

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE  
Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (URA 01)  
7, rue René DESCARTES  
67084 STRASBOURG Cedex

CONFLUENCE DE SINGULARITÉS RÉGULIÈRES D'ÉQUATIONS  
DIFFÉRENTIELLES EN UNE SINGULARITÉ IRRÉGULIÈRE.  
MODÈLE DE GARNIER.

par

Laurent PARISE

AMS subject classification: 34E05, 34E10, 34M25, 34M40

Mots clés: Confluence, Équations différentielles ordinaires, Équations différentielles analytiques, Singularités irrégulières, Analyse asymptotique, Développement asymptotique, Estimation Gevrey.



Ce qui, probablement, fausse tout dans la  
vie, c'est qu'on est convaincu qu'on dit la  
vérité parce qu'on dit ce qu'on pense.

Sacha GUITRY

J'ai toujours mis dans mes écrits toute ma vie et toute ma personne.  
J'ignore ce que peuvent être des problèmes purement intellectuels.

René CHAR



**Merci** à Reinhard SCHÄFKE qui a dirigé ma thèse, m'a encouragé et m'a fait partager sa passion des équations différentielles dans le champ complexe. **Merci** à Claude MITSCHI pour son soutien, ses conseils avisés et sa relecture attentive. Depuis le début, ils ont compris mon parcours et respecté mes choix. **Merci** à Vilmos KOMORNIK auprès duquel j'ai appris de «belles mathématiques» et qui m'aura communiqué, ainsi qu'à beaucoup d'autres, son goût pour l'enseignement. **Merci** à Donald LUTZ pour son accueil chaleureux en Californie et sa venue à Strasbourg. **Merci** enfin à Jean-Pierre RAMIS pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

**Merci** également à ceux qui m'ont fait confiance et ont apprécié mon travail d'enseignant, Raphaële SUPPER, Émile URLACHER et Michèle AUDIN ainsi que les étudiants de la préparation à l'agrégation. **Merci** à Olivier DEBARRE de m'avoir prêté une oreille attentive le jour où j'en ai eu besoin. **Merci** aux professeurs du lycée Kléber, M. MORANDO, Mme HELMER et M. DOUÉ de m'avoir confié leurs élèves quelques heures par semaine. **Merci** à Jean-Denis EIDEN qui fut mon professeur au lycée Fabert de Metz, et qui est devenu un ami. **Merci** à Vazgain AVANISSIAN pour son écoute et son enthousiasme en tant qu'enseignant et chercheur; à Azik VASKEN de m'avoir fait découvrir sa peinture et de me témoigner autant d'affection.

**Merci** à ma famille et mes amis pour leur présence à mes côtés, ils découvrent aujourd'hui mon travail de recherche. **Merci** à Claude d'être toujours là. **Merci** à Séverine d'être près de moi. Enfin, **merci** à tous ceux qui, à l'université ou ailleurs, ont partagé ma vie ces dernières années et ont rendu possible ce travail.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et préliminaires</b>	<b>17</b>
1.1	Le type de confluence de GARNIER pour les équations scalaires . . . . .	17
1.2	Résultat fondamental . . . . .	20
1.2.1	Réduction du problème et théorème principal . . . . .	20
1.2.2	Principe de la démonstration . . . . .	21
1.2.3	Unicité d'une solution bornée de l'équation quadratique . . . . .	26
1.3	Définition et propriétés des séries Gevrey . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Solution fondamentale formelle au voisinage des singularités 0 et <math>z_k</math></b>	<b>31</b>
2.1	Réduction du problème, mise sous forme préparée . . . . .	31
2.2	Solution formelle (puis convergente) au voisinage de 0 . . . . .	32
2.3	Solution formelle (puis convergente) au voisinage de $z_k$ . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Confluence de solutions analytiques sur des secteurs de sommet 0</b>	<b>43</b>
3.1	Transformation en une équation de point fixe . . . . .	43
3.2	Étude des lignes de niveau des fonctions $R_j$ . . . . .	52
3.3	Détermination des secteurs $S_\varepsilon$ et des chemins d'intégration . . . . .	67
3.3.1	Détermination des secteurs $S_\varepsilon$ . . . . .	68
3.3.2	Détermination des chemins d'intégration, preuve du lemme (3.3) . . . . .	70
3.4	Unicité de la solution obtenue : preuve du théorème (3.1) . . . . .	80
3.5	Convergence uniforme des solutions . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Confluence de solutions analytiques sur des secteurs «modifiés»</b>	<b>91</b>
4.1	Existence d'une solution fondamentale analytique . . . . .	92
4.2	Détermination des secteurs $S_\varepsilon$ et des chemins d'intégration . . . . .	95
4.3	Convergence uniforme des solutions . . . . .	101
4.4	Généralisation à d'autres types de confluence . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Solution semi-formelle en <math>\varepsilon</math> et caractère Gevrey</b>	<b>115</b>
5.1	Existence d'une solution semi-formelle particulière . . . . .	116
5.1.1	Construction particulière d'une solution semi-formelle . . . . .	116
5.1.2	Unicité de la solution obtenue : preuve du théorème (5.1) . . . . .	121
5.2	Caractère Gevrey des solutions semi-formelles . . . . .	123
5.2.1	Normes de Nagumo modifiées et séries majorantes . . . . .	124
5.2.2	Démonstration du caractère Gevrey . . . . .	130
5.3	Développement asymptotique et caractère Gevrey . . . . .	135
	<b>Annexe : Matrices de connexion</b>	<b>143</b>



# Table des figures

1.1	<i>Exemple de domaine pour l'équation de point fixe . . . . .</i>	25
2.1	<i>Domaine de convergence de <math>\hat{H}(\cdot, \varepsilon)</math> au voisinage de <math>z_k</math> . . . . .</i>	40
3.1	<i>Représentation de la spirale Spi1 lorsque <math>\tan \theta_r(j, \varepsilon) &gt; 0</math> . . . . .</i>	55
3.2	<i>Représentation de la spirale Spi2 lorsque <math>\tan \theta_r(j, \varepsilon) &gt; 0</math> . . . . .</i>	55
3.3	<i>Représentation de la courbe Spi3 lorsque <math>\tan \theta_r(j, \varepsilon) &gt; 0</math> . . . . .</i>	56
3.4	<i>Représentation de la courbe Multispi<math>_l</math> pour <math>l = 0</math> . . . . .</i>	57
3.5	<i>Représentation de la courbe Multispi (<math>K=1</math>) . . . . .</i>	58
3.6	<i>Représentation de la courbe Spi<math>1_K</math> (<math>K = e^{\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}</math>) . . . . .</i>	59
3.7	<i>Représentation de la courbe Spi<math>3_K</math> (<math>K = e^{\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}</math>) . . . . .</i>	59
3.8	<i>Représentation de la courbe Multispi<math>_{K,l}</math> pour <math>l = 0</math> et <math>K = e^{\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}</math> . . . . .</i>	60
3.9	<i>Représentation de la courbe Multispi<math>_K</math> (<math>K = e^{\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}</math>) . . . . .</i>	60
3.10	<i>Représentation des lignes de niveau <math>R_j(z, \varepsilon) = C</math> (<math>\gamma_j = \frac{\pi}{17}</math>) . . . . .</i>	61
3.11	<i>Représentation des lignes de niveau <math>R_j(z, \varepsilon) = C</math> (<math>\gamma_j = \frac{2\pi}{17}</math>) . . . . .</i>	62
3.12	<i>Représentation des lignes de niveau <math>R_j(z, \varepsilon) = C</math> (<math>\gamma_j = \frac{\pi}{7}</math>) . . . . .</i>	63
3.13	<i>Représentation des lignes de niveau <math>R_j(z, \varepsilon) = C</math> (<math>\gamma_j = \frac{\pi}{4}</math>) . . . . .</i>	64
3.14	<i>Représentation des lignes de niveau <math>R_j(z, \varepsilon) = C</math> (<math>\gamma_j = \frac{\pi}{3}</math>) . . . . .</i>	65
3.15	<i>Représentation des lignes de niveau <math>R_j(z, \varepsilon) = C</math> (<math>\gamma_j = \frac{2\pi}{5}</math>) . . . . .</i>	66
3.16	<i>Représentation de <math>S_{\theta, \varepsilon}(k)</math> pour <math>\cos \theta &gt; 0</math> . . . . .</i>	68
3.17	<i>Représentation de <math>S_{\theta, \varepsilon}(k)</math> pour <math>\cos \theta &lt; 0</math> . . . . .</i>	69
3.18	<i>Allure des secteurs <math>S_\varepsilon(k)</math>, <math>k = 0, \dots, 2r - 1</math> . . . . .</i>	71
3.19	<i>Préliminaires au tracé des chemins d'intégration . . . . .</i>	78
3.20	<i>Description des chemins d'intégration sur <math>S_\varepsilon(k)</math>, <math>k</math> pair et <math>\cos \theta_r(j, \varepsilon) &gt; 0</math> . . . . .</i>	80
3.21	<i>Description des chemins d'intégration sur <math>S_\varepsilon(k)</math>, <math>k</math> impair et <math>\cos \theta_r(j, \varepsilon) &gt; 0</math> . . . . .</i>	81
3.22	<i>Représentation de <math>S_{\rho e^{i\Delta}}</math>, <math>\rho &lt; \eta</math> . . . . .</i>	88
4.1	<i>Domaine <math>F_\varepsilon</math> et chemins d'intégration dans le plan des <math>\omega = \frac{1}{z^r}</math> . . . . .</i>	97
4.2	<i>Représentation des chemins <math>\mathcal{L}_j(z)</math>, <math>\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)</math> et <math>\mathcal{L}_j^\infty(z, \varepsilon)</math> . . . . .</i>	104
4.3	<i>Représentation des chemins <math>\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)</math> et des points <math>a'_j(z, \varepsilon)</math> associés . . . . .</i>	106
5.1	<i>Représentation des secteurs <math>S</math> et <math>S_\sigma</math> . . . . .</i>	124
5.2	<i>Transversalité des chemins <math>L_j(z)</math> avec le bord de <math>S</math> . . . . .</i>	128
A.1	<i>Description des zones où cohabitent plusieurs solutions de (A.2) . . . . .</i>	145
A.2	<i>Conditions portant sur <math>\arg(1 - se^{-ir\alpha})</math> . . . . .</i>	150
A.3	<i>Représentation du domaine <math>S_\varepsilon</math> . . . . .</i>	151



## Introduction

Considérant une équation différentielle linéaire à singularités irrégulières, R. GARNIER affirmait dans [GAR19]: « Une telle équation peut [...] être envisagée comme la limite d'une équation pourvue de points (singuliers) réguliers infiniment voisins; mais la conclusion peut-elle être étendue aux intégrales des deux équations ? »

L'exemple le plus ancien et le plus connu que l'on puisse envisager est celui de l'équation

$$(1 + \varepsilon x)y' - y = 0 \quad (0.1)$$

qui possède, pour  $\varepsilon \neq 0$ , deux points singuliers réguliers,  $x_\varepsilon = -\varepsilon^{-1}$  et  $x_\infty = \infty$  tels que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x_\infty$  et qui admet la solution générale  $y_\varepsilon(x) = A(1 + \varepsilon x)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ . Faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0. L'équation (0.1) tend alors vers l'équation

$$\tilde{y}' - \tilde{y} = 0 \quad (0.2)$$

qui possède  $x_\infty$  comme seul point singulier, irrégulier, et dont la solution générale est  $\tilde{y} = Ae^x$ . Il est bien connu que  $\tilde{y}$  est la limite uniforme de  $y_\varepsilon$  sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .

Considérons un autre exemple, celui de l'équation hypergéométrique d'Euler et de Gauss :

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0 \quad (0.3)$$

Cette équation possède trois points singuliers réguliers 0, 1 et  $\infty$  et admet, entre autres, les solutions suivantes (sous certaines hypothèses pour  $a$ ,  $b$  et  $c$ )

$$y_1(x) = {}_2F_1(a, b, c, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \quad \text{avec } (z)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (z+k)$$

et  $y_2(x) = {}_2F_1(a, a+1-c, a+b+1-c, \frac{x-1}{x})$

définies respectivement sur  $D_1 = D(0, 1)$  et  $D_2 = \{x \in \mathbb{C}, \Re e(x) > \frac{1}{2}\}$ .

Posons  $t = bx$  et  $y^b(t) = y(\frac{t}{b})$ . La transformée de l'équation (0.3) vérifiée par  $y^b$  admet trois points singuliers réguliers 0,  $b$  et  $\infty$  et si l'on fait tendre  $b$  vers l'infini, elle tend vers l'équation hypergéométrique confluyente

$$t\tilde{y}'' + (c-t)\tilde{y}' - a\tilde{y} = 0 \quad (0.4)$$

Cette équation admet 0 comme point singulier régulier et  $\infty$  comme point singulier irrégulier. Le phénomène de confluence intervenant dans ces équations a été totalement décrit dans la thèse de C. ZHANG ([ZHA94]) dont les résultats suivants sont tirés :

Lorsque  $b$  tend vers  $\infty$ , la fonction  $y_1^b$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers la fonction définie par

$$\tilde{y}_1(t) = {}_1F_1(a, c, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} t^n$$

qui est la limite «terme à terme» de la série définissant  $y_1^b$ . Il n'en est pas de même de  $y_2^b$  : une limite «terme à terme» conduit à la série  ${}_2F_0(a, a+1-c, -\frac{1}{t})$  qui diverge pour tout  $t \in \mathbb{C}$ .

C. ZHANG a montré néanmoins que l'on a le résultat de convergence analytique uniforme sur tout compact du demi-plan  $\Re(t) > 0$  :

$$y_2^b(t) \xrightarrow[\Im(b) \rightarrow \pm\infty]{\Re(b) > \Re(a)} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \zeta^{a-1} (1+\zeta)^{c-a-1} e^{-\zeta t} dt .$$

Remarquons que C. ZHANG a utilisé ici une représentation intégrale d'Euler et de Jacobi. C'est un point dont R. GARNIER avait conscience dès 1919 : « Il ne saurait être question de représenter ces intégrales au moyen de développements en série de Taylor (car) la forme invariablement circulaire du domaine de convergence d'une (telle) série [...] constituerait un cadre trop rigide pour l'étude d'un point irrégulier.»

En 1998, R. SCHÄFKE a étudié dans [SCH98] une famille d'équations différentielles linéaires admettant des singularités régulières en  $\infty$  et en  $n$  points qui tendent tous vers 0. Cette famille admet pour «limite» une équation «confluente» possédant une singularité régulière en  $\infty$  et une singularité irrégulière de rang 1 en 0. Ce phénomène est dû à un type de confluence tout à fait particulier faisant apparaître, en chaque singularité régulière, une matrice résidu dont une seule ligne est non nulle.

En ce sens, ce cas constitue une bonne généralisation de la confluence de l'équation hypergéométrique. R. SCHÄFKE a alors établi deux résultats de convergence uniforme. Le premier sur des compacts ne contenant pas 0 et le second, en choisissant une valeur particulière d'un paramètre, sur des voisinages sectoriels de 0.

R. GARNIER a traité un tout autre type de confluence dans [GAR19] pour étudier les solutions d'une équation différentielle linéaire au voisinage d'un point singulier irrégulier, étude abordée plus tard par d'autres techniques et bien connue aujourd'hui (voir par exemple [WAS76]). Considérant l'équation différentielle linéaire

$$y^{(m)} + A_1(x)y^{(m-1)} + \dots + A_m(x)y = 0 \quad (0.5)$$

où  $A_1, \dots, A_m$  sont telles que pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $B_i(x) = x^{-i(n-1)}A_i(x)$  soit holomorphe au voisinage de  $\infty$ , il introduit l'équation

$$(1 - \varepsilon^n x^n)^m y^{(m)} + (1 - \varepsilon^n x^n)^{m-1} A_1(x) y^{(m-1)} + \dots + A_m(x) y = 0 . \quad (0.6)$$

Ainsi, l'équation (0.5) est «limite» de (0.6) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et (0.5) admet une singularité irrégulière de rang  $n$  en  $\infty$  tandis que (0.6) possède  $n+1$  singularités régulières en  $x_h = \varepsilon^{-1} e^{\frac{2hi\pi}{n}}$ ,  $h = 0, \dots, n-1$  et  $x_\infty = \infty$ .

L'idée de GARNIER était de déterminer un système fondamental de solutions de (0.6) sous la forme  $y(z, \varepsilon) = z(x, \varepsilon)u_k(z, \varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, m$  où les  $u_k$  sont des exponentielles exprimant les exposants de monodromie de l'ensemble des singularités régulières.

GARNIER établit un algorithme d'approximations successives permettant de déterminer les fonctions  $z$  par un argument de point fixe. Celles-ci sont alors définies sur des doubles spirales qui s'enroulent autour de  $x_h$  et de  $\infty$  et qui recouvrent des domaines d'adhérence compacte ne contenant pas 0 et contenus dans certains secteurs. Sur ces domaines, la convergence des fonctions  $z$  est uniforme lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 en évitant certains arguments, ce qui fournit un système fondamental de solutions de (0.5).

En 1994, C. ZHANG a réécrit la preuve de GARNIER dans un langage plus accessible et a établi une comparaison avec l'approche de BIRKHOFF des singularités irrégulières. Il a ainsi montré que la méthode de GARNIER permet d'aboutir, dans des cas génériques, au système complet d'invariants de Birkhoff de l'équation (0.5).

Enfin, en 1999, A. GLUTSUK a étudié un processus générique de confluence pour des systèmes différentiels linéaires. Considérant le système de rang de Poincaré  $k$  en 0

$$t^{k+1}z' = A(t)z \quad (0.7)$$

où  $A$  est holomorphe au voisinage de 0, il introduit une perturbation de (0.7) sous la forme

$$\prod_{j=0}^k (t - \alpha_j(\varepsilon)) z' = A(t, \varepsilon) z \quad (0.8)$$

où  $A(t, 0) = A(t)$ ,  $\alpha_i(\varepsilon) \neq \alpha_j(\varepsilon)$  pour  $i \neq j$  et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_i(\varepsilon) = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . Le système (0.7) est bien limite du système (0.8) qui possède, comme dans l'exemple de GARNIER,  $k + 1$  singularités régulières. Cependant, comme GLUTSUK impose que ces singularités forment un polygone convexe «asymptotiquement régulier», le type de confluence qu'il traite ne contient pas la confluence de Garnier.

GLUTSUK a montré qu'une base de Levelt en chaque singularité régulière de (0.8) peut être prolongée à certains secteurs et, après une normalisation appropriée, converge uniformément sur tout compact ne contenant pas 0 vers une base de solutions de (0.7).

Le point de départ de ce travail est tout d'abord la connaissance de la forme «naturelle» et des domaines d'existence d'une solution fondamentale en un point singulier irrégulier. Nous allons étendre l'étude du type de confluence décrit par GARNIER à des systèmes différentiels linéaires et montrer, par des techniques plus modernes, que l'on peut obtenir des solutions «convergeant» vers une solution canonique de (0.7), uniformément sur tout un voisinage sectoriel de 0. Nous envisagerons alors un type de confluence plus général puis nous étudierons le caractère Gevrey des solutions holomorphes obtenues.

Avant de présenter plus en détail le contenu de cette thèse, rappelons un résultat classique (voir [WAS76] chap. IV) :

Soit  $r \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  et  $\tilde{A}$  holomorphe sur un voisinage de l'origine à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\tilde{A}(0)$  ait toutes ses valeurs propres distinctes. On considère le système différentiel à singularité irrégulière de rang  $r$  en 0

$$z^{r+1}Y' = \tilde{A}(z)Y \quad (0.9)$$

Sur tout « bon secteur »  $S$ , c'est-à-dire un secteur de sommet 0 et d'angle d'ouverture strictement supérieur à  $\frac{\pi}{r}$  évitant les lignes de Stokes, (0.9) possède une solution fondamentale de la forme

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{H}(z) e^{\int^z \frac{\tilde{D}_0 + \tilde{D}_1 t + \dots + \tilde{D}_r t^r}{t^{r+1}} dt} \quad (0.10)$$

où  $\tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_r$  sont des matrices diagonales (que nous préciserons) et  $\tilde{H}$  est holomorphe bornée sur  $S$  y admettant un développement asymptotique.

Dans la première partie de la thèse, nous revenons plus en détail sur ce résultat puis nous introduisons le modèle de confluence de Garnier. Ensuite, nous considérons un système différentiel à  $r + 1$  singularités régulières

$$z(z^r - \varepsilon^r)Y' = A(z, \varepsilon)Y \quad (0.11)$$

en les points 0 et  $z_k = \varepsilon e^{\frac{2ik\pi}{r}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, r - 1$  et où  $A(., 0) \equiv \tilde{A}$ .

Nous montrons l'existence, successivement, de  $K$  de différents types conduisant à une solution fondamentale de la forme

$$Y(z, \varepsilon) = K(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (0.12)$$

où  $D_0, \dots, D_r$  sont des matrices diagonales analytiques dans un voisinage de l'origine, vérifiant  $D_0(0) = \tilde{D}_0, \dots, D_r(0) = \tilde{D}_r$ .

Dans une deuxième partie, nous montrons l'existence, en chaque point singulier de (0.11), d'un  $K$  de la forme  $K = \hat{H}$ , où  $\hat{H}(z, \varepsilon) = \sum_i \hat{H}_i(\varepsilon)z^i$  est une série semi-formelle. Puis, nous constatons que ces séries convergent au moins localement.

Dans la troisième partie, nous prouvons l'existence d'un  $K$  de la forme  $K = H$ , où  $H$  est une fonction holomorphe de deux variables  $z$  et  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  variant dans un petit secteur et  $z$  dans des secteurs de sommet 0 et d'angle d'ouverture strictement plus grand que  $\frac{\pi}{r}$  bien déterminés : nous verrons alors que  $H(., \varepsilon)$  converge uniformément vers  $\tilde{H}$  sur ces secteurs.

Dans la quatrième partie, nous démontrons d'abord l'existence d'un  $K$  de la forme  $K = \check{H}$ , où  $\check{H}$  est un fonction holomorphe sur  $\{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V, z \in S_\varepsilon\}$ ,  $V$  désignant un secteur de sommet 0 et  $S_\varepsilon$  un domaine tel que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon$  soit un secteur de sommet 0 et d'angle d'ouverture strictement plus grand que  $\frac{\pi}{r}$ . Ensuite, nous généralisons la notion de convergence uniforme de la fonction  $\check{H}(., \varepsilon)$  vers  $\tilde{H}$  sur les domaines  $S_\varepsilon$ .

Enfin, nous cherchons  $K$  de la forme  $K = \bar{H}$ , où  $\bar{H}(z, \varepsilon) = \sum_i \bar{H}_i(z)\varepsilon^i$  est une série formelle dont les  $\bar{H}_i$  sont holomorphes sur  $S$ . Nous montrons alors le caractère Gevrey d'ordre  $\frac{1}{r}$  de cette série pour voir qu'il s'agit en fait du développement asymptotique Gevrey de la fonction  $H$  définie dans la troisième partie.

Dans le premier chapitre, nous considérons d'abord au paragraphe 1.1 les équations

$$z^{r+1}y' = (d(z) + z^{r+1}\tilde{c}(z))y$$

$$\text{et} \quad z(z^r - \varepsilon^r)y' = (d(z) + z(z^r - \varepsilon^r)c(z, \varepsilon))y .$$

C'est le type de confluence de Garnier pour des équations scalaires d'ordre 1. Nous nous ramènerons ensuite à ce cas (dans les autres chapitres) en introduisant une technique de *splitting* des systèmes différentiels (0.9) et (0.11). Nous montrons que si  $d$  est holomorphe au voisinage de 0 et

$$d(z) = d_0 + d_1z + \dots + d_rz^r + o(z^r) \quad (d_0 \neq 0)$$

alors les équations précédentes admettent respectivement des solutions fondamentales de la forme

$$\tilde{y}(z) = \tilde{h}(z) e^{\int^z \frac{d_0 + d_1t + \dots + d_r t^r}{t^{r+1}} dz} \quad \text{et} \quad y(z) = h(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} .$$

De plus,  $d_0(\varepsilon), \dots, d_r(\varepsilon)$  sont holomorphes en  $\varepsilon$  et bien déterminées de sorte que si  $S, V$  sont des secteurs de sommet 0, si  $\tilde{c} : S \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe bornée et  $c : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe vérifiant

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} c(z, \varepsilon) = \tilde{c}(z) \quad \text{uniformément par rapport à } z \in S,$$

alors

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} h(z, \varepsilon) = \tilde{h}(z) \quad \text{uniformément par rapport à } z \in S.$$

Dans le paragraphe 1.2, nous rappelons le principe de démonstration du résultat de [WAS76] cité plus haut, sur la forme générale des solutions de (0.9). La technique employée est celle du *splitting* : on scinde le système différentiel en systèmes plus petits. Ce procédé peut être étendu au cas où les valeurs propres de la matrice principale ne sont plus distinctes, mais sont non toutes égales, et s'applique encore si on les range en deux ensembles disjoints. Dans les chapitres suivants, nous reprenons cette méthode de *splitting* en l'adaptant au cas de singularités régulières; elle permettra une généralisation ultérieure des résultats que nous obtenons dans cette thèse.

Enfin, on rappelle dans le paragraphe 1.3 les définitions et quelques propriétés des séries Gevrey puis le théorème de Borel-Ritt Gevrey en utilisant la transformée de Borel et la transformée de Laplace tronquée.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons les systèmes différentiels linéaires (0.9) et (0.11) où  $A(z, \varepsilon) = \tilde{A}(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$ . On supposera  $\tilde{A}$  et  $C$  holomorphes sur un voisinage de 0 et à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$  avec  $C(\cdot, 0) \equiv 0$ .

Après avoir mis (0.9) et (0.11) sous une forme que nous appellerons «préparée» dans le paragraphe 2.1, nous énonçons un lemme de *splitting* pour (0.11) au voisinage de 0 puis de  $z_k = \varepsilon e^{\frac{2ik\pi}{r}}$ ,  $k = 0, \dots, r-1$  dans les paragraphes 2.2 et 2.3 et nous mettons en évidence un invariant dans les transformations successives.

Nous montrons alors l'existence d'une solution fondamentale formelle de (0.11) de la forme

$$Y(z, \varepsilon) = \hat{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $D_0, \dots, D_r$  sont des matrices analytiques bien déterminées et  $\hat{H}$  est successivement une série formelle en  $z$ , puis en  $(z - z_k)$ , à coefficients holomorphes (en  $\varepsilon$ ) dans un secteur  $V$  d'origine 0. Nous voyons alors que ces solutions formelles convergent respectivement dans des voisinages de 0 et  $z_k$ , dont le diamètre tend vers 0 avec  $\varepsilon$ .

Dans le troisième chapitre, nous considérons encore les systèmes différentiels linéaires (0.9) et (0.11) mis sous une forme préparée. Dans le paragraphe 3.1, nous transformons le système différentiel (0.11) pour nous ramener à une équation de point fixe et nous sommes alors amenés à considérer un opérateur défini par une intégrale sur un certain espace de Banach  $\mathcal{B}$ .

Dans le but de montrer que cet opérateur est une contraction sur une partie fermée de  $\mathcal{B}$ , nous étudions dans le paragraphe 3.2 les lignes de niveau de certaines fonctions  $R_j$ .

Ensuite, dans le paragraphe 3.3, nous choisissons soigneusement les chemins d'intégration de cet opérateur de manière que les fonctions  $R_j$  soient décroissantes le long de ces chemins

et nous obtenons ainsi l'existence de solutions de (0.11) de la forme

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon) e^{\int_0^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (0.13)$$

où  $H(\cdot, \varepsilon)$  est définie sur un secteur de sommet 0, parmi  $2r$  secteurs tels que deux « consécutifs » d'entre eux soient d'intersection non vide, pour tout  $\varepsilon$  dans un secteur d'angle d'ouverture et de rayon assez petit.

Enfin, en utilisant un théorème d'Ascoli-Arzelà, nous montrons dans le paragraphe 3.5 que l'on a sur chacun des secteurs précédents la limite uniforme

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} H(\cdot, \varepsilon) = \tilde{H} \text{ ,}$$

où  $\tilde{H}$  correspond à la solution (0.10) du système différentiel (0.9) de rang  $r$  définie sur un secteur approprié.

Dans le chapitre 4, nous considérons toujours les systèmes différentiels linéaires (0.9) et (0.11) mis sous une forme préparée dans le but de montrer un résultat de convergence uniforme généralisable à d'autres types de confluence. Comme précédemment, nous transformons l'étude du système différentiel (0.11) en un problème de point fixe et nous reprenons le principe de la démonstration du chapitre 3.

Dans le paragraphe 4.1, nous montrons que si l'on reste à une distance raisonnable de l'origine, il est possible de choisir des chemins d'intégration proches de ceux utilisés pour la résolution du système non perturbé (0.9). Plus précisément, si l'on fixe des domaines de la forme  $S_\varepsilon = S \cap (B(0, \delta|\varepsilon|))^c$  où  $\delta > 0$  est assez grand et  $S$  est un « bon secteur », on peut choisir des chemins d'intégration composés uniquement de segments (dans le plan des  $1/z^r$ ) et le long desquels les fonctions  $R_j(\cdot, \varepsilon)$  sont décroissantes.

Nous obtenons ainsi l'existence de solutions de (0.11) de la forme (0.12) où  $K(\cdot, \varepsilon) = \check{H}(\cdot, \varepsilon)$  est définie sur  $S_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$  dans un secteur d'angle d'ouverture et de rayon assez petit. Enfin, nous montrons dans le paragraphe 4.3 qu'on a l'existence d'une limite uniforme

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|\check{H}(\cdot, \varepsilon) - \tilde{H}\|_{\infty}^{S_\varepsilon} = 0$$

où  $\tilde{H}$  correspond à la solution (0.10) du système différentiel de rang  $r$  (0.9) définie sur  $S$ .

Dans le chapitre 5, nous considérons toujours les systèmes différentiels linéaires (0.9) et (0.11) mis sous une forme préparée mais nous envisageons cette dernière équation comme perturbation de la première et nous établissons l'existence puis le caractère Gevrey de solutions semi-formelles en  $\varepsilon$  (et à coefficients holomorphes en  $z$  dans un secteur) de la forme (0.12).

Dans un premier temps, nous obtenons une solution semi-formelle particulière en utilisant une technique de *splitting*.

Ensuite, dans le paragraphe 5.2, nous établissons le caractère Gevrey  $1/r$  de la solution précédente. Pour ce faire, nous introduisons dans le paragraphe 5.2.1 des *normes de Nagumo modifiées* pour des secteurs et en donnons quelques propriétés. Puis, nous concluons au résultat en montrant qu'une série majorant la série solution vérifie une équation implicite à coefficients holomorphes.

Enfin, nous montrons dans le paragraphe 5.3 que la solution semi-formelle  $\overline{H}$  obtenue précédemment constitue, sur certains secteurs, le développement Gevrey uniforme d'ordre  $1/r$  de la « vraie solution »  $H$  définie dans le chapitre 3.

# Chapitre 1

## Rappels et préliminaires

### 1.1 Le type de confluence de Garnier pour les équations scalaires

Dans cette partie, nous allons donner l'idée principale et fondamentale qu'a développée GARNIER dans [GAR19]. Rappelons pour mémoire que l'auteur s'intéresse à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  admettant une singularité de rang  $r$  (que nous supposons ici à l'origine).

Nous étudierons dans cette thèse le problème plus général et plus «moderne» d'un système différentiel linéaire à singularité irrégulière de rang  $r$  en 0. Toutefois, nous verrons dans les chapitres suivants que nous nous ramenons toujours, par une méthode de *splitting* à une équation scalaire d'ordre 1 de la forme :

$$z^{r+1}y' = (d(z) + z^{r+1}\tilde{c}(z))y \quad (1.1)$$

où  $d$  est holomorphe sur le disque ouvert  $D(0, R_0)$  de rayon  $R_0 > 0$ , et  $\tilde{c}$  holomorphe dans un certain secteur  $S$  de sommet 0. Il nous suffit donc d'envisager ce cas et de lui appliquer l'idée fondamentale de GARNIER. Pour ce faire, posons pour tout  $z \in D(0, R_0)$  :

$$d(z) = d_0 + d_1z + \dots + d_rz^r + z^{r+1}\tilde{k}(z),$$

où  $\tilde{k}$  est holomorphe sur  $D(0, R_0)$ , et remarquons immédiatement que la solution générale de (1.1) est de la forme

$$\tilde{y}(z) = Ae^{\int^z \frac{d(t)+t^{r+1}\tilde{c}(t)}{t^{r+1}} dt} = Ae^{\int_0^z \tilde{c}(t) dt} e^{\int_0^z \tilde{k}(t) dt} e^{\int^z \frac{d_0+d_1t+\dots+d_rt^r}{t^{r+1}} dt} \quad (1.2)$$

Associons à l'équation précédente une équation

$$z(z^r - \varepsilon^r)y' = (d(z) + z(z^r - \varepsilon^r)c(z, \varepsilon))y \quad (1.3)$$

où  $c$  vérifie  $c(z, 0) = \tilde{c}(z)$  pour  $z \in S$ .

Remarquons que pour l'instant, nous n'avons pas défini  $c$  comme une fonction holomorphe sur un certain domaine, une série formelle en  $z$  ou en  $\varepsilon$  possédant éventuellement une propriété Gevrey. Il s'agit simplement de donner une méthode que nous adapterons aux résultats que nous allons démontrer par la suite.

L'équation (1.3) admet  $r + 1$  singularités régulières en les points 0 et  $z_k = \varepsilon e^{\frac{2ik\pi}{r}}$  pour  $k = 0, 1, \dots, r - 1$  et ceux-ci tendent tous vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus, les résidus de cette équation sont :

- en 0 :  $-\frac{d_0}{\varepsilon^r} = -\frac{d_0}{\varepsilon^r} =: \rho(\varepsilon)$

– en  $z_i$ ,  $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ :  $\frac{a(z_i)}{r\varepsilon^r} = \frac{d(z_i)}{r\varepsilon^r} =: \rho_i(\varepsilon)$

Enfin, la solution générale de (1.3) est de la forme

$$y(z, \varepsilon) = A(\varepsilon) e^{\int^z \frac{d(t) + t \frac{(t^r - \varepsilon^r)}{t(t^r - \varepsilon^r)} c(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} = A(\varepsilon) e^{\int_0^z c(t, \varepsilon) dt} e^{\int^z \frac{d(t)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} . \quad (1.4)$$

On peut alors se demander comment passer de la forme (1.4) à la forme (1.2). Remarquons tout d'abord qu'au voisinage de chacune des singularités régulières, on peut écrire la solution (1.4) sous la forme  $y = (z - z_i)^{\rho_i(\varepsilon)} h_i(z)$  où  $h_i$  est holomorphe en  $z_i$  et que l'irrégularité du point singulier dans (1.1) se lit dans l'exponentielle de la solution (1.2) qui, on le sait (voir [WAS76] chap. III), n'apparaît pas pour des singularités régulières.

L'idée de GARNIER est la suivante: effectuer un changement d'inconnue du type  $y = u(z, \varepsilon)w$  où  $u$  s'écrit de façon «naturelle»

$$u(z, \varepsilon) = e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

et qui traduise à la fois

1. la confluence vers la singularité irrégulière, c'est-à-dire l'apparition d'une exponentielle de la forme de celle de (1.2)
2. les exposants des singularités irrégulières

pour se ramener à une équation différentielle admettant une solution holomorphe (à exposant 0) en  $0, z_1, \dots, z_r$ .

Pour cela, il faut que les exposants apparaissant dans  $u$  aux points  $0, z_1, \dots, z_r$  soient les résidus de (1.3). Posons  $P_\varepsilon(z) = d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)z + \dots + d_r(\varepsilon)z^r$ . On peut écrire cette condition sous la forme de  $r+1$  équations:

$$P_\varepsilon(0) = d(0) = d_0 \quad \text{et} \quad P_\varepsilon(z_i) = d(z_i), \quad i = 0, \dots, r-1 \quad (1.5)$$

ou encore  $d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)z_i + \dots + d_r(\varepsilon)z_i^r = d(z_i)$ ,  $i = 0, \dots, r-1$ .

Il s'agit d'un problème d'interpolation ou d'un problème à système de Cramer (dont le déterminant est de type Van der Monde): il existe un unique  $(r+1)$ -uplet solution  $(d_0(\varepsilon), \dots, d_r(\varepsilon))$ . De plus, on peut écrire pour tout  $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} d(z_i) &= \sum_{l=0}^{\infty} d_l z_i^l \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} d_{gr} z_i^{gr} + \sum_{g=0}^{\infty} d_{gr+1} z_i^{gr+1} + \dots + \sum_{g=0}^{\infty} d_{gr+r-1} z_i^{gr+r-1} \\ &= d_0 + z_i \sum_{g=0}^{\infty} d_{gr+1} \varepsilon^{gr} + \dots + z_i^{r-1} \sum_{g=0}^{\infty} d_{gr+r-1} \varepsilon^{gr} + z_i^r \sum_{g=1}^{\infty} d_{gr} z_i^{(g-1)r} \end{aligned}$$

car  $z_i^r = \varepsilon^r$ . Par l'unicité de la solution, on a

$$d_0(\varepsilon) = d_0, \quad d_1(\varepsilon) = \sum_{g=0}^{\infty} d_{gr+1} \varepsilon^{gr}, \dots, \quad d_r(\varepsilon) = \sum_{g=0}^{\infty} d_{(g+1)r} \varepsilon^{gr} .$$

On peut alors écrire la solution fondamentale (1.4) de (1.3) sous la forme

$$y(z, \varepsilon) = A(\varepsilon) e^{\int_0^z c(t, \varepsilon) dt} e^{\int_0^z k(t, \varepsilon) dt} e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

avec  $k(z, \varepsilon) = \frac{d(z) - (d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)z + \dots + d_r(\varepsilon)z^r)}{z(z^r - \varepsilon^r)}$ .

Par les conditions (1.5),  $k$  est holomorphe sur un certain  $D(0, R)$ ,  $0 < R < R_0$  et la confluence est ainsi localisée dans la troisième exponentielle.

Remarquons maintenant que  $\tilde{k}$  est la limite uniforme sur  $D(0, R)$  de  $k(\cdot, \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. En effet, on a

$$d_0(0) = d_0, \quad d_1(0) = d_1, \dots, \quad d_r(0) = d_r$$

donc  $k(z, 0) = \tilde{k}(z)$  pour tout  $z \in \overline{D(0, R)}$ . De plus,  $k$  étant continue sur  $\overline{D(0, R)}^2$ , elle y est uniformément continue :

$$\forall \mu > 0, \exists \delta > 0, \forall (\varepsilon, \varepsilon', z, z') \in D(0, R)^4, (|\varepsilon - \varepsilon'| + |z - z'| < \delta) \Rightarrow |k(z, \varepsilon) - k(z', \varepsilon')| < \mu$$

On choisit  $\varepsilon' = 0$  et  $z = z'$  de sorte que  $|z - z'| < \delta$  est toujours réalisé et on a :

$$\forall \mu > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D(0, R), (|\varepsilon| < \delta) \Rightarrow |k(z, \varepsilon) - \tilde{k}(z)| < \mu$$

ce qui traduit bien la convergence uniforme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k(\cdot, \varepsilon) = \tilde{k}$$

Comme le domaine  $D(0, R)$  est borné et que  $k$  est bornée sur  $\overline{D(0, R)}$ , on en déduit la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\int_0^z k(t, \varepsilon) dt} = e^{\int_0^z \tilde{k}(t) dt} \quad \text{uniformément par rapport à } z \in D(0, R).$$

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, le but de ce travail est de traiter l'équation

$$z(z^r - \varepsilon^r)Y' = A(z, \varepsilon)Y$$

pour obtenir divers résultats d'existence et la convergence (dans des sens qui restent à préciser) d'une solution de la forme

$$Y(z, \varepsilon) = K(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt},$$

lorsque  $A(z, \varepsilon)$  est une fonction holomorphe ou une série semi-formelle en  $z$  ou  $\varepsilon$ .

Il est bien naturel de se demander s'il est possible de conclure facilement dans le cas des équations scalaires (1.1) et (1.3). Nous donnons ici un résultat élémentaire lorsque  $c$  est holomorphe et nous envisagerons d'autres cas dans les chapitres suivants :

**Proposition 1.1** *Soient  $S, V$  deux secteurs ouverts bornés de sommet 0. On suppose  $\tilde{c} : S \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe bornée et  $c : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe, vérifiant*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} c(z, \varepsilon) = \tilde{c}(z) \quad \text{uniformément par rapport à } z \in S.$$

*Les équations (1.1) et (1.3) possèdent alors respectivement des solutions fondamentales  $\tilde{y}$  et  $y$  de la forme*

$$\tilde{y}(z) = \tilde{h}(z) e^{\int^z \frac{d_0 + d_1 t + \dots + d_r t^r}{t^{r+1}}} dz \quad \text{et} \quad y(z) = h(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

*où  $\tilde{h} : S \rightarrow \mathbb{C}$  et  $h : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  sont holomorphes et vérifient*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} h(z, \varepsilon) = \tilde{h}(z) \quad \text{uniformément par rapport à } z \in S.$$

**Preuve :** Comme le secteur  $S$  est borné et comme  $\tilde{h}$  est borné sur  $S$ , on en déduit la limite

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} e^{\int_0^z h(t,\varepsilon) dt} = e^{\int_0^z \tilde{h}(t) dt} \quad \text{uniformément par rapport à } z \in S .$$

De plus, les exponentielles considérées sont bornées, donc en choisissant  $A = 1$  et  $A(\varepsilon)$  tel que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(\varepsilon) = 1$  puis  $\tilde{h}(z) = e^{\int_0^z \tilde{c}(t) dt} e^{\int_0^z \tilde{k}(t) dt}$  et  $h(z) = e^{\int_0^z c(t,\varepsilon) dt} e^{\int_0^z k(t,\varepsilon) dt}$ , on obtient le résultat annoncé.  $\square$

## 1.2 Résultat fondamental

On considère un système différentiel linéaire à singularité irrégulière de rang  $r$  de la forme

$$z^{r+1}Y' = \tilde{A}(z)Y \quad (1.6)$$

où  $z$  est une variable complexe,  $r \in \mathbb{N}$  et  $r \geq 1$ ,  $Y$  est un vecteur de  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $\tilde{A}$  une fonction holomorphe sur un voisinage de l'origine à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

La matrice  $\tilde{A}(0) = \tilde{A}_0$  sera appelée dans la suite *matrice principale* du système et nous verrons qu'elle tient un rôle important dans la détermination d'une solution fondamentale de (1.6). Toutefois, si l'on peut énoncer un résultat général sur la forme des solutions de (1.6) (voir [WAS76] chap. IV), nous nous limiterons au cas générique où  $\tilde{A}_0$  a toutes ses valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \in [1,n]}$  distinctes, ce que nous supposons désormais.

### 1.2.1 Réduction du problème et théorème principal

Nous allons dans un premier temps simplifier la forme du système (1.6) en faisant une simple remarque : la matrice  $\tilde{A}_0$  ayant toutes ses valeurs propres distinctes, il en est de même pour les valeurs propres  $\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)$  de  $\tilde{A}(z)$  sur un certain voisinage de l'origine. Il existe donc  $T$  holomorphe et inversible en 0 telle que

$$(T^{-1}\tilde{A}T)(z) = D(z) = \text{diag}(\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z))$$

Si on effectue la transformation  $Y = TW$ , l'équation 1.6 est alors transformée en une nouvelle équation mise sous une forme «préparée»

$$z^{r+1}W' = (D(z) - z^{r+1}T'(z)T^{-1}(z))W \quad (1.7)$$

Quitte à effectuer ce changement d'inconnue, nous supposons pour la suite de ce travail que la fonction matricielle  $\tilde{A}$  est de la forme

$$\tilde{A}(z) = D(z) + z^{r+1}\tilde{C}(z)$$

où  $\tilde{C}$  est holomorphe à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$  au voisinage de 0.

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, les solutions fondamentales de (1.6) sont «naturellement» définies sur certains secteurs : nous allons voir ici un énoncé précis de ce résultat précédé de quelques définitions :

**Définition 1.1** Pour tout  $(i, j) \in [1, n]^2$ ,  $i \neq j$ , on note

$$E_{i,j} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \Re e \left( \frac{\lambda_i - \lambda_j}{z^r} \right) = 0 \right\} .$$

1. On appelle ligne de Stokes du système (1.6) chacune des demi-droites d'origine 0 constituant  $\bigcup_{\substack{(i,j) \in [1,n]^2 \\ i \neq j}} E_{i,j}$ .

2. Deux lignes de Stokes sont dites associées si elles appartiennent au même  $E_{i,j}$ .

**Définition 1.2** On dit qu'un secteur ouvert  $S$  de sommet  $0$  est un «bon secteur» pour le système (1.6) si  $S$  a un angle d'ouverture strictement supérieur à  $\frac{\pi}{r}$  et si  $\bar{S}$  ne rencontre pas deux lignes de Stokes associées.

**Notation:** Dans toute la suite, si  $S$  désigne un secteur de sommet  $0$  et de rayon quelconque (éventuellement infini), on note pour tout  $R > 0$ ,  $S_R = S \cap D(0, R)$ .

Énonçons le théorème principal donnant la forme des solutions fondamentales de (1.6), résultat inspiré de [WAS76]:

**Théorème 1.1** Considérons le système (1.6) et supposons que les valeurs propres de la matrice principale  $\tilde{A}_0$  sont toutes distinctes. Alors, le système possède sur tout «bon secteur»  $S$  de rayon assez petit une unique solution fondamentale de la forme

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{H}(z) e^{\int^z \frac{D_0 + D_1 t + \dots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt} \quad (1.8)$$

vérifiant  $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{H}(z) = I$ , où  $D_0, \dots, D_r$  sont des matrices diagonales et  $\tilde{H}$  est une fonction holomorphe bornée sur  $S$  à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$ . De plus,  $\tilde{H}$  admet dans  $S$  un développement asymptotique en  $0$  indépendant de  $S$ :

$$\tilde{H}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{H}_n z^n, \quad z \rightarrow 0, \quad z \in S$$

**Remarque 1.1** Pour des notions générales sur les développements asymptotiques, on pourra se reporter au (1.3) et à [PAR99].  $\triangle$

### 1.2.2 Principe de la démonstration

Il ne s'agit pas ici de donner une démonstration précise du théorème précédent, mais d'en donner les diverses étapes et de préciser un certain nombre de points dont nous nous servirons dans ce travail. On trouvera dans [WAS76] chap. IV un résultat utilisant la même technique, mais pour une matrice  $\tilde{A}_0$  ayant éventuellement des valeurs propres multiples: dans ce cas, la fonction  $\tilde{H}$  sera définie sur un secteur d'angle plus petit que  $\frac{\pi}{r}$ . C'est au prix de quelques modifications sur les chemins d'intégration utilisés (voir ci-après) que nous parviendrons au résultat.

Comme nous le rappellerons plus loin, nous allons adapter la méthode du *splitting* employée dans cette démonstration à l'étude de notre équation perturbée (0.11), pour obtenir une solution fondamentale d'une forme analogue à celle de la solution de l'équation à singularité irrégulière (1.6). Nous reviendrons donc en détail sur les points de cette démonstration dans la suite de ce travail.

Énonçons tout d'abord le lemme fondamental précédé de la

**Définition 1.3** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S$  un «bon secteur» pour le système (1.6). On dit que  $A : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifie la condition (COND0) du *splitting* sur  $S$  si on peut écrire:

$$\forall z \in S, \quad A(z) = D(z) + z^{r+1}C(z)$$

où  $C : S \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe bornée et  $D$  est diagonale holomorphe dans un voisinage de  $0$  telle que  $D_0$  a toutes ses valeurs propres distinctes. On dira de plus que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND0).

Remarquons immédiatement que la fonction matricielle  $\tilde{A}$  de l'équation (1.6) vérifie les conditions (COND0) du *splitting* car on peut écrire

$$\forall z \in S, \tilde{A}(z) = D(z) + z^{r+1}\tilde{C}(z)$$

où  $S$  est un « bon secteur » quelconque de rayon assez petit car  $D$  est diagonale, et  $D$  et  $\tilde{C} = -T^{-1}T'$  sont bornées sur un voisinage de l'origine.

**Lemme 1.1 (*splitting*)** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < n$  et  $S$  un « bon secteur » pour le système (1.6).*

*Si  $\tilde{A} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  holomorphe vérifie les conditions (COND0) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , alors il existe  $R > 0$  et  $\tilde{P} : S_R \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  holomorphe bornée et inversible sur  $S$ , vérifiant  $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{P}(z) = I$ , qui transforme, par le changement d'inconnue  $Y = \tilde{P}W$ , l'équation*

$$\begin{aligned} z^{r+1}Y'(z) &= \tilde{A}(z)Y(z) \\ \text{en l'équation } z^{r+1}W'(z) &= \tilde{B}(z)W(z), \end{aligned}$$

où  $\tilde{B} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  est holomorphe de la forme

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^{11} & 0 \\ 0 & \tilde{B}^{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad \tilde{B}^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}).$$

*De plus, si l'on écrit  $D = \text{diag}(D_1, D_2)$ ,  $D_1 \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $D_2 \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ , alors  $\tilde{B}^{11}$  et  $\tilde{B}^{22}$  vérifient la condition (COND0) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D_1$  et  $D_2$ .*

Avant de poursuivre avec la preuve de ce lemme, expliquons comment celui-ci conduit au théorème (1.1). On a effectué ici un *splitting* du premier système en deux systèmes de tailles plus petites :

$$\begin{aligned} z^{r+1}Y_1'(z) &= \tilde{B}^{11}(z)Y_1(z) \\ \text{et } z^{r+1}Y_2'(z) &= \tilde{B}^{22}(z)Y_2(z) \end{aligned}$$

vérifiant la même condition. Cela signifie que l'on peut se ramener en appliquant un nombre fini de fois ce lemme à des équations scalaires de la forme

$$z^{r+1}y' = (\lambda_i(z) + z^{r+1}\tilde{c}_i(z))y \tag{1.9}$$

où  $\lambda_i(z)$  est la  $i^e$  valeur propre de  $\tilde{A}(z)$ , que nous avons déjà traitées dans la partie (1.1) : si on note

$$\lambda_i(z) = \lambda_{0,i} + \lambda_{1,i}z + \cdots + \lambda_{r,i}z^r + z^{r+1}k_i(z)$$

où  $k_i$  est holomorphe dans un voisinage de l'origine, on a vu qu'il existe une solution fondamentale de (2.5) de la forme

$$\tilde{y}(z) = \tilde{h}_i(z)e^{\int^z \frac{\lambda_{0,i} + \lambda_{1,i}t + \cdots + \lambda_{r,i}t^r}{t^{r+1}} dt} \quad \text{avec} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{h}_i(z) = 1$$

et  $\tilde{h}_i$  holomorphe bornée sur  $S_R$  (pour  $R$  assez petit).

Dans la suite et quitte à diminuer le rayon de  $S$ , nous noterons  $S = S_R$  pour ne pas alourdir les notations. Alors, la solution du système de départ étant de la forme  $Y = \tilde{P}W$  où  $\tilde{P} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifie  $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{P}(z) = I$ , et ainsi de suite, de *splitting* en *splitting*, on obtient finalement une solution fondamentale de (1.6) de la forme :

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{H}(z)e^{\int^z \frac{D_0 + D_1t + \cdots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt}$$

où  $H : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  est inversible bornée telle que  $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{H}(z) = I$  et  $D_0, D_1, \dots, D_r$  sont définies par

$$D(z) = D_0 + D_1 z + \dots + D_r z^r + o(z^r), \quad z \rightarrow 0 .$$

Voyons maintenant le principe de la démonstration du lemme (1.1). Un point essentiel de la méthode consiste à chercher  $\tilde{P}$  sous la forme

$$\tilde{P} = I + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{P}^{12} \\ \tilde{P}^{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \tilde{P}^{21} : S \rightarrow M_{n-p,p}(\mathbb{C}) \text{ et } \tilde{P}^{12} : S \rightarrow M_{p,n-p}(\mathbb{C}) \quad (1.10)$$

En effectuant le changement d'inconnue  $Y = \tilde{P}W$  dans l'équation (1.6), on obtient alors des équations pour  $\tilde{P}^{21}$  et  $\tilde{P}^{12}$  déterminant dans les deux cas une unique série formelle solution. Notons que ce résultat repose essentiellement sur le fait que l'application  $M \mapsto \tilde{A}_0^{22}M - M\tilde{A}_0^{11}$  est inversible. Nous reprendrons ce point dans la remarque ci-dessous.

Notons ici que si l'on a supposé que  $\tilde{A}$  vérifie les conditions (COND0) du *splitting*, les séries formelles  $\hat{P}^{21}$  et  $\hat{P}^{12}$  obtenues et correspondant à  $\tilde{P}^{21}$  et  $\tilde{P}^{12}$  vérifient de plus :

$$\hat{P}^{21} = O(z^{r+1}) \quad \text{et} \quad \hat{P}^{12} = O(z^{r+1})$$

Ensuite, une simple élimination de  $\tilde{B}^{11}$  et  $\tilde{B}^{22}$  nous conduit aux équations quadratiques

$$\begin{aligned} z^{r+1}(\tilde{P}^{21})' &= \tilde{A}^{21} + \tilde{A}^{22}\tilde{P}^{21} - \tilde{P}^{21}\tilde{A}^{11} - \tilde{P}^{21}\tilde{A}^{12}\tilde{P}^{21} \\ z^{r+1}(\tilde{P}^{12})' &= \tilde{A}^{12} + \tilde{A}^{11}\tilde{P}^{12} - \tilde{P}^{12}\tilde{A}^{22} - \tilde{P}^{12}\tilde{A}^{21}\tilde{P}^{12} . \end{aligned}$$

Considérons par exemple la première de ces équations (on appliquera le même procédé à la seconde). En écrivant la matrice  $\tilde{P}^{21}$  comme un vecteur de  $\mathbb{C}^{p(n-p)}$ , on transforme cette équation matricielle en une équation vectorielle de la forme

$$z^{r+1}\tilde{\omega}'(z) = \tilde{f}_0(z) + \tilde{F}(z)\tilde{\omega}(z) + \tilde{f}_2(z, \tilde{\omega}(z)) \quad (1.11)$$

selon la correspondance

$$\tilde{P}^{21} \longleftrightarrow \tilde{w}, \quad \tilde{A}^{21} \longleftrightarrow \tilde{f}_0, \quad \tilde{A}^{22}\tilde{P}^{21} - \tilde{P}^{21}\tilde{A}^{11} \longleftrightarrow \tilde{F}\tilde{w} \quad (1.12)$$

$$\text{et} \quad \tilde{P}^{21}\tilde{A}^{12}\tilde{P}^{21} \longleftrightarrow \tilde{f}_2(\cdot, \tilde{w}) .$$

Puis, après avoir appliqué la méthode de variation de la constante à l'équation précédente, on est amené à chercher  $\tilde{w}$  comme solution d'une équation de point fixe

$$\tilde{w}(z) = e^{F_0\tilde{m}(z)} \int_{L(z)} e^{-F_0\tilde{m}(t)} \frac{\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\omega}(t) + \tilde{f}_2(t, \tilde{\omega}(t))}{t^{r+1}} dt \quad (1.13)$$

où  $\tilde{m}(z) = -\frac{1}{rz^r}$ ,  $\tilde{F}_0 = \tilde{F}(0)$ ,  $\tilde{B} = \tilde{F} - \tilde{F}_0$  et  $L(z)$  est un (multi-)chemin dans  $S$  d'extrémité  $z$  à déterminer.

**Remarque 1.2**  $\tilde{F}_0$  correspond ici à la matrice de l'application linéaire  $M \mapsto \tilde{A}_0^{22}M - M\tilde{A}_0^{11}$ . Celle-ci est inversible car les valeurs propres de  $\tilde{A}_0$ , donc de  $\tilde{A}_0^{11}$  et  $\tilde{A}_0^{22}$ , sont distinctes.  $\tilde{F}_0$  est même diagonale et on peut alors noter  $\tilde{F}_0 = \text{diag}(\gamma_j, j = 1, \dots, p(n-p))$  avec pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$ ,  $\gamma_j \neq 0$ .

C'est un point essentiel de la technique de *splitting* et ce qui fait tout l'intérêt de la méthode. En effet, pour avoir le lemme de *splitting*, il n'est pas nécessaire que la matrice principale  $\tilde{A}_0$  ait toutes ses valeurs propres distinctes : il suffit que les matrices  $\tilde{A}_0^{11}$  et  $\tilde{A}_0^{22}$

n'aient pas de valeur propre commune, autrement dit, il suffit que les valeurs propres de  $\tilde{A}_0$  soient classées en deux ensembles disjoints.

Dans la suite de ce travail, nous reprendrons à notre compte la technique de *splitting*, ce qui pourra permettre une généralisation ultérieure dans le cas où la matrice principale n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes.  $\triangle$

Notons maintenant  $\mathcal{F}_0(\tilde{\omega})(z)$  le membre de droite de l'équation (1.13). On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(\tilde{\omega})(z) &= \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{R}_0(\tilde{\omega})(z) \\ \text{avec } \mathcal{T}_0(\tilde{\omega})_j(z) &= e^{\gamma_j \tilde{m}(z)} \int_{L_j(z)} e^{-\gamma_j \tilde{m}(t)} \frac{\tilde{\omega}_j(t)}{t^{r+1}} dt \\ \text{et } \mathcal{R}_0(\tilde{\omega})(z) &= \tilde{f}_0(z) + \tilde{B}(z)\tilde{\omega}(z) + \tilde{f}_2(z, \tilde{\omega}(z)) \end{aligned} \tag{1.14}$$

où  $L_j(z)$  désigne la  $j^{\text{e}}$  composante de  $L(z)$ .

Pour trouver une solution bornée de l'équation (1.11), il nous suffit de trouver une solution bornée sur  $S$  de l'équation de point fixe (1.13).

On considère maintenant l'espace de Banach  $\mathcal{B}_0$  des fonctions holomorphes bornées sur  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^{p(n-p)}$  muni de la norme  $\|\omega\| = \sup_{z \in S} \max_{j=1}^{p(n-p)} |\omega_j(z)|$ . Il s'agit, pour appliquer le théorème du point fixe, de montrer que  $\mathcal{F}_0$  est une contraction sur une partie fermée de  $\mathcal{B}_0$ . Pour cela, on démontre le

**Lemme 1.2** *Il existe  $C_0 > 0$  tel que pour tout  $\omega \in \mathcal{B}_0$ ,  $\|\mathcal{T}_0 \omega\| \leq C_0 \|\omega\|$*

La preuve de ce lemme repose sur un choix judicieux des (multi-)chemins  $L(z)$  d'extrémité  $z$  : on est amené à considérer pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$ ,  $\tilde{R}_j(z) = \Re e(\gamma_j \tilde{m}(z))$  pour montrer le

**Lemme 1.3** *Il existe une famille de chemins différentiables par morceaux  $\Gamma_z(\cdot)|_{z \in S}$  tels que  $\Gamma_z : [0, 1] \rightarrow \bar{S}$ ,  $\Gamma_z(0) = 0$ ,  $\Gamma_z(1) = z$  et  $C_0 > 0$  tels que :*

$$\forall z \in S, \forall s \in ]0, 1[, \left| \frac{d}{ds}(\tilde{m}(\Gamma_z(s))) \right| \leq -C_0 \frac{d}{ds} \tilde{R}_j(\Gamma_z(s)) .$$

La description des chemins d'intégration faite dans [WAS76] nous permet de définir, dans le cas particulier où  $\tilde{A}_0$  a toutes ses valeurs propres distinctes,  $L_j(z)$  comme un chemin de 0 à  $z$  dans  $S$  correspondant dans le plan des  $\frac{1}{z^r}$  à une demi-droite  $] \infty e^{i\varphi_j}, \frac{1}{z^r} ]$  où  $\varphi_j$  est tel que  $\Re e(\gamma_j e^{i\varphi_j}) < 0$ .

**Remarque 1.3** Nous donnons ici, et sans démonstration, une généralisation du type de chemins décrits ci-dessus : elle se déduit immédiatement de la démonstration de [WAS76] en remarquant que l'on peut choisir tout chemin réunion de segments vérifiant une certaine inégalité .

Plus précisément, il est possible de choisir  $\mu > 0$  et pour chaque  $z \in S$  dans le plan des  $\frac{1}{z^r}$  un chemin de l'infini à  $\frac{1}{z^r}$  formé de segments et d'une demi-droite de la forme  $(\sigma_0, \sigma_1]$  avec  $\varphi = \arg(\sigma_1 - \sigma_0)$  vérifiant  $\Re e(\gamma_j e^{i\varphi_j}) \geq \mu > 0$  (éventuellement  $\omega_0 = \infty e^{i\varphi}$ ). La constante  $C_0$  du lemme précédent ne dépendra alors que de  $\mu$  et pas de la forme des chemins choisis vérifiant tous cette condition.

De plus,  $\mathcal{F}_0$  restera une contraction sur un bon espace métrique complet et on montrera dans la partie (1.2.3) que la solution obtenue est la même que celle construite ici.  $\triangle$

Posons maintenant pour  $M > 0$ ,  $\mathcal{B}_0^M = \{\omega \in \mathcal{B}_0, \|\omega\| \leq M\}$ .  $\mathcal{B}_0^M$  est une partie fermée de  $\mathcal{B}_0$  donc un espace métrique complet : on peut y appliquer le théorème de point fixe. En utilisant le fait que

$$\tilde{f}_0(z) = O(z), \quad \tilde{F}(z) = O(z) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_2(z, \cdot) = O(z), \quad z \rightarrow 0, z \in S$$

on montre que pour  $M$  assez grand (et arbitrairement grand),  $\mathcal{F}_0$  est toujours une contraction sur  $\mathcal{B}_0^M$  quitte à diminuer le rayon de  $S$ .

**Remarque 1.4** Pour que les chemins soient tous inclus dans le domaine considéré, il faut modifier quelque peu le secteur  $S$ . On choisira dans le plan des  $\frac{1}{z^r}$  l'intersection d'un secteur  $S_1$  centré en 0 et d'angle d'ouverture strictement plus grand que  $\pi$  (correspondant à  $S$  dans le plan des  $z$ ) et d'un secteur  $S_2$  centré en  $\frac{1}{a^r}$ ,  $a \in S$ , de module assez grand, d'angle d'ouverture plus grand que celui de  $S_1$  mais assez petit pour que  $S_2$  ne contienne aucune des droites définies par

$$\Re(\gamma_j w) = \Re\left(\gamma_j \frac{1}{a^r}\right), \quad j = 1, \dots, p(n-p)$$

La figure ci-dessous donne une représentation dans le plan des  $\frac{1}{z^r}$  d'un domaine  $S_1 \cap S_2$  : le domaine correspondant dans le plan des  $z$  n'est plus alors réellement un «secteur» au sens habituel mais contient tout de même un « bon secteur » sur lequel une solution est définie, nous parlerons donc toujours de secteur par abus de langage.

