of the graph complexes on the even space and on the odd space

A (multi)graph $G = (H; V, E)$ is a set of *half-edges* H consisting of $2m$ elements, together with two partitions of this set into disjoint unions of subsets. The n blocks of the first partition $v \in V$ are called *vertices* whereas the m blocks of the

second partition $e \in E$ are two-element subsets of H called *edges*. The *degree* of a vertex $v \in V$ is the number of its half-edges and v is called *even* (resp. *odd*) iff its degree is even (resp. odd). Let $[\cdot]$ be an alternating (multilinear) form on (the real space generated by) the disjoint union of all half-edges h_1, h_2, \dots, h_{2m} and all vertices v_1, v_2, \dots, v_n . The form $[\cdot]$ is uniquely defined by determining the value $[h_1, h_2, \dots, h_{2m}; v_1, v_2, \dots, v_n] = [v_1, v_2, \dots, v_n; h_1, h_2, \dots, h_{2m}] \in \{1, -1\}$. A (multi)graph with such a form will be called *universally oriented*. In order to determine $[h_1, h_2, \dots, h_{2m}; v_1, v_2, \dots, v_n]$ we can write the elements $h_1, h_2, \dots, h_{2m}; v_1, v_2, \dots, v_n$ in different orders, all of which will start with the half-edges.

One natural order makes use of the block structure determined on the set of half-edges H by the set of edges E . In other words, we consider the expression $[h_{i_1}, h_{t_1}; h_{i_2}, h_{t_2}; \dots; h_{i_m}, h_{t_m}; v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n}]$, where the m edges of the graph G are $\{h_{i_1}, h_{t_1}\}, \{h_{i_2}, h_{t_2}\}, \dots, \{h_{i_m}, h_{t_m}\}$. Permuting whole edges does not change the value of $[h_{i_1}, h_{t_1}; h_{i_2}, h_{t_2}; \dots; h_{i_m}, h_{t_m}; v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n}]$ whereas permuting two half-edges within an edge does change this value. Therefore, orienting a graph universally is canonically the same as orienting the set V of vertices and orienting, for every edge $e \in E$, the set of half-edges of e . This corresponds to the orientation in the case of the graph-complex on the even space (see [2],[3],[4]).

Another natural order makes use of the block structure determined on the set of half-edges H by the set Q ($|Q| = q$) of even vertices and by the set O ($|O| = o$) of odd vertices. In other words, we consider

$$(*) \quad w := [h_{a_1}, \dots, h_{b_1}; \dots; h_{a_q}, \dots, h_{b_q}; h_{c_1}, \dots, h_{d_1}; \dots; h_{c_o}, \dots, h_{d_o}; v_{f_1}, \dots, v_{f_o}; v_{g_1}, \dots, v_{g_q}],$$

where $\{h_{a_1}, \dots, h_{b_1}\}, \dots, \{h_{a_q}, \dots, h_{b_q}\}$ as well as v_{g_1}, \dots, v_{g_q} are the q even vertices of G and where $v_{f_1} = \{h_{c_1}, \dots, h_{d_1}\}, \dots, v_{f_o} = \{h_{c_o}, \dots, h_{d_o}\}$ are its o odd vertices. Permuting whole even vertices (i. e. their sets of half-edges) does not change the value of w . But permuting whole odd vertices (i. e. their sets of half-edges) does not change w either, because in that case the vertices v_{f_1}, \dots, v_{f_o} have to be permuted in the same way by our convention. On the other hand, permutations within whole vertices (i. e. within their sets of half-edges) as well as permutations of $Q = \{v_{g_1}, \dots, v_{g_q}\}$ do change w . Therefore, orienting a graph universally is equivalent to orienting the set Q of even vertices and for every vertex $v \in V$ orienting the set of half-edges of v . This corresponds to the orientation in the case of the graph-complex on the odd space (see [3]).

An *automorphism* P of the graph G is an arbitrary permutation P_H of the set H which preserves the structures of V and E . In particular, it induces permutations P_Q of Q , P_O of O and P_V of the set V of vertices. The automorphism P acts on the even (resp. odd) orientation by a multiplication by

$$\Theta_{\text{even}}(P) = \text{sign}(P_V) \cdot \prod_{e \in E} \epsilon_P(e), \quad \Theta_{\text{odd}}(P) = \text{sign}(P_Q) \cdot \prod_{v \in V} \epsilon_P(v),$$

respectively, where $\epsilon_P(e)$ equals 1 (resp. -1) if and only if P is sign-preserving (resp. sign-reversing) on (the set of half-edges of) e , and where $\epsilon_P(v)$ equals 1 (resp. -1) if and only if P is sign-preserving (resp. sign-reversing) on (the set of half-edges of) v . Finally, P acts on the universal orientation by a multiplication by $\text{sign}(P_H) \cdot \text{sign}(P_V)$. Now our established correspondence between those three orientations implies:

$$\Theta_{\text{even}}(P) = \Theta_{\text{odd}}(P) = \text{sign}(P_H) \cdot \text{sign}(P_V).$$

The n -dimensional generators of the different graph-complexes are always *equivalence classes* of pairs (G, or_G) , where G is a graph with n vertices (whose degrees are all greater than one), and where or_G is one of our orientations. One imposes the relation $(G, -\text{or}_G) = -(G, \text{or}_G)$, so that $(G, \text{or}_G) = 0$ if and only if G has an automorphism whose sign is -1 . We have established the following theorem.

THEOREM 1. *There is a canonical correspondence between the generators of the graph-complex on the even space, the generators of the graph-complex on the odd space and the generators of the graph-complex using the universal orientation. ■*

3. The differentials of the graph complexes on the even space and on the odd space

In order to get an isomorphism of complexes we have to verify whether our canonical correspondences between the generators are compatible with the differentials. Let us first define a differential for the universal orientation. It is essentially given by the dual of the operation of contracting each edge. More precisely, some vertex $v_s \in V$ has to be split up into two vertices v'_s and v''_s , i. e. the set of its half-edges has to be partitioned. Moreover, a new edge $\{h'_s, h''_s\}$ will be introduced, where $h'_s \in v'_s$ and $h''_s \in v''_s$. Finally, the orientation can be defined by

$$\begin{aligned} & [h_1, h_2, \dots, h_{2m}, h'_s, h''_s; v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v'_s, v''_s, v_{s+1}, \dots, v_n] \\ & := (-1)^{s-1} [h_1, h_2, \dots, h_{2m}; v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n]. \end{aligned}$$

It is evident that this definition is well defined and leads in fact to a differential δ (for the differential, the sum over all splittings is taken; if we split twice in the same way but in a different order, then the corresponding terms cancel, i. e. $\delta^2 = 0$).

The expression of the definition in terms of the block structure determined by the set of edges of the graph G is immediate. It leads precisely to the definition of [3] (and [2]) in the case of the graph-complex on the even space (corresponding to the cochain complex $C_{Lie}^\bullet(\text{Ham}_0; \mathbb{C})$).

In order to find the expression for the definition in terms of the block structure determined by the set of vertices of G , it is sufficient to consider what happens to w (see equation $(*)$ in the preceding section) if we partition v_{f_1} or v_{g_1} (these vertices

are both on odd places because the number o of odd vertices of G is even). First suppose that $v_{f_1} = \{h_{c_1}, \dots, h_{x_1}, h_{y_1}, \dots, h_{d_1}\}$ and that the half-edges of v_{f_1} are partitioned into the blocks $v'_{f_1} = \{h'_{f_1}, h_{c_1}, \dots, h_{x_1}\}$ and $v''_{f_1} = \{h''_{f_1}, h_{y_1}, \dots, h_{d_1}\}$, where $\{h'_{f_1}, h''_{f_1}\}$ is the new edge. If $|v'_{f_1}|$ is odd and $|v''_{f_1}|$ is even, then, according to our universal orientation, w is transformed into

$$\begin{aligned} & [h_{a_1}, \dots, h_{b_1}; \dots; h_{a_q}, \dots, h_{b_q}; h'_{f_1}, h''_{f_1}; h_{c_1}, \dots, h_{x_1}; h_{y_1}, \dots, h_{d_1}; \\ & h_{c_2}, \dots, h_{d_2}; \dots; h_{c_o}, \dots, h_{d_o}; v'_{f_1}, v''_{f_1}; v_{f_2}, \dots, v_{f_o}; v_{g_1}, \dots, v_{g_q}] = \\ & [h_{a_1}, \dots, h_{b_1}; \dots; h_{a_q}, \dots, h_{b_q}; h''_{f_1}, h_{y_1}, \dots, h_{d_1}; h'_{f_1}, h_{c_1}, \dots, h_{x_1}; \\ & h_{c_2}, \dots, h_{d_2}; \dots; h_{c_o}, \dots, h_{d_o}; v'_{f_1}, v_{f_2}, \dots, v_{f_o}; v''_{f_1}, v_{g_1}, \dots, v_{g_q}] \cdot (-1). \end{aligned}$$

If $|v'_{f_1}|$ is even and $|v''_{f_1}|$ is odd, we get

$$\begin{aligned} & [h_{a_1}, \dots, h_{b_1}; \dots; h_{a_q}, \dots, h_{b_q}; h'_{f_1}, h_{c_1}, \dots, h_{x_1}; h''_{f_1}, h_{y_1}, \dots, h_{d_1}; \\ & h_{c_2}, \dots, h_{d_2}; \dots; h_{c_o}, \dots, h_{d_o}; v''_{f_1}, v_{f_2}, \dots, v_{f_o}; v'_{f_1}, v_{g_1}, \dots, v_{g_q}] \cdot (-1). \end{aligned}$$

Now suppose that $v_{g_1} = \{h_{a_z}, \dots, h_{x_z}, h_{y_z}, \dots, h_{b_z}\}$ and that the set of half-edges of v_{g_1} is partitioned into the two blocks $v'_{g_1} = \{h'_{g_1}, h_{a_z}, \dots, h_{x_z}\}$ and $v''_{g_1} = \{h''_{g_1}, h_{y_z}, \dots, h_{b_z}\}$. If $|v'_{g_1}|$ and $|v''_{g_1}|$ are odd, then

$$\begin{aligned} & [h_{a_1}, \dots, h_{b_1}; \dots; h'_{g_1}, h''_{g_1}; h_{a_z}, \dots, h_{x_z}; h_{y_z}, \dots, h_{b_z}; \dots; h_{a_q}, \dots, h_{b_q}; \\ & h_{c_1}, \dots, h_{d_1}; \dots; h_{c_o}, \dots, h_{d_o}; v_{f_1}, \dots, v_{f_o}; v'_{g_1}, v''_{g_1}; v_{g_2}, \dots, v_{g_q}] = \\ & [h_{a_1}, \dots, h_{b_1}; \dots; h_{a_{z-1}}, \dots, h_{b_{z-1}}; h_{a_{z+1}}, \dots, h_{b_{z+1}}; \dots; h_{a_q}, \dots, h_{b_q}; \\ & h'_{g_1}, h_{a_z}, \dots, h_{x_z}; h''_{g_1}, h_{y_z}, \dots, h_{b_z}; h_{c_1}, \dots, h_{d_1}; \dots; h_{c_o}, \dots, h_{d_o}; \\ & v'_{g_1}, v''_{g_1}, v_{f_1}, \dots, v_{f_o}; v_{g_2}, \dots, v_{g_q}]. \end{aligned}$$

