A mon père GAETANO
A ma mère ROSA
A ma soeur MARIE

Remerciements

Ce mémoire est le fruit de quelques années très mouvementées dont l'un des acteurs et témoins est Olivier GEBUHRER. *Je tiens à lui marquer ma profonde gratitude et reconnaissance pour les longues heures de discussions que nous avons eues, sa patience infinie et son soutien infaillible. En le côtoyant, j'ai eu la chance de partager sa passion pour l'Analyse, et en particulier l'Analyse Harmonique. Je le remercie pour tout ce que j'ai pu apprendre auprès de lui.*

Je remercie vivement Massimo PICARDELLO *et Jean* ESTERLE *qui me font l'honneur d'être rapporteurs externes de la thèse. Leurs travaux ont été une grande source d'inspiration pour moi, ils m'ont apporté tant sur le plan mathématique que sur le plaisir de faire des mathématiques.*

Je suis également honoré que Thomas DELZANT *ait accepté d'être rapporteur interne de la thèse. Je remercie également le professeur* DE MICHELE *de m'avoir reçu à Milan où nous avons pu comparer nos méthodes sur le problème des fonctions opérant sur l'algèbre* $B(G)$.

Je tiens à remercier tous ceux qui à un moment m'ont aidé par des discussions, par leur gentillesse. Je tiens à saluer particulièrement Olivier BRACCO *et Edith* SOCIÉ-MÉTHOU *qui peut-être sans le savoir m'ont souvent aidés à surmonter quelques moments de doutes.*

Je dédie également ce travail à mes amis de longues dates Régis, Alexandre, Enzo et Arnold.

Table des matières

1 Synthèse harmonique **11**

1.1 Position du problème 11

1.2 Méthode du semigroupe 12

1.2.1 Théorème de Wiener 12

1.2.2 Application à la synthèse harmonique. Principe 14

1.3 Fermés de type Z(P) 15

1.3.1 Croissance du semigroupe 15

1.3.2 Condition nécessaire et suffisante de la synthèse harmonique 17

1.4 Applications de la méthode 23

1.4.1 Synthèse harmonique des points 23

1.4.2 Synthèse du cercle dans $\mathbb{R}^2$ 23

1.4.3 Non synthèse de la sphère 26

1.4.4 Synthèse de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ 28

1.5 Application de la méthode dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. 30

1.5.1 Rappels sur cette algèbre. 30

1.5.2 Caractères de l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ 31

1.5.3 Application de la méthode du semigroupe dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. 36

1.6 Théorème de Wiener dans l'hypergroupe de Chébli-Trimèche. 39

2 Fonction opérant sur l'algèbre de Fourier d'un groupe discret **43**

2.1 Position du problème 43

2.2 Réduction au cas abélien pour certaines classes de groupes discrets. 45

2.2.1 Principes 45

2.2.2 Application aux groupes résolubles. 46

2.3 Décomposition de Lebesgue 48
2.3.1 Support d'une forme normale sur une algèbre de von Neumann . . . 48
2.3.2 Décomposition de Lebesgue 50
2.4 Lemme de Translation pour un groupe non abélien discret. 54
2.4.1 Préliminaires 54
2.4.2 Lemme de Translation 58
2.5 Fonctions opérant sur $\mathcal{B}(G)$ 60
2.6 Le groupe libre à un nombre fini de générateurs 63
2.6.1 Préliminaires sur les fonctions radiales 63
2.6.2 Caractères de l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$. 64
2.6.3 Caractères de l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ 66

3 Une caractérisation des groupes discrets. 67
3.1 Préliminaires 68
3.2 Une caractérisation des groupes discrets. 71

Introduction

On peut construire sur un groupe localement compact abélien G toute une série d'espaces de Banach du type $L^p(G)$ où $1 \leq p \leq \infty$. L'une des opérations les plus naturelles du groupe sur une fonction $f \; : \; G \to \mathbb{C}$ donnée est la translation par un élément x de G, qui se définit simplement par $\tau_x f \; (y) \; = \; f(x^{-1}y)$. Une des questions naturelles que l'on peut se poser est de savoir caratériser les sous-espaces fermés de $L^p(G)$ invariants par les translations de G. Les espaces $L^p(G)$ $(1 < p < +\infty)$ et $L^1(G)$ ont des structures très différentes, les premiers sont des espaces de Banach réflexifs, tandis que sur $L^1(G)$ nous pouvons définir le produit de deux de ces éléments, si $f, \; g \in L^1(G)$ et $x \in G$ on pose $f * g \; (x) \; = \; \int_G \; f(y) \; \tau_y \; g(x) \; dy$. $L^1(G)$ est une algèbre de Banach pour ce produit de convolution ; si G n'est pas compact, pour $p \in]1, +\infty[$ aucun des espaces $L^p(G)$ ne possède cette propriété. Dans le cas où G est compact, le groupe dual $\hat{G}$ est discret et le problème de la synthèse harmonique dans $L^1(G)$ est trivial.

Dans le cas général d'un groupe localement compact abélien, les sous-espaces fermés de $L^1(G)$ invariants par translation sont exactement les idéaux fermés de l'algèbre de Banach $L^1(G)$. Peut-on alors caractériser ces idéaux fermés ?

Dans l'étude de ces idéaux, l'un des outils indispensable est la transformation de Fourier car elle permet de décrire l'ensemble des caractères de l'algèbre $L^1(G)$. En effet, si on désigne par $\hat{G}$ le groupe dual de G, l'ensemble des caractères du groupe G, un caractère de $L^1(G)$ est de la forme $f \mapsto \hat{f}(\gamma) \; = \; \int_G \; f(x) \; \gamma^{-1} \; (x) \; dx$

Etant donné un idéal fermé I de $L^1(G)$, on peut lui associer l'ensemble fermé de $\hat{G}$ définit par $Z(I) \; = \; \{\gamma \in \hat{G} \; : \; \hat{f} \; (\gamma) \; = \; 0 \;\; \forall f \in I\}$, ensemble des zéros de l'idéal I.

Réciproquement, étant donné un fermé F de $\hat{G}$, nous pouvons définir l'idéal fermé $I_F \; = \; \{ \; f \in L^1(G) \; : \; \hat{f}(\gamma) \; = 0 \;\; \forall \gamma \in F\}$ et dans ce cas $Z(I_F) \;\; = \; F$.

Ces fermés permettent-ils de caractériser les idéaux fermés de $L^1(G)$? Etant donné deux idéaux $I, \; J$ de $L^1(G)$ vérifiant $Z(I) \; = \; Z(J)$, a-t-on $I \; = \; J$? La réponse est non en générale, Laurent Schwartz a donné le premier contre-exemple en 1948 en démontrant que la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ est l'ensemble des zéros de différents idéaux fermés de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (c.f. [30]).

Deux classes de fermés apparaissent, les fermés F qui ne correspondent qu'à un seul idéal fermé, l'idéal I_F, et qui en quelque sorte le reconstitue, ils sont appelés fermés de synthèse harmonique ; et les autres qui correspondent à différents idéaux fermés de $L^1(G)$: fermés de non-synthèse harmonique.

Même dans le cas du groupe $\mathbb{R}^n$, a priori plus simple puisqu'on y dispose de la théorie des distributions, la question de savoir si un fermé est de synthèse ou non n'est pas simple, même si nous nous restreignons aux fermés de la forme $Z(P)$ ensemble des zéros d'un polynôme P de $\mathbb{R}^n$. C'est à cette étude qu'est consacrée l'essentiel du premier chapitre. Présentons rapidement l'approche classique du problème de la synthèse : on se ramène en général à étudier l'algèbre $A(\hat{G})$ image de l'algèbre $L^1(G)$ par la transformation de Fourier, qui est une sous-algèbre dense de $C_0(\hat{G})$, espace des fonctions continues sur $\hat{G}$ de limite nulle à l'infini, munie du produit usuel des fonctions et de la norme transportée de $L^1(G)$; $A(\hat{G})$ est alors une algèbre de Banach de fonctions continues pour une norme plus fine que celle de la convergence uniforme.

La première question est d'élucider la régularité de cette algèbre dont on démontre que son spectre de Gel'fand est $\hat{G}$. Autrement dit, on veut savoir si, étant donnés $\gamma_0 \in \hat{G}$ et Φ un fermé de $\hat{G}$ tel que $\gamma_0 \notin \Phi$, il existe un élément $u \in A(\hat{G})$ qui sépare γ_0 et Φ.

En raffinant cette idée, on est naturellement amené à considérer l'idéal $k(\hat{G}) = \{ u \in A(\hat{G}) : u \text{ est à support compact} \}$, et à déterminer si cet idéal est dense dans $A(\hat{G})$. Les résultats de synthèse harmonique s'appuient sans exception, malgré une très grande variété de situations, sur ce socle commun : le fait que $A(\hat{G})$ possède un idéal de fonctions molles est donc le coeur de l'approche classique.

Nous nous sommes intéressé à la démonstration originale de Jean Esterle ([12]) du théorème de Wiener (synthèse de l'ensemble vide), la méthode consiste à faire OPERER une famille de fonctions analytiques sur l'aglèbre $A(\hat{G})$.

Cette démonstration repose sur les propriétés de croissance du semigroupe de la chaleur $(a_t)_{t>0}$, prolongé en un semigroupe analytique sur le demi-plan complexe (Re t>0), $(a_t)_{Re\ t>0}$. En investiguant cette "méthode du semigroupe", nous avons montré qu'un semigroupe $(\psi_t)_{Re\ t>0}$ contenu dans l'idéal I_F de $L^1(G)$ analytique dans le demi-plan complexe $Re\ t > 0$, et vérifiant la condition de croissance

$$\sup_{Re\ t \geq 1} e^{-|t|^\alpha} \parallel \psi_t \parallel_1 < \infty$$

pour un certain $\alpha < 1$, contient l'information sur la synthèse ou non du fermé F. L'avantage d'une telle méthode est de procéder par une approche unique du problème de la synthèse harmonique des fermés alors que les études classiques (Beurling, Malliavin, Herz, ...) forment un panorama très varié et ne permettent pas d'avoir une vision plus globale du problème. Dans le cas des fermés du type $Z(P)$, nous considérons le semigroupe de convolutions $(\psi_t)_{Re\ t>0}$ constitué par les fonctions de Schwartz dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\psi}_t(x) = \begin{cases} e^{-t(\|x\|^2 + \frac{1}{P(x)^2})} & \text{si} \quad x \notin Z(P) \\ 0 & \text{si} \quad x \in Z(P) \end{cases}$$

Ce semigroupe est analytique dans le demi-plan complexe $\{Re\ t > 0\}$ et il a une croissance polynômiale, ce qui est compaptible avec la croissance du groupe G et tout laisse à penser qu'il y a un lien entre le type de la croissance du semigroupe et celle du groupe. Ce semigroupe contient l'information de la synthèse ou non du fermé $Z(P)$. Si on désigne par D l'opérateur de dérivation des fonctions, cette méthode nous conduit à donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un fermé de type $Z(P)$ soit de synthèse, condition portant sur un itéré de l'opérateur différentiel $P(D)$, obtenu par transformation de Fourier du polynôme P.

La condition obtenue est la suivante : il existe un entier $k_P \leq 6n$ tel que :
$Z(P)$ est un fermé de synthèse si et seulement si pour toute $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant l'équation $P(D)^{k_P}\ f = 0$, on a $< f, g > = 0$ pour toute fonction $g \in I_F$. Cette méthode nous permet ici de retrouver par exemple la synthèse des points dans $\mathbb{R}^n$, la synthèse de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou encore la non-synthèse de la sphère dans $\mathbb{R}^3$. Nous évoquons également d'autres applications de la méthode du semigroupe, par exemple lorsque le semigroupe est radial, nous pouvons transposer le problème dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions radiales de $L^1(\mathbb{R}^n)$, et nous donnons par ailleurs le théorème de Wiener dans le cas de l'hypergroupe de Chébli-Trimèche.

Les parties suivantes sont consacrées à diverses questions d'analyse harmonique sur les groupes discrets.

Poursuivant certaines orientations des travaux classiques, on est naturellement amené à s'intéresser à la question du calcul symbolique sur certaines algèbres de Banach ; l'exemple classique du théorème de Wiener suffira à illustrer le propos : si $f \in L^1(G)$ et $Z(\hat{f}) = \varnothing$, on a vu que l'idéal engendré par f dans $L^1(G)$ est dense dans $L^1(G)$. Cet énoncé classique du théorème de Wiener se prolonge par celui du théorème de Wiener-Lévy : si ϕ est une fonction analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ sans zéro en 0, alors $\frac{1}{\phi}$ opère sur $A(\hat{G})$, c'est-à dire

$$\frac{1}{\phi(\hat{f})} \in A(\hat{G})$$

si $\hat{G}$ est compact.

Cela amène à se demander quelles sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui opèrent sur $A(\hat{G})$ (respectivement $B(\hat{G})$ algèbre des transformées de Fourier des mesures bornées sur G). La réponse dans le cas d'un groupe localement compact abélien est donnée par le théorème de Kahane-Katznelson-Rudin [25] :

- si F est définie sur $[-1, 1]$, $\hat{G}$ est un groupe abélien localement compact, non-compact, et si F opère sur $B(\hat{G})$ alors F se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$.

Dans le cas abélien, les théorèmes de structure des groupes abéliens permettent en fait de se restreindre au cas où F est 2π périodique et opére sur $B(\hat{G})$ où $\hat{G}$ est discret et dénombrable.

- si F est définie sur $[-1, 1]$ et $\hat{G}$ est un groupe discret infini abélien, si F opère sur l'algèbre $A(\hat{G})$ alors $F(0) = 0$ et F est analytique dans un voisinage de l'origine.

Une des clés de ce résultat réside dans la non-symétrie de $B(\hat{G})$: autrement dit, $B(\hat{G})$ possède des caractères non hermitiens et cela conduit à l'existence de fonctions $u \in B(\hat{G})$ telles que $u \geq 1$ sur $\hat{G}$ mais telle que $1/u \notin B(\hat{G})$, énoncé à rapprocher du théorème de Wiener-Lévy.
Comme dans la situation classique où $\hat{G}$ est compact, on voit qu'il est naturel de penser à l'extension de ce travail au cas où G est un groupe discret quelconque (si G est abélien, $\hat{G}$ groupe dual de G est compact).

Bien entendu, si G est discret quelconque, on ne dispose pas a priori d'un objet dual, et encore moins d'un groupe dual. Néanmoins les algèbres $A(G)$ et $B(G)$ introduites par Pierre Eymard sont les objets qui généralisent à tout groupe localement compact G la situation abélienne.

La thèse présente les premiers pas dans cette direction ; d'autres auteurs se sont attaqués avant nous à ce problème (Dunkl, Rider, De Michele and Soardi) sans apporter de solutions définitives. Notre travail est néanmoins indépendant du leur. La première étape consiste à établir le théorème suivant : si F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ opérant sur $A(G)$ ou $B(G)$ alors F est continue à l'origine, dans le cas de l'algèbre $B(G)$ elle est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

Pour cela nous avons besoin d'une généralisation d'un résultat appelé "lemme de translation de Helson" que nous établissons par une méthode originale donnant une nouvelle décomposition de Lebesgue pour les formes normales dans le cadre des algèbres de von Neumann.