FIG. 1.1: Exemple de domaine pour l'équation de point fixe

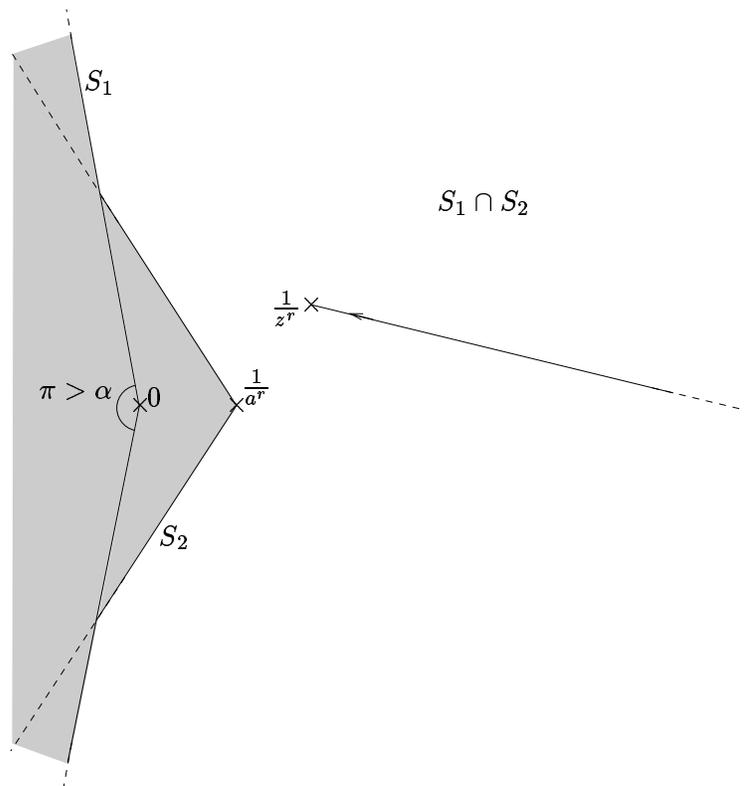


Figure réalisée dans le plan des  $\frac{1}{z^r}$

△

**Remarque 1.5** Le fait de diminuer le rayon du secteur  $S$  ne constitue pas réellement un problème car il nous suffit d'appliquer un **nombre fini de fois** le lemme de *splitting*. Nous pouvons donc supposer avoir choisi ce rayon assez petit dès le départ.  $\triangle$

La solution obtenue comme unique point fixe de  $\mathcal{F}_0$  sur  $\mathcal{B}_0^M$  est une solution bornée définie sur  $S$  de (1.11) correspondant à  $\tilde{P}^{21}$  via la transformation du vecteur  $\tilde{w}$  en matrice.

On montre finalement que la solution formelle calculée précédemment constitue le développement asymptotique de  $\tilde{P}^{21}$ , en considérant la différence pour tout  $n \in \mathbb{N}$  entre  $\tilde{P}^{21}$  et les  $n$  premiers termes de la série formelle. Notons alors que l'on a :

$$\tilde{P}^{21}(z) = O(z^r), \quad z \rightarrow 0, \quad z \in S$$

et en particulier que  $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{P}(z) = I_n$ , comme annoncé dans le lemme (1.1).

**Remarque 1.6** Les applications successives du lemme de *splitting* pour se ramener à une équation scalaire et démontrer le théorème (1.1) ne prouvent pas l'unicité de l'écriture (1.8) lorsque  $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{H}(z) = I$ . Nous utiliserons pour ce faire le résultat de la partie (1.2.3) et une technique de démonstration assez générale que nous exposerons dans la partie (3.4), c'est pourquoi nous admettrons pour l'instant cette partie du théorème.  $\triangle$

### 1.2.3 Unicité d'une solution bornée de l'équation quadratique

Nous reprenons ici les notations précédentes pour énoncer un résultat qui ne se trouve pas dans [WAS76] mais qui est une conséquence de la démonstration du théorème précédent. Nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition suivante :

**Proposition 1.2** *Soit  $T$  un ouvert simplement connexe contenant un « bon secteur »  $S$ . On note  $\tilde{\omega}$  la solution de*

$$z^{r+1}\omega'(z) = \tilde{f}_0(z) + \tilde{F}(z)\omega(z) + \tilde{f}_2(z, \omega(z)) \quad (1.15)$$

*obtenue comme unique solution sur  $S$  de l'équation de point fixe définie par  $\mathcal{F}_0$ . Alors, toute solution bornée de (1.15) définie sur  $T$  est le prolongement analytique de  $\tilde{\omega}$  sur  $T$ .*

**Preuve :** Supposons donnée une solution  $y$  de (1.15) définie sur  $T$  bornée par  $N$  et  $\tilde{\omega}$  obtenue comme unique point fixe de  $\mathcal{F}_0$  sur  $\mathcal{B}_0^M$ ,  $M > 0$ . On note  $K = \max(M, N)$ . Quitte à réduire le rayon de  $S$ , on a vu que  $\mathcal{F}_0$  est encore une contraction sur  $\mathcal{B}_0^K$ .

Montrons maintenant que  $y$  vérifie l'équation de point fixe  $y = \mathcal{F}_0(y)$ . Notons que l'on a

$$\forall z \in T, \quad z^{r+1}y'(z) - \tilde{F}_0 y = \tilde{f}_0(z) + \tilde{B}(z)y(z) + \tilde{f}_2(z, y(z))$$

où  $\tilde{B} = \tilde{F} - \tilde{F}_0$ . Alors, pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$  et tout  $t \in S$ , on peut écrire

$$\left( e^{\frac{\gamma_j}{r t^r}} y_j(t) \right)' = e^{\frac{\gamma_j}{r t^r}} \left( \frac{\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(z)y(t) + \tilde{f}_2(z, y(t))}{t^{r+1}} \right)_j$$

D'où, en intégrant entre  $T \in S$  et  $z \in S$  le long de  $L_j(z)$  :

$$\left[ e^{\frac{\gamma_j}{r t^r}} y_j(t) \right]_T^z = \int_T^z e^{\frac{\gamma_j}{r t^r}} \left( \frac{\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(z)y(t) + \tilde{f}_2(z, y(t))}{t^{r+1}} \right)_j dt$$

Si on note  $\varphi = \arg(T)$ , on a vu que si  $T \in L_j(z)$  est assez proche de 0, on a  $\Re(\gamma_j e^{-ir\varphi}) < -\mu$  d'où

$$\left| e^{\frac{\gamma_j}{rT^r}} y_j(T) \right| = e^{\frac{1}{r|T|^r} \Re(\gamma_j e^{-ir\varphi})} |y_j(T)| \leq e^{-\frac{\mu}{r|T|^r}} |y_j(T)| \xrightarrow[T \in L_j(z)]{T \rightarrow 0} 0$$

car  $y$  est bornée sur  $S$ . On a donc montré que pour tout  $z \in S$ , on a :

$$e^{\frac{\gamma_j}{rz^r}} y_j(z) = \int_{L_j(z)} e^{\frac{\gamma_j}{rt^r}} \left( \frac{\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(z)y(t) + \tilde{f}_2(z, y(t))}{t^{r+1}} \right) dt$$

c'est-à-dire  $y = \mathcal{F}_0(y)$ . De plus on a  $\tilde{\omega} = \mathcal{F}_0(\tilde{\omega})$  et  $y, \tilde{\omega} \in \mathcal{B}_0^K$  donc on a  $\tilde{\omega} = y|_S$ . Comme  $T$  est simplement connexe,  $y$  est le prolongement analytique de  $\tilde{\omega}$  sur  $S$ , ce qui termine la preuve.

**Remarque 1.7** Nous avons vu dans la remarque (1.3) que l'on peut choisir divers types de chemins pour définir l'application  $\mathcal{F}_0$ . Dans tous les cas, l'unique solution de l'équation de point fixe (1.13) est une solution bornée de (1.11) sur  $S$ . D'après la proposition (1.2), on obtient donc toujours la même solution de (1.11) quel que soit le chemin du type évoqué dans la remarque (1.3).  $\triangle$

### 1.3 Définition et propriétés des séries Gevrey

Dans cette partie, nous donnons les définitions de série Gevrey et de développement asymptotique Gevrey ainsi qu'un résultat que nous utiliserons dans ce travail: le lemme de Watson-Gevrey. On pourra trouver plus de détails sur cette théorie par exemple dans [RAM93], [BAL94] ou [HS99].

C'est à H. POINCARÉ que l'on doit la théorie asymptotique classique: il «l'a élaborée avec l'idée de l'appliquer aux équations différentielles analytiques: sa principale motivation était de donner un sens à une série formelle divergente d'une telle équation différentielle, c'est-à-dire d'«incarner» une solution formelle en une vraie solution» (voir [RAM93] p.74). Pour POINCARÉ, la définition de développement asymptotique est la suivante :

**Définition 1.4** Soit  $S$  un secteur ouvert de sommet l'origine du plan complexe (ou de la surface de Riemann du logarithme) et  $f$  une fonction holomorphe sur  $S$ . On dit que  $f$  admet comme développement asymptotique sur  $S$  la série formelle  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i$  si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n > 0, \forall \varepsilon \in S, \left| f(\varepsilon) - \sum_{i=0}^n a_i \varepsilon^i \right| \leq M_n |\varepsilon|^n .$$

On pourra trouver plus de résultats sur cette théorie dans l'article [PAR99] que j'ai écrit pour la Revue de Mathématiques de l'Enseignement Supérieur et qui reprend de nombreux passages de [CL55] et [WAS76]. Citons par exemple un théorème d'existence asymptotique appelé théorème de Borel-Ritt : pour toute série formelle et tout secteur d'angle fini donné sur la surface de Riemann, il existe une fonction holomorphe dans ce secteur admettant la série formelle précédente comme développement asymptotique.

Le reproche essentiel que l'on peut faire à cette définition est qu'elle ne permet pas de contrôler comment les constantes  $M_n$  de la définition dépendent de  $n$ . En pratique, on peut imaginer que ces constantes se comportent comme des exponentielles de  $n$  pour les premiers termes puis «explosent» en des puissances de  $n!$ : c'est cette information que nous

aimerions connaître.

Au début du  $XX^e$  siècle, G.N. WATSON introduit dans [WAT11] de nouveaux développements asymptotiques connus aujourd'hui sous le nom de développements asymptotiques Gevrey et c'est à la fin des années 70 que J.-P. RAMIS réintroduit les développements asymptotiques Gevrey pour les appliquer à des équations différentielles dans le champ complexe. On donne ici les définitions de séries Gevrey et de développements Gevrey :

**Définition 1.5** On dit qu'une série formelle  $\sum_{r=0}^{\infty} a_r \varepsilon^r \in \mathbb{C}[[\varepsilon]]$  est Gevrey d'ordre  $s \in \mathbb{R}_+$  si :

$$\exists(M, N) \in \mathbb{R}_+^2, \forall r \in \mathbb{N}, |a_r| \leq MN^r \Gamma(rs + 1)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma usuelle.

**Notation :** Dans toute la suite, on notera

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta, R) &= \{ \varepsilon \in \mathbb{C}, 0 < |\varepsilon| < R \text{ et } \alpha < \arg \varepsilon < \beta \}, \\ S(\alpha, \beta) &= \{ \varepsilon \in \mathbb{C}, \alpha < \arg \varepsilon < \beta \} \end{aligned}$$

et pour  $V = S(\alpha, \beta, R)$  et  $V' = S(\alpha', \beta', R')$ , la notation  $S' \subsetneq S$  signifiera  $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$  et  $0 < R' < R$ .

**Définition 1.6** Soit  $s \in \mathbb{R}_+$ ,  $R \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\alpha < \beta$  et  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe avec  $V = S(\alpha, \beta, R)$ .

On dit que  $f$  admet comme développement asymptotique Gevrey d'ordre  $s$  dans  $S$  la série formelle  $\sum_{r=0}^{\infty} a_r \varepsilon^r$  si pour tout secteur  $V' \subsetneq V$ , il existe  $M \geq 0$  et  $N \geq 0$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in V', \left| f(\varepsilon) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \varepsilon^r \right| \leq MN^n \Gamma(ns + 1) |\varepsilon|^n$$

Sans en donner de démonstration, notons que l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $S$  admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre  $s$  à l'origine est une  $\mathbb{C}$ -algèbre différentielle  $(+, \cdot, \frac{d}{d\varepsilon})$ . De plus, toute série formelle Gevrey d'ordre  $s$  ou toute fonction admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre  $s$  est aussi Gevrey d'ordre  $\tilde{s}$  supérieur ou égal à  $s$ .

Nous pouvons maintenant généraliser ces définitions au cas où  $f$  est une fonction holomorphe en les variables  $z \in S$  et  $\varepsilon \in V$ , où  $S$  est un certain domaine de  $\mathbb{C}$ .

**Notation :** Si  $H$  est une série formelle, nous noterons dans la suite  $H_i$  le coefficient du  $i^e$  terme de  $H$  dans son écriture en série.

**Notation :** Dans toute la suite on note  $\text{Hol}(S, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions holomorphes de  $S$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\text{Hol}_b(S, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions holomorphes bornées de  $S$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.7** Soit  $S = S(\alpha, \beta, R)$ . On dit qu'une série semi-formelle  $\sum_{r=0}^{\infty} a_r(z) \varepsilon^r$  de  $\text{Hol}_b(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$  est Gevrey d'ordre  $s \in \mathbb{R}_+$  uniformément sur  $S$  si pour tout secteur  $S' \subsetneq S$ , il existe  $M \geq 0$  et  $N \geq 0$  tels que

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall z \in S', |a_r(z)| \leq MN^r \Gamma(rs + 1).$$

On notera dans la suite  $\text{Hol}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]_s$  l'ensemble de ces séries semi-formelles.

**Définition 1.8** Soit  $S = S(\alpha, \beta, R)$ . On dit qu'une série semi-formelle  $\sum_{r=0}^{\infty} a_r(z)\varepsilon^r$  de  $\text{Hol}_b(V, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$  est Gevrey d'ordre  $s \in \mathbb{R}_+$  **au sens strict** uniformément sur  $S$  si :

$$\exists(M, N) \in \mathbb{R}_+^2, \forall r \in \mathbb{N}, \forall z \in S, |a_r(z)| \leq MN^r \Gamma(rs + 1) .$$

On notera dans la suite  $\text{Hol}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]_s^*$  l'ensemble de ces séries semi-formelles.

**Définition 1.9** Soit  $s \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $S = S(\alpha, \beta, R)$  et  $V = S(\alpha_1, \beta_1, R_1)$  avec  $R, R_1 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha_1 < \beta_1$ .

On considère  $f : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et on dit que  $f$  admet comme développement asymptotique Gevrey d'ordre  $s$  dans  $V$  uniformément sur  $S$  la série semi-formelle  $\sum_{r=0}^{\infty} a_r(z)\varepsilon^r$  de  $\text{Hol}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$  si pour tout secteur  $S' \subsetneq S$  et tout secteur  $V' \subsetneq V$ , il existe  $M \geq 0$  et  $N \geq 0$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in S', \forall z \in V', \left| f(z, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r(z)\varepsilon^r \right| \leq MN^n \Gamma(ns + 1) |\varepsilon|^n .$$

On notera  $f(z, \varepsilon) \sim_s \sum_{r=0}^{\infty} a_r(z)\varepsilon^r$ ,  $\varepsilon \in V$  unif<sup>t</sup> sur  $S$ .

**Définition 1.10** Soit  $s \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $S = S(\alpha, \beta, R)$  et  $V = S(\alpha_1, \beta_1, R_1)$  avec  $R, R_1 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha_1 < \beta_1$ .

On considère  $f : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et on dit que  $f$  admet comme développement asymptotique Gevrey d'ordre  $s$  dans  $V$  uniformément sur  $S$  **au sens strict** la série semi-formelle  $\sum_{r=0}^{\infty} a_r(z)\varepsilon^r$  de  $\text{Hol}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$  s'il existe  $M \geq 0$  et  $N \geq 0$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in S, \forall z \in V, \left| f(z, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r(z)\varepsilon^r \right| \leq MN^n \Gamma(ns + 1) |\varepsilon|^n$$

On notera  $f(z, \varepsilon) \sim_s^* \sum_{r=0}^{\infty} a_r(z)\varepsilon^r$ ,  $\varepsilon \in V$  unif<sup>t</sup> sur  $S$

Il est encore possible de généraliser ces définitions à des fonctions vectorielles ou matricielles que nous manipulerons dans la suite de ce travail. On effectue cette généralisation en remplaçant les valeurs absolues dans les inégalités ci-dessus et ci-dessous par des normes convenables.

Pour un vecteur  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , on considérera la norme infinie

$$\|v\| = \sup_{i=1}^n |v_i|$$

et pour la matrice  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$  la norme associée

$$\|A\| = \sup_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

Nous utiliserons abusivement la même notation pour ces deux normes, liées par l'inégalité :

$$\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$$

pour toute matrice  $A$  et tout vecteur  $v$ . Cette inégalité nous sera bientôt très précieuse pour les majorations que nous effectuerons dans les estimations Gevrey.

Parmi les fonctions admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre  $s$ , il existe un sous-ensemble appelé *fonctions plates Gevrey d'ordre  $s$* . On donne ici une définition de ces fonctions ainsi qu'une caractérisation que nous utiliserons dans le chapitre 5.

**Définition 1.11** Soit  $s \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $S = S(\alpha, \beta, R)$  et  $V = S(\alpha_1, \beta_1, R_1)$  avec  $R, R_1 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha_1 < \beta_1$ .

On considère  $f : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et on dit que  $f$  est plate Gevrey d'ordre  $s$  uniformément sur  $S$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 dans  $V$  si

$$f(z, \varepsilon) \sim_s 0 + 0\varepsilon + \cdots + 0\varepsilon^n + \cdots, \quad \varepsilon \in V \text{ unif}^t \text{ sur } S$$

**Proposition 1.3** Soit  $s \in \mathbb{R}_+$  et  $S, V$  deux secteurs ouverts bornés de sommet 0. On considère  $f : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est plate Gevrey d'ordre  $s$  uniformément sur  $S$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 dans  $V$
2. Pour tout secteur  $V' \subsetneq V$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\forall \varepsilon \in V', \quad \forall z \in S, \quad |f(z, \varepsilon)| \leq \beta e^{-\alpha|\varepsilon|^{-\frac{1}{s}}}$$

On pourra par exemple trouver une démonstration de cette caractérisation dans [BAL94] ou [HS99]. Il s'agit d'un résultat classique en théorie Gevrey. De même, nous ne donnerons pas de démonstration du lemme de Watson que nous énonçons ci-après : le lecteur pourra se reporter aux deux mêmes livres. Explicitons tout d'abord les notions de *transformée de Borel formelle* et de *transformée de Laplace tronquée*.

**Définition 1.12** Soit  $s \in \mathbb{R}_+^*$  et  $S$  un secteur ouvert borné de sommet 0.

Soit  $\hat{f}(z, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(z) \varepsilon^r \in \text{Hol}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]_s^s$ , c'est-à-dire qu'il existe  $M, N \geq 0$  tels que

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in S, \quad |a_r(z)| \leq MN^r \Gamma(rs + 1)$$

On définit, pour tout  $z \in V$  et tout  $t \in D(0, 1/N)$ , la transformée de Borel formelle d'ordre  $s$  de  $\hat{f}$  par

$$\mathcal{B}\hat{f}(z, t) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{a_r(z)}{\Gamma(rs + 1)} t^r$$

**Définition 1.13** Soit  $r, T \in \mathbb{R}_+^*$  et  $S$  un secteur ouvert borné de sommet 0. Soit  $\mathcal{B}\hat{f}$  comme dans la définition (1.12). On suppose  $0 < T < 1/N$ . On définit la transformée de Laplace tronquée d'ordre  $\frac{1}{r}$  de  $\mathcal{B}\hat{f}$  par

$$\mathcal{L}_T(\mathcal{B}\hat{f})(z, \varepsilon) = r \int_0^T e^{-\frac{t}{\varepsilon^r}} \frac{t^{r-1}}{\varepsilon^{r-1}} \mathcal{B}\hat{f}(z, t) dt$$

pour tout  $z \in S$  et tout  $\varepsilon \in S(-\frac{\pi}{2r}, \frac{\pi}{2r})$ .

**Lemme 1.4 (Watson-Gevrey)** Avec les notations des définitions (1.12) et (1.13), on a pour tout secteur borné  $V \subsetneq S(-\frac{\pi}{2r}, \frac{\pi}{2r})$  :

$$\mathcal{L}_T(\mathcal{B}\hat{f})(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \hat{f}(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V \text{ unif}^t \text{ sur } S.$$

## Chapitre 2

# Solution fondamentale formelle au voisinage des singularités 0 et $z_k$

Dans ce chapitre, nous considérons les systèmes différentiels linéaires

$$z^{r+1}Y' = \tilde{A}(z)Y \quad (2.1)$$

$$\text{et } z(z^r - \varepsilon^r)Y' = A(z, \varepsilon)Y \quad (2.2)$$

où  $A(z, \varepsilon) = \tilde{A}(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$ . On suppose également que  $\tilde{A}$  et  $C$  sont holomorphes sur un voisinage de 0 et à valeurs dans  $M_n(\mathbb{C})$  avec  $C(\cdot, 0) \equiv 0$ .

Après avoir mis ces systèmes sous une forme que nous appellerons «préparée», nous énoncerons un lemme de *splitting* pour (2.2) au voisinage de 0 puis de  $z_k = \varepsilon e^{\frac{2ik\pi}{r}}$ ,  $k = 0, \dots, r-1$  et nous mettrons en évidence un invariant dans les transformations successives.

Nous montrerons alors l'existence d'une solution fondamentale formelle de (2.2) sous la forme

$$Y(z, \varepsilon) = \hat{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $D_0, \dots, D_r$  sont des matrices analytiques bien déterminées et  $\hat{H}$  est successivement élément de  $\text{Hol}(V, M_n(C))[[z]]$  puis de  $\text{Hol}(V, M_n(C))[[z - z_k]]$  ( $V$  désignant un certain secteur d'origine 0). Enfin, nous verrons que ces solutions formelles convergent respectivement dans des voisinages de 0 et  $z_k$  dont le diamètre tend vers 0 avec  $\varepsilon$ .

### 2.1 Réduction du problème, mise sous forme préparée

Remarquons tout d'abord que le système (2.1) admet une singularité de rang de Poincaré  $r$  en 0. Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons que la matrice fondamentale  $\tilde{A}_0 = \tilde{A}(0)$  a toute ses valeurs propres distinctes, même si nous verrons qu'il est possible, dans le lemme de *splitting* formel, d'affaiblir cette hypothèse.

Le système (2.2) admet  $r+1$  singularités régulières en 0 et  $z_k = \varepsilon e^{\frac{2ik\pi}{r}}$ ,  $k = 0, \dots, r-1$  avec les résidus

$$\rho(\varepsilon) = -\frac{\tilde{A}_0}{\varepsilon^r} \quad \text{en } 0$$

$$\text{et } \rho_k(\varepsilon) = \frac{\tilde{A}(z_k)}{r\varepsilon^r} \quad \text{en } z_k, \quad k = 0, \dots, r-1.$$

Commençons par mettre les systèmes précédents sous une forme préparée en effectuant un changement d'inconnue convenable. Cette forme préparée sera utilisée dans le reste de ce

travail et permettra de simplifier de nombreuses démonstrations.

Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 que la matrice  $\tilde{A}_0$  ayant toutes ses valeurs propres distinctes, il en est de même des valeurs propres  $\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)$  de  $\tilde{A}(z)$  sur un certain voisinage de l'origine et qu'il existe donc  $T$  holomorphe et inversible en 0 telle que

$$(T^{-1}\tilde{A}T)(z) = D(z) = \text{diag}(\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)) .$$

Si on effectue la transformation  $Y = TW$ , les équations (2.1) et (2.2) sont transformées en les nouvelles équations sous forme «préparée»

$$\begin{aligned} z^{r+1}W' &= \left( D(z) + z^{r+1} \left( \tilde{C}(z) - T'(z)T^{-1}(z) \right) \right) W \\ \text{et } z(z^r - \varepsilon^r)W' &= \left( D(z) + z(z^r - \varepsilon^r) \left( C(z, \varepsilon) - T'(z)T^{-1}(z) \right) \right) W \end{aligned}$$

Quitte à effectuer ce changement d'inconnue, nous supposons pour la suite de ce travail, sauf indication contraire, que les fonctions matricielles  $\tilde{A}$  et  $A$  sont de la forme

$$\tilde{A}(z) = D(z) + z^{r+1}\tilde{C}(z) \quad (2.3)$$

$$\text{et } A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon) \quad (2.4)$$

avec  $C(\cdot, 0) = \tilde{C}$ . Les systèmes (2.1) et (2.2) vérifiant les conditions précédentes seront dits «sous forme préparée». Remarquons pour finir que les résidus de (2.2) sont alors

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) &= -\frac{D_0}{\varepsilon^r} = -\frac{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}{\varepsilon^r} \quad \text{en } 0 \\ \text{et } \rho_k(\varepsilon) &= \frac{D(z_k)}{r\varepsilon^r} = \frac{\text{diag}(\lambda_1(z_k), \dots, \lambda_r(z_k))}{r\varepsilon^r} \quad \text{en } z_k, \quad k = 0, \dots, r-1 . \end{aligned}$$

## 2.2 Solution formelle (puis convergente) au voisinage de 0

Nous allons montrer dans cette partie l'existence d'une transformation  $Y = P(z, \varepsilon)W$  pour le système (2.2), où  $P(0, 0)$  est inversible et telle que le système obtenu pour  $W$  soit plus «joli» que (2.2) c'est-à-dire un système par blocs donnant lieu à des systèmes de dimension plus petite.

Énonçons pour cela un lemme de *splitting* semblable au lemme (1.1), précédé des définitions suivantes :

### Définition 2.1

1. On appelle secteur autorisé tout secteur  $V$  de sommet 0 dans  $\mathbb{C}$  tel que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall (u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, u \neq v \Rightarrow \left( \forall \varepsilon \in V, \arg \varepsilon \neq \frac{\arg(\lambda_u - \lambda_v)}{r} + \frac{2k\pi}{r} \right)$$

2. On appelle secteur autorisé au sens fort tout secteur de sommet 0 inclus strictement dans un secteur autorisé.

**Rappel :** Ici, dire que le secteur  $V_1 = S(\alpha_1, \beta_1, R_1)$  est inclus *strictement* dans le secteur  $V_2 = S(\alpha_2, \beta_2, R_2)$  signifie que l'on a :

$$\alpha_2 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_2$$

$$\text{et } R_1 < R_2 \text{ sauf si } R_1 = R_2 = +\infty$$

**Définition 2.2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $V$  un secteur autorisé. On dit que  $A \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  vérifie les conditions (COND1) du *splitting* si l'on peut écrire :

$$A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$$

où  $C \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  et  $D$  est diagonale holomorphe dans un voisinage de 0. On dira alors que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND1).

**Lemme 2.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < n$  et  $V$  un secteur autorisé pour  $\tilde{A}_0$ .

Si  $A \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  vérifie les conditions (COND1) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , alors il existe  $\hat{P} \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$ ,  $\hat{P}(0, 0) = I_n$ , qui transforme, par le changement d'inconnue  $Y = \hat{P}W$ , l'équation

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) &= A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \\ \text{en l'équation } z(z^r - \varepsilon^r)W'(z, \varepsilon) &= B(z, \varepsilon)W(z, \varepsilon), \end{aligned}$$

où  $B \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}, \quad B^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad B^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}).$$

De plus, si l'on écrit  $D = \text{diag}(D_1, D_2)$ ,  $D_1 \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $D_2 \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ , alors  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND1) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D_1$  et  $D_2$ .

Montrons d'abord comment ce lemme nous permet d'obtenir le résultat annoncé en introduction. Tout d'abord, remarquons que la matrice  $A$  du système (2.2) remplissant la condition (2.4) vérifie également la condition (COND1) du *splitting*.

Le lemme précédent nous permet d'effectuer un *splitting* du premier système en deux systèmes de tailles plus petites :

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)Y_1'(z, \varepsilon) &= B^{11}(z, \varepsilon)Y_1(z, \varepsilon) \\ \text{et } z(z^r - \varepsilon^r)Y_2'(z, \varepsilon) &= B^{22}(z, \varepsilon)Y_2(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

vérifiant la condition (COND1). Cela signifie que l'on peut se ramener en appliquant un nombre fini de fois ce lemme à des équations scalaires de la forme

$$z(z^r - \varepsilon^r)y' = (\lambda_i(z) + z(z^r - \varepsilon^r)c_i(z, \varepsilon))y \quad (2.5)$$

où  $\lambda_i(z)$  est la  $i^{\text{e}}$  valeur propre de  $D(z)$  et que nous avons déjà traitées dans la partie (1.1) : on a vu qu'il existe une solution fondamentale de (2.5) de la forme

$$y(z, \varepsilon) = \hat{h}_i(z, \varepsilon)e^{\int_0^z \frac{\lambda_i^0(\varepsilon) + \lambda_i^1(\varepsilon)t + \dots + \lambda_i^r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $\hat{h}_i \in \text{Hol}(V, \mathbb{C})[[z]]$  vérifie  $\hat{h}_i(0, 0) = 1$  et les  $\lambda_i^p$ ,  $p \in \llbracket 0, r \rrbracket$  sont définis pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  par

$$\lambda_i^0(\varepsilon) = \lambda_{i,0}, \quad \lambda_i^1(\varepsilon) = \sum_{g=0}^{\infty} \lambda_{gr+1,i} \varepsilon^{gr}, \dots, \quad \lambda_i^r(\varepsilon) = \sum_{g=0}^{\infty} \lambda_{(g+1)r,i} \varepsilon^{gr} \quad (2.6)$$

La solution du système de départ est de la forme  $Y = \hat{P}W$  où  $\hat{P}(0, 0)$  est inversible et  $\hat{P} \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$ . Ainsi, de *splitting* en *splitting*, on obtient finalement une solution fondamentale de (2.2) de la forme :

$$Y(z, \varepsilon) = \hat{H}(z, \varepsilon)e^{\int_0^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $\hat{H} \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  et  $\hat{H}(0, 0) = I_n$ , et  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont définies par

$$D_0(\varepsilon) = D_0, \quad D_1(\varepsilon) = \sum_{g=0}^{\infty} D_{g+1} \varepsilon^{g^r}, \dots, \quad D_r(\varepsilon) = \sum_{g=0}^{\infty} D_{(g+1)^r} \varepsilon^{g^r} \quad (2.7)$$

si on note  $D(z) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i z^i$ . Remarquons de plus que l'on a

$$\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_i(\varepsilon) = D_i$$

Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.1** *Considérons le système (2.2) et la condition (2.4) et supposons de plus que les valeurs propres de la matrice principale  $D_0$  soient toutes distinctes. Si  $V$  est un secteur autorisé de rayon assez petit, le système (2.4) possède une solution fondamentale formelle de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = \hat{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (2.8)$$

où  $\hat{H} \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  est telle que  $\hat{H}(0, \cdot) = I$  et  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes de  $\varepsilon$  en 0 définies par (2.7).

**Preuve du lemme (2.1) :** Pour simplifier les notations, nous noterons ici  $P = \hat{P}$ . Posons  $Y = PW$ . Le système différentiel (2.2) est transformé en

$$z(z^r - \varepsilon^r) (P'W + PW') = A(z, \varepsilon)PW$$

$$\text{soit} \quad z(z^r - \varepsilon^r)PW' = (A(z, \varepsilon)P - z(z^r - \varepsilon^r)P')W$$

Le nouveau système s'écrit alors

$$z(z^r - \varepsilon^r)W' = B(z, \varepsilon)W \quad (2.9)$$

si  $B$  vérifie l'équation de transformation

$$z(z^r - \varepsilon^r)P' = A(z, \varepsilon)P - PB(z, \varepsilon) \quad (2.10)$$

Tout le problème revient donc à trouver  $P, B \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  vérifiant cette équation avec  $B$  sous la forme diagonale-blocs désirée et  $P(0, 0) = I_n$ . On pose :

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\varepsilon)z^i = \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(\varepsilon)z^i = \sum_{i=0}^{\infty} B_i z^i$$

On a alors :

$$P' = \sum_{i=1}^{\infty} P_i z^{i-1}, \quad zP' = \sum_{i=1}^{\infty} P_i z^i, \quad \text{et} \quad z^{r+1}P' = \sum_{i=1}^{\infty} P_i z^{i+r}$$

L'équation de transformation (2.10) conduit aux équations

$$A_0(\varepsilon)P_0 - P_0B_0(\varepsilon) = 0 \quad (2.11)$$

$$(A_0(\varepsilon) + l\varepsilon^r)P_l - P_lB_0(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{l-1} (P_s B_{l-s}(\varepsilon) - A_{l-s}(\varepsilon)P_s) + (l-r)\delta_{l>r}P_{l-r}, \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.12)$$

où  $\delta_{l>r}$  vaut 1 si  $l > r$  et 0 sinon. Remarquons que l'on a  $A_0(\varepsilon) = D_0$  grâce à la condition (2.4).

L'idée principale de ce lemme de *splitting* est de chercher  $P(z, \varepsilon)$  sous la forme

$$P(z, \varepsilon) = I + \begin{pmatrix} 0 & P^{12}(z, \varepsilon) \\ P^{21}(z, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $P^{21}(z, \varepsilon) = O(z) = P^{12}(z, \varepsilon)$ . On choisit donc  $P_0 = I$  puis  $B_0(\varepsilon) = A_0 = D_0$  de sorte que l'équation (2.11) est alors vérifiée. Écrivons la condition (2.12) sous la forme suivante :

$$(A_0(\varepsilon) + l\varepsilon^r)P_l - P_l B_0(\varepsilon) = B_l(\varepsilon) + H_l, \quad l \in \mathbb{N}^* \quad (2.13)$$

$$\text{où } H_l = \sum_{s=1}^{l-1} (P_s B_{l-s}(\varepsilon) - A_{l-s}(\varepsilon) P_s) - A_l(\varepsilon) + (l-r)\delta_{l>r} P_{l-r}, \quad l \in \mathbb{N}^*$$

Avec les notations précédentes, la condition (2.13) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} A_0^{11} + l\varepsilon^r & 0 \\ 0 & A_0^{22} + l\varepsilon^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P_l^{12} \\ P_l^{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & P_l^{12} \\ P_l^{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} B_l^{11} + l\varepsilon^r & 0 \\ 0 & B_l^{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_l^{11} & H_l^{12} \\ H_l^{21} & H_l^{22} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$  aux équations

$$B_l^{11}(\varepsilon) + H_l^{11}(\varepsilon) = 0 \quad (2.14)$$

$$(A_0^{11}(\varepsilon) + l\varepsilon^r)P_l^{12}(\varepsilon) - P_l^{12}A_0^{22}(\varepsilon) = H_l^{12}(\varepsilon) \quad (2.15)$$

$$(A_0^{22}(\varepsilon) + l\varepsilon^r)P_l^{21}(\varepsilon) - P_l^{21}A_0^{11}(\varepsilon) = H_l^{21}(\varepsilon) \quad (2.16)$$

$$B_l^{22}(\varepsilon) + H_l^{22}(\varepsilon) = 0 \quad (2.17)$$

On raisonne maintenant par récurrence: nous avons fixé  $B_0$  et  $P_0$  constantes donc holomorphes sur  $V$ . Montrons que si l'on suppose connus  $B_0, \dots, B_{l-1}$  et  $P_0, \dots, P_{l-1}$  holomorphes sur  $V$ , alors  $B_l$  et  $P_l$  sont déterminés de manière unique par les équations précédentes et sont holomorphes sur  $V$ .

Remarquons tout d'abord que lorsque  $B_0, \dots, B_{l-1}$  et  $P_0, \dots, P_{l-1}$  sont connus,  $H_l$  est entièrement déterminée, holomorphe sur  $V$  par définition. Alors, vu les équations (2.14) et (2.17), on a

$$B_l^{11}(\varepsilon) = -H_l^{11}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad B_l^{22}(\varepsilon) = -H_l^{22}(\varepsilon)$$

donc  $B_l$  est déterminé de manière unique et holomorphe sur  $V$ . De plus, en transformant l'équation matricielle (2.15) en un système vectoriel à  $p(n-p)$  éléments (en mettant les colonnes de  $P^{12}$  les unes en-dessous des autres), on obtient un système diagonal car  $A_0^{11} = D_0^1$  et  $A_0^{22} = D_0^2$ . Ses coefficients sont

$$\lambda_u - \lambda_v + l\varepsilon^r \quad \text{avec } 1 \leq u \leq p < v \leq n,$$

autrement dit, ce système admet une solution, unique, si et seulement si aucun de ces coefficients n'est nul. Rappelons que si  $\varepsilon \in V$ , on a

$$\forall (u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad u \neq v, \quad \arg \varepsilon \neq \frac{\arg(\lambda_u - \lambda_v)}{r}$$

d'où

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \forall (u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, u \neq v, \arg(l\varepsilon^r) \neq \arg(\lambda_v - \lambda_u)$$

Cela implique en particulier qu'aucune des valeurs précédentes ne s'annule sur  $V$ . Comme ce sont des fonctions holomorphes de  $\varepsilon$  sur  $V$ ,  $P_l^{12}$  est déterminé de manière unique et holomorphe sur  $V$ . Il en va de même pour  $P_l^{21}$  en considérant l'équation (2.16) et cela termine la récurrence.

Reste maintenant à montrer que  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND1) du *splitting*. En écrivant l'équation de transformation (2.10) pour

$$P = I + \begin{pmatrix} 0 & P^{12} \\ P^{21} & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient les équations

$$0 = A^{11} + A^{12}P^{21} - B^{11} \quad (2.18)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{12})' = A^{11}P^{12} - P^{12}B^{22} + A^{12} \quad (2.19)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{21})' = A^{22}P^{21} - P^{21}B^{11} + A^{21} \quad (2.20)$$

$$0 = A^{22} + A^{21}P^{12} - B^{22} \quad (2.21)$$

On en déduit, en utilisant par exemple (2.18) et la condition (COND1) pour  $A$  :

$$B^{11} = A^{11} + A^{12}P^{21} = D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{11} + z(z^r - \varepsilon^r)C^{12}P^{21}$$

$$\text{soit } B^{11}(z, \varepsilon) = D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) (C^{11}(z, \varepsilon) + C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon))$$

Ainsi, comme on a vu que  $C^{11} + C^{12}P^{21} \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$ , on en déduit immédiatement que  $B^{11}$  vérifie les conditions (COND1) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D^1$ . Il en va de même pour  $B^{22}$  et  $D^2$ , ce qui termine la preuve de ce lemme.  $\square$

**Remarque 2.1** Nous venons de montrer l'existence d'un invariant par une transformation du type  $Y = P(z, \varepsilon)W$  précédent. Considérons l'anneau  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})[[z, \varepsilon]]$  des séries formelles en les deux indéterminées  $z, \varepsilon$  sur  $M_n(\mathbb{C})$  et l'idéal  $\mathcal{I} = z(z^r - \varepsilon^r)\mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$ . Nous avons vu que si les valeurs propres de  $A(z, \varepsilon) \in \mathcal{A}$  modulo  $\mathcal{I}$  sont  $\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)$ , il en est de même de  $B(z, \varepsilon) \in \mathcal{A}$ .  $\triangle$

**Remarque 2.2** Remarquons que la condition obtenue pour les secteurs *autorisés* est tout à fait naturelle. En effet, le résidu de l'équation (2.2) en 0 étant  $\rho(\varepsilon) = -\frac{D(0)}{\varepsilon^r}$ , la théorie des équations différentielles à singularité régulière en 0 (voir [WAS76] chap.II) nous permet d'affirmer qu'il existe une solution fondamentale de (2.2) de la forme

$$Y_\varepsilon(z) = F_\varepsilon(z) z^{-\frac{D(0)}{\varepsilon^r}}$$

où  $F_\varepsilon$  est holomorphe sur un voisinage de 0, sous la condition que les valeurs propres de  $\rho(\varepsilon)$  ne diffèrent pas d'un entier, c'est-à-dire

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \forall l \in \mathbb{Z}, i \neq j \Rightarrow \frac{\lambda_i}{\varepsilon^r} - \frac{\lambda_j}{\varepsilon^r} \neq l$$

$$\text{ou encore } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \forall l \in \mathbb{Z}, i \neq j \Rightarrow \lambda_i - \lambda_j \neq l\varepsilon^r$$

ce qui est exactement la condition pour les secteurs *autorisés*.  $\triangle$

**Remarque 2.3** En comparant le lemme de *splitting* (2.1) avec la détermination d'une solution formelle dans le *splitting* (1.1) (voir [WAS76] chap.IV et le chapitre 1 de cette thèse), on peut constater que les équations conduisant à la solution formelle  $\hat{P} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{P}_i z^i$  sont exactement les équations (2.14)-(2.17) lorsque l'on remplace  $\varepsilon$  par 0. Cela signifie que l'on a pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{P}_l(\varepsilon) = \tilde{P}_l$$

△

Nous allons voir maintenant que les solutions obtenues dans  $\text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z]]$  sont convergentes dans un voisinage de 0 dont le diamètre tend vers 0 avec  $\varepsilon$ .

En éliminant  $B^{11}$  dans (2.20) avec (2.18) dans la preuve du lemme (2.1), on obtient une équation différentielle quadratique pour  $P^{21}$ , à singularité régulière en 0

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{21})' = A^{21} + A^{22}P^{21} - P^{21}A^{11} - P^{21}A^{12}P^{21}. \quad (2.22)$$

Considérons l'équation (2.2) : ici  $A$  est holomorphe dans un voisinage de l'origine donc  $P^{21}$  obtenue dans le premier *splitting* est solution de l'équation (2.22) et les coefficients sont holomorphes. Il s'agit d'une solution formelle d'une équation à singularité régulière en 0 qui converge donc (voir [WAS76] chap.II) dans un voisinage de l'origine.

Finalement  $P(\cdot, \varepsilon)$  converge dans un voisinage de l'origine et il en est de même de  $B(\cdot, \varepsilon)$  vu les relations (2.18) et (2.21). Ainsi, de *splitting* en *splitting*, on obtient finalement une solution de (2.2) de la forme (2.8) où  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  est holomorphe dans un voisinage de 0.

Toutefois, l'équation (2.22) étant quadratique et non pas linéaire, il est impossible de donner *a priori* un voisinage de convergence (minimal) pour  $P(\cdot, \varepsilon)$ . On va tout de même montrer que  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  converge au moins sur  $D(0, |\varepsilon|)$ . En effet, on a pour tout  $\varepsilon \in V$  :

$$\hat{H}(z, \varepsilon) = Y(z, \varepsilon) e^{-\int^z \frac{Q(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad \text{avec} \quad Q(t, \varepsilon) = D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r$$

d'où :

$$\hat{H}'(z, \varepsilon) = Y'(z, \varepsilon) e^{-\int^z \frac{Q(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} - Y(z, \varepsilon) \frac{Q(z, \varepsilon)}{z(z^r - \varepsilon^r)} e^{-\int^z \frac{Q(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

$$\text{soit} \quad z(z^r - \varepsilon^r) \hat{H}'(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon) Y(z, \varepsilon) e^{-\int^z \frac{Q(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} - Y(z, \varepsilon) e^{-\int^z \frac{Q(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} Q(z, \varepsilon)$$

car  $Q$  est diagonale et finalement :

$$z(z^r - \varepsilon^r) \hat{H}'(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon) \hat{H}(z, \varepsilon) - \hat{H}(z, \varepsilon) Q(z, \varepsilon)$$

Quitte à transformer cette équation matricielle en une équation vectorielle comme nous l'avons déjà fait, on peut affirmer que  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  vérifie une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont holomorphes sur  $D(0, |\varepsilon|) - \{0\}$ , et  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  est donc holomorphe sur  $D(0, |\varepsilon|)$  (au moins).

**Remarque 2.4** Le domaine de convergence de  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  tend au sens de l'inclusion vers  $\{0\}$ . C'était évidemment prévisible puisque pour  $\varepsilon = 0$ , l'équation (2.2) devient une équation avec une singularité de rang  $r > 0$  en 0 : ses solutions canoniques (non formelles) ne sont pas définies sur des disques mais sur des secteurs d'origine 0 comme nous l'avons vu dans le chapitre 1. △

En regroupant tous les résultats et les remarques précédentes, on peut alors énoncer le

**Théorème 2.2** *Considérons le système (2.2) et la condition (2.4) et supposons de plus que les valeurs propres de la matrice principale  $D_0$  sont toutes distinctes. Si  $V$  est un secteur autorisé de rayon assez petit, le système (2.4) possède une solution fondamentale de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = \hat{H}(z, \varepsilon) e^{\int_0^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  est holomorphe pour tout  $\varepsilon \in V$  sur  $D(0, |\varepsilon|)$ ,  $\hat{H}_0(\varepsilon) = I$ , et vérifie

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{H}_i(\varepsilon) = \tilde{H}_i$$

De plus,  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes en  $\varepsilon$  définies par (2.7) sur un voisinage de 0.

### 2.3 Solution formelle (puis convergente) au voisinage de $z_k$

Dans cette partie, nous allons effectuer un travail semblable à celui de la partie (2.2), mais au voisinage de chacune des singularités  $z_k$ ,  $k = 0, \dots, r-1$ . Nous ne reviendrons pas sur l'ensemble des démonstrations car elles sont tout à fait analogues à celles de la partie (2.2). Énonçons pour commencer la

**Définition 2.3** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  et  $V$  un secteur autorisé au sens strict de rayon assez petit. On dit que  $A \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z - z_k]]$  vérifie les conditions (COND1-k) du splitting si l'on peut écrire :*

$$A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$$

où  $C \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z - z_k]]$  et  $D$  est diagonale holomorphe dans un voisinage de 0. On dira de plus que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND1-k).

**Remarque 2.5** Ici,  $D$  est holomorphe au voisinage de 0 donc pour  $\varepsilon \in V$  de module assez petit,  $D$  est holomorphe en  $z_k$  et  $D \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z - z_k]]$ . De même, si on pose  $f(z, \varepsilon) = z(z^r - \varepsilon^r)$ , on a  $f \in \text{Hol}(\mathbb{C}, \mathbb{C})[[z - z_k]]$ . On a même  $\text{Hol}(\mathbb{C}, \mathbb{C})_{r+1}[z - z_k]$  car  $f$  est un polynôme de degré  $r+1$  en  $z$ . Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= z^{r+1} - \varepsilon^r z = (z - z_k + z_k)^{r+1} - \varepsilon^r z \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} C_{r+1}^i z_k^{r+1-i} (z - z_k)^i - \varepsilon^r z \\ &= z_k^{r+1} + (r+1)z_k^r (z - z_k) - \varepsilon^r z + \sum_{i=2}^{r+1} C_{r+1}^i z_k^{r+1-i} (z - z_k)^i \\ &= \varepsilon^r z_k - \varepsilon^r z + (r+1)\varepsilon^r (z - z_k) + \sum_{i=2}^{r+1} C_{r+1}^i z_k^{r+1-i} (z - z_k)^i \\ &= r\varepsilon^r (z - z_k) + \sum_{i=2}^{r+1} C_{r+1}^i z_k^{r+1-i} (z - z_k)^i. \end{aligned}$$

△

On peut alors énoncer le

**Lemme 2.2** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < n$  et  $V$  un secteur autorisé au sens strict pour  $\hat{A}_0$ .*

*Si  $A \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z - z_k]]$  vérifie les conditions (COND1-k) du splitting avec pour*

matrice diagonale associée  $D$ , alors il existe  $\hat{P} \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z - z_k]]$ ,  $\hat{P}(z_k, 0) = I_n$ , qui transforme, par le changement d'inconnue  $Y = \hat{P}W$ , l'équation

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) &= A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \\ \text{en l'équation } z(z^r - \varepsilon^r)W'(z, \varepsilon) &= B(z, \varepsilon)W(z, \varepsilon), \end{aligned}$$

où  $B \in \text{Hol}(V, M_n(\mathbb{C}))[[z - z_k]]$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}, \quad B^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad B^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}).$$

De plus, si l'on écrit  $D = \text{diag}(D^1, D^2)$ ,  $D^1 \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $D^2 \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ , alors  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND1-k) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

Ayant supposé que  $C$  est holomorphe au voisinage de 0 et  $A$  de la forme (2.4), il est clair que  $A$  vérifie les conditions (COND1-k) du *splitting*. En raisonnant par récurrence et en appliquant un nombre fini de fois le lemme précédent, on en déduit, comme on l'a fait dans (2.2), le

**Théorème 2.3** *Considérons le système (2.2) et la condition (2.4) et supposons de plus que les valeurs propres de la matrice principale  $D_0$  sont toutes distinctes. Si  $V$  est un secteur autorisé au sens strict, de rayon assez petit, le système (2.2) possède une solution fondamentale de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = \hat{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où, pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  est holomorphe sur  $D(z_k, R_\varepsilon)$  ( $R_\varepsilon = \min(|\varepsilon|, 2|\varepsilon| \sin \frac{\pi}{r})$ ),  $\hat{H}_0(\varepsilon) = I$ , et vérifie

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{H}_i(\varepsilon) = \tilde{H}_i.$$

De plus,  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes en  $\varepsilon$  définies par (2.7) sur un voisinage de 0.

**Remarque 2.6** Le théorème précédent implique que l'on a  $\hat{H}(z_k, 0) = I_n$ . △

**Preuve du lemme (2.2) :** Pour simplifier les notations, nous noterons ici  $P = \hat{P}$ . Posons  $Y = PW$ . Le problème revient à trouver  $P$  et  $B$  vérifiant l'équation de transformation (2.10) sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\varepsilon)(z - z_k)^i = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(z - z_k)^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(\varepsilon)(z - z_k)^i = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(z - z_k)^i.$$

*Mutatis mutandis*, on obtient pour les  $P_i, B_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , les équations suivantes

$$A_0(\varepsilon)P_0 - P_0B_0(\varepsilon) = 0 \tag{2.23}$$

$$(A_0(\varepsilon) - lr\varepsilon^r)P_l - P_lB_0(\varepsilon) = B_l + H_l, \quad l \geq 1 \tag{2.24}$$

$$\text{avec} \quad H_l = \sum_{s=1}^{l-1} (P_s B_0 - A_{l-s} P_s) - A_l P_0 + \sum_{s=2}^{\inf(r+1, l)} (l+1-s) C_{r+1}^s z_k^{r+1-s} P_{r+1-s}.$$

On cherche toujours  $P$  sous la forme

$$P(z, \varepsilon) = I + \begin{pmatrix} 0 & P^{12}(z, \varepsilon) \\ P^{21}(z, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose alors  $P_0 = I$  et  $B_0 = A_0$ . Les équations correspondant à (2.14)-(2.17) dans la partie précédente sont données pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$  par

$$B_l^{11}(\varepsilon) + H_l^{11}(\varepsilon) = 0 \quad (2.25)$$

$$(A_0^{11}(\varepsilon) - lr\varepsilon^r)P_l^{12}(\varepsilon) - P_l^{12}A_0^{22}(\varepsilon) = H_l^{12}(\varepsilon) \quad (2.26)$$

$$(A_0^{22}(\varepsilon) - lr\varepsilon^r)P_l^{21}(\varepsilon) - P_l^{21}A_0^{11}(\varepsilon) = H_l^{21}(\varepsilon) \quad (2.27)$$

$$B_l^{22}(\varepsilon) + H_l^{22}(\varepsilon) = 0. \quad (2.28)$$

En transformant l'équation matricielle (2.26) en une équation vectorielle à  $p(n-p)$  inconnues, on obtient un système linéaire diagonal dont les coefficients sont

$$\lambda_u(\varepsilon) - \lambda_v(\varepsilon) - lr\varepsilon^r \quad \text{avec } 1 \leq u \leq p < v \leq n,$$

et on a

$$|r \arg \varepsilon - \arg(\lambda_v(\varepsilon) - \lambda_u(\varepsilon))| \geq |r \arg \varepsilon - \arg(\lambda_v - \lambda_u)| - |\arg(\lambda_v(\varepsilon) - \lambda_u(\varepsilon)) - \arg(\lambda_v - \lambda_u)|.$$

Or  $V$  est un secteur autorisé au sens fort, et il existe donc  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in V$

$$|r \arg \varepsilon - \arg(\lambda_v - \lambda_u)| \geq 2\delta.$$

De plus, pour  $|\varepsilon|$  assez petit, on a  $|\arg(\lambda_v(\varepsilon) - \lambda_u(\varepsilon)) - \arg(\lambda_v - \lambda_u)| \leq \delta$ .

Ainsi, pour tout  $\varepsilon \in V$  de module assez petit et tout  $(u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a :

$$|r \arg \varepsilon - \arg(\lambda_v(\varepsilon) - \lambda_u(\varepsilon))| \geq \delta > 0 \quad \text{pour } 1 \leq u \leq p < v \leq n.$$

Ainsi, aucune des valeurs précédentes n'est nulle si le rayon de  $V$  est assez petit et on détermine ainsi  $H_l$  puis  $P_l^{12}$  et  $P_l^{21}$  de manière unique et par récurrence sur  $l$  comme dans la partie (2.2). Ceci conclut la démonstration du lemme.  $\square$

FIG. 2.1: *Domaine de convergence de  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  au voisinage de  $z_k$*

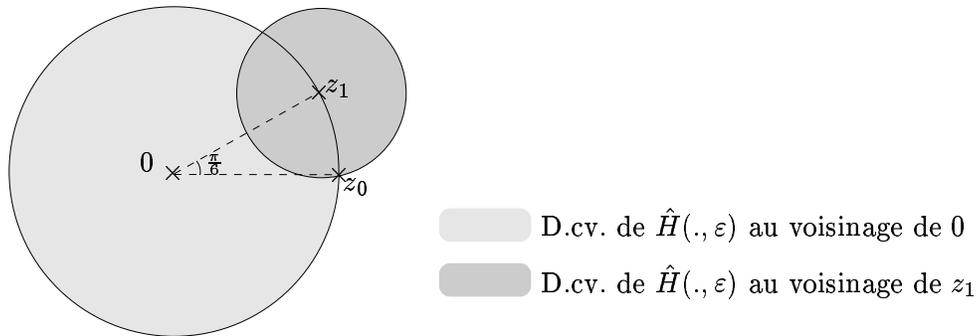


Figure réalisée pour  $r = 12$ . Pour  $k = 1$ , le domaine de convergence de  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  est donc (au moins)  $D(z_1, 2|\varepsilon| \sin \frac{\pi}{12})$ .

**Remarque 2.7** Comme dans le théorème (2.1) de la partie (2.2), la série formelle  $\hat{H}$  vérifie l'équation différentielle

$$z(z^r - \varepsilon^r)\hat{H}'(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon)\hat{H}(z, \varepsilon) - \hat{H}(z, \varepsilon)Q(z, \varepsilon) .$$

Les singularités de  $Q$  étant  $0, z_0, \dots, z_{r-1}$ ,  $\hat{H}(\cdot, \varepsilon)$  est holomorphe sur  $D(z_k, R_\varepsilon)$  pour  $R_\varepsilon = \min(|\varepsilon|, 2|\varepsilon| \sin \frac{\pi}{r})$  (voir figure ci-dessus). △



## Chapitre 3

# Confluence de solutions analytiques sur des secteurs de sommet 0

Dans ce chapitre, nous considérons toujours les systèmes différentiels linéaires

$$z^{r+1}Y' = \tilde{A}(z)Y \quad (3.1)$$

$$\text{et } z(z^r - \varepsilon^r)Y' = A(z, \varepsilon)Y \quad (3.2)$$

mis sous les formes préparées (2.3)-(2.4). Dans un premier temps, nous allons transformer le système différentiel (3.2) en une équation de point fixe dont les solutions satisfont (3.2). Nous serons alors amenés à considérer un opérateur défini par une intégrale sur un certain espace de Banach  $\mathcal{B}$ .

Dans le but de montrer que cet opérateur est une contraction sur une partie fermée de  $\mathcal{B}$ , il nous faudra tout d'abord étudier les lignes de niveau de certaines fonctions  $R_j(\cdot, \varepsilon)$ .

Ensuite, nous choisirons soigneusement les chemins d'intégration de cet opérateur de manière que les fonctions  $R_j(\cdot, \varepsilon)$  soient décroissantes le long de ces chemins et nous obtiendrons ainsi l'existence de solutions de (3.2) de la forme

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon)e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (3.3)$$

où  $H(\cdot, \varepsilon)$  est défini sur un secteur parmi  $2r$  secteurs de sommet 0 tels que deux secteurs «consécutifs» soient d'intersection non vide, pour tout  $\varepsilon$  dans un secteur d'angle d'ouverture et de rayon assez petit.

Enfin, en utilisant un théorème d'Ascoli-Arzelà, nous montrerons la limite uniforme

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} H(\cdot, \varepsilon) = \tilde{H}$$

sur chacun des secteurs précédents où  $\tilde{H}$  correspond à la solution (1.8) du système différentiel (3.1) de rang  $r$ , définie sur un secteur approprié.

### 3.1 Transformation en une équation de point fixe

Afin de parvenir à une solution de (3.2) de la forme (3.3), nous allons appliquer au système différentiel linéaire (3.2) un certain nombre de transformations de *splitting* de la forme  $Y = PW$  : on scinde le système différentiel en deux systèmes plus petits pour se ramener à l'étude d'équations scalaires.

Mais, contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre 2, il nous faut obtenir des solutions analytiques et non pas formelles et donc effectuer des transformations où  $P$  est analytique.

Comme nous n'avons encore aucune idée du domaine de définition  $\Omega$  de  $H$ , nous précisons au fur et à mesure de nos besoins les propriétés de ce domaine.

**Notation :** Pour tout  $R > 0$ , on note  $\Omega_R = \Omega \cap (D(0, R))^2$ .

**Notation :** Par la suite, le signe «'» désignera la dérivée par rapport à la première variable  $z$ .

Enonçons, comme dans le chapitre précédent, une définition et un lemme de *splitting*.

**Définition 3.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifie les conditions (COND2) du *splitting* si on peut écrire :

$$1. \quad \forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$$

où  $C$  est une fonction matricielle holomorphe bornée sur  $\Omega$

et  $D$  est une fonction diagonale holomorphe dans un voisinage de 0 telle que  $D_0 = D(0)$  a toutes ses valeurs propres distinctes

$$2. \quad \forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad A'(z, \varepsilon) = D'(z) + G(z, \varepsilon)$$

où  $G$  est une fonction matricielle holomorphe sur  $\Omega$

$$\text{et } \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} G(z, \varepsilon) = 0$$

On dira alors que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND2).

La première assertion de cette définition nous permettra de contrôler dans le lemme suivant que les conditions nécessaires au *splitting* sont réalisées pour les nouveaux systèmes obtenus, tandis que nous utiliserons la deuxième assertion dans la partie (3.5) pour montrer la convergence uniforme des solutions obtenues ici.

Remarquons immédiatement que la fonction  $A$  de l'équation (3.2) vérifie les conditions (COND2) du *splitting*. En effet, la première partie de la définition précédente est évidemment vérifiée puisque, par hypothèse,  $A$  est mise sous la forme préparée (2.4) et que l'on choisira  $\Omega$  de diamètre assez petit (et contenant 0 dans son adhérence).

De plus, on a

$$\begin{aligned} A'(z, \varepsilon) &= D'(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C'(z, \varepsilon) + (z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon) + rz^r C(z, \varepsilon) \\ &= D'(z) + G(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

en posant  $G(z, \varepsilon) = z(z^r - \varepsilon^r)C'(z, \varepsilon) + (z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon) + rz^r C(z, \varepsilon)$ .

Or,  $C$  étant supposée holomorphe au voisinage de  $(0, 0)$  il en est de même de  $C'$  : ces fonctions sont donc toutes deux bornées sur un voisinage de l'origine sur  $\Omega$ . Enfin, on a

$$\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} z(z^r - \varepsilon^r) = \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} (z^r - \varepsilon^r) = \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} rz^r = 0 .$$

On en déduit immédiatement la seconde assertion de la définition.

**Lemme 3.1 (splitting)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < n$ . Si  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifie les conditions (COND2) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , alors il existe  $R > 0$  et  $P : \Omega_R \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  holomorphe tels que

1.  $P$  et  $P'$  soient bornées sur  $\Omega_R$
2.  $\forall (z, \varepsilon) \in \Omega_R$ ,  $P(z, \varepsilon)$  soit inversible,  $\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega_R}} P(z, \varepsilon) = I_n$ ,

et  $P$  transforme, par le changement d'inconnue  $Y = PW$ , l'équation

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) &= A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \\ \text{en l'équation } z(z^r - \varepsilon^r)W'(z, \varepsilon) &= B(z, \varepsilon)W(z, \varepsilon), \end{aligned}$$

où  $B : \Omega_R \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  est holomorphe de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}, \quad B^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad B^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}).$$

De plus, si l'on écrit  $D = \text{diag}(D^1, D^2)$ ,  $D^1 \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $D^2 \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ , alors  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND2) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

La démonstration de ce lemme étant relativement longue, nous allons en donner une preuve en admettant un certain nombre de lemmes que nous démontrerons dans la suite de ce chapitre.

**Preuve du lemme (3.1) :** Quitte à diminuer le rayon de  $\Omega$ , nous noterons dans la suite  $\Omega = \Omega_R$ . Nous procédons dans un premier temps et pour la technique de *splitting*, comme dans le chapitre précédent. Nous avons déjà vu que la transformation  $Y = PW$  conduit à une équation de transformation

$$z(z^r - \varepsilon^r)P' = A(z, \varepsilon)P - PB(z, \varepsilon) \quad (3.4)$$

Puis, et c'est toute l'idée du *splitting*, on pose

$$P = I + \begin{pmatrix} 0 & P^{12} \\ P^{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

pour obtenir comme précédemment les équations

$$0 = A^{11} + A^{12}P^{21} - B^{11} \quad (3.6)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{12})' = A^{11}P^{12} - P^{12}B^{22} + A^{12} \quad (3.7)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{21})' = A^{22}P^{21} - P^{21}B^{11} + A^{21} \quad (3.8)$$

$$0 = A^{22} + A^{21}P^{12} - B^{22}. \quad (3.9)$$

Considérant les équations (3.7) et (3.9) (ou de façon analogue (3.8) et (3.6)), on arrive au système différentiel

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{21})' = A^{21} + A^{22}P^{21} - P^{21}A^{11} - P^{21}A^{12}P^{21} \quad (3.10)$$

qui va servir de base à notre raisonnement. En effet, en trouvant  $P^{21}$  vérifiant cette équation quadratique, on peut, par (3.9), en déduire la matrice  $B^{11}$  correspondante (et  $B^{22}$  si l'on considère les autres équations).

Pour étudier cette équation matricielle, nous la transformons en une équation vectorielle à  $p(n-p)$  éléments, par exemple en superposant les colonnes de chaque matrice. Cherchons à résoudre

$$z(z^r - \varepsilon^r)w'(z, \varepsilon) = f_0(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon)w(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, w(z, \varepsilon)) \quad (3.11)$$

selon les correspondances

$$P^{21} \longleftrightarrow w, \quad A^{21} \longleftrightarrow f_0, \quad A^{22}P^{21} - P^{21}A^{11} \longleftrightarrow Fw \quad (3.12)$$

$$\text{et} \quad P^{21}A^{12}P^{21} \longleftrightarrow f_2(\cdot, \cdot, w).$$

Remarquons immédiatement que l'on a, d'après la condition (COND2),  $A^{21}(z, \varepsilon) = O(z)$  donc  $f_0(z, \varepsilon) = O(z)$ . De plus,  $F(0, \varepsilon)w$  correspond à  $D_0^{22}P^{21} - P^{21}D_0^{11}$  donc  $F(0, \varepsilon) = F_0$  est diagonale inversible et ses valeurs propres sont les  $\lambda_v - \lambda_u$ ,  $1 \leq u \leq p < v \leq n$ .

Dans la suite, nous noterons  $\gamma_1, \dots, \gamma_{p(n-p)}$  les valeurs propres de  $F_0$ .

Enfin, on peut écrire d'après la dernière correspondance,  $f_2(\cdot, \cdot, w) = \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f_{2ij} w_i w_j$  où  $f_{2ij}$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}^{p(n-p)}$  et  $f_{2ij}(z, \varepsilon) = O(z)$  car  $A^{12}(z, \varepsilon) = O(z)$ .

Nous pourrions dès à présent transformer cette équation en une équation de point fixe en appliquant la méthode de variation de la constante et nous pourrions continuer ainsi notre démonstration. Mais, dans la mesure où nous souhaitons démontrer la convergence uniforme des solutions obtenues, nous désirons également contrôler leurs dérivées.