Finally, if $|v'_{g_1}|$ and $|v''_{g_1}|$ are even, we get

$$\begin{aligned} & [h_{a_1}, \dots, h_{b_1}; \dots; h'_{g_1}, h_{a_z}, \dots, h_{x_z}; h''_{g_1}, h_{y_z}, \dots, h_{b_z}; \dots; h_{a_q}, \dots, h_{b_q}; \\ & h_{c_1}, \dots, h_{d_1}; \dots; h_{c_o}, \dots, h_{d_o}; v_{f_1}, \dots, v_{f_o}; v'_{g_1}, v''_{g_1}, v_{g_2}, \dots, v_{g_q}] \cdot (-1). \end{aligned}$$

If there were no factors -1 , the preceding relations would be precisely those used by Kontsevich and Shoikhet [3] for defining their differential of the graph-complex on the odd space (corresponding to the cochain complex $C_{Lie}^\bullet(\text{Ham}_0^{\text{odd}}; \mathbb{C})$). In order to get rid of those factors -1 , however, *it suffices to use the isomorphism which multiplies every graph G (i. e. its orientation) by $(-1)^{n-o/2}$, if G has n vertices, o of which are odd*. In fact, the multiplication by $(-1)^n$ provides a minus for every differential, whereas the multiplication by $(-1)^{o/2}$ (note that o is always

even) kills this minus if two new odd vertices are created. Therefore we have proved the following theorem.

THEOREM 2. *The cohomological graph-complex on the even space, the cohomological graph-complex on the odd space and the universally oriented cohomological graph-complex are isomorphic. In particular, their cohomologies coincide. ■*

By the classical arguments reproduced in the introduction this implies our final corollary, a surprising duality relation which (according to Feigin) seems to be difficult to derive by different means.

COROLLARY. *The cohomologies of the Lie algebras Ham_0 and Ham_0^{odd} of Hamiltonian vector fields vanishing at the origin on the infinite-dimensional even and odd spaces coincide. ■*

Acknowledgements. I should like to thank B. Shoikhet for kindly sending me the interesting preprint [3], for asking me the question that led to this Note and for very useful discussions; I am also grateful to P. Cartier and D. Foata for all their help and encouragement.

References

- [1] D. B. Fuchs, « Kogomologii beskonechnomernykh algebr Lie », Nauka, Moskva, 1984.
- [2] M. Kontsevich, Formal (non)-commutative symplectic geometry, in : Corwin L., Gelfand I., Lepowsky J. (Eds.), The Gelfand Mathematical Seminars 1990-1992, Birkhäuser, 1993, 173-187.
- [3] M. Kontsevich et B. Shoikhet, Formality conjecture, geometry of complex manifolds and combinatorics of the graph-complex, preprint.
- [4] B. Lass, Une conjecture de Kontsevich et Shoikhet et la caractéristique d'Euler, à paraître dans *Rev. Math. Pures Appl.* (2002).

Les nombres hyperharmoniques et la fratrie du collectionneur de vignettes (*)

Le problème traditionnel du collectionneur de vignettes est prolongé au cas où le collectionneur fait partager sa moisson avec les membres de sa fratrie. Il reste le seul acheteur, mais donne à ses frères les images qu'il obtient en double. Quand son album est fini, les albums de ses frères ont un certain nombre d'emplacements vides. En moyenne, combien ? Nous apportons une réponse à cette question et obtenons, en outre, une expression pour la fonction génératrice multivariée des variables aléatoires en question. Le problème fait apparaître les nombres hyperharmoniques.

The traditional coupon collector's problem is extended to the case where the collector shares his harvest with his own phratry. He remains the only coupon provider, but gives his brothers the coupons that have already appeared in his picture-book. When his book is completed, the books of the other brothers have certain numbers of empty spots. On the average, how many ? We bring an answer to this question and also derive the multivariable generating function for the random variables involved. The problem gives rise to the hyperharmonic numbers.

1. Introduction

Le problème du collectionneur de vignettes (« coupon collector's problem ») est un problème classique étudié en calcul des probabilités, en informatique, mais aussi en recherche opérationnelle (voir [5],[6],[3]). Chaque tablette de chocolat d'une marque donnée contient une vignette, qui peut être collée dans un album. Celui-ci contient m emplacements qui correspondent aux m vignettes éditées. Il s'agit d'estimer le nombre moyen de tablettes que doit acheter un collectionneur pour remplir son album. Naturellement, toutes les vignettes sont différenciées et à chaque achat le collectionneur a la probabilité $1/m$ d'obtenir une vignette donnée. S'il a déjà cette vignette, il la jette, s'il ne l'a pas, il la colle dans son album à l'emplacement réservé pour celle-ci. Soit H_m le *nombre harmonique* défini par $H_m := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$, suivant l'appellation désormais classique (voir [9], chapitre 6.3). On démontre facilement, par diverses méthodes (simple comptage,

(*) Version abrégée d'une publication en commun avec Foata et Han dans *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **B47a**, 20 pages, 2001.

en bâtissant une chaîne de Markov adaptée, ...) que le nombre moyen d'achats est : $m H_m$.

On doit à Pintacuda [12] de s'être intéressé au *frère* du collectionneur, celui qui n'achète pas de vignette, mais les reçoit de son grand frère, lorsque celui-ci a des doublons. Il a aussi un album, où il colle les vignettes obtenues. Le problème est alors d'estimer le nombre moyen d'emplacements vides dans son album, lorsque son grand frère a terminé son propre album. En utilisant le théorème des temps d'arrêt pour les martingales, Pintacuda [12] montre que ce nombre moyen vaut H_m .

Nous devons à notre collègue Fuchs de nous avoir expliqué la méthode probabiliste de Pintacuda, telle qu'elle lui avait été rapportée par Letta [11], pour trouver cette dernière valeur. Une discussion s'est alors engagée entre les trois auteurs, laquelle les a conduit à penser que ce problème, bien que tombé dans l'escarcelle des probabilistes, méritait un traitement combinatoire complet. C'est ce que nous nous proposons de faire, en donnant aussi un prolongement au cas d'une fratrie. Pourquoi, en effet, ne considérer qu'un seul petit frère ?

Dans le problème de la fratrie, le collectionneur est l'aîné de la famille, il a r frères et reste toujours le seul acheteur. Chaque frère a aussi un exemplaire personnel de l'album et colle aussi les vignettes lorsqu'il en obtient une nouvelle. La source d'approvisionnement est la suivante : chaque fois que l'aîné achète une tablette et qu'il obtient une nouvelle vignette, il la colle dans son album. Sinon, il la donne au plus âgé de ses frères. Si celui-ci n'a pas encore cette vignette, il la colle dans son album ; sinon, il la donne au frère suivant, et ainsi de suite. Si donc une vignette apparaît plus de r fois avant que l'aîné ait fini son album, cette vignette ira à la poubelle !

Soit T le nombre de tablettes que doit acheter l'aîné pour compléter son album. A cet instant, les frères, à qui on donne les numéros 1, 2, ... , r , ont encore, respectivement, $M_T^{(1)}$, $M_T^{(2)}$, ... , $M_T^{(r)}$ emplacements vides dans leurs albums. On sait que $\mathbb{E}[T] = m H_m$ et $\mathbb{E}[M_T^{(1)}] = H_m$, d'après Pintacuda. Nous nous proposons de retrouver ce dernier résultat, mais aussi d'établir, pour $k \geq 2$, que l'on a

$$(1.1) \quad \mathbb{E}[M_T^{(k)}] = 1 + K_m^{(1)} + \dots + K_m^{(k)},$$

où, pour tout $k \geq 0$ et $m \geq 1$, le nombre $K_m^{(k)}$ est le *nombre hyperharmonique*, défini par les relations suivantes :

$$(1.2) \quad K_1^{(k)} := 0, \quad \text{pour tout } k \geq 1; \quad K_m^{(0)} := 1, \quad \text{pour tout } m \geq 1;$$

et pour $k \geq 1$ et $m \geq 2$

$$(1.3) \quad K_m^{(k)} := \frac{K_2^{(k-1)}}{2} + \dots + \frac{K_{m-1}^{(k-1)}}{m-1} + \frac{K_m^{(k-1)}}{m},$$

que l'on peut encore récrire :

$$(1.4) \quad K_m^{(k)} - \frac{K_m^{(k-1)}}{m} = K_{m-1}^{(k)}.$$

En particulier, pour $k \geq 0$, on a : $K_2^{(k)} = 1/2^k$. Le tableau suivant donne une liste des premières valeurs de ces nombres.

m	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$K_m^{(0)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$K_m^{(1)}$	0	0,50	0,83	1,08	1,28	1,93	2,31	2,60	2,82	3,00	3,15	3,28	3,39	3,50
$K_m^{(2)}$	0	0,25	0,53	0,80	1,06	2,14	2,98	3,67	4,27	4,79	5,26	5,68	6,07	6,43
$K_m^{(3)}$	0	0,13	0,30	0,50	0,71	1,79	2,82	3,76	4,64	5,46	6,23	6,96	7,65	8,30
$K_m^{(4)}$	0	0,06	0,16	0,29	0,43	1,27	2,20	3,14	4,08	4,99	5,89	6,77	7,63	8,47
$K_m^{(5)}$	0	0,03	0,09	0,16	0,24	0,81	1,51	2,28	3,08	3,91	4,75	5,59	6,44	7,29
$K_m^{(6)}$	0	0,02	0,04	0,08	0,13	0,48	0,95	1,49	2,09	2,73	3,40	4,09	4,80	5,52

Comme tous les nombres $K_m^{(0)}$ valent 1, on a :

$$K_m^{(1)} = H_m - 1 \quad (m \geq 1).$$

On a ainsi « harmonisé » la suite dont tous les termes sont égaux à 1, pour obtenir la suite des nombres harmoniques (diminués d'une unité). L'appellation *hyperharmonique* vient du fait que pour obtenir la suite $K_m^{(k)}$ ($m \geq 2$), on « harmonise », de la même façon, la suite $K_m^{(k-1)}$ ($m \geq 2$). En utilisant les séries génératrices, la récurrence (1.4) s'écrit sous la forme :

$$(1 - t/m) \cdot \sum_{k \geq 0} K_m^{(k)} t^k = \sum_{k \geq 0} K_{m-1}^{(k)} t^k.$$