Poursuivre l'investigation suppose a priori la levée d'obstructions sérieuses : disons tout d'abord qu'on peut voir aisément (argument oral dû à N. Lohoué) que le théorème K-K-R (Kahane-Katznelson-Rudin) est vrai pour tout groupe libre à un nombre arbitraire de générateurs. Mais on ne comprend pas réellement ce qui ce passe en termes de théories des représentations des groupes. En effet, si l'on se restreint au groupe libre à un nombre fini de générateurs, on dispose des sous-algèbres $A^\sharp(G)$ et $B^\sharp(G)$ constituées des fonctions radiales sur G qui appartiennent respectivement à $A(G)$ et $B(G)$. On peut montrer (voir chapitre ..) que le théorème K.K.R. tombe en défaut pour ces algèbres qui portent par ailleurs des informations fondamentales pour la théorie des représentations du groupe libre. D'autres part, les groupes libres à $n > 1$ générateurs sont NON MOYENNABLES. Or, il est aisé de voir que pour revenir au cas classique, la démonstration du théorème K-K-R suppose l'intervention de la moyennabilité du groupe G. Enfin, la situation moyennable ne présente pas non plus sous de meilleurs auspices : en effet, les groupes localement finis sont moyennables ; le fait que l'argument donné par N. Lohoué permette de dire que le théorème K.K.R. est vrai pour ces groupes résulte d'un théorème non-trivial d'algèbre, à savoir l'existence d'un sous-groupe abélien infini. Nous espérons pouvoir revenir sur ces questions dans des travaux ultérieurs.

Le chapitre 3 est consacré à un problème différent sur les groupes discrets. Lorsque G est un groupe localement compact unimodulaire, Helgason [17] considère deux topologies sur l'espace $L^1(G)$, la topologie de la norme usuelle sur $L^1(G)$ et la norme spectrale $\| \ \|_{sp}$ les opérateurs de convolutions sur $L^2(G)$, $g \mapsto f * g$ où $f \in L^1(G)$. Un opérateur T de $L^1(G)$ est spectralement continu lorsque $\sup_{\| f \|_1 \leq 1} \| T f \|_{sp} < \infty$. Helgason a montré alors que lorsque G est un groupe localement compact, non compact, connexe séparable et unimodulaire il n'y a pas d'opérateurs spectralement continus et commutant avec les translations à droite non-triviaux de $L^1(G)$. Poursuivant cette étude, Sakai [27] donne une démonstration de ce résultat dans le cas général où G est un groupe localement compact, non-compact. Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à cette question dans le cadre de l'algèbre de Fourier $\mathcal{A}(G)$ d'un groupe G localement compact. Les opérateurs bornés de $L^1(G)$ commutant avec les translations à droites sont de la formes $f \mapsto \mu * f$ où μ est une mesure bornée sur G. Nous considérons alors le sous-espace dans $\mathcal{A}(G)$ "équivalent" des opérateurs spectralement continus et commutant avec les translations à droite sur $L^1(G)$, défini par

$$\mathcal{S}(G) = \{u \in \mathcal{A}(G) \ : \ \exists\, c \ > \ 0 \text{ vérifiant } \| uv \|_{\mathcal{A}(G)} \leq c \, \| \ v \|_\infty, \ \forall v \in \mathcal{A}(G)\}.$$

Nous avons alors montré que si l'espace $S(G) \neq \{0\}$ alors G est un groupe discret. Signalons les travaux récents de M.O. Gebuhrer et R. Szwarç qui ont montré que lorsque G est discret $\mathcal{S}(G) = l^2(G)$.

Chapitre 1

Synthèse harmonique

1.1 Position du problème

Considérons un groupe localement compact abélien G muni d'une mesure de Haar m, $\hat{G}$ le groupe dual de G constitué des caractères du groupe G. Si f est un élément de l'algèbre de Banach $L^1(G)$ alors nous noterons $\hat{f}$ sa transformée de Fourier, elle est donnée par
$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dx$ pour $\gamma \in \hat{G}$.

Etant donné un idéal I de $L^1(G)$, on définit l'ensemble des zéros de I dans $\hat{G}$

$$Z(I) = \{\gamma \in \hat{G} \text{ tel que } \hat{f}(\gamma) = 0 \ \ \forall f \in I\}$$

$Z(I)$ est un fermé dans $\hat{G}$. Réciproquement, si F est un fermé de $\hat{G}$, on peut définir l'idéal fermé $I_F = \{f \in L^1(G) \text{ tel que } \hat{f}(\gamma) = 0 \ \ \forall \gamma \in F\}$, dans ce cas $Z(I_F) = F$.

Le problème de la synthèse harmonique du fermé F est de savoir si I_F est l'unique idéal fermé I de $L^1(G)$ vérifiant $Z(I) = F$.

On considère l'idéal $J_F = \{f \in L^1(G)\ \hat{f}$ s'annule dans un voisinage de $F\}$ cet idéal vérifie $Z(J_F) = F$, en fait l'idéal fermé $\overline{J_F}$ est le plus petit ayant cette propriété, i.e. si nous considérons un idéal fermé I tel que $Z(I) = F$ alors

$$J_F \subset I \subset I_F$$

Et donc le problème de synthèse se réduit à déterminer si $\overline{J_F} = I_F$ ou non.

1.2 Méthode du semigroupe

1.2.1 Théorème de Wiener

Rappelons succinctement les grandes lignes de la preuve du théorème de Wiener donnée par Esterle. Plaçons nous dans $L^1(\mathbb{R})$, le théorème de Wiener (synthèse de l'ensemble vide) revient à montrer que l'idéal
$J_\varnothing = \{f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f}$ est à support compact$\}$ est dense dans l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$.

Soit I est un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R})$ tel que $Z(I) = \varnothing$ alors l'algèbre $L^1(\mathbb{R})/I$ est radicale. Il suffit de montrer alors que cette algèbre radicale est nulle.

Pour ce faire, J. Esterle considère le semigroupe de la chaleur $(a_t)_{t>0}$ et il démontre que l'image de ce semigroupe dans $L^1(\mathbb{R})/I$ est le semigroupe nul, le semigroupe de la chaleur étant une unité approchée dans $L^1(\mathbb{R})$ on en déduit que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})/I$ est nulle.

Chaque élément d'une algèbre radicale a un rayon spectral nul, en particulier le rayon spectral de a_1 est nul, on peut alors en déduire un résultat sur la croissance du semigroupe :

Lemme 1.2.1. *Soit R une algèbre de Banach radicale, et $(a^t)_{t>0}$ un semigroupe de A tel que $t \longmapsto a^t$ soit continue de R^+ dans A. Alors*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \| a^t \|}{t} = -\infty$$

Par ailleurs, le semigroupe de la chaleur se prolonge en un semigroupe $(a_t)_{Ret>0}$ analytique dans le demi-plan $H = \{z \in \mathbb{C}\ Rez > 0\}$. Le théorème d'Ahlfors-Heins nous donne un résultat sur les fonctions analytiques dans le demi-plan complexe H et continues sur $\overline{H}$:

Théorème 1.2.2. *Ahlfors-Heins [4]*

Soit f une fonction continue et bornée sur $\overline{H}$, analytique dans H. Si f n'est pas la fonction nulle, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$(\theta \in [-\pi/2; \pi/2[)$
$$\limsup_{r\to\infty} \frac{log \mid f(re^{i\theta}) \mid}{r} = c\ cos\theta$$

Et son corollaire qui nous est utile ici :

Corollaire 1.2.3. *Soit f continue sur $\overline{H}$ et analytique dans H. Supposons qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $\sup_{Re\ t \geq 0} e^{-|t|^\alpha} \mid f(t) \mid < \infty$,*

si $\limsup_{t \to \infty} \frac{log|f(t)|}{t} = -\infty$, alors g est identiquement nulle.

Le corollaire du théorème d'Ahlfors-Heins nous dit que pour les fonctions continues sur $\overline{H}$, analytiques dans H, il y a une incompaptibilé entre une croissance sous-exponentielle (croissance en $e^{|t|^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$) et la condition $\limsup_{t \to \infty} \frac{log|f(t)|}{t} = -\infty$, Esterle applique donc ce résultat aux fonctions $f(t) = u\ (a_{(t+1)})$ où u est une forme linéaire de l'algèbre $L^1(\mathbb{R})/I$ puisque le semigroupe choisi $(a_t)_{Ret \geq 1}$ a une bonne croissance (polynômiale).

Nous pouvons alors résumer cette méthode dans le cadre plus général d'une algèbre de Banach :

Proposition 1.2.4. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $\mathcal{I}$ un idéal bilatère fermé de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est radicale. Supposons que :*

1. *il existe un semigroupe dans $\mathcal{A}$ $(a_t)_{Re\ t > 0}$ analytique dans H tel que l'idéal bilatère fermé engendré par le semigroupe est $\mathcal{A}$.*
2. *il existe $\alpha < 1$ tel que*

$$\sup_{Re\ t \geq 1} e^{-|t|^\alpha} \parallel a_t \parallel_1 < \infty$$

Alors $\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

1.2.2 Application à la synthèse harmonique. Principe

On se place ici dans le cadre de l'algèbre $L^1(G)$ où G est localement compact abélien, soit F un fermé de $\hat{G}$, I un idéal fermé tel que $Z(I) = F$.

Proposition 1.2.5. *L'algèbre quotient $R_F = I/\overline{J_F}$ est une algèbre radicale.*

Démonstration. Soit $\pi : I \to R_F$ l'application quotient. Soit χ un caractère de R_F, alors $\chi o \pi$ est un caractère de I.

I est un idéal de $L^1(G)$, $\chi o \pi$ peut donc être étendu en un caractère de $L^1(G)$. Il existe donc $\gamma_0 \in \hat{G}$ tel que

$$(\forall f \in I) \qquad \chi o \pi\ (f) = \hat{f}\ (\gamma_0).$$

Supposons que $\gamma_0 \notin F$:

Soit V un voisinage de F tel que $\gamma_0 \notin V$. Nous savons qu'il existe $u \in L^1(G)$ vérifiant :

$$\hat{u}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \gamma = \gamma_0 \\ 0 & \text{si} \quad \gamma \notin V \end{cases}$$

$\hat{u}(\gamma_0) = 1$ mais d'autre part, $\forall f \in J_F$ on a $\chi o \pi(f) = 0$, soit pour u, $\hat{u}\ (\gamma_0) = \chi o \pi\ (u) = 0$, l'hypothèse faite sur γ_0 est donc fausse, et donc $\gamma_0 \in F$.

On a montré que $\chi \equiv 0$. □

On suppose l'existence d'un semigroupe $(a_t)_{Ret>0}$ dans l'idéal I_F vérifiant la condition de croissance $\sup\limits_{Re\ t \geq 1} e^{-|t|^\alpha} \| a_t \|_1 < \infty$ pour un certain $\alpha < 1$. L'idéal fermé engendré par le semigroupe $I(a_t)_{Ret>0}$ est tel que $Z(I(a_t)_{Ret>0}) = F$.

D'après ce qui précéde, l'algèbre quotient $R = I(a_t)_{Ret>0}/\overline{J_F}$ est radicale, elle est donc nulle ce qui signifie que $I(a_t)_{Ret>0} = \overline{J_F}$.

Nous sommes donc devant l'altérnative suivante

- ou bien $I_F = I(a_t)_{Ret>0}$ et F est un fermé de synthèse
- ou bien $I_F \neq I(a_t)_{Ret>0}$ et F n'est pas un fermé de synthèse.

Ainsi l'existence dans l'idéal I_F d'un semigroupe analytique dans le demi-plan H et ayant une "bonne" croissance contient l'information sur la synthèse ou non du fermé F.

1.3 Fermés de type Z(P)

Pour un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$ il semble difficile d'exhiber un tel semigroupe ; ici nous allons considérer les fermés qui coïncident avec l'ensemble des zéros d'un polynôme P sur $\mathbb{R}^n$.

Si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, nous allons considérer le semigroupe suivant :

pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, posons

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} e^{-t(\|x\|^2 + \frac{1}{P(x)^2})} & \text{si} \quad x \notin Z(P) \\ 0 & \text{si} \quad x \in Z(P) \end{cases}$$

Pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, considérons l'opérateur $\partial^\alpha \;=\; \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$

Si $\mid \alpha \mid \geq 1$, alors $\partial^\alpha \varphi_t(x)$ est de la forme $t\dfrac{Q_\alpha(t,x)}{P(x)^{|\alpha|+1}}\varphi_t(x)$ où Q_α est un polynôme en (t, x). Il est alors clair que pour tout polynôme R sur $\mathbb{R}^n$ et tout multi-indice α la fonction $R\partial^\alpha \varphi_t$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$, il en résulte que ce semigroupe est constitué de fonctions de Schwartz dont l'ensemble des zéros est exactement $Z(P)$.

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier et $\overline{\mathcal{F}}$ la cotransformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$.

Pout $t > 0$, φ_t est une fonction de Schwartz, donc l'image par la cotransfomation de Fourier du semigroupe est un semigroupe constitué de fonctions de Schwartz. On pose $\psi_t = \overline{\mathcal{F}}(\varphi_t)$, nous avons construit un semigroupe dans l'idéal $I_{Z(P)}$.

L'application $t \to \varphi_t$ peut-être prolongée analytiquement sur le demi-plan complexe H , et par linéarité de la cotransformation de Fourier, l'application $t \to \psi_t$ se prolonge analytiquement dans le demi-plan complexe H. $(\psi_t)_{Re\ t>0}$ est donc un semigroupe analytique de l'idéal $I_{Z(P)} \;=\; \{f \in L^1(\mathbb{R}) \;:\; \hat{f}(x) = 0 \;\; \forall x \in Z(P)\}$.

1.3.1 Croissance du semigroupe

Dans cette partie nous allons montrer que le semigroupe $(\psi_t)_{Re\ t>0}$ a une croissance polynômiale.

Définition 1.3.1. *Un semigroupe $(a_t)_{Re\ t\geq 0}$ est à croissance polynômiale s'il existe un polynôme Q tel que*

$$\| a_t \| \leq Q(\mid t \mid) \quad \textit{pour tout complexe} \;\; t \textit{ tel que } Re\ t \geq 1$$

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons l'inégalité bien connue

$$\| \overline{F}f \|_\infty \leq \| f \|_1$$

En particulier, si g est une fonction de Schwartz, il existe une fonction de Schwartz f telle que $g = \overline{F}f$, g vérifie donc l'inégalité :

$$\| g \|_\infty \leq \| Fg \|_1 \tag{1}$$

Lemme 1.3.1. *Le semigroupe* $(\psi_t)_{Re\ t>0}$ *a une croissance polynômiale*

Démonstration. Si on désigne par M l'opérateur de multiplication par x, ψ_t est une fonction de Schwartz, il existe donc une constante $c > 0$ telle que

$$\| \psi_t \|_1 \leq c \ \ \| (1 + M^2)^n \psi_t \|_\infty$$

Et d'après l'inégalité (1),

$$\| \psi_t \|_1 \leq c \quad \| F\big((1 + M^2)^n \psi_t\big) \|_1$$

Si Δ désigne l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^n$, alors nous pouvons écrire

$$F\big((1 + M^2)^n \psi_t\big) \ = \ \big(1 - \frac{\Delta}{4\pi}\big)^n \varphi_t$$

Nous pouvons écrire ce terme sous une forme générale

$$\sum_{|\alpha| \leq 2n} c_\alpha \partial^\alpha \varphi_t$$

où les c_α sont des constantes, ainsi il suffit de montrer que le terme $\partial^\alpha \varphi_t$ a une croissance polynômiale si $| \alpha | \leq 2n$.