Ainsi, nous allons dériver l'expression (3.11) pour obtenir non pas  $w$  mais  $w'$  comme solution d'un problème de point fixe puis  $w$  par intégration. Si  $w$  vérifie l'équation (3.11), on obtient par dérivation :

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)w''(z, \varepsilon) + ((r+1)z^r - \varepsilon^r)w'(z, \varepsilon) &= f_0'(z, \varepsilon) \\ &+ F(z, \varepsilon)w'(z, \varepsilon) + F'(z, \varepsilon)w(z, \varepsilon) + \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f'_{2ij}(z, \varepsilon)w_i(z, \varepsilon)w_j(z, \varepsilon) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f_{2ij}(z, \varepsilon)w'_i(z, \varepsilon)w_j(z, \varepsilon) + \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f_{2ij}(z, \varepsilon)w_i(z, \varepsilon)w'_j(z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.13)$$

On pose

$$Z = w' \quad \text{et} \quad w = \int_0^z Z(u, \varepsilon) du.$$

On considère alors le système suivant, associé à (3.13) :

$$z(z^r - \varepsilon^r)Z'(z, \varepsilon) - F_0Z(z, \varepsilon) = L(z, \varepsilon)Z(z, \varepsilon) + M(z, \varepsilon, Z) + N(z, \varepsilon, Z) \quad (3.14)$$

où

$$L(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon) + \varepsilon^r I \quad \text{où} \quad H(z, \varepsilon) = (F(z, \varepsilon) - F_0) - (r+1)z^r$$

$$M(z, \varepsilon, Z) = f_0'(z, \varepsilon) + F'(z, \varepsilon) \int_0^z Z(u, \varepsilon) du$$

$$\begin{aligned} N(z, \varepsilon, Z) &= \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f_{2ij}(z, \varepsilon) \left( \left( \int_0^z Z_i(u, \varepsilon) du \right) Z_j(z, \varepsilon) + Z_i(z, \varepsilon) \left( \int_0^z Z_j(u, \varepsilon) du \right) \right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f'_{2ij}(z, \varepsilon) \left( \int_0^z Z_i(u, \varepsilon) du \right) \left( \int_0^z Z_j(u, \varepsilon) du \right). \end{aligned}$$

Afin de passer de la résolution du système (3.14) à la résolution d'un système de point fixe, on considère l'équation

$$z(z^r - \varepsilon^r)Z'(z, \varepsilon) - F_0Z(z, \varepsilon) = G(z, \varepsilon) \quad (3.15)$$

et on lui applique la méthode de variation de la constante.

On notera dans la suite  $m(z, \varepsilon) = \int^z \frac{du}{u(u^r - \varepsilon^r)}$ . L'équation sans second membre associée à (3.15) admet les solutions de la forme

$$Z(z, \varepsilon) = e^{F_0m(z, \varepsilon)}K, \quad K \in M_{p(n-p)}(\mathbb{C}).$$

En injectant cette solution dans (3.15) et en supposant  $K \in \text{Hol}(\Omega, M_{p(n-p)}(\mathbb{C}))$ , la méthode de variation de la constante nous fournit une solution de (3.15) sous la forme

$$Z(z, \varepsilon) = e^{F_0m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} e^{-F_0m(t, \varepsilon)} \frac{G(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt \quad (3.16)$$

où  $\mathcal{L}(z, \varepsilon)$  est un multi-chemin (c'est-à-dire un chemin pour chaque composante de  $Z$ ) de  $a(\varepsilon) = (a_1(\varepsilon), \dots, a_{p(n-p)}(\varepsilon))$  à  $z$  à déterminer par la suite.

On est alors amené à considérer l'équation de point fixe associée à (3.14) :

$$Z(z, \varepsilon) = e^{F_0m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} e^{-F_0m(t, \varepsilon)} \frac{L(t, \varepsilon)Z(t, \varepsilon) + M(t, \varepsilon, Z) + N(t, \varepsilon, Z)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt. \quad (3.17)$$

Comme, pour tout  $\varepsilon$  considéré,  $z$  peut dépendre de  $\varepsilon$ , nous allons chercher  $\Omega$  sous la forme

$$\Omega = \{(z, \varepsilon), \varepsilon \in V \text{ et } z \in S_\varepsilon\},$$

où  $V$  et les  $S_\varepsilon$  seront précisés par la suite. Nous écrivons encore l'équation (3.17) sous la forme

$$Z = \mathcal{F}(Z) = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}(Z) \quad (3.18)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(Z)_j(z, \varepsilon) &= e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} \frac{Z_j(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt, \quad j = 1, \dots, p(n-p) \\ \mathcal{R}(Z)(z, \varepsilon) &= L(z, \varepsilon)Z(z, \varepsilon) + M(z, \varepsilon, Z) + N(z, \varepsilon, Z). \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{B}$  l'espace des fonctions analytiques sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^q$  et bornées sur  $\Omega$ . Muni de la norme

$$\|w\| = \sup_{(z, \varepsilon) \in \Omega} \max_{j=1}^{p(n-p)} |w_j(z, \varepsilon)|, \quad ,$$

$\mathcal{B}$  est un espace de Banach. Pour montrer que  $\mathcal{F}$  est une contraction, admettons pour l'instant le lemme suivant que nous démontrerons dans la suite :

**Lemme 3.2** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $w \in \mathcal{B}$ ,  $\|\mathcal{T}(w)\| \leq C\|w\|$*

**Remarque 3.1** Le lemme précédent porte sur l'application  $\mathcal{T}$  donc sur les chemins  $\mathcal{L}(z, \varepsilon)$  que nous devons encore décrire. En fait, on pourrait l'énoncer de la façon suivante : «En choisissant correctement  $\Omega$  et les chemins  $\mathcal{L}(z, \varepsilon)$ , on peut trouver  $C > 0$  tel que  $\|\mathcal{T}(w)\| \leq C\|w\|$  pour tout  $w \in \mathcal{B}$ ».  $\triangle$

Ce lemme prouve également que  $\mathcal{T}$  est une application de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}$ . De plus, si on suppose bornée indépendamment de  $(z, \varepsilon) \in \Omega$  la longueur des chemins  $\mathcal{L}(z, \varepsilon)$ ,  $\mathcal{R}(w)$  est bornée si  $w$  l'est. On notera :  $\mathcal{R} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ .

Montrons que l'on peut conclure la démonstration du lemme (3.1) en admettant le lemme (3.2) :

Nous avons vu que  $\Omega$  doit être un domaine borné. Nous poserons dans la suite

$$R = \sup\{|z|, \exists \varepsilon \in \mathbb{C}, (z, \varepsilon) \in \Omega\}, \quad \eta = \sup\{|\varepsilon|, \exists z \in \mathbb{C}, (z, \varepsilon) \in \Omega\} \quad (3.19)$$

et nous déterminerons plus tard  $R$  et  $\eta$  pour obtenir  $\Omega$  tel que  $\mathcal{F}$  soit une contraction.

On pose dans la suite  $q = p(n-p)$ . D'après la condition (COND2), il existe  $K_0(R, \eta)$ ,  $K_1(R)$  positifs tels que :

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{j=1}^{p(n-p)} |(f'_0)_j(z, \varepsilon)| \leq K_0(R, \eta)$$

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{i,j=1}^{p(n-p)} |H_{i,j}(z, \varepsilon)| \leq K_1(R)$$

et

$$\lim_{(R,\eta) \rightarrow (0,0)} K_0(R, \eta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow 0} K_1(R) = 0.$$

En effet, vu la correspondance  $A^{21} \leftrightarrow f_0$  et l'égalité  $(A^{21})'(z, \varepsilon) = G^{21}(z, \varepsilon)$ , on a la première inégalité en utilisant la condition (COND2)(2).

De plus, on a  $A^{11}(z, \varepsilon) - D_0 = (D(z) - D(0)) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{11}(z, \varepsilon) = O(z)$  d'après la condition (COND2)(1) et de même  $A^{22}(z, \varepsilon) - D_0 = O(z)$ . On en déduit alors

$$H(z, \varepsilon) = F(z, \varepsilon) - F_0 - (r+1)z^r = O(z) - (r+1)z^r = O(z)$$

Enfin, il existe  $K_2$ ,  $K_3$  et  $K_4$  positifs tels que

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{i,j=1}^{p(n-p)} |F'_{i,j}(z, \varepsilon)| \leq K_2$$

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{i,j,k=1}^{p(n-p)} |(f_{2ij})_k(z, \varepsilon)| \leq K_3$$

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{i,j,k=1}^{p(n-p)} |(f'_{2ij})_k(z, \varepsilon)| \leq K_4.$$

Comme précédemment, on vérifie aisément que ces inégalités se déduisent des correspondances (3.12) et des conditions (COND2).

Pour montrer que l'on définit bien une contraction  $\mathcal{F}$ , on suppose que la longueur maximale de tous les chemins  $\mathcal{L}(z, \varepsilon)$ ,  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , est bornée par  $L(R)$  où  $\lim_{R \rightarrow 0} L(R) = 0$ . En particulier, on suppose que la longueur de tous les chemins considérés est bornée par un constante que nous appellerons  $L_0$ , quel que soit le rayon  $R$  de  $\Omega$ , assez petit.

Autrement dit, on suppose que la longueur maximale de tous les chemins considérés tend

vers 0 avec  $R$  : nous verrons dans la suite que l'on peut effectivement prendre de tels chemins.

Pour tout  $Z \in \mathcal{B}$ , tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , on a alors , par simple majoration :

$$\mathcal{R}(Z)_j(z, \varepsilon) \leq K_0(R, \eta) + (q(K_1(R) + K_2L(R)) + \eta^r) \|Z\| + q^2 (2K_3L(R) + K_4L^2(R)) \|Z\|^2 .$$

D'où, pour tout  $Z \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(Z)\| &\leq K_0(R, \eta) + (q(K_1(R) + K_2L(R)) + \eta^r) \|Z\| \\ &\quad + q^2 (2K_3L(R) + K_4L^2(R)) \|Z\|^2 . \end{aligned} \quad (3.20)$$

De même, pour tout  $(Z, \tilde{Z}) \in \mathcal{B}^2$ , tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{R}(Z)_j - \mathcal{R}(\tilde{Z})_j \right| (z, \varepsilon) &\leq \sum_{k=1}^q |L_{kj}(Z_k - \tilde{Z}_k)|(z, \varepsilon) + |F'_{kj}(z, \varepsilon)| \left| \int_{a_k(\varepsilon)}^z (Z_k - \tilde{Z}_k)(u, \varepsilon) du \right| \\ &+ \sum_{k,l=1}^q |(f_{2kl})_j(z, \varepsilon)| \left( \left| \int_{a_k(\varepsilon)}^z (Z_k - \tilde{Z}_k)(u, \varepsilon) du \right| |Z_l(z, \varepsilon)| + \left| \int_{a_k(\varepsilon)}^z \tilde{Z}_k(u, \varepsilon) du \right| |Z_l - \tilde{Z}_l|(z, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{a_l(\varepsilon)}^z (Z_l - \tilde{Z}_l)(u, \varepsilon) du \right| |Z_k(z, \varepsilon)| + \left| \int_{a_l(\varepsilon)}^z \tilde{Z}_l(u, \varepsilon) du \right| |Z_k - \tilde{Z}_k|(z, \varepsilon) \right) \\ &+ \sum_{k,l=1}^q |(f'_{2kl})_j(z, \varepsilon)| \left( \left| \int_{a_k(\varepsilon)}^z (Z_k - \tilde{Z}_k)(u, \varepsilon) du \right| \left| \int_{a_l(\varepsilon)}^z \tilde{Z}_l(u, \varepsilon) du \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{a_k(\varepsilon)}^z \tilde{Z}_k(u, \varepsilon) du \right| \left| \int_{a_l(\varepsilon)}^z (Z_l - \tilde{Z}_l)(u, \varepsilon) du \right| \right) , \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(Z) - \mathcal{R}(\tilde{Z})\| &\leq \left( q(K_1(R) + K_2L(R) + \eta^r) \right. \\ &\quad \left. + q^2(2K_3L(R)(\|Z\| + \|\tilde{Z}\|) + K_4L^2(R)(\|Z\| + \|\tilde{Z}\|)) \right) \|Z - \tilde{Z}\| . \end{aligned} \quad (3.21)$$

On introduit maintenant  $\mathcal{B}_M = \{w \in \mathcal{B}, \|w\| \leq M\}$ , partie fermée de  $\mathcal{B}$  : c'est donc un espace métrique complet. Nous allons voir que si l'on choisit correctement  $M$  et quitte à diminuer le rayon de  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}$  est une contraction sur  $\mathcal{B}_M$ .

Les inégalités (3.20) et (3.21) et le lemme (3.2) montrent que pour tout  $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{B}_M$ , on a

$$\|\mathcal{F}(Z)\| \leq \left( \delta_0(R, \eta) + \delta_1(R, \eta)M + \delta_2M^2 \right) \quad (3.22)$$

$$\|\mathcal{F}(Z) - \mathcal{F}(\tilde{Z})\| \leq \left( \delta_1(R, \eta) + 2\delta_2M \right) \|Z - \tilde{Z}\| , \quad (3.23)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_0(R, \eta) &= CK_0(R, \eta) , & \delta_1(R, \eta) &= Cq(K_1(R) + K_2L(R) + \eta^r) \\ \text{et} & & \delta_2 &= Cq^2(2K_3L_0 + K_4L_0^2) . \end{aligned}$$

Pour que  $\mathcal{F}$  soit une contraction sur  $\mathcal{B}_M$ , il suffit alors d'avoir :

$$\delta_1(R, \eta) + 2\delta_2M < 1 \quad (3.24)$$

$$\text{et} \quad \delta_0(R, \eta) + \delta_1(R, \eta)M + \delta_2M^2 \leq M . \quad (3.25)$$

On choisit maintenant  $R$  et  $\eta$  assez petits pour avoir

$$\delta_1(R, \eta) < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \delta_0(R, \eta) \leq \frac{1}{\delta_2}(1/4 - 1/8 - 1/16)$$

Pour  $R$  ainsi fixé, on pose  $M = 1/(4\delta_2)$ . L'inégalité (3.24) est clairement vérifiée et

$$\delta_0(R, \eta) + \delta_1(R, \eta)M + \delta_2 M^2 \leq \frac{1}{\delta_2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{4\delta_2} + \delta_2 \frac{1}{16\delta_2^2} = \frac{1}{4\delta_2} = M$$

d'où l'inégalité (3.25).

$\mathcal{F}$  est donc une contraction sur  $\mathcal{B}_M$  : elle admet un unique point fixe  $Z$  sur  $\mathcal{B}_M$ , solution de l'équation différentielle (3.14). Nous avons précédemment posé  $w = \int_0^z Z(u, \varepsilon) du$ . Montrons que  $w$  est solution de l'équation différentielle (3.11).

On remarquera au passage que  $w$  est bornée sur  $\Omega$  puisque  $\Omega$  est borné et que la longueur de tous les chemins est bornée par  $L(R)$ .

Pour ce faire, nous allons intégrer l'équation (3.14) entre 0 et  $z$  (ce qui signifie en particulier que l'on doit avoir  $0 \in \Omega_1$ ). On a :  $w' = Z$  et  $w'' = Z'$ , d'où

$$\left[ t(t^r - \varepsilon^r)w'(t, \varepsilon) \right]_0^z = \left[ f_0(t, \varepsilon) + F(t, \varepsilon)w(t, \varepsilon) + \sum_{k,l=1}^q f_{2kl}(t, \varepsilon)w_k(t, \varepsilon)w_l(t, \varepsilon) \right]_0^z. \quad (3.26)$$

Rappelons que l'on a  $f_0(z, \varepsilon) = O(z)$ . On a vu que  $w'$  est bornée sur  $\Omega$ , d'où  $\lim_{t \rightarrow 0} w(t, \varepsilon) = 0$  et l'équation (3.26) est en fait l'équation (3.11), vérifiée par  $w$ .

**Remarque 3.2** Considérant  $w$  ainsi définie, faisons tendre  $z$  vers  $z_k$  avec  $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ . Les correspondances (3.12) montrent que l'on a également  $f_0(z_k, \varepsilon) = 0$  et  $f_{2kl}(z_k, \varepsilon) = 0$  pour  $k, l = 1, \dots, q$ , car  $A^{12}(z_k, \varepsilon) = 0$  et  $A^{21}(z_k, \varepsilon) = 0$ . On obtient alors l'égalité

$$F(z_k, \varepsilon)w(z_k, \varepsilon) = 0.$$

Or, on a  $F(0, \varepsilon) = F_0$  inversible donc pour  $\varepsilon$  assez petit,  $F(z_k, \varepsilon)$  est aussi inversible c'est-à-dire  $w(z_k, \varepsilon) = 0$ .  $\triangle$

**Remarque 3.3** [importante] Nous avons déterminé  $w$ , solution de (3.11), correspondant à  $P^{21}$ , solution de (3.10). On a vu que la norme de  $Z$  est majorée par  $M = 1/(4\delta_2)$  : remarquons simplement que l'on peut fixer  $\delta_2$  aussi grand que l'on veut pour avoir  $M$  aussi petit que nécessaire de sorte que  $\|w\| = \|P^{21}\| \leq LM < 1$ .

On raisonnerait de même avec  $P^{12}$  pour avoir  $\|P^{21}\| < 1$  de sorte que  $P$  définit par (3.5) soit inversible sur  $\Omega$ .  $\triangle$

Il reste à présent à vérifier que  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND2) du *splitting* avec comme matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

D'après (3.6) et (COND2)(1), on a pour tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$

$$\begin{aligned} B^{11}(z, \varepsilon) &= A^{11}(z, \varepsilon) + A^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{11}(z, \varepsilon) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) \left( C^{11}(z, \varepsilon) + C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

$C^{12}$  et  $C^{11}$  sont bornés sur  $\Omega$  par définition et on a vu que  $P^{21}$  l'est aussi, la condition (COND2)(1) est donc vérifiée pour  $B^{11}$  avec pour matrice diagonale associée  $D^1$ .

De même, en dérivant l'expression précédente et d'après (COND2), on a

$$\begin{aligned} (B^{11})'(z, \varepsilon) &= (A^{11})'(z, \varepsilon) + (A^{12})'(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) + A^{12}(z, \varepsilon)(P^{21})'(z, \varepsilon) \\ &= (D^1)'(z) + G^{11}(z, \varepsilon) + G^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{12}(z, \varepsilon)(P^{21})'(z, \varepsilon) \\ &= (D^1)'(z) + I(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

car  $(A^{12})' = G^{12}$ ,  $(A^{11})' = (D^1)' + G^{11}$  et

$$I(z, \varepsilon) = G^{11}(z, \varepsilon) + G^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{12}(z, \varepsilon)(P^{21})'(z, \varepsilon) .$$

Or,  $P^{21}$ ,  $C^{12}$ ,  $(P^{21})'$  sont bornés et

$$\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0,0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} G^{11}(z, \varepsilon) = 0 , \quad \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0,0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} G^{12}(z, \varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0,0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} z(z^r - \varepsilon^r) = 0 .$$

D'où

$$\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0,0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} I(z, \varepsilon) = 0 .$$

Ainsi,  $B^{11}$  vérifie la condition (COND2)(2) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D^1$ . On montrerait qu'il en est de même de  $B^{22}$  et  $D^2$ .

Ceci termine la démonstration du lemme (3.1). □

Nous venons de démontrer ce lemme de *splitting* en admettant la démonstration du lemme (3.2) qui constituera la partie la plus difficile de ce travail. Avant de poursuivre sur ce point, considérons les conséquences du lemme (3.1).

Comme nous l'avons déjà remarqué dans les chapitres 1 et 2, on peut se ramener en appliquant un nombre fini de fois le lemme (3.1) à des équations scalaires de la forme

$$z(z^r - \varepsilon^r)y' = (\lambda_i(z) + z(z^r - \varepsilon^r)c_i(z, \varepsilon))y \quad (3.27)$$

où  $\lambda_i(z)$  est la  $i^{\text{e}}$  valeur propre de  $D(z)$  et  $c_i \in \text{Hol}_b(\Omega, \mathbb{C})$ . Nous avons traité ces équations dans la partie (1.1) : on a vu qu'il existe une solution fondamentale de (3.27) de la forme

$$y(z, \varepsilon) = h_i(z, \varepsilon)e^{\int_0^z \frac{\lambda_i^0(\varepsilon) + \lambda_i^1(\varepsilon)t + \dots + \lambda_i^r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $h_i \in \text{Hol}_b(\Omega, \mathbb{C})$  vérifie  $\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0,0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} h_i(z, \varepsilon) = 1$  et les  $\lambda_i^p$ ,  $p \in \llbracket 0, r \rrbracket$  sont définis pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  par (2.6).

Bien sûr, en multipliant  $h_i$  par une fonction de  $\varepsilon$  tendant vers 1 avec  $\varepsilon$ , on obtient toujours une solution de (3.27) ayant la même propriété de convergence et finalement, on obtient une solution fondamentale de (2.2) de la forme :

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon)e^{\int_0^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $H \in \text{Hol}(\Omega, \text{M}_n(\mathbb{C}))$  est inversible, ainsi que  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  définies par (2.7). On peut alors en déduire le

**Théorème 3.1** *Considérons le système (3.2) mis sous la forme préparée (2.4) où  $C$  est holomorphe sur un voisinage de l'origine. Le système (3.2) possède une **unique** solution fondamentale de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (3.28)$$

vérifiant  $H \in \text{Hol}_b(\Omega, M_n(\mathbb{C}))$ , pour tout  $\varepsilon \in V$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\varepsilon}} H(z, \varepsilon) = I_n ,$$

et où  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes de  $\varepsilon$  en 0 définies par (2.7).

**Remarque 3.4** Le domaine  $\Omega$  cité dans ce théorème sera défini plus loin. △

**Preuve du théorème (3.1) :** En admettant pour l'instant le lemme précédent, il suffit de démontrer l'existence de  $H$  vérifiant pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\varepsilon}} H(z, \varepsilon) = I_n$  puis l'unicité de cette écriture. Nous le ferons dans la partie (5.1.2). Nous allons tout d'abord démontrer le lemme (3.2) et déterminer  $\Omega$  dont nous allons nous servir dans la suite. □

## 3.2 Étude des lignes de niveau des fonctions $R_j$

Commençons la démonstration du lemme (3.2). Elle fera intervenir un autre lemme prouvant l'existence des chemins  $\mathcal{L}(z, \varepsilon)$  qui vérifieront une «bonne propriété» sur  $\Omega$ .

**Preuve du lemme (3.2) :** Rappelons que l'application  $\mathcal{T}$  du lemme (3.2) est définie par

$$\mathcal{T}(Z)_j(z, \varepsilon) = e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} \frac{Z_j(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt, \quad j = 1, \dots, q$$

et que  $\Omega$  est cherché sous la forme  $\Omega = \{(z, \varepsilon), \varepsilon \in V \text{ et } z \in S_\varepsilon\}$ . On a alors les majorations suivantes pour tout  $w \in \mathcal{B}$  et tout  $j = 1, \dots, q$  :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| &\leq e^{\Re(\gamma_j m(z, \varepsilon))} \int_{\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)} e^{-\Re(\gamma_j m(t, \varepsilon))} |m'(t, \varepsilon)| |w_j(t, \varepsilon)| |dt| \\ &\leq e^{\Re(\gamma_j m(z, \varepsilon))} \int_0^1 e^{-\Re(\gamma_j m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon))} |m'(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)| |\Gamma'_z(s, \varepsilon)| \|w\| ds \end{aligned}$$

où  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$  est un chemin différentiable par morceaux de  $a_j(\varepsilon)$  à  $z$  dans  $S_\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_z(\cdot, \varepsilon) &: [0; 1] \longrightarrow \overline{S_\varepsilon} \\ \Gamma_z(0, \varepsilon) &= a_j(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \Gamma_z(1, \varepsilon) = z . \end{aligned}$$

Dans la suite, on notera  $R_j(z, \varepsilon) = \Re(\gamma_j m(z, \varepsilon))$  pour  $j = 1, \dots, q$ . On a alors :

$$|\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| \leq e^{R_j(z, \varepsilon)} \|w\| \int_0^1 e^{-R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)} \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| ds \quad (3.29)$$

Énonçons alors le

**Lemme 3.3** Il existe une famille de chemins différentiables par morceaux  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon) : [0; 1] \longrightarrow \overline{S_\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \in V$ ,  $z \in S_\varepsilon$  tels que

$$\Gamma_z(0, \varepsilon) = a_j(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \Gamma_z(1, \varepsilon) = z$$

et une constante  $C > 0$  tels que

$$\forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon, \left| \frac{d}{ds}(m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -C \frac{d}{ds}(R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) .$$

**Remarque 3.5** Il faut comprendre ce dernier lemme de la façon suivante: «Pour tout  $j=1, \dots, q$ , il existe une famille ...», mais on ne l'a pas écrit pour ne pas alourdir les notations. En particulier, le lemme doit être vrai pour  $\gamma_j$  et  $-\gamma_j$  suivant que l'on s'intéresse aux valeurs propres de  $P \mapsto D^2P - PD^1$  ou de  $P \mapsto D^1P - PD^2$ .  $\triangle$

Montrons que l'on peut conclure si on admet le lemme (3.3). L'inégalité (3.29) conduit pour tout  $w \in \mathcal{B}$  et tout  $j = 1, \dots, q$  à

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| &\leq C e^{R_j(z, \varepsilon)} \|w\| \int_0^1 e^{-R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)} \frac{d}{ds}(-R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) ds \\ &\leq C e^{R_j(z, \varepsilon)} \left[ e^{-R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)} \right]_0^1 \|w\| \\ &\leq C e^{R_j(z, \varepsilon)} \left( e^{-R_j(z, \varepsilon)} - e^{-R_j(a_j(\varepsilon), \varepsilon)} \right) \|w\| . \end{aligned}$$

Remarquons que le lemme (3.3) implique en particulier que pour tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , l'application  $s \mapsto R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)$  est décroissante. Cela montre que l'on a  $R_j(z, \varepsilon) < R_j(a_j(\varepsilon), \varepsilon)$  d'où

$$|\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| \leq C e^{R_j(z, \varepsilon)} e^{-R_j(z, \varepsilon)} \|w\| = C \|w\|$$

et ceci démontre le lemme (3.2).  $\square$

Pour prouver le lemme (3.3), on a vu qu'il nous faut chercher des chemins  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$  sur un certain domaine tel que l'application  $s \mapsto R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)$  soit décroissante. Pour ce faire, nous allons étudier les lignes de niveau de  $R_j(z, \varepsilon)$ .

Remarquons simplement que l'on a

$$m(z, \varepsilon) = \int^z \frac{1}{u(u^r - \varepsilon^r)} = \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right)$$

d'où

$$R_j(z, \varepsilon) = \Re e(\gamma_j m(z, \varepsilon)) = \Re e \left( \frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) \right) .$$

On a  $\gamma_j = |\gamma_j| e^{i \arg \gamma_j}$  et  $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i \arg \varepsilon}$  avec  $\gamma_j \neq 0$  et  $\varepsilon \neq 0$  d'où  $\frac{\gamma_j}{\varepsilon^r} = \frac{|\gamma_j|}{|\varepsilon|^r} e^{i(\arg \gamma_j - r \arg \varepsilon)}$  et finalement

$$\begin{aligned} R_j(z, \varepsilon) &= \Re e \left( \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} e^{i(\arg \gamma_j - r \arg \varepsilon)} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) \right) \\ &= \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \left( \cos(\arg \gamma_j - r \arg \varepsilon) \ln \left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right| - \sin(\arg \gamma_j - r \arg \varepsilon) \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) \right) . \end{aligned}$$

Dans la suite, on notera  $\theta_r(j, \varepsilon) = \arg \gamma_j - r \arg \varepsilon$  en se plaçant dans les cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) \neq 0$  et  $\sin \theta_r(j, \varepsilon) \neq 0$ , c'est-à-dire

$$\theta_r(j, \varepsilon) \neq k\pi \quad \text{et} \quad \theta_r(j, \varepsilon) \neq k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou encore

$$\arg \varepsilon \neq \frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{k\pi}{2r}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.30)$$

Étudions les lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$ , c'est-à-dire

$$\cos \theta_r(j, \varepsilon) \ln \left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right| - \sin \theta_r(j, \varepsilon) \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) = \frac{rC|\varepsilon|^r}{|\gamma_j|},$$

soit

$$\ln \left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right| = \tan \theta_r(j, \varepsilon) \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) + \frac{rC|\varepsilon|^r}{|\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon)},$$

ou encore

$$\left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right| = e^{\tan \theta_r(j, \varepsilon) \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right)} e^{\frac{rC|\varepsilon|^r}{|\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon)}}. \quad (3.31)$$

Posons à présent  $Z = 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r}$  et  $K_r(j, \varepsilon) = e^{\frac{rC|\varepsilon|^r}{|\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon)}} > 0$ . L'équation (3.31) est équivalente à

$$|Z| = K_r(j, \varepsilon) e^{\tan \theta_r(j, \varepsilon) \arg Z}$$

soit, en posant  $Z = |Z|e^{i \arg Z}$ ,

$$Z = K_r(j, \varepsilon) e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i) \arg Z}. \quad (3.32)$$

Nous allons maintenant paramétrer les lignes de niveau suivant  $t = \arg Z$  c'est-à-dire poser

$$Z = K_r(j, \varepsilon) e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}, \quad t \in I \quad (I \text{ intervalle de } \mathbb{R}).$$

Remarquons que l'on a  $t = \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) = \arg \left( \frac{z^r - \varepsilon^r}{z^r} \right) = \arg(z^r - \varepsilon^r) - r \arg \varepsilon$ , donc si  $z$  est dans un secteur d'angle d'ouverture fini,  $t$  est borné.

Dans la suite et pour illustrer notre propos, nous prendrons par exemple  $\gamma_j = e^{i\pi/17}$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $r = 3$ . Posons tout d'abord

$$g_{j, \varepsilon}^r(K, t) = K e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}.$$

On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $K \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} g_{j, \varepsilon}^r(K, t) &= K e^{2\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)} e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)(t - 2\pi)} \\ &= g_{j, \varepsilon}^r(K e^{2\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}, t - 2\pi). \end{aligned}$$

Autrement dit, on obtient toutes les courbes  $g_{j, \varepsilon}^r(K, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathbb{R}_+^*$  lorsque  $K$  décrit  $[1; e^{2\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}]$ .

Étudions maintenant les courbes  $Z = g_{j, \varepsilon}^r(K, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  pour  $K \in [1; e^{2\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}]$ .

**Cas 1 :**  $K = 1$ . On a  $Z = e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}$  et deux cas se présentent :

- si  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ , c'est-à-dire  $\theta_r(j, \varepsilon) \in ]k\pi; k\pi + \pi/2[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $Z$  décrit la spirale  $Spil$  centrée en 0 passant par 1 et tendant vers  $\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  (voir figure (3.1)).
- si  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ , c'est-à-dire  $\theta_r(j, \varepsilon) \in ]k\pi + \pi/2; k\pi + \pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $Z$  décrit la spirale  $Spil$  centrée en 0 passant par 1 et tendant vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

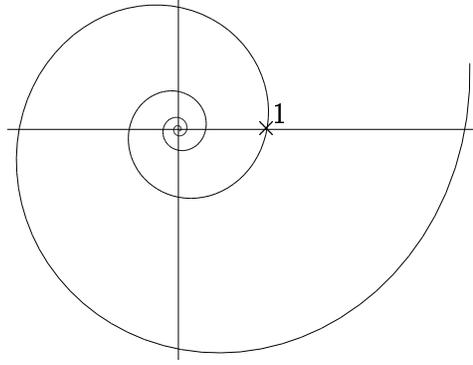
FIG. 3.1: Représentation de la spirale *Spi1* lorsque  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ 

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

Posons à présent  $\tilde{Z} = 1 - Z = 1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t} = \frac{\varepsilon^r}{z^r}$ .  $\tilde{Z}$  décrit la spirale *Spi2* centrée en 1, passant par 0 (pour  $t = 0$ ) et

- tendant vers 1 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  si  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) > 0$  (voir figure (3.2))
- tendant vers  $\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  si  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ .

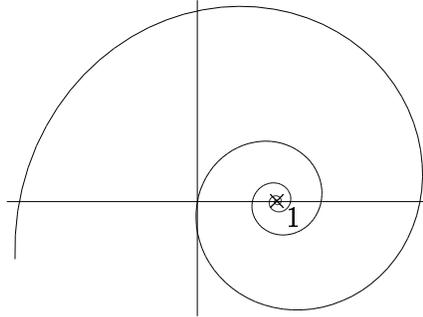
FIG. 3.2: Représentation de la spirale *Spi2* lorsque  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ 

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

Soit maintenant  $\hat{Z} = \frac{1}{Z} = \frac{z^r}{\varepsilon^r} = \frac{1}{1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}}$ .  $\hat{Z}$  décrit la courbe *Spi3* possédant deux branches, une pour  $t > 0$ , une autre pour  $t < 0$  car  $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{Z} = 0$  (voir figure (3.3)). L'une des deux s'enroule autour de 0 tandis que l'autre s'enroule autour de 1

Pour compléter la description de ces lignes de niveau, déterminons à présent  $\lim_{t \rightarrow 0} \arg \hat{Z}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \arg \tilde{Z}$ . On a :

$$1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t} = 1 - (1 + (\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t + o(t)) = -(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t + o(t)$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \arg (1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}) &= \arg (\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i) - \pi \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow 0} \arg (1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}) &= \arg (\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i) \end{aligned}$$

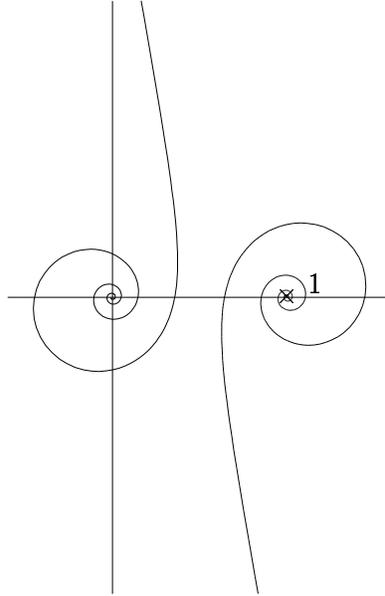
FIG. 3.3: Représentation de la courbe Spi3 lorsque  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ 

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

De plus, on peut écrire

$$\arg(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{\tan \theta_r(j, \varepsilon)}\right) & \text{si } \tan \theta_r(j, \varepsilon) > 0 \\ \arctan\left(\frac{1}{\tan \theta_r(j, \varepsilon)}\right) + \pi & \text{si } \tan \theta_r(j, \varepsilon) < 0. \end{cases}$$

D'autre part, on a pour tout  $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}.$$

Donc, si  $\theta \in ]k\pi; (k+1)\pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on a :  $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta + k\pi < \frac{\pi}{2}$  d'où, pour  $\theta_r(j, \varepsilon) \in ]k\pi; (k+1)\pi[$

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{\tan \theta_r(j, \varepsilon)}\right) &= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r(j, \varepsilon)\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r(j, \varepsilon) + k\pi\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta_r(j, \varepsilon) + k\pi. \end{aligned}$$

Finalement, en rassemblant tous les résultats précédents, il vient pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0}^{t > 0} \arg \hat{Z} = \theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2} - k\pi \\ \lim_{t \rightarrow 0}^{t < 0} \arg \hat{Z} = \theta_r(j, \varepsilon) - \frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases} \quad \text{si } \theta_r(j, \varepsilon) \in ]k\pi; k\pi + \pi/2[$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0}^{t > 0} \arg \hat{Z} = \theta_r(j, \varepsilon) - \frac{\pi}{2} - k\pi \\ \lim_{t \rightarrow 0}^{t < 0} \arg \hat{Z} = \theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases} \quad \text{si } \theta_r(j, \varepsilon) \in ]k\pi + \pi/2; (k+1)\pi[.$$

Enfin, on a  $\tilde{Z} = 1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t} = \frac{\varepsilon^r}{z^r}$  d'où

$$z = |\varepsilon| e^{i(\arg \varepsilon + \frac{2l\pi}{r})} \left| 1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t} \right|^{-\frac{1}{r}} e^{-i \frac{\arg(1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t})}{r}}, \quad l = 0, 1, \dots, r-1.$$

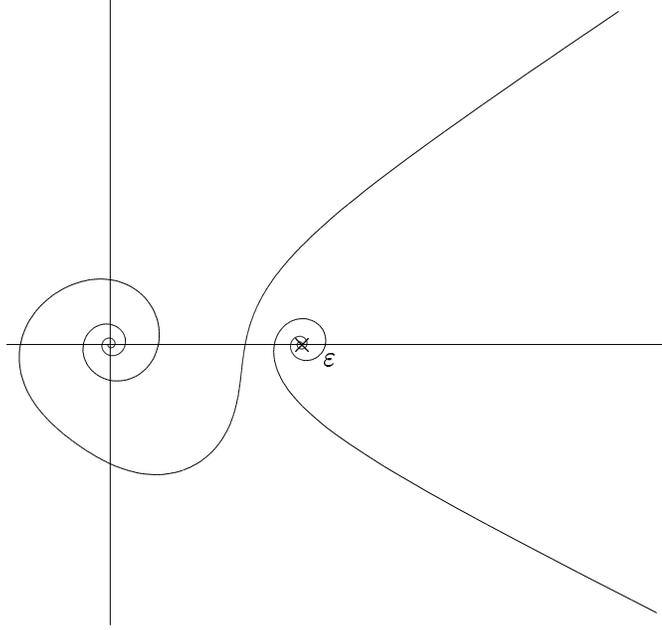
FIG. 3.4: Représentation de la courbe  $Multispi_l$  pour  $l = 0$ 

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

Ainsi, pour chaque  $l \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ , la courbe admettant le paramétrage précédent et que l'on appellera  $Multispi_l$  est composée de deux branches, l'une s'enroulant en spirale autour de 0, l'autre autour de  $\varepsilon \rho^l$  avec  $\rho = e^{\frac{2i\pi}{r}}$  (voir figure (3.4)).

La courbe composée des  $r$  courbes précédentes est appelée  $Multispi$  et est formée de  $2r$  branches s'enroulant autour de 0 et  $\varepsilon, \varepsilon \rho, \dots, \varepsilon \rho^{r-1}$  (voir figure (3.5)), et pour chaque  $l \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ , on a de plus  $\arg z = \frac{2l\pi}{r} + \arg \varepsilon + \frac{1}{r} \arg \hat{Z}$ .

Autrement dit, on a  $2r$  branches infinies pour les arguments

$$\frac{\theta_r(j, \varepsilon)}{r} + \frac{2p+1}{2r}\pi + \arg \varepsilon = \frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{2p+1}{2r}\pi, \quad p = 0, 1, \dots, 2r-1.$$

**Cas 2 :**  $K \in ]1; e^{2\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}[$ . On a  $Z = K e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}$ , et l'équation  $Z = 1$  est donc équivalente à

$$e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t} = \frac{1}{K}, \quad (3.33)$$

ce qui implique  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ , et (3.33) est donc équivalente à

$$K = e^{2n\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ceci est impossible par hypothèse sur  $K$ . Ainsi,  $Z$  décrit la spirale  $Spi1_K$  centrée en 0 et ne contenant pas 1 et dont le «sens d'enroulement» dépend comme précédemment de  $\theta_r(j, \varepsilon)$  (voir figure (3.6)).

Soit  $\tilde{Z} = 1 - Z = 1 - K e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}$ .  $\tilde{Z}$  décrit la spirale  $Spi2_K$  centrée en 1 et ne contenant pas 0. On pose maintenant

$$\hat{Z} = \frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{z^r}{\varepsilon^r} = \frac{1}{1 - K e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t}}.$$

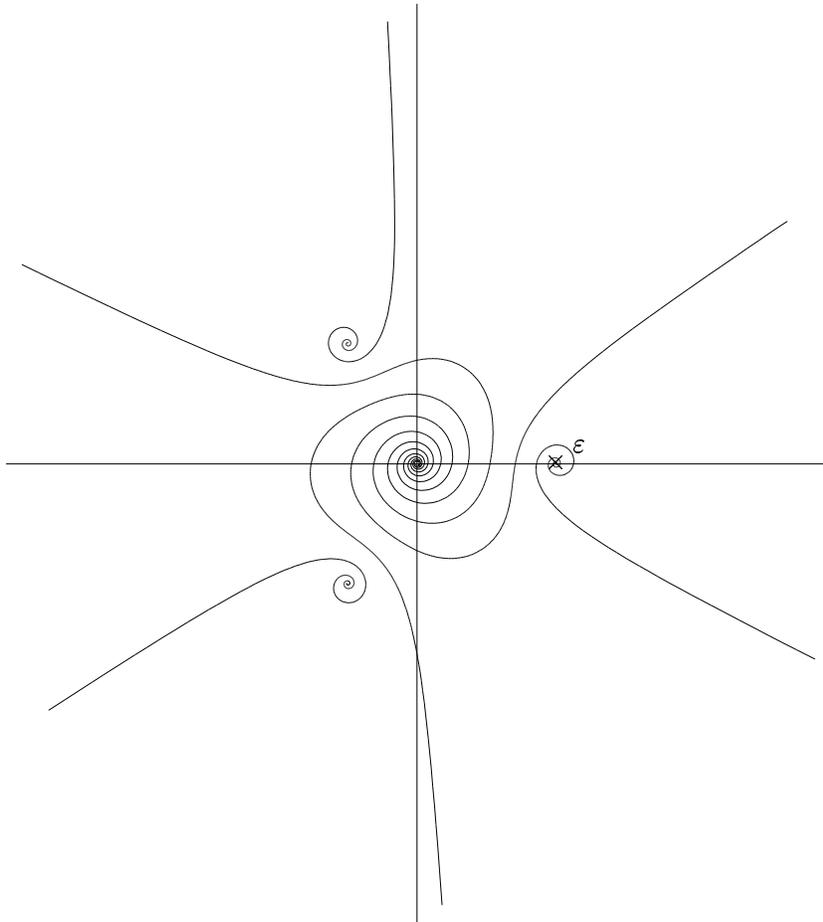
FIG. 3.5: Représentation de la courbe *Multispi* ( $K=1$ )

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

$\hat{Z}$  décrit la courbe (qui cette fois ne contient qu'une seule branche)  $Spi3_K$  s'enroulant autour de 0 et de 1 (voir figure (3.7)).

Enfin, on a

$$z = |\varepsilon| e^{i(\arg \varepsilon + \frac{2l\pi}{r})} \left| 1 - K e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t} \right|^{-\frac{1}{r}} e^{-i \frac{\arg(1 - K e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + i)t})}{r}}, \quad l = 0, 1, \dots, r-1$$

Ainsi, pour chaque  $l \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ , la courbe admettant le paramétrage précédent et que l'on appellera  $Multispi_{K,l}$  s'enroule autour de 0 et autour de  $\varepsilon \rho^l$  avec  $\rho = e^{\frac{2i\pi}{r}}$  (voir figure (3.8)).

La courbe composée des  $r$  courbes précédentes est appelée  $Multispi_K$  et est formée de  $r$  branches s'enroulant autour de 0 et  $\varepsilon, \varepsilon \rho, \dots, \varepsilon \rho^{r-1}$  (voir figure (3.9)).

Nous avons donc envisagé tous les cas possibles. Naturellement, les lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$  sont définies sur le revêtement universel de  $\mathbb{C} - \{0, z_0, \dots, z_{r-1}\}$ . Les discussions précédentes sont résumées sur la figure (3.10). Pour la détermination de  $\Omega$ , nous nous limiterons dans la suite à des domaines ne contenant pas les segments  $[0, z_k]$ ,  $k = 0, \dots, r-1$ .

Enfin, montrons que l'on peut décrire l'allure de toutes les lignes de niveau en se limitant au cas  $\theta_r(j, \varepsilon) \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ .

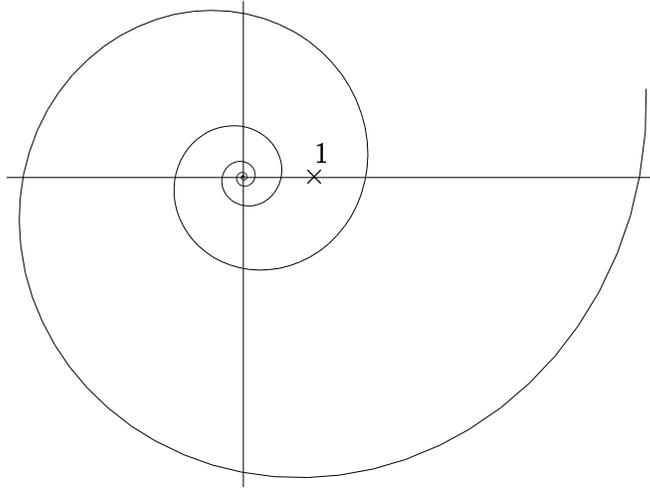
FIG. 3.6: Représentation de la courbe  $Spi1_K$  ( $K = e^{\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}$ )

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

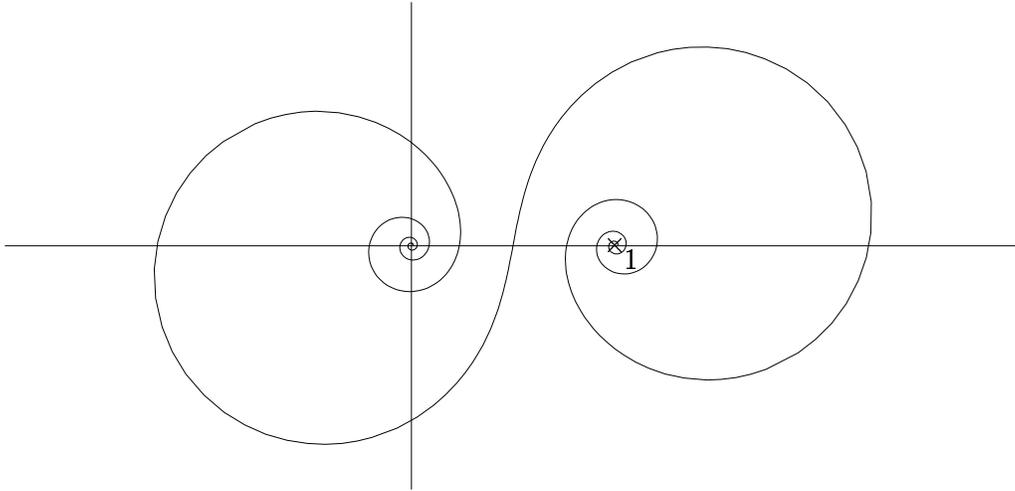
FIG. 3.7: Représentation de la courbe  $Spi3_K$  ( $K = e^{\pi \tan \theta_r(j, \varepsilon)}$ )

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

Posons

$$G(z, \varepsilon, \theta) = \cos \theta \ln \left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right| - \sin \theta \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right),$$

de sorte que

$$G(z, \varepsilon, \theta) = C \iff G(z, \varepsilon, \theta + \pi) = -C,$$

autrement dit, la ligne de niveau  $C$  de  $G(.,., \theta)$  est la ligne de niveau  $-C$  de  $G(.,., \theta + \pi)$ .

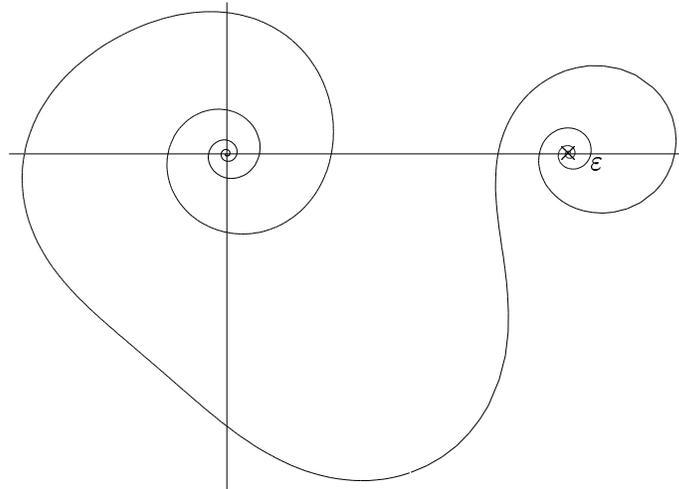
FIG. 3.8: Représentation de la courbe  $\text{Multispi}_{K,l}$  pour  $l = 0$  et  $K = e^{\pi \tan \theta_r(j,\varepsilon)}$ 

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

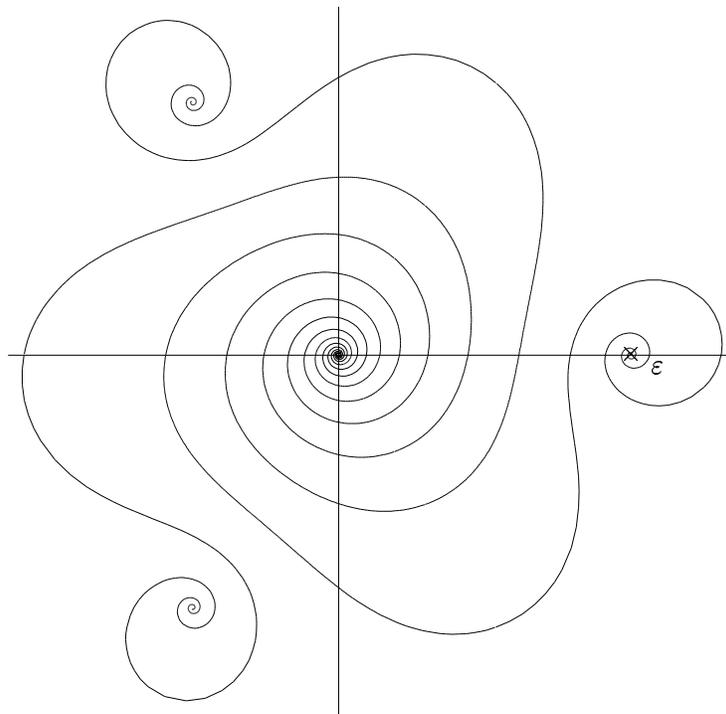
FIG. 3.9: Représentation de la courbe  $\text{Multispi}_K$  ( $K = e^{\pi \tan \theta_r(j,\varepsilon)}$ )

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

Il suffit de limiter notre étude à  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ . De plus, on a

$$\begin{aligned}
 G\left(\frac{\varepsilon}{z}, \varepsilon, -\theta\right) &= \cos \theta \ln \left| 1 - \frac{\bar{\varepsilon}^r}{z^r} \right| + \sin \theta \arg \left( 1 - \frac{\bar{\varepsilon}^r}{z^r} \right) \\
 &= \cos \theta \ln \left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right| + \sin \theta \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) \\
 &= \cos \theta \ln \left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right| - \sin \theta \arg \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) = G(z, \varepsilon, \theta) .
 \end{aligned}$$

La transformation  $s : z \mapsto \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \bar{z}$  est une réflexion par rapport à l'axe d'argument  $\arg \varepsilon$ . Quitte à effectuer cette transformation, il suffit d'étudier les lignes de niveau de  $G$  pour  $\theta \in \mathbb{R}_+$ .

Finalement, modulo des transformations du type ci-dessus, on peut limiter l'étude des représentations des lignes de niveau de  $G$  à  $\theta \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  et donc celles de  $R_j$  au même intervalle.

Les figures (3.11)-(3.15) représentant les lignes de niveau de  $R_j$  pour  $\varepsilon = 1$ ,  $r = 3$  et respectivement  $\gamma_j = e^{\frac{2i\pi}{17}}$ ,  $\gamma_j = e^{\frac{i\pi}{7}}$ ,  $\gamma_j = e^{\frac{i\pi}{4}}$ ,  $\gamma_j = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ,  $\gamma_j = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ .

FIG. 3.10: Représentation des lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$  ( $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$ )

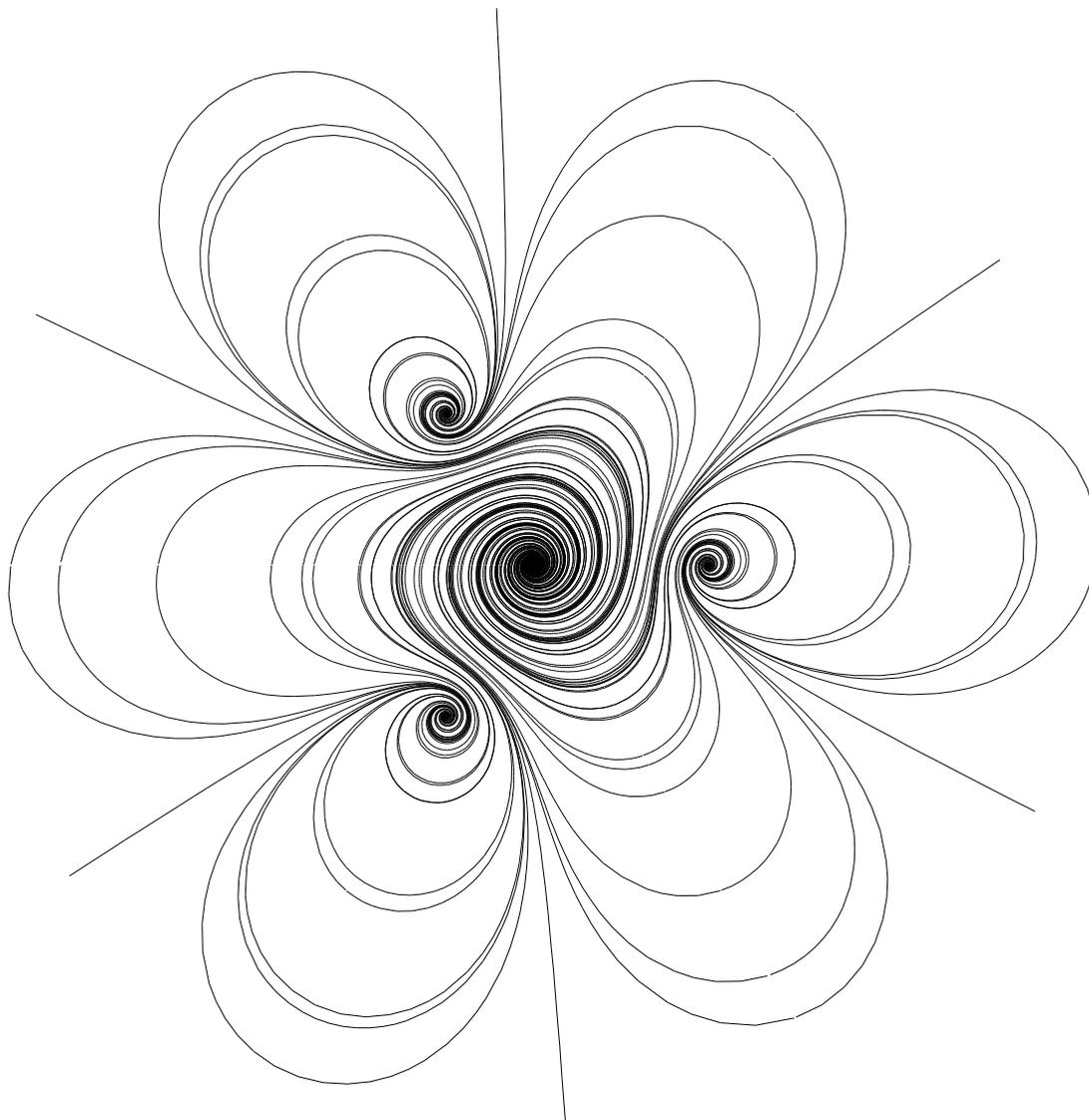


Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{17} > 0$

Enfin, avant de chercher les chemins satisfaisant le lemme (3.3), remarquons que l'on a par définition de  $R_j$  et pour tout  $k = 0, 1, \dots, r-1$

- pour  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} R_j(z, \varepsilon) = +\infty$  et  $\lim_{z \rightarrow z_k} R_j(z, \varepsilon) = -\infty$
- pour  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} R_j(z, \varepsilon) = -\infty$  et  $\lim_{z \rightarrow z_k} R_j(z, \varepsilon) = +\infty$ .