Puisque $\sum_{k \geq 0} K_1^{(k)} t^k = 1$, on obtient :

$$(1.5) \quad \sum_{k \geq 0} K_m^{(k)} t^k = \frac{1}{(1 - t/2)(1 - t/3) \cdots (1 - t/m)}.$$

Dans le présent article, nous nous proposons de redémontrer le résultat $\mathbb{E}[M_T^{(1)}] = H_m$ de Pintacuda, puis d'établir les formules (1.1). En plus, nous donnons une expression pour la *distribution* (voir notre proposition 4.1) du vecteur aléatoire $(T, M_T^{(1)}, M_T^{(2)}, \dots, M_T^{(r)})$, d'où l'on tire la distribution de chacune des variables et naturellement leurs espérances mathématiques. En fait, nous préférons introduire

une suite de variables aléatoires $(X_T^{(k)})$ ($k = 1, 2, \dots$) telles que, pour tout $k \geq 1$, on ait :

$$M_T^{(k)} = X_T^{(1)} + X_T^{(2)} + \dots + X_T^{(k)},$$

calculons la fonction génératrice du vecteur $(T, X_T^{(1)}, X_T^{(2)}, \dots, X_T^{(r)})$, puis montrons que

$$\mathbb{E}[X_T^{(1)}] = 1 + K_m^{(1)} = H_m; \quad \mathbb{E}[X_T^{(k)}] = K_m^{(k)} \quad \text{pour } k \geq 2.$$

Le calcul de la fonction génératrice multivariée fait appel aux techniques classiques de la Combinatoire Énumérative, en particulier, des propriétés de la *transformation de Laplace formelle*. La méthode de Pintacuda permet d'obtenir deux autres démonstrations des formules (1.1). En fait, cette technique du théorème des temps d'arrêt pour les martingales ne fournit qu'une *équation aux différences* pour les temps moyens. La partie la plus délicate n'est plus probabiliste : elle consiste à trouver une solution de cette *équation aux différences* et là, il n'existe pas de méthode universelle. C'est pourquoi nous ne reproduisons pas ces approches ici.

Toutefois, nous donnons encore deux autres méthodes de calcul, permettant d'obtenir directement la fonction génératrice des nombres moyens $\mathbb{E}[X_T^{(k)}]$. La première de ces méthodes fournit même une formule dans le cas où la vente des vignettes n'est plus uniforme, où la probabilité d'acheter la vignette i est $p_i > 0$ ($p_1 + \dots + p_m = 1$). Comme on le verra, toutes les méthodes combinatoires développées reposent sur des dénombrements de *surjections*.

2. Les nombres hyperharmoniques

Ils ont été définis en (1.2) et (1.3), de façon itérative. En décomposant la fraction rationnelle, qui apparaît dans (1.5), en éléments simples, on déduit, pour $k \geq 0$ et $m \geq 2$, la formule explicite

$$(2.1) \quad K_m^{(k)} = m(m-1) \sum_n \frac{(-m+2)_n}{n!} \frac{1}{(n+2)^{k+1}},$$

où $(a)_n$ désigne la *factorielle montante* :

$$(a)_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ a(a+1)\dots(a+n-1), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

On reconnaît dans la fraction rationnelle de l'identité (1.5) la fonction génératrice des *fonctions symétriques homogènes complètes* $h_k(x_1, x_2, \dots)$, lorsque l'on substitue les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}$ aux variables x_1, x_2, \dots, x_{m-1} , ce qui établit l'identité

$$K_m^{(k)} = h_k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}\right).$$

On peut également obtenir une expression pour la fonction génératrice des nombres $K_m^{(1)}$ ($m \geq 2$), à savoir,

$$\sum_{m \geq 2} K_m^{(1)} s^m = (s-1)^{-1} (\log(1-s) + s).$$

Les propriétés des nombres $K_m^{(k)}$ données dans la proposition suivante sont faciles à établir et données sans démonstration. On observe, en particulier, que les nombres $K_m^{(k)}$ ($k \geq 0$) vont d'abord en croissant (valeurs reproduites en gras dans le tableau de l'introduction).

PROPOSITION 2.1.

- a) Pour tout $m \geq 2$, on a $\sum_{k \geq 0} K_m^{(k)} = m$.
- b) Pour tout $k \geq 1$, on a $K_m^{(k)} \rightarrow +\infty$, lorsque m tend vers l'infini.
- c) Pour tout $k \geq 1$, on a $K_m^{(0)} < K_m^{(1)} < \dots < K_m^{(k)} < m$ pour m assez grand. ■

REMARQUE. La récurrence (1.4), à savoir $K_m^{(k)} - K_m^{(k-1)}/m = K_{m-1}^{(k)}$ ($k \geq 1$, $m \geq 2$) apparaît déjà dans [1] et [4] pour permettre le calcul du nombre moyen de maxima dans un ensemble de vecteurs. Ces auteurs utilisent des conditions initiales *différentes* de (1.2), à savoir : $K_1^{(k)} := 1$ ($k \geq 1$) et $K_m^{(0)} := 1$ ($m \geq 1$) et obtiennent donc d'autres suites de nombres. Tous ces nombres, cependant, y compris les nombres hyperharmoniques, ne sont que des variations des *nombres harmoniques généralisés* $H_m^{(k)} := \sum_{1 \leq j \leq m} (1/j^k)$ (voir Graham et al. [9]). Une autre extension, avec l'adjonction d'un nouveau paramètre, a été introduite et utilisée dans Flajolet et al. [7] dans l'étude statistique des «quadrees».

3. Un calcul de surjections

Le problème décrit dans l'introduction, bien qu'il ait été offert aux probabilistes, a une très forte connotation combinatoire. Il s'agit, en fait, de dénombrer des classes particulières de *surjections*. Pour tout entier n , posons $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ et notons $\text{Surj}(l, m)$ l'ensemble des surjections de $[l]$ sur $[m]$. Si f appartient à $\text{Surj}(l, m)$, pour tout $i \geq 1$, on note $\nu_i(f)$ le nombre d'éléments $j \in [m]$ tels que l'image réciproque $f^{-1}(j)$ est de cardinal i . A tout vecteur d'entiers positifs $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots)$, on associe le sous-ensemble $\text{Surj}(l, m; \mathbf{n})$ des surjections $f \in \text{Surj}(l, m)$ telles que pour tout $i \geq 1$ on ait $\nu_i(f) = n_i$ et on note $\text{surj}(l, m; \mathbf{n})$ le cardinal de $\text{Surj}(l, m; \mathbf{n})$.

Soit (t, s_1, s_2, \dots) une suite infinie de variables commutatives. Le *poids* $\pi(f)$ de f est défini par $\pi(f) := \prod_{i \geq 1} s_i^{\nu_i(f)}$; on a ainsi les relations $\sum_i \nu_i(f) = m$ et $\sum_i i \nu_i(f) = l$. L'identité

$$\left(\sum_{i \geq 1} s_i \frac{t^i}{i!} \right)^m = \sum_{l \geq m} \frac{t^l}{l!} \sum_{f \in \text{Surj}(l, m)} \pi(f),$$

qui peut encore s'écrire

$$\left(\sum_{i \geq 1} s_i \frac{t^i}{i!} \right)^m = \sum_{l \geq m} \frac{t^l}{l!} \sum_{\mathbf{n}} \text{surj}(l, m; \mathbf{n}) \prod_{i \geq 1} s_i^{n_i},$$

peut être établie par différentes méthodes, par exemple, par les techniques du composé partitionnel. Elle est démontrée dans Foata [8], p. 59-60. On peut aussi utiliser la technique des espèces de nos amis canadiens [2] ou les fonctions d'ensembles [10].

Introduisons maintenant le sous-ensemble $A(l, m; \mathbf{n})$ de $\text{Surj}(l, m; \mathbf{n})$ formé par toutes les surjections f ayant la propriété suivante : la restriction $f|_{[l-1]}$ de f à l'intervalle $[l-1]$ est elle-même une surjection de $[l-1]$ sur $[m] \setminus \{f(l)\}$, mais pas sur $[m]$, i. e. $f(j) \neq f(l)$ pour $j \leq l-1$. Si donc f est dans $A(l, m; \mathbf{n})$, on a $\nu_1(f) \geq 1$ et son poids $\pi(f)$ est divisible par s_1 . Désignons par $a(l, m; \mathbf{n})$ le nombre des éléments de $A(l, m; \mathbf{n})$.

Si f est dans $A(l, m; \mathbf{n})$, posons $g := f|_{[l-1]}$. Alors $\pi(f) = \pi(g) s_1$, comme il a été noté plus haut. D'autre part, on a la relation

$$\sum_{\mathbf{n}} \sum_{f \in A(l, m; \mathbf{n})} \pi(f) = m s_1 \sum_{g \in \text{Surj}(l-1, m-1)} \pi(g).$$

On en tire :

$$\sum_{l \geq m} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{f \in A(l, m; \mathbf{n})} \pi(f) = m s_1 \sum_{k \geq m-1} \frac{t^k}{k!} \sum_{g \in \text{Surj}(k, m-1)} \pi(g) = m s_1 \left(\sum_{i \geq 1} s_i \frac{t^i}{i!} \right)^{m-1}.$$

Avec $s_i := 1$ pour tout $i \geq r+1$, l'identité précédente prend la forme

$$m s_1 (e^t - 1 + t(s_1 - 1) + \frac{t^2}{2!}(s_2 - 1) + \dots + \frac{t^r}{r!}(s_r - 1))^{m-1} = \sum_{l \geq m} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{f \in A(l, m; \mathbf{n})} \pi(f).$$

En développant le membre de gauche par la formule du multinôme, on en déduit :

$$\begin{aligned} m s_1 \sum_{a+b+c_1+\dots+c_r=m-1} \binom{m-1}{a, b, c_1, \dots, c_r} e^{at} (-1)^b \prod_{i=1}^r \left(\frac{t^i (s_i - 1)}{i!} \right)^{c_i} \\ = \sum_{l \geq m} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{f \in A(l, m; \mathbf{n})} \pi(f). \end{aligned}$$