Or, nous avons vu que $\partial^\alpha \varphi_t$ est de la forme $t\dfrac{Q_\alpha(t,x)}{P(x)^{3|\alpha|}}\varphi_t(x)$

soit encore $\sum c'_\alpha \ t^{k_\alpha} \ \dfrac{x^{k'_\alpha}}{P(x)^{3|\alpha|}}\varphi_t(x)$ Et donc

$$\| \partial^\alpha \varphi_t \|_1 \leq \sum | c'_\alpha | \ | t |^{k_\alpha} \ \int_{\mathbb{R}^n} | \frac{x^{k'_\alpha}}{P(x)^{3|\alpha|}} \varphi_t(x) | \ dx$$

Ainsi pour $Ret \geq 1$, nous pouvons majorer l'intégrale par un terme indépendant de t.

$$\| \partial^\alpha \varphi_t \|_1 \leq \sum | c'_\alpha | \ | t |^{k_\alpha} \ \int_{\mathbb{R}^n} | \frac{x^{k'_\alpha}}{P(x)^{3|\alpha|}} | \ e^{-(\|x\|^2 + \frac{1}{P(x)^2})} dx$$

Le semigroupe a donc bien une croissance polynômiale. ☐

Remarque 1.3.1. *A priori rien n'empêche de considérer des semigroupes plus généraux de la forme*

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} e^{-t(\|x\|^2 + \frac{1}{f(x)^2})} & si \quad x \notin Z(f) \\ 0 & si \quad x \in Z(f) \end{cases}$$

Où f serait une fonction analytique sur $\mathbb{R}^n$. f ne peut pas être quelconque, des restrictions sur la croissance de f apparaissent si l'on veut conserver un semigroupe de fonctions de Schwartz. Par exemple des fonctions dont la croissance est au plus polynômiale conviendraient et nous permettraient d'atteindre en théorie des fermés plus généraux. Par exemple, le semigroupe défini sur $\mathbb{R}$

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} e^{-t(x^2 + \frac{1}{sin(x)^2})} & si \quad x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 0 & si \quad x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

est un semigroupe constitué de fonctions de Schwartz, donc le semigroupe des cotransformées de Fourier de φ_t est un semigroupe analytique dans le demi-plan H ayant une bonne croissance dans l'idéal $I_{\pi\mathbb{Z}}$.

Nous allons ici poursuivre dans le cadre des fonctions polynômiales, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante sur un certain opérateur différentiel linéaire pour obtenir la synthèse harmonique d'un ensemble du type $Z(P)$, où P est un polynôme.

1.3.2 Condition nécessaire et suffisante de la synthèse harmonique

Dans la démonstration d'Esterle, nous n'avons pas à nous demander quel est l'idéal engendré par le semigroupe de la chaleur car il est bien connu que ce semigroupe est une unité approchée de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ici, nous ne pouvons pas espérer un tel résultat car nous savons qu'il existe des ensembles fermés du type $Z(P)$ qui ne sont pas de synthèse, et d'après ce que nous avons dit dans ce cas $I_{Z(P)} \neq I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$ où $I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$ désigne l'idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^n)$ engendré par le semigroupe $(\psi_t)_{Re\ t>0}$. Il est clair par construction du semigroupe que $I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$ est contenu dans $I_{Z(P)}$. L'autre sens dépend évidemment du polynôme P choisi. Nous allons essayer de décrire quelle est cette dépendance en P.

Nous allons tenter d'attraper des fonctions de Schwartz qui sont dans l'idéal $I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$.

Pour tout entier $k \geq 1$, on considère l'espace

$$A_k = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ vérifiant } \hat{\phi}\ (x) = P(x)^k\ \hat{g}\ (x), \text{ où } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Lemme 1.3.2. *Il existe un entier* $k_P \geq 1$ *tel que* $A_{k_P} \subset I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$.

Démonstration. Nous allons montrer que pour un choix convenable de l'entier k, $\psi_t * \phi$ converge vers ϕ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ dès que $\Phi \in A_k$.

Si f eu une fonction de Schwartz, nous disposons de l'inégalité suivante :

$$\| f \|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+ \| x \|^2)^n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ | (1+ \| x \|^2)^n f(x) | \}$$

Il nous suffit donc de montrer que le terme $x \mapsto (1+ \| x \|^2)^n \psi_t * \phi(x)$ converge uniformément vers $x \mapsto (1+ \| x \|^2)^n \phi(x)$ sur $\mathbb{R}^n$.

On note Δ l'opérateur de Laplace.

on a

$$(1+ \| x \|^2)(\psi_t * \phi - \phi)\ (x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \frac{\Delta}{4\pi})^n \ \big(\varphi_t \hat{\phi} - \hat{\phi}\big)\ (u)\ e^{2i\pi <u,x>} du$$

si $< .,. >$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons donc une combinaison linéaire de terme de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \ \big(\varphi_t \hat{\phi} - \hat{\phi}\big)\ (u)\ e^{2i\pi <u,x>}$$

où α est un multi-indice de longueur inférieure à $2n$. Si $| \alpha | \geq 1$, nous pouvons appliquer la formule de Leibniz à savoir :

$$\partial^\alpha \ \big(\varphi_t \ \hat{\phi} - \hat{\phi}\big) \ = \ \varphi_t \ \partial^\alpha \hat{\phi} - \partial^\alpha \hat{\phi} + \sum_{\beta \leq \alpha,\ |\beta| \geq 1} C_\alpha^\beta \ \partial^\beta \ \varphi_t \ \partial^{\alpha - \beta} \hat{\phi}$$

Si $| \alpha | = 0$, on a juste le terme $\phi_t \hat{\phi} - \hat{\phi}$.

– Sur tout compact K de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas les zéros de P, la fonction $x \mapsto \| x \|^2 + \dfrac{1}{P(x)^2}$ est bornée donc $1 - \varphi_t$ converge uniformément vers 0 sur un tel compact.

  $\hat{\phi}$ s'annule sur chaque zéros de P ; par continuité il existe un ensemble ouvert V (réunion de boules ouvertes dont les centres sont les zéros de P) choisi de sorte que $\hat{\phi}(x) < \epsilon \ \forall x \in V$. Dans ce cas,

$$\int_V | (\varphi_t - 1) \hat{\phi}(x) | \ dx \ \leq 2 \ \epsilon \ m(V)$$

  où $m(V)$ est la mesure de Lebesgue de V, on peut toujours choisir V de sorte que $m(V) \leq 1$.

$\hat{\phi}$ est une fonction intégrable donc il existe $\rho > 0$ tel que

$$\int_{\|x\|>\rho} \mid \hat{\phi}\ (x) \mid \ dx \leq \epsilon$$

Si on note $K_{V,\rho}$ un compact de $\mathbb{R}^n$ tel que V, $K_{V,\rho}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \| x \| > \rho\}$ forme une partition de $\mathbb{R}^n$, alors on a

$$\mid \int_{\mathbb{R}^n} \big(\varphi_t\hat{\phi} - \hat{\phi}\big)(u) e^{2i\pi<u,x>} du \mid \ \leq \ \int_{\mathbb{R}^n} \mid \big(\varphi_t\hat{\phi} - \hat{\phi}\big)(u) \mid du$$

$$\leq \int_V \mid \big(\varphi_t\hat{\phi} - \hat{\phi}\big)(u) \mid du + \int_{K_{V,\rho}} \mid \big(\varphi_t\hat{\phi} - \hat{\phi}\big)(u) \mid du + \int_{\|u\|>\rho} \mid \big(\varphi_t\hat{\phi} - \hat{\phi}\big)(u) \mid du$$

$$\leq 2\epsilon + m(K_{V,\rho}) \quad \sup_{K_{V,\rho}}\ \hat{\phi} \quad \sup_{K_{V,\rho}} \mid 1 - \varphi_t \mid + 2\int_{\|u\|>\rho} \mid \hat{\phi} \mid (u) du$$

$$\leq 2\epsilon + C\ \sup_{K_{V,\rho}} \mid 1 - \varphi_t \mid + 2\epsilon$$

Où nous avons posé $C = m(K_{V,\rho}) \ \sup_{K_{V,\rho}}\ \hat{\phi}$. La convergence uniforme de φ_t vers 1 sur le compact $K_{V,\rho}$ nous permet de conclure, nous avons montré que le terme $\mid \int_{\mathbb{R}^n} \big(\varphi_t\hat{\phi} - \hat{\phi}\big)(u) e^{2i\pi<u,x>} du \mid$ converge uniformément vers 0. Le résultat reste vrai si on remplace $\hat{\phi}$ par $\partial^\alpha\ \hat{\phi}$ à condition que ces dérivées s'annulent sur les zéros de P. Ainsi, si nous prenons $\hat{\phi}$ de la forme $P^k \hat{g}$ avec $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et k suffisamment grand de sorte que pour chaque mutli-indice α de longueur inférieure à $2n$ on ait

$$\partial^\alpha\ \hat{\phi} \ = \ P^{k_\alpha} \hat{g_{k_\alpha}} \quad \text{avec} \quad k_\alpha \geq 1$$

Alors dans ce cas, les termes $\mid \int_{\mathbb{R}^n} \big(\varphi_t \partial^\alpha\ \hat{\phi} - \partial^\alpha\ \hat{\phi}\big)(u) e^{2i\pi<u,x>} du \mid$ convergent uniformément (en x) vers 0, pour chaque multi-indice $\mid \alpha \mid \leq 2n$.

- Il reste les termes où apparaissent $\partial^\beta\ \varphi_t\ \partial^{\alpha-\beta}\hat{\phi}$ où β est un multi-indice non nul. Or, nous avons vu que $\partial^\beta\ \varphi_t\ (x)$ est de la forme $t\dfrac{Q_\beta(t,x)}{P(x)^{3\ |\beta|}}\ \varphi_t$ où Q_β est un polynôme des deux variables t et x, c'est donc une combinaison linéaire de termes de la forme $t^i\ \dfrac{R(x)}{P(x)^{3\ |\beta|}}\ \varphi_t\ (x)$ où i est un entier supérieur à 1.
Nous devons donc calculer la limite en $t = 0$ de termes de la forme

$$\mid t^i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R(u)}{P(u)^{3\ |\beta|}}\ \varphi_t\ (u)\ \partial^{\alpha-\beta}\hat{\phi}(u)\ e^{2i\pi<u,x>}\ du \mid$$

Nous aimerions majorer $|\ \varphi_t\ |$ par 1, mais il faut s'assurer que le terme restant sous le signe de l'intégrale est intégrable. Là encore, si on prend $\hat{\phi}$ de la forme $P^k \hat{g}$ avec $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $k \geq 6n$, il existe alors une fonction $g_\beta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour chaque multi-indice β non nul telle que :

$$|\ t^i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{R(u)}{P(u)^{6|\beta|}}\ \varphi_t\ (u)\ \partial^{\alpha-\beta}\hat{\phi}(u)\ e^{2i\pi<u,x>}\ du\ | \leq |\ t\ |^i \int_{\mathbb{R}^n} |\ R(u)\ \hat{g_\beta}(u)\ |\ du$$

Ainsi les inégrales où apparaisent les $\partial^\beta\ \varphi_t\ \partial^{\alpha-\beta}\hat{\phi}$ convergent vers 0 uniformément en x.

Nous avons donc montré que si $k \geq 6n$, $\psi_t * \phi$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers ϕ dès que $\phi \in A_k$. $\square$

Remarque 1.3.2. *Nous avons ici obtenu le résultat avec un entier $k_0 \leq 6n$, nous ne savons pas si c'est le meilleur résultat ou bien si c'est juste une limitation de la méthode de démonstration. La question de savoir quel est le plus petit entier k tel que $A_k \subset I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$ reste ouverte.*

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que le semigroupe est un élément de l'espace A_k pour tout $k \geq 1$. En effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{P(x)^k} e^{-\left(\|x\|^2 + \frac{1}{P(x)^2}\right)}$ est une fonction de Schwartz pour tout entier $k \geq 1$. Si nous notons $\mathcal{A}_k$ l'idéal de $L^1(\mathbb{R}^n)$ engendré par l'espace A_k, et $\mathcal{I}\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$ l'idéal (non fermé) engendré par le semigroupe nous avons :

$$\mathcal{I}\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big) \subset \mathcal{A}_k \subset I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$$

Et donc $\overline{\mathcal{A}_k} = \mathcal{I}\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$, cet idéal caractérise entièrement la synthèse harmonique de $Z(P)$.

Si α est un multi-indice, posons $D_\alpha = (2i\pi)^\alpha \partial^\alpha$.

Dans ce cas, pour un polynôme $P\ (x) = \sum_\alpha c_\alpha\ x^\alpha$, on peut considérer l' opérateur différentiel $P\ (D) = \sum_\alpha\ c_\alpha\ D_\alpha$. Si g est une fonction de Schwartz alors $\widehat{\big(P(D)g\big)} = P\hat{g}$.

Nous en déduisons que l'espace $A_k = \{P(D)^k g\ ,\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$

Si on désigne par k_P le plus petit entier tel que $A_k \subset I\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$, nous pouvons en déduire une caractérisation de la synthèse harmonique :

Théorème 1.3.3. *Soit P un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, et $k \geq k_P$;*
$Z(P)$ est un fermé de synthèse harmonique si et seulement si pour chaque fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(D)^k\ f = 0$ on a $< f,\ g > = 0 \qquad \forall g \in\ I_{Z(P)}$

Démonstration. D'après ce que nous avons dit $Z(P)$ est de synthèse si et seulement si

$$\overline{\mathcal{A}_k} = I_{Z(P)}$$

Cette condition est équivalente à :

si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $< f, g > = 0$ pour toute $g \in \overline{\mathcal{A}_k}$ alors $< f, g > = 0$ pour toute fonction $g \in I_{Z(P)}$.

Il nous faut donc décrire les fonctions f de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ orthogonales à $\overline{\mathcal{A}_k}$.

Il est clair que de telles fonctions sont orthogonales à l'espace A_k et donc on a

$$< P(D)^k f, g > = < f, P(D)^k g > = 0$$

pour toutes $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, soit $P(D)^k f = 0$.