FIG. 3.11: Représentation des lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$  ( $\gamma_j = \frac{2\pi}{17}$ )

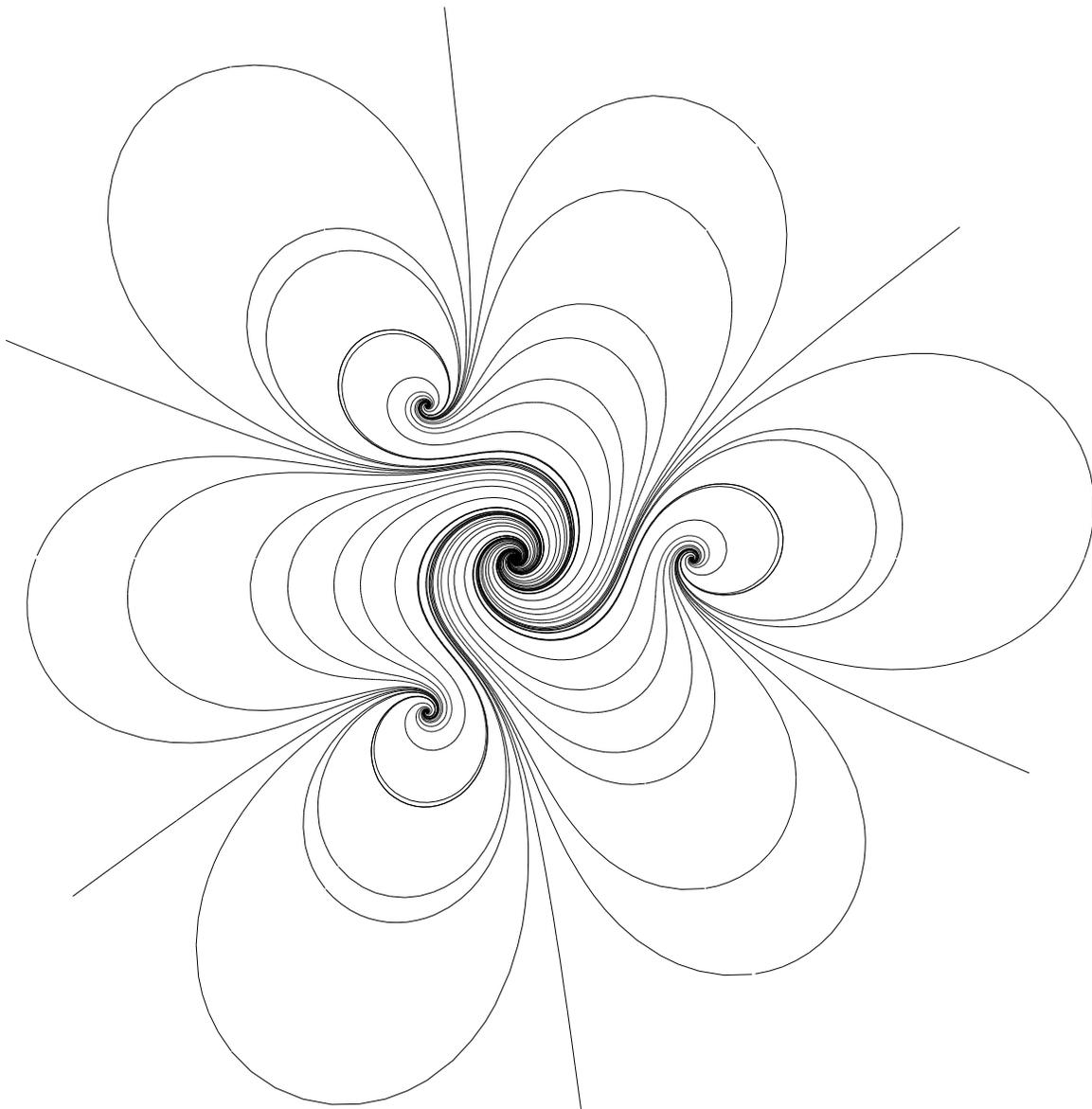


Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{2\pi}{17}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{2\pi}{17} > 0$

FIG. 3.12: Représentation des lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$  ( $\gamma_j = \frac{\pi}{7}$ )

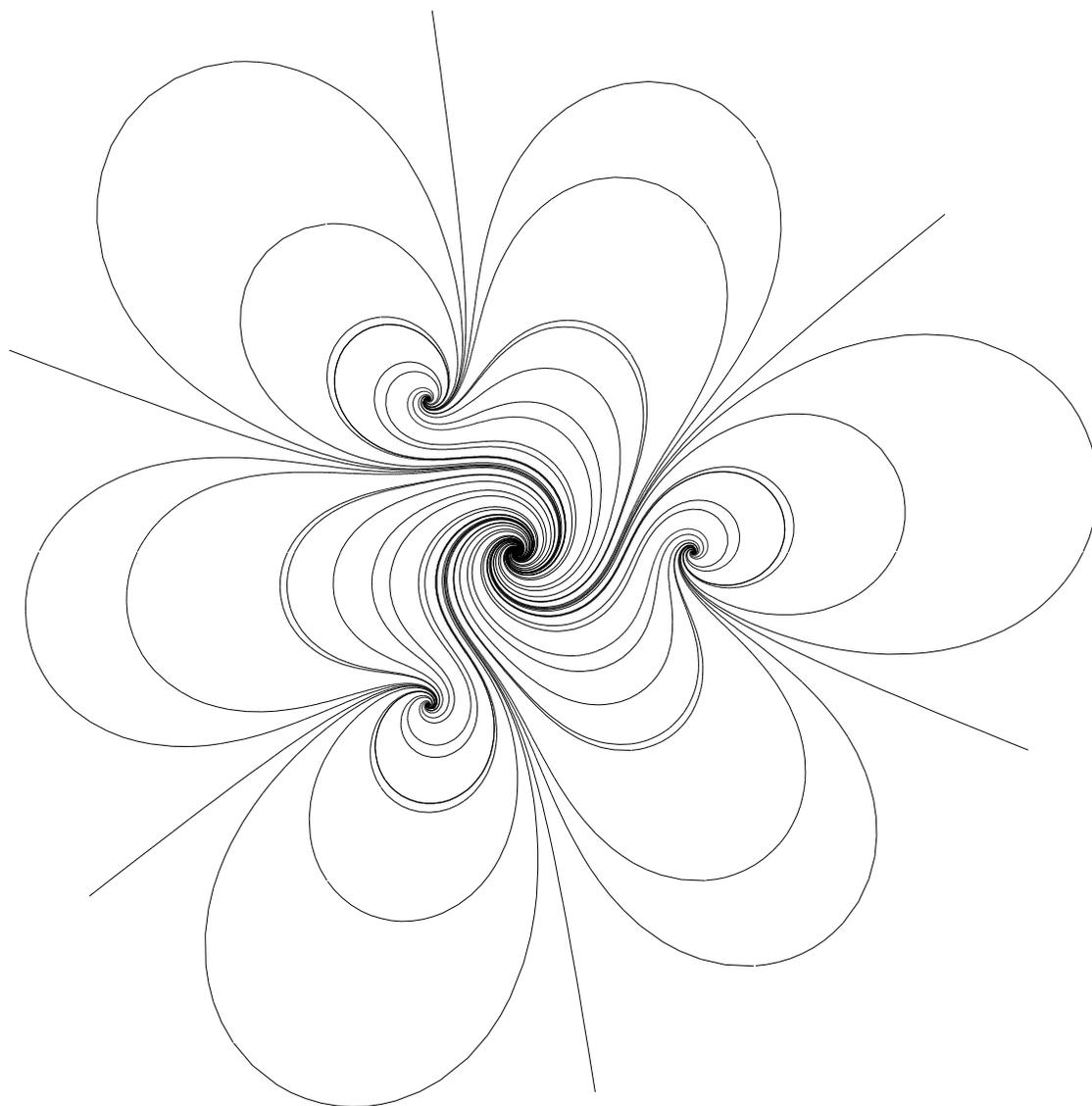


Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{7}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{7} > 0$

FIG. 3.13: Représentation des lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$  ( $\gamma_j = \frac{\pi}{4}$ )

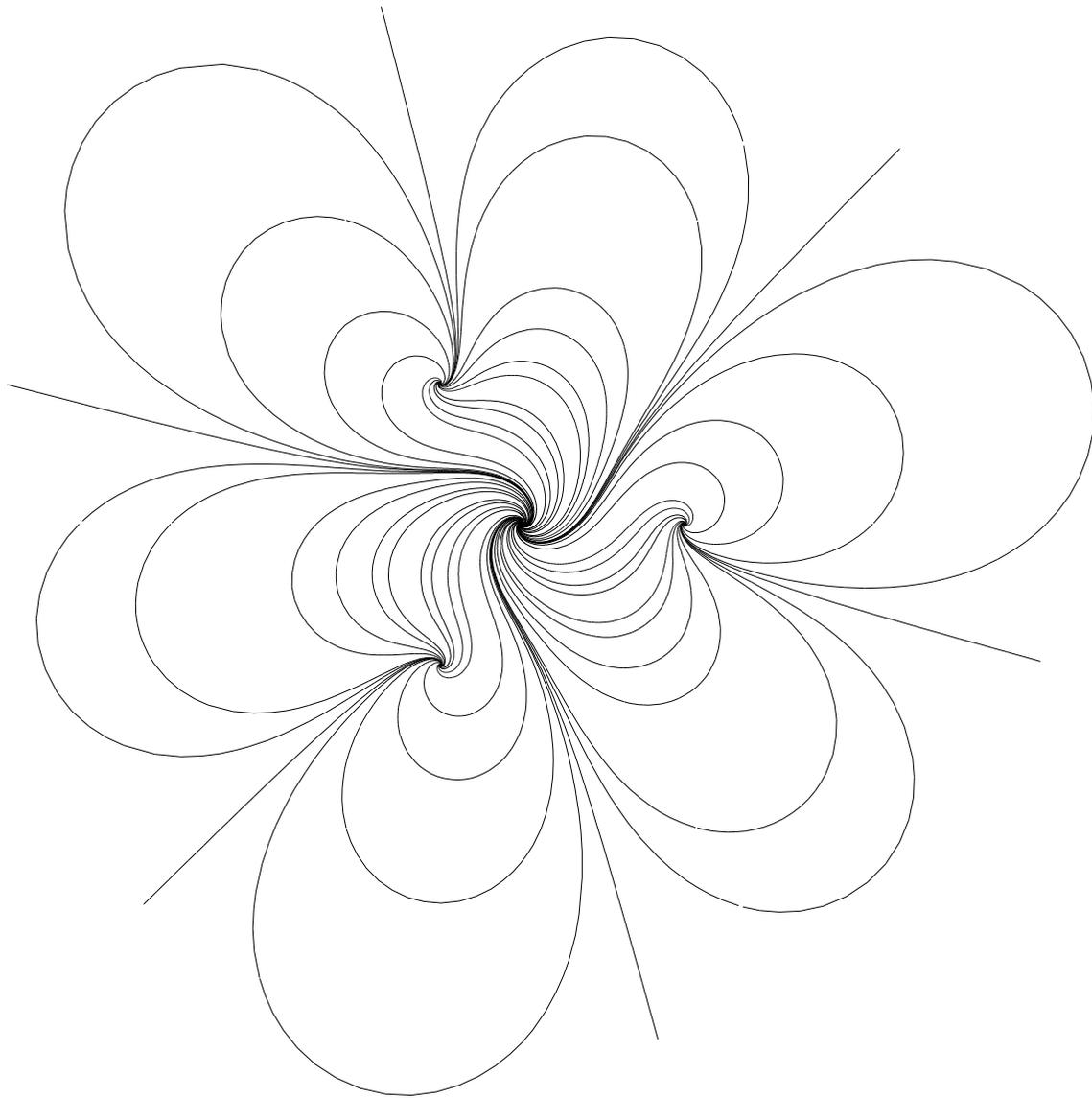


Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{4}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{4} > 0$

FIG. 3.14: Représentation des lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$  ( $\gamma_j = \frac{\pi}{3}$ )

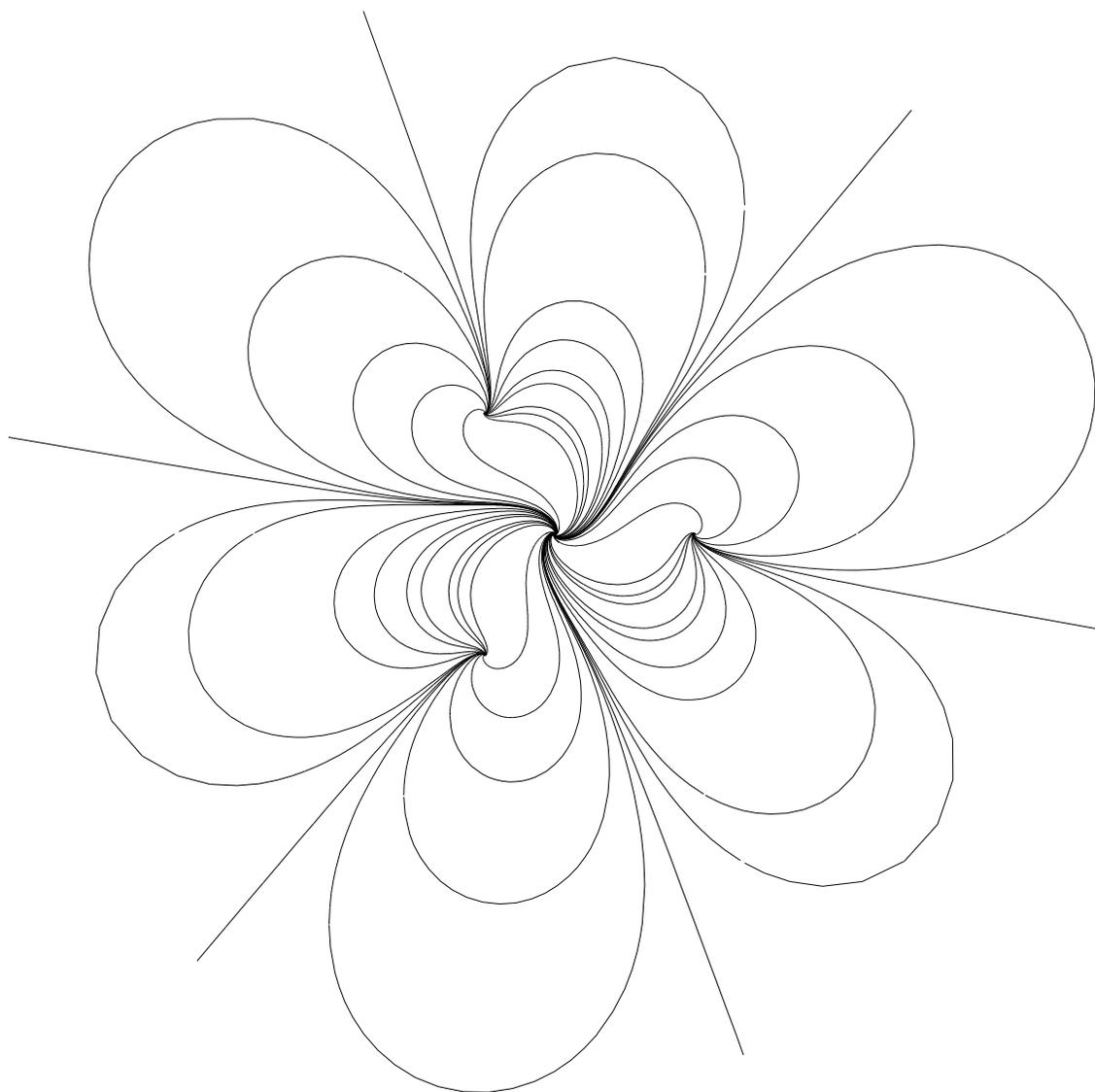


Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{\pi}{3}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{\pi}{3} > 0$

FIG. 3.15: Représentation des lignes de niveau  $R_j(z, \varepsilon) = C$  ( $\gamma_j = \frac{2\pi}{5}$ )

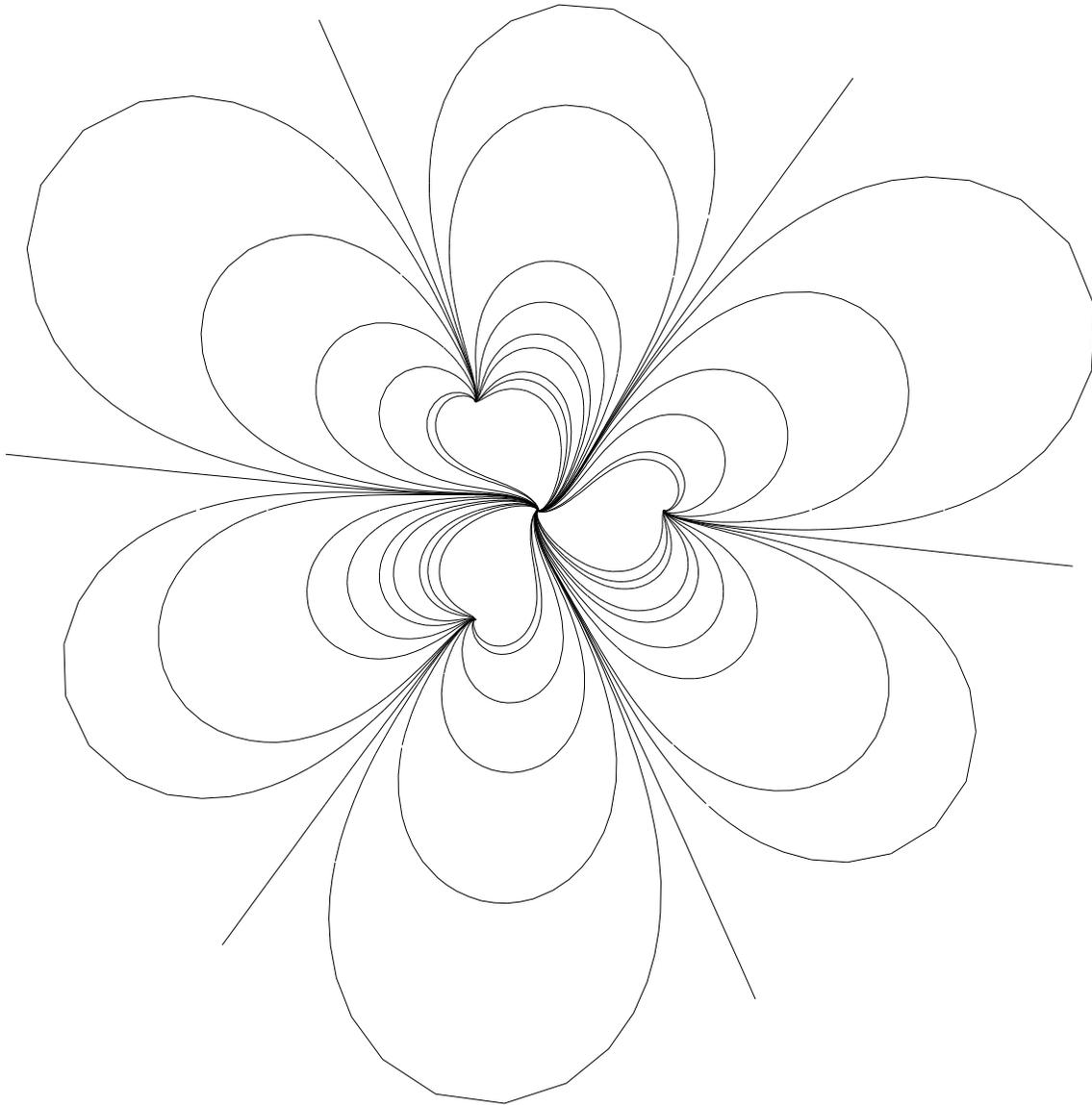


Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\gamma_j = \frac{2\pi}{5}$  soit  $\tan \theta_r(j, \varepsilon) = \tan \frac{2\pi}{5} > 0$

### 3.3 Détermination des secteurs $S_\varepsilon$ et des chemins d'intégration

Rappelons (voir p.47) que nous cherchons à décrire  $\Omega$  de la forme

$$\Omega = \{(z, \varepsilon), \varepsilon \in V, z \in S_\varepsilon\}$$

où  $V$  est un secteur de sommet 0 et les  $S_\varepsilon$  des domaines à déterminer, ainsi que les chemins  $\Gamma_z(s, \varepsilon)$  de sorte que le lemme (3.3) soit vérifié. Dans la suite, nous pourrions considérer  $\arg \varepsilon \simeq 0$  soit, par exemple,  $V$  centré sur  $\mathbb{R}_+$ . En effet, on rappelle l'équation de transformation (3.4)

$$z(z^r - \varepsilon^r)P' = A(z, \varepsilon)P - PB(z, \varepsilon)$$

où  $A$  est sous la forme préparée (2.4). Si  $\varepsilon$  appartient au secteur  $V$  centré sur  $e^{it}\mathbb{R}_+$ , on pose

$$\varepsilon' = e^{-it}\varepsilon, \quad z' = e^{-it}z \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(z', \varepsilon') = P(e^{it}z', e^{it}\varepsilon') \quad (3.34)$$

de sorte que  $\varepsilon'$  appartient au secteur  $e^{-it}V$  centré sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)P'(z, \varepsilon) &= e^{i(r+1)t}z'(z'^r - \varepsilon'^r)\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z'}(z', \varepsilon')e^{-it} \\ &= A(e^{it}z', e^{it}\varepsilon')\mathcal{P}(z', \varepsilon') - \mathcal{P}(z', \varepsilon')B(e^{it}z', e^{it}\varepsilon') \end{aligned}$$

car  $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z'}(z', \varepsilon') = e^{it}P'(e^{it}z', e^{it}\varepsilon')$ . On obtient alors une équation de transformation pour  $\mathcal{P}$  :

$$z'(z'^r - \varepsilon'^r)\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z'}(z', \varepsilon') = \mathcal{A}(z', \varepsilon')\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{B}(z', \varepsilon') \quad (3.35)$$

où  $\mathcal{A}(z', \varepsilon') = e^{-irt}A(e^{it}z', e^{it}\varepsilon')$  et  $\mathcal{B}(z', \varepsilon') = e^{-irt}B(e^{it}z', e^{it}\varepsilon')$  et  $\arg \varepsilon' = 0$ . On a donc

$$\mathcal{A}(z', \varepsilon') = e^{-irt}D(e^{it}z') + z'(z'^r - \varepsilon'^r)e^{it}C(e^{it}z', e^{it}\varepsilon'),$$

et  $\mathcal{A}$  est donc mise sous forme préparée, où

$$\mathcal{A}(0, \varepsilon') = e^{-irt}\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n).$$

$\mathcal{A}(0, \varepsilon')$  est diagonale constante et ses valeurs propres sont deux à deux distinctes.

De plus, les conditions (3.30) deviennent alors

$$\arg \varepsilon' + t \neq \frac{\arg(\tilde{\lambda}_u - \tilde{\lambda}_v) + rt}{r} + \frac{l\pi}{2r}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

soit

$$\arg \varepsilon' \neq \frac{\arg(\tilde{\lambda}_u - \tilde{\lambda}_v)}{r} + \frac{l\pi}{2r}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

et comme  $\varepsilon'$  appartient au secteur  $V' = e^{-it}V$  centré sur  $\mathbb{R}_+$ , si l'on suppose que  $\arg(\tilde{\lambda}_u - \tilde{\lambda}_v) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ , les conditions précédentes sont réalisées si l'on réduit éventuellement l'angle d'ouverture de  $V'$ , centré sur  $\mathbb{R}_+$ .

Finalement, quitte à supposer que l'on a

$$\forall (u, v) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad u \neq v \Rightarrow \arg(\lambda_u - \lambda_v) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \quad (3.36)$$

on peut toujours supposer que  $\varepsilon$  se trouve dans un secteur centré sur  $\mathbb{R}_+$ , d'angle d'ouverture assez petit pour que les conditions (3.30) soient vérifiées. Nous supposons être placé dans ces conditions dans la suite de ce travail, notamment pour les différents graphiques.

### 3.3.1 Détermination des secteurs $S_\varepsilon$

Nous avons déjà vu que les lignes de niveau comportent des branches infinies dans les directions asymptotiques

$$\frac{\theta_r(j, \varepsilon)}{r} + \frac{2p+1}{2r}\pi + \arg \varepsilon, \quad p = 0, 1, \dots, 2r-1$$

Nous allons à présent définir les ensembles  $S_\varepsilon$  et en décrire le contour. Nous avons vu que le rayon maximal  $R$  de ces ensembles est défini lors des *splittings* successifs: on choisit  $R$  assez petit pour avoir une contraction à chaque étape. Dans la pratique, on prendra le plus petit de ces rayons  $R > 0$  car il y a un nombre fini de *splittings*.

Supposons maintenant que l'on ait  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ . On a vu que  $\lim_{z \rightarrow 0} R_j(z, \varepsilon) = +\infty$ . Comme on doit choisir des chemins d'intégration le long desquels  $R_j$  décroît et un domaine contenant 0 dans son adhérence, nous allons choisir  $a_j(\varepsilon) = 0$ .

Imaginons maintenant un chemin partant de 0 et passant par une ligne de niveau 0 (celles qui ont des branches infinies). Ce chemin ne pourra pas recouper une ligne de niveau 0 puisqu'il doit «descendre» strictement le relief. Ainsi,  $S_\varepsilon$  pourra contenir au plus 2 lignes de niveau 0.

Enfin, nous nous sommes limité à des secteurs  $S_\varepsilon$  ne contenant pas les segments  $]0, z_k[$ ,  $k = 0, \dots, r-1$ . Construisons maintenant de manière explicite les  $S_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in V$ .

FIG. 3.16: Représentation de  $S_{\theta, \varepsilon}(k)$  pour  $\cos \theta > 0$

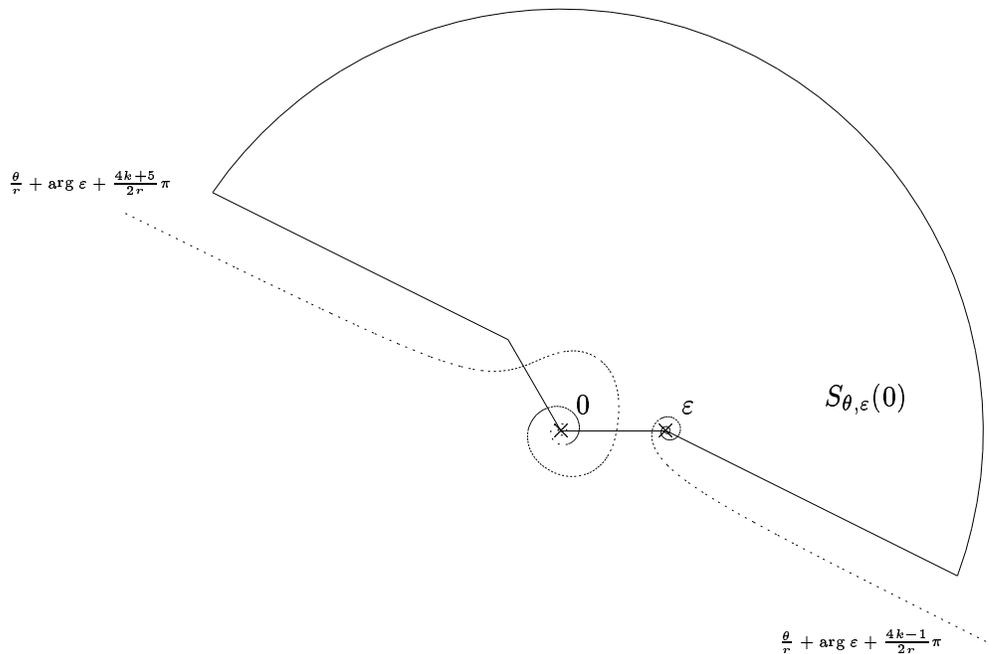
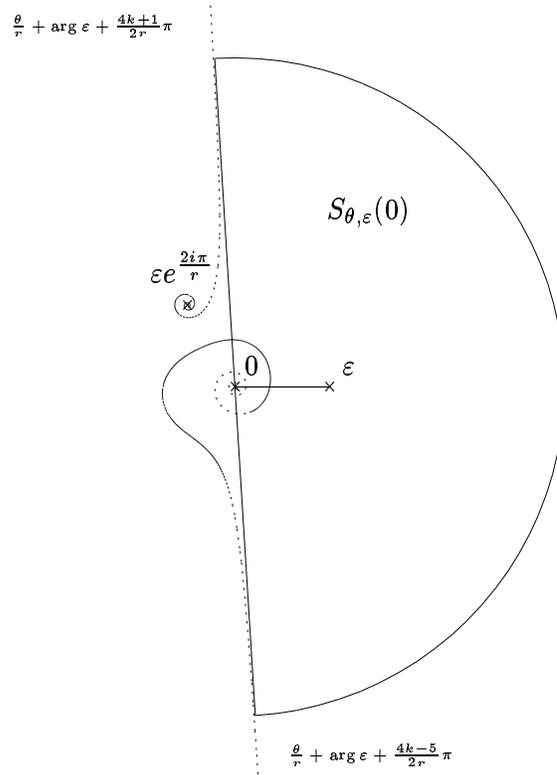


Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $k = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\theta = \frac{\pi}{17}$

Pour  $k = 0, \dots, r-1$ ,  $\varepsilon \in V$  et  $\theta \in \bigcup_{k=-1}^2 ]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$ , on définit  $S_{\theta, \varepsilon}(k)$  comme suit :

- si  $\cos \theta > 0$ , c'est-à-dire si  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[ \cup ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $S_{\theta, \varepsilon}(h)$  est l'ouvert connexe délimité par le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$ , les segments  $[0; z_k]$ ,  $[0; z_{k+1}]$  et les demi-droites  $[z_k; \infty e^{i(\frac{\theta}{r} + \arg \varepsilon + \frac{4k-1}{2r}\pi)}$  et  $[z_{k+1}; \infty e^{i(\frac{\theta}{r} + \arg \varepsilon + \frac{4k+5}{2r}\pi)}$  (voir figure (3.16)).
- si  $\cos \theta < 0$ , c'est-à-dire si  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[ \cup ]\pi; \frac{3\pi}{2}[$ ,  $S_{\theta, \varepsilon}(h)$  est l'ouvert connexe délimité par le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$ , les segments  $[0; z_{k-1}]$ ,  $[0; z_k]$  et  $[0; z_{k+1}]$  et les demi-droites  $[0; \infty e^{i(\frac{\theta}{r} + \arg \varepsilon + \frac{4k-5}{2r}\pi)}$  et  $[0; \infty e^{i(\frac{\theta}{r} + \arg \varepsilon + \frac{4k+1}{2r}\pi)}$  (voir figure (3.17)).

FIG. 3.17: Représentation de  $S_{\theta, \varepsilon}(k)$  pour  $\cos \theta < 0$ Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $k = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\theta = \frac{18\pi}{17}$ 

Ici,  $\theta$  sera de la forme  $\theta = \theta_r(j, \varepsilon) = \arg \gamma_j - r \arg \varepsilon = \arg(\lambda_u - \lambda_v) - r \arg \varepsilon$  et on veut construire, pour  $\varepsilon \in V$  fixé, un domaine  $S_\varepsilon$  contenu dans tous les  $S_{\theta, \varepsilon}(k)$  lorsque  $\lambda_u$  et  $\lambda_v$  parcourent l'ensemble des valeurs propres de  $D(0)$ .

Comme on a supposé  $\arg(\lambda_u - \lambda_v) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ , on a également  $\theta_r(j, \varepsilon) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$  pour  $\arg \varepsilon$  assez petit, c'est-à-dire pour  $\varepsilon \in V$  d'angle d'ouverture assez petit. De plus, les valeurs propres étant en nombre fini, il existe une constante  $\varrho$  strictement positive telle que

$$\begin{aligned} \text{pour tout } \theta_r(j, \varepsilon) \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[ \cup ]0; \frac{\pi}{2}[, \quad -\frac{\pi}{2r} < -\frac{\pi}{2r} + \varrho \leq \frac{\theta_r(j, \varepsilon)}{r} + \arg \varepsilon \leq \frac{\pi}{2r} - \varrho < \frac{\pi}{2r} \\ \text{pour tout } \theta_r(j, \varepsilon) \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[ \cup ]\pi; \frac{3\pi}{2}[, \quad \frac{\pi}{2r} < \frac{\pi}{2r} + \varrho \leq \frac{\theta_r(j, \varepsilon)}{r} + \arg \varepsilon \leq \frac{3\pi}{2r} - \varrho < \frac{3\pi}{2r}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\theta_r(j, \varepsilon) \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[ \cup ]0; \frac{\pi}{2}[$ , on a

$$\text{et } \frac{2k+2}{r}\pi < \frac{2k+2}{r}\pi + \varrho \leq \frac{\theta_r(j, \varepsilon)}{r} + \arg \varepsilon + \frac{4k-1}{2r}\pi \leq \frac{2k}{r}\pi - \varrho < \frac{2k}{r}\pi$$

et pour tout  $\theta_r(j, \varepsilon) \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[ \cup ]\pi; \frac{3\pi}{2}[$ , on a

$$\text{et } \frac{2k+1}{r}\pi < \frac{2k+1}{r}\pi + \varrho \leq \frac{\theta_r(j, \varepsilon)}{r} + \arg \varepsilon + \frac{4k-5}{2r}\pi \leq \frac{2k-1}{r}\pi - \varrho < \frac{2k-1}{r}\pi$$

Compte tenu de ces résultats, et comme on peut maintenant choisir  $S_\varepsilon$  parmi les  $2r$  domaines  $S_\varepsilon(k)$ ,  $k = 0, \dots, 2r - 1$ :

- si  $k \in \llbracket 0, 2r - 1 \rrbracket$  est pair:  $S_\varepsilon(k)$  est le domaine délimité par le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$ , le segment  $[0, z_{\frac{k}{2}}]$  et les demi-droites  $[z_{\frac{k}{2}}; \infty e^{i(\frac{k}{r}\pi - \varrho)}[$  et  $[0; \infty e^{i(\frac{k+1}{r}\pi + \varrho)}[$ .
- si  $k \in \llbracket 0, 2r - 1 \rrbracket$  est impair:  $S_\varepsilon(k)$  est le domaine délimité par le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$ , le segment  $[0, z_{\frac{k+1}{2}}]$  et les demi-droites  $[z_{\frac{k+1}{2}}; \infty e^{i(\frac{k+1}{r}\pi + \varrho)}[$  et  $[0; \infty e^{i(\frac{k}{r}\pi - \varrho)}[$ .

On se reportera à la figure (3.18) qui présente l'allure des secteurs  $S_\varepsilon$  pour  $r = 3$ . On pose également  $S_\varepsilon(2r) = S_\varepsilon(0)$  et on peut remarquer immédiatement que l'on a, lorsque  $V$  possède un angle d'ouverture assez petit :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2r - 1 \rrbracket, S_\varepsilon(k) \cap S_\varepsilon(k+1) \neq \emptyset.$$

### 3.3.2 Détermination des chemins d'intégration, preuve du lemme (3.3)

Il reste à décrire les chemins  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$ ,  $(z, \varepsilon) \in \Omega$  vérifiant l'inégalité du lemme (3.3). Faisons une remarque préliminaire: soit  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $\gamma \in \mathbb{C}$ , on pose  $R(z, \varepsilon) = \Re(\gamma m(z, \varepsilon)) = \Re\left(\frac{\gamma}{r\varepsilon^r} \ln(1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r})\right)$  et on considère les lignes de niveau

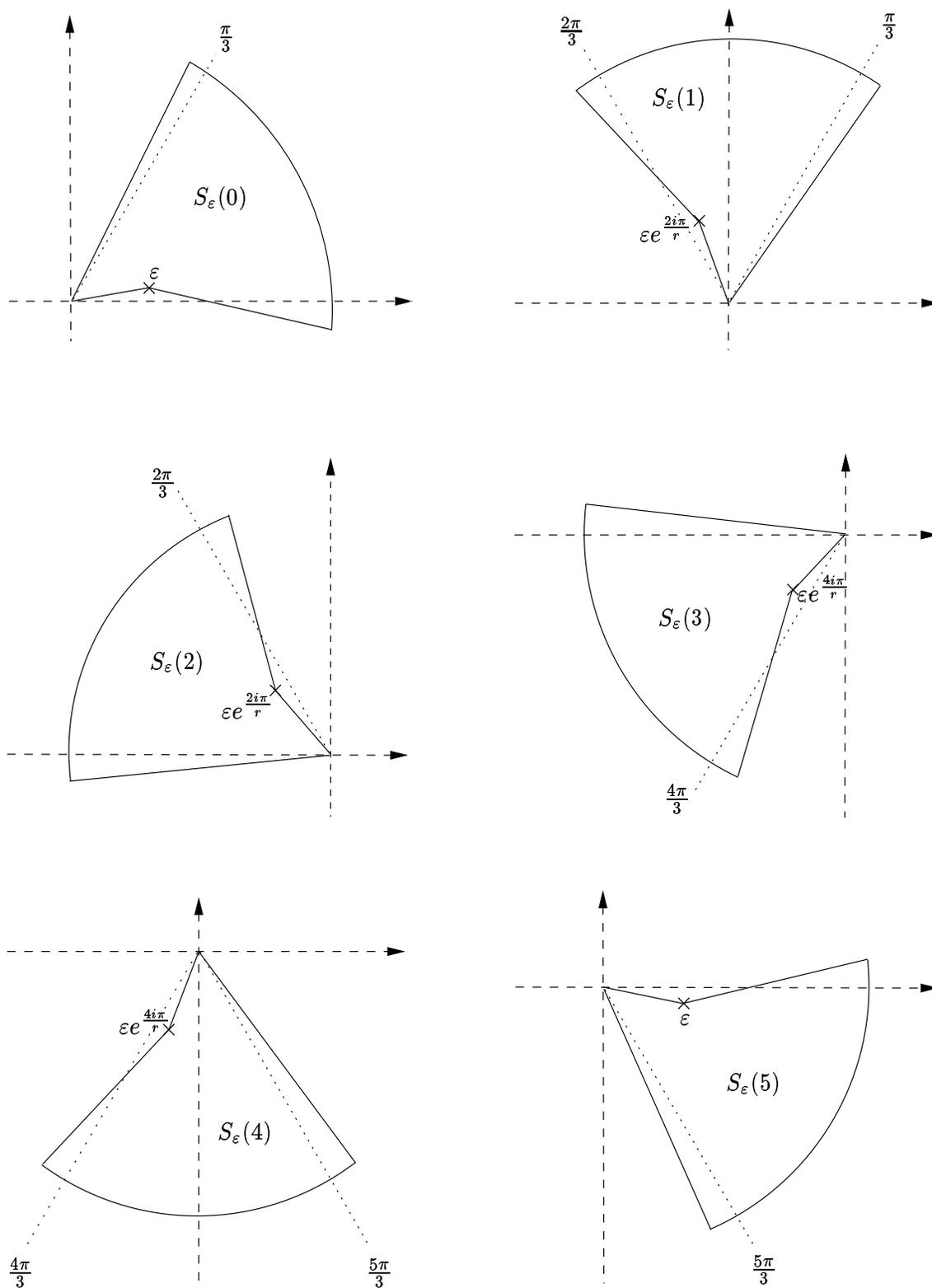
$$\begin{aligned} R_j(z, \varepsilon) &= C_1 \text{ paramétrée par } \Gamma^1(s, \varepsilon), \quad s \in I_1 \\ R(z, \varepsilon) &= C_2 \text{ paramétrée par } \Gamma^2(s, \varepsilon), \quad s \in I_2. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \Re(\gamma_j(\Gamma^1)'(s, \varepsilon)m'(\Gamma^1(s, \varepsilon), \varepsilon)) &= 0 \text{ pour tout } s \in I_1 \\ \text{et } \Re(\gamma(\Gamma^2)'(s, \varepsilon)m'(\Gamma^2(s, \varepsilon), \varepsilon)) &= 0 \text{ pour tout } s \in I_2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $z = \Gamma^1(s_1, \varepsilon) = \Gamma^2(s_2, \varepsilon)$ , on a

$$\begin{aligned} \arg(\gamma_j(\Gamma^1)'(s, \varepsilon)m'(z, \varepsilon)) &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \text{et } \arg(\gamma(\Gamma^2)'(s, \varepsilon)m'(z, \varepsilon)) &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]. \end{aligned}$$

FIG. 3.18: Allure des secteurs  $S_\varepsilon(k)$ ,  $k = 0, \dots, 2r - 1$ Figure réalisée pour  $r = 3$

D'où, par soustraction des égalités ci-dessus :

$$\arg \gamma - \arg \gamma_j \equiv \arg(\Gamma^1)'(s, \varepsilon) - \arg(\Gamma^1)'(s, \varepsilon) \quad [\pi]$$

Autrement dit, l'angle que font  $\gamma$  et  $\gamma_j$  est l'angle que font en leur intersection deux lignes de niveau associées à ces nombres. Comme nous voulons trouver des chemins décroissants sur le relief  $R_j$ , il est alors naturel d'utiliser d'autres lignes de niveau, ce que nous allons faire dans la suite.

Plus précisément, nous allons montrer que l'on peut construire les chemins  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$  à partir d'un nombre fini de chemins élémentaires vérifiant chacun l'inégalité du lemme (3.3) :

1. des chemins sur les segments  $]0; z_k[$ ,  $k = 0, \dots, r - 1$
2. des lignes de niveau orthogonales à celles de  $R_j$  de la forme  $\Re e(\gamma_j e^{\pm i \frac{\pi}{2}} m(z, \varepsilon))$
3. des lignes de niveau de la forme  $\Re e(\gamma m(z, \varepsilon))$  où  $\arg \gamma$  est très proche de  $\arg \gamma_j$
4. des lignes de niveau de la forme  $\Re e(\gamma m(z, \varepsilon))$  où  $\arg \gamma$  est très proche de  $\arg \gamma_j + \frac{\pi}{2}$
5. des chemins sur  $\mathcal{C}(0, R)$  évitant les points  $Re^{i(\frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{l\pi}{r})}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$
6. des chemins sur les segments  $]0; Re^{i(\frac{k\pi}{r} - \frac{\delta}{r})}[$  avec  $|\delta|$  petit et  $k$  impair .

Avant de décrire les chemins  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$  à partir des chemins précédents, nous allons montrer que chacun d'eux vérifie l'inégalité du lemme (3.3) :

**1. Chemins sur les segments  $]0; z_k[$ ,  $k = 0, \dots, r - 1$ .** Dans toute la suite, nous noterons  $J$  l'ensemble des entiers naturels de 1 à  $q = p(n - p)$ ,  $J_1$  l'ensemble des éléments  $j$  de  $J$  tels que  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$  et  $J_2$  le complémentaire de  $J_1$  dans  $J$ .

On étudie ici le cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$  (le cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$  s'en déduit facilement). On paramètre le chemin considéré par

$$\Gamma(s, \varepsilon) = s^{\frac{1}{r}} z_k, \quad s \in ]0; 1[ .$$

On a alors  $\Gamma^r(s, \varepsilon) = s\varepsilon^r$  et

$$\begin{aligned} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \Re e \left( \frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{s\varepsilon^r} \right) \right) = \Re e \left( \frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{1}{s} \right) \right) \\ &= \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \Re e \left( e^{i\theta_r(j, \varepsilon)} \ln \left( \frac{s-1}{s} \right) \right) \\ &= \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \left( \cos \theta_r(j, \varepsilon) \ln \left( \frac{1-s}{s} \right) - (\sin \theta_r(j, \varepsilon)) \pi \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) &= \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \cos \theta_r(j, \varepsilon) \left( -\frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} \right) \\ &= -\frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \cos \theta_r(j, \varepsilon) \frac{1}{s(1-s)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a  $m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln(1 - \frac{1}{s}) = \frac{1}{r\varepsilon^r} (\ln(\frac{1-s}{s}) + i\pi)$  d'où

$$\frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) = -\frac{1}{r\varepsilon^r} \frac{1}{s(1-s)}$$

et

$$\left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| = \frac{1}{r|\varepsilon|^r} \frac{1}{s(1-s)} .$$

On en déduit alors immédiatement

$$\forall j \in J_1, \forall s \in ]0; 1[, \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| = -\frac{1}{|\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon)} \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) .$$

**Remarque 3.6** si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ , le signe - est changé en + dans l'égalité précédente.  $\triangle$

Quitte à diminuer l'angle d'ouverture de  $V$ , il existe  $\varsigma > 0$  tel que pour tout  $j \in J_1$ ,  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) \geq \varsigma > 0$ . De plus,  $|\gamma_j| > 0$  pour tout  $j$  appartenant à l'ensemble fini  $J$ . Il existe donc  $C > 0$  tel que

$$\forall j \in J_1, \forall \varepsilon \in V, |\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon) > \frac{1}{C}$$

et on a démontré l'assertion suivante :

$$\exists C > 0, \forall j \in J_1, \forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -C \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) .$$

Il en est de même dans le cas où  $j \in J_2$ , ce qui montre que de tels chemins vérifient bien l'inégalité du lemme (3.3).

**2. Chemins sur des lignes de niveau de  $\Re e(\gamma m(z, \varepsilon))$  avec  $\arg \gamma - \arg \gamma_j \approx 0$ .** On note dans la suite  $\theta_r(\varepsilon) = \arg \gamma - r \arg \varepsilon$ . On suppose pour la suite des calculs que  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma \neq 0$  et  $\arg \gamma \neq \arg \gamma_j$ . Enfin, on choisit la paramétrisation (3.32) de la ligne de niveau associée à  $\gamma$ . On a alors

$$1 - \frac{\varepsilon^r}{(\Gamma(s, \varepsilon))^r} = e^{\frac{rC|\varepsilon|^r}{|\gamma_j| \cos \theta_r(\varepsilon)}} e^{(\tan \theta_r(\varepsilon) + i)s}, \quad s \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{(\Gamma(s, \varepsilon))^r} \right) = \frac{rC|\varepsilon|^r}{|\gamma_j| \cos \theta_r(\varepsilon)} + (\tan \theta_r(\varepsilon) + i)s, \quad s \in \mathbb{R} .$$

Il vient alors

$$\frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) = \frac{1}{r\varepsilon^r} (\tan \theta_r(\varepsilon) + i)$$

d'où

$$\left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| = \frac{1}{r|\varepsilon|^r} \sqrt{\tan^2 \theta_r(\varepsilon) + 1} = \frac{1}{r|\varepsilon|^r |\cos \theta_r(\varepsilon)|} .$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \Re e \left( \frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{(\Gamma(s, \varepsilon))^r} \right) \right) = \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \Re e \left( e^{i\theta_r(j, \varepsilon)} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{(\Gamma(s, \varepsilon))^r} \right) \right) \\ &= \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \left( \cos \theta_r(j, \varepsilon) \left( \frac{rC|\varepsilon|^r}{|\gamma_j| \cos \theta_r(\varepsilon)} + s \tan \theta_r(\varepsilon) \right) - s \sin \theta_r(j, \varepsilon) \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) &= \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} (\cos \theta_r(j, \varepsilon) \tan \theta_r(\varepsilon) - \sin \theta_r(j, \varepsilon)) \\ &= \frac{|\gamma_j|}{r|\varepsilon|^r} \cos \theta_r(j, \varepsilon) (\tan \theta_r(\varepsilon) - \tan \theta_r(j, \varepsilon)) . \end{aligned}$$

**Remarque 3.7** Si on avait  $\gamma = \gamma_j$  on retrouve bien  $\frac{d}{ds} (R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) = 0$  puisque  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  est une ligne de niveau de  $R_j$ .  $\triangle$

On raisonne maintenant dans le cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$  (le cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$  est tout à fait semblable). On a alors :

$$\left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| = \frac{1}{|\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon) |\cos \theta_r(\varepsilon)| (\tan \theta_r(\varepsilon) - \tan \theta_r(j, \varepsilon))} \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) . \quad (3.37)$$

On choisit  $\gamma$  tel que  $\arg \gamma < \arg \gamma_j$  et  $\arg \gamma$  assez proche de  $\arg \gamma_j$  pour que l'on ait

$$\forall \varepsilon \in V, \cos \theta_r(\varepsilon) > 0 \quad \text{et} \quad \tan \theta_r(\varepsilon) - \tan \theta_r(j, \varepsilon) < 0 .$$

Quitte à diminuer l'angle d'ouverture de  $V$ , il existe donc  $C > 0$  tel que

$$\forall \varepsilon \in V, |\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon) |\cos \theta_r(\varepsilon)| (\tan \theta_r(j, \varepsilon) - \tan \theta_r(\varepsilon)) \geq \frac{1}{C}$$

de sorte que pour tout  $j \in J_1$ , il existe un chemin  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  choisi comme précédemment et  $C > 0$  tel que

$$\forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -C \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) . \quad (3.38)$$

Ces chemins vérifient donc l'inégalité du lemme (3.3).

**3. Chemins sur des lignes de niveau de  $\Re e(\gamma m(z, \varepsilon))$  avec  $\arg \gamma - \arg \gamma_j = \frac{\pi}{2}$ .** On suppose toujours que  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ , de sorte que l'on a encore l'égalité (3.37). De plus,

$$\tan \theta_r(\varepsilon) = \frac{\sin(\theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2})} = -\frac{\cos \theta_r(j, \varepsilon)}{\sin \theta_r(j, \varepsilon)}$$

et, si on suppose de plus  $\sin \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ , on a

$$\begin{aligned} A &= |\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon) |\cos \theta_r(\varepsilon)| (\tan \theta_r(\varepsilon) - \tan \theta_r(j, \varepsilon)) \\ &= |\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon) \sin \theta_r(j, \varepsilon) \left( -\frac{\cos \theta_r(j, \varepsilon)}{\sin \theta_r(j, \varepsilon)} - \frac{\sin \theta_r(j, \varepsilon)}{\cos \theta_r(j, \varepsilon)} \right) \\ &= -|\gamma_j| (\cos^2 \theta_r(j, \varepsilon) + \sin^2 \theta_r(j, \varepsilon)) \\ &= -|\gamma_j| < 0 . \end{aligned}$$

Dans tous les cas, il existe donc  $C > 0$  vérifiant (3.38) et donc un chemin  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  vérifiant l'inégalité du lemme (3.3).

Remarquons pour finir que si  $\sin \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ , il suffit de remplacer  $s$  par  $-s$  dans la paramétrisation utilisée pour changer le sens de parcours sur la ligne de niveau considérée et montrer la même inégalité. On procède de façon similaire lorsque  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ .

**4. Chemins sur des lignes de niveau de  $\Re e(\gamma m(z, \varepsilon))$  avec  $\arg \gamma - \arg \gamma_j \approx \frac{\pi}{2}$ .** On suppose avoir  $\arg \gamma = \arg \gamma_j + \frac{\pi}{2} \delta$  avec  $\delta > 0$ .

On suppose toujours que  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ , de sorte que l'on a encore l'égalité (3.37). De plus, si  $\sin \theta_r(j, \varepsilon) > 0$  et  $\delta$  suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} \sin \theta_r(\varepsilon) &= \sin(\theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2} + \delta) = \cos(\theta_r(j, \varepsilon) + \delta) > 0 \\ \cos \theta_r(\varepsilon) &= \cos(\theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2} + \delta) = -\sin(\theta_r(j, \varepsilon) + \delta) < 0 . \end{aligned}$$

De façon analogue à ce qui a été fait dans le paragraphe précédent, on a alors :

$$\begin{aligned}
A &= |\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon) |\cos \theta_r(\varepsilon)| (\tan \theta_r(\varepsilon) - \tan \theta_r(j, \varepsilon)) \\
&= |\gamma_j| \cos \theta_r(j, \varepsilon) \sin(\theta_r(j, \varepsilon) + \delta) \left( -\frac{\cos(\theta_r(j, \varepsilon) + \delta)}{\sin(\theta_r(j, \varepsilon) + \delta)} - \frac{\sin \theta_r(j, \varepsilon)}{\cos \theta_r(j, \varepsilon)} \right) \\
&= -|\gamma_j| (\cos(\theta_r(j, \varepsilon) + \delta) \cos \theta_r(j, \varepsilon) + \sin(\theta_r(j, \varepsilon) + \delta) \sin \theta_r(j, \varepsilon)) \\
&= -|\gamma_j| \cos \delta .
\end{aligned}$$

Ainsi, pour  $\delta$  assez petit, on a pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $A \leq -\frac{1}{2}|\gamma_j| < 0$ , ce qui permet de conclure comme précédemment (les cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$  ou  $\sin \theta_r(j, \varepsilon) < 0$  se traitant de la même manière) : les chemins considérés vérifient l'inégalité du lemme (3.3).

**5. Chemins sur  $\mathcal{C}(0, R)$  évitant les points  $Re^{i(\frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{l\pi}{r})}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .** On choisit le paramétrage

$$\Gamma(s, \varepsilon) = Re^{is}, \quad s \in \mathbb{R}$$

et on a  $m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln(1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs})$  d'où  $\frac{d}{ds}(m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) = \frac{i}{R^r} \frac{e^{-irs}}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}}$  et

$$\left| \frac{d}{ds}(m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| = \frac{1}{R^r} \frac{1}{|1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}|} .$$

De même, en posant  $v_j(s) = \arg \gamma_j + \frac{\pi}{2} - sr$ , on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{|\gamma_j|}{R^r} \Re \left( e^{iv_j(s)} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) \\
&= \frac{|\gamma_j|}{R^r} \left( \cos v_j(s) \Re \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) - \sin v_j(s) \Im \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) \right) .
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \quad \text{uniformément par rapport à } s \in \mathbb{R} \\
\text{donc } \Re \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \quad \text{uniformément par rapport à } s \in \mathbb{R} \\
\text{et } \Im \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{uniformément par rapport à } s \in \mathbb{R} .
\end{aligned}$$

Si  $s$  se trouve dans un intervalle compact  $K$  contenu dans  $]\frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{k}{r}\pi; \frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{k+1}{r}\pi[$ ,  $|\cos v_j(s)|$  est minoré par une borne strictement positive et on peut alors prouver que  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  vérifie la condition du lemme (3.3). Il faut donc emprunter des chemins  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  sur  $\mathcal{C}(0, R)$  tels que  $s$  reste à une distance finie de

$$s_j = \frac{\arg \gamma_j}{r} + l \frac{\pi}{r}, \quad l \in \mathbb{Z} .$$

Supposons par exemple que  $K \subset ]\frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{2l-1}{r}\pi; \frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{2l}{r}\pi[$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que  $\cos v_j(s) \leq -\delta$  et on a

$$\left| \frac{d}{ds}(m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| = \frac{1}{|\gamma_j| |1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}|} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)$$

où

$$\mathcal{A}_{j,\varepsilon}(s) = \left( \cos v_j(s) \Re e \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) - \sin v_j(s) \Im m \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) \right).$$

Or il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|\varepsilon| \leq \eta$  et tout  $s$  dans  $]0; 2\pi[$ , on a

$$\Re e \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) \geq \frac{5}{6}, \quad \left| \Im m \left( \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs}} \right) \right| \leq \frac{\delta}{6}, \quad \text{et} \quad \left| 1 - \frac{\varepsilon^r}{R^r} e^{-irs} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Finalement, il vient

$$\forall s \in K, \forall \varepsilon \in V, |\varepsilon| \leq \eta, \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -\frac{3}{|\gamma_j| \delta} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon).$$

Ainsi, quitte à diminuer le rayon de  $V$ , on a démontré que les chemins considérés vérifient l'inégalité du lemme (3.3). Lorsque  $K \subset ]\frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{2l}{r}\pi; \frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{2l+1}{r}\pi[$ , il suffit de changer  $s$  en  $-s$  pour obtenir la même relation (le cercle est parcouru dans l'autre sens).

**6. chemins sur les segments  $]0; Re^{i(\frac{k\pi}{r} - \frac{\delta}{r})[$  avec  $|\delta|$  petit et  $k$  impair.** On choisit le paramétrage

$$\Gamma(s, \varepsilon) = s^{\frac{1}{r}} R e^{i\frac{k\pi}{r}} e^{-i\frac{\delta}{r}}, \quad s \in ]0; 1[$$

On s'intéresse toujours au cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$  (le cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$  s'en déduit en changeant le sens de parcours du chemin). On a alors

$$\Gamma^r(s, \varepsilon) = s R^r e^{ik\pi} e^{-i\delta} = -s R^r e^{-i\delta}$$

car  $k$  est impair et

$$m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{\Gamma^r(s, \varepsilon)} \right) = \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon^r e^{i\delta}}{s R^r} \right)$$

d'où

$$\frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) = -\frac{1}{r\varepsilon^r} \frac{\varepsilon^r e^{i\delta}}{s(s R^r + \varepsilon^r e^{i\delta})} = -\frac{e^{i\delta}}{sr(s R^r + \varepsilon^r e^{i\delta})}.$$

Finalement, on en déduit l'égalité

$$\left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| = \frac{1}{sr |s R^r + \varepsilon^r e^{i\delta}|}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{d}{ds} \Re e \left( \frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon^r e^{i\delta}}{s R^r} \right) \right) = -\Re e \left( \frac{\gamma_j e^{i\delta}}{sr(s R^r + \varepsilon^r e^{i\delta})} \right) \\ &= -\frac{|\gamma_j|}{rs} \Re e \left( \frac{e^{i\delta + \arg \gamma_j}}{s R^r + \varepsilon^r e^{i\delta}} \right) \\ &= -\frac{|\gamma_j|}{rs |s R^r + \varepsilon^r e^{i\delta}|^2} \Re e \left( e^{i\delta + \arg \gamma_j} (s R^r + \bar{\varepsilon}^r e^{-i\delta}) \right) \\ &= -\frac{|\gamma_j|}{rs |s R^r + \varepsilon^r e^{i\delta}|^2} \Re e \left( e^{i\theta_r(j, \varepsilon)} (|\varepsilon|^r + s R^r e^{i(\delta + r \arg \varepsilon)}) \right). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement l'égalité suivante pour tout  $s \in ]0; 1[$  et tout  $\varepsilon \in V$ :

$$\left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| = - \frac{|sR^r + \varepsilon^r e^{i\delta}|}{|\gamma_j|} \frac{1}{\Re(e^{i\theta_r(j, \varepsilon)}(|\varepsilon|^r + sR^r e^{i(\delta+r \arg \varepsilon)}))} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)$$

De plus, remarquons que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} A &= \Re \left( e^{i\theta_r(j, \varepsilon)} (|\varepsilon|^r + sR^r e^{i(\delta+r \arg \varepsilon)}) \right) \\ &= \cos \theta_r(j, \varepsilon) \Re(|\varepsilon|^r + sR^r e^{i(\delta+r \arg \varepsilon)}) - \sin \theta_r(j, \varepsilon) \Im(|\varepsilon|^r + sR^r e^{i(\delta+r \arg \varepsilon)}) \\ &= \cos \theta_r(j, \varepsilon) (|\varepsilon|^r + sR^r \cos(\delta + r \arg \varepsilon)) - \sin \theta_r(j, \varepsilon) sR^r \sin(\delta + r \arg \varepsilon) . \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $j \in J_1$  et tout  $\varepsilon \in V$  on ait  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) \geq K$ . Alors, pour  $\delta$  assez petit et quitte à réduire l'angle d'ouverture de  $V$ , on a

$$\cos(\delta + r \arg \varepsilon) \geq \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\delta + r \arg \varepsilon) \geq \frac{1}{4} K .$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $s \in ]0; 1[$ , il vient

$$\begin{aligned} \cos \theta_r(j, \varepsilon) (|\varepsilon|^r + sR^r \cos(\delta + r \arg \varepsilon)) &\geq \frac{3}{4} \cos \theta_r(j, \varepsilon) (|\varepsilon|^r + sR^r) \geq \frac{3}{4} K |sR^r + \varepsilon^r e^{i\delta}| \\ \text{et} \quad \sin \theta_r(j, \varepsilon) sR^r \sin(\delta + r \arg \varepsilon) &\leq \frac{1}{4} K sR^r \leq \frac{1}{4} K |sR^r + \varepsilon^r e^{i\delta}| \end{aligned}$$

si l'angle d'ouverture de  $V$  et  $\delta$  sont assez petits. On en déduit immédiatement la relation :

$$\forall j \in J_1, \forall \varepsilon \in V, \forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, |\varepsilon| \leq \eta, \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq - \frac{2}{K|\gamma_j|} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) .$$

On a donc démontré que tous les chemins considérés vérifient bien l'inégalité du lemme (3.3).

Nous allons maintenant décrire entièrement des chemins  $\mathcal{L}_j(\cdot, \varepsilon)$ ,  $j \in J$  qui soient constitués d'un nombre fini de chemins étudiés ci-dessus. On aura alors démontré le lemme (3.3) puisqu'il suffira, pour obtenir un bon paramétrage, d'effectuer des transformations affines du paramètre  $s$  dans chacun des cas étudiés, ce qui ne modifie pas les constantes intervenant dans chacune des inégalités.

On choisira ensuite la constante  $C$  du lemme (3.3) comme le minimum d'un nombre fini de constantes strictement positives, de sorte que  $C > 0$ .

Pour tout  $k \in \{0, \dots, 2r-1\}$ , on a vu dans la partie (3.3.1) qu'il existe un unique  $l \in \{0, \dots, r-1\}$  tel que  $z_l \in \overline{S_\varepsilon(k)}$ . Il faut alors distinguer deux cas :

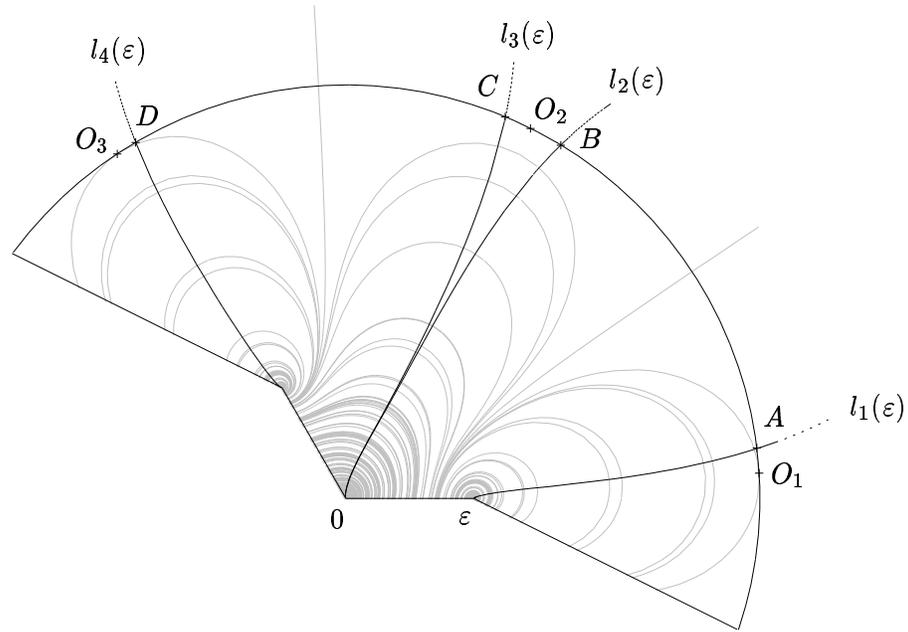
- si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ , on a vu que  $\lim_{z \rightarrow 0} R_j(z, \varepsilon) = +\infty$  et on choisit  $a_j(\varepsilon) = 0 \in \overline{S_\varepsilon(k)}$ ,
- si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ , on a vu que  $\lim_{z \rightarrow z_l} R_j(z, \varepsilon) = +\infty$  et on choisit  $a_j(\varepsilon) = z_l \in \overline{S_\varepsilon(k)}$ .

**1. Si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$  :** nous considérons les figures (3.19)-(3.21) pour illustrer le propos à suivre. Sur ces figures, on a fixé  $r = 3$ ,  $k$  pair et on a représenté respectivement  $S = S_{\theta_r(j, \varepsilon), \varepsilon}(k/2)$ ,  $S_\varepsilon(k)$  et  $S_\varepsilon(k+1)$ , le cas où  $r$  est quelconque étant absolument identique. Remarquons que l'on a :

$$S_\varepsilon(k) \cup S_\varepsilon(k+1) \subset S_{\theta_r(j, \varepsilon), \varepsilon}(k/2) .$$

Avant de décrire les chemins dans  $S_\varepsilon(k)$  et  $S_\varepsilon(k+1)$ , nous allons définir un certain nombre de points à partir de la figure (3.19).

Il existe sur  $\mathcal{C}(0, R) \cap \overline{S}$  trois points ayant un argument congru à  $\frac{\arg \gamma_j}{r}$  modulo  $\frac{\pi}{r}$ . On note  $O_1, O_2, O_3$  ces trois points donnés dans le sens trigonométrique sur  $\mathcal{C}(0, R)$ .

FIG. 3.19: *Préliminaires au tracé des chemins d'intégration*Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $k = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\theta = \frac{\pi}{17}$ 

Considérons les lignes de niveau 0 associées à  $\arg \gamma_j + \frac{\pi}{2}$  et leur paramétrage étudié dans la partie (3.2) :

$$z = |\varepsilon| e^{i(\arg \varepsilon + \frac{2l\pi}{r})} \left| 1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2} + i)t} \right|^{-\frac{1}{r}} e^{-i \frac{\arg \left( 1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2} + i)t} \right)}{r}}$$

Si on note  $t_R(\varepsilon)$  le paramètre pour lequel  $|z| = R$ , on a  $R = |\varepsilon| \left| 1 - e^{(\tan \theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2} + i)t_R(\varepsilon)} \right|^{-\frac{1}{r}}$  donc, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $t_R(\varepsilon)$  tend vers 0. De plus, l'argument de  $z$  lorsque  $t$  tend vers 0 est de la forme

$$\frac{\theta_r(j, \varepsilon) + \frac{\pi}{2}}{r} + \frac{2p-1}{2r} \pi + \arg \varepsilon = \frac{\arg \gamma_j - r \arg \varepsilon}{r} + \frac{p\pi}{r} + \arg \varepsilon = \frac{\arg \gamma_j}{r} + \frac{p\pi}{r}$$

avec  $p \in \llbracket 0; 2r-1 \rrbracket$ . Autrement dit, les points d'intersection de  $\mathcal{C}(0, R) \cap S$  avec les lignes de niveau 0 orthogonales tendent respectivement vers les points  $O_1, O_2$  et  $O_3$ .

On considère également  $B$  et  $C$ , deux points de  $\mathcal{C}(0, R)$  suffisamment proches mais distincts de  $O_2$  et on note respectivement  $l_2 = l_2(\varepsilon)$  et  $l_3 = l_3(\varepsilon)$  les lignes de niveau orthogonales passant par  $B$  et  $C$ .

De même, on considère les points  $A$  et  $D$  de  $\mathcal{C}(0, R)$  respectivement proches de  $O_1$  et  $O_2$  et tels que les points précédents soient ainsi disposés sur  $\mathcal{C}(0, R)$  dans le sens trigonométrique :

$$O_1, A, B, O_2, C, D, O_3 .$$

On note respectivement  $l_1 = l_1(\varepsilon)$  et  $l_4 = l_4(\varepsilon)$  les lignes de niveau orthogonales passant par  $A$  et  $D$ . On a alors :

$$A = l_1 \cap \mathcal{C}(0, R) \cap S \quad \text{et} \quad D = l_4 \cap \mathcal{C}(0, R) \cap S .$$

Vu la remarque ci-dessus, les distances  $AO_1$  et  $DO_3$  sont minorées par un nombre strictement positif lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires

pour construire les chemins  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)|_{(z, \varepsilon) \in \Omega}$ . Pour simplifier la présentation, nous nous contenterons de considérer les points  $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_9 \in S_\varepsilon(k) \cup S_\varepsilon(k+1)$ , sur les figures (3.20)-(3.21), et de décrire les chemins de 0 à ces points. L'ensemble des cas s'en déduit aisément.

Dans chacun des cas suivants et pour déterminer  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$ , nous allons partir de  $z$  et construire un chemin jusqu'à 0. Il faudra ensuite considérer le chemin parcouru dans le sens inverse (le sens de parcours étant celui où  $t \mapsto R_j(t, \varepsilon)$  décroît).

On note  $L$  le rayon de  $\mathcal{C}(0, R)$  appartenant à la frontière de  $S_\varepsilon(k)$ .

**Si  $z = \hat{z}_1$  (figure (3.20)) :** On parcourt la ligne de niveau orthogonale au relief passant par  $z$  dans le sens où  $t \mapsto R_j(t, \varepsilon)$  croît jusqu'à rencontrer le rayon  $L$  qu'on emprunte jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_2$  (figure (3.20)) :** On parcourt tout d'abord la ligne de niveau orthogonale au relief passant par  $z$  dans le sens où  $t \mapsto R_j(t, \varepsilon)$  croît jusqu'à rencontrer  $\mathcal{C}(0, R)$ , puis on emprunte le chemin sur le cercle jusqu'au point  $B$ . Ensuite, on emprunte la ligne de niveau orthogonale  $l_2$  jusqu'au rayon  $L$  que l'on suit jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_3$  (figure (3.20)) :** On parcourt tout d'abord la ligne de niveau orthogonale au relief passant par  $z$  jusqu'à rencontrer  $L$  que l'on emprunte jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_4$  (figure (3.20)) :** On parcourt tout d'abord une ligne de niveau associée à un argument proche de  $\arg \gamma_j$  jusqu'à  $l_1$  que l'on emprunte jusqu'au point  $A$ . On parcourt ensuite le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$  jusqu'à  $B$  et on suit alors la ligne de niveau orthogonale  $l_2$  jusqu'à rencontrer  $L$  que l'on emprunte jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_5$  (figure (3.21)) :** On parcourt la ligne de niveau orthogonale au relief passant par  $z$  dans le sens où  $t \mapsto R_j(t, \varepsilon)$  croît jusqu'à rencontrer un segment  $[0; \varepsilon\rho]$  ( $\rho$  racine  $r^e$  de l'unité) que l'on emprunte jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_6$  (figure (3.21)) :** On parcourt la ligne de niveau orthogonale au relief passant par  $z$  dans le sens où  $t \mapsto R_j(t, \varepsilon)$  croît jusqu'à rencontrer un segment  $[0; \varepsilon\rho]$  ( $\rho$  racine  $r^e$  de l'unité) que l'on emprunte jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_7$  (figure (3.21)) :** On parcourt tout d'abord la ligne de niveau orthogonale au relief passant par  $z$  dans le sens où  $t \mapsto R_j(t, \varepsilon)$  croît jusqu'à rencontrer  $\mathcal{C}(0, R)$  que l'on suit jusqu'à  $B$ . On emprunte alors la ligne de niveau orthogonale  $l_3$  jusqu'au segment  $[0; \varepsilon\rho]$  que l'on suit jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_8$  (figure (3.20)) :** On parcourt la ligne de niveau orthogonale au relief passant par  $z$  dans le sens où  $t \mapsto R_j(t, \varepsilon)$  croît jusqu'à rencontrer un segment  $[0; \varepsilon\rho]$  ( $\rho$  racine  $r^e$  de l'unité) que l'on emprunte jusqu'à 0.

**Si  $z = \hat{z}_9$  (figure (3.20)) :** On parcourt tout d'abord une ligne de niveau associée à un argument proche de  $\arg \gamma_j$  jusqu'à  $l_4$  que l'on emprunte jusqu'au point  $D$ . On parcourt ensuite le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$  jusqu'à  $C$  et on suit alors la ligne de niveau orthogonale  $l_3$  jusqu'à rencontrer  $[0; \varepsilon\rho]$  que l'on emprunte jusqu'à 0.