La transformation de Laplace formelle, \mathcal{L} , par rapport à la variable t remplace le terme $d(l)t^l/l!$ d'une série par le terme $d(l)t^l$. En particulier, on a $\mathcal{L}(e^{at}t^n) = n!t^n/(1-at)^{1+n}$. On applique la transformation \mathcal{L} à la dernière identité et on trouve :

$$\begin{aligned} (3.1) \quad m s_1 t \sum \binom{m-1}{a, b, c_1, \dots, c_r} (-1)^b \left(\prod_{k=1}^r \left(\frac{s_k - 1}{k!} \right)^{c_k} \right) \frac{t^{\sum k c_k}}{(1-at)^{1+\sum k c_k}} (\sum_k k c_k)! \\ = \sum_{l \geq m} t^l \sum_{\mathbf{n}} a(l, m; \mathbf{n}) \prod_{k=1}^r s_k^{n_k}. \end{aligned}$$

4. La fonction génératrice multivariée

Comme déjà indiqué dans l'introduction, T désigne l'instant où l'aîné termine son album. Pour chaque $n = 0, 1, \dots$, notons $X_n^{(0)}$ le nombre d'emplacements vides dans l'album de l'aîné à l'instant n , de sorte que $X_0^{(0)} = m$ et $X_T^{(0)} = 0$. Pour $k = 1, 2, \dots$, notons aussi $X_n^{(k)}$ le nombre de vignettes qui sont apparues exactement k fois, jusqu'à la date n incluse. Alors $\sum_{k \geq 1} X_T^{(k)} = m$. De plus, le nombre d'emplacements vides dans l'album du frère d'indice $k \geq 1$, à cet instant T , un nombre qui avait été noté $M_T^{(k)}$ dans l'introduction, est égal à : $M_T^{(k)} = X_T^{(1)} + \dots + X_T^{(k)}$. La distribution du vecteur $(T, M_T^{(1)}, \dots, M_T^{(r)})$ se déduit donc immédiatement de celle du vecteur $(T, X_T^{(1)}, \dots, X_T^{(r)})$. C'est celle-ci que nous déterminons.

Notons Y_1, Y_2, \dots les numéros (compris entre 1 et m) des vignettes que trouve l'aîné dans les achats successifs de ses tablettes. On suppose ainsi que les Y_n ($n \geq 1$) sont des variables aléatoires indépendantes, chacune uniformément répartie sur $\{1, 2, \dots, m\}$. Alors l'aîné finit son album après l'achat de la $l^{\text{ième}}$ tablette et pour chaque $k = 1, \dots, r$, le nombre $X_n^{(k)}$ de vignettes qui sont apparues exactement k fois, jusqu'à la date n incluse est n_k , si et seulement si l'application $f : i \mapsto Y_i$ ($1 \leq i \leq l$) est une surjection appartenant à $A(l, m; \mathbf{n})$. Cet évènement s'exprime comme $\{T = l, X_T^{(1)} = n_1, \dots, X_T^{(r)} = n_r\}$ et sa probabilité est évidemment égale à $a(l, m; \mathbf{n})/m^l$. La proposition suivante est donc une conséquence de la relation (3.1).

PROPOSITION 4.1. *La fonction génératrice du vecteur aléatoire $(T, X_T^{(1)}, \dots, X_T^{(r)})$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} & \sum_{l \geq m, \mathbf{n}} \mathbb{P}\{T = l, X_T^{(1)} = n_1, \dots, X_T^{(r)} = n_r\} t^l s_1^{n_1} \dots s_r^{n_r} \\ &= s_1 t \sum \binom{m-1}{a, b, c_1, \dots, c_r} (-1)^b \left(\prod_{k=1}^r \left(\frac{s_k - 1}{k!} \right)^{c_k} \right) \frac{(t/m)^{\sum k c_k}}{(1 - at/m)^{1 + \sum k c_k}} (\sum_k k c_k)! \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De cette expression, on retrouve la fonction génératrice usuelle de T et donc immédiatement son espérance $\mathbb{E}[T] = m H_m$. Cependant, le fait important est, qu'une fois obtenues les fonctions génératrices des variables $X_T^{(k)}$ ($k \geq 1$), on puisse, grâce à la formule explicite (2.1), sommer leurs dérivées en 1, et ainsi déterminer leurs espérances. En effet, on a

$$\begin{aligned} G_{X_T^{(1)}}(s) &:= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\{X_T^{(1)} = n\} s^n \\ &= s \sum_{a+b+c=m-1} \binom{m-1}{a, b, c} (-1)^b \frac{m(s-1)^c}{(m-a)^{1+c}} c!; \end{aligned}$$

et pour $k \geq 2$

$$\begin{aligned} G_{X_T^{(k)}}(s) &:= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\{X_T^{(k)} = n\} s^n \\ &= \sum_{a+b+c=m-1} \binom{m-1}{a, b, c} (-1)^b \frac{(s-1)^c}{k!^c} \frac{m}{(m-a)^{1+kc}} (kc)! \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_T^{(1)}] &= G'_{X_T^{(1)}}(1) = - \sum_{b=0}^{m-1} \frac{(-m)_{b+1}}{(b+1)!} + m(m-1) \sum_b \frac{(-m+2)_b}{b!} \frac{1}{(b+2)^2} \\ &= 1 + K_m^{(1)} = H_m, \end{aligned}$$

le résultat déjà prouvé par Pintacuda [12]. De plus, pour $k \geq 2$,

$$\mathbb{E}[X_T^{(k)}] = G'_{X_T^{(k)}}(1) = m(m-1) \sum_b \frac{(-m+2)_b}{b!} \frac{1}{(b+2)^{1+k}} = K_m^{(k)}.$$

5. Distribution non-uniforme des vignettes

On suppose maintenant qu'à tout instant n , la probabilité que la variable Y_n soit égale à i est un nombre $p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) et non plus nécessairement $1/m$. Par commodité, pour tout sous-ensemble $A \subset [m] := \{1, 2, \dots, m\}$, on pose : $\mathbf{p}_A := \sum_{i \in A} p_i$. Pour $k \geq 1$, $n \geq 1$ et $i = 1, 2, \dots, m$, on pose également $X_{n,i}^{(k)} := 1$ si la vignette numérotée i est apparue exactement k fois jusqu'à et y compris la date n et $X_{n,i}^{(k)} := 0$, sinon. De là, $X_n^{(k)} = \sum_{1 \leq i \leq m} X_{n,i}^{(k)}$ est le nombre de vignettes qui sont apparues exactement k fois jusqu'à et y compris la date n .

PROPOSITION 5.1. *Soit T l'instant où l'aîné termine son album. Alors, la fonction génératrice $G(t)$ des nombres $\mathbb{E}[X_T^{(k)}]$ est donnée par :*

$$(5.1) \quad G(t) := 1 + \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}[X_T^{(k)}] t^k = t + \sum_{i=1}^m \sum_{A \subset [m] \setminus \{i\}} (-1)^{m-|A|} \frac{1 - p_i - \mathbf{p}_A}{1 - t p_i - \mathbf{p}_A}.$$

Démonstration. D'abord,

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + \sum_{k \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \mathbb{E}[X_{T,i}^{(k)}] t^k = 1 + \sum_{k \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \mathbb{P}\{X_{T,i}^{(k)} = 1\} t^k \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq j \leq m} \mathbb{P}\{X_{n,i}^{(k)} = 1, T = n, Y_n = j\} t^k, \end{aligned}$$

puisque T est presque sûrement fini. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout sous-ensemble $A \subset [m]$, notons $\text{Surj}(n, A)$ l'évènement « $f : l \mapsto Y_l$ est, pour $l = 1, 2, \dots, n$, une surjection de $[n]$ sur A ».

Alors, pour $k \geq 1$ et $i \neq j$, l'évènement $\{X_{n,i}^{(k)} = 1, T = n, Y_n = j\}$ s'écrit encore $\{\text{Surj}(n-1, [m] \setminus \{j\}), X_{n-1,i}^{(k)} = 1, Y_n = j\}$. Pour $k \geq 1$ et $i = j$, on a, en revanche,

$$\{X_{n,i}^{(k)} = 1, T = n, Y_n = j\} = \begin{cases} \{\text{Surj}(n-1, [m] \setminus \{i\}), Y_n = i\}, & \text{si } k = 1; \\ \emptyset, & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Comme T est presque sûrement fini, on a aussi

$$\sum_{n \geq 1} \sum_i \mathbf{P}\{\text{Surj}(n-1, [m] \setminus \{i\}), Y_n = i\} = 1.$$

D'où

$$\begin{aligned} (5.2) \quad G(t) - 1 - t &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \sum_j \sum_{i \neq j} \mathbf{P}\{\text{Surj}(n-1, [m] \setminus \{j\}), X_{n-1,i}^{(k)} = 1, Y_n = j\} t^k \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_j p_j \sum_{i \neq j} \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}\{\text{Surj}(n-1, [m] \setminus \{j\}), X_{n-1,i}^{(k)} = 1\} t^k \\ &= \sum_j p_j \sum_{i \neq j} \sum_{n \geq 1} \sum_{f \in \text{Surj}(n-1, [m] \setminus \{j\})} w_i(f), \end{aligned}$$

avec

$$w_i(f) := t^{|f^{-1}(i)|} \prod_{h \in f([n-1])} p_h^{|f^{-1}(h)|},$$

pour chaque fonction $f : [n-1] \rightarrow [m]$. Le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire :

$$\sum_{f \in \text{Surj}(n-1, [m] \setminus \{j\})} w_i(f) = \sum_{A \subset [m] \setminus \{j\}} (-1)^{m-1-|A|} \sum_{f: [n-1] \rightarrow A} w_i(f),$$

où

$$\sum_{f: [n-1] \rightarrow A} w_i(f) = \begin{cases} \left(tp_i + \sum_{h \in A \setminus \{i\}} p_h \right)^{n-1}, & \text{si } i \in A; \\ \left(\sum_{h \in A} p_h \right)^{n-1}, & \text{si } i \notin A. \end{cases}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + t + \sum_j p_j \sum_{i \neq j} \sum_{n \geq 1} \sum_{A \subset [m] \setminus \{i,j\}} (-1)^{m-1-|A|} \left(\mathbf{p}_A^{n-1} - (tp_i + \mathbf{p}_A)^{n-1} \right) \\ &= 1 + t + \sum_j p_j \sum_{i \neq j} \sum_{A \subset [m] \setminus \{i,j\}} (-1)^{m-1-|A|} \left(\frac{1}{1 - \mathbf{p}_A} - \frac{1}{1 - tp_i - \mathbf{p}_A} \right), \end{aligned}$$

d'où la formule (5.1) en sommant sur j et sur le terme $1/(1 - \mathbf{p}_A)$. \blacksquare

La formule (5.1) se spécialise évidemment en la formule obtenue pour l'équirépartition. Nous ne reproduisons pas le calcul.