Réciproquement supposons que $P(D)^k f = 0$,

pour toutes $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} < f, \big(P(D)^k g\big) * h > &= < f, P(D)^k (g * h) > \\ &= < P(D)^k f, g * h > = 0 \end{aligned}$$

En considérant une unité approchée (h_n) constituée de fonctions de Schwartz dans $L^1(\mathbb{R}^n)$,

on en déduit que $< f, g * h > = 0$ pour toutes fonctions $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent f est orthogonale à $\overline{\mathcal{A}_k}$.

La condition f orthogonale à $\overline{\mathcal{A}_k}$ est donc équivalente à la condition $P(D)^k f = 0$.

□

Remarque 1.3.3. *Ce résultat est à rapprocher de l'application du théorème de Beurling-Pollard sur les fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont le spectre est contenu dans la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, une telle fonction vérifie alors $(I + \Delta)^m f = 0$ où $m \geq n/2$.*

C'est ainsi que Herz démontre la synthèse du cercle, il montre que les solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de l'équation $(I + \Delta) f = 0$ vérifient $< f, g > = 0$ si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{g}$ s'annule sur le cercle unité.

Dans le cas du cercle, le théorème précédent nous conduit a priori vers l'équation $(I + \Delta)^{12}\ f \ = 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, puisque la démonstration effectuée est valable pour $k \geq 6n$. Mais ce que nous y gagnons c'est une caractérisation de la synthèse harmonique.

Ainsi pour montrer qu'un ensemble n'est pas de synthèse il faut exhiber une solution $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $P(D)^k\ f \ = 0$ où $k \leq 6n$ et une fonction $g \in I_{Z(P)}$ telle que $< \ f,\ g > \neq \ 0$.

En pratique, on pourra toujours remarquer que pour un polynôme P tel que les noyaux des opérateurs $P(D)$ et $P(D)^2$ sont égaux dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors les solutions de $P(D)^k\ f \ = 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont les mêmes que celles de l'équation $P(D)\ f \ = \ 0$.

1.4 Applications de la méthode

1.4.1 Synthèse harmonique des points

Synthèse des points dans $\mathbb{R}$

D'après le théorème, nous devons chercher les solutions de l'équation $D^6 f \;= 0$ où $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et D l'opérateur de dérivation. Nous savons que les solutions de cette équation dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont les fonctions presque partout constantes.

Il reste à vérifier que $< \; f, g > = 0$ pour $g \in I_{\{0\}}$,

Puisque $f \;=\; \alpha \in \mathbb{C}$,

$$< \; f, \; g > = \; \alpha \; \int_{\mathbb{R}} g(x) \; dx \;\; = \;\; \alpha \; \hat{g}(0) \;\; = 0$$

Remarque 1.4.1. *nous pouvons remarquer que nous sommes dans un cas où les opérateurs D et D^2 ont les mêmes solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$*

Synthèse des points dans $\mathbb{R}^n$

Dans le cas $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$, l'équation que nous devons considérer est *a priori* $\Delta^{6n} \; f \;= 0$ où $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De manière classique, nous pouvons considérer la transformée de Fourier de la distribution tempérée f, elle est à support dans $\{0\}$ on en déduit d'après le théorème de Paley-Wiener que f est un polynôme, et puisque f est bornée, c'est en fait une constante (presque partout).

Comme dans le paragraphe précédent, il reste à vérifier que $< \;\; f, g \; > \; = \; 0$ pour $g \in I_{\{0\}}$,

Soit

$$< \; f, \; g > = \; \alpha \; \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \; dx \;\; = \;\; \alpha \; \hat{g}(0) \;\; = 0$$

Remarque 1.4.2. *Comme dans le cas précédent, nous pouvons remarquer que les solutions des équations $\Delta \; f \;\; = 0$ et $\Delta^2 \; f \;\; = 0$ sont identiques dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

1.4.2 Synthèse du cercle dans $\mathbb{R}^2$

L'opérateur différentiel associé au cercle dans $\mathbb{R}^2$ est l'opérateur $I + \Delta$ si Δ est le laplacien sur $\mathbb{R}^2$. D'après la condition du théorème, pour montrer la synthèse du cercle il faut vérifier que pour toute solution $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ de l'équation $\big(I + \Delta\big)^{12} \; f \;=\; 0$ alors on a $< \; f, \; g > = \; 0$ pour tout $g \in I_{\mathcal{C}}$ si $\mathcal{C}$ désigne le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

Nous allons ici encore se ramener aux solutions de l'équation $(I + \Delta)\ f\ =\ 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 1.4.1. *Les équations* $(I+\Delta)\ f\ = 0$ *et* $(I+\Delta)^2\ f\ =\ 0$ *ont les mêmes solutions dans* $L^\infty(\mathbb{R}^2)$*. Par conséquent les solutions dans* $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *de l'équation* $(I + \Delta)^k\ f\ =\ 0$ $(k \geq 1)$ *sont les mêmes que les solutions de l'équation* $(I + \Delta)\ f\ =\ 0$.

Démonstration. Ces opérateurs étant elliptiques, f est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, on peut développer f en série de Fourier

$$f\ (r\ cos\ \theta,\ r\ sin\ \theta)\ =\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r)e^{in\theta}.$$

Si f est solution de l'équation $(I + \Delta)\ f\ =\ 0$, alors c_n est une solution bornée de l'équation de Bessel

$$y''\ +\ \frac{1}{x}\ y'\ +\ (1-\frac{n^2}{x^2})\ y\ =\ 0$$

On en déduit que c_n est proportionnel à J_n fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n.

Si f est solution de l'équation $(I + \Delta)^2\ f\ =\ 0$, en posant $g\ =\ (I + \Delta)\ f$, g est de classe c^∞ et g est vérifie $(I + \Delta)\ g\ =\ 0$.

En considérant l'expression polaire du laplacien, si

$$\hat{g}_r(n)\ =\ \frac{1}{2\ \pi}\int_0^{2\ \pi} g(r\ cos\theta,\ r\ sin\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta$$

$\hat{g}_r(n)$ vérifie l'équation :

$$\partial_r^2\hat{g}_r\ +\ \frac{1}{r}\partial_r\hat{g}_r\ +\ (1-n^2/r^2)\ \hat{g}_r\ =\ 0$$

g est entièrement déterminer par $\hat{g}_r(n)$ qui est de la forme $\alpha_n\ J_n(r) + \beta_n\ Y_n(r)$ où α_n et β_n sont des constantes complexes, et Y_n désigne le fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre n.

L'équation $(I + \Delta)\ f\ =\ g$ nous conduit à l'équation :

$$\partial_r^2\hat{f}_r\ +\ \frac{1}{r}\partial_r\hat{f}_r\ +\ (1-n^2/r^2)\ \hat{f}_r\ =\ \hat{g}_r$$

On recherche ici les solutions bornées sur $\mathbb{R}^+$ de cette équation qui s'écrit :

$$y''\ +\ \frac{1}{r}\ y'\ +\ (1-\frac{n^2}{r^2})\ y\ =\ \alpha_n\ J_n(r)\ +\beta_n\ Y_n(r)$$

Dont la solution générale s'écrit

$$a\ J_n(r)\ +\ b\ Y_n(r)\ + c\ \left(Y_n(r)\ \int^r sJ_n(s)^2\ ds\ -\ J_n(r)\ \int^r sJ_n(s)Y_n(s)\ ds\right)$$

$$+\ d\ \left(J_n(r)\ \int^r sY_n(s)^2\ ds\ -\ Y_n(r)\ \int^r sJ_n(s)Y_n(s)\ ds\right)$$

Nous devons chercher parmi ces solutions celles qui sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. Pour cela nous utilisons les développements asymptotiques de J_n et Y_n :

$$J_n(r)\ =\ \sqrt{(\tfrac{2}{\pi r})}\ cos(r - n\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4})\ +\ \phi_n(r) \quad \text{où } \phi_n(r)\ =\ O(\tfrac{1}{r^{3/2}})$$

$$Y_n(r)\ =\ \sqrt{(\tfrac{2}{\pi r})}\ sin(r - n\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4})\ +\ \psi_n(r) \quad \text{où } \psi_n(r)\ =\ O(\tfrac{1}{r^{3/2}})$$

Et les formules suivantes où $c_1,\ c_2,\ c_3$ sont des constantes d'intégrations qui n'interviennent pas à l'infini car les expressions $c_i\ J_n$ et $c_i\ Y_n$ ont une limite nulle à l'infini $(i = 1,\ 2,\ 3)$ (c.f. Watson [32])

$$\int^r sJ_n(s)^2\ ds\ =\ \tfrac{r^2}{2}\left(J_n(r)^2 - J_{n-1}(r)J_{n+1}(r)\right)\ +\ c_1$$

$$\int^r sY_n(s)^2\ ds\ =\ \tfrac{r^2}{2}\left(Y_n(r)^2 - Y_{n-1}(r)Y_{n+1}(r)\right)\ +\ c_2$$

$$\int^r sJ_n(s)\ Y_n(s)\ ds\ =\ \tfrac{r^2}{2}\left(2J_n(r)Y_n(r) - J_{n-1}(r)Y_{n+1}(r) - Y_{n-1}(r)Y_{n+1}(r)\right)\ +\ c_3$$

On obtient les développements à l'infini suivants :

$$Y_n(r)\ \int^r sJ_n(s)^2\ ds\ =\ r\ J_n(r)\ +\ o(1)$$

$$J_n(r)\ \int^r sY_n(s)^2\ ds\ =\ r\ Y_n(r)\ +\ o(1)$$

$$\int^r sJ_n(s)\ Y_n(s)\ ds\ =\ O(1)$$

En particulier lorsque les constantes c ou d ne sont pas nuls, il existe un réel θ_n tel que

$$c\ \left(Y_n(r)\ \int^r sJ_n(s)^2\ ds\ -\ J_n(r)\ \int^r sJ_n(s)Y_n(s)\ ds\right)$$
$$+\ d\ \left(J_n(r)\ \int^r sY_n(s)^2\ ds\ -\ Y_n(r)\ \int^r sJ_n(s)Y_n(s)\ ds\right)$$

$$=\ \sqrt{(c^2 + d^2)}\ \sqrt{\tfrac{2\ r}{\pi}}cos(r - \theta_n)\ +\ o(1)$$

Ce terme n'est borné que lorsque $c\ =\ d = 0$.

Y_n n'étant pas borné en 0, on en déduit que les solutions bornées recherchées sont proportionnelles à J_n.

Donc les équations $(I+\Delta)^2\ f\ =\ 0$ et $(I+\Delta)\ f\ =\ 0$ ont les mêmes solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Si on pose alors $f_n(r\ cos\ \theta,\ r\ sin\ \theta)\ =\ c_n J_n(r) e^{in\theta}$ on vérifie alors que

$$< f_n,\ g > =\ 0$$

si $g \in I_C$.

On considère l'expression intégrale de J_n,

$$J_n(r)\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\phi - r\ sin\ \phi}\ d\phi$$

Alors

$$f_n(r\ cos\ \theta,\ r\ sin\ \theta)\ =\ \frac{c_n}{2\pi}\ \int_0^{2\pi} e^{2i\pi r\ cos\ (\phi-\theta)}\ e^{in\phi} d\phi$$

Et donc :

$$\begin{aligned} < f_n\ ,\ g > \ &=\ \frac{c_n}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi} e^{2i\pi r\ cos\ (\phi-\theta)}\ e^{in\theta}\ g(\ r\ cos\ \theta,\ r\ sin\ \theta)\ rdrd\theta \\ &=\ \frac{c_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\phi}\hat{g}(cos\phi,\ sin\ \phi)\ d\phi\ =\ 0 \end{aligned}$$

La série $f\ (r\ cos\ \theta,\ r\ sin\ \theta)\ =\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r) e^{in\theta}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, en suivant Eymard ([14]) les sommes de Cesaro associés convergent faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ vers f. On en déduit que $< f,\ g > =\ 0$ pour toute $g \in I_C$.

□

Remarque 1.4.3. *La démonstration classique repose sur le théorème de Beurling-Pollard, il ramène le problème de la synthèse du cercle à la vérification de la condition suivante :*

pour toute solution dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ de l'équation $(I+\Delta)\ f\ =\ 0$ on a $< f,\ g > =\ 0$ pour tout $g \in I_C$. Ici, nous nous ramenons également à cette condition sans utiliser ce théorème. Le théorème de Beurling-Pollard permet d'obtenir une condition suffisante de la synthèse, et ne permet donc pas d'obtenir des résultats de non-synthèse.

1.4.3 Non synthèse de la sphère

Nous allons ici retrouver le résultat dû à Laurent Schwartz qui donne un exemple de fermé de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas de synthèse, en l'occurrence il s'agit de la sphère dans $\mathbb{R}^n$. Dans la démonstration originale, Laurent Schwartz exhibe une fonction bornée ϕ et deux idéaux I_1 et I_2 dont l'ensemble des zéros est la sphère de $\mathbb{R}^n$, de sorte que ϕ s'annule sur l'idéal I_1 mais pas sur I_2. Nous utilisons certains ingrédients de cette preuve mais nous la modifions comme suit.

L'opérateur que nous devons étudier ici est a priori $(4\pi^2 I + \Delta)^{6n}$.

Pour montrer la non-synthèse de la sphère il suffit de trouver une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $(4\pi^2 + \Delta)^{6n} \quad f \ = 0$ et une fonction $g \in I_{Z(P)}$ telles que $< \ f, \ g > \ \neq \ 0$.

Nous allons reprendre ici la fonction bornée exhibée par Laurent Schwartz, si on note σ la mesure de surface sur la sphère, on pose $\phi(x) \ = \ x_1\hat{\sigma}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

$\hat{\sigma}$ est donnée par la formule :

$$\hat{\sigma}(x) \ = \ 2\pi \parallel x \parallel^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi \parallel x \parallel)$$

où $J_{\frac{n-2}{2}}$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $\frac{n-2}{2}$.

Cette fonction est intéressante car elle est solution de l'équation $(4\pi^2 + \Delta)^{6n} \ f \ = 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, plus précisément on a le résultat suivant :

Lemme 1.4.2. *ϕ est solution de l'équation* $(4\pi^2 + \Delta)^2 \ f \ = \ 0$.

Démonstration. On vérifie immédiatement que la fonction $k \ : \ x \mapsto \parallel x \parallel^{-\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\parallel x \parallel)$ est solution de l'équation $(1 + \Delta) \ f \ = 0$.