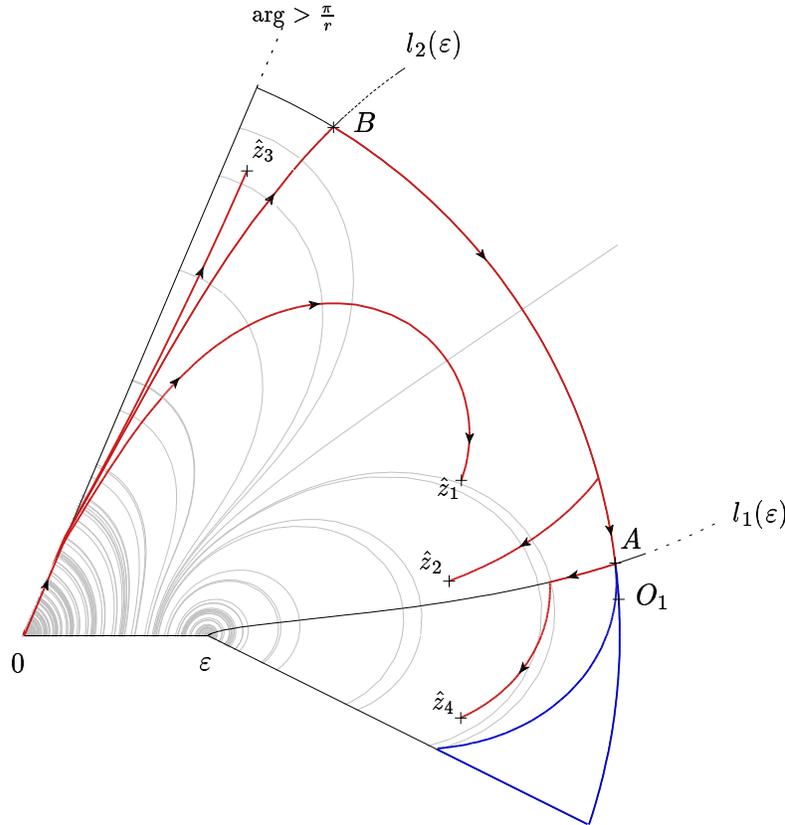
FIG. 3.20: Description des chemins d'intégration sur  $S_\varepsilon(k)$ ,  $k$  pair et  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ 

Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $k = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\theta = \frac{2\pi}{17}$

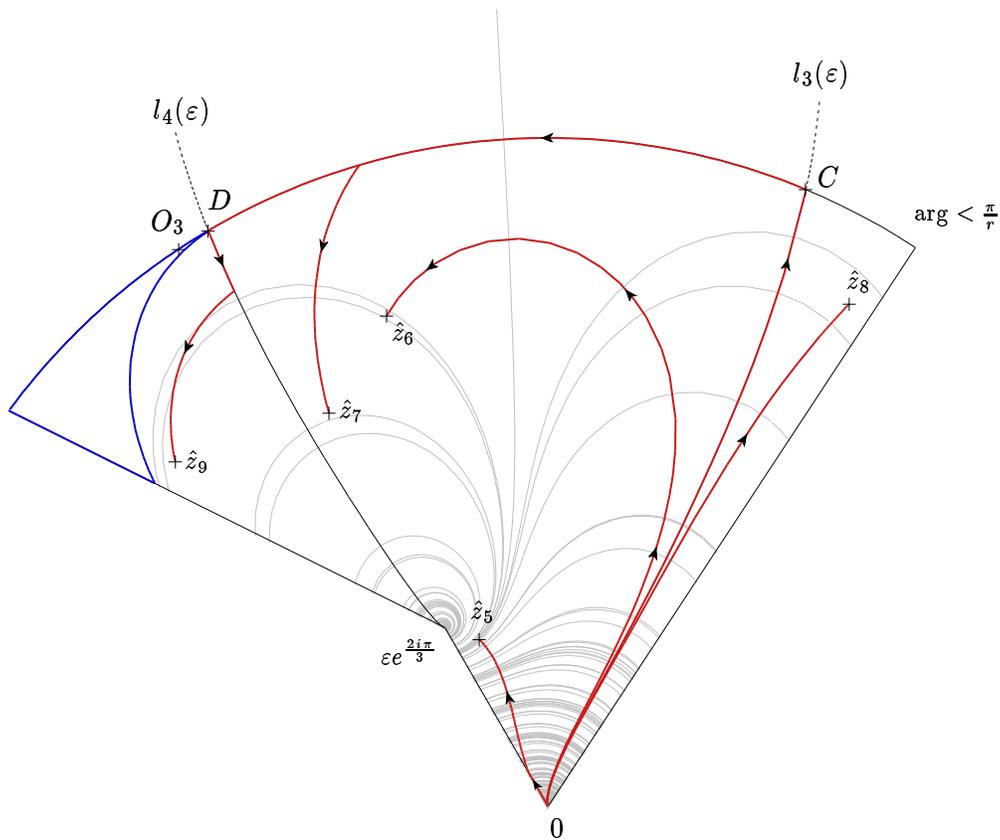
On a donc décrit tous les cas possibles à partir des six types de chemins élémentaires donnés plus haut. On peut cependant remarquer qu'il nous est impossible d'atteindre, en partant de 0, le petit domaine délimité de bleu sur les figures (3.20)-(3.21). Cela n'a pas d'importance : on applique le théorème du point fixe sur les domaines «accessibles» par des chemins, puis il suffit de diminuer  $R$  pour obtenir des solutions définies sur des domaines du type  $S_\varepsilon(k)$  décrits précédemment.

**2. Si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$  :** On peut faire une construction tout à fait analogue au cas précédent.

La description des chemins  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$  vérifiant l'inégalité du lemme (3.3) achève la preuve du lemme (3.3), donc celle du lemme (3.2). Nous avons ainsi complètement démontré le théorème (3.1). Il reste maintenant à étudier la convergence des solutions obtenues sous la forme (3.28).

### 3.4 Unicité de la solution obtenue : preuve du théorème (3.1)

Ici, nous allons d'abord énoncer une proposition d'unicité, semblable à la proposition (1.2), pour l'équation quadratique (3.10) obtenue dans la preuve du lemme (3.3), puis nous

FIG. 3.21: Description des chemins d'intégration sur  $S_\varepsilon(k)$ ,  $k$  impair et  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ Figure réalisée pour  $r = 3$ ,  $k = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $\theta = \frac{2\pi}{17}$ 

terminerons la démonstration du théorème (3.1) en montrant l'unicité de l'écriture

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (3.39)$$

sur  $\Omega$  avec  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\varepsilon}} H(z, \varepsilon) = I_n$ .

**Proposition 3.1** *On conserve toutes les notations du lemme (3.1). En outre, on note  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V, z \in S_\varepsilon\}$  le domaine d'existence de (3.39) défini dans la partie (3.3.1).*

*Il existe une unique solution bornée sur  $\Omega$  de*

$$z(z^r - \varepsilon^r)\omega'(z, \varepsilon) = f_0(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon)\omega(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, \omega(z, \varepsilon)). \quad (3.40)$$

*Elle est obtenue comme solution dans  $\mathcal{B}$  de l'équation de point fixe définie par  $\mathcal{F}$ .*

**Preuve:** L'existence d'une solution de (3.40) définie et bornée sur  $\Omega$  est donnée par la démonstration du lemme (3.1) comme unique point fixe  $w$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{B}^M$ ,  $M > 0$ .

Supposons donnée une solution  $y$  de (1.15) définie sur  $\Omega$  bornée par  $N > 0$ . On pose  $K = \max(M, N)$ . Quitte à réduire le rayon de  $\Omega$ , on a vu que  $\mathcal{F}$  est encore une contraction sur  $\mathcal{B}^K$  et on a bien  $w \in \mathcal{B}^K$ .

Montrons maintenant que  $y$  vérifie l'équation de point fixe  $y = \mathcal{F}(y)$ . Notons que l'on a

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad z(z^r - \varepsilon^r)y'(z, \varepsilon) - F_0 y(z, \varepsilon) = f_0(z, \varepsilon) + B(z, \varepsilon) y(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, y(z, \varepsilon))$$

où  $B = F - F_0$ . Alors, pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$  et tout  $(t, \varepsilon) \in \Omega$ , on peut écrire

$$z(z^r - \varepsilon^r)y'_j(t, \varepsilon) - \gamma_j y_j(t, \varepsilon) = (f_0(t, \varepsilon) + B(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon) + f_2(t, \varepsilon, y(t, \varepsilon)))_j,$$

soit

$$\left( e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} y_j(t, \varepsilon) \right)' = e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} \left( \frac{f_0(t, \varepsilon) + B(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon) + f_2(t, \varepsilon, y(t, \varepsilon))}{t(t^r - \varepsilon^r)} \right)_j.$$

D'où, en intégrant entre  $T \in S_\varepsilon$  et  $z \in S_\varepsilon$  le long de  $L_j(z, \varepsilon)$ :

$$\left[ e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} y_j(t, \varepsilon) \right]_T^z = \int_T^z e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} \left( \frac{f_0(t, \varepsilon) + B(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon) + f_2(t, \varepsilon, y(t, \varepsilon))}{t(t^r - \varepsilon^r)} \right)_j dt.$$

Rappelons ici que  $a_j(\varepsilon)$ , origine de  $L_j(z, \varepsilon)$ , dépend du signe de  $\cos \theta_r(j, \varepsilon)$ :

- si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > 0$ ,  $L_j(z, \varepsilon)$  désigne le chemin de  $a_j(\varepsilon) = 0$  à  $z$
- si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < 0$ ,  $L_j(z, \varepsilon)$  désigne le chemin de  $a_j(\varepsilon) = z_k(\varepsilon)$  à  $z$ ,

et dans tous les cas

$$\lim_{z \rightarrow a_j(\varepsilon)} R_j(z, \varepsilon) = +\infty.$$

Finalement, on a

$$\left| e^{-\gamma_j m(T, \varepsilon)} y_j(T, \varepsilon) \right| = e^{-R_j(T, \varepsilon)} |y_j(T, \varepsilon)| \leq K e^{-R_j(T, \varepsilon)} \xrightarrow[T \in L_j(z, \varepsilon)]{T \rightarrow a_j(\varepsilon)} 0$$

car  $y$  est bornée par  $K$  sur  $\Omega$ . On a donc montré que pour tout  $z \in S_\varepsilon$ , on a:

$$e^{-\gamma_j m(z, \varepsilon)} y_j(z, \varepsilon) = \int_{L_j(z, \varepsilon)} e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} \left( \frac{f_0(t, \varepsilon) + B(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon) + f_2(t, \varepsilon, y(t, \varepsilon))}{t(t^r - \varepsilon^r)} \right)_j dt$$

c'est-à-dire  $y = \mathcal{F}(y)$ . De plus on a  $w = \mathcal{F}(w)$  et  $y, w \in \mathcal{B}^K$  donc  $y = w$  sur  $\Omega$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Il nous reste à achever la démonstration du théorème (3.1) en montrant l'unicité de l'écriture (3.39) sur  $\Omega$  vérifiant  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\varepsilon}} H(z, \varepsilon) = I_n$ .

La structure de cette démonstration est essentielle et s'applique également au théorème (1.1) (comme nous l'avons expliqué dans la remarque (1.6)) en utilisant la proposition (1.2). Elle sera reprise également dans le chapitre 5 pour établir un résultat équivalent avec des séries semi-formelles en  $\varepsilon$ .

**Preuve du théorème (3.1) :** La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ , dimension du système différentiel. On note  $\mathcal{P}(n)$  l'énoncé du théorème. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , il suffit de montrer l'unicité de l'écriture (3.39). Montrons tout d'abord  $\mathcal{P}(1)$  :

Si on considère  $d$  holomorphe au voisinage de 0,  $d(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_r z^r + o(z^{r+1})$ , on a vu dans la partie (1.1) que la solution générale de l'équation scalaire

$$z(z^r - \varepsilon^r) y'(z, \varepsilon) = (d(z) + z(z^r - \varepsilon^r)c(z, \varepsilon)) y(z, \varepsilon)$$

est de la forme

$$y(z, \varepsilon) = A(\varepsilon) e^{\int_0^z c(t, \varepsilon) dt} e^{\int_0^z k(t, \varepsilon) dt} e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} =: h(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $k$  est holomorphe au voisinage de  $(0, 0)$ . De plus,  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\varepsilon}} h(z, \varepsilon) = 1$  équivaut à  $A(\varepsilon) = 1$ , donc  $h$  est déterminé de manière unique par cette condition, ce qui montre  $\mathcal{P}(1)$ . Supposons vraies  $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n-1)$  et montrons que  $\mathcal{P}(n)$  l'est aussi. On suppose donnée une solution  $Y$  de (3.2) sur  $\Omega$  sous la forme

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (3.41)$$

avec  $\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} H(z, \varepsilon) = I_n$  et soit  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On écrit

$$H = \begin{pmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} H^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad H^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}), \\ H^{12} \in M_{p, n-p}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad H^{21} \in M_{n-p, p}(\mathbb{C}). \end{array}$$

On a alors

$$\begin{array}{l} \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} H^{11}(z, \varepsilon) = I_p, \quad \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} H^{22}(z, \varepsilon) = I_{n-p}, \\ \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} H^{21}(z, \varepsilon) = 0_{n-p, p} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} H^{12}(z, \varepsilon) = 0_{p, n-p}. \end{array} \quad (3.42)$$

Quitte à diminuer le rayon de  $\Omega$ ,  $H^{11}$  et  $H^{22}$  sont donc inversibles sur  $\Omega$  et on pose :

$$P = \begin{pmatrix} I_p & H^{12}(H^{22})^{-1} \\ H^{21}(H^{11})^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} I & P^{12} \\ P^{21} & I \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'on a

$$P \begin{pmatrix} H^{11} & 0 \\ 0 & H^{22} \end{pmatrix} = H. \quad (3.43)$$

Ainsi, le changement d'inconnue  $Y = PW$  transforme l'équation (3.2) en l'équation

$$z(z^r - \varepsilon^r) W'(z, \varepsilon) = B(z, \varepsilon) W(z, \varepsilon)$$

dont une solution fondamentale s'écrit sous la forme diagonale par blocs

$$W = \begin{pmatrix} H^{11} & 0 \\ 0 & H^{22} \end{pmatrix} e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

Autrement dit,  $B$  est également diagonale par blocs et comme nous l'avons vu précédemment, l'équation de transformation liant  $A$ ,  $P$  et  $B$  conduit aux équations (3.6)-(3.9) et finalement aux équations quadratiques suivantes pour  $P^{12}$  et  $P^{21}$  :

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{12})' = A^{12} + A^{11}P^{12} - P^{12}A^{22} - P^{12}A^{21}P^{12} \quad (3.44)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{21})' = A^{21} + A^{22}P^{21} - P^{21}A^{11} - P^{21}A^{12}P^{21}. \quad (3.45)$$

Remarquons que  $P^{21} = H^{21}(H^{11})^{-1}$ , par exemple, est bornée sur  $\Omega$  grâce aux limites (3.42) et vérifie (3.45). D'après la proposition (3.1),  $P^{21}$  est donc déterminé de manière **unique** par  $A$ ; il en va de même pour  $P^{12}$ , donc pour  $P$ ,  $B^{11}$  et  $B^{22}$ , au vu des formules (3.6) et (3.9).

D'autre part, on a vu que les équations

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)W_1'(z, \varepsilon) &= B^{11}(z, \varepsilon)W_1(z, \varepsilon) \\ \text{et } z(z^r - \varepsilon^r)W_2'(z, \varepsilon) &= B^{22}(z, \varepsilon)W_2(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

admettent respectivement les solutions fondamentales

$$W_1 = H^{11} e^{\int^z \frac{D_0^1(\varepsilon) + D_1^1(\varepsilon)t + \dots + D_r^1(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad \text{et} \quad W_2 = H^{22} e^{\int^z \frac{D_0^2(\varepsilon) + D_1^2(\varepsilon)t + \dots + D_r^2(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

vérifiant  $\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} H^{11}(z, \varepsilon) = I_p$  et  $\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow 0 \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} H^{22}(z, \varepsilon) = I_{n-p}$ , et où l'on a noté  $D = \text{diag}(D^1, D^2)$ .

D'après l'hypothèse de récurrence, les blocs  $H^{11}$  et  $H^{22}$  sont alors déterminés de manière unique par  $B$  donc par  $A$ . Finalement, vu la relation (3.43),  $H$  est déterminé de manière unique par  $A$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

Comme nous l'avons évoqué dans la remarque (1.6), on peut facilement reprendre le principe de cette démonstration pour montrer l'unicité de l'écriture

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{H}(z) e^{\int^z \frac{D_0 + D_1 t + \dots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt}$$

sur  $S$ , un « bon secteur » dans le théorème (1.1). Le seul point différent de cette preuve est que l'on invoquera la proposition (1.2) et non (3.1) pour déterminer  $P$  de manière unique.

### 3.5 Convergence uniforme des solutions

Dans le chapitre 1, nous avons rappelé que le système différentiel (3.1) possède, sur tout « bon secteur », une solution fondamentale de la forme (1.8)

$$\tilde{Y}(z) = \tilde{H}(z) e^{\int^z \frac{D_0 + D_1 t + \dots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt} .$$

Dans la partie (3.4), nous avons prouvé que l'équation (3.2) admet, sur chacun des  $2r$  secteurs  $S_\varepsilon(k)$ ,  $k = 0, \dots, 2r-1$  et pour tout  $\varepsilon \in V$ , une solution fondamentale de la forme (3.28) :

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

avec  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} D_i(\varepsilon) = D_i$  pour tout  $i = 0, \dots, r$ .

Nous allons démontrer que si  $S$  est un « bon secteur » contenu dans un des secteurs  $S_\varepsilon(k)$  pour tout  $\varepsilon \in V$  et si les solutions  $\tilde{Y}$  et  $Y$  de (3.1) et (3.2) respectivement, définies sur  $S$  et  $S_\varepsilon(k)$ , sont mises sous les formes ci-dessus, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} H(z, \varepsilon) = \tilde{H}(z), \quad \text{uniformément pour } z \in S .$$

Remarquons que l'angle d'ouverture en 0 de  $S_\varepsilon(k)$  est strictement supérieur à  $\frac{\pi}{r}$  donc pour tout  $k = 0, \dots, 2r-1$ , il existe un « bon secteur »  $S$  contenu dans  $S_\varepsilon(k)$ . Pour démontrer la

convergence uniforme des  $H(\cdot, \varepsilon)$ , nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzelà que nous rappelons ici :

**Définition 3.2** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mathfrak{F}$  une famille de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}^q$ . La famille  $\mathfrak{F}$  est dite *équicontinue* au point  $x_0 \in X$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in \mathfrak{F}, d(x_0, x) \leq \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon .$$

**Théorème 3.2 (Ascoli-Arzelà)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mathfrak{F}$  une famille de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}^q$  équicontinue en tout point de  $X$ . Si il existe  $M > 0$  tel que

$$\forall x \in X, \forall f \in \mathfrak{F}, \|f(x)\| \leq M$$

alors de toute suite infinie  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$ , on peut extraire une suite uniformément convergente sur  $X$ .

Nous allons voir qu'à chaque étape du *splitting*, la solution de l'équation de point fixe de  $\mathcal{F}$  défini par (3.18) converge uniformément vers le point fixe de  $\mathcal{F}_0$  défini par (1.14). Pour ce faire, énonçons tout d'abord la

**Définition 3.3** Soit  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V \text{ et } z \in S_\varepsilon\}$  domaine défini dans la partie (3.3) et  $S$  un « bon secteur ». On suppose de plus que pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $S$  est contenu dans  $S_\varepsilon$ .

On dit que  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{A} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifient les conditions conjuguées (COND3) du *splitting* si on peut écrire :

1.  $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ vérifie sur } \Omega \text{ la condition (COND2) avec pour matrice diagonale associée } D \text{ et} \\ \tilde{A} \text{ vérifie sur } S \text{ la condition (COND0) avec pour matrice diagonale associée } D \end{array} \right.$
2.  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|C(\cdot, \varepsilon) - \tilde{C}\|_\infty^S = 0$  en conservant les notations des lemmes (1.1) et (3.1)

On dira de plus que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND3).

Remarquons immédiatement que les matrices  $A$  et  $\tilde{A}$  intervenant dans les équations (3.1) et (3.2) mises sous les formes préparées (2.3)-(2.4) vérifient les conditions (COND3) du *splitting*. En effet, on a déjà vu que  $A$  vérifie la condition (COND2) du *splitting* et de plus,  $A$  est holomorphe dans un voisinage de  $(0, 0)$  et vérifie  $A(\cdot, 0) = \tilde{A}$ . La condition (COND3)(2) est donc clairement vérifiée.

À l'instar des parties (1.2.2) et (3.1), nous allons énoncer une proposition de *splitting* mettant cette fois en jeu la condition (COND3) : on va montrer que la convergence uniforme de  $C(\cdot, \varepsilon)$  entraîne celle du système diagonal obtenu par cette transformation.

**Lemme 3.4 (splitting)** Si  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{A} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifient les conditions (COND3) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , alors en conservant les notations des lemmes (1.1) et (3.1), les fonctions matricielles  $P : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{P} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  sont telles que

1.  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|P(\cdot, \varepsilon) - \tilde{P}\|_\infty^S = 0$  et
2.  $B^{11}$  et  $\tilde{B}^{11}$  ainsi que  $B^{22}$  et  $\tilde{B}^{22}$  vérifient les conditions conjuguées (COND3) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

**Preuve du lemme (3.4):** Quitte à diminuer les rayons de  $S$  et  $\Omega$ , nous noterons dans la démonstration  $\Omega = \Omega_R$  et  $S = S_R$ . Les conditions (COND0) et (COND2) sont respectivement vérifiées pour les matrices  $A$  et  $\tilde{A}$  donc  $P$  et  $\tilde{P}$  sont bien définies. Montrons tout d'abord que l'on a la limite uniforme

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|P(\cdot, \varepsilon) - \tilde{P}\|_{\infty}^S = 0 \quad (3.46)$$

Pour cela on peut considérer les fonctions  $w$  et  $\tilde{w}$  à valeurs dans  $C^q$  ( $q = p(n-p)$ ) associées respectivement à  $P^{21}$  et  $\tilde{P}^{21}$  selon (3.12) et (1.12). Nous allons voir que l'on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|w(\cdot, \varepsilon) - \tilde{w}\|_{\infty}^S = 0 \quad (3.47)$$

et en raisonnant de manière analogue pour  $P^{21}$  et  $\tilde{P}^{21}$ , on aura montré (3.46) au vu des relations (1.10) et (3.5). Commençons par voir que nous sommes bien dans les hypothèses du théorème d'Ascoli-Arzelà :

On pose  $X = \overline{S}$  et  $X$  est donc un espace métrique compact (muni de la norme euclidienne). D'après le lemme (3.1), il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_{\varepsilon}, \|w'(z, \varepsilon)\| \leq \alpha$$

de sorte que par l'inégalité des accroissements finis, on obtient :

$$\forall \varepsilon \in V, \forall (z, z') \in S_{\varepsilon}^2, \|w(z, \varepsilon) - w(z', \varepsilon)\| \leq \alpha \|z - z'\| \quad (3.48)$$

On en déduit immédiatement que

- pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $w(\cdot, \varepsilon)$  peut être prolongée sur  $\overline{S}_{\varepsilon}$  et donc sur  $\overline{S}$  et que
- l'inégalité précédente est donc vraie après prolongement pour tout  $(z, z') \in \overline{S}_{\varepsilon} \supset \overline{S}$ .

D'après le lemme (3.1), il existe de plus  $M > 0$  telle que

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_{\varepsilon}, \|w(z, \varepsilon)\| \leq M$$

donc par continuité il vient :

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in \overline{S}_{\varepsilon} \supset \overline{S}, \|w(z, \varepsilon)\| \leq M. \quad (3.49)$$

Dans la suite, on note  $\phi_{\varepsilon}$  le prolongement de  $w(\cdot, \varepsilon)$  à  $X = \overline{S}$  pour tout  $\varepsilon \in V$  et on considère une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  tendant vers 0. Les hypothèses du théorème d'Ascoli-Arzelà sont alors vérifiées par la suite de fonctions  $\Phi = (\phi_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

D'après (3.2), il existe une sous-suite  $\Phi_t = (\phi_{\varepsilon_{t(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Phi$  qui converge uniformément sur  $\overline{S}$  vers  $\phi_t$ . Par passage à la limite, on a

$$\forall z \in \overline{S}, \|\phi_t(z)\| \leq M \quad (3.50)$$

et comme la convergence est uniforme,  $\phi_t$  vérifie l'équation différentielle (1.15) sur  $S$  d'où  $\phi_t = \tilde{w}$  par la proposition (1.2).

**Montrons que la suite  $\Phi = (\phi_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\phi_t = \tilde{w}$  sur  $\overline{S}$ .** On raisonne par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas. Alors, il existe  $\delta > 0$  et une sous suite  $\Phi_v = (\phi_{\varepsilon_{u(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Phi$  telle que

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \|\phi_{\varepsilon_{u(k)}} - \phi_t\| \geq \delta > 0. \quad (3.51)$$

D'après (3.2), il existe une sous-suite  $\Phi_v = (\phi_{\varepsilon_{v(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Phi_u$  qui converge uniformément vers  $\phi_v$  sur  $\overline{S}$  et, par passage à la limite, on a

$$\forall z \in \overline{S}, \|\phi_v(z)\| \leq M \quad (3.52)$$

et comme la convergence est uniforme,  $\phi_v$  vérifie l'équation différentielle (1.15) sur  $S$ .

Au vu de la proposition (1.2) et des inégalités (3.50)-(3.52) on a alors  $\tilde{w} = \phi_t = \phi_v$  sur  $S$ , ce qui est contradictoire si on considère la relation (3.51). On vient donc de démontrer que la suite  $\Phi$  converge uniformément vers  $\tilde{w}$  sur  $S$ . Ce résultat étant valable pour toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  tendant vers 0, on a donc démontré la limite uniforme (3.47).

Reste maintenant à voir que les fonctions matricielles  $B^{11}$  et  $\tilde{B}^{11}$  ainsi que  $B^{22}$  et  $\tilde{B}^{22}$  définies dans les lemmes (1.1) et (3.1) vérifient les conditions conjuguées (COND3) du *splitting* avec comme matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ . On a déjà vu précédemment que l'on a

$$B^{11}(z, \varepsilon) = D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) (C^{11}(z, \varepsilon) + C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon)) \quad (3.53)$$

$$\text{et } \tilde{B}^{11}(z) = D^1(z) + z^{r+1} (\tilde{C}^{11}(z) + \tilde{C}^{12}(z)\tilde{P}^{21}(z)) \quad (3.54)$$

donc si l'on considère (COND3)(2) ainsi que (3.46) et le fait que  $C$  et  $P$  sont bornés sur  $\Omega$ , il vient

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|(C^{11} + C^{12}P^{21}) - (\tilde{C}^{11} + \tilde{C}^{12}\tilde{P}^{21})\|_{\infty}^S = 0.$$

On a bien sûr une relation semblable pour  $B^{22}$  et  $\tilde{B}^{22}$ , ce qui termine la démonstration du lemme (3.4) car la condition (COND3)(2) est alors vérifiée pour les systèmes obtenus après le *splitting*.  $\square$

**Remarque 3.8** Remarquons qu'il est possible d'améliorer le résultat du lemme précédent. Supposons en effet que  $S_\varepsilon = S_\varepsilon(0)$ . On pose  $V = S(-\Delta, \Delta, \eta)$  et on considère  $T = S_{\rho e^{i\Delta}}$ ,  $\rho < \eta$ , représenté sur la figure (3.22). On a alors  $S \subset T$  et pour tout  $\varepsilon \in V$  tel que  $|\varepsilon| \leq \rho$ ,  $T \subset S_\varepsilon$  (on a construit  $T$  pour cela).

On pose  $X = \overline{T}$  et en reprenant le raisonnement précédent, on peut prolonger  $w(\cdot, \varepsilon)$  à  $\overline{T}$  pour tout  $\varepsilon \in V \cap B(0, \rho)$  et après prolongement, il vient

$$\forall \varepsilon \in V \cap B(0, \rho), \forall z \in \overline{T}, \|w(z, \varepsilon)\| \leq M.$$

D'après le théorème (3.2) et en reprenant les notations du paragraphe précédent, on peut donc extraire une suite  $\Phi_u = (\phi_{u(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Phi$  qui converge uniformément sur  $\overline{T}$  vers  $\phi_u$ . On montre ensuite de manière semblable que la suite  $\Phi = (w(\cdot, \varepsilon))_{\varepsilon \in V}$  converge uniformément vers  $\phi_u$ , (le) prolongement de  $\tilde{w}$  sur  $T$ , connexe, à l'aide de la proposition d'unicité (1.2).

Remarquons encore que l'on a  $\lim_{\rho \rightarrow 0} T = S(\alpha, \beta, R)$  avec  $\alpha < 0 < \frac{\pi}{r} < \beta$  au sens de l'inclusion. En faisant tendre  $\rho$  vers 0, on obtient donc des prolongements de  $\tilde{w}$  sur des secteurs de plus en plus grands et finalement sur  $S(\alpha, \beta, R)$ .  $\triangle$



où  $\lambda_i(z)$  est la  $i^{\text{e}}$  valeur propre de  $\tilde{A}(z)$  et que nous avons déjà traité dans la partie (1.1) : on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|c_i(\cdot, \varepsilon) - \tilde{c}_i\|_{\infty}^S = 0$$

donc d'après la proposition (1.1), les équations précédentes admettent respectivement des solutions fondamentales de la forme

$$\tilde{y}_i(z) = \tilde{h}_i(z) e^{\int^z \frac{d_0 + d_1 t + \dots + d_r t^r}{t^{r+1}} dz} \quad \text{et} \quad y_i(z) = h_i(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $\tilde{h}_i : S \rightarrow \mathbb{C}$  et  $h_i : S \times V \rightarrow \mathbb{C}$  sont holomorphes bornées, vérifiant

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|h_i(\cdot, \varepsilon) - \tilde{h}_i\|_{\infty}^S = 0 ,$$

ce qui termine la démonstration du théorème précédent. □



## Chapitre 4

# Confluence de solutions analytiques sur des secteurs «modifiés»

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le phénomène de confluence des singularités du système (3.1) en la singularité irrégulière du système (3.2) sur des domaines  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V, z \in S_\varepsilon\}$  bien déterminés. Plus précisément, nous avons vu que les secteurs  $S_\varepsilon$  peuvent être choisis de  $2r$  façons possibles.

Pourtant, dans le cas du système non perturbé (3.1), nous avons rappelé dans la partie (1.2) que des solutions fondamentales de la forme (1.8) existaient sur tout « bon secteur ». On remarquera également que dans le cas du système (3.1), les chemins d'intégration utilisés dans le problème de point fixe sont des demi-droites ou des segments dans le plan des  $1/z^r$ , alors que pour le système perturbé (3.2), on a choisi des (morceaux de) spirales.

Toutes ces différences, importantes, proviennent de l'introduction, au voisinage de 0, des singularités  $z_0, \dots, z_{r-1}$  et de leur disposition autour de 0 : les secteurs  $S_\varepsilon$  ne peuvent contenir de singularité en leur intérieur. On peut alors se demander si, à une distance raisonnable des singularités  $0, z_0, \dots, z_{r-1}$ , le relief  $R_j(\cdot, \varepsilon)$  ne serait pas une bonne approximation du relief  $\tilde{R}_j$  du cas non perturbé.

Autrement dit ne peut-on pas choisir, dans le plan des  $1/z^r$ , des chemins constitués de segments sur tout domaine proche d'un « bon secteur » mais dont la distance à l'origine reste assez grande ? Nous allons voir dans ce chapitre que l'on peut répondre par l'affirmative à cette question en choisissant des domaines du type  $S \cap (B(0, \delta|\varepsilon|))^c$  avec  $\delta > 0$  assez grand et  $S$  un « bon secteur » .

En outre, si le résultat du chapitre 3 est tout à fait particulier (à cause de la forme des secteurs) au type de confluence proposé par GARNIER, on peut supposer que le résultat du présent chapitre est généralisable à d'autres types de confluence vers une singularité de rang  $r$  puisque les domaines considérés ici ne font plus du tout intervenir la disposition des singularités régulières introduites.

Dans la suite, nous considérerons toujours les systèmes différentiels linéaires

$$z^{r+1}Y' = \tilde{A}(z)Y \quad (4.1)$$

$$\text{et } z(z^r - \varepsilon^r)Y' = A(z, \varepsilon)Y \quad (4.2)$$

mis sous les formes préparées (2.3)-(2.4). Dans un premier temps, nous allons transformer l'étude du système différentiel (4.2) en un problème de point fixe. Tout d'abord, nous reprendrons le principe de démonstration du chapitre 3 puis dans le paragraphe 4.1, nous déterminerons les domaines d'application du théorème du point fixe de la forme  $S_\varepsilon = S \cap (B(0, \delta|\varepsilon|))^c$  avec  $\delta > 0$  assez grand et  $S$  un « bon secteur ».

Ensuite, nous choisirons des chemins d'intégration de l'application de point fixe pour qu'ils soient uniquement composés de segments et le long desquels les fonctions  $R_j(\cdot, \varepsilon)$  soient décroissantes. Nous obtiendrons ainsi l'existence de solutions de (4.2) de la forme

$$Y(z, \varepsilon) = \check{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (4.3)$$

où  $\check{H}(\cdot, \varepsilon)$  est défini sur  $S_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$  dans un secteur d'angle d'ouverture et de rayon assez petit.

Alors, nous montrerons dans le paragraphe 4.3 qu'on a la limite uniforme

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|\check{H}(\cdot, \varepsilon) - \tilde{H}\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0$$

où  $\tilde{H}$  correspond à la solution (1.8) du système différentiel de rang  $r$  (4.1) définie sur  $S$ .

Enfin, nous établirons des résultats du même ordre en envisageant un type de confluence généralisant la confluence de GARNIER.

## 4.1 Existence d'une solution fondamentale analytique

Nous reprenons ici le principe de démonstration du chapitre précédent. Énonçons tout d'abord la

**Définition 4.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifie la condition (COND4) du *splitting* si on peut écrire :

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$$

où  $C$  est une fonction matricielle holomorphe bornée sur  $\Omega$

et  $D$  est une fonction diagonale holomorphe dans un voisinage de 0 telle que  $D_0 = D(0)$  a toutes ses valeurs propres distinctes.

On dira alors que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND4).

Le domaine de définition  $\Omega$  reste à déterminer. Nous le ferons dans la partie (4.2) en choisissant  $S_\varepsilon = (B(0, \delta|\varepsilon|))^c \cap S$  où  $S$  est un « bon secteur » et  $\delta > 0$  un réel convenable. Remarquons que nous ne faisons aucune hypothèse sur  $A'$ , contrairement au chapitre précédent.

La matrice  $A$  de l'équation (4.2) mise sous la forme préparée (2.4) vérifie alors de manière triviale la condition (COND4) du *splitting*. Comme dans le chapitre précédent, nous énonçons à présent un lemme de *splitting* :

**Lemme 4.1 (splitting)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < n$ . Si  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifie la condition (COND4) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , il existe alors  $R > 0$  et  $P : \Omega_R \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ , holomorphe, tels que  $P$  soit bornée sur  $\Omega_R$  et

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega_R, \quad P(z, \varepsilon) \text{ soit inversible, } \lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega_R}} P(z, \varepsilon) = I \quad ,$$

et tels que  $P$  transforme, par le changement d'inconnue  $Y = PW$ , l'équation

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) &= A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \\ \text{en l'équation } z(z^r - \varepsilon^r)W'(z, \varepsilon) &= B(z, \varepsilon)W(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

où  $B : \Omega_R \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  est holomorphe de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}, \quad B^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad B^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}).$$

De plus, si l'on écrit  $D = \text{diag}(D^1, D^2)$ ,  $D^1 \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $D^2 \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ , alors  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND4) du splitting avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

**Preuve du lemme (4.1) :** Quitte à diminuer le rayon de  $\Omega$ , nous noterons  $\Omega = \Omega_R$ . Nous reprenons ici les notations du chapitre précédent et notamment les définitions (3.19) de  $R$  et  $\eta$ . Comme nous allons fixer  $S_\varepsilon = (B(0, \delta|\varepsilon|))^c \cap S$ , nous supposons de plus que l'on a  $\delta\eta < R$ .

Le début de la preuve est tout à fait identique à celui du lemme (3.1). En choisissant  $P$  de la forme (3.5), l'équation de transformation (3.4) conduit aux équations (3.6)-(3.9) puis au système différentiel (3.10). On est donc amené à considérer le système

$$z(z^r - \varepsilon^r)w'(z, \varepsilon) = f_0(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon)w(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, w(z, \varepsilon)) \quad (4.4)$$

avec les correspondances (3.12). Vu la condition (COND4), on a alors:  $A^{21}(z, \varepsilon) = O(z)$  donc  $f_0(z, \varepsilon) = O(z)$ . De plus,  $F(0, \varepsilon)w \leftrightarrow D_0^{22}P^{21} - P^{21}D_0^{11}$  donc  $F(0, \varepsilon) = F_0$  est diagonale inversible et ses valeurs propres sont les  $\lambda_v - \lambda_u$ ,  $1 \leq u \leq p < v \leq n$ .

Dans la suite, nous noterons  $q = p(n-p)$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_q$  les valeurs propres de  $F_0$ .

Enfin, on peut écrire  $f_2(\cdot, \cdot, w) = \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f_{2ij} w_i w_j$  où  $f_{2ij}$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}^{p(n-p)}$  et  $f_{2ij}(z, \varepsilon) = O(z)$  car  $A^{12}(z, \varepsilon) = O(z)$ .

Contrairement à la démonstration du lemme (3.1), nous n'allons pas dériver cette équation mais la transformer directement (ce qui est plus simple) en une équation de point fixe en appliquant la méthode de variation de la constante. On considère le système

$$z(z^r - \varepsilon^r)w'(z, \varepsilon) - F_0 w(z, \varepsilon) = f_0(z, \varepsilon) + B(z, \varepsilon)w(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, w(z, \varepsilon)) \quad (4.5)$$

avec  $B = F - F_0$ . *Mutatis mutandis*, la méthode de variation de la constante nous amène à considérer l'équation de point fixe associée à (4.5) :

$$w(z, \varepsilon) = e^{F_0 m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} e^{-F_0 m(t, \varepsilon)} \frac{f_0(t, \varepsilon) + B(t, \varepsilon)w(t, \varepsilon) + f_2(t, \varepsilon, w(t, \varepsilon))}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt \quad (4.6)$$

avec  $m(z, \varepsilon) = \int^z \frac{du}{u(u^r - \varepsilon^r)}$  et la famille  $\mathcal{L}(z, \varepsilon)_{|(z, \varepsilon) \in \Omega}$  de multi-chemins dans  $S_\varepsilon$  d'extrémité  $z$  à déterminer. Nous noterons encore l'équation (4.6) sous la forme

$$w = \mathcal{F}(w) = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}(w) \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon) &= e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} \frac{w_j(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt, \quad j = 1, \dots, p(n-p) \\ \mathcal{R}(w)(z, \varepsilon) &= f_0(z, \varepsilon) + B(z, \varepsilon)w(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, w(z, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{B}$  l'espace des fonctions analytiques sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^{p(n-p)}$  et bornées sur  $\Omega$ . Muni de la norme

$$\|w\| = \sup_{(z,\varepsilon) \in \Omega} \max_{j=1}^{p(n-p)} |w_j(z, \varepsilon)| \quad ,$$

$\mathcal{B}$  est un espace de Banach. Pour montrer que  $\mathcal{F}$  est une contraction, admettons pour l'instant le lemme suivant que nous démontrerons dans la suite.

**Lemme 4.2** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $w \in \mathcal{B}$ ,  $\|\mathcal{T}(w)\| \leq C\|w\|$ .*

Montrons que l'on peut terminer la démonstration du lemme (4.1) en admettant ce lemme. D'après les remarques suivant l'équation (4.4), il existe  $K_0(R)$ ,  $K_1(R)$  et  $K_2$  réels positifs tels que

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{j=1}^{p(n-p)} |(f_0)_j(z, \varepsilon)| \leq K_0(R)$$

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{i,j=1}^{p(n-p)} |B_{i,j}(z, \varepsilon)| \leq K_1(R)$$

$$\text{et } \forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad \max_{i,j,k=1}^{p(n-p)} |(f_{2ij})_k(z, \varepsilon)| \leq K_2$$

avec

$$\lim_{R \rightarrow 0} K_0(R) = \lim_{R \rightarrow 0} K_1(R) = 0 \quad .$$

Pour tout  $w \in \mathcal{B}$ , tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , on a alors, par simple majoration,

$$|\mathcal{R}(w)_j(z, \varepsilon)| \leq |(f_0)_j(z, \varepsilon)| + \sum_{k=1}^q |B_{jk}(z, \varepsilon)| |w_k(z, \varepsilon)| + \sum_{k,l=1}^q |(f_{2kl})_j(z, \varepsilon)| |w_k(z, \varepsilon) w_l(z, \varepsilon)| \quad ,$$

d'où, pour tout  $w \in \mathcal{B}$ ,

$$\|\mathcal{R}(w)\| \leq K_0(R) + qK_1(R)\|w\| + q^2K_2\|w\|^2 \quad . \quad (4.8)$$

De même, pour tout  $(w, \tilde{w}) \in \mathcal{B}^2$ , tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(w)_j(z, \varepsilon) - \mathcal{R}(\tilde{w})_j(z, \varepsilon)| &\leq \sum_{k=1}^q |B_{jk}(z, \varepsilon)| |w_k(z, \varepsilon) - \tilde{w}_k(z, \varepsilon)| \\ &+ \sum_{k,l=1}^q |(f_{2kl})_j(z, \varepsilon)| (|w_k(z, \varepsilon) w_l(z, \varepsilon) - \tilde{w}_l(z, \varepsilon) w_k(z, \varepsilon)| + |\tilde{w}_l(z, \varepsilon) w_k(z, \varepsilon) - \tilde{w}_k(z, \varepsilon) w_l(z, \varepsilon)|) \quad , \end{aligned}$$

d'où finalement, pour tout  $(w, \tilde{w}) \in \mathcal{B}^2$ ,

$$\|\mathcal{R}(w) - \mathcal{R}(\tilde{w})\| \leq (qK_1(R) + q^2K_2\|w\| + q^2K_2\|\tilde{w}\|) \|w - \tilde{w}\| \quad . \quad (4.9)$$

Soit maintenant  $\mathcal{B}_M = \{w \in \mathcal{B}, \|w\| \leq M\}$ , partie fermée de  $\mathcal{B}$ . C'est un espace métrique complet. Nous allons voir que si l'on choisit correctement  $M$  et quitte à diminuer le rayon de  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}$  est une contraction sur  $\mathcal{B}_M$ .

Les inégalités (4.8) et (4.9) et le lemme (4.2) montrent alors que pour tout  $w, \tilde{w} \in \mathcal{B}_M$ , on a

$$\|\mathcal{F}(w)\| \leq \left( \delta_0(R) + \delta_1(R)M + \delta_2M^2 \right) \quad (4.10)$$

$$\|\mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(\tilde{w})\| \leq \left( \delta_1(R) + 2\delta_2M \right) \|w - \tilde{w}\| \quad (4.11)$$

avec

$$\delta_0(R) = CK_0(R) , \quad \delta_1(R) = CqK_1(R) \quad \text{et} \quad \delta_2 = Cq^2K_2 .$$

Pour que  $\mathcal{F}$  soit une contraction sur  $\mathcal{B}_M$ , il suffit alors d'avoir

$$\delta_1(R) + 2\delta_2M < 1 \quad (4.12)$$

$$\text{et} \quad \delta_0(R) + \delta_1(R)M + \delta_2M^2 \leq M . \quad (4.13)$$

On choisit maintenant  $R$  assez petit pour avoir

$$\delta_1(R) < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \delta_0(R) \leq \frac{1}{\delta_2}(1/4 - 1/8 - 1/16) .$$

Pour  $R$  ainsi fixé, on pose  $M = 1/(4\delta_2)$ . L'inégalité (4.12) est alors clairement vérifiée et

$$\delta_0(R) + \delta_1(R)M + \delta_2M^2 \leq \frac{1}{\delta_2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{4\delta_2} + \delta_2 \frac{1}{16\delta_2^2} = \frac{1}{4\delta_2} = M ,$$

d'où l'inégalité (4.13).

$\mathcal{F}$  est donc une contraction sur  $\mathcal{B}_M$  : elle admet un unique point fixe  $w$  sur  $\mathcal{B}_M$ , solution de l'équation différentielle (4.5). On a ainsi trouvé  $P^{21}$  (on ferait de même pour  $P^{12}$ ) vérifiant l'équation (3.10). Il reste à voir que  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND4) du *splitting*. Comme précédemment, on a pour tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$

$$B^{11}(z, \varepsilon) = D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) (C^{11}(z, \varepsilon) + C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon))$$

et  $C^{11}$ ,  $C^{12}$  et  $P^{21}$  étant bornés sur  $\Omega$ , cela termine la démonstration du lemme (4.1).  $\square$

Comme dans les chapitres 2 et 3, en appliquant un nombre fini de fois le lemme précédent, on obtient les équations scalaires étudiées dans la partie (1.1). On arrive finalement au résultat suivant.

**Théorème 4.1** *Considérons le système (3.2) mis sous la forme préparée (2.4), où  $C$  est holomorphe sur un voisinage de l'origine. Le système (3.2) possède une solution fondamentale de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = \check{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (4.14)$$

où  $\check{H} \in \text{Hol}_b(\Omega, M_n(\mathbb{C}))$  est inversible, vérifie

$$\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} \check{H}(z, \varepsilon) = I_n ,$$

et  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes en 0 définies par (2.7).

## 4.2 Détermination des secteurs $S_\varepsilon$ et des chemins d'intégration

Jusqu'à ce point du chapitre 4, nous avons suivi le principe de démonstration du chapitre 3. Dans la suite, nous allons déterminer les secteurs  $S_\varepsilon = S \cap (B(0, \delta|\varepsilon|))^c$  puis les chemins d'intégration de  $\mathcal{T}$  composés de segments de droites dans le plan des  $1/z^r$ . Entamons la

**Preuve du lemme (4.2) :** On conserve les notations du lemme (3.2). Pour tout  $w \in \mathcal{B}$  et tout  $j = 1, \dots, q$ , on a :

$$|\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| \leq e^{\Re(\gamma_j m(z, \varepsilon))} \int_0^1 e^{-\Re(\gamma_j m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon))} |m'(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)| |\Gamma'_z(s, \varepsilon)| \|w(\cdot, \varepsilon)\|_{\infty}^{S_\varepsilon} ds$$

où  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)$  est un chemin différentiable par morceaux de  $a_j(\varepsilon)$  à  $z$  dans  $\overline{S_\varepsilon}$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_z(\cdot, \varepsilon) &: [0; 1] \longrightarrow \overline{S_\varepsilon} \\ \Gamma_z(0, \varepsilon) &= a_j(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \Gamma_z(1, \varepsilon) = z . \end{aligned}$$

On notera  $R_j(z, \varepsilon) = \Re(\gamma_j m(z, \varepsilon))$  pour  $j = 1, \dots, q$ , de sorte que

$$|\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| \leq e^{R_j(z, \varepsilon)} \|w(\cdot, \varepsilon)\|_{\infty}^{S_\varepsilon} \int_0^1 e^{-R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)} \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| ds . \quad (4.15)$$

Énonçons alors le

**Lemme 4.3** *Il existe une famille de chemins différentiables par morceaux  $\Gamma_z(\cdot, \varepsilon)|_{\varepsilon \in V, z \in S_\varepsilon}$  tels que*

$$\Gamma_z(\cdot, \varepsilon) : [0; 1] \longrightarrow \overline{S_\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \Gamma_z(0, \varepsilon) = a_j(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \Gamma_z(1, \varepsilon) = z$$

et  $C > 0$  tel que

$$\forall s \in ]0; 1[, \quad \forall \varepsilon \in V, \quad \forall z \in S_\varepsilon, \quad \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -C \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) .$$

En admettant ce lemme, il vient immédiatement, comme dans la preuve du lemme (3.2) :

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad |\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| \leq C \|w(\cdot, \varepsilon)\|_{\infty}^{S_\varepsilon} \quad (4.16)$$

d'où

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad |\mathcal{T}(w)_j(z, \varepsilon)| \leq C \|w\| \quad ,$$

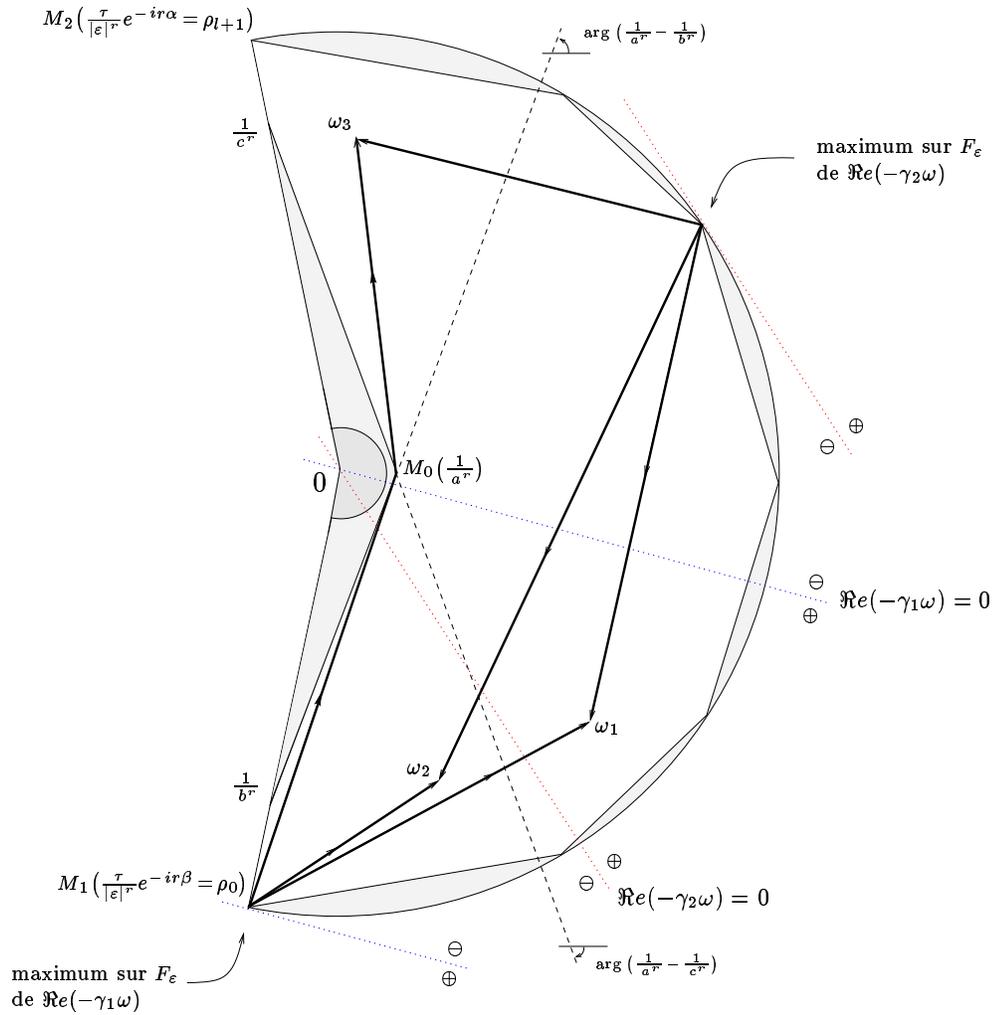
ce qui termine la démonstration du lemme (4.2) □

Tout d'abord, nous allons décrire la forme des domaines  $S_\varepsilon$ . Pour ce faire, nous allons nous placer dans le plan des  $1/z^r$  et définir un domaine  $F_\varepsilon$ , puis en déduire le domaine correspondant  $S_\varepsilon$  dans le plan des  $z$ . Rappelons ici qu'un « bon secteur » est l'intersection de deux secteurs dans le plan des  $1/z^r$ , comme nous l'avons vu dans la remarque (1.3) et sur la figure (1.1).

**Définition des domaines  $F_\varepsilon$  et  $S_\varepsilon$ .**

Dans la description à venir des domaines  $F_\varepsilon$  puis des chemins d'intégration dans le plan des  $1/z^r$ , nous considérerons toujours la figure (4.1). En outre, nous supposons que le « bon secteur »  $S$  s'appuie sur le secteur  $S(\alpha, \beta)$  (avec  $\beta - \alpha > \frac{\pi}{r}$ ). Nous allons construire le domaine  $S_\varepsilon$  sur ce modèle en explicitant le domaine  $F_\varepsilon$  : on considère tout d'abord les points  $M_1(\frac{\tau}{|\varepsilon|^r} e^{-ir\beta})$  et  $M_2(\frac{\tau}{|\varepsilon|^r} e^{-ir\alpha})$  où  $\tau$  sera déterminé (suffisamment petit) dans la suite.

Comme  $A$  n'est définie qu'au voisinage de 0, il faut éliminer un voisinage de 0 du domaine  $F_\varepsilon$ . Pour ce faire, on pose  $a = K^{-\frac{1}{r}} e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$  avec  $K > 0$  assez grand et on définit le point  $M_0(\frac{1}{a^r})$ . On considère également les points d'affixe  $\frac{1}{c^r} \in [0, M_1]$  et  $\frac{1}{b^r} \in [0, M_2]$ . Les segments  $[\frac{1}{a^r}; \frac{1}{c^r}]$ ,  $[\frac{1}{a^r}; \frac{1}{b^r}]$ ,  $[\frac{1}{b^r}; M_1]$ ,  $[\frac{1}{c^r}; M_2]$  et le cercle  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, \frac{\tau}{|\varepsilon|^r})$  définissent un domaine borné sur lequel nous allons nous appuyer pour construire  $F_\varepsilon$  de frontière polygonale.

FIG. 4.1: Domaine  $F_\varepsilon$  et chemins d'intégration dans le plan des  $\omega = \frac{1}{z^r}$ 

On considère dans le plan des  $1/z^r$  toutes les lignes de niveau  $\Re((\lambda_u - \lambda_v)w) = 0$  lorsque  $u$  et  $v$  parcourent  $\{1, \dots, n\}$  et  $u \neq v$ . Ce sont des droites passant par 0. On construit la frontière de  $F_\varepsilon$  comme suit : on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique de  $M_1$  à  $M_2$ , chaque sommet du polygone étant sur le cercle  $\mathcal{C}$  sans qu'aucune de ses arêtes ne soit parallèle à une des lignes de niveau considérées. Ceci est possible puisqu'il y en a un nombre fini.

**Remarque 4.1** Pour les segments  $[M_0, M_1]$  et  $[M_1, M_2]$ , on sait déjà que lorsque  $|\varepsilon|$  est assez petit, leur directions ne sont pas parallèles aux directions définies par  $\Re(\gamma_j w) = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$  qui sont les lignes de Stokes. En effet, par définition de  $S$  « bon secteur », les directions des segments  $[0, M_1]$  et  $[0, M_2]$  ne leur sont pas parallèles et lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, il est clair que les directions de  $[M_0, M_1]$  et  $[M_1, M_2]$  «tendent» respectivement vers celles-ci.

De même, les directions portées par les segments  $[\frac{1}{a^r}; \frac{1}{c^r}]$  et  $[\frac{1}{a^r}; \frac{1}{b^r}]$  ne sont parallèles à aucune des lignes de niveaux si l'on fixe  $\frac{1}{b^r}$  et  $\frac{1}{c^r}$  assez éloignés de l'origine.  $\triangle$

Nous avons donc construit un polygone défini par les points  $\frac{1}{a^r}$ ,  $\frac{1}{b^r}$ ,  $\rho_0 = \frac{\tau}{|\varepsilon|^r} e^{-ir\beta}$ ,  $\rho_1, \dots, \rho_l$ ,  $\rho_{l+1} = \frac{\tau}{|\varepsilon|^r} e^{-ir\alpha}$ ,  $\frac{1}{b^r}$  et son intérieur définit le domaine  $F_\varepsilon$ . Pour simplifier les calculs, nous

imposerons de plus que pour tout  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , on ait :

$$\rho_i \in S_{\frac{1}{a^r}} \left( \arg \left( \frac{1}{a^r} - \frac{1}{c^r} \right), \arg \left( \frac{1}{a^r} - \frac{1}{b^r} \right) \right) . \quad (4.17)$$

Il reste maintenant à démontrer les inégalités du lemme (4.3) sur les chemins  $\mathcal{L}_j(\cdot, \varepsilon)$ . Pour ce faire, nous allons montrer que celles-ci sont vérifiées par une certaine famille de chemins élémentaires à partir desquels nous construirons les chemins d'intégration  $\mathcal{L}_j(\cdot, \varepsilon)$ .

On se place toujours dans le plan des  $1/z^r$ . Soit  $\mu > 0$ . **Montrons que les chemins de  $\omega_0$  à  $\omega$  sur les segments  $[\omega_0, \omega]$  vérifiant  $\Re e(\gamma_j e^{i\phi}) \geq \mu$  avec  $\phi = \arg(\omega - \omega_0)$  vérifient les inégalités du lemme (4.3) avec une constante  $C$  ne dépendant que de  $\mu$ .**

Rappelons que l'on a

$$R_j(z, \varepsilon) = \Re e \left( \frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) \right) \quad \text{et} \quad m(z, \varepsilon) = \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) .$$

Paramétrons le chemin par  $\frac{1}{(\Gamma(s, \varepsilon))^r} = \omega_0 + s(\omega - \omega_0)$ . On a alors pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $s \in [0; 1]$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{d}{ds} \Re e \left( \frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \ln (1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))) \right) \\ &= \Re e \left( -\frac{\gamma_j}{r\varepsilon^r} \frac{\varepsilon^r (\omega - \omega_0)}{1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))} \right) \\ &= -\frac{|\omega - \omega_0|}{r} \Re e \left( \frac{\gamma_j e^{i\phi}}{1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))} \right) \\ &= -\frac{|\omega - \omega_0|}{r |1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))|^2} \Re e \left( \gamma_j e^{i\phi} (1 - \bar{\varepsilon}^r (\bar{\omega}_0 + s(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0))) \right) , \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln (1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))) \right) \\ &= -\frac{1}{r\varepsilon^r} \frac{\varepsilon^r (\omega - \omega_0)}{1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))} , \end{aligned}$$

d'où, pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $s \in [0; 1]$  :

$$\left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| = \frac{|\omega - \omega_0|}{r |1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))|} .$$

On déduit immédiatement des calculs précédents que l'on a pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $s \in [0; 1]$  :

$$\left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| = -\frac{|1 - \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))|}{\Re e (\gamma_j e^{i\phi} (1 - \bar{\varepsilon}^r (\bar{\omega}_0 + s(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0))))} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) . \quad (4.18)$$

Or, pour tout  $\varepsilon \in V$ , tout  $(\omega, \omega_0) \in F_\varepsilon^2$  et tout  $s \in [0; 1]$ , on a

$$|\varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))| = |\bar{\varepsilon}^r (\bar{\omega}_0 + s(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0))| \leq |\varepsilon|^r (|\omega| + |\omega_0| + |\omega|) \leq |\varepsilon|^r \frac{3\tau}{|\varepsilon|^r} = 3\tau$$

et  $g : x \mapsto \Re e(\gamma_j e^{i\phi} x)$  est continue avec  $g(1) = \Re e(\gamma_j e^{i\phi}) \geq \mu > 0$  donc, pour  $\tau$  assez petit, on a :

$$\forall \varepsilon \in V, \forall (\omega, \omega_0) \in F_\varepsilon^2, \forall s \in [0; 1], \Re e \left( \gamma_j e^{i\phi} (1 - \bar{\varepsilon}^r (\bar{\omega}_0 + s(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0))) \right) \geq \frac{\mu}{2} > 0 .$$

Comme en outre, on a  $|1 + \varepsilon^r (\omega_0 + s(\omega - \omega_0))| \leq 1 + 3\tau \leq 2$  pour  $\tau$  assez petit, on peut en déduire que dans ce cas, il existe  $C_j = \frac{4}{\mu} > 0$ , ne dépendant que de  $\mu$  et  $j$  tel que

$$\forall \varepsilon \in V, \forall s \in [0; 1], \left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| \leq -C_j \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) .$$

En posant  $C = \min_{j \in J} C_j > 0$ , on obtient la constante du lemme (4.3) qui, cette fois ne dépend que de  $\mu$ . Nous avons donc montré que les chemins sur les segments considérés vérifient les inégalités du lemme (4.3). Il reste maintenant à voir que l'on peut construire des chemins d'intégration en se limitant à des segments de la famille précédente.

On considère tout d'abord les fonctions définies dans le chapitre 1 par  $\tilde{R}_j(\omega) = \Re e(-\gamma_j \omega)$  (dans le plan des  $1/z^r$ ). Pour chaque  $j \in J$ , les lignes de niveau  $\tilde{R}_j(\omega) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  sont parallèles et comme les arêtes de  $F_\varepsilon$  ne sont parallèles à aucune des lignes de niveau  $\tilde{R}_j(\omega) = 0$ , le maximum de  $\tilde{R}_j$  est atteint sur  $\bar{F}_\varepsilon$  en l'un des points  $\rho_0, \dots, \rho_{l+1}$ . Deux cas se présentent alors

**Cas 1 : le maximum de  $\tilde{R}_j$  est atteint en  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ .** Comme on a supposé (4.17),  $F_\varepsilon$  est étoilé par rapport à  $\rho_i$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$  et tout  $\omega \in F_\varepsilon$ , on a alors

$$\arg(\rho_{i+1} - \rho_i) \leq \arg(\omega - \rho_i) \leq \arg(\rho_{i-1} - \rho_i) .$$

Si on note  $\varphi = \arg(\omega - \rho_i)$ , on a alors  $\Re e(-\gamma_j e^{i\varphi}) \leq M_j$  avec

$$M_j = \max \{ \Re e(-\gamma_j e^{i \arg(\rho_{i+1} - \rho_i)}), \Re e(-\gamma_j e^{i \arg(\rho_{i-1} - \rho_i)}) \} < 0$$

car les arêtes de  $F_\varepsilon$  ne sont pas parallèles à la ligne de niveau  $\Re e(\gamma_j \omega) = 0$ .

Ainsi, si l'on choisit une paramétrisation du chemin par  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  tel que  $\frac{1}{\Gamma(s, \varepsilon)^r} = \rho_i + s(\frac{1}{z^r} - \rho_i)$ , on est placé dans les conditions des chemins étudiés précédemment et  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  vérifie l'inégalité du lemme (4.3) avec une certaine constante  $C_j > 0$ .

**Cas 2 : le maximum de  $\tilde{R}_j$  est atteint en  $\rho_i = \rho_0$  ou  $\rho_{l+1}$ .** Nous détaillerons ici la construction du chemin  $\Gamma(\cdot, \varepsilon)$  dans le plan des  $1/z^r$  pour  $\rho_i = \rho_0$ , le cas  $\rho_i = \rho_{l+1}$  se traitant de façon tout à fait analogue.

$F_\varepsilon$  n'est pas étoilé par rapport à  $\rho_0$ , nous ne pouvons donc pas prendre comme chemins des segments  $[\rho_0, \omega]$ . La droite passant par les points d'affixe  $\frac{1}{b^r}$  et  $\frac{1}{a^r}$  divise  $F_\varepsilon$  en deux parties. On note  $F_\varepsilon^1$  la partie fermée contenant  $\rho_1$  et  $F_\varepsilon^2 = F_\varepsilon \setminus F_\varepsilon^1$ .