6. La plus simple méthode de calcul de la fonction génératrice

Dans le cas de l'équirépartition, la formule (5.2) devient :

$$G(t) = 1 + t + (m-1) \sum_n \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{\text{Surj}(n-1, [m-1]), X_{n-1,1}^{(k)} = 1\} t^k.$$

Une surjection de l'évènement $\text{Surj}(n-1, [m-1])$ est caractérisée par une suite $(\sigma, \mathbf{c}, \mathbf{g}) := (\sigma, (c_1, \dots, c_{m-1}), (g_1, \dots, g_{m-1}))$, où σ est la suite des vignettes telles qu'elles apparaissent pour la première fois, disons aux dates d_1, d_2, \dots, d_{m-1} ($1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{m-1} \leq n-1$), les c_j sont les nombres $d_2 - d_1 - 1, d_3 - d_2 - 1, \dots, n-1 - d_{m-1}$ et g_j est l'application qui envoie l'intervalle $[d_j + 1, d_{j+1} - 1]$ (par convention, $d_m := n$) sur l'ensemble des numéros des vignettes déjà sorties ($j = 1, \dots, m-1$). On peut alors écrire

$$G(t) = 1 + t + (m-1)(m-2)! \sum_n \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{\text{Surj}'(n-1, [m-1]), X_{n-1,1}^{(k)} = 1\} t^k,$$

où l'évènement $\text{Surj}'(n-1, [m-1])$ est restreint aux seules surjections $(\sigma, \mathbf{c}, \mathbf{g})$ telles que les vignettes $2, 3, \dots, (m-1)$ arrivent dans cet ordre (il y en a bien $(m-2)!$). Pour $n \geq m$ fixé, on a alors

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{\text{Surj}'(n-1, [m-1]), X_{n-1,1}^{(k)} = 1\} t^k \\ &= \sum_{c_1 + \dots + c_{m-1} = n-m} \left(\frac{t}{m}\right)^{c_1} \frac{1}{m} \left(\frac{t+1}{m}\right)^{c_2} \dots \frac{1}{m} \left(\frac{t+m-2}{m}\right)^{c_{m-1}} \\ & - \sum_{c_2 + \dots + c_{m-1} = n-m} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m}\right)^{c_2} \dots \frac{1}{m} \left(\frac{m-2}{m}\right)^{c_{m-1}}, \end{aligned}$$

puisque les seules vignettes qui contribuent un facteur t sont les vignettes notées 1 et que la variable t doit apparaître au moins une fois. En sommant cette somme pour $n \geq m$, on obtient :

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{m-2} \frac{1}{1-t/m} \frac{1}{1-(t+1)/m} \dots \frac{1}{1-(t+m-2)/m} - \frac{1}{(m-1)!}.$$

D'où

$$G(t) = t + \frac{1}{(1-t/2)(1-t/3)\dots(1-t/m)},$$

qui est bien la formule cherchée.

Remerciements. Les auteurs remercient Aimé Fuchs de leur avoir communiqué la méthode des martingales pour le calcul de $\mathbb{E}[X_T^{(1)}]$ d'après la version qu'en avait donnée Giorgio Letta. Ils remercient aussi Philippe Flajolet, qui a attiré leur attention sur les variations des nombres harmoniques généralisés et les travaux de Bentley et al. (1978) et Buchta (1989), ainsi que Christian Krattenthaler pour sa relecture attentive.

Références bibliographiques

- [1] J. L. Bentley, H. T. Kung, M. Schkolnick, C. D. Thompson, On the average number of maxima in a set of vectors and applications, *J. ACM* **25** (1978), 536-543.
- [2] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, «Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes», Publ. LACIM, vol. 19, Montréal, 1994.
- [3] A. Boneh, M. Hofri, The coupon-collector problem revisited - a survey of engineering problems and computational methods, *Comm. Statist. Stochastic Models* **13** (1997), 39-66.
- [4] C. Buchta, On the average number of maxima in a set of vectors, *Information Proc. Letters* **33** (1989), 63-65.
- [5] W. Feller, «An Introduction to Probability Theory and its Applications, Third edition», vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [6] P. Flajolet, D. Gardy, L. Thimonier, Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search, *Discrete Appl. Math.* **39** (1992), 207-229.
- [7] P. Flajolet, G. Labelle, L. Laforest, B. Salvy, Hypergeometrics and the cost structure of quadrees, *Random Structures and Algorithms* **7** (1995), 117-144.
- [8] D. Foata, «La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération», Les Presses de l'Université de Montréal, 1974.
- [9] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, «Concrete Mathematics», Addison-Wesley, Reading, 1989.
- [10] B. Lass, «Funktionen zählen», Diplomarbeit, 1997.
- [11] G. Letta, Communication personnelle à Aimé Fuchs, 1992.
- [12] N. Pintacuda, Coupon collectors via the martingales, *Boll. Un. Mat. Ital. A* **17** (1980), 174-177.

Démonstration combinatoire de la formule de Harer-Zagier (*)

On donne une démonstration combinatoire directe de la formule de Harer-Zagier sur les nombres $\varepsilon_g(m)$ de manières d'obtenir une surface de Riemann de genre g par identification par paires des côtés d'un $2m$ -gone. Cette formule est la clé combinatoire nécessaire pour le calcul de la caractéristique d'Euler de l'espace de modules des courbes de genre g . La méthode ici développée reprend l'approche combinatoire imaginée par Harer et Zagier et évite d'utiliser l'intégration sur un ensemble gaussien de matrices aléatoires. Notre technique de démonstration repose sur l'énumération des arborescences et des circuits eulériens.

We give a combinatorial and self-contained proof of the Harer-Zagier formula for the numbers $\varepsilon_g(m)$ of ways of obtaining a Riemann surface of given genus g by identifying in pairs the sides of a $2m$ -gon. This formula was the key combinatorial fact needed for the calculation of the Euler characteristic of the moduli space of curves of genus g . The method developed here completes the original combinatorial approach imagined by Harer and Zagier and avoids using the integration over a Gaussian ensemble of random matrices. Our derivation is based upon the enumeration of arborescences and Euler circuits.

A combinatorial proof of the Harer-Zagier formula

Harer and Zagier asked in [4] for a combinatorial proof of the following theorem:

THEOREM. (Harer-Zagier) *Let $\varepsilon_g(m)$ be the number of ways of obtaining an oriented surface of given genus g by one of the $(2m - 1)!! := (2m)!/(2^m m!)$ possible gluings in pairs of the counterclockwisely oriented sides of a $2m$ -gon, such that two oppositely oriented arcs become an unoriented edge. Then we have for every $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ is fixed):*

$$\sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^{m+1-2g} = \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \cdot (2m - 1)!! \cdot 2^{n-1} \cdot \binom{m}{n-1}.$$

(*) Note publiée dans *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **333**, Série I, p. 155-160, 2001.

Proof (sketched). Every gluing yields a multigraph $G = (V, E)$ with $|E| = m$ edges, some $v := |V| = m + 1 - 2g$ vertices and with a directed Eulerian tour (the $2m$ -gon after the gluings); and

$$\sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^{m+1-2g} = \sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^v$$

counts the number of colourations of its vertices with the colours $1, 2, \dots, N$. However, every colouration is surjective onto some subset of $\{1, 2, \dots, N\}$ of cardinality n , and it is sufficient to prove:

THEOREM. *Let $V = \{1, 2, \dots, n\}$ be given and let $m \geq n - 1$ be fixed; $b := n - 1$, $s := m - b$. Then the number of (really different) directed Eulerian tours on all multigraphs $G = (V, E)$ with $|E| = m$ (undirected) edges is equal to*

$$\frac{(2m)!}{2^s \cdot s! \cdot b!} = (2m - 1)!! \cdot 2^{n-1} \cdot \binom{m}{n-1}.$$

Proof (sketched). By the so-called BEST Theorem it is possible for every directed Eulerian tour to distinguish between b edges forming an arborescence $a : V \setminus r \rightarrow V$ ($r \in V$) on the one hand and the other s supplementary edges on the other hand. Therefore, the desired number can be expressed with the help of the variables x_1, \dots, x_n as follows:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = b + 2s \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} \sum_{r \in V} \sum_{a: V \setminus r \rightarrow V} \left[\prod_{v \in V \setminus r} x_{a(v)} \right] \cdot \left[(x_1 + \dots + x_n)^2 / 2 \right]^s / s! \\ &= \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = b + 2s \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} [x_1 + \dots + x_n]^b \cdot [x_1 + \dots + x_n]^{2s} / (2^s s!) \\ &= \frac{(b + 2s)!}{2^s s!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = b + 2s \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} 1 = \frac{(b + 2s)!}{2^s s!} \cdot \binom{2b + 2s}{b}. \blacksquare \end{aligned}$$

REMARK. With the help of one of the combinatorial proofs of the identity

$$\sum_{r \in V} \sum_{a: V \setminus r \rightarrow V} \prod_{v \in V \setminus r} x_{a(v)} = [x_1 + \dots + x_n]^b$$

as well as of the BEST Theorem one easily gets the promised combinatorial proof.

1. Introduction

Considérons un $2m$ -gone convexe (régulier), orientons ses $2m$ côtés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et numérotons les de 1 à $2m$ suivant cette orientation. Si l'on identifie (i. e. si l'on colle) ces $2m$ arcs (i. e. les $2m$ côtés ainsi orientés) par paires de façon que deux arêtes d'orientations opposées forment une arête non-orientée, on obtient une surface de Riemann décomposée en cellules avec une 2-cellule (le $2m$ -gone), m 1-cellules (les arêtes collées) et v sommets. Chaque identification de deux arcs entraîne l'identification de leurs extrémités; a priori, il n'est pas évident de savoir combien de sommets différents on obtient après ces identifications. Le genre g de la surface est déterminé par la formule d'Euler : $v - m + 1 = 2 - 2g \Leftrightarrow v + 2g = m + 1$. De plus, on a les inégalités : $g \geq 0 \Rightarrow v \leq m + 1$ et $v \geq 1 \Rightarrow g \leq m/2$.

Il y a naturellement $(2m - 1)!! := (2m)!/(2^m m!)$ identifications possibles. On désigne par $\varepsilon_g(m)$ le nombre d'identifications qui conduisent à une surface orientée de genre g . Alors on a pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ étant fixé) :

FORMULE DE HARER-ZAGIER

$$\sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^{m+1-2g} = \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \cdot (2m - 1)!! \cdot 2^{n-1} \cdot \binom{m}{n-1}.$$

Harer et Zagier ont commencé leur démonstration par la même approche combinatoire qui sera prise ici. Pour aboutir, cependant, ils ont dû utiliser l'intégration sur un ensemble gaussien de matrices aléatoires. La présente Note se veut une réponse à la suggestion faite dans leur article ([4], page 460) : «It would be nice to have a direct (geometrical/combinatorial) proof.»