La fonction k est radiale, nous allons ici utiliser le laplacien en coordonnées polaires :

$\Delta \ = \ \dfrac{1}{r^{n-1}}\partial_r\big(r^{n-1}\partial_r\big)$

Après calcul, on obtient classiquement :

$$\Delta(k) \ = \ -\big(\frac{n-2}{2}\big)^2 \ r^{-n/2-1} \ J_{\frac{n-2}{2}} \ + \ r^{-n/2} \ \partial_r \ J_{\frac{n-2}{2}} + r^{-n/2+1} \ \partial_r^2 J_{\frac{n-2}{2}}$$

Ainsi

$$k \ + \ \Delta \ k \ = \ r^{-n/2+1} \ \Big(\big(1 - \frac{1}{r^2}\big(\frac{n-2}{2}\big)^2 \ J_{\frac{n-2}{2}} \ + \ \frac{1}{r} \ \partial_r \ J_{\frac{n-2}{2}} \ + \ \partial_r^2 J_{\frac{n-2}{2}}\Big) \ = \ 0$$

Si maintenant on considère la fonction $h(x) \ = \ k(2\pi x)$, h vérifie

$$\begin{aligned} \Delta\big(x_1 \ h\big) \ (x) \ &= \ \Delta(x1) \ h \ + \ 2\partial_1 \ h(x) \ + \ x_1 \ \Delta(h) \\ &= \ 2\partial_1 \ h(x) \ - 4\pi^2 \ x_1 \ h(x) \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore

$$(4\pi^2 + \Delta) \ (x_1 h) \ = 2 \ \partial_1 h.$$

Comme h vérifie $(4\pi^2 + \Delta)h \ = \ 0$, on en déduit que $(4\pi^2 + \Delta)^2 \ (x_1 \ h) \ = \ 0$.

□

Dans ce calcul, on remarque que ϕ n'est pas solution de $(4\pi^2 + \Delta)\ f\ =\ 0$.

Il reste à exhiber une fonction $g \in I_{Z(P)}$ telle que $< \phi,\ \ g > \neq 0$. Là encore en suivant L. Schwartz, on considère une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\hat{g}$ est C^∞ à support compact tel que $\hat{g}(x)\ =\ x_1\ (\| \ x\ \|^2\ -1)$ dans un voisinage de la sphère.

$$
\begin{aligned}
<\ \phi, g\ > \ &= \ \int_{\mathbb{R}^n} x_1 g(x) \int_{S^{n-1}} exp(-2i\pi\ t\ x) d\sigma(t) \\
&= \ -\tfrac{1}{2i\pi} \int_{S^{n-1}} \partial_{x_1} \hat{g}(t) d\sigma(t) \ = \ -\tfrac{1}{i\pi} \int_{S^{n-1}} \ t_1^2\ d\sigma(t) \ \neq 0
\end{aligned}
$$

1.4.4 Synthèse de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

Le polynôme que l'on considére sur $\mathbb{R}^2$ est $P(x,y)\ =\ x$. L'opérateur associé est donc ∂_x. A priori nous avons à considérer l'équation dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\partial_x^{12}\ f\ =\ 0$$

Pour résoudre cette équation nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.4.3. *Les équations $\partial_x f\ =\ 0$ et $\partial_x^2 f\ =\ 0$ ont les mêmes solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ à savoir $f\ (x,y)\ =\ u(y)$ où $u \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Les solutions de l'équation $\partial_x f\ =\ 0$ sont clairement solutions de $\partial_x^2 f\ =\ 0$.

Réciproquement, on considère $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ solution de $\partial_x^2 f\ =\ 0$, alors si $\phi_1,\ \phi_2$ sont des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}$ on a

$$< \partial_x^2\ f\ , \phi_1 \otimes \phi_2 > = 0$$

Par définition, cela s'écrit :

$$<\ f,\ \left(\partial_x^2\ \phi_1\right) \otimes \phi_2 > = \ 0$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}} \{ \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \partial_x^2 \phi_1(x)\ dx\ \ \} \phi_2(y)\ dy\ =\ 0 \qquad \text{pour toute}\ \ \phi_2 \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R})$$

Et donc pour presque tout $y\ \in\ \mathbb{R}$, si on pose $f_y(x)\ \ =\ \ f(x,y)$, $f_y\ \in\ L^\infty(\mathbb{R})$ et $<\ \ f_y, \partial_x^2\phi_1\ >\ =\ \ 0$. donc f_y est solution de $\partial_x^2 f_y\ \ =\ \ 0$, f_y est donc constante presque partout par rapport à x, il existe donc une fonction θ telle que $f\ (x,y)\ =\ \theta\ (y)$ presque partout. θ est nécessairement une fonction bornée presque partout, i.e. $\theta \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Cette fonction sur $\mathbb{R}^2$ est bien solution de $\partial_x\ f\ =\ 0$.

□

Nous déduisons du lemme précédent que les solutions de l'équation $\partial^{12}\ f\ = 0$ où $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ sont de la forme $f(x,y) \;=\; \theta(y)$ où $\theta \in L^{\infty}(\mathbb{R})$.

Ainsi, il reste à vérifier la seconde condition à savoir $<\ f,\ g> = 0\ \forall g \in I_{Z(P)}$.

$$<\ f,\ g> = \int_{\mathbb{R}^2} u(y)\ g(x,y)\ dxdy \;=\; \int_{\mathbb{R}} \theta(y)\ \big(\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\ dx\big)\ dy$$

Or, $g \in I_{Z(p)}$ donc $\hat{g}(0,y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\ e^{-2i\pi<v,y>}\ dudv \;=\; 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Ce qui s'écrit encore $\int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} g(u,v)du\big)\ e^{-2i\pi<v,y>}dv \;=\; 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ La transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ de la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx$ est nulle donc cette fonction est nulle. On en déduit que $< f\ , g > =\ 0$

1.5 Application de la méthode dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

1.5.1 Rappels sur cette algèbre.

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions complexes, $SO(n)$ le groupe des rotations de $\mathbb{R}^n$.

$SO(n)$ opère sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$:

$$SO(n) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n);\ (\rho, f) \mapsto \rho.f$$

où $\rho.f(x) = f(\rho^{-1}x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Les espaces $L^1(\mathbb{R}^n)$ et $C_0(\mathbb{R}^n)$ sont stables sous cette action :

1.
$$(\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall \rho \in SO(n)) \qquad \rho.f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

2.
$$(\forall f \in C_0(\mathbb{R}^n), \forall \rho \in SO(n)) \qquad \rho.f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

Soit $\rho \in SO(n)$, posons

$$A_\rho = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \rho.f = f\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$A'_\rho = \{f \in C_0(\mathbb{R}^n) : \rho.f = f\} \subseteq C_0(\mathbb{R}^n).$$

Soit $\rho \in SO(n)$, par un calcul immédiat on a les relations suivantes :

1. $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \rho.(f * g) = (\rho.f) * (\rho.g)$
2. $\forall f, g \in C_0(\mathbb{R}^n),\ \rho.(f\ g) = (\rho.f)(\rho.g)$.

On en déduit facilement que les espaces A_ρ et A'_ρ sont respectivement des sous-algèbres de $L^1(\mathbb{R}^n)$ et $C_0(\mathbb{R}^n)$.

En fait, A_ρ est une sous-algèbre de Banach de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

En effet, considérons l'application

$$\Pi(\rho)\ :\ L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n);\ f \mapsto \rho.f$$

$\Pi(\rho)$ est un isomorphisme isométrique de $L^1(\mathbb{R}^n)$. $A_\rho = ker[\Pi(\rho) - Id]$ est donc fermé dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.5.1. *$f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction radiale si et seulement si*
$\forall \rho \in SO(n),\ \rho.f = f$

On définit alors l'algèbre de Banach $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n) = \cap_{\rho \in SO(n)} A_\rho$. C'est l'algèbre des fonctions radiales de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

De la même façon, on définit $\mathcal{C}_{0,\ rad} = \cap_{\rho \in SO(n)} A'_\rho$ sous-algèbre des fonctions radiales de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.5.1. *Soit $\rho \in SO(n)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$(\rho \hat{.} f) = \rho.\hat{f}.$$

On en déduit que la transformée de Fourier d'une fonction radiale est radiale, ce qui s'écrit encore

$$f \in L^1_{rad}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}_{0,\ rad}(\mathbb{R}^n)$$

1.5.2 Caractères de l'algèbre L^1_{rad} $(\mathbb{R}^n)$

Afin de poursuivre l'étude, nous allons ici en élargir dans un premier temps le cadre pour nous placer dans une algèbre plus générale L^1 $(K\backslash G/K)$ et en donner les caractères. Evidemment les points suivants sont bien connus, nous les donnons dans un but de plus grande clarté de l'exposition.

On considère un groupe unimodulaire localement compact G, A un sous-groupe abélien normal et fermé de G et K un sous-groupe compact telle que l'application

$$\begin{array}{ccc} K \times A & \to & G \\ (t,\ s) & \mapsto & t\ s \end{array}$$

soit est homéomorphisme, alors $(G,\ K)$ est un exemple de paire de Gelfand (c.f. Dieudonné [8])

$\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, l'espace des fonctions continues sur G à support compact constantes sur les doubles classes KsK relative à K, $(s \in G)$, est une sous-algèbre commutative et autoadjointe de $L^1(G)$

On note L^1 $(K\backslash G/K)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$ in L^1 (G), L^1 $(K\backslash G/K)$ est une algèbre de Banach autoadjointe et commutative.

Si m_K est une mesure de Haar sur K telle que $m_K\ (K) = 1$, pour $f \in \mathcal{C}_c\ (G)$, on pose pour $x \in G$,

$$f^{\natural}(x) = \int_{K\times K} f(uxv)\ dm_K\ (u)\ dm_K\ (v)$$

alors $f \mapsto f^{\natural}$ est une projection de $\mathcal{C}_c\ (G)$ sur $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, qui se prolonge en une projection continue de $L^1(G)$ sur $L^1\ (K\backslash G/K)$.

Théorème 1.5.1. *Soit χ un caractère non nul de l'algèbre de Banach commutative $L^1\ (K\backslash G/K)$, alors il existe une unique fonction sphérique function ω telle que*

$$\chi\ (f) = \int_G f\ (x)\ \omega\ (x)\ dm_G(x) \qquad f \in L^1\ (K\backslash G/K)$$

(c.f. Dieudonné [8])

Dans notre exemple de paire de Gelfand, les fonctions sphériques sont données par les caractères du groupe abélien A :

Lemme 1.5.2. *Soit ω une fonction sphérique sur G relative à K il existe un caractère χ sur le groupe A tel que*

$$\forall x \in G \qquad \omega\ (x) = \int_K \chi\ (u^{-1}xu)\ dm_K\ (u)$$

Démonstration. On note $\mathcal{C}_c(A)$ l'espace de fonctions continues sur A à support compact, pour $f \in \mathcal{C}_c(A)$, on considère

$$\forall x \in A \qquad f^{\flat}(x) = \int_K f\ (u^{-1}xu)\ dm_K(u)$$

On note $\mathcal{C}_c^{\flat}(A)$ le sous-espace de $\mathcal{C}_c(A)$ constitué des fonctions f telles que $f(t^{-1}xt) = f(x)$ pour $t \in K,\ x \in A$. On note $L^{1,\flat}(A)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c^{\flat}(A)$ dans $L^1(A)$.

La projection $\mathcal{C}_c(A) \to \mathcal{C}_c^{\flat}(A);\ f \mapsto f^{\flat}$ se prolonge en un projection continue $L^1(A) \to L^{1,\flat}(A);\ f \mapsto f^{\flat}$

Considérons $L^1\tilde{(}A) = L^1(A) \oplus \mathbb{C}\delta_e$ où δ_e est la mesure de Dirac en e, et $L^{1,\tilde{\flat}}(A) = L^{1,\flat}(A) \oplus \mathbb{C}\delta_e$

Pour $\mu \in L^{1,\tilde{\flat}}(A),\ \nu \in L^1\tilde{(}A)$, on a $\left(\mu * \nu\right)^{\flat} = \mu * (\nu)^{\flat}$.

En effet, pour $f \in L^{1,\tilde{\flat}}(A)$ et $g \in L^1(A)$, $x \in A$

$$\begin{aligned}
\left(f * g\right)^{\flat}(x) &= \int_K \int_A f(y)\ g(y^{-1}u^{-1}xu)\ dm_K(u)\ dm_A(y) \\
&= \int_K \int_A f(uyu^{-1})\ g(y^{-1}u^{-1}xu)\ dm_K(u)\ dm_A(y) \\
&= \int_K \int_A f(y)\ g(u^{-1}y^{-1}xu)\ dm_K(u)\ dm_A(y)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(f * g)^\flat (x) &= \int_A \int_K f(y)\ g(u^{-1}y^{-1}xu)\ dm_K(u)\ dm_A(y) \\
&= \int_A f(y)\ g^\flat(y^{-1}x)\ dm_A(y) \\
&= f * g^\flat (x)
\end{aligned}$$

Considérons l'appication $\phi\ (\mu) = \int_A \omega\ (x)\ d\mu(x)$ où μ est une mesure sur A. Alors pour $\mu, \nu \in L^1\tilde{(}A)$ on a $\phi\ (\mu^\flat * \nu) = \phi\ (\mu)\ \phi\ (\nu)$.

En effet, pour $g \in L^1(A)$ et $f \in L^{1,\flat}(A)$

$$\begin{aligned}
\phi\ (f * g^\flat) &= \int_A \omega(x) f * g^\flat(x)\ dm_A(x) \\
&= \int_A \int_A \int_K \omega(x)\ f(y^{-1}x)\ g(u^{-1}yu)\ dm_K(u) dm_A(y) dm_A(x) \\
&= \int_A \int_K \int_A \omega(yx)\ f(x) dm_A(x)\ g(u^{-1}yu)\ dm_K(u) dm_A(y) \\
&= \int_A \int_A \int_K \omega(uyu^{-1}x)\ f(x)\ g(y)\ dm_K(u) dm_A(y) dm_A(x) \\
&= \int_A \int_A \int_K \omega(yu^{-1}x)\ f(x)\ g(y)\ dm_K(u) dm_A(y) dm_A(x)
\end{aligned}$$

car $\omega(uyu^{-1}x) = \omega(yu^{-1}x)$

Et donc,

$$\begin{aligned}
\phi\ (f * g^\flat) &= \int_A \int_A \omega(y)\ \omega(x)\ f(x)\ g(y)\ dm_A(y) dm_A(x) \\
&= \phi\ (f)\ \phi\ (g)
\end{aligned}$$

$\mathcal{N} = \ker \phi \cap L^{1,\tilde{\flat}}(A)$ est un idéal maximal de $L^{1,\tilde{\flat}}(A)$, et soit

$$\mathcal{F} = \{J \text{ ideal of } L^1\tilde{(}A) \text{ tel que } J \cap L^{1,\tilde{\flat}}(A) = \mathcal{N}\}$$

L'ensemble F contient un idéal propre $I_0 = \{\mu \in L^1\tilde{(}A) \text{tel que} (\mu * \nu)^\flat \in \mathcal{N}\}$.

De plus, $\mathcal{F}$ est un ensemble ordonné et inductif; d'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{F}$. En fait, $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de $L^1\tilde{(}A)$. En effet, il existe un idéal maximal $\mathcal{M}'$ qui contient $\mathcal{M}$, mais

$$\mathcal{M}' \cap \tilde{L^{1,\flat}} \supset \mathcal{M} \cap \tilde{L^{1,\flat}} = \mathcal{N}$$

$\mathcal{M}' \cap \tilde{L^{1,\flat}}$ est un idéal de $\tilde{L^{1,\flat}}$, par maximalité de $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}' \cap \tilde{L^{1,\flat}} = \mathcal{N}$ ou $\mathcal{M}' \cap \tilde{L^{1,\flat}} = \tilde{L^{1,\flat}}$, mais le second cas signifie $\delta_e \in \mathcal{M}'$ ce qui est absurde car $\mathcal{M}'$ est un idéal propre de $L^1\tilde{(}A)$.