**Cas 2.1 : si  $\omega \in F_\varepsilon^1$  :**  $F_\varepsilon^1$  est étoilé par rapport à  $\rho_0$ . On choisit comme chemin le segment  $[\rho_0, \omega]$  et on a :

$$\arg(\rho_1 - \rho_0) \leq \arg(\omega - \rho_0) \leq \arg \left( \frac{1}{b^r} - \rho_0 \right) .$$

Donc, si pour tout  $\omega \in F_\varepsilon^1$ , on pose  $\varphi = \arg(\omega - \rho_0)$ , il vient

$$\Re(-\gamma_j e^{i\varphi}) \leq \max\{\Re(-\gamma_j e^{i \arg(\rho_1 - \rho_0)}), \Re(-\gamma_j e^{i \arg(\frac{1}{b^r} - \rho_0)})\} = -\mu_{1,j} < 0$$

car les arêtes de  $F_\varepsilon$  ne sont pas parallèles à la ligne de niveau  $\Re(\gamma_j \omega) = 0$ .

**Cas 2.2 :** si  $\omega \in F_\varepsilon^2$  : on choisit le chemin constitué des deux segments  $[\rho_0, \frac{1}{a^r}]$  et  $[\frac{1}{a^r}, \omega]$ . Si on note  $\varphi = \arg(\frac{1}{a^r} - \rho_0)$ , on a pour  $\omega \in [\rho_0, \frac{1}{a^r}]$ ,

$$\Re(-\gamma_j e^{i\varphi}) = -\mu_{2,j} < 0$$

et le segment  $[\rho_0, \frac{1}{a^r}]$  est du type étudié précédemment. De plus, on a

$$\arg\left(\frac{1}{a^r} - \frac{1}{b^r}\right) \leq \arg\left(\omega - \frac{1}{a^r}\right) \leq \arg\left(\frac{1}{c^r} - \frac{1}{a^r}\right)$$

donc si on note  $\varphi = \arg(\omega - \frac{1}{a^r})$ , il vient

$$\Re(-\gamma_j e^{i\varphi}) \leq \max\{\Re(-\gamma_j e^{i \arg(\frac{1}{a^r} - \frac{1}{b^r})}), \Re(-\gamma_j e^{i \arg(\frac{1}{c^r} - \frac{1}{a^r})})\} = -\mu_{3,j} < 0$$

car les arêtes de  $F_\varepsilon$  ne sont pas parallèles à la ligne de niveau  $\Re(\gamma_j \omega) = 0$ .

Dans tous les cas, on a construit des chemins vérifiant l'inégalité du lemme (4.3) pour certaines constantes  $C_j > 0$ . Pour finir la démonstration de ce lemme, il suffit de poser

$$C = \min_{j=1}^{p(n-p)} C_j > 0 \text{ (car il y a un nombre fini d'indices).}$$

La construction précédente achève la démonstration du lemme (4.3) et donc celle du théorème (4.1).  $\square$

**Remarque 4.2** (Non unicité) Il est naturel, comme dans le chapitre 1 ou le chapitre 3, de poser la question de l'unicité d'une solution sous la forme

$$Y(z, \varepsilon) = \check{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

à multiplication près (à droite) par une matrice diagonale ne dépendant que de  $\varepsilon$ . Dans le chapitre 3, cette unicité provient essentiellement de l'unicité d'une solution bornée de l'équation quadratique (4.4). Plus précisément, si on analyse la preuve de la proposition (3.1), il faut remarquer que l'on n'a plus ici  $\lim_{T \rightarrow a_j(\varepsilon)} R_j(T, \varepsilon) = +\infty$ .

Remarquons également que pour des valeurs différentes (par exemple de plus en plus grandes) de  $\delta > 0$ , on obtient bien des solutions différentes de (4.4) puisque celles-ci sont nulles en des points  $a_j(\varepsilon)$  différents.  $\triangle$

**Remarque 4.3** (matrices de connexion) Comme nous l'avons vu dans la remarque précédente, nous obtenons des solutions fondamentales différentes de la forme (4.14) pour différentes valeurs de  $\delta$ . Cela nous conduit à nous demander quelles sont les matrices de connexion existant entre de telles solutions. On peut d'ailleurs se poser la même question pour les solutions (sur des secteurs) déterminées dans le chapitre 3 ou pour les solutions (définies au voisinage des points singuliers) déterminées dans le chapitre 2.

Une autre question ouverte est celle des limites (éventuelles) des matrices de connexion associées à ces diverses solutions. En outre, cela peut-il permettre de retrouver le phénomène de Stokes apparaissant sur les solutions du système non perturbé (1.6)?  $\triangle$

### 4.3 Convergence uniforme des solutions

Les solutions construites précédemment ne sont pas définies sur un secteur de sommet l'origine mais sur  $S_\varepsilon = S \cap (B(0, \delta|\varepsilon|))^c$  où  $S$  est un « bon secteur ». Ainsi, on ne peut espérer obtenir un résultat de convergence uniforme sur un secteur de sommet 0 comme dans le théorème (3.3). Cependant, nous allons voir que si l'on considère les solutions définies respectivement dans les théorèmes (1.1) et (4.1), on a la convergence suivante

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|\check{H}(\cdot, \varepsilon) - \tilde{H}\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0$$

qui peut être considérée comme un certain type de convergence uniforme (le domaine sur lequel porte le sup varie avec  $\varepsilon$ ). On a même  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon = S$ .

Pour démontrer ce résultat, nous donnons tout d'abord une définition et un lemme, à l'instar de la partie (3.5).

**Définition 4.2** Soit  $S$  un « bon secteur » et  $\Omega$  le domaine associé à  $S$  défini dans la partie (4.1) (c.-à-d.  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V \text{ et } z \in S_\varepsilon\}$  et  $S_\varepsilon = S \cap (B(0, \delta|\varepsilon|))^c$ ).

On dit que  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{A} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifient les conditions conjuguées (COND5) du *splitting* si

1.  $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ vérifie sur } \Omega \text{ la condition (COND4) avec pour matrice diagonale associée } D \text{ et} \\ \tilde{A} \text{ vérifie sur } S \text{ la condition (COND0) avec pour matrice diagonale associée } D \end{array} \right.$

2.  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|C(\cdot, \varepsilon) - \tilde{C}\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0$ , en conservant les notations des définitions (1.3) et (4.1).

On dira alors que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND5).

On a déjà vu que les fonctions matricielles  $A$  et  $\tilde{A}$  définies dans les équations (4.1)-(4.2) mises sous les formes préparées (2.3)-(2.4) vérifient les conditions (COND5) du *splitting*.

On donne maintenant le

**Lemme 4.4 (splitting)** Si  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{A} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifient les conditions (COND5) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , alors, en conservant les notations des lemmes (1.1) et (4.1), les fonctions matricielles  $P : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\tilde{P} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  sont telles que

1.  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|P(\cdot, \varepsilon) - \tilde{P}\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0$ ,

2.  $B^{11}$  et  $\tilde{B}^{11}$  ainsi que  $B^{22}$  et  $\tilde{B}^{22}$  vérifient les conditions conjuguées (COND5) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

**Preuve du lemme (4.4) :** Les conditions (COND0) et (COND4) sont respectivement vérifiées par les matrices  $A$  et  $\tilde{A}$ , donc  $P$  et  $\tilde{P}$  sont bien définies. Montrons tout d'abord que l'on a la limite uniforme

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|P(\cdot, \varepsilon) - \tilde{P}\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0. \quad (4.19)$$

Pour cela on peut considérer les fonctions  $w$  et  $\tilde{w}$  à valeurs dans  $C^q$  ( $q = p(n-p)$ ) associées respectivement à  $P^{21}$  et  $\tilde{P}^{21}$  selon (1.12) et (3.12). Nous allons voir que l'on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|w(\cdot, \varepsilon) - \tilde{w}\|_{\infty}^{S_\varepsilon} = 0 \quad (4.20)$$

et en raisonnant de manière analogue pour  $P^{21}$  et  $\tilde{P}^{21}$ , on aura montré (4.19) au vu des relations (1.10) et (3.5).

On conserve ici les notations des lemmes (1.1) et (4.1). On note de plus  $w_0 = \tilde{w}$  et pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $w_\varepsilon = w(\cdot, \varepsilon)$  définie sur  $S_\varepsilon$ . On note également  $\mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}$  qui peut s'appliquer, par extension, à toute fonction holomorphe bornée sur  $S$ . Enfin, on a vu dans la partie (4.1) qu'il existe  $K \in ]0; 1[$  tel que pour tout  $\varepsilon \in V$ , on ait  $\|\mathcal{F}_\varepsilon\| \leq K$  donc  $I - \mathcal{F}_\varepsilon$  est inversible et  $\|(I - \mathcal{F}_\varepsilon)^{-1}\| \leq (1 - K)^{-1}$ . On a alors sur  $S_\varepsilon$

$$w_\varepsilon - w_0 = \mathcal{F}_\varepsilon w_\varepsilon - \mathcal{F}_0 w_0 = \mathcal{F}_\varepsilon (w_\varepsilon - w_0) - (\mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{F}_0)(w_0)$$

ou encore

$$(I - \mathcal{F}_\varepsilon)(w_\varepsilon - w_0) = (\mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{F}_0)(w_0)$$

et finalement

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_{\infty}^{S_\varepsilon} \leq \|(I - \mathcal{F}_\varepsilon)^{-1}\| \|(\mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{F}_0)(w_0)\|_{\infty}^{S_\varepsilon} \leq (1 - K)^{-1} \|(\mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{F}_0)(w_0)\|_{\infty}^{S_\varepsilon}. \quad (4.21)$$

Tout le problème se résume donc à montrer que si  $Z$  est une fonction de  $\mathcal{B}_0$ , on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|(\mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{F}_0)(Z)\|_{\infty}^{S_\varepsilon} = 0. \quad (4.22)$$

Pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$ , tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$  et tout  $Z \in \mathcal{B}_0$ , on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_\varepsilon Z - \mathcal{F}_0 Z)_j(z) &= \mathcal{F}_\varepsilon(Z)_j(z) - e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} \frac{e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} [\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt \\ &\quad + e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} \frac{e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} [\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt \\ &\quad - e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} \frac{e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} [\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]}{t^{r+1}} dt \\ &\quad + e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} \frac{e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} [\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]}{t^{r+1}} dt - F_0(Z)_j(z) \\ &= e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} \frac{e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} [(f_0 - \tilde{f}_0) + (B - \tilde{B})Z + f_2(\cdot, \cdot, Z) - \tilde{f}_2(\cdot, Z)]_j(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt \\ &\quad + e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} \frac{e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} [\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]}{t(t^r - \varepsilon^r)} \frac{\varepsilon^r}{t^r} dt \\ &\quad + e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} \frac{e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} [\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]}{t^{r+1}} dt \\ &\quad - e^{\gamma_j \tilde{m}(z)} \int_{\mathcal{L}(z)} \frac{e^{-\gamma_j \tilde{m}(t)} [\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]}{t^{r+1}} dt \end{aligned}$$

en regroupant les différentes intégrales considérées plus haut.

Dans la suite, on appellera respectivement  $I_j^1(z, \varepsilon)$ ,  $I_j^2(z, \varepsilon)$ ,  $I_j^3(z, \varepsilon)$  et  $I_j^4(z, \varepsilon)$  les intégrales précédentes prises dans l'ordre de leur apparition après le dernier signe =. Ainsi, on a pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$ , tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$  et tout  $Z \in \mathcal{B}_0$ :

$$(\mathcal{F}_\varepsilon Z - \mathcal{F}_0 Z)_j(z) = I_j^1(z, \varepsilon) + I_j^2(z, \varepsilon) + I_j^3(z, \varepsilon) - I_j^4(z, \varepsilon) .$$

Remarquons également que chaque intégrale considérée dans le calcul précédent a bien un sens en appliquant le lemme (4.2) et en observant que  $\frac{\varepsilon^r}{t^r}$  est borné sur  $\Omega$ .

**Déterminons tout d'abord les limites de  $I_j^1(z, \varepsilon)$  et  $I_j^2(z, \varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.**

D'après l'inégalité (4.16) du lemme (4.2), on a pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ :

$$|I_j^1(z, \varepsilon)| \leq C \sup_{t \in S_\varepsilon} \left| (f_0(t, \varepsilon) - \tilde{f}_0(t)) + (B(t, \varepsilon) - \tilde{B}(t))Z(t) + f_2(t, \varepsilon, Z(t)) - \tilde{f}_2(t, Z(t)) \right| .$$

En utilisant la condition (COND5)(2) vérifiée par  $C$  et  $\tilde{C}$ , les correspondances (1.12) et (3.12) et le fait que  $Z$  soit bornée, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|f_0(\cdot, \varepsilon) - \tilde{f}_0\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0 \quad , \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|B(\cdot, \varepsilon) - \tilde{B}\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0 \\ \text{et} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|f_2(\cdot, \varepsilon, Z) - \tilde{f}_2(\cdot, Z)\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0 . \end{aligned}$$

Finalement, on obtient de l'inégalité ci-dessus le résultat suivant :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \sup_{j=1}^{p(n-p)} \|I_j^1(\cdot, \varepsilon)\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0 . \quad (4.23)$$

D'autre part,  $\tilde{A}$  vérifie par hypothèse la condition (COND0) du *splitting* donc en utilisant les correspondances (1.12), on peut écrire qu'il existe  $\tilde{M}$  holomorphe sur  $S$  et bornée par  $M > 0$  telle que

$$\forall t \in S \supset S_\varepsilon, \tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t)) = t\tilde{M}(t) .$$

Alors, d'après le lemme (4.2), on a pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$

$$\begin{aligned} \forall (z, \varepsilon) \in \Omega, |I_j^2(z, \varepsilon)| &\leq C_0 \sup_{t \in S_\varepsilon} \left| \frac{\varepsilon^r}{t^r} \left( \tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t)) \right) \right| \\ &\leq C_0 M |\varepsilon| \sup_{t \in S_\varepsilon} \left| \frac{\varepsilon}{t} \right|^{r-1} \\ &\leq \frac{C_0 M}{\delta^{r-1}} |\varepsilon| \end{aligned} \quad (4.24)$$

car pour tout  $t \in S_\varepsilon$ , on a  $|t| \geq \delta|\varepsilon|$ . On déduit de l'inégalité ci-dessus le résultat suivant :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \sup_{j=1}^{p(n-p)} \|I_j^2(\cdot, \varepsilon)\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0 \quad (4.25)$$

Il reste donc à évaluer  $I_j^3$  et  $I_j^4$ . Pour cela, intéressons-nous au rapport que l'on peut établir entre les chemins  $\mathcal{L}_j(z)$  et  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$ . Nous avons vu dans la remarque 1.3 que la solution du point fixe définie dans le premier chapitre par  $\mathcal{F}_0$  reste la même si l'on prend des chemins constitués dans le plan des  $1/z^r$  d'une demi-droite puis de segments de la forme  $(\omega_0, \omega_1]$  avec  $\phi = \arg(\omega_1 - \omega_0)$  et  $\Re(\gamma_j e^{i\phi}) \geq \mu > 0$  ( $\mu$  fixé), c'est-à-dire **exactement la condition vérifiée par les chemins  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$ !**

Pour chaque  $\varepsilon \in V$ , nous allons choisir un chemin ayant la propriété précédente à la place de  $\mathcal{L}_j(z)$  utilisé dans le chapitre 1. Plus précisément, plaçons-nous dans le plan des  $1/z^r$ .

Si  $\mathcal{L}_j(z)$  est un chemin de  $\infty e^{i\varphi_j}$  à  $1/z^r$  avec  $\Re(\gamma_j e^{i\varphi_j}) < 0$  (comme défini dans la partie (1.2)) et  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$  un chemin de  $1/a_j^r(\varepsilon)$  à  $1/z^r$  (comme défini dans la partie (4.2)), on note  $\tilde{\mathcal{L}}_j(z, \varepsilon)$  le chemin de  $\infty e^{i\varphi_j}$  à  $1/z^r$  constitué de  $] \infty e^{i\varphi_j}, 1/a_j^r(\varepsilon) ]$  et  $] 1/a_j^r(\varepsilon), 1/z^r ]$  dans le plan des  $1/z^r$ . (voir figure (4.2)). Le chemin  $\tilde{\mathcal{L}}_j(z, \varepsilon)$  vérifie donc bien la propriété énoncée

FIG. 4.2: Représentation des chemins  $\mathcal{L}_j(z)$ ,  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$  et  $\tilde{\mathcal{L}}_j^\infty(z, \varepsilon)$

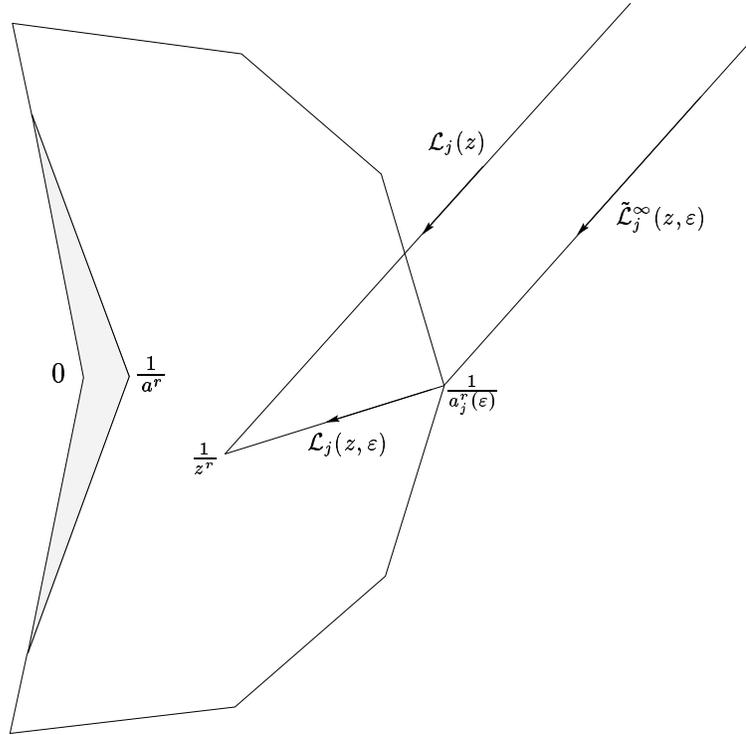


Figure réalisée dans le plan des  $1/z^r$

précédemment. On notera en outre  $\tilde{\mathcal{L}}_j(z, \varepsilon) = \tilde{\mathcal{L}}_j^\infty(z, \varepsilon) + \mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$ .

**Remarque 4.4** Nous pouvons remarquer que par un procédé classique, on pourrait montrer que pour tout  $W \in \mathcal{B}_0$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , on a :

$$e^{\gamma_j \tilde{m}(z)} \int_{\mathcal{L}_j(z)} e^{-\gamma_j \tilde{m}(t)} \frac{W_j}{t^{r+1}} dt = e^{\gamma_j \tilde{m}(z)} \int_{\tilde{\mathcal{L}}_j(z, \varepsilon)} e^{-\gamma_j \tilde{m}(t)} \frac{W_j}{t^{r+1}} dt . \quad (4.26)$$

Pour démontrer ce point, il suffit de faire la différence entre ces deux intégrales, d'utiliser l'analyticité des fonctions considérées sur un chemin fermé  $\mathcal{L}_f$  puis de montrer que le reste tend vers 0 lorsque l'on fait «tendre»  $\mathcal{L}_f$  vers l'origine et en utilisant  $\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t)) = O(t)$ . Ce procédé étant tout à fait classique en analyse complexe, nous n'irons pas plus loin dans la preuve de l'égalité précédente.  $\triangle$

En utilisant l'égalité (4.26), on a pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} I_j^3(z, \varepsilon) - I_j^4(z, \varepsilon) &= \\ &= \int_{\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)} \left( e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} - e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]_j}{t^{r+1}} dt \\ &\quad - \int_{\tilde{\mathcal{L}}_j^\infty(z, \varepsilon)} \left( e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]_j}{t^{r+1}} dt \\ &=: I_j^5(z, \varepsilon) - I_j^6(z, \varepsilon) . \end{aligned}$$

**Nous allons tout d'abord traiter le cas de la deuxième intégrale.** Remarquons que d'après la définition des  $\mathcal{L}_j(z)$ , on a  $\tilde{\mathcal{L}}_j^\infty(z, \varepsilon) = \mathcal{L}_j(a_j(\varepsilon))$  et que pour tout  $t \in \tilde{\mathcal{L}}_j(z, \varepsilon)$ , on a  $|t| \leq \delta|\varepsilon|$ . Ainsi, pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$ , tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$  et tout  $Z \in \mathcal{B}_0$ , il vient :

$$\begin{aligned} |I_j^6(z, \varepsilon)| &= \left| \int_{\mathcal{L}_j(a_j(\varepsilon))} \left( e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]_j}{t^{r+1}} dt \right| \\ &= e^{\tilde{R}_j(z) - \tilde{R}_j(a_j(\varepsilon))} \left| \int_{\mathcal{L}_j(a_j(\varepsilon))} \left( e^{\gamma_j(\tilde{m}(a_j(\varepsilon)) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[t\tilde{M}(t)]_j}{t^{r+1}} dt \right| \\ &\leq \delta|\varepsilon| \left| \int_{\mathcal{L}_j(a_j(\varepsilon))} \left( e^{\gamma_j(\tilde{m}(a_j(\varepsilon)) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{M}(t)]_j}{t^{r+1}} dt \right| \\ &\leq \delta C_0 M |\varepsilon| \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité du lemme (1.2) et le fait que  $\tilde{R}_j$  est décroissant de  $a_j(\varepsilon)$  à  $z$  sur  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$  comme nous l'avons vu dans la partie (4.2). On obtient de l'inégalité ci-dessus le résultat suivant :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \sup_{j=1}^{p(n-p)} \|I_j^6(\cdot, \varepsilon)\|_\infty^{S_\varepsilon} = 0 . \quad (4.27)$$

**Il reste donc à évaluer la limite de l'intégrale  $I_j^5(\cdot, \varepsilon)$ .** Pour ce faire, nous allons utiliser un procédé classique de découpage. On considère  $R > 0$  (assez petit), le cercle  $\mathcal{C}(0, R)$  et on supposera dans la suite que  $\varepsilon$  est tel que  $\delta|\varepsilon| < R$ . On distingue alors deux cas :

**Si  $z \in S_\varepsilon$  est tel que  $|z| \leq R$ ,** on va évaluer directement  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \sup_{j=1}^{p(n-p)} \|I_j^5(\cdot, \varepsilon)\|_\infty^{S_\varepsilon}$  en remarquant que pour tout  $t \in \mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$ ,  $|t| \leq R$ .

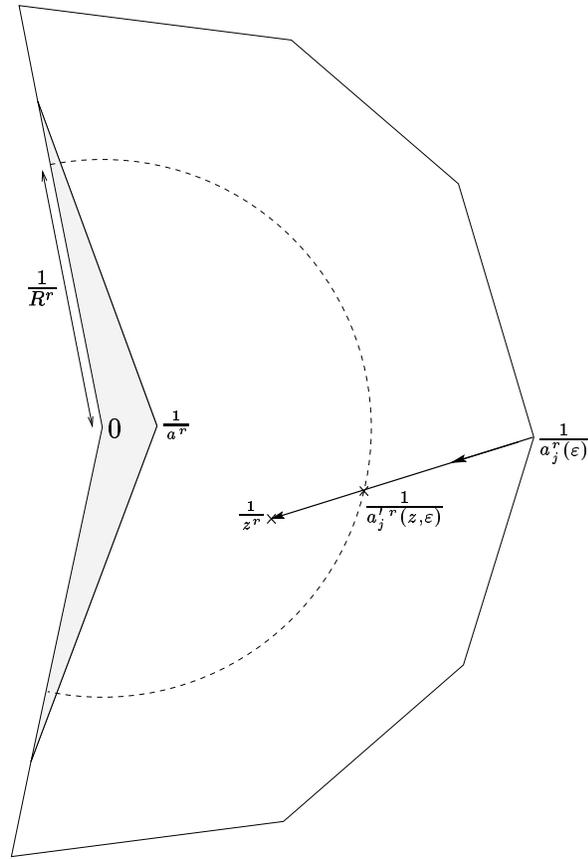
**Si  $z \in S_\varepsilon$  est tel que  $|z| > R$**  (voir figure (4.3)), on écrit :

$$\begin{aligned} I_j^5(z, \varepsilon) &= \\ &= \int_{a_j'(\varepsilon)}^{a_j'(z, \varepsilon)} \left( e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} - e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]_j}{t^{r+1}} dt \\ &\quad + \int_{a_j'(z, \varepsilon)}^z \left( e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} - e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]_j}{t^{r+1}} dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

où  $a_j'(z, \varepsilon)$  est l'intersection de  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$  avec  $\mathcal{C}$ , autrement dit,  $1/a_j'^r(z, \varepsilon)$  est l'intersection de  $[1/a_j'^r(\varepsilon), 1/z^r]$  avec  $\mathcal{C}(0, R^{-r})$ . Ainsi, pour tout  $t$  pris sur le chemin de la première intégrale, on a  $|t| \leq R$  et on va évaluer séparément les limites des deux intégrales lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

On pose  $I_j^7(z, \varepsilon, x) = \int_{a_j(\varepsilon)}^x \left( e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} - e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]_j}{t^{r+1}} dt$ .

Nous allons montrer que si  $x = a_j'(z, \varepsilon)$  et  $|z| > R$  ou si  $x = z$  et  $|z| \leq R$ ,  $|I_j^7(z, \varepsilon, x)|$  peut être rendu aussi petit que l'on veut (indépendamment de  $z$  et  $\varepsilon$ ) en choisissant  $R$  assez petit.

FIG. 4.3: Représentation des chemins  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$  et des points  $a_j^r(z, \varepsilon)$  associésFigure réalisée dans le plan des  $1/z^r$ 

Si  $|z| \leq R$ , on a pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$ :

$$\begin{aligned} |I_j^r(z, \varepsilon, z)| &\leq \left| \int_{\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)} e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} \frac{[t\tilde{M}(t)]_j}{t^{r+1}} dt \right| + \left| \int_{\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)} e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \frac{[t\tilde{M}(t)]_j}{t^{r+1}} dt \right| \\ &\leq R \left( \left| \int_{\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)} e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} \frac{[\tilde{M}(t)]_j}{t(t^r - \varepsilon^r)} \frac{t^r - \varepsilon^r}{t^r} dt \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)} e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \frac{[\tilde{M}(t)]_j}{t^{r+1}} dt \right| \right). \end{aligned}$$

Or, pour  $t \in \mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$ ,  $|\frac{t^r - \varepsilon^r}{t^r}| \leq 1 + \frac{\varepsilon^r}{t^r} \leq 1 + \frac{1}{\delta^r}$  et, de plus, les chemins  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$  vérifient la condition de la remarque 1.3, et la seconde intégrale est donc majorée par  $C_0 \tilde{M}$ . Il vient alors :

$$|I_j^r(z, \varepsilon, z)| \leq R \left( \left(1 + \frac{1}{\delta^r}\right) C + C_0 \right) \tilde{M} =: R\nu \quad (4.29)$$

Si  $|z| > R$ , on a pour tout  $j \in \{1, \dots, p(n-p)\}$  :

$$\begin{aligned} |I_j^7(z, \varepsilon, a'_j(\varepsilon))| &= \left| \int_{a_j(\varepsilon)}^{a'_j(\varepsilon)} e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} \frac{[t\tilde{M}(t)]_j}{t^{r+1}} dt \right| + \left| \int_{a_j(\varepsilon)}^{a'_j(\varepsilon)} e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \frac{[t\tilde{M}(t)]_j}{t^{r+1}} dt \right| \\ &\leq R \left( e^{R_j(z, \varepsilon) - R_j(a'_j(\varepsilon), \varepsilon)} \left(1 + \frac{1}{\delta^r}\right) C + e^{\tilde{R}_j(z) - \tilde{R}_j(a'_j(\varepsilon))} C_0 \right) \tilde{M} \\ &\leq R \left( \left(1 + \frac{1}{\delta^r}\right) C + C_0 \right) \tilde{M} =: R\nu. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ici nous avons utilisé le même type de majoration que ci-dessus en remarquant de plus que  $R_j(\cdot, \varepsilon)$  et  $\tilde{R}_j$  sont décroissantes de  $a_j(\varepsilon)$  à  $a'_j(\varepsilon)$  respectivement le long des chemins  $\mathcal{L}_j(z, \varepsilon)$  et  $\mathcal{L}_j(z)$ .

Il reste maintenant à évaluer le second terme de l'intégrale  $I_j^5(z, \varepsilon)$  lorsque  $z \in S_\varepsilon$  avec  $|z| > R$ . On pose dans ce cas

$$I_j^8(z, \varepsilon) = \int_{a'_j(z, \varepsilon)}^z \left( e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))} - e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \right) \frac{[\tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))]_j}{t^{r+1}} dt$$

et

$$u(z, t, \varepsilon) = \frac{e^{\gamma_j(m(z, \varepsilon) - m(t, \varepsilon))}}{t^{r+1}} g(t)$$

avec  $z \in P_R = D^c(0, R) \cap S_\varepsilon$  ( $P_R$  ne dépend plus de  $\varepsilon$  si celui-ci est de module assez petit),  $t \in P_R$ ,  $\varepsilon \in D(0, \eta)$  (voir (3.19)) et  $g$  holomorphe bornée sur  $P_R$ . Ainsi,  $u$  est holomorphe sur  $P_R \times P_R \times D(0, \eta)$ . On a alors pour tout  $z \in P_R$  et tout  $\varepsilon \in D(0, \eta)$  :

$$m(z, \varepsilon) = \frac{1}{r\varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{z^r} \right) \underset{\frac{\varepsilon}{z} \sim 0}{=} -\frac{1}{rz^r} + o\left(\frac{\varepsilon^r}{z^r}\right) \underset{\varepsilon \sim 0}{=} -\frac{1}{rz^r} + o(\varepsilon^r)$$

car  $|\frac{1}{z^r}| \leq \frac{1}{R^r}$ . On en déduit alors que

1.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(z, \varepsilon) = \tilde{m}(z)$  uniformément par rapport à  $z \in P_R$ ,
2.  $m$  est bornée sur  $P_R \times D(0, \eta)$ ,

d'où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} = e^{\gamma_j \tilde{m}(z)}$  uniformément par rapport à  $z \in P_R$ .

D'autre part, comme  $t \mapsto \frac{1}{t^{r+1}}$  et  $g$  sont bornées sur  $P_R$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(z, t, \varepsilon) = \frac{e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))}}{t^{r+1}} g(t) \quad \text{uniformément par rapport à } (z, t) \in P_R^2.$$

On pose maintenant  $g(t) = \tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t))$ . La fonction  $g$  est bornée sur  $S$  donc sur  $P_R$  et on en déduit que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \sup_{j=1}^{p(n-p)} |I_j^8(z, \varepsilon)| = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } z \in P_R. \quad (4.31)$$

Finalement, en regroupant les résultats (4.29), (4.30) (4.31), on obtient la limite

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \sup_{j=1}^{p(n-p)} \|I_j^5(\cdot, \varepsilon)\|_{\infty}^{S_\varepsilon} = 0 \quad (4.32)$$

et en considérant les résultats (4.23)-(4.25)-(4.27) et (4.32), on a démontré la limite (4.22) c'est-à-dire la limite (4.19) :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|P(\cdot, \varepsilon) - \tilde{P}\|_{\infty}^{S_{\varepsilon}} = 0 .$$

Pour finir la démonstration du lemme (4.4), il nous faut encore vérifier que  $\tilde{B}^{11}$  et  $B^{11}$  ainsi que  $B^{22}$  vérifient les conditions conjuguées (COND5) du *splitting*. On a déjà vu que  $\tilde{B}^{11}$  et  $\tilde{B}^{22}$ , ainsi que  $B^{11}$  et  $B^{22}$ , vérifient respectivement les conditions (COND0) et (COND4). Il reste donc à vérifier la condition (COND5)(2). Prenons l'exemple de  $\tilde{B}^{11}$  et  $B^{11}$  (l'autre cas est parfaitement symétrique). On a, vu (3.6) et pour tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} B^{11}(z, \varepsilon) &= A^{11}(z, \varepsilon) + A^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{11}(z, \varepsilon) + z(z^r - \varepsilon^r)C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) (C^{11}(z, \varepsilon) + C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon)) \end{aligned}$$

et pour tout  $z \in S$  :

$$\tilde{B}^{11}(z) = D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) \left( \tilde{C}^{11}(z) + \tilde{C}^{12}(z)\tilde{P}^{21}(z) \right) .$$

On pose  $E = C^{11} + C^{12}P^{21}$  et  $\tilde{E} = \tilde{C}^{11} + \tilde{C}^{12}\tilde{P}^{21}$ . Comme  $\tilde{A}$  et  $A$  vérifient respectivement les conditions (COND0) et (COND4) du *splitting*,  $E$  et  $\tilde{E}$  sont bornées et au vu de la condition (COND5)(2) et de la limite (4.19), on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|E(\cdot, \varepsilon) - \tilde{E}\|_{\infty}^{S_{\varepsilon}} = 0$$

ce qui termine la démonstration du lemme (4.4). □

Comme dans les chapitres 2 et 3, on peut appliquer un nombre fini de fois le lemme précédent pour obtenir des équations étudiées dans la partie (1.1). On obtient finalement le résultat suivant à partir du théorème (4.1).

**Théorème 4.2** *Considérons les systèmes (3.1) et (3.2) mis sous les formes préparées (2.3)-(2.4), où  $C$  est holomorphe sur un voisinage de l'origine. Soit  $S$  un « bon secteur » et  $\Omega$  le domaine défini dans la partie (4.2) à partir de  $S$ .*

*Les systèmes (3.1) et (3.2) possèdent respectivement des solutions fondamentales de la forme*

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(z) &= \tilde{H}(z) e^{\int^z \frac{D_0 + D_1 t + \dots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt} \\ \text{et } Y(z, \varepsilon) &= \check{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \end{aligned}$$

où  $\check{H} \in \text{Hol}_b(\Omega, M_n(\mathbb{C}))$  et  $\tilde{H} \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))$ , inversibles, vérifient

$$\lim_{\substack{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0) \\ (z, \varepsilon) \in \Omega}} \check{H}(z, \varepsilon) = I , \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S}} \tilde{H}(z) = I$$

et où  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes en 0 définies par (2.7). On a alors

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \|\check{H}(\cdot, \varepsilon) - \tilde{H}\|_{\infty}^{S_{\varepsilon}} = 0 .$$

## 4.4 Généralisation à d'autres types de confluence

Jusqu'ici nous avons étudié le type de confluence de GARNIER  $z(z^r - \varepsilon^r) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} z^{r+1}$ . Maintenant, nous allons généraliser le résultat de ce chapitre à une classe plus large de confluences contenant le cas que nous avons déjà étudié.

Nous considérons le système différentiel

$$\Pi(z, \varepsilon)Y'(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \quad (4.33)$$

où  $A$  est holomorphe sur un voisinage de  $(0, 0)$  et  $\Pi(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{r+1} a_k(\varepsilon)z^k$ . Ici, on suppose que  $a_k \in \text{Hol}_b(V, \mathbb{C})$ , où  $V$  est un secteur borné d'angle d'ouverture assez petit. L'exigence  $\Pi(z, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} z^{r+1}$  implique les conditions suivantes :

1.  $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, a_k(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$
2.  $a_{r+1}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$ .

Sans restreindre la généralité et quitte à diviser (4.33) par  $a_{r+1}(\varepsilon)$ , on peut supposer que l'on a  $a_{r+1} \equiv 1$ .

Dans le début de ce chapitre, nous avons obtenu une solution fondamentale de l'équation (4.2) définie pour tout  $\varepsilon \in V$  sur  $S \cap (D(0, \delta|\varepsilon|))^c$  pour un « bon secteur »  $S$  et pour  $\delta > 0$  suffisamment grand. Cela a été possible dans la mesure (et c'est le point essentiel de la démonstration !) où toutes les racines de  $z(z^r - \varepsilon^r) = 0$  étaient de module inférieur à  $|\varepsilon|$ .

Nous allons donc considérer des polynômes  $\Pi$  dont les racines sont toutes d'un module de l'ordre de  $|\varepsilon|$ . Énonçons alors une proposition caractérisant ces polynômes.

**Proposition 4.1** *Soit  $\Pi(z, \varepsilon) = z^{r+1} + \sum_{k=0}^r a_k(\varepsilon)z^k$ .*

*Les propositions suivantes sont équivalentes*

1.  $\exists C > 0, \forall z \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon \in V, P(z, \varepsilon) = 0 \implies |z| \leq C|\varepsilon|$
2.  $\exists M > 0, \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \forall \varepsilon \in V, \left| \frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{r+1-k}} \right| \leq M$ .

Avant de démontrer cette proposition, énonçons le

**Lemme 4.5** *Soit  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$  avec  $a_n \neq 0$ . Si  $z$  est une racine de  $P$ , on a*

$$|z| \leq 1 + \frac{m}{|a_n|}$$

avec  $m = \max(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|)$ .

**Preuve du lemme (4.5) :** Si  $z = 0$  est racine de  $P$ , c'est trivial. Supposons maintenant que  $z \neq 0$  est racine de  $P$  et que  $|z| > 1 + \frac{m}{|a_n|}$ . On a alors

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1| |z| + \dots + |a_{n-1}| |z|^{n-1} \\ &\leq m(1 + |z| + \dots + |z|^{n-1}) \\ &\leq m \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}. \end{aligned}$$

En utilisant la minoration de  $|z|$ , il vient alors

$$|a_n z^n| \leq m \frac{|z|^n}{|z| - 1} < |a_n| |z|^n .$$

Ceci entraîne une contradiction, d'où le résultat du lemme.  $\square$

**Preuve de la proposition (4.1) :** On pose  $a_{r+1} = 1$ . Montrons d'abord la condition suffisante. Si  $z$  est racine de  $P(\cdot, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in V$ , on a

$$\sum_{k=0}^{r+1} \varepsilon^k a_k(\varepsilon) \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^k = 0 ,$$

d'où en divisant par  $\varepsilon^{r+1}$ ,

$$\frac{1}{\varepsilon^{r+1}} \sum_{k=0}^{r+1} \varepsilon^k a_k(\varepsilon) \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^k = \sum_{k=0}^{r+1} \frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{r+1-k}} \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^k = 0 .$$

Autrement dit,  $\frac{z}{\varepsilon}$  est racine du polynôme  $\sum_{k=0}^{r+1} \frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{r+1-k}} X^k$ . D'après le lemme (4.5), on peut alors écrire :

$$\left| \frac{z}{\varepsilon} \right| \leq 1 + \frac{m(\varepsilon)}{|a_{r+1}|} \leq 1 + M =: C \quad \text{avec} \quad m(\varepsilon) = \max \left( \left| \frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{r+1-k}} \right|, k = 0, \dots, r \right) ,$$

d'où le résultat. Montrons maintenant la condition nécessaire.

On note  $z_1, \dots, z_{r+1}$  les racines de  $\Pi(\cdot, \varepsilon)$ . En utilisant les notations usuelles des relations coefficients-racines, on a pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$  :

$$a_k(\varepsilon) = (-1)^k \sigma_{r+1-k}(z_1, \dots, z_{r+1})$$

on en déduit immédiatement l'existence de  $M > 0$  tel que

$$k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \left| \frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{r+1-k}} \right| \leq M ,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Dans la suite, on supposera que le polynôme  $\Pi$  vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $\Pi(\cdot, \varepsilon)$  n'a que des racines simples
2.  $\exists M > 0, \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \forall \varepsilon \in V, \left| \frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{r+1-k}} \right| \leq M$  .

Dans le but d'obtenir un résultat semblable à celui du théorème (4.2) pour l'équation (4.33), étudions maintenant l'équation scalaire

$$\Pi(z, \varepsilon) y'(z, \varepsilon) = a(z, \varepsilon) y(z, \varepsilon) \quad \text{avec} \quad a(z, \varepsilon) = d(z) + \Pi(z, \varepsilon) c(z, \varepsilon) , \tag{4.34}$$

où  $c$  est holomorphe sur  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V, z \in S \cap (D(0, \delta|\varepsilon|))^c\}$  (pour un certain  $\delta$  assez grand) et  $d$  est holomorphe au voisinage de 0.

On note  $z_1, \dots, z_{r+1}$  les racines (distinctes) de  $P(\cdot, \varepsilon)$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, r+1 \rrbracket$ , le résidu de cette équation en  $z_i$  est

$$\rho_i(\varepsilon) = \frac{d(z_i)}{\Pi'(z_i, \varepsilon)} .$$

Nous avons vu que l'équation (4.34) possède une solution fondamentale de la forme

$$y(z, \varepsilon) = K(\varepsilon) e^{\int_0^z c(t, \varepsilon) dt} e^{\int^z \frac{d(t)}{\Pi(t, \varepsilon)} dt} .$$

On reprend ici l'idée de GARNIER (voir chapitre 1) d'écrire cette solution sous la forme

$$y(z, \varepsilon) = K(\varepsilon) e^{\int_0^z c(t, \varepsilon) dt} e^{\int_0^z k(t, \varepsilon) dt} e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{\Pi(t, \varepsilon)} dt}$$

où  $k$  est holomorphe sur un voisinage de 0 et où la dernière exponentielle « contient » la confluence vers une singularité irrégulière. On pose  $P(z, \varepsilon) = d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)z + \dots + d_r(\varepsilon)z^r$ . Ces conditions s'écrivent comme dans le chapitre 1 :

$$\forall i \in \llbracket 1, r+1 \rrbracket, P(z_i, \varepsilon) = d(z_i) .$$

Autrement dit, il existe  $q$  holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$  telle que l'on ait pour tout  $\varepsilon \in V$

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z, \varepsilon) - d(z) = \Pi(z, \varepsilon)q(z, \varepsilon) ,$$

c'est-à-dire

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z, \varepsilon) = d(z) + \Delta(z, \varepsilon)q(z, \varepsilon) + z^{r+1}q(z, \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \Delta(z, \cdot) = \Pi(z, \cdot) - z^{r+1} .$$

On note  $q(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\varepsilon)z^k$  et  $d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ . En identifiant terme à terme les coefficients de  $z^i$  dans l'égalité précédente, on obtient alors :

$$\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, d_i(\varepsilon) = d_i + \sum_{k=0}^i a_k(\varepsilon)q_{i-k}(\varepsilon) .$$

Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $d_i(\varepsilon)$  est holomorphe bornée au voisinage de 0 et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_i(\varepsilon) = d_i$  vu les conditions remplies par  $\Pi$ .

Nous n'allons pas reprendre ici les énoncés des définitions, lemmes de *splitting* et théorèmes des autres parties de ce chapitre. Soit est laissé au lecteur d'adapter ceux-ci à notre propos. Nous ne rentrerons pas davantage dans les détails des démonstrations dont les structures sont tout à fait identiques à celles des sections (4.1)-(4.3). Par contre, nous allons reprendre point par point les éléments qui changent avec le nouveau type de *splitting* que nous étudions.

Commençons par une nouvelle définition de  $m$  et  $R_j$ . On pose

$$m(z, \varepsilon) = \int^z \frac{dt}{\Pi(t, \varepsilon)} \quad \text{et} \quad R_j(z, \varepsilon) = \Re e(\gamma_j m(z, \varepsilon)) .$$

Avec ces notations, la démonstration du lemme (4.2) reste inchangée pour peu que l'on montre l'inégalité du lemme (4.3), soit l'existence de  $\Gamma_z : [0; 1] \rightarrow \overline{S}_\varepsilon$  tel que

$$\forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon, \left| \frac{d}{ds}(m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -C \frac{d}{ds}(R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) .$$

Nous allons voir que l'on peut conserver les chemins définis dans la partie (4.2) et obtenir cette inégalité. Rappelons que l'on a d'après la partie (1.2.2) (et c'est dû à la remarque (1.3)) :

$$\forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon, \left| \frac{d}{ds}(\tilde{m}(\Gamma_z(s, \varepsilon))) \right| \leq -C_0 \frac{d}{ds}(\tilde{R}_j(\Gamma_z(s, \varepsilon))) .$$

Pour alléger les notations, on pose  $\Gamma = \Gamma_z$  et on évalue le rapport

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(z, \varepsilon), \varepsilon) \right| / \left| \frac{d}{ds} \tilde{m}(\Gamma(z, \varepsilon)) \right| = \left| \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Pi(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)} \right| / \left| \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right| \\ &= \left| \frac{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}}{\Pi(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)} \right| \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \left| \frac{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}}{\Gamma^{r+1}(s, \varepsilon) + a_r(\varepsilon)\Gamma^r(s, \varepsilon) + \dots + a_0(\varepsilon)} \right| \\ &= \left| 1 + \frac{a_r(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)} + \dots + \frac{a_0(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right|^{-1} . \end{aligned}$$

Rappelons alors que l'on a pour tout  $s \in ]0; 1[$ , tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$  :

$$|\Gamma(s, \varepsilon)| \geq \delta |\varepsilon| \quad \text{et} \quad |a_i(\varepsilon)| \leq M |\varepsilon|^{r+1-i} .$$

On a déduit

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{a_r(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)} + \dots + \frac{a_0(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right| &\geq 1 - \frac{M}{\delta} - \dots - \frac{M}{\delta^{r+1}} = 1 - \frac{M}{\delta} \frac{1 - \delta^{-r-2}}{1 - \frac{1}{\delta}} \\ &\geq 1 - \frac{M}{\delta - 1} =: \kappa_1(\delta) > 0 \end{aligned}$$

dès que  $\delta > 1 + M$ , ce que l'on peut toujours supposer. De plus, il existe  $\delta$  assez grand pour avoir  $\kappa_1(\delta) \geq \frac{1}{2}$  soit

$$\mathfrak{R}_1 \leq 2 . \tag{4.35}$$

Rappelons que l'on a  $\Gamma(s, \varepsilon)^{-r} = w_0 + s(w - w_0)$  et évaluons de même le rapport

$$\mathfrak{R}_2 = \left( \frac{d}{ds} \tilde{R}_j(\Gamma(s, \varepsilon)) \right) / \left( \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right) = \Re e \left( \gamma_j \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right) / \Re e \left( \gamma_j \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Pi(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon)} \right) ,$$

soit

$$\mathfrak{R}_2 = \Re e \left( \gamma_j \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right) / \Re e \left( \gamma_j \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \left( 1 + \frac{a_r(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)} + \dots + \frac{a_0(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right)^{-1} \right) .$$

On pose maintenant  $\phi = \arg(w - w_0)$  de sorte que  $w - w_0 = |w - w_0|e^{i\phi}$ . Comme on a  $r\Gamma'(s, \varepsilon) = -(w - w_0)\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_2 &= \Re e \left( \gamma_j \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right) / \Re e \left( \gamma_j \frac{\Gamma'(s, \varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \left( 1 + \frac{a_r(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)} + \dots + \frac{a_0(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right)^{-1} \right) \\ &= \Re e \left( \gamma_j e^{i\phi} \right) / \Re e \left( \gamma_j e^{i\phi} \left( 1 + \frac{a_r(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)} + \dots + \frac{a_0(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right)^{-1} \right) . \end{aligned}$$

Si on pose  $g(x, \theta) = \Re e(\gamma_j e^{i\theta} x)$ , on a  $g(1, \theta) \geq \mu > 0$  pour tout  $\theta$  définissant une direction d'intégration dans le plan des  $1/z^r$  (on a construit les chemins  $L_j(z, \varepsilon)$  à cet effet). De plus, on a la majoration

$$\left| \frac{a_r(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)} + \cdots + \frac{a_0(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right| \leq \frac{M}{\delta} + \cdots + \frac{M}{\delta^{r+1}} \leq \frac{M}{\delta - 1} =: \kappa_2(\delta)$$

pour  $\delta > 1$ . Ainsi, en fixant  $\delta$  suffisamment grand, on peut rendre  $\kappa_2(\delta)$  arbitrairement petit, donc il existe  $\delta > 1$  tel que pour tout  $\phi$  correspondant à un chemin d'intégration, on ait

$$\Re e \left( \gamma_j e^{i\phi} \left( 1 + \frac{a_r(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)} + \cdots + \frac{a_0(\varepsilon)}{\Gamma(s, \varepsilon)^{r+1}} \right)^{-1} \right) \geq \frac{\mu}{2}$$

d'où  $\Re \leq 2$ . Enfin, considérant cette dernière inégalité, l'inégalité (4.35) et le résultat du lemme (1.3), il vient ce qu'il fallait démontrer :

$$\forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon, \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -4C_0 \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) .$$

Il reste maintenant à reprendre la démonstration de la convergence uniforme. Là encore, pas de changement dans la structure de la démonstration, il nous faut seulement vérifier deux points clés. Tout d'abord, montrons qu'avec la nouvelle définition de  $m$  :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} m(z, \varepsilon) = \tilde{m}(z) \quad \text{uniformément par rapport à } z \in P_R = (D(0, R))^c \cap S_\varepsilon . \quad (4.36)$$

On a

$$\begin{aligned} m(z, \varepsilon) - \tilde{m}(z) &= \int^z \frac{1}{\Pi(u, \varepsilon)} - \frac{1}{u^{r+1}} du \\ &= \int^z \frac{u^{r+1} - (u^{r+1} + a_r(\varepsilon)u^r + \cdots + a_0(\varepsilon))}{u^{r+1}\Pi(u, \varepsilon)} du \\ &= - \int^z \frac{a_r(\varepsilon)u^r + \cdots + a_0(\varepsilon)}{u^{r+1}\Pi(u, \varepsilon)} du \end{aligned}$$

Comme  $S_\varepsilon$  est borné,  $R_0 > 0$  tel que  $R_0 \geq |u| \geq R$  et donc  $\kappa_3 > 0$  tel que

$$|a_r(\varepsilon)u^r + \cdots + a_1(\varepsilon)u + a_0(\varepsilon)| \leq \kappa_3|\varepsilon|$$

$$\text{et} \quad \left| \frac{a_r(\varepsilon)u^r + \cdots + a_1(\varepsilon)u + a_0(\varepsilon)}{u^{r+1}} \right| \leq \kappa_3|\varepsilon| .$$

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on a de plus  $\kappa_3|\varepsilon| \leq R^{r+1}/2$  d'où

$$\begin{aligned} |\Pi(u, \varepsilon)| = |u^{r+1} + a_r(\varepsilon)u^r + \cdots + a_1(\varepsilon)u + a_0(\varepsilon)| &\geq |u^{r+1}| - |a_r(\varepsilon)u^r + \cdots + a_1(\varepsilon)u + a_0(\varepsilon)| \\ &\geq R^{r+1} - \kappa_3|\varepsilon| \geq R^{r+1}/2 . \end{aligned}$$

On en déduit donc l'inégalité

$$\left| \frac{a_r(\varepsilon)u^r + \cdots + a_0(\varepsilon)}{u^{r+1}\Pi(u, \varepsilon)} \right| \leq \frac{2\kappa_3}{R^{2r+2}}|\varepsilon|$$

Enfin, comme  $S_\varepsilon$  est borné, on a montré l'existence de  $\kappa_4 > 0$  tel que pour tout  $z \in P_R$  et tout  $\varepsilon \in V$  de module assez petit :

$$|m(z, \varepsilon) - \tilde{m}(z)| \leq \kappa_4|\varepsilon| .$$

soit (4.36).

Nous devons encore montrer une inégalité du type (4.24). Avec le type de confluence considéré, elle s'écrit

$$\begin{aligned}
 |I_j^2(z, \varepsilon)| &\leq C_0 \sup_{t \in S_\varepsilon} \left| \frac{a_r(\varepsilon)t^r + \dots + a_0(\varepsilon)}{t^{r+1}} \left( \tilde{f}_0(t) + \tilde{B}(t)Z(t) + \tilde{f}_2(t, Z(t)) \right) \right| \\
 &\leq C_0 M_0 \sup_{t \in S_\varepsilon} \left| \frac{a_r(\varepsilon)t^r + \dots + a_0(\varepsilon)}{t^r} \right| \\
 &\leq C_0 M_0 \delta \kappa_2(\delta) |\varepsilon| .
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ceci termine cette partie et montre que le résultat des théorèmes (4.1) et (4.2) restent vrais pour la confluence plus générale décrite ci-avant.  $\square$

## Chapitre 5

# Solution semi-formelle en $\varepsilon$ et caractère Gevrey

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié le phénomène de confluence des singularités du système (4.1) en la singularité irrégulière du système (4.2) sur certains domaines bien déterminés. Notre propos était alors d'obtenir des solutions holomorphes en  $z$  puis un résultat de convergence uniforme lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Dans ce chapitre, nous allons considérer l'équation (4.2) comme une équation différentielle de paramètre  $\varepsilon$ , et étudier le comportement de ses solutions vis-à-vis de  $\varepsilon$ . Nous tenterons alors d'obtenir des solutions semi-formelles de (4.2) (c'est à dire formelles en  $\varepsilon$  et à coefficients holomorphes en  $z$ ) puis d'en étudier le caractère Gevrey.

L'idée principale sera alors de considérer la série formelle obtenue à partir d'une série formelle donnée en divisant le  $i^e$  terme par  $\Gamma(\frac{i}{r} + 1)$  puis de vérifier qu'elle est solution d'une certaine équation implicite à coefficients holomorphes. Nous en déduisons alors facilement le caractère Gevrey  $1/r$  de la série de départ.

La difficulté essentielle proviendra de l'apparition dans toutes les équations considérées d'un terme de la forme  $zP'(z)\varepsilon^r$ . Il nous faudra alors obtenir une estimation de  $zP'(z)$  à partir de celle de  $P$ , c'est pourquoi nous serons amené à considérer un certain type de norme sur des secteurs (autre que la norme infinie) pour répondre à ce problème.

Dans la suite, nous considérons toujours les systèmes différentiels linéaires

$$z^{r+1}Y' = \tilde{A}(z)Y \quad (5.1)$$

$$\text{et } z(z^r - \varepsilon^r)Y' = A(z, \varepsilon)Y \quad (5.2)$$

mis sous les formes préparées (2.3)-(2.4). Dans un premier temps, nous obtiendrons une solution semi-formelle particulière en utilisant une technique de *splitting*.

Ensuite, dans le paragraphe 5.2, nous démontrerons le caractère Gevrey  $1/r$  de la solution précédente. Pour ce faire, nous introduirons dans le paragraphe 5.2.1, les normes de Nagumo modifiées pour des secteurs et en donnerons quelques propriétés. Puis, nous conclurons au résultat en montrant qu'une série «majorant» la série solution vérifie une équation implicite à coefficients holomorphes.

Enfin, nous montrerons dans le paragraphe 5.3 que la solution définie dans le chapitre 3 possède la série semi-formelle précédente comme développement asymptotique Gevrey d'ordre  $\frac{1}{r}$  sur de bons secteurs.

## 5.1 Existence d'une solution semi-formelle particulière

Dans cette partie, nous allons montrer l'existence d'une solution de (5.2) de la forme

$$Y(z, \varepsilon) = \overline{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t^{r+1}} dt} \quad (5.3)$$

où  $D_0(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont définies par (2.7) et  $\overline{H}$  est une série semi-formelle en  $\varepsilon$  déterminée de manière unique (à multiplication près à droite par une série formelle diagonale de terme constant  $I_n$ ) si on impose  $\lim_{z \rightarrow 0} \overline{H}(z) = I_n$ . Tout d'abord, nous obtenons l'existence d'une solution s'écrivant sous cette forme par une construction particulière, puis nous montrerons l'unicité de cette écriture.

### 5.1.1 Construction particulière d'une solution semi-formelle

Dans la suite, si  $S$  est un « bon secteur », on notera  $\text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  l'ensemble des séries formelles en  $\varepsilon$  dont les coefficients sont des fonctions matricielles holomorphes bornées sur  $S$ .

Comme dans les chapitres précédents, nous allons appliquer une technique de *splitting* à notre système. Énonçons tout d'abord la

**Définition 5.1** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S$  un « bon secteur ». On dit que  $A \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  vérifie la condition (COND6) du *splitting* si l'on peut écrire :*

$$\forall z \in S, \quad A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$$

$$\text{où } C \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$$

*et  $D$  est une fonction diagonale holomorphe dans un voisinage de 0 telle que  $D_0 = D(0)$  ait toutes ses valeurs propres distinctes.*

*On dira alors que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND6).*

**Remarque 5.1** La définition précédente sous-entend que le secteur  $S$  est de rayon assez petit (plus petit que le disque de convergence de  $D$ ), ce que nous supposons dans la suite de la démonstration.  $\triangle$

Remarquons que  $A$  mise sous la forme préparée (2.4) vérifie la condition (COND6) du *splitting*. En effet, par hypothèse, on a  $A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$  où  $C$ , holomorphe au voisinage de  $(0, 0)$ , est développable en série par rapport à  $\varepsilon$  et à coefficients holomorphes bornés sur un voisinage de 0, donc sur  $S$  de rayon assez petit.

Comme dans le chapitre précédent, nous énonçons à présent un lemme de *splitting*.

**Lemme 5.1 (*splitting*)** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < n$ .*

*Si  $A \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  vérifie la condition (COND6) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , alors il existe  $P \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  telle que*

$$\forall z \in S, \quad P_0(z) \text{ soit inversible, } \lim_{z \rightarrow 0} P_0(z) = I,$$

*et qui transforme, par le changement d'inconnue  $Y = PW$ , l'équation*

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) &= A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \\ \text{en l'équation } z(z^r - \varepsilon^r)W'(z, \varepsilon) &= B(z, \varepsilon)W(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

où  $B \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}, \quad B^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad B^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}).$$

De plus, si l'on écrit  $D = \text{diag}(D^1, D^2)$ ,  $D^1 \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $D^2 \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ , alors  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND6) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

**Preuve du lemme (5.1) :** On note dans la suite

$$A(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z) \varepsilon^k$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k$  est holomorphe bornée (mais la borne dépend de  $k$ ) sur  $S$ . Nous allons alors obtenir  $P \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  comme composée de deux transformations du système (5.2).

**Première transformation.** Tout d'abord, considérons l'équation

$$z^{r+1}Y' = A_0(z)Y. \quad (5.4)$$

Comme  $A$  vérifie les conditions (COND6) du *splitting*, on a  $A_0(z) = D(z) + z^{r+1}C_0(z)$  avec  $C_0 \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))$ . Autrement dit, cette équation a déjà été traitée dans la partie (1.2). On considère alors  $\tilde{P}$  qui transforme, par le changement d'inconnue  $Y = \tilde{P}W$ , le système (5.4) en le système

$$z^{r+1}W' = B_0(z)W \quad (5.5)$$

avec

$$B_0(z) = D(z) + z^{r+1} \begin{pmatrix} \check{C}^{11}(z) & 0 \\ 0 & \check{C}^{22}(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} I & z^{r+1}\check{P}^{12}(z) \\ z^{r+1}\check{P}^{21}(z) & I \end{pmatrix},$$

où  $\check{C}^{11}$ ,  $\check{C}^{22}$ ,  $\check{P}^{21}$  et  $\check{P}^{12}$  sont holomorphes bornées sur  $S$ . En supposant le rayon de  $S$  assez petit,  $\tilde{P}$  est donc inversible sur  $S$  et on a la relation

$$\forall z \in S, \quad \tilde{P}^{-1}(z)A_0(z)\tilde{P}(z) = B_0(z) + z^{r+1}P'(z). \quad (5.6)$$

On effectue alors le changement d'inconnue  $Y = \check{Q}(z, \varepsilon)Z$  dans l'équation (5.2), pour

$$\check{Q}(z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} I & z(z^r - \varepsilon^r)\check{P}^{12}(z) \\ z(z^r - \varepsilon^r)\check{P}^{21}(z) & I \end{pmatrix} =: I + z(z^r - \varepsilon^r)\check{U}(z). \quad (5.7)$$

$\check{Q}$  est donc holomorphe sur  $\Omega = S \times B(0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , et  $\check{Q}(\cdot, 0) = \tilde{P}$ . Autrement dit,  $\check{Q}$  est inversible sur  $\Omega$  si  $\delta$  est assez petit. Le système (5.2) est transformé en le système

$$z(z^r - \varepsilon^r)Z' = E(z, \varepsilon)Z \quad (5.8)$$

avec

$$E(z, \varepsilon) = \check{Q}^{-1}(z, \varepsilon)A(z, \varepsilon)\check{Q}^{-1}(z, \varepsilon) - z(z^r - \varepsilon^r)\check{Q}^{-1}(z, \varepsilon)\check{Q}'(z, \varepsilon).$$

Montrons que  $E$  s'écrit  $E(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)K(z, \varepsilon)$  où  $K \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  et  $E_0$  est diagonale par blocs.

On a  $\check{Q} = I - \check{V}$  avec

$$\check{V}(z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -z(z^r - \varepsilon^r)\check{P}^{12}(z) \\ -z(z^r - \varepsilon^r)\check{P}^{21}(z) & 0 \end{pmatrix}$$

On se place dans l'espace de Banach  $\mathcal{B}$  des fonctions holomorphes bornées sur  $\Omega$  muni de la norme infinie. Si le rayon de  $S$  et  $\delta$  sont assez petits,  $\|\check{V}\|_\infty < 1$  d'où  $\check{Q}^{-1} = I + \check{V} + \check{V}^2 + \dots =: I + z(z^r - \varepsilon^r)T(z, \varepsilon)$  avec  $T \in \mathcal{B}$ . On alors pour tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} E(z, \varepsilon) &= (I + z(z^r - \varepsilon^r)T(z, \varepsilon))(D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon))(I + z(z^r - \varepsilon^r)\check{U}(z)) \\ &\quad - z(z^r - \varepsilon^r)\check{Q}^{-1}\check{Q}'(z, \varepsilon) =: D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)K(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K(z, \varepsilon) &= T(z, \varepsilon)(D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)(U(z) + C(z, \varepsilon) + C(z, \varepsilon)U(z))) \\ &\quad + D(z)U(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)U(z) - z(z^r - \varepsilon^r)\check{Q}^{-1}\check{Q}'(z, \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dans cette expression, les fonctions considérées sont holomorphes bornées sur  $S \times B(0, \delta)$  sauf peut-être  $\check{Q}'$ . Cependant, la formule de Cauchy montre que  $z\check{Q}'$  est bornée sur tout sous-secteur strict de  $S$ , mais pas forcément sur  $S$ .

Dans ce cas, il suffit de considérer au départ pour (5.2) un « bon secteur » contenant strictement  $S$  et en appliquant un nombre fini de fois le lemme de *splitting*, diminuer un peu son angle d'ouverture pour obtenir finalement une série semi-formelle dans  $\text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$ .