On fait appel, en effet, à deux théorèmes combinatoires classiques qu'il est utile de reformuler et de redémontrer dans le présent contexte, à savoir le calcul des arborescences et le théorème dit BEST sur les circuits eulériens. Un troisième théorème est le chaînon essentiel de notre démonstration. On verra que le dernier paragraphe reprend l'argument combinatoire développé dans [4].

Signalons que Itzykson et Zuber [5] ont simplifié l'intégration sur les matrices aléatoires à l'aide des oscillateurs harmoniques et de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Si l'on s'appuie, en revanche, sur les polynômes de couplages (voir [9], VI-34, remarque 21, ou [3], chapitre 1), on peut résoudre l'intégrale (3.5) de [5] directement, réduisant ainsi cette démonstration de moitié.

Jackson [6] a aussi démontré la formule de Harer-Zagier par un calcul sur les caractères du groupe symétrique, méthode qui a été ensuite reprise et simplifiée par Itzykson et Zuber [5] et Zagier [10].

2. Dénombrement des arborescences et des circuits eulériens

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $V = \{1, 2, \dots, n\}$ un ensemble fini. Un élément $r \in V$ ayant été fixé, on appelle *arborescence* de racine r une fonction acyclique $a : V \setminus r \rightarrow V$ (de manière équivalente, une fonction $a : V \setminus r \rightarrow V$ telle que, pour tout $v \in V \setminus r$, il existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ avec $a^i(v) = r$, c'est-à-dire en itérant la fonction au plus $n-1$ fois on arrive à la racine, voir [2] page 61). Pour mieux distinguer les arborescences des fonctions quelconques on va écrire $a : V \setminus r \rightsquigarrow V$ dans la suite. Soient x_1, \dots, x_n des variables. Posons $a(\mathbf{x}) := \prod_{v \in V \setminus r} x_{a(v)}$. Alors (voir [8], chapitre 5.3) :

THÉORÈME 1. (Cayley)

$$\sum_{r \in V} \sum_{a: V \setminus r \rightsquigarrow V} a(\mathbf{x}) = (x_1 + \dots + x_n)^{n-1}.$$

Démonstration (Prüfer-Foata). Il est naturel de coder une fonction $a : V \setminus r \rightsquigarrow V$ par la suite de ses $n-1$ valeurs prises : $a(v_1), a(v_2), \dots, a(v_{n-1})$. Pour v_1 on peut prendre $v_1 := \min [V \setminus a(V \setminus r)]$. Comme $a' := a|_{V \setminus v_1}$ est encore une arborescence, on peut appliquer la même procédure à a' . On obtient ainsi une bijection entre arborescences $a : V \setminus r \rightsquigarrow V$ et suites de nombres $a(v_1) \in V, \dots, a(v_{n-1}) \in V$ telle que $a(\mathbf{x}) = x_{a(v_1)} \cdot \dots \cdot x_{a(v_{n-1})}$, ce qui achève la démonstration. ■

Soit $D = (V, A)$, $A : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$, un multigraphe orienté, où $A(u, v)$ désigne la multiplicité de l'arc $(u, v) \in V \times V$. Notons que A est un (multi)ensemble de cardinalité $|A| = \sum_{(u,v) \in V \times V} A(u, v)$. Posons $i(u, v) := u$ et $t(u, v) := v$ (pour distinguer l'extrémité initiale et terminale de chaque arc) ainsi que $d_D^+(v) := \sum_{u \in V} A(v, u)$ et $d_D^-(v) := \sum_{u \in V} A(u, v)$ (pour les demi-degrés).

Un *circuit eulérien* de D est une bijection $c : \{1, 2, \dots, |A|\} \rightarrow A$ telle que $t(c(k)) = i(c(k+1))$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, |A|-1\}$ et $t(c(|A|)) = i(c(1))$. Ce dernier sommet est appelé *racine* r du circuit eulérien c . En outre, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, |A|\}$, l'arc $c(k)$ s'appelle *départ* du sommet $i(c(k))$ et *arrivée* au sommet $t(c(k))$. Le nombre des arrivées de c à $v \in V$ est égal à $d_D^-(v)$, et $d_D^+(v)$ est le nombre des départs de v . Naturellement, $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ pour tout $v \in V$ est une condition nécessaire pour l'existence d'un circuit eulérien, condition qu'on supposera satisfaite dans tout ce qui suit.

Alors, soit $c : \{1, 2, \dots, |A|\} \rightarrow A$ un circuit eulérien de racine $r \in V$. Regardons pour tout $v \in V \setminus r$ le plus grand $k \in \{1, 2, \dots, |A|\}$ tel que $i(c(k)) = v$ ainsi que l'arc $c(k)$. Ces arcs forment le graphe d'une fonction $a : V \setminus r \rightarrow V$, qui est même une arborescence, parce qu'on arrive bien à la racine par itération. Cette arborescence des « derniers départs » de c est appelé *arborescence-balai*. Or, chaque circuit eulérien c a une arborescence-balai unique et fournit, pour tout $v \in V$, un ordre linéaire des autres arcs $a \in A$ avec $i(a) = v$: l'ordre des autres départs de c . Réciproquement, étant donnés ces seuls ordres linéaires et l'arborescence-balai,

alors on reconstruit c automatiquement. La bijection ainsi construite implique le théorème suivant (voir [8], théorème 5.6.2, ou [1], chapitre 11.3, théorème 8) :

THÉORÈME 2. (BEST) *Soit $D = (V, A)$ tel que $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ pour tout $v \in V$, et soit $r \in V$ fixé. Si $\epsilon(D, r)$ désigne le nombre des circuits eulériens de racine r de D et $\alpha(D, r)$ désigne le nombre des arborescences de racine r de D , alors :*

$$\epsilon(D, r) = \alpha(D, r) \cdot d_D^+(r)! \prod_{v \in V \setminus r} (d_D^+(v) - 1)!. \quad \blacksquare$$

Soit $G = (V, E)$, $E : V \cup \binom{V}{2} \rightarrow \mathbb{N}$, un multigraphe non-orienté, où $E(v)$ désigne le nombre de boucles autour de $v \in V$ et où $E(\{u, v\})$ désigne le nombre d'arêtes entre deux sommets distincts u et v . On peut considérer E comme un (multi)ensemble de cardinalité $|E| = \sum_{v \in V} E(v) + \sum_{\{u, v\} \in \binom{V}{2}} E(\{u, v\})$, et l'on pose $d_G(v) := 2 \cdot E(v) + \sum_{u \in V \setminus v} E(\{u, v\})$ pour les degrés.

Suivant la suggestion de Berge (voir [1], préface), un circuit eulérien de $G = (V, E)$ est un circuit eulérien du multigraphe orienté $\vec{G} = (V, \vec{E})$ obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête (et boucle) de G par deux arcs d'orientations opposées, de sorte que $|\vec{E}| = 2|E|$. Puisque la condition $d_G^+(v) = d_G^-(v)$ pour tout $v \in V$ est toujours satisfaite, G contient un circuit eulérien si et seulement si G est connexe (notons que les circuits eulériens de G ne sont pas ses cycles eulériens considérés par Euler dans le cadre des « ponts de Königsberg »).

Le nombre minimal d'arêtes nécessaires pour que G soit connexe est égal à $n - 1$ ($|V| = n$), et, dans ce cas-là, G est connexe si et seulement s'il s'agit d'un arbre, « transformé » en arborescence $a : V \setminus r \rightsquigarrow V$ en choisissant une racine $r \in V$. D'après la définition du monôme $a(\mathbf{x})$ de degré $n - 1$ on a $a(\mathbf{x}) = x_r^{d_G(r)} \prod_{v \in V \setminus r} x_v^{d_G(v) - 1}$, et le théorème 2 donne le nombre des circuits eulériens de racine r de G :

$$d_G(r)! \prod_{v \in V \setminus r} (d_G(v) - 1)! = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = n - 1 \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} a(\mathbf{x}).$$

Dans le cas général, c'est-à-dire $G = (V, E)$ connexe et $m := |E| \geq n - 1$, chaque circuit eulérien de racine r de G définit $b := n - 1$ arêtes « de base » par son arborescence-balai $a : V \setminus r \rightsquigarrow V$ d'une part et s autres arêtes supplémentaires d'autre part, $b + s = m$.

Deux circuits eulériens ne sont pas *vraiment différents* s'ils s'obtiennent l'un de l'autre en permutant les deux arcs d'une boucle ou en permutant les arêtes ou les boucles multiples (i. e. de multiplicité ≥ 2).

THÉORÈME 3. Soit $V = \{1, 2, \dots, n\}$ et soit $m \geq n - 1$ fixé. Alors le nombre des circuits eulériens (orientés) vraiment différents sur tous les multigraphes $G = (V, E)$ avec $|E| = m$ arêtes (non-orientés) est égal à

$$\frac{(2m)!}{2^s \cdot s! \cdot b!} = (2m - 1)!! \cdot 2^{n-1} \cdot \binom{m}{n-1}.$$

Démonstration. Codons les arêtes de base par $a : V \setminus r \rightsquigarrow V$ et les arêtes supplémentaires par $E^* : V \cup \binom{V}{2} \rightarrow \mathbb{N}$, $|E^*| = s$. D'après le théorème 2, le nombre des circuits eulériens vraiment différents du graphe obtenu (l'arborescence-balai étant choisi d'avance) est égal à

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = b + 2s \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} a(\mathbf{x}) \cdot \prod_{v \in V} \frac{(x_v^2/2)^{E^*(v)}}{E^*(v)!} \prod_{\{u,v\} \in \binom{V}{2}} \frac{(x_u x_v)^{E^*(\{u,v\})}}{E^*(\{u,v\})!},$$

et il suffit de sommer cette expression sur toutes les fonctions $E^* : V \cup \binom{V}{2} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $|E^*| = s$ et sur toutes les arborescences $a : V \setminus r \rightsquigarrow V$ (et sur $r \in V$). Mais la dernière sommation fait l'objet du théorème 1 et la première sommation donne

$$\sum_{\substack{E^* : V \cup \binom{V}{2} \rightarrow \mathbb{N} \\ |E^*| = s}} \prod_{v \in V} \frac{(x_v^2/2)^{E^*(v)}}{E^*(v)!} \prod_{\{u,v\} \in \binom{V}{2}} \frac{(x_u x_v)^{E^*(\{u,v\})}}{E^*(\{u,v\})!} = \left[(x_1 + \dots + x_n)^2 / 2 \right]^s / s!.$$

Par conséquent, le nombre cherché est égal à

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = b + 2s \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} \partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} [x_1 + \dots + x_n]^b \cdot [x_1 + \dots + x_n]^{2s} / (2^s s!) \\ &= \frac{(b + 2s)!}{2^s s!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = b + 2s \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} 1 = \frac{(b + 2s)!}{2^s s!} \cdot \binom{2b + 2s}{b}. \blacksquare \end{aligned}$$

REMARQUE. De manière plus combinatoire, $\partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n}$ signifie qu'il faut choisir i_1 fois x_1 (dans un ordre linéaire déterminant les départs du circuit eulérien du sommet 1), i_2 fois x_2 , ..., i_n fois x_n . Les choix sont effectués dans un des $b + 2s$ facteurs possibles, un choix parmi les premiers b facteurs contribuant au codage de l'arborescence et un choix parmi les derniers $2s$ facteurs contribuant au codage des arêtes supplémentaires.