Ainsi $\mathcal{M}' \in \mathcal{F}$, et par maximalité de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ définit un caractère ψ de $L^1\tilde{(}A)$ tel que

$$\psi_{|L^{\tilde{1},\flat}} = \phi_{|L^{\tilde{1},\flat}}.$$

Il existe donc $\gamma \in \hat{A}$ tel que

$$\psi\ (f) = \int_A f(x)\ \gamma(x)\ dm_A(x)$$

pour $f \in L^1(A)$.

Pour $f \in L^1(A)$ on a

$$\phi\ (f) = \phi\ (f^\flat) = \psi\ (f^\flat) = \int_A f^\flat(x)\gamma(x)\ dm_A(x) = \int_A f(x)\ \gamma^\flat(x)\ dm_A(x)$$

On a, pour tout $f \in L^1(A)$:

$$\int_A f(x)\ \omega(x)\ dm_A(x) = \int_A f(x)\ \gamma^\flat(x)\ dm_A(x)$$

Donc $\omega(x) = \gamma^\flat(x)$ pour presque tout $x \in A$, en fait pour tout x par continuité. $\square$

La proposition suivante donne les caractères de l'algèbre

$L^1\ (K\backslash G/K)$ où apparaissent les transformées de Fourier $\hat{f}$ des fonctions $f \in L^1(A)$. Si on note $\hat{A}$ le groupe dual de A, K opère sur $\hat{A}$: pour $u \in K$, $\gamma \in \hat{A}$,

$$\forall x \in A \qquad (u.\gamma)\ (x) = \gamma\ (u^{-1}xu)$$

Proposition 1.5.3. *Soit χ un caractère non nul de l'algèbre de Banach commutative $L^1\ (K\backslash G/K)$, il existe un unique caractère $\gamma \in \hat{A}$ vérifiant :*

$$\forall f \in L^1\ (K\backslash G/K) \qquad \chi\ (f) = \int_K \hat{f}\ (u.\gamma)\ dm_K\ (u)$$

Démonstration. On considère m_G et m_A des mesures de Haar sur G et A telles que $m_G = m_K \otimes m_A$. Soit ω la fonction sphérique définie χ, et $\bar{\gamma}$ le caractère de A associé à ω.

Pour $f \in L^1\ (K\backslash G/K)$,

$$\chi\ (f) = \int_G f(x)\omega\ (x) dm_G(x) = \int_K \int_A f(ty)\ \omega\ (ty)\ dm_K(t)\ dm_A(y)$$

Mais $f\ (ty) = f(y)$ et $\omega\ (ty) = \omega\ (y)$ pour $t \in K,\ y \in A$:

$$\begin{aligned}
\chi\ (f) &= \int_A f\ (y)\ \omega\ (y)\ dm_A(y) \\
&= \int_A f\ (y) \int_K \left(u.\bar{\gamma}\right)\ (y)\ dm_K(u)\ dm_A\ (y) \\
&= \int_K \int_A f\ (y)\ \left(u.\bar{\gamma}\right)\ (y)\ dm_A(u)\ dm_K\ (y) \\
&= \int_K \hat{f}\ \left(u.\gamma\right) dm_K(u)
\end{aligned}$$

□

Caractères de l'algèbre L^1_{rad} $(\mathbb{R}^n)$

On considère le produit semidirect $G = SO(n) \propto \mathbb{R}^n$.

Le produit de deux éléments de G est donné par

$$(\rho,\ x)\ (\rho',\ y) = (\rho\ \rho', {\rho'}^{-1}x + y) \qquad \forall(\rho,\ x),\ (\rho',\ y) \in G$$

Une double classe relative à $SO(n)$ est l'ensemble $(\rho,\ x) \in G$ tel que $\|\ x\ \|$ est constant. Nous pouvons alors identifier les algèbres de Banach $L^1\ (SO(n)\backslash G/SO(n))$ et $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.5.2. *1. Si $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction radiale, il existe une unique fonction $f_0\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = f_0(|\ x\ |),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

f_0 est appelé profile de f.

2. Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$, ou de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on définit la radialisée de f $f^\#$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) \qquad f^\#(x) = 1/w_{n-1} \int_{S^{n-1}} f(|\ x\ |\ v) d\sigma(v)$$

où σ est la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ sur la sphère S^{n-1}.

On en déduit les caractères de $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 1.5.4. *Soit χ un homomorphisme continu de l'algèbre de Banach $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$, il existe $\eta \geq 0$ tel que $\chi(f) = (\hat{f})_0(\eta)$ pour tout $f \in L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Soit γ un caractère de $\mathbb{R}^n$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\gamma\ (t)\ =\ exp\ (-2i\pi\ \ < t,\ y >)\ \ t \in \mathbb{R}^n$$

On note γ_y ce caractère.

Si $u \in SO(n)$, alors $u.\gamma_y\ =\ \gamma_{u(y)}$. La proposition nous assure que, pour $f \in L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\chi\ (f)\ &=\ \int_{SO(n)} \hat{f}\ (\ u(y)\ )\ dm_{SO(n)}(u) \\
&=\ 1/w_{n-1} \int_{S^{n-1}} \hat{f}\big(\ |\ y\ |\ v\big)\ d\sigma(v) \\
&=\ \left(\ \hat{f}\ ^{\#}\ \right)_0 (\ |\ y\ |\ )
\end{aligned}$$

Mais si $f \in L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_{0,\ rad}(\mathbb{R}^n)$, so $\chi\ (f)\ =\ \left(\ \hat{f}\ \right)_0 (\ |\ y\ |\ )$. $\square$

1.5.3 Application de la méthode du semigroupe dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$

Théorème de Wiener

Le semigroupe de la chaleur (a_t) a la particularité d'être un semigroupe de fonctions radiales, c'est aussi une unité approchée dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Cette remarque permet d'en déduire immédiatememt le théorème de Wiener dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Soit I un idéal fermé de $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$;
posons $Z(I) = \{\rho \geq 0\ :\ (\hat{f})_0(\rho) = 0,\ \forall f \in I\}$, alors

$L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)/I$ est radicale $\Longleftrightarrow Z(I) = \emptyset$.

Sous ces notations, on a le résulat suivant :

Théorème 1.5.5 (Wiener theorem for $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$).

$$Z(I) = \emptyset \Longleftrightarrow I\ =\ L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$$

Synthèse spéctrale de certains fermés

Nous pouvons adapter la méthode du semigroupe pour des problèmes de synthèse harmonique dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$, nous allons considérer le semigroupe suivant :

pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, posons

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} e^{-t(\| x \|^2 + \frac{1}{P(\| x \|^2)^2})} & \text{si} \quad \text{si } P\ (\| x \|^2) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \text{si } P\ (\| x \|^2)\ =\ 0 \end{cases}$$

Ce semigroupe est un cas particulier du semigroupe défini plus haut, le semigroupe défini par $\psi_t = \overline{\mathcal{F}}(\varphi_t)$ est radiale, c'est un semigroupe de l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Ce semigroupe a toujours une croissance polynômiale puisque nous avons la même norme sur $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ et sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Nous devons redéfinir l'espace A_k du paragraphe 1.3.2,

posons pour tout entier $k \geq 1$, on considère l'espace

$$A_{k,rad}\ =\ \{\phi \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n) \text{ vérifiant } \hat{\phi}\ (x)\ =\ P(\| x \|^2)^k\ \hat{g}\ (x),\ \text{où } g \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Nous avons montré alors dans la partie 1.3.2 que si $k \geq 6n$, $\psi_t * \phi$ converge dans $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ vers ϕ dès que $\phi \in A_{k,rad}$.

On désigne par $I_{rad}\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$ l'idéal fermé dans $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ engendré par le semigroupe $\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$

Nous avons donc un résulat similaire :

Lemme 1.5.6. *Il existe un entier $k'_P \geq 1$ tel que $A_{k'_P,rad} \subset I_{rad}\big((\psi_t)_{Re\ t>0}\big)$.*

Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ on a $< f\ g > = <\ f^\#, g >$ si $f^\#$ est la radialisée de f.

On en déduit un analogue du théorème 1.3.3 :

Théorème 1.5.7. *Soit Q un polynôme radial de la forme $Q(x)\ =\ P(\| x \|^2)$ où P est un polynôme sur $\mathbb{R}$, si Δ désigne l'opérateur de Laplace et $k \geq k'_P$, $Z(Q)$ est un fermé de synthèse harmonique si et seulement si pour chaque fonction $f \in L^\infty_{rad}\ (\mathbb{R}^n)$ telle que $P(\Delta)^k\ f\ =\ 0$ on a $<\ f,\ g > = 0 \qquad \forall g \in\ I_{Z(P)}$*

Démonstration. La démonstration se fait essentiellement de la même façon que celle du théorème 1.3.3 ; il y a tout de même un point délicat : si on suppose que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est orthogonale à l'espace $A_{k,rad}$, cette condition s'écrit

$$<\ f,\ Q(\Delta)^k\ g > =\ 0$$

pour tout $g \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Soit encore : $< Q(\Delta)^k f,\ g > = 0$ pour tout $g \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n)$,

ce qui ne permet pas de conclure immédiatement que $Q(\Delta)^k f = 0$.

Si on pose $T = Q(\Delta)^k f$, T est en fait une distribution tempérée invariante par rotation et si $g^{\#}$ est la radialisée de $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $< T,\ g > = < T,\ g^{\#} > = 0$.

Donc si f est orthogonale à l'espace $A_{k,rad}$ on a bien $Q(\Delta)^k f = 0$. Le reste de la preuve suit celle du théorème 1.3.3. $\square$

Remarque 1.5.3. *On voit alors que tout résultat de synthèse dans l'algèbre $L^1(\mathbb{R}^n)$ obtenu avec le théorème 1.3.3 pour un polynôme de la forme $P(x) = Q(\| x \|^2)$ est un résultat de synthèse dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. En particulier, le point $\{0\}$ est de synthèse dans l'algèbre $L^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.*

1.6 Théorème de Wiener dans l'hypergroupe de Chébli-Trimèche.

Soit $\alpha > -1/2$, posons $A(x) = x^{2\alpha+1}$ pour $x > 0$.

Soit $(\mathbb{R}^+, *(A))$ l'hypergourpe de Sturm-Liouville relatif à A,(see. Bloom and Heyer [3]).

$$f \in L^1(\mathbb{R}^+, Adx) \Longleftrightarrow \int_0^\infty \mid f(x) \mid x^{2\alpha+1}dx < \infty$$

$L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$ est une algèbre de Banach commutative, et le produit de convolution est défini par : pour $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\epsilon_x * \epsilon_y(dz) = K_\alpha(x, y, z)z^{2\alpha+1}\lambda_{[|x-y|;x+y]}(dz)$$

où

$$K_\alpha(x, y, z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\left[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)\right]^{\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2)2^{2\alpha-1}(xyz)^{2\alpha}} \qquad x, y, z \in R^+ - \{0\}.$$

Les caractères de l'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$ sont donnés par les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre α

$$\gamma_\lambda(x) = j_\alpha(\lambda x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+1)(\lambda x)^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(\alpha+k+1)}$$

$\forall t > 0$, considérons $\phi_t(u) = \dfrac{2\exp\left(-u^2/t\right)}{\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha+1}}$.

Le lemme suivant assure que le semigroupe ainsi défini $(\phi_t)_{t>0}$ est un "bon semigroupe" pour l'étude du théorème de Wiener.

Lemme 1.6.1. *$(\phi_t)_{t>0}$ est un semigroupe dans l'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$. Il se prolonge en un semigroupe analytique dans le demi-plan complexe $\{Re\ t > 0\}$, et vérifie les conditions suivantes :*

1. $\| \phi_t \|_1 \leq \mid t \mid^{\alpha+1}, \ \forall Re\ t \geq 1$
2. *$(\phi_t)_{t>0}$ est une unité approchée bornée de l'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$.*

Démonstration. Pour montrer que $(\phi_t)_{t>0}$ est un semigroupe, déterminons son image par la transformation de Fourier.

$\forall t > 0$, nous pouvons intervertir la somme et l'intégrale :

$$\hat{\phi_t}(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{t^{\alpha+1}4^k k!\Gamma(\alpha+k+1)} \int_0^\infty e^{-u^2/t} u^{2\alpha+2k+1}\, du$$

$$\hat{\phi_t}(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k \lambda^{2k}}{t^{\alpha+1}4^k k!\Gamma(\alpha+k+1)} t^{\alpha+k+1}\Gamma(\alpha+k+1) = \exp\,(-t\lambda^2/4)$$

Donc, $(\phi_t)_{t>0}$ défini bien un semigroupe de l'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$.

Sur cette formule, il est immédiat que l'application $t \mapsto \phi_t$ se prolonge en un semigroupe analytique dans le demi-plan complexe $\{Re\ t > 0\}$.

Point 1. du lemme : si $Re\ t \geq 1$,

$$\begin{aligned} \| \phi_t \|_1 &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\exp\,(\frac{-Re\ tu^2}{|t|^2})}{\Gamma(\alpha+1) \mid t \mid^{\alpha+1}} u^{2\alpha+1}\, du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\exp\,(u^2)}{\Gamma(\alpha+1) \mid t \mid^{\alpha+1}} (\frac{\mid t \mid u}{\sqrt{Re\ t}})^{2\alpha+1} \frac{\mid t \mid}{\sqrt{Re\ t}}\, du \\ &\leq \frac{\mid t \mid^{\alpha+1}}{2\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \exp\,(-u^2) u^{2\alpha+1}\, du \ \leq \mid t \mid^{\alpha+1} \end{aligned}$$

Point 2. du lemme : La condition précédente nous dit déjà que le semigroupe $(\phi_t)_{0<t<1}$ est borné.