Ainsi, on a montré que  $K \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  et de plus, on a :

$$\begin{aligned} E(z, 0) &= \check{Q}^{-1}(z, 0)A(z, 0)\check{Q}(z, 0) - z^{r+1}\check{Q}^{-1}(z, 0)\check{Q}'(z, 0) \\ &= \tilde{P}^{-1}(z)A_0(z)\tilde{P}(z) - z^{r+1}\tilde{P}^{-1}(z)\tilde{P}'(z) \\ &= B_0(z) \end{aligned}$$

D'après (5.5),  $E_0$  est donc diagonale-bloc et nous écrirons dans la suite

$$E(z, \varepsilon) = E_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} E_i(z)\varepsilon^i \quad \text{avec} \quad E_i \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C})) \quad \text{et} \quad E_0 = B_0$$

**Remarque 5.2** Le but de cette première transformation est d'obtenir  $E_0$  sous la forme diagonale-bloc précédente, ce qui n'était pas le cas pour  $A_0$ . Cette étape n'est absolument pas nécessaire pour la détermination de  $P \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  réalisant le lemme de *splitting*, mais nous verrons par la suite qu'elle sera utile pour démontrer le caractère Gevrey de  $P$ .  $\triangle$

**Seconde transformation.** On considère à présent l'équation

$$z(z^r - \varepsilon^r)Z' = E(z, \varepsilon)Z = (D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)K(z, \varepsilon))Z \quad (5.10)$$

sur laquelle on va appliquer la méthode habituelle de *splitting*. On pose  $Z = QW$  avec

$$Q = I + \begin{pmatrix} 0 & Q^{12} \\ Q^{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

pour obtenir le nouveau système  $z(z^r - \varepsilon^r)W' = B(z, \varepsilon)W$  où  $B$  est diagonale par blocs comme dans l'énoncé. Alors, l'équation de transformation

$$z(z^r - \varepsilon^r)Q' = E(z, \varepsilon)P - PB(z, \varepsilon) \quad (5.12)$$

nous conduit à quatre équations du type (3.6)-(3.9) pour  $Q^{12}$  et  $Q^{21}$ , et finalement aux équations quadratiques

$$z(z^r - \varepsilon^r)(Q^{21})' = E^{21} + E^{22}Q^{21} - Q^{21}E^{11} - Q^{21}E^{12}Q^{21} \quad (5.13)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)(Q^{12})' = E^{12} + E^{11}Q^{12} - Q^{12}E^{22} - Q^{12}E^{21}Q^{12} . \quad (5.14)$$

Nous allons traiter le cas de l'équation (5.13), le cas de l'autre équation étant tout à fait semblable. Écrivons tout d'abord (5.13) sous la forme suivante :

$$z^{r+1}Q^{21} - (E_0^{22}(z)Q^{21} - Q^{21}E_0^{11}(z)) = G(z, \varepsilon)$$

avec

$$G(z, \varepsilon) = E^{21} + z\varepsilon^r(Q^{21})' + (E^{22} - E_0^{22}(z))Q^{21} - Q^{21}(E^{11} - E_0^{11}(z)) - Q^{21}E^{12}Q^{21} . \quad (5.15)$$

Soit  $\overline{\mathcal{B}}_0$  l'espace de Banach des fonctions holomorphes bornées sur  $S$  à valeurs dans  $M_{n-p,p}(\mathbb{C})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On définit sur  $\overline{\mathcal{B}}_0$  les deux opérateurs  $\Lambda$  et  $\overline{\Lambda}$  par

$$\begin{aligned} \Lambda(R)(z) &= z^{r+1}R'(z) - (D_0^2R(z) - R(z)D_0^1) \\ \text{et} \quad \overline{\Lambda}(R)(z) &= z^{r+1}R'(z) - (E_0^{22}(z)R(z) - R(z)E_0^{11}(z)) \end{aligned}$$

pour tout  $R \in \overline{\mathcal{B}}_0$ . Dans la suite, on pourra appliquer un tel opérateur à un élément de  $\text{Hol}_b(S, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  en décidant par convention qu'il s'applique à chaque coefficient de celui-ci. Ainsi, on peut écrire :

$$\overline{\Lambda}(Q^{21})(z, \varepsilon) = G(z, \varepsilon) . \quad (5.16)$$

De plus, nous avons vu, dans la partie (1.2), que pour tout  $H \in \overline{\mathcal{B}}_0 = \text{Hol}_b(S, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))$ , il existe  $P = \mathcal{L}(H) \in \text{Hol}_b(S, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))$  tel que  $\Lambda(P) = H$ . Ici,  $\mathcal{L}$  correspond à  $\mathcal{T}_0$  définie sur  $\mathcal{B}_0 = \text{Hol}_b(S, \mathbb{C}^{p(n-1)})$  par (1.14) et la norme  $\|\mathcal{L}\|$  est donc majorée par  $C_0$ .

Nous allons montrer qu'il en va de même pour  $\overline{\Lambda}$ . Soit  $H \in \overline{\mathcal{B}}_0$ ; montrons qu'il existe  $P \in \overline{\mathcal{B}}_0$  tel que  $\overline{\Lambda}(P) = H$ . Pour tout  $R \in \overline{\mathcal{B}}_0$ , on a

$$\overline{\Lambda}(R) = \Lambda(R) - \Delta(R) \quad \text{avec} \quad \Delta(R) = (E_0^{22} - D_0^2)R - R(E_0^{11} - D_0^1) .$$

L'équation  $\overline{\Lambda}(P) = H$  équivaut donc à  $\Lambda(P) - \Delta(P) = H$ . On considère maintenant l'équation de point fixe associée à ce problème

$$P = \mathcal{L}(H) + \mathcal{L}\Delta(P) =: \mathcal{F}_H(P) . \quad (5.17)$$

En appliquant  $\Lambda$  à cette équation, il est clair qu'une solution de (5.17) est solution du problème précédent. Comme  $E_0 = B_0$ , on a  $E_0^{22} - D_0^2 = O(z) = E_0^{11} - D_0^1$  et on peut donc supposer, quitte à diminuer le rayon de  $S$ , que l'on a

$$\forall R \in \overline{\mathcal{B}}_0, \|\Delta(R)\| \leq \frac{1}{2\|\mathcal{L}\| + 1}\|R\| \quad \text{et ainsi} \quad \|\mathcal{L}\Delta\| \leq \frac{1}{2}$$

si bien que l'on peut écrire :

$$\forall (R_1, R_2) \in \overline{\mathcal{B}}_0, \|\mathcal{F}_H(R_1) - \mathcal{F}_H(R_2)\| \leq \frac{1}{2} \|R_1 - R_2\| .$$

Ainsi,  $\mathcal{F}_H$  est une contraction sur l'espace de Banach  $\overline{\mathcal{B}}_0$  et admet un unique point fixe  $P$ , solution de (5.17) et vérifiant donc  $\overline{\Lambda}(P) = H$ . Dans la suite, nous noterons  $P = \overline{\mathcal{L}}(H) \in \overline{\mathcal{B}}_0$ .

Revenons à l'équation (5.16). On pose  $G(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i(z) \varepsilon^i$  et  $Q^{21}(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i^{21}(z) \varepsilon^i$ .

On a

$$\begin{aligned} E^{21}(z, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} E_i^{21}(z) \varepsilon^i \\ E^{12}(z, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^{\infty} E_i^{12}(z) \varepsilon^i \end{aligned}$$

car  $E_0$  est diagonale par blocs. En identifiant les coefficients de  $\varepsilon^0$  dans (5.16), on a  $\overline{\Lambda}(Q_0^{21}) = 0$ . On pose alors pour la suite  $Q_0^{21} = 0$ .

Pour  $i \geq 1$ , on a

$$G_i(z) = E_i^{21}(z) + z \delta_{i \geq r} (Q^{21})'_{i-r}(z) + \sum_{s=1}^{i-1} (E_s^{22} Q_{i-s}^{21} - Q_{i-s}^{21} E_s^{11}) - \sum_{\substack{s+t+u=i \\ 0 \leq s, t, u \leq i-2}} Q_s^{21} E_t^{12} Q_u^{21}(z) .$$

Ainsi,  $G_i$  est déterminé par  $E$  et  $Q_1^{21}, Q_2^{21}, \dots, Q_{i-1}^{21}$ .

On procède par récurrence.  $Q_0^{21}, Q_1^{21}, \dots, Q_{i-1}^{21}$  étant connus, on pose  $Q_i^{21} = \overline{\mathcal{L}}(G_i)$  et on définit de cette manière  $Q^{21}$  vérifiant (5.16). Remarquons que tous les coefficients  $Q_i^{21}$  de  $Q^{21}$  sont définis sur le même secteur  $S$  donc on a bien  $Q^{21} \in \text{Hol}_b(S, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$ .

Reste maintenant à voir que  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient les conditions (COND6) du *splitting* avec pour matrice associée respectivement  $D^1$  et  $D^2$ . Prenons par exemple  $B^{11}$ . D'après (3.6), on a :

$$\begin{aligned} B^{11}(z, \varepsilon) &= E^{11}(z, \varepsilon) + E^{12}(z, \varepsilon) Q^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) (K^{11}(z, \varepsilon) + K^{12}(z, \varepsilon) Q^{21}(z, \varepsilon)) . \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} &K^{11} \in \text{Hol}_b(S, M_p(\mathbb{C}))[[\varepsilon]], \\ &K^{12} \in \text{Hol}_b(S, M_{p,n-p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]] \\ \text{et } &Q^{21} \in \text{Hol}_b(S, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]] \quad , \end{aligned}$$

on a alors  $K^{11} + K^{12} Q^{21} \in \text{Hol}_b(S, M_p(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$ . La transformation  $Y = PW$  avec  $P = \check{Q}Q$  répond donc au problème, puisqu'on a également  $\check{Q}_0 Q_0 = I_n$ . Cela démontre le lemme (5.1).  $\square$

En appliquant un nombre fini de fois le lemme précédent, on obtient des équations scalaires de la forme

$$z(z^r - \varepsilon^r) y' = (d(z) + z(z^r - \varepsilon^r) c(z, \varepsilon)) y \quad (5.18)$$

avec  $c \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$ . Ces équations ont été étudiées dans la partie (1.1), et on sait qu'elles admettent des solutions de la forme

$$y(z, \varepsilon) = \overline{h}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

avec  $\overline{h} \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$  et  $\lim_{z \rightarrow 0} \overline{h}_0(z) = 1$ . En rassemblant tous les résultats précédents, on peut alors en déduire le

**Théorème 5.1** *Considérons le système (5.2) mis sous la forme préparée (2.4) où  $C$  est holomorphe sur un voisinage de l'origine et  $S$  un « bon secteur » de rayon assez petit. Le système (5.2) possède une unique solution fondamentale (à multiplication près à droite par une série formelle diagonale de terme constant  $I_n$ ) de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = \overline{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (5.19)$$

où  $\overline{H} \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  est tel que

1.  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S}} \overline{H}_0(z) = I_n$
2.  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes en 0, définies par (2.7).

### 5.1.2 Unicité de la solution obtenue : preuve du théorème (5.1)

Avant de passer à la preuve de l'unicité de l'écriture (3.28) dans le théorème (5.1), énonçons un lemme que nous utiliserons dans la suite.

**Lemme 5.2** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $S$  un « bon secteur »,  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions holomorphes bornées de  $S$  dans  $\mathbb{C}^q$  et  $H : S \rightarrow M_q(\mathbb{C})$  une fonction matricielle holomorphe telle que*

$$H = H_0 + B \quad \text{où} \quad B(z) = O(z), \quad z \rightarrow 0, \quad z \in S, \quad \text{et } H_0 \text{ est diagonale inversible.}$$

Alors pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , l'équation différentielle

$$z^{r+1} \omega'(z) = g_i(z) + H(z) \omega(z) \quad (5.20)$$

admet une unique solution bornée sur  $S$  (quitte à diminuer le rayon de  $S$ ).

**Preuve du lemme (5.2) :** On note  $H_0 = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ . Si  $y$  vérifie (5.20), on a pour tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et pour tout  $t \in S$

$$t^{r+1} y_j'(t) - y_j \omega_j(t) = (g_i(t) + B(t) y(t))_j,$$

soit

$$\left( e^{\frac{\gamma_j}{r t^r}} y_j(t) \right)' = e^{\frac{\gamma_j}{r t^r}} \left( \frac{g_i(t) + B(t) y(t)}{t^{r+1}} \right)_j$$

et, en intégrant l'égalité ci-dessus entre 0 et  $z$  le long de  $L_j(z)$ , comme dans la proposition (1.2), il vient pour tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  :

$$e^{\frac{\gamma_j}{r z^r}} y_j(z) = \int_{L_j(z)} e^{\frac{\gamma_j}{r t^r}} \left( \frac{g_i(t) + B(t) y(t)}{t^{r+1}} \right)_j dt$$

soit

$$y = \mathcal{F}(y) = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}_i(y) \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_i(y) := g_i + B y.$$

Or, pour tout  $w_1, w_2 \in \mathcal{B}_0 = \text{Hol}_b(S, \mathbb{C}^q)$ , on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(w_1) - \mathcal{F}(w_2)\|_\infty &\leq C_0 \|\mathcal{R}_i(w_1) - \mathcal{R}_i(w_2)\|_\infty \\ &\leq C_0 \|B(w_1 - w_2)\|_\infty \leq C_0 \| \|B\| \|w_1 - w_2\|_\infty \end{aligned}$$

et  $B(z) = O(z)$  donc, quitte à diminuer le rayon de  $S$ , on peut supposer que  $C_0 \| \|B\| \| < 1$  et  $\mathcal{F}$  est ainsi une contraction sur  $\mathcal{B}_0$ . Comme  $y \in \mathcal{B}_0$ ,  $y$  est l'unique point fixe de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{B}_0$  espace de Banach. Cela démontre l'unicité d'une solution de (5.20) bornée sur  $S$ . Réciproquement, le point fixe de  $\mathcal{F}$  est solution bornée de (5.20), ce qui termine la démonstration du lemme.  $\square$

**Fin de la preuve du théorème (5.1).** On reprend le principe de la démonstration du théorème (3.1). Soit  $Y$  une solution de (3.2) de la forme

$$\bar{Y}(z, \varepsilon) = \bar{H}(z, \varepsilon) e^{\int z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1 \varepsilon t + \dots + D_r(\varepsilon) t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $\bar{H} \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  vérifie  $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{H}_0(z) = I_n$  (on a déjà vu qu'une telle solution existait). Il s'agit de montrer l'unicité (à une multiplication près par une matrice diagonale ne dépendant que de  $\varepsilon$ ) d'un tel  $H$ . Comme dans la preuve du théorème (3.1), on procède par récurrence sur  $n$ , la dimension du système.

Soit  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Si on écrit

$$H = \begin{pmatrix} H^{11} & H^{12} \\ H^{21} & H^{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} I_p & H^{12}(H^{22})^{-1} \\ H^{21}(H^{11})^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

avec  $H^{11} \in M_p(\mathbb{C})$ , on montre que  $P^{12}$  et  $P^{21}$  vérifient respectivement les équations quadratiques

$$z(z^r - \varepsilon^r)Q' = A^{12} + A^{11}Q - QA^{22} - QA^{21}Q \quad (5.21)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)Q' = A^{21} + A^{22}Q - QA^{11} - QA^{12}Q, \quad (5.22)$$

puis tout revient à montrer que chacune de ces équations admet une unique solution dans  $\text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$ , afin d'utiliser l'hypothèse de récurrence (voir p.83) sur des systèmes différentiels plus petits obtenus par *splitting*. C'est ce que nous allons faire pour l'équation (5.22) (par exemple).

On note

$$A(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(z) \varepsilon^i (= D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)) \quad \text{et} \quad Q(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(z) \varepsilon^i.$$

L'équation (5.22) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r) \sum_{i=0}^{\infty} Q'_i(z) \varepsilon^i &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{21}(z) \varepsilon^i \\ &+ \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{22}(z) \varepsilon^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(z) \varepsilon^i \right) - \left( \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(z) \varepsilon^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{11}(z) \varepsilon^i \right) \\ &- \left( \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(z) \varepsilon^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{12}(z) \varepsilon^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(z) \varepsilon^i \right). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de  $\varepsilon^i$  dans cette égalité, on obtient :

**Pour  $i = 0$  :**

$$z^{r+1}Q'_0(z) = A_0^{21}(z) + A_0^{22}(z)Q_0(z) - Q_0(z)A_0^{11}(z) - A_0^{12}(z)Q_0(z)A_0^{12}(z)$$

avec  $A^{21}(z) = O(z)$ ,  $A^{22}(z) = O(z)$ ,  $A^{11}(z) = D_0^1 + O(z)$  et  $A^{12}(z) = D_0^2 + O(z)$ . Il s'agit d'une équation quadratique du type (1.15) (quitte à transformer cette équation matricielle en une équation vectorielle). D'après la proposition (1.2), elle admet une unique solution bornée sur  $S$  et  $P_0^{21}$  est donc déterminé de manière unique.

Pour  $i \geq 1$  :

$$z^{r+1}Q'_i(z) - \delta_{i \geq r} z Q_{i-r}^{21} = A_i^{21}(z) + \sum_{s=0}^i (A_s^{22}(z)Q_{i-s}(z) - Q_{i-s}(z)A_s^{11}(z)) \\ + \sum_{r+s+t=i} Q_r(z)A_s^{12}(z)Q_t(z)$$

avec  $\delta_{i \geq r} = 1$  si  $i \geq r$  et 0 sinon. On peut encore écrire cette dernière égalité sous la forme

$$z^{r+1}Q'_i(z) = G_i(z) + H(z, Q_i(z)) \quad (5.23)$$

où

$$G_i(z) = A_i^{21}(z) + \sum_{s=1}^i (A_s^{22}(z)Q_{i-s}(z) - Q_{i-s}(z)A_s^{11}(z)) + \sum_{\substack{r+s+t=i \\ (r,s,t) \neq (i,0,0) \\ (r,s,t) \neq (0,0,i)}} Q_r(z)A_s^{12}(z)Q_t(z) \\ + \delta_{i \geq r} z Q_{i-r}^{21}(z)$$

et

$$H(z, Q_i(z)) = A_0^{22}(z)Q_i(z) - Q_i(z)A_0^{11}(z) + Q_i(z)A_0^{12}(z)Q_0(z) + Q_0(z)A_0^{12}(z)Q_i(z) .$$

Notons que  $G_i$  ne dépend plus que de  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{i-1}$ . On peut alors transformer l'équation matricielle (5.23) en une équation vectorielle de la forme (5.20) :

$$z^{r+1}w'(z) = g_i(z) + H(z)w(z)$$

en établissant les correspondances

$$Q(z) \longleftrightarrow w(z), \quad H(z, Q_i(z)) \longleftrightarrow H(z)w(z) \quad \text{et} \quad G_i(z) \longleftrightarrow g_i(z) .$$

De plus, comme  $A_0^{11}(z) = D_0^1 + O(z)$  et  $A_0^{22}(z) = D_0^2 + O(z)$ , on peut écrire  $H(z) = H_0 + O(z)$  où  $H_0$  est diagonale inversible (les valeurs propres de  $D_0$  sont supposées distinctes). D'après le lemme (5.2), il existe donc une unique solution bornée  $S$  de (5.23). Les coefficients  $Q_i$  ( $i \geq 1$ ) de  $Q$  sont alors déterminés de manière unique par récurrence.

Cela démontre qu'il existe une unique solution  $Q \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  de (5.22) et (il en est de même de l'équation (5.21)) cela termine la démonstration du théorème (5.1).  $\square$

## 5.2 Caractère Gevrey des solutions semi-formelles

Dans cette partie, nous allons montrer que la série semi-formelle en  $\varepsilon$  définie dans le théorème précédent est Gevrey d'ordre  $1/r$  uniformément en  $z \in S$ . Pour cela, nous introduirons tout d'abord, comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, les normes de Nagumo modifiées pour des secteurs et nous donnerons quelques propriétés qui leur sont relatives, puis nous prouverons le caractère Gevrey de  $\overline{H}$ .

### 5.2.1 Normes de Nagumo modifiées et séries majorantes

Dans cette partie, nous considérerons toujours un « bon secteur »  $S$  et  $\sigma > 0$ . Commençons par donner quelques définitions. Tout d'abord, considérons  $p : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\forall x \in S, p(x) = \frac{\text{dist}(x, \text{bord } S)}{|x|}$$

**Remarque 5.3** Si  $S$  est un « bon secteur » construit sur  $S(-\alpha, \alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) et  $x \in S$  est proche de l'origine, on voit facilement que l'on peut écrire  $p(x) = \sin(\alpha - |\arg x|)$   $\triangle$

On pose alors  $S_\sigma = p^{-1}([\sigma, +\infty[)$  (non vide pour  $\sigma$  assez petit, voir figure 5.1) et on définit également  $\tilde{p} : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \in S \setminus S_\sigma \\ p(\sigma) =: \sigma & \text{sinon} \end{cases}$$

**Notation :** On note  $F_b(S, \mathbb{C})$  l'ensemble des applications bornées de  $S$  dans  $\mathbb{C}$ .

Si  $f \in F_b(S, \mathbb{C})$ , on pose pour tout  $i \in \mathbb{N}$  (normes de Nagumo modifiées):

$$\|f\|_i = \sup_{x \in S} (\tilde{p}^i(x) |f(x)|) .$$

FIG. 5.1: Représentation des secteurs  $S$  et  $S_\sigma$

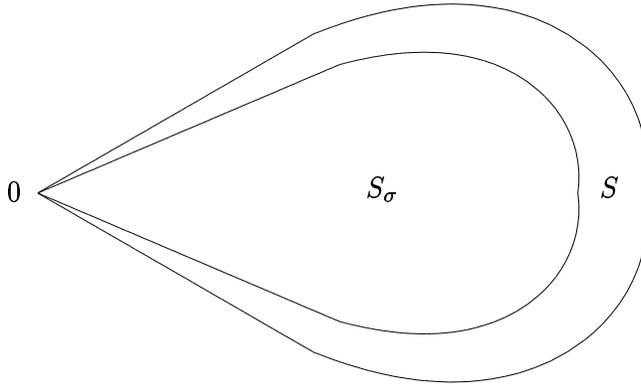


Figure réalisée pour  $r = 3$  et  $\sigma = 1/4$

Remarquons que  $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_\infty$ . De plus, il est clair que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\|\cdot\|_i$  est une norme sur  $F_b(S, \mathbb{C})$ . On définit l'opérateur  $D$  sur  $\text{Hol}_b(S, \mathbb{C})$  par

$$\forall f \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C}), \forall z \in S, Df(z) = zf'(z)$$

et on considère l'opérateur  $\mathcal{T}_0$  défini dans la partie (1.2) par

$$\forall j \in \llbracket 1; p(n-p) \rrbracket, \mathcal{T}_{0,j}(f)(z) = e^{\gamma_j \tilde{m}(z)} \int_{L_j(z)} e^{-\gamma_j \tilde{m}(t)} \frac{f(t)}{t^{r+1}} dt$$

avec toutes les notations qui lui sont associées. Donnons à présent quelques propriétés de  $\|\cdot\|_i$ .

**Propriétés 5.1** 0.  $\forall f \in F_b(S, \mathbb{C}), \forall x \in S, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x)| \leq \|f\|_n (\tilde{p}(x))^{-n}$

1.  $\forall f \in F_b(S, \mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}, \|f\|_n \leq \|f\|_\infty$
2.  $\forall f \in F_b(S, \mathbb{C}), \forall (q, r) \in \mathbb{N}^2, q \leq r \implies \|f\|_r \leq \|f\|_q$
3.  $\forall (f, g) \in F_b^2(S, \mathbb{C}), \forall (q, r) \in \mathbb{N}^2, \|fg\|_{q+r} \leq \|f\|_q \|g\|_r$
4.  $\forall f \in F_b(S, \mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}, \|f\|_\infty^{S_\sigma} \leq \sigma^{-n} \|f\|_n$
5.  $\forall f \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}, \|Df\|_{n+1} \leq (n+1)e^2 \|f\|_n$
6.  $\exists (\sigma, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall f \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket, \|\mathcal{T}_j(f)\|_n \leq K \|f\|_n$ .

**Preuve du lemme (5.1):** On démontre les propriétés précédentes dans l'ordre de l'énoncé.

**Preuve de (5.1)(0):** Elle est immédiate et découle de la définition de  $\tilde{p}$ .

**Preuve de (5.1)(1):** Remarquons simplement que pour tout  $x \in S, |x| = \text{dist}(x, 0)$  donc  $|x| \leq \text{dist}(x, \text{bord } S)$  d'où :  $\forall x \in S, p(x) \leq 1$  et donc

$$\forall x \in S, \tilde{p}(x) \leq 1 \tag{5.24}$$

On en déduit immédiatement que l'on a

$$\forall f \in F_b(S, \mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}, \|f\|_n \leq \|f\|_\infty .$$

□

**Preuve de (5.1)(2):** On déduit immédiatement de (5.24) que

$$\forall x \in S, \forall (q, r) \in \mathbb{N}^2, q \leq r \implies (\tilde{p}(x))^r \leq (\tilde{p}(x))^q$$

d'où

$$\forall f \in F_b(S, \mathbb{C}), \forall (q, r) \in \mathbb{N}^2, q \leq r \implies \|f\|_r \leq \|f\|_q .$$

□

**Preuve de (5.1)(3):** Pour tout  $x \in S$ , tout  $(f, g) \in F_b(S, \mathbb{C})$  et tout  $(q, r) \in \mathbb{N}$ , on a

$$(\tilde{p}(x))^{q+r} |f(x)g(x)| = ((\tilde{p}(x))^q |f(x)|) ((\tilde{p}(x))^r |g(x)|)$$

d'où, en passant à la borne supérieure sur l'ensemble des  $x \in S$  :

$$\forall (f, g) \in F_b^2(S, \mathbb{C}), \forall (q, r) \in \mathbb{N}^2, \|fg\|_{q+r} \leq \|f\|_q \|g\|_r .$$

□

**Preuve de (5.1)(4):** Par définition de  $\tilde{p}$ , on a

$$\forall f \in F_b(S, \mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S_\sigma, (\tilde{p}(x))^n |f(x)| = \sigma^n |f(x)|$$

d'où

$$\|f\|_n^{S_\sigma} = \sup_{x \in S_\sigma} (\tilde{p}(x))^n |f(x)| = \sigma^n \|f\|_\infty^{S_\sigma} \leq \sup_{x \in S} (\tilde{p}(x))^n |f(x)| = \|f\|_n ,$$

ce qui démontre la propriété (4).

□

**Preuve de (5.1)(5) :** Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant :

**Lemme 5.3** Soit  $y \in S_\sigma$  et  $X \in \text{bord } S_\sigma$  tel que  $|X| = |y|$ . On a alors :

$$\text{dist}(X, \text{bord } S) \leq \text{dist}(y, \text{bord } S) .$$

**Preuve du lemme (5.3) :** Remarquons tout d'abord que si  $y \in S_\sigma$ , tout élément  $X$  de  $\mathcal{C}(0, |y|) \cap p^{-1}(\{\sigma\})$  vérifie  $X \in \text{bord } S$  et  $|X| = |y|$ . Comme  $X \in \text{bord } S$ , on a

$$\frac{\text{dist}(X, \text{bord } S)}{|X|} = p(X) = \sigma \leq p(y) = \frac{\text{dist}(y, \text{bord } S)}{|y|}$$

par définition de  $S_\sigma$ . Comme  $|X| = |y|$ , on en déduit  $\text{dist}(X, \text{bord } S) \leq \text{dist}(y, \text{bord } S)$ , ce qui démontre le lemme (5.3).  $\square$

$f$  est holomorphe sur  $V$  donc d'après le théorème de Cauchy, on a pour tout  $y \in V$  :

$$|f'(y)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|x-y|=R} \frac{f(x)}{(x-y)^2} dx \right| \leq \frac{1}{R} \sup_{|x-y|=R} |f(x)|$$

pour tout  $R$  tel que  $0 < R < \text{dist}(y, \text{bord } S)$ .

Au vu de la propriété (5.1)(0), on a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|f'(y)| \leq \frac{\|f\|_n}{R} \sup_{|x-y|=R} (\tilde{p}(x))^{-n}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(\tilde{p}(y))^{n+1} |yf'(y)| \leq \frac{\|f\|_n}{R} |y| (\tilde{p}(y))^{n+1} \sup_{|x-y|=R} (\tilde{p}(x))^{-n} \quad (5.25)$$

Nous noterons dans la suite  $d(x) = \text{dist}(x, \text{bord } S)$ . On distingue plusieurs cas :

**Cas 1 :**  $y \in S_\sigma$  : l'inégalité (5.25) s'écrit alors

$$(\tilde{p}(y))^{n+1} |yf'(y)| \leq \frac{\|f\|_n}{R} |y| \sigma^{n+1} \sup_{|x-y|=R} (\tilde{p}(x))^{-n} .$$

Soit  $X \in \text{bord } S$  tel que  $|X| = |y|$  (on a vu qu'un tel  $X$  existe). D'après le lemme (5.3), on a  $d(X) \leq d(y)$ . On pose  $R = \frac{d(X)}{n+1}$  et on a ainsi pour  $n \geq 1$  :

$$R \leq \frac{d(y)}{n+1} < d(y)$$

Comme  $y \in S_\sigma$ , on a  $p(y) = \sigma = \frac{d(X)}{|X|}$  et on en déduit :

$$(\tilde{p}(y))^{n+1} |yf'(y)| \leq \frac{n+1}{d(X)} \|f\|_n \frac{d(X)^{n+1}}{|X|^{n+1}} |y| \sup_{|x-y|=\frac{d(X)}{n+1}} (\tilde{p}(x))^{-n}$$

soit

$$(\tilde{p}(y))^{n+1} |yf'(y)| \leq (n+1) \|f\|_n \frac{d(X)^n}{|X|^n} \sup_{|x-y|=\frac{d(X)}{n+1}} (\tilde{p}(x))^{-n} . \quad (5.26)$$

Cherchons maintenant une majoration de  $(\tilde{p}(x))^{-n}$  lorsque  $|x - y| = \frac{d(X)}{n+1}$ . Supposons tout d'abord que l'on a  $x \in S \setminus S_\sigma$ . Comme  $|x - y| = \frac{d(X)}{n+1}$ , il vient :

$$|x| \leq |y| + \frac{d(X)}{n+1} = |X| + \frac{d(X)}{n+1}$$

d'où

$$|x|^n \leq |X|^n \left(1 + \frac{d(X)}{|X|} \frac{1}{n+1}\right)^n \leq |X|^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq e|X|^n .$$

De plus,  $|d(x) - d(y)| \leq |x - y|$  donc  $d(x) \geq d(y) - |x - y| = d(y) - \frac{d(X)}{n+1} \geq d(X) - \frac{d(X)}{n+1}$ . On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$d(x)^n \geq d(X)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geq \frac{1}{e} d(X)^n .$$

On a finalement pour tout  $x \in S \setminus S_\sigma$ ,

$$(\tilde{p}(x))^{-n} \leq e^2 \frac{|X|^n}{(d(X))^n} .$$

Si  $x \in S_\sigma$ , on a en outre  $(\tilde{p}(x))^{-n} = (\tilde{p}(X))^{-n} = \frac{|X|^n}{d(X)^n}$  d'où finalement :

$$\sup_{|x-y|=\frac{d(X)}{n+1}} (\tilde{p}(x))^{-n} \leq e^2 \frac{|X|^n}{(d(X))^n} . \quad (5.27)$$

**Cas 2 :**  $y \in S \setminus S_\sigma$  : l'inégalité (5.25) s'écrit alors

$$(\tilde{p}(y))^{n+1} |y f'(y)| \leq \frac{\|f\|_n (d(y))^{n+1}}{R |y|^n} \sup_{|x-y|=R} (\tilde{p}(x))^{-n} . \quad (5.28)$$

On choisit  $R = \frac{d(y)}{n+1} < d(y)$  pour  $n \geq 1$ . Pour majorer  $(\tilde{p}(x))^{-n}$ , il suffit, comme précédemment, d'envisager le cas où  $x \in S \setminus S_\sigma$ .

*Mutatis mutandis*, on obtient alors  $|x|^n \leq e|y|^n$  et  $(d(x))^{-n} \leq e(d(y))^{-n}$  d'où finalement

$$\sup_{|x-y|=\frac{d(X)}{n+1}} (\tilde{p}(x))^{-n} \leq e^2 \frac{|y|^n}{(d(y))^n} . \quad (5.29)$$

En considérant les inégalités (5.26)-(5.27) et (5.28)-(5.29), on obtient

$$\forall y \in S, (\tilde{p}(y))^{n+1} |y f'(y)| \leq (n+1) e^2 \|f\|_n ,$$

ce qui démontre la propriété (5.1)(5) pour  $n \geq 1$ . Reste le cas où  $n = 0$ . On a

$$\|Df\|_1 = \sup_{y \in S} \tilde{p}(y) |y f'(y)| \leq \sup_{y \in S} p(y) |y f'(y)| = \sup_{y \in S} d(y) |f'(y)| .$$

Or, pour tout  $y \in S$  et tout  $R < d(y)$ , on a  $d(y) |f'(y)| \leq d(y) \frac{\|f\|_\infty}{R}$ . En posant  $R = \frac{d(y)}{e^2}$ , on obtient

$$\|Df\|_1 \leq e^2 \|f\|_0 ,$$

et le cas  $n = 0$  est démontré. □

**Preuve de (5.1)(6) :** Pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$ , tout  $z \in S$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{0,j}(f)(z) (\tilde{p}(z))^n| &= \left| \int_{L_j(z)} e^{\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t))} \frac{f(t)}{t^{r+1}} (\tilde{p}(z))^n dt \right| \\ &\leq \int_{L_j(z)} e^{\Re(\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t)))} \frac{|f(t)|}{|t|^{r+1}} (\tilde{p}(z))^n |dt| \\ &\leq \left( \int_{L_j(z)} e^{\Re(\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t)))} \frac{(\tilde{p}(z))^n}{(\tilde{p}(t))^n} \frac{1}{|t|^{r+1}} |dt| \right) \|f\|_n \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu dans la partie (1.2) que  $\int_{L_j(z)} e^{\Re(\gamma_j(\tilde{m}(z) - \tilde{m}(t)))} \frac{1}{|t|^{r+1}} |dt| \leq C_0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$ . Pour conclure, il suffit de montrer que l'on a pour tout  $t \in L_j(z)$ ,  $|\tilde{p}(z)| \leq |\tilde{p}(t)|$ . Autrement dit, il suffit de montrer que  $\tilde{p}$  est décroissante le long de  $L_j(z)$ . Nous allons voir que ceci est réalisé si l'on choisit  $\sigma$  assez petit.

Dans le plan des  $1/z^r$ , les chemins  $L_j(z)$  sont des demi-droites dans le «secteur» décrit par la figure (1.1). Ils proviennent de l'infini selon un nombre fini de directions fixées et recourent le bord du domaine en formant avec celui-ci un nombre fini d'angles non nuls (les directions sont transversales au bord).

Il en va de même dans le plan des  $z$  car l'application  $z \mapsto 1/z^r$  est une application conforme : les angles que font les chemins avec le bord sont conservés (voir figure ci-après).

FIG. 5.2: *Transversalité des chemins  $L_j(z)$  avec le bord de  $S$*

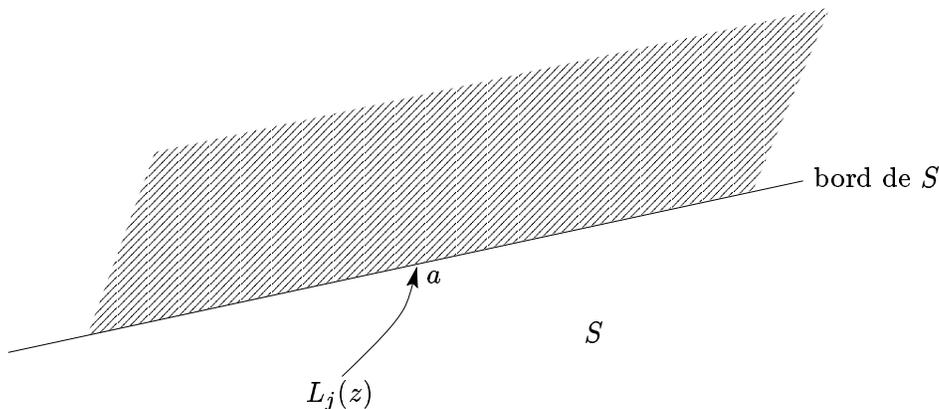


Figure réalisée dans le plan des  $z$

Choisissons  $\sigma$  assez petit pour que l'angle à l'origine de  $S_\sigma$  contienne toutes les directions des chemins  $L_j(z)$  en 0. Ainsi, le chemin  $L_j(z)$  de 0 à  $z$  reste d'abord dans  $S_\sigma$ , où  $\tilde{p}$  est constante. Reste à voir les variations de  $\tilde{p}$  lorsque  $L_j(z)$  «sort» de  $S_\sigma$ .

Sur  $S \setminus S_\sigma$ , on a  $\tilde{p} = p$ . Pour étudier les variations de  $p$  le long du chemin  $L_j(z)$ , on étudie le signe de sa dérivée logarithmique. On a

$$\begin{aligned} \left( \frac{Dp}{p} \right) (t) = D(\ln p)(t) &= D(\ln \text{dist}(t, \text{bord } S)) - D(\ln |t|) \\ &= \frac{D(\text{dist}(t, \text{bord } S))}{\text{dist}(t, \text{bord } S)} - \frac{D(|t|)}{|t|} \end{aligned}$$

Lorsque  $t$  tend vers  $a \in \text{bord } S$  le long de  $L_j(a)$ , le deuxième terme admet bien une limite, mais le premier tend vers  $-\infty$ . En effet, le dénominateur du premier terme tend vers 0 alors que son numérateur admet une limite strictement négative et dépendant de l'angle que fait  $L_j(a)$  avec le bord au point  $a$ .

Ainsi,  $\frac{Dp}{p}(t) \leq 0$  dès que  $\text{dist}(t, \text{bord } V)$  est plus petite qu'un certain  $\mu > 0$ . Fixons  $\sigma$  assez petit pour que pour tout  $t \in S \setminus S_\sigma$ ,  $\text{dist}(t, \text{bord } S) \leq \mu$ . On a alors démontré la propriété (5.1)(6) puisque l'on a :

$$\forall z \in S, \forall n \in \mathbb{N}, |\mathcal{T}_{0,j}(f)(z)(\tilde{p}(z))^n| \leq C_0 \|f\|_n .$$

□

Nous donnons maintenant une définition de série majorante puis une propriété qui lui est relative. Toutes deux seront utilisées dans la partie (5.2.2) pour démontrer le caractère Gevrey de la série formelle obtenue dans (5.1).

**Définition 5.2** On dit que la série  $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)\varepsilon^i \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$  est majorée par la série  $h(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \zeta^i \in \mathbb{C}[[\zeta]]$  si

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|g_i\|_i \leq h_i \Gamma\left(\frac{i}{r} + 1\right)$$

ce que l'on note  $g \ll h(\zeta)$ .

**Proposition 5.1** Soit  $g, \tilde{g} \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$  et  $h, \tilde{h} \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ . On suppose que  $g \ll h(\zeta)$  et  $\tilde{g} \ll \tilde{h}(\zeta)$ . Alors on a

$$g\tilde{g} \ll h(\zeta)\tilde{h}(\zeta) \quad \text{et} \quad z\varepsilon^r \frac{d}{dz} g \ll e^2 r \zeta^r h(\zeta) .$$

**Preuve de la proposition (5.1) :** On s'attache tout d'abord à montrer la première partie de la proposition. On a

$$g\tilde{g} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{l+m=k} g_l \tilde{g}_m$$

$$\text{et} \quad h\tilde{h} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \zeta^k \quad \text{avec} \quad d_k = \sum_{l+m=k} h_l \tilde{h}_m .$$

D'après la propriété (5.1)(3), on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \|c_k\|_k &\leq \sum_{l+m=k} \|g_l \tilde{g}_m\|_k \leq \sum_{l+m=k} \|g_l\|_l \|\tilde{g}_m\|_m \\ &\leq \sum_{l+m=k} h_l \tilde{h}_m \Gamma\left(\frac{l}{r} + 1\right) \Gamma\left(\frac{m}{r} + 1\right) . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Or, pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$  et tout  $m \in \mathbb{N}$  vérifiant  $l + m = k$ , on a

$$\Gamma\left(\frac{l}{r} + 1\right) \Gamma\left(\frac{m}{r} + 1\right) = \frac{l}{r} \Gamma\left(\frac{l}{r}\right) \Gamma\left(\frac{m}{r} + 1\right) = \frac{l}{r} B\left(\frac{l}{r}, \frac{m}{r} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right) .$$

De plus,  $B\left(\frac{l}{r}, \frac{m}{r} + 1\right) = \int_0^1 t^{\frac{l}{r}-1} (1-t)^{\frac{m}{r}} dt \leq \int_0^1 t^{\frac{l}{r}-1} dt = \frac{r}{l}$  d'où  $\frac{l}{r} B\left(\frac{l}{r}, \frac{m}{r} + 1\right) \leq 1$ . Sous les mêmes hypothèses sur  $l$  et  $m$ , on a alors :

$$\Gamma\left(\frac{l}{r} + 1\right) \Gamma\left(\frac{m}{r} + 1\right) \leq \Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right) ,$$

et cette inégalité reste vraie pour  $k = 0$  et  $m = k$ . En reprenant l'inégalité (5.30), on a montré que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|c_k\|_k \leq d_k \Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right)$$

ce qui donne la première partie de la proposition. On a d'autre part

$$\begin{aligned} z\varepsilon^r \frac{d}{dz} g &= \sum_{k=0}^{\infty} z g'_k(z) \varepsilon^{k+r} = \sum_{k=r}^{\infty} z g'_{k-r}(z) \varepsilon^k \\ &=: \sum_{k=r}^{\infty} u_k(z) \varepsilon^k \end{aligned} \quad (5.31)$$

et

$$\begin{aligned} e^{2r} \zeta^r h(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{2r} h_k \zeta^{k+r} = \sum_{k=r}^{\infty} e^{2r} h_{k-r} \zeta^k \\ &=: \sum_{k=r}^{\infty} v_k \zeta^k. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ainsi, pour  $k \geq r \geq 1$ , on a d'après les propriétés (5.1)(2)-(5)

$$\|u_k\|_k = \|Dg_{k-r}\|_k \leq e^{2k} \|g_{k-r}\|_{k-1} \leq e^{2k} \|g_{k-r}\|_{k-r},$$

d'où pour tout  $k \geq r$ :

$$\|u_k\|_k \leq e^{2k} h_{k-r} \Gamma\left(\frac{k-r}{r} + 1\right) = e^{2k} h_{k-r} \Gamma\left(\frac{k}{r}\right) = e^{2r} h_{k-r} \Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right) = v_k \Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right).$$

Autrement dit, on a

$$z\varepsilon^r \frac{d}{dz} g \ll e^{2r} \zeta^r h(\zeta),$$

ce qui termine la démonstration de la proposition.  $\square$

## 5.2.2 Démonstration du caractère Gevrey

Le but de cette partie est de montrer le caractère Gevrey  $1/r$  uniformément en  $z \in S$  de la série semi-formelle solution définie dans la partie (5.1). Pour cela, donnons deux définitions puis deux lemmes dont un nouveau lemme de *splitting*.  $S$  désigne toujours dans cette partie un « bon secteur ».

**Définition 5.3** Soit  $C = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varepsilon^i \in \text{Hol}_b(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$ . On dit que  $C$  est quasi-Gevrey d'ordre  $1/r$  uniformément par rapport à  $z \in S$  si

$$\exists (M, N) \in \mathbb{R}_+^*, \forall i \in \mathbb{N}, \|C_i\|_i \leq MN^i \Gamma\left(\frac{i}{r} + 1\right)$$

ce que l'on note  $C \in Q\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$ .

**Proposition 5.2** Si  $f, g, \in Q\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$ , alors  $fg \in Q\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]$ .

**Preuve de la proposition (5.2) :** On note  $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \varepsilon^k$  et  $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \varepsilon^k$ . Par définition, il existe  $M_1, M_2, N_1, N_2 > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|f_i\|_i &\leq M_1 N_1^i \Gamma\left(\frac{i}{r} + 1\right) \\ \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|g_i\|_i &\leq M_2 N_2^i \Gamma\left(\frac{i}{r} + 1\right) \end{aligned}$$

De plus, on note  $fg = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varepsilon^k$  avec  $u_k = \sum_{l+m=k} f_l g_m$  d'où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \|u_k\|_k &\leq \sum_{l+m=k} \|f_l g_m\|_k \leq \sum_{l+m=k} \|f_l\|_l \|g_m\|_m \\ &\leq M_1 M_2 \sum_{l+m=k} N_1^l N_2^m \Gamma\left(\frac{l}{r} + 1\right) \Gamma\left(\frac{m}{r} + 1\right) \\ &\leq M_1 M_2 N_3^k \sum_{l+m=k} \Gamma\left(\frac{l}{r} + 1\right) \Gamma\left(\frac{m}{r} + 1\right) \quad \text{avec } N_3 = \max(N_1, N_2) \\ &\leq (k+1) M_1 M_2 N_3^k \Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right) \end{aligned}$$

d'après la preuve de la proposition (5.1). En choisissant  $N_4 > N_3$  suffisamment grand, on a alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\|u_k\|_k \leq M_1 M_2 N_4^k \Gamma\left(\frac{k}{r} + 1\right)$$

ce qui termine la preuve de la proposition (5.2) □

On étend la notion de norme de Nagumo modifiée et de majoration de séries respectivement aux vecteurs et aux séries de vecteurs en utilisant la norme maximum, puis on étend également ces notions aux matrices en utilisant une norme matricielle compatible. Cela nous permet de généraliser la définition ci-dessus pour introduire  $\mathcal{Q}\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  que nous utiliserons par la suite.

**Définition 5.4** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S$  un « bon secteur ».

On dit que  $A \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  vérifie la condition (COND7) du *splitting* si l'on peut écrire :

$$\forall z \in S, \quad A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$$

$$\text{où } C \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$$

et  $D$  est une fonction diagonale holomorphe dans un voisinage de 0 telle que  $D_0 = D(0)$  a toutes ses valeurs propres distinctes

On dira alors que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND7).

Remarquons immédiatement que  $A$  mise sous la forme préparée (2.4) vérifie la condition (COND7) du *splitting* puisque  $C$  est holomorphe dans un voisinage de  $(0, 0)$  : si on note  $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z) \varepsilon^k$ , il existe  $M, N > 0$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|A_k\|_{\infty} \leq MN^k$ .

**Lemme 5.4 (splitting)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p < n$ .

Si  $A \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  vérifie la condition (COND7) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$ , alors il existe  $R > 0$  et  $P \in \text{Hol}(S_R, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  tels que

$$\forall z \in S_R, \quad P_0(z) \text{ soit inversible, } \lim_{z \rightarrow 0} P_0(z) = I_n,$$

et  $P$  transforme, par le changement d'inconnue  $Y = PW$ , l'équation

$$\begin{aligned} z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) &= A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \\ \text{en l'équation } z(z^r - \varepsilon^r)W'(z, \varepsilon) &= B(z, \varepsilon)W(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

où  $B \in \text{Hol}(S_R, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B^{11} & 0 \\ 0 & B^{22} \end{pmatrix}, \quad B^{11} \in M_p(\mathbb{C}), \quad B^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}).$$

De plus, si l'on écrit  $D = \text{diag}(D^1, D^2)$ ,  $D^1 \in M_p(\mathbb{C})$ ,  $D^2 \in M_{n-p}(\mathbb{C})$ , alors  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient la condition (COND7) du splitting avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

**Preuve du lemme (5.4) :** Quitte à diminuer le rayon de  $S$ , on note dans la suite  $S = S_R$ . On reprend ici les notations et la structure de la démonstration du lemme (5.1).

On veut montrer que  $P = \check{Q}Q$  défini dans le lemme (5.1) appartient à  $\text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$ . Soit  $S_1$  un secteur tel que  $S_1 \subsetneq S$  et  $S_2$  un « bon secteur » tel que  $S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq S$ . Les normes  $\|\cdot\|_i$  considérées à présent le seront toujours par rapport à  $S_2$ .

La propriété (5.1)(6) s'étend au cas matriciel de la façon suivante :

$$\forall Q \in \text{Hol}_b(S_2, M_{n-p,p}(\mathbb{C})), \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|\mathcal{L}(Q)\|_i \leq C_0 \|Q\|_i$$

où  $\mathcal{L}$  correspond à la version matricielle de  $\mathcal{T}_0$ . Nous allons voir que l'on a une propriété similaire pour  $\bar{\mathcal{L}}$  définie dans la démonstration du lemme (5.1).

Rappelons que si  $H \in \text{Hol}_b(S_2, M_{n-p,p}(\mathbb{C})) = \mathcal{B}$ ,  $P = \bar{\mathcal{L}}(H)$  équivaut à  $P = \mathcal{L} - \mathcal{L}\Delta(P)$  ou encore

$$(I - \mathcal{L}\Delta)(P) = \mathcal{L}H$$

On a supposé précédemment que le rayon de  $S$  est choisit assez petit pour avoir  $\|\mathcal{L}\Delta\| \leq \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $(I - \mathcal{L}\Delta)$  est inversible et  $\|(I - \mathcal{L}\Delta)^{-1}\| \leq 2$ . On a

$$P = \bar{\mathcal{L}}(H) = (I - \mathcal{L}\Delta)^{-1} \mathcal{L}(H)$$

d'où

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \|\bar{\mathcal{L}}(H)\|_i \leq 2 \|\mathcal{L}(H)\|_i \leq 2C_0 \|H\|_i =: \kappa \|H\|_i.$$

On se ramène, en posant  $Y = \check{Q}Z$ , à une équation de la forme

$$z(z^r - \varepsilon^r)Z' = E(z, \varepsilon)Z = (D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)K(z, \varepsilon))Z$$

où  $\check{Q} \in \text{Hol}_b(S \times B(0, \delta), M_n(\mathbb{C}))$  et  $K$  est donnée par (5.9). Alors  $\check{Q} \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  et comme  $K \in \text{Hol}_b(S_2 \times B(0, \delta), M_n(\mathbb{C}))$ , on a

$$K \in \text{Hol}(S_2, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{\delta}{r}}$$

et vu la propriété (5.1)(1) :

$$K \in \mathcal{Q}\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S_2, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]].$$

Fixons à présent  $\sigma > 0$  suffisamment petit pour avoir  $S_1 \subsetneq S_\sigma \subsetneq S_2$ . Ensuite, on choisit  $Q$  de la forme (5.11) tel que  $Q^{21} = \bar{\mathcal{L}}(G)$  (en appliquant  $\bar{\mathcal{L}}$  à tous les coefficients de  $G$ ). Alors, en reprenant la définition (5.15) de  $G$ , on a

$$G = E^{21} + z\varepsilon^r (\bar{\mathcal{L}}(G))' + (E^{22} - E_0^{22}(z)) \bar{\mathcal{L}}(G) - \bar{\mathcal{L}}(G) (E^{11} - E_0^{11}(z)) - \bar{\mathcal{L}}(G) E^{12} \bar{\mathcal{L}}(G) \quad (5.33)$$

ce qui est une certaine équation implicite pour  $G$ .

Appliquons  $\| \cdot \|_j / \Gamma(\frac{j}{r} + 1)$  aux coefficients de l'équation (5.33) sur  $S_2$ . On obtient ainsi respectivement des série majorantes (scalaires)  $\overline{E}^{21}$ ,  $\overline{E}^{22}$ ,  $\overline{E}^{11}$  et  $\overline{E}^{12}$  de  $E^{21}$ ,  $E^{22} - E_0^{22}$ ,  $E^{11} - E_0^{11}$  et  $E^{12}$ .

Par hypothèses, on a  $E \in \mathbb{Q}\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S_2, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  donc les séries  $\overline{E}^{21}$ ,  $\overline{E}^{22}$ ,  $\overline{E}^{11}$  et  $\overline{E}^{12}$  ont un rayon de convergence commun strictement positif et on peut écrire, vu la forme de  $E_0$  :

$$\overline{E}^{11}(\zeta) = O(\zeta) = \overline{E}^{22}(\zeta) \quad \text{et} \quad \overline{E}^{12}(\zeta) = O(\zeta) = \overline{E}^{21}(\zeta)$$

On considère maintenant l'équation suivante appelée équation majorante de (5.33) :

$$g(\zeta) = \overline{E}^{21} + e^{2r} \zeta^r \kappa g(\zeta) + \left( \overline{E}^{11} + \overline{E}^{22} \right) g(\zeta) + \kappa^2 \overline{E}^{12} (g(\zeta))^2 \quad (5.34)$$

obtenue en majorant tous les coefficients de (5.33) à l'aide des propriétés (5.1). Cette équation implicite admet une unique solution formelle holomorphe au voisinage de 0 vérifiant  $g(0) = 0$ . En effet, considérons  $\phi$  définie par

$$\phi(\zeta, g) = g - \overline{E}^{21}(\zeta) - e^{2r} \zeta^r \kappa g - \left( \overline{E}^{11}(\zeta) + \overline{E}^{22}(\zeta) \right) g - \kappa^2 \overline{E}^{12}(\zeta) g^2 .$$

On a  $\phi(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial g}(0, 0) = 1$ . On conclut aisément en invoquant le théorème des fonctions implicites. Ainsi, si on note  $g(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \zeta^k$ , il existe  $M, N > 0$  tels que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, g_j \leq MN^j .$$

Il reste à voir que  $g$  majore (au sens  $\ll$ ) la solution  $G$  de (5.33). Pour cela, on note  $RG$  le membre de droite de l'équation (5.33) et  $\overline{R}g$  le membre de droite de (5.34).

Vu les propriétés (5.1) et la proposition (5.1), on a alors

$$\forall u \in \text{Hol}_b(S_2, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]], \forall v \in \mathbb{R}[[\varepsilon]], u \ll v \implies Ru \ll \overline{R}v .$$

**Remarque 5.4** Comme les coefficients de  $R$  (resp.  $\overline{R}$ ) n'ont pas de terme en  $\varepsilon^0$  (resp.  $\zeta^0$ ), les coefficients de  $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^k$  dans  $Ru$  (resp.  $\zeta^0, \dots, \zeta^k$  dans  $\overline{R}v$ ) sont déterminés par les coefficients de  $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{k-1}$  de  $u$  (resp.  $\zeta^0, \dots, \zeta^{k-1}$  de  $v$ ).  $\triangle$

On pose maintenant  $\Pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} 0 \varepsilon^j$  et  $\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} 0 \zeta^j$ . On a bien  $\Pi_0 \ll \pi_0$ . On définit alors par récurrence  $\Pi_k = R\Pi_{k-1}$ ,  $\pi_k = \overline{R}\pi_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , de sorte que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Pi_k \ll \pi_k .$$

Montrons que les coefficients de  $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^k$  dans  $\Pi_k$  (resp.  $\zeta^0, \dots, \zeta^k$  dans  $\pi_k$ ) sont exactement les coefficients  $G_0, \dots, G_k$  de  $G$  (resp.  $g_0, \dots, g_k$  de  $g$ ).

On raisonne sur  $\Pi_k$  et  $G$  (le cas de  $\pi$  et  $g$  est similaire). Le coefficient de  $\varepsilon^0$  dans  $\Pi_0$  est  $0 = G_0$ . Supposons cette proposition vraie pour un certain entier  $k$ , montrons qu'elle l'est aussi pour  $k + 1$ . D'après la remarque (5.4), les coefficients de  $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{k+1}$  dans  $\Pi_{k+1} = R\Pi_k$  sont déterminés par les coefficients de  $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^k$  dans  $\Pi_k$ , c'est-à-dire  $G_0, \dots, G_k$ . Or  $G = RG$  donc les coefficients de  $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{k+1}$  dans  $\Pi_{k+1}$  sont  $G_0, \dots, G_{k+1}$ .

Ainsi, on a montré que l'on a  $G \ll g$ , soit :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|G_i\|_i \leq MN^i \Gamma\left(\frac{i}{r} + 1\right) .$$

Autrement dit,  $G \in \mathbf{Q}\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S_2, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$ . Or,  $Q^{21} = \overline{\mathcal{L}}(G)$  donc d'après la remarque du début de preuve, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|Q_i^{21}\|_i \leq \kappa MN^i \Gamma\left(\frac{i}{r} + 1\right),$$

soit  $Q^{21} \in \mathbf{Q}\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S_2, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$ . On montrerait un résultat analogue pour  $Q^{12}$  de sorte que  $Q \in \mathbf{Q}\text{-Gev}_{\frac{1}{r}}(S_2, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  et en utilisant la propriété (5.1)(4), il vient :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \|Q_i\|_{\infty}^{S_1} \leq \|Q_i\|_{\infty}^{S_{\sigma}} \leq \sigma^{-i} \|Q_i\|_i \leq M \left(\frac{N}{\sigma}\right)^i \Gamma\left(\frac{i}{r} + 1\right)$$

soit  $Q \in \text{Hol}(S_1, M_p(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}^{\S}$  d'où finalement  $Q \in \text{Hol}(S, M_p(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  et

$$P \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}.$$

Il reste à voir que  $B^{11}$  et  $B^{22}$  vérifient les conditions (COND7) du *splitting*. On a déjà vu qu'elles vérifient les conditions (COND6). De plus, comme

$$\begin{aligned} B^{11}(z, \varepsilon) &= E^{11}(z, \varepsilon) + E^{12}(z, \varepsilon)Q^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r)(K^{11}(z, \varepsilon) + K^{12}(z, \varepsilon)Q^{21}(z, \varepsilon)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K^{11} &\in \text{Hol}(S_2, M_p(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}^{\S} \\ K^{12} &\in \text{Hol}(S_2, M_{p,n-p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}^{\S} \\ Q^{12} &\in \text{Hol}(S_2, M_{n-p,p}(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}^{\S}, \end{aligned}$$

on a  $H = K^{11} + K^{12}Q^{21} \in \text{Hol}(S_1, M_p(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}^{\S}$  d'où  $H \in \text{Hol}(S, M_p(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$ .

On montrerait un résultat similaire pour  $B^{22}$ , ce qui termine la démonstration du lemme (5.4).  $\square$

En appliquant un nombre fini de fois le lemme précédent, on se ramène aux équations scalaires traitées dans la partie (1.2). Elles admettent des solutions de la forme

$$y(z, \varepsilon) = \overline{h}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{d_0(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)t + \dots + d_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

où  $\overline{h} \in \text{Hol}_b(S \times B(0, \delta), \mathbb{C})$  (d'où  $\overline{h} \in \text{Hol}(S, \mathbb{C})[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$ ) vérifie  $\lim_{z \rightarrow 0} \overline{h}(z, 0) = 1$ . On en déduit le

**Théorème 5.2** *Considérons le système (5.2) mis sous la forme préparée (2.4) où  $C$  est holomorphe sur un voisinage de l'origine et  $S$  un « bon secteur » de rayon suffisamment petit. Le système (5.2) possède une unique solution fondamentale (à multiplication près à droite par une série formelle diagonale Gevrey d'ordre  $\frac{1}{r}$  et de terme constant  $I_n$ ) de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = \overline{H}(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \quad (5.35)$$

où  $\overline{H} \in \text{Hol}_b(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]$  est Gevrey d'ordre  $\frac{1}{r}$  uniformément par rapport à  $z \in S$  et vérifie

1.  $\forall z \in S, \overline{H}_0(z)$  est inversible et  $\lim_{z \rightarrow 0} \overline{H}_0(z) = I_n$
2.  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes en 0 définies par (2.7).

### 5.3 Développement asymptotique et caractère Gevrey

Dans la suite, les séries semi-formelles en  $\varepsilon$  seront surlignées comme dans le théorème ci-dessus pour ne pas les confondre avec les «vraies solutions» définies sur le domaine  $\Omega$  déterminé dans le chapitre 3. Dans cette partie, nous allons voir que la série semi-formelle  $\overline{H}$  du théorème (5.2) constitue, sur certains secteurs, le développement Gevrey d'ordre  $\frac{1}{r}$  de  $H$  définie dans le théorème (3.1).

**Définition 5.5** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V \text{ et } z \in S_\varepsilon\}$  domaine défini dans la partie (3.3) et  $S$  un «bon secteur» contenant  $S_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon \in V$ .

On dit que  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\overline{A} \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  vérifient les conditions conjuguées (COND8) du *splitting* si on peut écrire :

1.  $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ vérifie sur } \Omega \text{ la condition (COND2) avec pour matrice diagonale associée } D \text{ et} \\ \overline{A} \text{ vérifie sur } S \text{ la condition (COND7) avec pour matrice diagonale associée } D, \end{array} \right.$   
ce que l'on écrira  $\overline{A}(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)\overline{C}(z, \varepsilon)$ ,
2. et  $C(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{C}(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{C}_i(z)\varepsilon^i$ ,  $\varepsilon \in V$ , unif<sup>t</sup> sur  $S_\varepsilon$ , c'est-à-dire :  
$$\exists M, N > 0, \forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon, |C(z, \varepsilon) - \sum_{l=0}^{n-1} \overline{C}_l(z)\varepsilon^l| \leq MN^n \Gamma(\frac{n}{r} + 1) |\varepsilon|^n .$$

On dira alors que  $D$  est une matrice diagonale associée à la condition (COND8).

Nous allons démontrer à présent le lemme de *splitting* :

**Lemme 5.5 (splitting)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Si  $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\overline{A} : S \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  vérifient les conditions (COND8) du *splitting* avec pour matrice diagonale associée  $D$  alors il existe  $P : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  et  $\overline{P} \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  telles que

1.  $P$  soit bornée inversible sur  $\Omega$  et  $\lim_{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} P(z, \varepsilon) = I$
2.  $\overline{P}_0$  soit bornée inversible sur  $S$  et  $\lim_{z \rightarrow 0} \overline{P}_0(z) = I$

et qui transforment respectivement les équations

$$z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \quad (5.36)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)\overline{Y}'(z, \varepsilon) = \overline{A}(z, \varepsilon)\overline{Y}(z, \varepsilon) \quad (5.37)$$

en les équations

$$z(z^r - \varepsilon^r)W'(z, \varepsilon) = B(z, \varepsilon)W(z, \varepsilon) \quad (5.38)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)\overline{W}'(z, \varepsilon) = \overline{B}(z, \varepsilon)\overline{W}(z, \varepsilon) \quad (5.39)$$

par les changements d'inconnue  $Y = PW$  et  $\overline{Y} = \overline{P}\overline{W}$  où  $B \in \text{Hol}(\Omega, M_n(\mathbb{C}))$  et  $\overline{B} \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  sont de la forme

$$\left| \begin{array}{l} B = \text{diag}(B^{11}, B^{22}) \\ \overline{B} = \text{diag}(\overline{B}^{11}, \overline{B}^{22}) \end{array} \right. \text{ avec } \left| \begin{array}{l} B^{11}, \overline{B}^{11} \in M_p(\mathbb{C}) \\ B^{22}, \overline{B}^{22} \in M_{n-p}(\mathbb{C}) \end{array} \right. .$$

De plus, on a

1.  $P(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{P}(z, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in V$ , unif<sup>t</sup> sur  $S_\varepsilon$  et
2.  $B^{11}$  et  $\tilde{B}^{11}$  ainsi que  $B^{22}$  et  $\tilde{B}^{22}$  vérifient les conditions conjuguées (COND8) du *splitting* avec pour matrices diagonales associées respectivement  $D^1$  et  $D^2$ .

**Preuve du lemme (5.5) :** Vu le lemme (5.4), il existe  $\overline{P} \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  de la forme

$$\overline{P} = I + \begin{pmatrix} 0 & \overline{P}^{12} \\ \overline{P}^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

telle que  $\lim_{z \rightarrow 0} \overline{P}_0(z) = I$  et qui transforme l'équation (5.37) en (5.39) par le changement d'inconnue  $\overline{Y} = \overline{P}\overline{W}$ . Nous allons chercher  $P \in \text{Hol}(\Omega, M_n(\mathbb{C}))$  (puis nous verrons qu'il s'agit de l'application définie dans le lemme (3.1)), de la forme

$$P = I + \begin{pmatrix} 0 & P^{12} \\ P^{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

qui transforme (5.36) en (5.38) et vérifie de plus  $P(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{P}(z, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in V$ , unif<sup>t</sup> sur  $S_\varepsilon$ . Pour ce faire nous allons utiliser un procédé classique de resommation.