3. Démonstration de la formule de Harer-Zagier

Toute identification des arcs du $2m$ -gone crée un multigraphe $G = (V, E)$ avec $|V| = v = m + 1 - 2g$ et $|E| = m$, muni d'un circuit eulérien (le $2m$ -gone après les identifications); et

$$\sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^{m+1-2g} = \sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^v$$

compte le nombre des colorations quelconques de ses sommets avec les couleurs $1, 2, \dots, N$. Cependant, chaque coloration n'utilise qu'un sous-ensemble de cardinalité n de l'ensemble des couleurs $\{1, 2, \dots, N\}$ et crée un circuit eulérien sur un multigraphe avec m arêtes sur cet ensemble de sommets de cardinalité n . Puisque les circuits eulériens vraiment différents correspondent de manière bijective aux identifications des arcs du circuit (via les arêtes non-orientées) et aux marquages des sommets conformes aux identifications des arcs, la formule de Harer-Zagier est une conséquence directe du théorème 3.

Remerciements. En tout premier lieu, je voudrais remercier vivement D. Foata d'avoir rendu possible la rédaction de ce travail en m'invitant à l'IRMA à Strasbourg. Son aide et assistance sont au-delà de toute expression. Je remercie aussi Yu. Matiyasevich et V. Dietrich d'avoir rendu l'internet russe accessible pour moi : c'est dans le dernier chapitre du livre [7] que j'ai découvert le problème ouvert, qui est résolu dans cette Note.

Références bibliographiques

- [1] C. Berge, « Graphes », Bordas, 1983.
- [2] D. Foata et M.-P. Schützenberger, « Théorie géométrique des polynômes eulériens », *Lect. Notes in Math.* **138**, Springer-Verlag, 1970.
- [3] C. D. Godsil, « Algebraic Combinatorics », Chapman & Hall, 1993.
- [4] J. Harer et D. Zagier, The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Invent. math.* **85** (1986), 457-485.
- [5] C. Itzykson et J.-B. Zuber, Matrix integration and combinatorics of modular groups, *Comm. Math. Phys.* **134** (1990), 197-207.
- [6] D. M. Jackson, Counting cycles in permutations by group characters, with an application to a topological problem, *Trans. AMS* **299** (1987), 785-801.
- [7] Lando S.K., « Proizvodyashchie funkcii », NMU.
- [8] R. P. Stanley, « Enumerative Combinatorics », Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [9] G. Viennot, « Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux », Notes de conférences données à l'Université du Québec à Montréal, 1983.
- [10] D. Zagier, On the distribution of the number of cycles of elements in symmetric groups, *Nieuw Archief voor Wiskunde Ser. IV* **13** (1995), 489-495.

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten Kapitel geht es um Anwendungen von Mengenpotenzreihen auf das chromatische Polynom und verschiedene Paarungspolynome.

Der Teil 1.1 ist dem chromatischen Polynom $\chi_G(\lambda)$ eines schlichten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ gewidmet. Definitionsgemäß zählt

$$\chi_G(\lambda) = \lambda \cdot [(\lambda - 1)^{n-1} - b_{n-2} \cdot (\lambda - 1)^{n-2} + \dots + (-1)^n b_1 \cdot (\lambda - 1)]$$

die regulären Färbungen von G mit λ Farben, falls λ eine natürliche Zahl ist. Wenn G zusammenhängend ist, so ist wohlbekannt, daß hierbei b_1, b_2, \dots, b_{n-2} nichtnegative ganze Zahlen sind, die gewissen Koeffizienten des Tutte-Polynomes entsprechen. Diese Zahlen sind wahrscheinlich die kleinsten und damit stärksten Invarianten, die man einem zusammenhängenden Graphen in Abhängigkeit vom chromatischen Polynom zuordnen kann. Auf Stanley geht die Entdeckung zurück, daß $|\chi_G(-1)|$ gleich der Anzahl der azyklischen Orientierungen von G ist. Dieser Satz wurde von Gebhard, Gessel, Greene, Sagan, Viennot und Zaslavsky verfeinert. Wir beweisen eine weitere Verschärfung, indem wir zeigen, daß b_k gleich der Anzahl der $(k + 1)$ -komponentigen azyklischen Orientierungen von G ist, deren einzige Senke eine vorher fixierte Ecke ist. Der systematische Gebrauch der Mengenpotenzreihen liefert äußerst kurze und natürliche Beweise. Insbesondere zeigt sich in diesem Lichte, daß der Satz von Cartier und Foata über die Möbiusinversion im Kommutationsmonoid eine unmittelbare nichtkommutative Verallgemeinerung der Stanleyschen Interpretation von $|\chi_G(-1)|$ darstellt. Unsere Mengenpotenzreihen ermöglichen auch eine mühelose Behandlung der symmetrischen Funktion $X_G = X_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$, die Stanley einem Graphen G zugeordnet hat. Dies geschieht jedoch vor allem im Teil 1.2.

Zunächst betrachten wir im Teil 1.2 zwei komplementäre paare Graphen $G = (X, Y; E)$ und $\overline{G} = (X, Y; \overline{E})$. Bezeichnet $p(G, r)$ die Anzahl der r -Paarungen von G , so ist der Vektor $[p(\overline{G}, r)]_{r=1,2,\dots}$ bekanntlich vom Vektor $[p(G, r)]_{r=1,2,\dots}$ bestimmt. Wir bringen diese beiden Vektoren durch neue Dualitätssätze zueinander in Beziehung, die die Ergebnisse von Chow, Foata, Gessel, Joni, Rota und Zeilberger verallgemeinern. Auf diese Art erhält man insbesondere einen kurzen Beweis der grundlegenden Relation von Berge zwischen den Hamiltonschen Wegen und Kreisen zweier orientierter komplementärer Graphen. Ausgedrückt in der Sprache der Mengenpotenzreihen impliziert diese Identität von Berge sehr viele bisher isoliert gebliebene Ergebnisse der algebraischen Kombinatorik, und zwar die

zuerst von Chow und Gessel bewiesene Chung-Graham Vermutung, die Ergebnisse von Foata und Zeilberger bezüglich der Linearisierungskoeffizienten der Laguerre Polynome sowie die Paritätssätze von Rédei über Turniere, von Lovász über nicht-orientierte Graphen und von Camion und Rao über selbstkomplementäre Graphen. Schließlich untersuchen wir die wichtigsten Beziehungen zwischen Mengenzählungen und symmetrischen Funktionen. Dies führt zu zahlreichen natürlichen Verallgemeinerungen der Sätze von Stanley über die symmetrische Funktion X_G sowie zu deutlichen Vereinfachungen der Beweise. Außerdem zeigen wir, daß auch der Hauptsatz der Dissertation von Chow eine unmittelbare Konsequenz der Identität von Berge ist. In diesem Zusammenhang erweist sich vor allem die von Lascoux entdeckte Addition von Alphabeten als sehr nützlich. Sie beantwortet insbesondere die Frage von Chow nach der Rolle der auftretenden Inversionen.

Im Teil 1.3 betrachten wir die Paarungspolynome $\mu(G, x) := \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \cdot p(G, r) \cdot x^{n-2r}$ und $\mu(\overline{G}, x)$ zweier schlichter (im allgemeinen nicht paarer) komplementärer Graphen $G = (V, E)$ und $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$. Wir verallgemeinern die von Lovász, Viennot und Godsil entwickelte Dualitätstheorie und beweisen insbesondere, daß $e^{-x^2/2} \mu(G, x)$ und $e^{-x^2/2} \mu(\overline{G}, x)$ reelle Fouriertransformierte voneinander sind. Überdies geben wir einen neuen besonders kurzen Beweis des klassischen Satzes von Heilmann und Lieb, daß alle Nullstellen von $\mu(G, x)$ reell sind. Eine Verallgemeinerung des Foataschen kombinatorischen Beweises der Mehler-Formel impliziert in der Tat die überraschende Ungleichung $|\mu(G, x)| \geq |\Im x|^{|V|}$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

Außerhalb der Kombinatorik denkt man bei *Paarungen* wahrscheinlich zuerst an *Skalarprodukte* (oder symmetrische Bilinearformen). Daher liegt es nahe, beides miteinander in Verbindung zu bringen, was im Teil 1.4 durch die Einführung des N -dimensionalen Paarungspolynoms geschieht. Sei also \mathbf{R} ein euklidischer reeller Raum der Dimension N , $\mathbf{R} = \mathbb{R}^N$, mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$, und sei e_1, \dots, e_N dessen kanonische Orthonormalbasis, mit Hilfe derer man Polynome und partielle Ableitungen (oder ∇) auf gewöhnliche Art und Weise interpretiert. Sei $\langle x, y \rangle_P := \langle x, Py \rangle$, $P = P^T$ und $P > 0$, ein zusätzliches Skalarprodukt. Jeder Ecke $v \in V$ des Graphen $G = (V, E)$ wird dann ein Vektor $a_v \in \mathbf{R}$ und jeder Kante $\{u, v\} \in E$ das Skalarprodukt $\langle a_u, a_v \rangle_P$ zugeordnet. Den daraus resultierenden Graphen bezeichnen wir mit $a_P G = (aV, a_P E)$. Betrachtet man eine Paarung des Graphen $a_P G$ und multipliziert das Produkt der Skalarprodukte der Kanten der Paarung mit dem Produkt der Skalarprodukte $\langle x, a_v \rangle_P$, $x \in \mathbf{R}$, der Ecken von $a_P G$, die von Paarungskanten nicht überdeckt werden, so erhält man ein homogenes Polynom vom Grad $n - 2r$ ($n = |V|$), wenn die Paarung r Kanten enthält. Summation über alle Paarungen von $a_P G$ (nach Multiplikation des homogenen Polynoms mit $(-1)^r$) liefert das vorzeichenlose Paarungspolynom $\overline{\mu}(a_P G, x)$ (das gewöhnliche Paarungspolynom $\mu(a_P G, x)$). Wir beweisen (kombinatorisch)