Par ailleurs, c'est une unité approchée de $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$. En effet, si $f \in L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$, pour $t > 0$:

$$\| \phi_t * f - f \|_1 \leq \int_0^\infty \mid \phi_t(u) \mid \| \tau_u f - f \|_1\, u^{2\alpha+1}\, du$$

Soit $\epsilon > 0$, l'application de translation $u \mapsto \tau_u f$ est continue en 0, il existe donc un réel $a > 0$ tel que

$$\mid u \mid \leq a \Longrightarrow \| \tau_u f - f \|_1 < \epsilon/2$$

Et, donc

$$\int_0^a \mid \phi_t(u) \mid\parallel \tau_u f - f \parallel_1 u^{2\alpha+1}\ du \leq \epsilon/2 \quad \int_0^\infty \mid \phi_t(u) \mid\ u^{2\alpha+1} du \leq \epsilon/2$$

D'autre part, il existe $c_{f,\alpha} = \frac{4\|f\|_1}{\Gamma(\alpha+1)} > 0$ tel que

$$\int_a^\infty \mid \phi_t(u) \mid\parallel \tau_u f - f \parallel_1 u^{2\alpha+1}\ du \leq \frac{c_{f,\alpha}}{t^{\alpha+1}} \int_a^\infty \exp\ (-u^2/t) u^{2\alpha+1}\ du$$

$$\int_a^\infty \frac{\exp\ (-u^2/t) u^{2\alpha+1}}{t^{\alpha+1}}\ du \leq \int_{a/\sqrt{t}}^\infty \exp\ (-u^2) u^{2\alpha+1}\ du$$

L'intégrale $\int_0^\infty \exp\ (-u^2) u^{2\alpha+1}\ du$ converge donc

$$\lim_{t\to 0} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty \exp\ (-u^2) u^{2\alpha+1}\ du = 0$$

On en déduit qu'il existe un voisinage de 0 pour $t > 0$ dans lequel nous pouvons écrire :

$$\parallel \phi_t * f - f \parallel_1 \leq \int_0^a \mid \phi_t(u) \mid\parallel \tau_u f - f \parallel_1 u^{2\alpha+1}\ du$$

$$+ \int_a^\infty \mid \phi_t(u) \mid\parallel \tau_u f - f \parallel_1 u^{2\alpha+1}\ du \leq \epsilon$$

Nous avons montré que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$

$$\lim_{t\to 0} \phi_t * f = f$$

limite pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$.

□

Nous en déduisons immédiatement le théorème de Wiener pour l'hypergroupe $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$.

Théorème 1.6.2. *Si I est un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$ tel que $\{\lambda > 0\ :\ \hat{f}(\lambda) = 0,\ \forall f \in I\} = \emptyset$ alors $I = L^1(\mathbb{R}^+, Adx)$.*

Chapitre 2

Fonction opérant sur l'algèbre de Fourier d'un groupe discret

2.1 Position du problème

Dans cette partie nous allons considérer l'algèbre de Fourier-Stieljes $B(G)$ d'un groupe G discret. Si F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on dit que F opère sur l'algèbre $B(G)$ si pour toute fonction réelle $u \in B(G)$, la fonction définie par $x \mapsto F\big(\ u(x)\ \big)$ définit un élément de $B(G)$.

Dans le cas d'un groupe abélien discret, le théorème de Kahane-Katznelson-Rudin (c.f Rudin [25]) identifie ces fonctions, il assure que de telles fonctions se prolongent en une fonction entière sur le plan complexe $\mathbb{C}$. Nous ferons référence à ce théorème dans la suite par l'abréviation théorème K-K-R.

Pour obtenir le "lemme de translation" qui donne immédiatement la continuité d'une fonction opérant sur $B(G)$, nous avons besoin d'une décomposition de Lebesgue des formes normales sur une algèbre de von Neumann, cette décomposition s'applique aux éléments de $B(G)$ car ce sont des formes ultrafaiblement continues sur le bidual de la C^*-algèbre $C^*(G)$.

Le premier objectif est donc de donner une décomposition de Lebesgue générale pour des formes normales positives sur un algèbre de von Neumann. Nous étendons le théorème de Radon-Nykodym dù à Sakai [28] qui donne une relation entre deux formes normales positives sur un algèbre de von Neumann mais sur lesquelles on impose l'hypothèse que les formes sont comparables.

Dans le cas d'un groupe G localement compact, G. Arsac a donné une décomposition de Lebesgue $\mathcal{B}(G) = \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}_s(G)$ avec une méthode différente puisque basée sur la décomposition des représentations (Arsac [1]).

Cette décomposition nous permet d'écrire le "lemme de translation" pour des formes normales sur l'algèbre de von Neumann enveloppante de la C^*-algèbre d'un groupe discret. Nous retrouvons par cette méthode le résultat de De Michele et Soardi [7] obtenu pour un groupe localement compact à partir de la décomposition de Lebesgue d'Arsac, mais la méthode est différente.

Nous entamons le problème d'identifier les fonctions opérant sur l'algèbre $\mathcal{B}(G)$ pour un groupe G non abélien. Pour les groupes discrets abéliens infini, les fonctions entières sont les seules fonctions opérant sur l'algèbre $\mathcal{B}(G)$. Quel prolongement du théorème de Kahane-Katznelson-Rudin peut-on atteindre pour les groupes discrets ? on peut montrer que les groupes discrets admettant des sous-groupes abéliens infinis vérifie le théorème K-K-R, ce résultat s'obtient en utilisant les propriétés fonctorielles de l'algèbre $\mathcal{B}(G)$. cette observation nous a été communiqué cordialement par N. Lohoué. Nous complétons ici cette remarque aux groupes discrets G qui admettent un sous-groupe H dont l'abélianisé $H/[H,H]$ est infini. Cette observation est virtuellement contenu dans les travaux de Dunkl [11], De Michele et Soardi [6], Rider [23].

Cette méthode s'applique par exemple aux groupes résolubles. En utilisant des arguments algébriques non-triviaux, le théorème K-K-R se démontre par cette méthode dans le cas des groupes localement fini. Mais le problème de savoir si le théorème est vrai pour tout groupe discret est toujours ouvert, de plus, nous aimerions obtenir un traitement unifié de ce problème dans le cadre de la théorie des réprésentations des groupes.

2.2 Réduction au cas abélien pour certaines classes de groupes discrets.

2.2.1 Principes

Dans cette partie, nous allons considérer la classe des groupes discrets G qui contiennent au moins un sous-groupe H tel que le groupe abélianisé de H, quotient de H par son sous-groupe des commutateurs $[H,H]$, est infini. Pour de tels groupes, le problème de savoir quelle fonction opère sur l'algèbre de Fourier-Stieltjes de G se réduit au même problème sur le groupe discret abélien infini $H|_{[H,H]}$. Notons ρ la représentation régulière de G et

ρ_H la représentation régulière de H.

Théorème 2.2.1. *Soit H un sous-groupe ouvert d'un groupe localement compact G, alors l'application $u \mapsto u|_H$ de $\mathcal{B}_\rho(G)$ sur $\mathcal{B}_{\rho_H}(H)$ est un épimorphisme d'algèbre de Banach.*

c.f. Eymard [13].

Ce théorème nous conduit au corollaire 2.2.3, nous avons besoin du lemme suivant pour sa démonstration.

Lemme 2.2.2. *Sous ces hypothèses, si F opère sur l'algèbre $\mathcal{B}_\rho(G)$ alors F opère sur l'algèbre $\mathcal{B}_{\rho_H}(H)$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{B}_{\rho_H}(H)$, alors il existe $v \in \mathcal{B}_\rho(G)$ dont la restriction à H est u, $u = v|_H$.

Ainsi, pour tout $x \in H$: $F\big(u(x)\big) = F\big(v(x)\big)$ où $v \in \mathcal{B}_\rho(G)$. Par hypothèse sur F, $F(v) \in \mathcal{B}_\rho(G)$, soit $F(u) = F(v)|_H$.

D'après le théorème 2.2.1, on en déduit que $F(u) \in \mathcal{B}_{\rho_H}(H)$, en d'autres termes F opère sur $\mathcal{B}_{\rho_H}(H)$ □

Corollaire 2.2.3. *Soit G un groupe discret, supposons qu'il existe un sous-groupe abélien infini H de G.*

Soit F, une fonction définie sur la droite réelle, opérant sur l'algèbre $\mathcal{B}(G)$ alors F se prolonge en une fonction entière dans le plan compexe.

Démonstration. $\mathcal{B}_\rho(G)$ est un idéal de l'algèbre commutative $\mathcal{B}(G)$, ainsi si F opère sur $\mathcal{B}(G)$ alors la fonction $\tilde{F}$ définie par $\tilde{F}(s) = sF(s)$ opère sur $\mathcal{B}_\rho(G)$. D'après le lemme 1.3, $\tilde{F}$ opère sur $\mathcal{B}_{\rho_H}(H) = \mathcal{B}(H)$ (car H est un groupe abélien),et donc $\tilde{F}$ se prolonge en une fonction entière dans le plan complexe.

Comme $\tilde{F}(0) = 0$, la fonction $z \mapsto \tilde{F}(z)/z$ est aussi entière dans le plan complexe, cette fonction est un prolongement de F en une fonction entière. □

Théorème 2.2.4. *Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe normal de G. Soit π l'homomorphisme quotient canonique de G sur G/H. L' application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(G/H) & \to & \mathcal{B}(G) \\ u & \mapsto & uo\pi \end{array}$$

est une isométrie sur le sous-espace de $\mathcal{B}(G)$ constitué des fonctions constantes sur les classes modulo H.

c.f. Eymard [13].

Corollaire 2.2.5. *Soit G un groupe discret et supposons qu'il existe un sous-groupe normal H tel que G/H soit abélien et infini, alors si F opère sur $\mathcal{B}(G)$, F se prolonge en une fonction entière sur le plan complexe.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{B}(G)$ notons

$$\begin{array}{rrl} F(u) : & G & \to \mathbf{C} \\ & x & \mapsto F\big(u(x)\big) \end{array}$$

L'hypothèse F opère sur $\mathcal{B}(G)$ signifie que la fonction $F(u)$ est une élément de l'algèbre $\mathcal{B}(G)$. Considérons une fonction $u \in \mathcal{B}(G/H)$, d'après le théorème 2.1.4 u s'identifie à un élément de l'algèbre $\mathcal{B}(G)$ constante sur les classes modulo H, donc par hypothèse $F(u) \in \mathcal{B}(G)$ et il est clair que la fonction $F(u)$ est constante sur les classes de G modulo H, $F(u) \in \mathcal{B}(G/H)$. □

2.2.2 Application aux groupes résolubles.

Théorème 2.2.6. *Si G est un groupe discret infini résoluble et si F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ opérant sur l'algèbre $\mathcal{B}(G)$, alors F se prolonge en une fonction entière dans le plan complexe.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un groupe résoluble infini possède un sous-groupe H tel que le groupe quotient $H|_{[H,H]}$ soit infini.

Si G est un groupe infini résoluble d'ordre 1, cela signifie que le groupe G est abélien, le résultat est donné alors par application directe du théorème de Kahane-Katznelson-Rudin sur les groupes abéliens.

Si G est un groupe infini résoluble d'ordre $n > 1$, alors $G^{(1)} = [G, G]$ est un groupe résoluble d'ordre $n-1$. Deux situations sont alors possibles, ou bien $G^{(1)}$ est infini et dans ce cas on applique l'hypothèse de récurrence, ou bien $G/G^{(1)}$ est infini. □

Autre application.

Cette méthode peut également s'appliquer sur les groupes infinis localement fini car ces groupes contiennent toujours un sous-groupe abélien infini. (c.f. Kegel [18] chapitre 2).

Remarque 2.2.1. *Si nous considérons un groupe simple infini, quasi-fini et non-abélien, alors la méthode précédente ne peut pas s'appliquer. Existe-t-il un tel groupe ? Une réponse positive a été donnée par A.Yu.Ol'shanskii ([19] (chapter 9)), Ol'shanskii donne une construction d'un groupe simple infini dont tous les sous-groupes propres sont cycliques et dont l'ordre est un nombre premier. Par le passé, Tarski avait suggéré l'existence de tels groupes, c'est pourquoi on les avait surnommés "monstres de Tarski."*

Cependant, dans tous les cas, ces réductions au cas abéliens n'éclairent pas sur la situation générale. C'est pourquoi le but de cette étude est d'entamer une attaque analytique et unifiée du problème, qui ne fasse pas appel à des résultats profonds d'algèbre.

2.3 Décomposition de Lebesgue

2.3.1 Support d'une forme normale sur une algèbre de von Neumann

Définition 2.3.1. *Soit M une algèbre de von Neumann,*

1. *L'espace des formes normales sur M est appelé prédual de M, on le désigne par M_*.*
2. *Soit Ψ une forme normale sur M, l'ensemble $L_\Psi = \{x \in M : \Psi(x^*x) = 0\}$ est un idéal à gauche ultrafaiblement fermé sur M et on note $q_\Psi \in M$ la projection définie par $L_\Psi = Mq_\Psi$.*
   q_Ψ est la plus grande projection $q \in M$ telle que $\Psi(q) = 0$, la projection $s(\Psi) = I - q_\Psi$ s'appelle support de la forme linéaire Ψ.
3. *Soit Ψ une forme ultrafaiblement continue sur M, et $|\Psi|$ sa forme polaire, on peut définir le support de la forme Ψ en posant $s(\Psi) = s(|\Psi|)$.*
4. *Soit Ψ et Φ deux éléments du prédual M_*, nous dirons que Ψ est singulière par rapport à Φ si $s(\Phi) \perp s(\Psi)$.*

Lemme 2.3.1. *Soit Ψ_1, Ψ_2 deux formes normales positives sur M alors*

$$s(\Psi_1) + s(\Psi_2) = I - \inf\{I - s(\Psi_1),\ I - s(\Psi_2)\}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{L}_i = \{x \in M : \Psi_i(x^*x) = 0\} = M\big(I - s(\Psi_i)\big)$ for $i \in \{1, 2\}$, alors

$$\begin{aligned}\{x \in :\ \Psi_1(x^*x) + \Psi_2(x^*x) = 0\} &= \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \\ &= M\big(I - s(\Psi_1)\big) \cap M\big(I - s(\Psi_2)\big) \\ &= M \inf\{I - s(\Psi_1),\ I - s(\Psi_2)\}\end{aligned}$$

Par identification,

$$s\big(\Psi_1 + \Psi_2\big) = I - \inf\{I - s(\Psi_1),\ I - s(\Psi_2)\}.$$

□

Proposition et définition 2.3.2. *Soit Ψ et Φ deux formes normales positives, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.
$$\Phi(T) = 0 \text{ et } T \geq 0 \Rightarrow \Psi(T) = 0$$

2.

$$\Phi\ (p)\ =\ 0\ et\ p^2 = p \Rightarrow \Psi\ (p)\ =\ 0$$

3.

$$s\ (\Psi) \leq s\ (\Phi)$$

Si l'une des assertions précédentes est vérifiée, on dit que la forme Ψ est absolument continue par rapport à Φ. Plus généralement, si Ψ et Φ sont deux formes normales, on dit que Ψ est absolument continue par rapport à Φ si $|\Psi|$ est absolument continue par rapport à $|\Phi|$.

Démonstration. Les implications 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. sont immédiates, et 3. $\Rightarrow$ 1. est traité par Dixmier [10]. □

Le lemme suivant donne une inégalité qui nous sera utile dans la démonstration des points 3. et 4. de la proposition 2.3.4. Une démonstration de ce résulat est donnée par Tomita (c.f. [31]).

Lemme 2.3.3. *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre unitaire, ϕ et ψ deux formes linéaires bornées sur $\mathcal{A}$ alors*

$$|\ |\ \phi + \psi\ |\ \ (x^*)\ \ |^2 \leq\ (\|\ \phi\ \| +\ \|\ \psi\ \|)\ (|\ \phi\ |\ \ (x^* x) +\ |\ \psi\ |\ \ (x^* x)) \qquad \forall x \in \mathcal{A}$$

La proposition suivante décrit certaines propriétés sur le support de formes ultrafaiblement continues sur M.