Remarquons immédiatement que  $P^{12}$  et  $P^{21}$  doivent vérifier les équations quadratiques

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{12})' = A^{12} + A^{11}P^{12} - P^{12}A^{22} - P^{12}A^{21}P^{12} \quad (5.41)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)(P^{21})' = A^{21} + A^{22}P^{21} - P^{21}A^{11} - P^{21}A^{12}P^{21} \quad (5.42)$$

et que  $\overline{P}^{12}$  et  $\overline{P}^{21}$  vérifient des équations analogues en ajoutant simplement un signe de surlignage. On peut réécrire ces équations sous forme vectorielle, si bien que l'on est amené à considérer les équations

$$z(z^r - \varepsilon^r)w'(z, \varepsilon) = f_0(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon)w(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, w(z, \varepsilon)) =: G(z, \varepsilon, w(z, \varepsilon)) \quad (5.43)$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)\overline{w}'(z, \varepsilon) = \overline{f}_0(z, \varepsilon) + \overline{F}(z, \varepsilon)\overline{w}(z, \varepsilon) + \overline{f}_2(z, \varepsilon, \overline{w}(z, \varepsilon)) \quad (5.44)$$

où  $w$  correspond à  $P^{21}$ ,  $\overline{w}$  correspond à  $\overline{P}^{21}$  (par exemple) et  $f_0, F$  et  $f_2$  (resp.  $\overline{f}_0, \overline{F}$  et  $\overline{f}_2$ ) vérifient les mêmes propriétés que dans le lemme (3.1) (resp. (5.4)) et

$$f_0(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{f}_0(z, \varepsilon), \quad F(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{F}(z, \varepsilon) \quad \text{et} \quad f_2(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{f}_2(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S_\varepsilon. \quad (5.45)$$

Il s'agit donc de montrer que (5.43) admet une solution  $w$  vérifiant

$$w(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{w}(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S_\varepsilon.$$

On définit la transformée de Borel formelle de  $\overline{w}$  par

$$\hat{B}(\overline{w})(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{w}_i(z) \frac{t^i}{\Gamma(\frac{i}{r} + 1)}.$$

Comme  $\overline{w} \in \text{Hol}(S, \mathbb{C}^{(n-p)})[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$ ,  $\hat{B}(\overline{w})$  converge et est bornée (par  $M_0$ ) sur  $\mathcal{S} \times D(0, R)$  avec  $R > 0$  assez petit (quitte à remplacer  $S$  par  $S' \subsetneq S$ ).

On suppose dans la suite (on peut toujours le faire) que  $V$  est inclus dans  $S(-\delta, \delta)$  avec  $0 < \delta < \frac{\pi}{2r}$  et on définit la fonction  $\tau$  comme la transformée de Laplace tronquée de la série précédente (voir [CD99] et la partie (1.3)) : on note  $\tau = \mathcal{L}_T(\hat{B}(\overline{w}))$  (avec  $0 < T < R$ ) soit

$$\tau(z, \varepsilon) = r \int_0^T \frac{t^{r-1}}{\varepsilon^{r-1}} e^{-\frac{t^r}{\varepsilon^r}} \hat{B}(\overline{w})(z, t) dt$$

$\tau$  est ainsi définie sur  $S \times V$  et on peut tout de suite montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(z, \varepsilon) = 0$  uniformément par rapport à  $z \in S$ . En effet, on a pour tout  $(z, \varepsilon) \in S \times V$  :

$$|\tau(z, \varepsilon)| \leq r \int_0^T \frac{t^{r-1}}{|\varepsilon|^{r-1}} e^{-t^r \Re e(\frac{1}{\varepsilon^r})} |\hat{B}(\bar{w})(z, t)| dt \leq M_0 r \int_0^T \frac{t^{r-1}}{|\varepsilon|^{r-1}} e^{-t^r \Re e(\frac{1}{\varepsilon^r})} dt .$$

Or,  $\Re e(\frac{1}{\varepsilon^r}) = \frac{1}{|\varepsilon|^r} \Re e(e^{-ir \arg \varepsilon}) = \frac{\cos(r \arg \varepsilon)}{|\varepsilon|^r} \geq \frac{\cos r \delta}{|\varepsilon|^r}$  d'où :

$$\begin{aligned} |\tau(z, \varepsilon)| &\leq M_0 r \int_0^T \frac{t^{r-1}}{|\varepsilon|^{r-1}} e^{-t^r \frac{\cos \delta}{|\varepsilon|^r}} dt = M_0 \left[ -\frac{|\varepsilon|}{\cos r \delta} e^{-t^r \frac{\cos r \delta}{|\varepsilon|^r}} \right]_0^T \\ &\leq \frac{M_0}{\cos r \delta} \left( |\varepsilon| - |\varepsilon| e^{-T^r \frac{\cos r \delta}{|\varepsilon|^r}} \right) \xrightarrow[\varepsilon \in V]{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ indep. de } z \in S . \end{aligned}$$

De plus, d'après le théorème de Borel-Ritt Gevrey, on a :

$$\tau(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \bar{w}(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S . \quad (5.46)$$

Posons alors

$$R(z, \varepsilon) = f_0(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon)\tau(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)) - z(z^r - \varepsilon^r)\tau'(z, \varepsilon)$$

et montrons que l'on a  $R(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} 0 + 0\varepsilon + \dots + 0\varepsilon^n + \dots$ ,  $\varepsilon \in V$ , unif<sup>t</sup> sur  $S_\varepsilon$ . On dira alors que  $\tau$  est une quasi-solution de (5.43). Vu les relations (5.45), on a

$$f_0(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon)\tau(z, \varepsilon) + f_2(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)) \sim_{\frac{1}{r}} \bar{f}_0(z, \varepsilon) + \bar{F}(z, \varepsilon)\bar{w}(z, \varepsilon) + \bar{f}_2(z, \varepsilon, \bar{w}(z, \varepsilon))$$

et il ne reste donc plus qu'à montrer que l'on a

$$z\tau'(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} z\bar{w}'(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S$$

c'est-à-dire pour tout secteur  $S_1 \subsetneq S$  :

$$z\tau'(z, \varepsilon) \sim_{\frac{s}{r}} z\bar{w}'(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S_1 . \quad (5.47)$$

Si  $S_1 \subsetneq S$ , on considère le secteur  $S_2$  tel que  $S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq S$ . On a alors pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $z \in S_2$  :

$$z\tau'(z, \varepsilon) - z \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}'_i(z) \varepsilon^i = z \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau(z, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}_i(z) \varepsilon^i \right)$$

et comme on a supposé qu'il existe  $M, N > 0$  tels que

$$\forall z \in S_2, \left| \tau(z, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}_i(z) \varepsilon^i \right| \leq MN^n \Gamma \left( \frac{n}{r} + 1 \right) |\varepsilon|^n$$

on a, vu la propriété (5.1)(5) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\tau(\cdot, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}_i \varepsilon^i)\|_1^{S_2} &\leq e^2 \|\mathbf{D}(\tau(\cdot, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}_i \varepsilon^i)\|_\infty^{S_2} \quad \text{avec } \mathbf{D} = z \frac{\partial}{\partial z} \\ &\leq e^2 MN^n \Gamma \left( \frac{n}{r} + 1 \right) |\varepsilon|^n . \end{aligned}$$

En considérant la norme  $\|\cdot\|_1$  associée à  $S_2$  et  $\delta > 0$  suffisamment petit, on a  $S_1 \subsetneq S_\sigma \subsetneq S_2$  et d'après la propriété (5.1)(4),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\tau(\cdot, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}_i \varepsilon^i)\|_\infty^{S_1} &\leq \|\mathbf{D}(\tau(\cdot, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}_i \varepsilon^i)\|_\infty^{S_\sigma} \\ &\leq \sigma^{-1} \|\mathbf{D}(\tau(\cdot, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{w}_i \varepsilon^i)\|_1^{S_2} \\ &\leq e^2 \sigma^{-1} MN^n \Gamma \left( \frac{n}{r} + 1 \right) |\varepsilon|^n , \end{aligned}$$

c'est-à-dire (5.47). On a montré  $R(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} 0 + 0\varepsilon + \dots + 0\varepsilon^n + \dots$ ,  $\varepsilon \in V$ , unif<sup>t</sup> sur  $S_\varepsilon$  et, vu la proposition (1.3), l'existence de  $K_0 > 0$  et  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon, |R(z, \varepsilon)| \leq K_0 e^{-\frac{2\alpha}{|\varepsilon|^r}}. \quad (5.48)$$

Effectuons maintenant le changement de variable  $\Delta = w - \tau$  dans l'équation (5.43). Cette dernière est transformée en l'équation différentielle équivalente

$$z(z^r - \varepsilon^r)\Delta'(z, \varepsilon) = \tilde{G}(z, \varepsilon, \Delta(z, \varepsilon)) \quad (5.49)$$

avec

$$\tilde{G}(z, \varepsilon, \Delta) = G(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon) + \Delta) - z(z^r - \varepsilon^r)\tau'(z, \varepsilon).$$

On a alors

$$\tilde{G}(z, \varepsilon, 0) = G(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)) - z(z^r - \varepsilon^r)\tau'(z, \varepsilon) = R(z, \varepsilon) \quad (5.50)$$

$$\text{et } \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, 0) = \frac{\partial G}{\partial w}(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)) = F(z, \varepsilon) + F_2(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)) \quad (5.51)$$

avec

$$F_2(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)) = \frac{\partial f_2}{\partial w}(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)) = O(z). \quad (5.52)$$

En effet, rappelons que l'on a  $f_2(z, \varepsilon, w) = \sum_{i,j=1}^{p(n-p)} f_{2ij}(z, \varepsilon)w_iw_j$  avec  $f_{2ij}(z, \varepsilon) = O(z)$  pour tout  $i, j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$ , d'où le résultat puisque  $\tau$  est bornée sur  $S \times V$ . Vu la définition de  $f_2$ , on a de plus pour tout  $\Delta$  majoré en norme et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ :

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \Delta^2}(z, \varepsilon, \Delta) \right| \leq K_2$$

pour un certain  $K_2 > 0$  suffisamment grand. Remarquons alors que (5.49) s'écrit également

$$z(z^r - \varepsilon^r)\Delta'(z, \varepsilon) = \tilde{G}(z, \varepsilon, 0) + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, 0)\Delta(z, \varepsilon) + J(z, \varepsilon, \Delta(z, \varepsilon))$$

avec

$$J(z, \varepsilon, \Delta(z, \varepsilon)) = \tilde{G}(z, \varepsilon, \Delta(z, \varepsilon)) - \tilde{G}(z, \varepsilon, 0) - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, 0)\Delta(z, \varepsilon).$$

En utilisant les notations précédentes et les relations (5.50)-(5.51), l'équation (5.49) s'écrit

$$z(z^r - \varepsilon^r)\Delta'(z, \varepsilon) - F_0\Delta(z, \varepsilon) = R(z, \varepsilon) + ((F(z, \varepsilon) - F_0) + F_2(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon)))\Delta(z, \varepsilon) + J(z, \varepsilon, \Delta(z, \varepsilon)) =: S(\Delta)(z, \varepsilon). \quad (5.53)$$

Comme dans le chapitre 3, on considère alors l'équation de point fixe associée à (5.53) :

$$\Delta = \mathcal{F}(\Delta) := \mathcal{T} \circ \mathcal{S}(\Delta)$$

avec pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$ ,  $\mathcal{T}(Z)_j(z, \varepsilon) = e^{\gamma_j m(z, \varepsilon)} \int_{\mathcal{L}(z, \varepsilon)} e^{-\gamma_j m(t, \varepsilon)} \frac{Z_j(t, \varepsilon)}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt$  et  $\mathcal{B}$  l'ensemble des fonctions  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{p(n-p)}$  holomorphes telles que

$$\exists M > 0, \forall (z, \varepsilon) \in \Omega, |w(z, \varepsilon)| e^{\frac{\alpha}{|\varepsilon|^r}} \leq M,$$

muni de la norme définie par  $\|w\|_\alpha = \sup_{(z, \varepsilon) \in \Omega} |\Delta(z, \varepsilon)| e^{\frac{\alpha}{|\varepsilon|^r}}$ .

Par définition de  $\mathcal{T}$  et en écrivant un calcul du même type que celui du lemme (3.2), on obtient aisément l'inégalité

$$\forall w \in \mathcal{B}, \|\mathcal{T}(w)\|_\alpha \leq C\|w\|_\alpha \quad (5.54)$$

où  $C$  est la constante du lemme (3.3).

On note également  $\mathcal{B}_M = \{w \in \mathcal{B}, \|w\|_\alpha \leq M\}$ .  $\mathcal{B}$  est un espace de Banach et  $\mathcal{B}_M$  un espace fermé dans  $\mathcal{B}$  donc un espace métrique complet. Il s'agit de voir que  $\mathcal{F}$  est une contraction sur  $\mathcal{B}_M$  pour un certain  $M$  bien choisi.

En utilisant le fait que fait que  $F(z, \varepsilon) - F_0 = O(z)$  et (5.52), on obtient l'existence de  $K_1(R) > 0$  où  $R$  est le «rayon en  $z$ » de  $\Omega$  défini par (3.19) tel que

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, |F(z, \varepsilon) - F_0| + |F_2(z, \varepsilon, \tau(z, \varepsilon))| \leq K_1(R) \quad (5.55)$$

avec

$$\lim_{R \rightarrow 0} K_1(R) = 0 .$$

De plus, pour tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , tout  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{C}^n$ , on a

$$|J(z, \varepsilon, \Delta_1) - J(z, \varepsilon, \Delta_2)| \leq \sup_{\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]} \left| \frac{\partial J}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, \Delta) \right| |\Delta_1 - \Delta_2|$$

où, pour  $\Delta \in \mathbb{C}^{p(n-p)}$ ,

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, \Delta) = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, \Delta) - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, 0) .$$

On en déduit immédiatement l'inégalité

$$\sup_{\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]} \left| \frac{\partial J}{\partial \Delta}(z, \varepsilon, \Delta) \right| \leq \sup_{\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]} \left| \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \Delta^2}(z, \varepsilon, \Delta) \right| \|\Delta\|_\infty^{[\Delta_1, \Delta_2]} .$$

Enfin, comme on peut écrire  $\Delta = t\Delta_1 + (1-t)\Delta_2$  lorsque  $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$ , on a

$$|\Delta| \leq t|\Delta_1| + (1-t)|\Delta_2| \leq \max(|\Delta_1|, |\Delta_2|)$$

et finalement

$$|J(z, \varepsilon, \Delta_1) - J(z, \varepsilon, \Delta_2)| \leq K_2 \max(|\Delta_1|, |\Delta_2|) |\Delta_1 - \Delta_2| . \quad (5.56)$$

Ainsi, pour  $\Delta \in \mathbb{C}^{p(n-p)}$  et  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , il vient également

$$|J(z, \varepsilon, \Delta)| \leq K_2 |\Delta|^2 . \quad (5.57)$$

Vu les inégalités (5.48), (5.55), (5.56) et (5.57), il vient alors pour tout  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ :

$$|\mathcal{S}(\Delta)(z, \varepsilon)| \leq K_0 e^{-\frac{2\alpha}{|\varepsilon|^p}} + K_1(R) |\Delta(z, \varepsilon)| + K_2 |\Delta(z, \varepsilon)|^2$$

$$\text{et } |\mathcal{S}(\Delta_1)(z, \varepsilon) - \mathcal{S}(\Delta_2)(z, \varepsilon)| \leq (K_1(R) + K_2 \max(|\Delta_1|, |\Delta_2|)) |\Delta_1(z, \varepsilon) - \Delta_2(z, \varepsilon)|$$

d'où, pour tout  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}_M$  et tout  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(\Delta)(z, \varepsilon)| &\leq K_0 e^{-\frac{2\alpha}{|\varepsilon|^p}} + K_1(R) M e^{-\frac{\alpha}{|\varepsilon|^p}} + K_2 M^2 e^{-\frac{2\alpha}{|\varepsilon|^p}} \\ &\leq K_0 e^{-\frac{2\alpha}{|\varepsilon|^p}} + K_1(R) M e^{-\frac{\alpha}{|\varepsilon|^p}} + K_2 M^2 e^{-\frac{\alpha}{|\varepsilon|^p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } |\mathcal{S}(\Delta_1)(z, \varepsilon) - \mathcal{S}(\Delta_2)(z, \varepsilon)| &\leq \left( K_1(R) + K_2 M e^{-\frac{\alpha}{|\varepsilon|^p}} \right) |\Delta_1(z, \varepsilon) - \Delta_2(z, \varepsilon)| \\ &\leq (K_1(R) + K_2 M) |\Delta_1(z, \varepsilon) - \Delta_2(z, \varepsilon)| . \end{aligned}$$

En multipliant les inégalités précédentes par  $e^{\frac{\alpha}{|\varepsilon|^r}}$ , en passant à la borne supérieure pour  $(z, \varepsilon) \in \Omega$ , puis en utilisant l'inégalité (5.54), il vient :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\Delta)\|_\alpha &\leq \delta_0(\eta) + \delta_1(R)M + \delta_2M^2 \\ \text{et} \quad \|\mathcal{F}(\Delta_1) - \mathcal{F}(\Delta_2)\|_\alpha &\leq (\delta_1(R) + \delta_2M) \|\Delta_1 - \Delta_2\|_\alpha \end{aligned}$$

où

$$\delta_0(\eta) = CK_0 e^{-\frac{\alpha}{|\eta|^r}}, \quad \delta_1(R) = CK_1(R) \quad \text{et} \quad \delta_2 = CK_2$$

et où  $\eta$  est le rayon de  $V$ .

Pour que  $\mathcal{F}$  soit une contraction sur  $\mathcal{B}_M$ , il suffit alors d'avoir :

$$\delta_1(R) + \delta_2M < 1 \quad (5.58)$$

$$\text{et} \quad \delta_0(\eta) + \delta_1(R)M + \delta_2M^2 \leq M. \quad (5.59)$$

On choisit maintenant  $R$  et  $\eta$  assez petits pour avoir

$$\delta_1(R) < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \delta_0(\eta) \leq \frac{1}{\delta_2}(1/4 - 1/8 - 1/16).$$

Pour  $R$  ainsi fixé, on pose  $M = 1/(4\delta_2)$ . L'inégalité (5.58) est alors vérifiée clairement et

$$\delta_0(R, \eta) + \delta_1(R, \eta)M + \delta_2M^2 \leq \frac{1}{\delta_2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{4\delta_2} + \delta_2 \frac{1}{16\delta_2^2} = \frac{1}{4\delta_2} = M$$

d'où l'inégalité (5.59).

$\mathcal{F}$  est donc une contraction sur  $\mathcal{B}_M$ . Elle admet un unique point fixe sur  $\mathcal{B}_M$  et (5.49) admet donc une solution  $\Delta$  vérifiant

$$\forall (z, \varepsilon) \in \Omega, \quad |\Delta(z, \varepsilon)| \leq M e^{-\frac{\alpha}{|\varepsilon|^r}}$$

et  $w = \tau + \Delta$  est bien une solution bornée de (5.43). D'après la proposition (3.1), c'est l'unique solution bornée de (5.43), donc aussi la solution de (5.43) définie dans le chapitre 3.

De plus, on a, vu l'inégalité précédente et (5.46) :

$$w(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \bar{w}(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S_\varepsilon.$$

On a donc montré l'existence de  $P \in \text{Hol}_b(\Omega, M_n(\mathbb{C}))$  de la forme (5.40) transformant (5.36) en (5.38) et qui vérifie

$$P(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \bar{P}(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S_\varepsilon.$$

On en déduit immédiatement  $\lim_{(z, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} P(z, \varepsilon) = I$ . De plus, d'après les conditions (COND8), on a les relations

$$\begin{aligned} B^{11}(z, \varepsilon) &= A^{11}(z, \varepsilon) + A^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) (C^{11}(z, \varepsilon) + C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{B}^{11}(z, \varepsilon) &= \bar{A}^{11}(z, \varepsilon) + \bar{A}^{12}(z, \varepsilon)\bar{P}^{21}(z, \varepsilon) \\ &= D^1(z) + z(z^r - \varepsilon^r) \left( \bar{C}^{11}(z, \varepsilon) + \bar{C}^{12}(z, \varepsilon)\bar{P}^{21}(z, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Au vu des résultats précédents, on a clairement

$$C^{11}(z, \varepsilon) + C^{12}(z, \varepsilon)P^{21}(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{C}^{11}(z, \varepsilon) + \overline{C}^{12}(z, \varepsilon)\overline{P}^{21}(z, \varepsilon) \quad \varepsilon \in V, z \in S_\varepsilon$$

et comme on montrerait de même une relation analogue pour  $B^{11}$  et  $B^{22}$ , cela termine la preuve du lemme.  $\square$

Comme précédemment, on peut appliquer un nombre fini de fois le lemme de *splitting* pour se ramener à deux équations scalaires. On a vu alors que l'on obtient des solutions (déjà étudiées) de la forme souhaitée à multiplication près par une fonction ne dépendant que de  $\varepsilon$ . On en déduit le

**Théorème 5.3** *Soit  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V \text{ et } z \in S_\varepsilon\}$  le domaine défini dans la partie (3.3) et  $S$  un « bon secteur » de rayon assez petit contenant  $S_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon \in V$ . Considérons le système (5.2) mis sous la forme préparée (2.4) où  $C$  est holomorphe au voisinage de l'origine.*

*Le système (5.2) possède une unique solution fondamentale de la forme*

$$Y(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon)e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

*vérifiant pour tout  $\varepsilon \in V$*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\varepsilon}} H(z, \varepsilon) = I$$

*et telle que*

1.  $\forall (z, \varepsilon) \in \Omega$ ,  $H(z, \varepsilon)$  est inversible et
2.  $D_0(\varepsilon), D_1(\varepsilon), \dots, D_r(\varepsilon)$  sont des matrices diagonales holomorphes de  $\varepsilon$  en 0 définies par (2.7).

*De plus,  $H$  admet un développement asymptotique Gevrey uniforme d'ordre  $\frac{1}{r}$  :*

$$H(z, \varepsilon) \sim_{\frac{1}{r}} \overline{H}(z, \varepsilon), \quad \varepsilon \in V, \text{ unif}^t \text{ sur } S_\varepsilon$$

*où  $\overline{H} \in \text{Hol}(S, M_n(\mathbb{C}))[[\varepsilon]]_{\frac{1}{r}}$  est tel que*

$$\overline{Y}(z, \varepsilon) = \overline{H}(z, \varepsilon)e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}$$

*soit l'unique solution fondamentale formelle (à multiplication près à droite par une série formelle diagonale de terme constant  $I_n$ ) de l'équation (5.2) définie dans le théorème (5.2).*



## Annexe

# Matrices de connexion

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les systèmes

$$z^{r+1}Y'(z) = \tilde{A}(z)Y(z) \quad (\text{A.1})$$

$$z(z^r - \varepsilon^r)Y'(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon)Y(z, \varepsilon) \quad (\text{A.2})$$

et en avons obtenu diverses solutions définies sur différents domaines. L'objet de cette annexe est l'étude des connexions qui existent entre les solutions de (A.2) définies respectivement sur des domaines d'intersection non vide, puis nous envisagerons les cas dans lesquels les matrices de connexions obtenues admettent une limite. Il ne s'agit pas de faire une étude exhaustive de ces problèmes, mais de donner simplement quelques résultats significatifs, qui s'inscrivent dans le prolongement de mon travail.

Dans la suite, nous supposons que  $A$  et  $\tilde{A}$  se trouvent sous les formes préparées  $A(z, \varepsilon) = D(z) + z(z^r - \varepsilon^r)C(z, \varepsilon)$  et  $\tilde{A}(z) = D(z) + z^{r+1}\tilde{C}(z)$  où  $C$ ,  $D$  et  $\tilde{C}$  sont holomorphes au voisinage de l'origine et  $D(z) = \text{diag}(\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z))$ .

On pose  $\lambda_1 = \lambda_1(0), \dots, \lambda_n = \lambda_n(0)$  et on suppose les  $\lambda_i$  tous distincts satisfaisant les conditions (du chapitre 3) :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies \arg(\lambda_i - \lambda_j) \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}. \quad (\text{A.3})$$

Quitte à effectuer un changement d'inconnue dans l'équation (A.2), on peut alors supposer

$$\Re e(\lambda_1) < \Re e(\lambda_2) < \dots < \Re e(\lambda_n).$$

Dans le chapitre 1, nous avons défini une solution fondamentale de (A.1) de la forme

$$\tilde{Y} = \tilde{H}(z)e^{\int^z \frac{D_0 + D_1 t + \dots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt} \quad (\text{A.4})$$

et dans les chapitres 2, 3 et 4 des solutions fondamentales de (A.2) de la forme

$$Y = H(z, \varepsilon)e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt}. \quad (\text{A.5})$$

**Notation :** Pour tout indice  $\gamma$ , si l'on a noté  $Y^\gamma$  une solution de (A.2) de la forme (A.5), alors on notera  $H^\gamma$  la fonction matricielle intervenant dans cette écriture et  $H_j^\gamma$  la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $H^\gamma$ .

Considérons

$Y^0$  la solution fondamentale définie (dans le chapitre 2) sur  $D(0, |\varepsilon|)$  et vérifiant

$$\forall \varepsilon \in V, \lim_{z \rightarrow 0} H^0(z, \varepsilon) = I_n ,$$

$Y^\varepsilon$  la solution fondamentale définie (dans le chapitre 2) sur  $D(\varepsilon, R_\varepsilon)$  où  $R_\varepsilon = \min(|\varepsilon|, 2|\varepsilon| \sin \frac{\pi}{r})$  et vérifiant

$$\forall \varepsilon \in V, \lim_{z \rightarrow \varepsilon} H^\varepsilon(z, \varepsilon) = I_n ,$$

$Y^1$  la solution fondamentale définie (dans le chapitre 3) sur  $S_\varepsilon(0)$  et vérifiant

$$\forall \varepsilon \in V, \lim_{z \rightarrow 0} H^1(z, \varepsilon) = I_n ,$$

$Y^2$  la solution fondamentale définie (dans le chapitre 3) sur  $S_\varepsilon(2r - 1)$  et vérifiant

$$\forall \varepsilon \in V, \lim_{z \rightarrow 0} H^2(z, \varepsilon) = I_n .$$

Considérons la figure (A.1) sur laquelle sont représentés les domaines d'existence des solutions précédentes. Ici, le domaine  $S_\varepsilon(0)$  est délimité par  $[0, A]$ ,  $AC$ ,  $[C, \varepsilon]$  et  $[\varepsilon, 0]$  et  $S_\varepsilon(2r - 1)$  par  $[0, D]$ ,  $DB$ ,  $[B\varepsilon]$  et  $[\varepsilon 0]$ .

Décrivons les zones colorées de la figure (A.1) : la solution  $Y^0$  est définie sur les zones 1 et 2,  $Y^\varepsilon$  sur les zones 1, 2, 3, 4 et 5,  $Y^1$  sur les zones 1, 3 et 5 et  $Y^2$  sur les zones 2, 4 et 5.

Nous travaillons sur le revêtement universel  $\Pi$  de  $\mathbb{C} - \{\varepsilon\}$ . Pour simplifier les calculs, nous supposons de plus que  $\varepsilon \in V = \{t \in \mathbb{R}, 0 < t \leq \varepsilon_0\}$ , où  $\varepsilon_0$  est suffisamment petit, et nous adoptons la convention suivante :

- si  $z \in S_\varepsilon(0)$ ,  $-\delta < \arg(z - \varepsilon) < \pi$
- si  $z \in S_\varepsilon(2r - 1)$ ,  $\pi < \arg(z - \varepsilon) < 2\pi + \delta$

où  $\delta > 0$  est suffisamment petit. Ainsi, les zones 1, 2, 3, 4 et 5 sont en fait la projection sur le plan des domaines de définition des différentes solutions.

Il existe une matrice inversible  $U^{01} = U^{01}(\varepsilon)$  tel que pour tout  $z \in Z^{01} = S_\varepsilon(0) \cap D(0, |\varepsilon|)$ , on ait

$$Y^0(z, \varepsilon) = Y^1(z, \varepsilon)U^{01} . \tag{A.6}$$

On note dans la suite  $Q = \int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt$  et  $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ .

Ainsi, pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $z \in Z^{01}$ , il vient

$$H^0(z, \varepsilon) = H^1(z, \varepsilon) e^{Q(z, \varepsilon)} U^{01} e^{-Q(z, \varepsilon)}$$

ou encore

$$((H^1)^{-1}H^0)(z, \varepsilon) = e^{Q(z, \varepsilon)} U^{01} e^{-Q(z, \varepsilon)} = \left( U_{i,j}^{01} e^{(q_i - q_j)(z, \varepsilon)} \right)_{i,j}$$



soit finalement

$$H_j^0 = \sum_{i=1}^j e^{q_i - q_j} U_{i,j}^{01} H_j^1. \quad (\text{A.8})$$

De même, il existe  $L^{\varepsilon^1} = L^{\varepsilon^1}(\varepsilon)$  tel que pour tout  $z \in Z^{\varepsilon^1} = S_\varepsilon(0) \cap D(\varepsilon, R_\varepsilon)$ , on ait

$$Y^\varepsilon(z, \varepsilon) = Y^1(z, \varepsilon) L^{\varepsilon^1}. \quad (\text{A.9})$$

Avec les notations du présent chapitre, on obtient

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in Z^{\varepsilon^1}, H^\varepsilon(z, \varepsilon) = H^1(z, \varepsilon) e^{Q(z, \varepsilon)} L^{\varepsilon^1} e^{-Q(z, \varepsilon)}$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in Z^{\varepsilon^1}, ((H^1)^{-1} H^\varepsilon)(z, \varepsilon) = e^Q L^{\varepsilon^1} e^{-Q} = \left( L_{i,j}^{\varepsilon^1} e^{(q_i - q_j)(z, \varepsilon)} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

car  $H^1$  est inversible pour tout  $z \in S_\varepsilon(0)$ . De plus, pour tout  $\varepsilon \in V$ ,  $(H^1)^{-1} H^\varepsilon$  est bornée indépendamment de  $z \in Z^{\varepsilon^1} \cap D(\varepsilon, \frac{R_\varepsilon}{2})$ . Pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $z \in Z^{\varepsilon^1}$ , en conservant les notations des chapitres 2 et 3, on a

$$\begin{aligned} e^{q_i(z, \varepsilon) - q_j(z, \varepsilon)} &= e^{\int^z \frac{(\lambda_i - \lambda_j) + (\lambda_i^1(\varepsilon) - \lambda_j^1(\varepsilon))t + \dots + (\lambda_i^r(\varepsilon) - \lambda_j^r(\varepsilon))t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \\ &= e^{\int^z \frac{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_j(\varepsilon))}{r\varepsilon^r(t - \varepsilon)} - \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\varepsilon t(t^{r-1} + \varepsilon t^{r-2} + \dots + \varepsilon^{r-1})} dt} \\ &=: e^{\frac{(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_j(\varepsilon))}{r\varepsilon^r} \ln |z - \varepsilon| + M(z, \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Il existe  $m > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in V$ , tout  $z \in Z^{\varepsilon^1} \cap D(\varepsilon, \frac{R_\varepsilon}{2})$ , on ait  $|M(z, \varepsilon)| \leq \frac{m}{\varepsilon^{r+1}}$ . Il vient

$$e^{\frac{\Re(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_j(\varepsilon))}{r\varepsilon^r} \ln |z - \varepsilon|} e^{\frac{m}{\varepsilon^{r+1}}} \leq \left| e^{q_i(z, \varepsilon) - q_j(z, \varepsilon)} \right| \leq e^{\frac{\Re(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_j(\varepsilon))}{r\varepsilon^r} \ln |z - \varepsilon|} e^{\frac{m}{\varepsilon^{r+1}}}.$$

Ainsi, pour  $\varepsilon \in V$  fixé et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , il vient :

$$\text{si } i < j, \lim_{\substack{z \rightarrow \varepsilon \\ z \in Z^{\varepsilon^1}}} \left| e^{q_i(z, \varepsilon) - q_j(z, \varepsilon)} \right| = +\infty \quad \text{et} \quad \text{si } i > j, \lim_{\substack{z \rightarrow \varepsilon \\ z \in Z^{\varepsilon^1}}} \left| e^{q_i(z, \varepsilon) - q_j(z, \varepsilon)} \right| = 0$$

donc nécessairement  $L_{i,j}^{\varepsilon^1} = 0$  pour  $i < j$ , autrement dit,  $L^{\varepsilon^1}$  est triangulaire inférieure. Alors on a pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$(H^\varepsilon e^Q)_j = (H^1 e^Q L^{\varepsilon^1})_j = \sum_{i=1}^n (e^Q L^{\varepsilon^1})_{i,j} H_j^1 = \sum_{i=j}^n e^{q_i} L_{i,j}^{\varepsilon^1} H_i^1$$

soit finalement

$$H_j^\varepsilon = \sum_{i=j}^n e^{q_i - q_j} L_{i,j}^{\varepsilon^1} H_i^1. \quad (\text{A.10})$$

Montrons maintenant la

**Proposition A.3** Avec les notations précédentes, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, U_{i,i}^{01} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} L_{i,i}^{\varepsilon^1}(\varepsilon) = 1$$

**Preuve de (A.3) :** Montrons la première partie de la proposition. Remarquons que le choix de  $Y^0$  et  $Y^1$  donne pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in Z^{01}}} H_i^0(z, \varepsilon) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in Z^{01}}} H_i^1(z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

En considérant la limite (A.7), faisons tendre  $z$  vers 0 dans la relation (A.8). Il vient :

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = U_{i,i}^{01}(\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

et donc  $U_{i,i}^{01}(\varepsilon) = 1$ . Pour montrer la seconde partie de la proposition, considérons la démonstration du lemme (3.1) nous donnant la forme de la solution  $Y^1$ . La remarque (3.2) montre que l'on a

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \varepsilon \\ z \in Z^{\varepsilon 1}}} P(z, \varepsilon) = I_n .$$

Ainsi, en utilisant l'étude de l'équation scalaire faite dans le chapitre 1, on obtient l'existence de  $g_1, \dots, g_n$ , continues bornées sur le domaine  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V, z \in S_\varepsilon(0)\}$  telles que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \varepsilon \\ z \in Z^{\varepsilon 1}}} H^1(z, \varepsilon) = \text{diag}(f_i(\varepsilon), i = 1, \dots, n) \quad \text{où} \quad f_i(\varepsilon) = e^{\int_0^\varepsilon g_i(t, \varepsilon) dt} .$$

Vu le choix de  $Y^1$  et  $Y^\varepsilon$ , il vient, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \varepsilon \\ z \in Z^{\varepsilon 1}}} H_i^\varepsilon(z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \varepsilon \\ z \in Z^{\varepsilon 1}}} H_i^1(z, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_i(\varepsilon) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

En faisant tendre  $z$  vers  $\varepsilon$  dans la formule (A.10) et de façon analogue à la première partie de la preuve, on montre que l'on a pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $L_{i,i}^{\varepsilon 1} = (f_i(\varepsilon))^{-1}$ , d'où

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} L_{i,i}^{\varepsilon 1}(\varepsilon) = 1 .$$

□

On a alors les résultats suivants :

**Proposition A.4 (caractérisation de  $Y^1$ )** Soit  $Y$  une solution matricielle de (A.2),  $L = L(\varepsilon)$  une matrice triangulaire inférieure et  $U = U(\varepsilon)$  une matrice triangulaire supérieure de diagonale  $I$ . Si  $Y$  vérifie pour tout  $\varepsilon \in V$  et  $z \in Z^1 = Z^{01} \cap Z^{\varepsilon 1}$

$$\begin{aligned} Y^0(z, \varepsilon) &= Y(z, \varepsilon) U \\ Y^\varepsilon(z, \varepsilon) &= Y(z, \varepsilon) L , \end{aligned} \tag{A.11}$$

alors  $Y = Y^1$ . Autrement dit, la condition (A.11) caractérise la solution  $Y^1$ .

**Remarque A.5**  $Z^1$  correspond à la zone 1 sur la figure (A.1). △

**Proposition A.5** La solution  $Y^1$  se déduit des solutions  $Y^0$  et  $Y^\varepsilon$ .

**Remarque A.6** La proposition précédente établit un lien entre les séries solutions  $Y^0$  et  $Y^\varepsilon$  et les solutions construites au chapitre 3. Les premières sont classiques, les nôtres nouvelles. Cette proposition est intéressante car elle permet d'aborder le problème des prolongements analytiques de  $Y^0$  et  $Y^\varepsilon$  en dehors de leur disque de convergence. △

**Preuve de la proposition (A.4) :** Vu les relations (A.6) et (A.9), on a pour  $\varepsilon \in V$  et  $z \in Z^1$  :

$$\begin{aligned} Y^0(z, \varepsilon) &= Y(z, \varepsilon)U = Y^1(z, \varepsilon)U^{01} \\ Y^\varepsilon(z, \varepsilon) &= Y(z, \varepsilon)L = Y^1(z, \varepsilon)L^{\varepsilon 1} , \end{aligned}$$

$U$  est inversible et  $Y^1$  est une solution fondamentale donc pour  $\varepsilon \in V$  et  $z \in Z^1$ ,  $Y(z, \varepsilon) = Y^1(z, \varepsilon)U^{01}U^{-1}$  est inversible. Ainsi,  $L$  est également inversible et on a

$$Y(z, \varepsilon) = Y^1(z, \varepsilon)U^{01}U^{-1} = Y^1(z, \varepsilon)L^{\varepsilon 1}L^{-1}$$

d'où  $U^{01}U^{-1} = L^{\varepsilon 1}L^{-1}$ . Comme  $L^{\varepsilon 1}L^{-1}$  est triangulaire inférieure et  $U^{01}U^{-1}$  triangulaire supérieure de diagonale  $I$ , on a en fait

$$U^{01}U^{-1} = L^{\varepsilon 1}L^{-1} = I ,$$

ce qui termine la preuve de (A.4). □

**Preuve de la proposition (A.5) :** Vu les relations (A.6) et (A.9), on a pour tout  $\varepsilon \in V$  et tout  $z \in Z^1$  :

$$Y^0(z, \varepsilon) = Y^\varepsilon(z, \varepsilon)(L^{\varepsilon 1})^{-1}U^{01} .$$

Si  $Y^0$  et  $Y^1$  sont connus, on en déduit  $P = (L^{\varepsilon 1})^{-1}U^{01}$  et donc  $L^{\varepsilon 1}$  et  $U^{01}$  puisque la décomposition de  $P$  sous forme « $LU$ » est unique lorsque  $U$  a pour diagonale  $I$ . Ceci termine la démonstration de la proposition (A.5). □

De façon analogue à ce qui précède, on montrerait qu'il existe  $L^{\varepsilon 2} = L^{\varepsilon 2}(\varepsilon)$  matrice triangulaire inférieure et  $U^{02} = U^{02}(\varepsilon)$  triangulaire supérieure de diagonale  $I$  telles que

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in Z^{02} = S_\varepsilon(2r-1) \cap D(0, |\varepsilon|), Y^0(z, \varepsilon) = Y^2(z, \varepsilon)U^{02} \tag{A.12}$$

et

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in Z^{\varepsilon 2} = S_\varepsilon(2r-1) \cap D(\varepsilon, R_\varepsilon), Y^\varepsilon(z, \varepsilon) = Y^2(z, \varepsilon)L^{\varepsilon 2} . \tag{A.13}$$

Dans la suite, on note  $Z^2 = Z^{\varepsilon 2} \cap Z^{02}$ ; ce domaine correspond à la zone 2 sur la figure (A.1). Il est naturel de se demander quelles relations existent entre  $L^{\varepsilon 1}$  et  $L^{\varepsilon 2}$  ainsi qu'entre  $U^{01}$  et  $U^{02}$ .

**Proposition A.6** Avec les notations précédentes, on a

$$L^{\varepsilon 1} = L^{\varepsilon 2} \quad \text{et} \quad U^{01} = U^{02}$$

**Notation :** Nous noterons à présent  $L = L(\varepsilon) = L^{\varepsilon^1} = L^{\varepsilon^2}$  et  $U = U(\varepsilon) = U^{01} = U^{02}$ .

**Preuve de la proposition (A.6) :** Fixons  $\varepsilon \in V$ . Nous avons vu précédemment que l'on a

$$\forall z \in Z^1, Y^0(z, \varepsilon) = Y^\varepsilon(z, \varepsilon) (L^{\varepsilon^1})^{-1} U^{01}.$$

Les solutions  $Y^0$  et  $Y^\varepsilon$  étant définies respectivement sur  $D(0, \varepsilon)$  et  $D(\varepsilon, R_\varepsilon)$ , l'égalité précédente s'étend en fait à  $Z^{0\varepsilon} = D(0, \varepsilon) \cap D(\varepsilon, R_\varepsilon)$ .

De même, les relations (A.12) et (A.13) conduisent à

$$\forall z \in Z^{0\varepsilon}, Y^0(z, \varepsilon) = Y^\varepsilon(z, \varepsilon) (L^{\varepsilon^2})^{-1} U^{02},$$

et finalement  $(L^{\varepsilon^1})^{-1} U^{01} = (L^{\varepsilon^2})^{-1} U^{02}$ . L'écriture sous cette forme « $LU$ » étant unique, on a bien  $L^{\varepsilon^2} = L^{\varepsilon^1}$  et  $U^{02} = U^{01}$ .  $\square$

Nous noterons dans la suite  $Y_{pr}^1$  le prolongement analytique de  $Y^1$  le long de chemins traversant  $]0; \varepsilon[$  dans le sens trigonométrique.  $Y_{pr}^1$  est définie sur  $\Pi$  et en particulier sur  $Z^{\varepsilon^2}$ .

La relation (A.10) se prolonge comme suit à  $Z^{\varepsilon^2}$  en utilisant (A.13) et la proposition (A.6)

$$\forall z \in Z^{\varepsilon^2}, Y_{pr}^1(z, \varepsilon) = Y^\varepsilon(z, \varepsilon) L^{-1} = Y^2(z, \varepsilon) L L^{-1} = Y^2(z, \varepsilon).$$

Autrement dit, le prolongement de  $Y^1$  à  $Z^{\varepsilon^2}$  est  $Y^2$  ! On devrait pouvoir démontrer ce résultat directement, en reprenant la démonstration du lemme (3.1). Nous utilisons ici toutes les notations qui sont introduites dans ce lemme.

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage  $S_\varepsilon$  de  $]0; \varepsilon[$  et un espace de fonctions bornées holomorphes sur ce voisinage sur lequel on peut appliquer le théorème du point fixe. En fait, il suffit de montrer l'équivalent du lemme (3.3), c'est-à-dire l'existence de  $C > 0$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, p(n-p) \rrbracket$  d'une famille de chemins différentiables  $\Gamma_z(s, \varepsilon)$  vérifiant

$$\forall s \in ]0; 1[, \forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon, \left| \frac{d}{ds} (m(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)) \right| \leq -C \frac{d}{ds} (R_j(\Gamma_z(s, \varepsilon), \varepsilon)). \quad (\text{A.14})$$

On se place dans le cas où  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) > \delta > 0$ . Il faut alors que tous les chemins aient pour origine 0. On choisit pour chemins des segments de droite de représentation paramétrique

$$\Gamma(s, \varepsilon) = s^{\frac{1}{r}} \varepsilon e^{i\alpha}, \quad s \in I \quad (\text{A.15})$$

où  $I$  est à déterminer. Remarquons que ces chemins sont portés par des demi-droites d'origine 0 dans le plan des  $z^r$  puisqu'on a  $\Gamma(s, \varepsilon)^r = s \varepsilon^r e^{ir\alpha}$ . De plus,

$$R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) = \Re \left( \frac{\gamma_j}{r \varepsilon^r} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^r}{s \varepsilon^r e^{ir\alpha}} \right) \right) = \frac{|\gamma_j|}{r |\varepsilon|^r} \Re \left( e^{i\theta_r(j, \varepsilon)} \ln \left( 1 - \frac{e^{-ir\alpha}}{s} \right) \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{|\gamma_j|}{r |\varepsilon|^r} \Re \left( e^{i\theta_r(j, \varepsilon)} \frac{1}{s - e^{-ir\alpha}} - \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{|\gamma_j|}{r |\varepsilon|^r} \Re \left( e^{i\theta_r(j, \varepsilon)} \frac{e^{-ir\alpha}}{s(s - e^{-ir\alpha})} \right) \\ &= \frac{|\gamma_j|}{r |\varepsilon|^r} \frac{1}{s |s - e^{-ir\alpha}|^2} \Re \left( e^{i(\theta_r(j, \varepsilon) - r\alpha)} (s - e^{ir\alpha}) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

et

$$\left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| = \frac{1}{r|\varepsilon|^r} \frac{1}{s|s - e^{-i r \alpha}|}. \quad (\text{A.17})$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) &= \frac{|\gamma_j|}{|s - e^{-i r \alpha}|} \Re e \left( e^{i(\theta_r(j, \varepsilon) - r\alpha)} (s - e^{i r \alpha}) \right) \left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| \\ &= -|\gamma_j| \Re e \left( e^{i(\theta_r(j, \varepsilon) - r\alpha)} \frac{e^{i r \alpha} - s}{|e^{i r \alpha} - s|} \right) \left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| \\ &= -|\gamma_j| \Re e \left( e^{i(\theta_r(j, \varepsilon) - r\alpha + \arg(e^{i r \alpha} - s))} \right) \left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| \\ &= -|\gamma_j| \cos(\theta_r(j, \varepsilon) - r\alpha + \arg(e^{i r \alpha} - s)) \left| \frac{d}{ds} m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right|. \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

Pour obtenir (A.14), nous allons imposer que

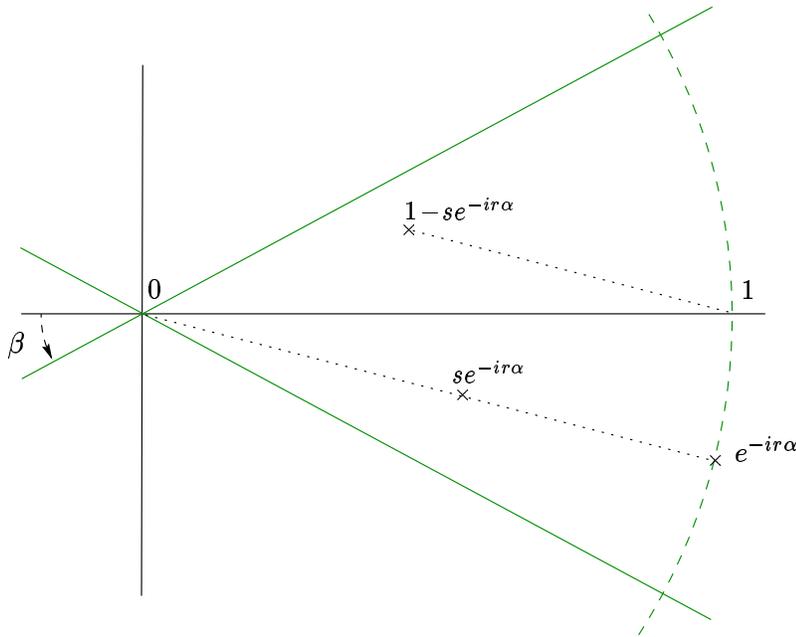
$$-r\alpha + \arg(e^{i r \alpha} - s) = \arg(1 - s e^{-i r \alpha})$$

soit suffisamment petit pour que l'on ait  $\cos(\theta_r(j, \varepsilon) - r\alpha + \arg(e^{i r \alpha} - s)) > \delta/2$ , soit une condition du type

$$|\arg(1 - s e^{-i r \alpha})| \leq \beta, \quad (\text{A.19})$$

$\beta \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  fixé suffisamment petit. Considérons la figure (A.2). La condition (A.19) impose que  $1 - s e^{-i r \alpha}$  soit dans le secteur  $S(0, -\beta, \beta)$  donc que  $\Gamma(s, \varepsilon)^r = s \varepsilon^r e^{-i r \alpha}$  soit dans le secteur  $S(\varepsilon^r, \pi - \beta, \pi + \beta)$ .

FIG. A.2: Conditions portant sur  $\arg(1 - s e^{-i r \alpha})$



Si  $\cos \theta_r(j, \varepsilon) < -\delta < 0$ , nous choisissons des chemins dont la représentation paramétrique vérifie

$$\Gamma(s, \varepsilon)^r = \varepsilon^r (1 - s e^{i r \alpha}), \quad s \in J$$

où  $J$  est à déterminer. En reprenant les calculs précédents, on obtient l'égalité suivante, analogue à (A.18) :

$$\frac{d}{ds}R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) = -|\gamma_j| \cos(\theta_r(j, \varepsilon) + \pi - r\alpha + \arg(e^{ir\alpha} - s)) \left| \frac{d}{ds}m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| ,$$

ou encore

$$\frac{d}{ds}R_j(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) = |\gamma_j| \cos(\theta_r(j, \varepsilon) + \arg(1 - se^{-ir\alpha})) \left| \frac{d}{ds}m(\Gamma(s, \varepsilon), \varepsilon) \right| . \quad (\text{A.20})$$

Pour obtenir l'inégalité (A.14), il suffit donc d'avoir (A.19) pour  $\beta$  assez petit, c'est-à-dire  $1 - se^{ir\alpha} \in S(0, -\beta, \beta)$ , ce qui s'écrit encore  $\Gamma(s, \varepsilon)^r \in S(0, -\beta, \beta)$ .

Ainsi, on peut choisir le domaine  $S_\varepsilon$ , voisinage de  $]0; \varepsilon[$  tel que

$$(S_\varepsilon)^r = S(0, -\beta, \beta) \cap S(\varepsilon^r, \pi - \beta, \pi + \beta),$$

$(S_\varepsilon)^r$  est donc un losange dans le plan des  $z^r$ . La figure (A.3) représente un tel domaine.

FIG. A.3: Représentation du domaine  $S_\varepsilon$

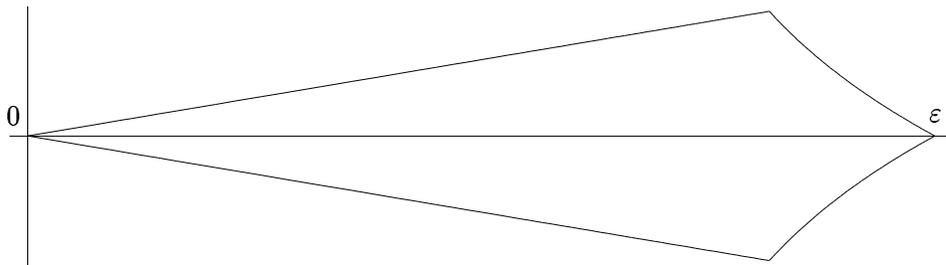


Figure réalisée pour  $r = 3$  et  $\beta = 1/3$

Le lemme (3.3) démontré, on peut affirmer qu'il existe une solution  $Y^{12}$  holomorphe bornée sur  $\Omega = \{(z, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2, \varepsilon \in V \text{ et } z \in S_\varepsilon\}$  de la forme (A.5) vérifiant

$$\forall \varepsilon \in V, \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\varepsilon}} H^{12}(z, \varepsilon) = I .$$

Par un argument d'unicité analogue à celui de la proposition (3.1), on montrerait alors que

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon \cap Z^{\varepsilon^1}, Y^1(z, \varepsilon) = Y^{12}(z, \varepsilon)$$

et

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in S_\varepsilon \cap Z^{\varepsilon^2}, Y^2(z, \varepsilon) = Y^{12}(z, \varepsilon) ,$$

d'où le résultat attendu :

$$\forall \varepsilon \in V, \forall z \in Z^{\varepsilon^2}, Y_{pr}^1(z, \varepsilon) = Y^2(z, \varepsilon) . \quad (\text{A.21})$$

On cherche à présent à établir une relation entre  $Y^1$  et  $Y^2$ . Pour cela nous utiliserons dans la suite la

**Définition A.1** Soit  $z \in \Pi$ . On définit  $z^+$  par

$$|z^+| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(z^+ - \varepsilon) = \arg(z - \varepsilon) + 2\pi$$

ou encore

$$z^+ = \varepsilon + (z - \varepsilon) e^{2i\pi}$$

Comme on a supposé (A.3), la demi-droite  $\mathbb{R}_+$  n'est pas une ligne de Stokes associée à (A.1) et donc, quitte à réduire légèrement les domaines  $S_\varepsilon(0)$  et  $S_\varepsilon(2r-1)$ , on peut supposer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon(0) =: S_1 \quad \text{et} \quad S_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon(2r-1) =: S_2 ,$$

sont de « bons secteurs ». D'après le théorème (3.3), il existe  $\tilde{Y}^1$  et  $\tilde{Y}^2$  solutions de (3.1) de la forme (A.4) définies respectivement sur  $S_1$  et  $S_2$  qui vérifient

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} H^1(z, \varepsilon) = \tilde{H}^1(z) \quad \text{pour tout } z \in S_1 \quad (\text{A.22})$$

et

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} H^2(z, \varepsilon) = \tilde{H}^2(z) \quad \text{pour tout } z \in S_2 . \quad (\text{A.23})$$

Le résidu en  $\varepsilon$  de l'équation (A.2) est  $R = \frac{D(\varepsilon)}{r\varepsilon^r}$ . Posons  $E = e^{2i\pi R}$ .

On note  $Z^5 = \{z \in \Pi, -\delta < \arg(z - \varepsilon) < \delta\}$  et pour  $z \in Z^5$ ,  $Y^3(z, \varepsilon) = Y^2(z^+, \varepsilon)E^{-1}$ . Il vient

$$\begin{aligned} Y^3(z, \varepsilon) = Y^2(z^+, \varepsilon)E^{-1} &= H^2(z^+, \varepsilon) e^{\int^{z^+} \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} E^{-1} \\ &= H^2(z^+, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} EE^{-1} \quad (\text{A.24}) \\ &= H^2(z^+, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} . \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

De plus, il existe  $\tilde{C}$ ,  $C = C(\varepsilon) \in M_n(\mathbb{C})$  tels que

$$\forall z \in S_1 \cap S_2, \quad \tilde{Y}^2(z) = \tilde{Y}^1(z) \tilde{C} \quad (\text{A.26})$$

$$\text{et} \quad \forall z \in Z^5, \quad Y^3(z, \varepsilon) = Y^1(z, \varepsilon) C(\varepsilon) . \quad (\text{A.27})$$

Au vu de (A.22), on a pour tout  $z \in S_1 \cap S_2$

$$Y^1(z, \varepsilon) = H^1(z, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}]{} \tilde{H}^1(z) e^{\int^z \frac{D_0 + D_1 t + \dots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt} = \tilde{Y}^1(z)$$

et d'après (A.23), (A.24) et (A.27),

$$\begin{aligned} Y^3(z, \varepsilon) &= Y^1(z, \varepsilon) C(\varepsilon) = Y^2(z^+, \varepsilon)E^{-1} \\ &= H^2(z^+, \varepsilon) e^{\int^z \frac{D_0(\varepsilon) + D_1(\varepsilon)t + \dots + D_r(\varepsilon)t^r}{t(t^r - \varepsilon^r)} dt} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}]{} \tilde{H}^2(z) e^{\int^z \frac{D_0 + D_1 t + \dots + D_r t^r}{t^{r+1}} dt} = \tilde{Y}^2(z) , \end{aligned}$$

d'où la

**Proposition A.7** *On a  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} C(\varepsilon) = \tilde{C}$ .*

Cherchons à déterminer une équation liant  $C$ ,  $L$  et  $E$ .

Pour tout  $z \in Z^6 = \{t \in \Pi, |t - \varepsilon| < R_\varepsilon, -\delta < \arg(z - \varepsilon) < \delta\}$ , on a, d'après (A.9) et (A.27),

$$Y^\varepsilon(z^+, \varepsilon) = Y^2(z^+, \varepsilon) L = Y^1(z, \varepsilon) CEL \quad (\text{A.28})$$

et aussi, d'après (A.9),

$$Y^\varepsilon(z^+, \varepsilon) = Y^\varepsilon(z, \varepsilon) E = Y^1(z, \varepsilon) LE . \quad (\text{A.29})$$

On en déduit la

**Proposition A.8** *Les matrices  $C$ ,  $E$  et  $L$  de  $GL_n(\mathbb{C})$  sont liées par l'égalité  $CEL = LE$ .*

On a donc  $C = LEL^{-1}E^{-1}$ . Toutes les matrices considérées ici étant triangulaires inférieures, la diagonale de  $C$  est  $I$ . On pose  $\tilde{L} = ELE^{-1}$ . Montrons que les matrices  $L$  et  $\tilde{L}$  admettent une limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

**Notation :** On note  $T^-$  l'ensemble des matrices triangulaires inférieures et  $T_s^-$  l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes.

Soit  $\mathcal{T}$  l'opérateur linéaire défini sur  $T^-$  par  $\mathcal{T}(M) = E^{-1}ME$ . Vu la proposition (A.8), on a  $CLEE^{-1} = L = E^{-1}\tilde{L}E$  soit  $C\tilde{L} = E^{-1}\tilde{L}E$  ou encore

$$C\tilde{L} = \mathcal{T}(\tilde{L}) . \quad (\text{A.30})$$

On pose  $\mathcal{S} = \mathcal{T} - I_d$ . Pour tout  $M \in T^-$  et tout  $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  on a

$$(\mathcal{S}(M))_{pq} = M_{pq} \left( e^{2i\pi \frac{\lambda_q(\varepsilon) - \lambda_p(\varepsilon)}{r\varepsilon^r}} - 1 \right) .$$

De plus,

$$\left| e^{2i\pi \frac{\lambda_q(\varepsilon) - \lambda_p(\varepsilon)}{r\varepsilon^r}} \right| = e^{\Re(2i\pi \frac{\lambda_q(\varepsilon) - \lambda_p(\varepsilon)}{r\varepsilon^r})} = e^{2\pi \frac{\Im(\lambda_p(\varepsilon) - \lambda_q(\varepsilon))}{r\varepsilon^r}}$$

et pour  $\varepsilon \in V$  de module assez petit,  $\Im(\lambda_p(\varepsilon) - \lambda_q(\varepsilon)) \neq 0$  vu la condition (A.3). Ainsi ,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} \left| e^{2i\pi \frac{\lambda_q(\varepsilon) - \lambda_p(\varepsilon)}{r\varepsilon^r}} \right| = \begin{cases} +\infty & \text{si } \Im(\lambda_p(\varepsilon)) > \Im(\lambda_q(\varepsilon)) \\ 0 & \text{si } \Im(\lambda_p(\varepsilon)) < \Im(\lambda_q(\varepsilon)) \end{cases}$$

Ceci implique que pour  $\varepsilon \in V$  de module suffisamment petit,  $\ker(\mathcal{S})$  est l'ensemble des matrices diagonales et que la restriction de  $\mathcal{S}$  à  $T_s^-$  est inversible. Pour tout  $M \in T_s^-$  on a alors

$$(\mathcal{S}^{-1}(M))_{pq} = M_{pq} \left( e^{2i\pi \frac{\lambda_q(\varepsilon) - \lambda_p(\varepsilon)}{r\varepsilon^r}} - 1 \right)^{-1} ,$$

d'où

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in V}} (\mathcal{S}^{-1}(M))_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Im(\lambda_p(\varepsilon)) > \Im(\lambda_q(\varepsilon)) \\ -M_{pq} & \text{si } \Im(\lambda_p(\varepsilon)) < \Im(\lambda_q(\varepsilon)) \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

La relation (A.30) s'écrit encore

$$\mathcal{S}(\tilde{L}) = (\mathcal{T} - I_d)(\tilde{L}) = (C - I)\tilde{L} ,$$

de sorte que si l'on pose  $R = \tilde{L} - \text{diag}(\tilde{L}) \in T_s^-$ , il vient  $\mathcal{S}(R) = \mathcal{S}(\tilde{L}) = (C - I)\tilde{L}$  soit

$$R = \mathcal{S}^{-1}((C - I)\tilde{L}) ,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{L} = \text{diag}(\tilde{L}) + \mathcal{S}^{-1}((C - I)\tilde{L}) .$$

On considère l'opérateur linéaire  $\mathcal{N}$  défini sur  $T^-$  par  $\mathcal{N}(M) = \mathcal{S}^{-1}((C - I)M)$ . Comme  $C - I \in T_s^-$ ,  $\mathcal{N}$  est nilpotent d'ordre  $n$  et on a

$$\tilde{L} = \text{diag}(\tilde{L}) + \mathcal{N}(\tilde{L}) = \text{diag}(\tilde{L}) + \mathcal{N}(\text{diag}(\tilde{L})) + \mathcal{N}^2(\tilde{L}) = \dots = \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{N}^k(\text{diag}(\tilde{L})) .$$

Nous avons vu plus haut que  $\mathcal{S}^{-1}$  et  $C = C(\varepsilon)$  convergent lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, nous savons également (voir proposition A.3) que  $\text{diag}(\tilde{L})$  admet comme limite  $I$ . On en déduit que  $\mathcal{N}$  et  $\tilde{L}$  admettent une limite et on a

$$\tilde{L}^{lim} : = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{L} = \sum_{k=1}^{n-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{N})^i(I) .$$

La formule précédente montre que  $\tilde{L}^{lim}$  est déterminée par les coefficients non diagonaux de  $\tilde{C}$ . En utilisant la relation  $C^{-1}L = ELE^{-1}$ , on montrerait de même que  $L$  admet une limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

**Remarque A.7** On peut maintenant se demander si l'on peut déduire plus précisément les structures de  $L$  et  $\tilde{L}$ . La réponse semble être positive en utilisant la formule (A.31).  $\triangle$





J'écris une lettre et je l'envoie.  
Le brouillon en est là, sous mes yeux.  
Je le relis.  
Je n'en suis pas satisfait – mais la lettre est partie !  
Je corrige le brouillon quand même.

Sacha GUITRY



# Bibliographie

- [BAL94] Werner BALSER. *From divergent power series to analytic functions*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, 1994.
- [BAL00] Werner BALSER. *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*. Springer, New York, London, Paris, 2000.
- [BOR28] Émile BOREL. *Leçons sur les séries divergentes*. Gauthier-Villars (2<sup>e</sup> édition), Paris, 1928.
- [CD99] Mireille CANALIS-DURAND. Solutions Gevrey d'équations différentielles singulièrement perturbées. Mémoire pour obtenir une habilitation à diriger des recherches, Université de Droit, d'Économie et des Sciences d'Aix-Marseille, Faculté d'Économie appliquée, 1999.
- [DRSY99] M. CANALIS-DURAND, J.-P. RAMIS, R. SCHÄFKE et Y.SIBUYA. « Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations ». *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1999.
- [CL55] Earl A. CODDINGTON et Norman LEVINSON. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, inc., New York, London, 1955.
- [GAR19] René GARNIER. « Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires ». *Journal de Math. pures et appliquées*, 8<sup>e</sup> série, 2:99–198, 1919.
- [GLU99] A.A. GLUTSUK. « Stokes operators via limit monodromy of generic perturbation ». *Journal of Dynamical and Control Systems*, 5 (n<sup>o</sup> 1), 1999.
- [GOU36] Edouard GOURSAT. *Leçons sur les séries hypergéométriques, Propriétés générales sur les équations d'Euler et de Gauss*. Hermann, Paris, 1936.
- [HS99] Po-Fang HSIEH et Yasutaka SIBUYA. *Basic theory of ordinary differential equations*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [LUK69] Yudell L. LUKE. *The special functions and their approximations*. Academic Press, New York, 1969.
- [PAR99] Laurent PARISE. « Séries asymptotiques, exemples et applications ». *Revue des Mathématiques de l'enseignement Supérieur*, 2, octobre 1999.
- [RAM89] Jean-Pierre RAMIS. « Confluence et résurgence ». *Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics*, 36 (n<sup>o</sup> 3), 1989.
- [RAM93] Jean-Pierre RAMIS. « Séries divergentes et séries asymptotiques ». *bulletin de la société mathématique de France*, 121 (Panoramas et synthèses), 1993.

- [SCH98] Reinhard SCHÄFKE. « Confluence of several regular singular points into an irregular singular one. ». *Journal of Dynamical and Control Systems*, 1998.
- [STE99] Catherine STENGER. « *Points tournants de systèmes d'équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées* ». Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, 1999. Prépublication de l'IRMA.
- [WAS76] Wolfgang WASOW. *Asymptotic expansion for ordinary differential equations*. Robert E.Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1976.
- [WAT11] G.N. WATSON. « A theory of asymptotics series ». *Phil. Trans. of Royal Soc. of London (Ser. A)*, 211:279–313, 1911.
- [ZHA94] Changui ZHANG. « *Quelques études en théorie des équations fonctionnelles et en analyse combinatoire* ». Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, 1994. Prépublication de l'IRMA.