$$\begin{aligned} \mu(\overline{a_P G}, x) &= e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot \overline{\mu}(a_P G, -\nabla_P) \cdot e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \\ &= \exp[-\Delta_P / 2] \cdot \overline{\mu}(a_P G, x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(a_P G, x) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-\langle z-x, z-x \rangle_P / 2} \cdot \mu(a_P G, z) \cdot d_P z \\ &= e^{-\langle x, x \rangle_P / 2} \cdot \mu(a_P G, \nabla_P) \cdot e^{\langle x, x \rangle_P / 2} \\ &= \exp[\Delta_P / 2] \cdot \mu(a_P G, x),\end{aligned}$$

wobei $d_P z := \sqrt{\det(P)/(2\pi)^N} \cdot d^N z$, $\nabla_P := P^{-1} \nabla$, $\Delta_P := \langle \nabla_P, \nabla_P \rangle_P$. Von besonderem Interesse sind hier nicht zuletzt die zahlreichen Anwendungsbeispiele auf die Bi-Algebra der Partitionen, auf Semiinvarianten, auf unseren Teil 1.2, auf harmonische Funktionen, auf die Quantenphysik sowie auf Ergebnisse im Zusammenhang mit sphärischen Designs. Schließlich untersuchen wir den Divisor $\text{div}[\mu(a_P G, x)]$. Wir hatten vermutet, daß sich der im Teil 1.3 bewiesene Satz von Heilmann und Lieb auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt. In der Tat beweisen wir ein Theorem, das die Klasse möglicher Gegenbeispiele sehr stark einschränkt. Obwohl man dieses Ergebnis durch Benutzung des letzten Satzes vom Teil 1.3 noch deutlich verschärfen kann, ist unsere Vermutung falsch. Bereits für $N = 2$ gibt es nämlich (sehr seltene) Graphen, deren N -dimensionales Paarungspolynom keine einzige reelle Nullstelle hat. Eine Familie solcher Graphen geben wir an.

Im zweiten Kapitel geht es um Anwendungen der Kombinatorik auf Probleme, die in der Theorie der Lie-Algebren, der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie in der Algebraischen Geometrie aufgetreten sind.

Das Problem, die Kohomologiegruppen diverser Lie-Algebren zu berechnen, läßt sich auf das Berechnen der Kohomologiegruppen verschiedener Graphenkomplexe zurückführen. Ein kohomologischer Graphenkomplex ist ein Komplex

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{0} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} C^3 \xrightarrow{\delta} \dots$$

wobei C^n der Vektorraum ist, der von den Isomorphieklassen (G, or_G) erzeugt wird, bei denen G ein Multigraph mit n Ecken und or_G eine Orientierung eines G zugeordneten reellen Vektorraumes ist. Die Differentiale sind im wesentlichen durch die duale Operation des Kontrahierens von Kanten gegeben. Im Gegensatz zum Teil 1.1 sind alle Orientierungen modulo zwei zu betrachten. Trotzdem treten gerade hier die entscheidenden Unterschiede zwischen den verschiedenen Graphenkomplexen auf. Zur Berechnung der Kohomologiegruppen der Lie-Algebra Ham_0 Hamiltonscher am Ursprung verschwindender Vektorfelder auf dem unendlichdimensionalen *geraden* Raum haben Kontsevich und Shoikhet Graphenkomplexe mit zwei unterschiedlichen Orientierungen nutzen können und vermutet, daß auch diese beiden Graphenkomplexe selbst isomorph sind. Diese Vermutung wurde zunächst von Salikhov bewiesen. Im Teil 2.1 geben wir einen einfacheren Beweis, indem wir den klassischen Beweis des Fixpunktsatzes von Lefschetz geeignet modifizieren.

Die entscheidende Vermutung von Kontsevich und Shoikhet besagte indessen, daß Ham_0 die gleichen Kohomologiegruppen hat wie die Lie-Algebra $\text{Ham}_0^{\text{odd}}$ Hamiltonscher am Ursprung verschwindender Vektorfelder auf dem unendlich-dimensionalen *ungeraden* Raum. Nach der Einschätzung von Feigin ließ sich diese Vermutung lediglich durch die Konstruktion eines Isomorphismus zwischen den entsprechenden Graphenkomplexen beweisen. Genau dies ist uns gelungen, indem wir «universell orientierte» Graphen eingeführt haben, denen der Teil 2.2 gewidmet ist.

Der Teil 2.3 handelt vom traditionellen Vignettensammlerproblem. Bezeichnet $\mathbb{E}[X^{(k)}]$ den Erwartungswert der Anzahl der Vignetten, die genau k -mal erschienen sind, wenn alle m Felder des Sammelalbums voll sind, so wird die folgende Formel gezeigt:

$$1 - t + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X^{(k)}] \cdot t^k = \frac{1}{1 - t/m} \cdot \frac{1}{1 - t/(m-1)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - t/2}.$$

Zum Beweis lassen sich sämtliche Methoden der kombinatorischen Behandlung von Surjektionen nutzen, die insbesondere im Zusammenhang mit den Stirling-Zahlen entwickelt worden sind. Einige dieser Methoden liefern sogar weitreichende Verallgemeinerungen der angegebenen Formel. Will man umgekehrt Martingale nutzen, was von Wahrscheinlichkeitstheoretikern in Spezialfällen erfolgreich praktiziert wurde, so wird man lediglich auf Differenzgleichungen geführt, die nicht leicht zu lösen sind. Diese Methode findet sich daher im Teil 2.3 nicht wieder.

Außerhalb der Kombinatorik im engeren Sinne treten (kombinatorische) Paarungen gerade aus folgendem Grunde auf (besonders offensichtlich treten sie in Form von Faktoren $(2m-1)!! := (2m-1) \cdot (2m-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ hervor, die die Anzahl der perfekten Paarungen (d. h. mit m Kanten) des $K_{2m} := (V, \binom{V}{2})$, $|V| = 2m$, angeben): Die Orientierung einer orientierten Fläche induziert auf jedem Flächenstück einer Landkarte eine zyklische Orientierung der Kanten des Randes dieses Flächenstückes, wobei für jede Kante die beiden angrenzenden Flächenstücke entgegengesetzte Orientierungen induzieren. Damit kann eine Landkarte gerade durch eine perfekte Paarung entgegengesetzt orientierter Kanten von Zyklen beschrieben werden, was in der Physik durch das Berechnen von Integralen (für die Paarung) über die Spur von Potenzen hermitescher Matrizen (für die Zyklen) modelliert wird. Die Berechnung der (virtuellen) Euler-Charakteristik des Raumes der komplexen algebraischen Kurven vom Geschlecht g haben Harer und Zagier (durch ein kurzes Argument) auf das Abzählen von Identifikationen (Paarungen) entgegengesetzt orientierter Kanten eines $2m$ -Eckes nach der Euler-Charakteristik der entstehenden Fläche zurückgeführt. Dieses kombinatorische Problem erwies sich jedoch als sehr schwierig. Erhält man bei den $(2m-1)!!$ Kantenidentifikationen $\varepsilon_g(m)$ -mal eine Fläche vom Geschlecht g , so wurde von Harer und Zagier folgende Formel bewiesen ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist fest):

$$\sum_{g=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \varepsilon_g(m) \cdot N^{m+1-2g} = \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \cdot (2m-1)!! \cdot 2^{n-1} \cdot \binom{m}{n-1}$$

für jedes $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Harer und Zagier haben den Beweis kombinatorisch begonnen, jedoch dann auf die schon beschriebene Integration zurückgegriffen. Aus unseren Ergebnissen des Teils 1.4 folgt unmittelbar, daß man statt der Integration auch Differentialoperatoren nutzen kann. Der Vorteil der Integration besteht in der scheinbar einfacheren Diagonalisierungsmöglichkeit, die einem Übergang von einem kantenabhängigen Ausdruck zu einem eckenabhängigen Ausdruck entspricht. Kombinatorisch ist eine solche Diagonalisierung allerdings durch das sogenannte Theorem BEST möglich. Verbindet man diesen Satz mit dem Satz von Cayley über das gewichtete Abzählen von Arboreszenzen, so ergibt eine auch rein kombinatorisch beschreibbare kurze Rechnung mit Differentialoperatoren, daß für fixiertes $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und $m \geq n - 1$ die Gesamtzahl der wirklich verschiedenen gerichteten geschlossenen Euler-Wege auf allen ungerichteten Multigraphen $G = (V, E)$ mit $|E| = m$ Kanten gerade $(2m - 1)!! \cdot 2^{n-1} \cdot \binom{m}{n-1}$ beträgt. Zusammen mit dem kombinatorischen Ansatz von Harer und Zagier liefert dies einen *vollständigen* kombinatorischen Beweis der Harer-Zagier Formel und beantwortet damit die entsprechende von Harer und Zagier gestellte Frage. Dieser im Teil 2.4 dargestellte kombinatorische Beweis ist nicht nur elementarer, sondern auch kürzer als alle anderen bisher von Itzykson-Zuber, Jackson und Zagier entdeckten Beweise.

Bodo LASS

THÈSE présentée pour obtenir le grade de *DOCTEUR*

Domaine : *MATHÉMATIQUE*

Titre : CALCUL COMBINATOIRE ENSEMBLISTE

A.M.S. Subject Classification (2000) : 05A15, 05A18, 05C15, 05C30, 05C70, 05E05, 05E35, 17B56 (primary); 05A20, 05C05, 05C10, 05C20, 05C25, 05C38, 05C45, 05C80, 05D15, 12D10, 14H10, 17B65, 20M05, 33C45, 55U10, 60C05, 81Q30, 81T18 (secondary).

Mots clefs : polynôme chromatique, orientations acycliques, monoïde de commutation, graphe complémentaire, couplages, polynôme des tours, coefficients de linéarisation, chemins hamiltoniens, circuits hamiltoniens, tournoi, fonctions symétriques, polynôme de couplage, transformation de Fourier, localisation des zéros, semi-invariants, intégrales de Gauss, produits de Wick, diagrammes de Feynman, transformation de Bargmann-Segal, complexe de graphes, orientations, caractéristique d'Euler, cohomologie, algèbres de Lie, surjections, transformation de Laplace, espace de modules des courbes, circuits eulériens.

La présente thèse regroupe plusieurs travaux de combinatoire énumérative et algébrique, qui utilisent les opérateurs différentiels et l'algèbre des fonctions d'ensembles, fort utile dès qu'apparaissent des partitions d'ensembles. Ces techniques combinatoires ont été appliquées, en géométrie algébrique, au calcul de la caractéristique d'Euler de l'espace de modules des courbes de genre g . Elles ont aussi permis de démontrer une conjecture de Kontsevich-Shoikhet sur les cohomologies des algèbres de Lie. Enfin, de nouveaux résultats sur les polynômes de couplage, les polynômes chromatiques, ainsi que sur les relations entre fonctions d'ensembles et fonctions symétriques ont été obtenus.