Lorsque M est une algèbre de von Neumann abélienne, ce résultat s'exprime en terme de mesure sur un espace localement compact (c.f. Rudin [24]).

Proposition 2.3.4. *Soit Ψ, Ψ_1 et Ψ_2 des formes normales sur M, et Φ une forme normale positive :*

1. *Si $s\ (\Psi) \leq s\ (\Phi)$ et $s\ (\Psi) \perp s\ (\Phi)$ alors $s\ (\Psi)\ =\ 0$.*
2. *si $s\ (\Psi_1) \leq s\ (\Phi)$ et $s\ (\Psi_2) \perp s\ (\Phi)$ alors $s\ (\Psi_1) \perp s\ (\Psi_2)$*
3. *si $s\ (\Psi_1) \leq s\ (\Phi)$ et $s\ (\Psi_2) \leq s\ (\Phi)$ alors $s\ (\Psi_1\ +\ \Psi_2) \leq s\ (\Phi)$.*
4. *si $s\ (\Psi_1) \perp s\ (\Phi)$ et $s\ (\Psi_2) \perp s\ (\Phi)$ alors $s\ (\Psi_1\ +\ \Psi_2) \perp s\ (\Phi)$.*

Démonstration. 1.

$$s\ (\Psi)\ =\ s\ (\Psi)\ s\ (\Phi)\ =\ 0$$

2.
$$s\ (\Psi_1).\ s\ (\Psi_2)\ =\ s\ (\Psi_1).\ s\ (\Phi).\ s\ (\Psi_2)\ =\ 0$$

3. Si Ψ_1 et Ψ_2 sont absolument continues par rapport à Φ, en terme de projecteurs, cela signifie que si q est un projecteur de M vérifiant $\Phi(q) = 0$ alors $\mid \Psi_1 \mid (q) = 0$ et $\mid \Psi_2 \mid (q) = 0$.
   En appliquant l'inégalité du lemme 2.3.3 : $\mid \Psi_1 + \Psi_2 \mid (q) = 0$ Et donc $\Psi_1 + \Psi_2$ est absolument continue par rapport à Φ.
4. Si Ψ_1 et Ψ_2 sont singulières par rapport à Φ, soit encore $s\ (\Psi_1) \perp s\ (\Phi)$ et $s\ (\Psi_2) \perp s\ (\Phi)$.
   D'après le lemme 2.3.3 appliqué à $s\ (\Phi)$, on en déduit que $\mid \Psi_1 + \Psi_2 \mid\ (s\ (\Phi))\ =\ 0$, Donc $\Psi_1 + \Psi_2$ est singulière par rapport à Φ.

□

Remarque 2.3.1. *Si Φ est une forme normale positive sur M, on note $\mathcal{A}_\Phi$ l'ensemble des formes normales sur M absolument continues par rapport à Φ et $\mathcal{S}_\Phi$ l'ensemble des formes singulières par rapport à Φ. La proposition précédente montre que ces ensembles sont des espaces vectoriels. En fait, ce sont des sous-espaces fermés du prédual M_* de M.*

2.3.2 Décomposition de Lebesgue

Le théorème suivant est un prolongement du résultat dû à S. Sakai [28] concernant la décomposition de Lebesgue d'une forme normale positive sur une algèbre de von Neumann M.

S. Sakai considère deux formes normales positives Ψ, Φ comparables au sens où $\Psi \leq \Phi$, dans ce cas il montre l'existence d'un élément $t_0 \in M$ vérifiant $0 \leq t_0 \leq 1$ tel que $\Psi(x)\ = \Phi(t_0 x t_0)$ pour tout $x \in M$.

A partir de ce résultat, si on se donne deux formes normales positives Φ, Ψ sur M sans autre hypothèse, nous pouvons écrire une décomposition de Lebesgue de la forme Ψ par rapport à Φ. C'est ce que décrit le théorème suivant, il nous donne en plus une expression de la partie absolument continue en fonction de Φ ce qui joue le rôle de la densité d'une mesure absolument continue lorsque l'on compare ce résultat à la décomposition de Lebesgue des mesures bornées.

Ce théorème contient la décomposition de Lebesgue des mesures bornées positives sur un espace localement compact.

Théorème 2.3.5 (Lebesgue decomposition). *Soit Ψ, Φ deux formes normales positives sur une algèbre de von Neumann M, alors il existe une unique décomposition $\Psi\ =\ \Psi_a\ + \Psi_s$ telle que Ψ_a, Ψ_s sont des formes normales sur M et*

$$s\ (\Psi_a) \leq s\ (\Phi) \quad s\ (\Psi_s) \perp s\ (\Phi)$$

De plus, il existe un élément $0 \leq t_0 \leq 1$ *dans* M *vérifiant :*

$$\Psi_a\ (x)\ =\ \sum_{n\geq 1} \Phi\ (t_0^n\ x\ s(\Phi)t_0^n)$$

Démonstration. L'algèbre de von Neumann M est *-isomorphe à une sous-algèbre autoadjointe faiblement fermée de $B(\mathcal{H})$ pour un certain espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (Sakai [28]). C'est pourquoi, nous allons identifier M à une sous-algèbre de von Neumann $B(\mathcal{H})$.

$\chi\ =\ \Psi\ +\ \Phi$ est une forme normale positive sur M vérifiant $\Psi \leq \chi$, il existe donc un élément $0 \leq t_0 \leq 1,\ t_0 \in M$ tel que

$$(\forall x \in M) \qquad \Psi\ (x)\ =\ \chi\ (t_0 x t_0)$$

Ainsi

$$(\forall x \in M) \qquad \Psi\ (x - t_0 x t_0)\ =\ \Phi\ (t_0 x t_0) \quad (1)$$

t_0 est un élément positif de M, considérons $p\ :\ \sigma\ (t_0) \to M$ la mesure spéctrale de t_0.

Soit $A\ = \sigma(t_0) - \{1\}$ et $B\ =\ \{1\}$, considérons les projecteurs associés $p_A\ =\ p\ (A)$ et $p_B\ =\ p\ (B)$,

Ce sont des projecteurs orthogonaux, et p_B vérifie $p_B\ (1 - t_0)\ =\ (1 - t_0)\ p_B\ =\ 0$.

Nous allons définir Ψ_s et Ψ_a par :

* $(\forall x \in M) \quad \Psi_s\ (x)\ =\ \Psi\ \Big(\ x\ \big(I - s(\Phi)\big)\ \Big)$

* $(\forall x \in M) \quad \Psi_a\ (x)\ =\ \Psi\ \Big(\ x\ s(\Phi)\ \Big)$

1. Sur ces expressions, il est clair que Ψ_a est absolument continue par rapport à Φ et Ψ_s est singulière par rapport à Φ.
2. Soit $x_n\ =\ t_0^n.x.t_0^n \in M$ dans (1) et sommons pour $n \in \{0, \ldots, N\}$, on obtient la relation :

$$(\forall x \in M) \quad \Psi\ (x - t_0^{N+1} x t_0^{N+1})\ = \Phi\ (\sum_{n=1}^{N+1} t_0^n x t_0^n) \ \ (2)$$

Pour $y\ =\ x\ s\ (\Phi) \in M$:

$$(\forall x \in M) \quad \Psi_a\ (x) - \Psi\ (t_0^{N+1} x\ s\ (\Phi) t_0^{N+1})\ =\ \Phi\ \big(\sum_{n=1}^{N+1} t_0^n x\ s\ (\Phi) t_0^n\big)\ (3)$$

Nous alllons montrer que la suite $(t_0^n x\ s(\Phi) t_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ultrafaiblement vers 0.

Soit $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que $\sum_{i\in\mathbf{N}} \|\xi_i\|^2 < \infty$, soit

$$Q_\xi\ (x) = \sum_{i\in\mathbf{N}} |<x\xi_i,\ \xi_i>| \qquad (x \in M)$$

Cette famille de seminormes définit la topologie ultrafaible sur M.

Pour $h \in \mathcal{H}$, on considère la mesure $\mu_h(w) = <p\ (w)h,\ h>$ alors μ_h est une mesure positive de norme $\|\mu_h\|_1 = \|h\|^2$.

Il existe une mesure positive μ_{ξ_i} telle que :

$$<t_0^{2n} p_A \xi_i,\ \xi_i> = \int_A s^{2n} d\mu_{\xi_i}(s)$$

En posant dans (1), $x = p_B$, on obtient $\Phi\ (p_B) = 0$, cela signifie que

$s\ (\Phi) \perp p_B$, et donc $s\ (\Phi) \leq p_A$. Cette inégalité va nous servir dans l'évaluation de la suite $(t_0^n x\ s(\Phi) t_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec les seminormes définies plus haut :

$$\begin{aligned}
Q_\xi\ (t_0^n x\ s(\Phi) t_0^n) &= \sum_{i\in\mathbf{N}} |<t_0^n x\ s(\Phi) t_0^n \xi_i,\ \xi_i>| \\
&= \sum_{i\in\mathbf{N}} |<x\ s(\Phi) t_0^n \xi_i,\ t_0^n \xi_i>| \\
&\leq \|x\| \sum_{i\in\mathbf{N}} \|s(\Phi) t_0^n \xi_i\|\ \|t_0^n \xi_i\| \\
&\leq \|x\| \sum_{i\in\mathbf{N}} \|p_A t_0^n \xi_i\|\ \|\xi_i\| \\
&\leq \|x\| \sum_{i\in\mathbf{N}} \Big(\int_A s^{2n} d\mu_{\xi_i}(s)\Big)^{1/2} \|\xi_i\|
\end{aligned}$$

Le membre de droite converge vers 0 d'après le théorème de convergence dominée puisque $\sum \|\xi_i\|^2 < +\infty$, nous en déduisons l'égalité :

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad \Psi_a\ (x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \Phi(t_0^n x\ s(\Phi) t_0^n)$$

L'unicité de la décomposition provient des propriétés données par la proposition 2.3.4 : Soit $\Psi = \Psi_a + \Psi_s = \Psi'_a + \Psi'_s$ deux décompositions qui vérifient les conditions du théorème, alors

$$\Psi_a - \Psi'_a = \Psi'_s - \Psi_s$$

Le membre de gauche est une forme normale absolument continue par rapport à Φ, tandis que le membre de droite est une forme normale singulière par rapport à Φ, donc :

$$\begin{aligned}\Psi_a &= \Psi'_a \\ \Psi_s &= \Psi'_s\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Remarque 2.3.2. *Si Φ est une trace normale, le support de Φ, $s\ (\Phi)$, est central, et donc Ψ_a et Ψ_s s'écrivent alors pour $x \in M$:*

$$\begin{aligned}\Psi_a\ (x) &= \Psi\big(s(\Phi)x\ s(\Phi)\big) \\ \Psi_s\ (x) &= \Psi\big((I - s(\Phi))x(I - s(\Phi))\big)\end{aligned}$$

En particulier, ces formes sont positives (ce qui n'est pas vrai en général) et nous avons la formule suivante :

$$\Psi_a\ (x) = \sum_{n \geq 1} \Phi\ (t_0^n s(\Phi)\ x\ s(\Phi) t_0^n)$$

En reprenant les notations de la remarque 2.3.1, nous avons une décomposition de M_*.

Corollaire 2.3.6. *Soit Φ une forme normale positive sur une algèbre de von Neumann M, alors*

$$M_* = \mathcal{A}_\Phi \oplus \mathcal{S}_\Phi.$$

2.4 Lemme de Translation pour un groupe non abélien discret.

2.4.1 Préliminaires

Soit G un groupe localement compact abélien, soit $\mathcal{M}^1(G)$ l'aglèbre de Banach des mesures bornées sur G, et $L^1(G)$ l'idéal fermé de $\mathcal{M}^1(G)$ des fonctions intégrables par rapport à une mesure de Haar à gauche dx sur G.

Les notations présentées ici sont développées par Eymard dans l'article [13]. Soit Σ l'ensemble des classes de représentations unitaires continues de G,pour chaque représentation $\pi \in \Sigma$, si $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert associé, alors π se prolonge en une représentation de l'algèbre $\mathcal{M}^1(G)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}^1(G) & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi) \\ \mu & \mapsto & \displaystyle\int_G \pi(x)d\mu(x) \end{array}$$

La restriction de cette représentation à $L^1(G)$ n'est pas dégénérée. Pour un ensemble $S \subset \Sigma$, posons

$$\|\mu\|_{\mathcal{S}} = \sup_{\pi \in \mathcal{S}} \|\pi(\mu)\|$$

$\| \ \|_{\mathcal{S}}$ définit une C^*-seminorme sur $\mathcal{M}^1(G)$.

$N_{\mathcal{S}}(G) = \{f \in L^1(G) \ : \ \forall \pi \in \mathcal{S} \ \pi \ (f) = 0\}$ est un idéal auto-adjoint bilatère de $L^1(G)$, et $L^1(G)/N_{\mathcal{S}}$ est un algèbre involutive. Considérons $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ le complété de $L^1(G)/N_{\mathcal{S}}$ pour la norme définie comme suit :

si $\tilde{f} \in L^1(G)/N_{\mathcal{S}}$ désigne la classe de f,

$$\|\tilde{f}\|_{\mathcal{S}} = \|f\|_{\mathcal{S}}$$

Alors $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ est une C^*-algèbre.

La C^*-algèbre qui nous intéresse ici est $C^*(G) = C^*_{\Sigma}(G)$, et les représentations particulières suivantes :

1. la représentation universelle de $C^*(G)$ que nous notons

$$w \ : \ C^*(G) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$$

2. la représentation régulière

$$\rho \ : \ C^*(G) \to \mathcal{L}\big(L^2(G)\big)$$

et sa bitransposée :

$$\rho'' \ : \ C^*(G)'' \to \mathcal{L}\big(L^2(G)\big)$$

où $C^*(G)''$ est l'agèbre de von Neumann enveloppante de $C^*(G)$.

Si Φ est une forme linéaire continue sur $C^*(G)$, Φ peut se voir comme une forme normale $\dot{\Phi}$ sur $C^*(G)''$ (c.f. Dixmier [9]) :

Pour $f \in C^*(G)$ on a $\Phi(f) \ = \ \dot{\Phi}\big(w(f)\big)$.

Dans la suite G est un groupe discret, considérons $\check{\phi}$ une forme linéaire bornée sur $C^*(G)$. Il existe une fonction $\phi \ : \ G \to \mathbf{C}$ telle que

$$(\forall f \in l^1(G)) \quad \check{\phi}(\tilde{f}) \ = \ \sum_{x \in G} f(x)\phi(x)$$

Muni du produit ordinaire des fonctions, l'espace constitué par ces fonctions est une algèbre, l'algèbre de Fourier-Stieltjes $\mathcal{B}(G)$. Dans la suite, pour $\phi \in \mathcal{B}(G)$, on note $\check{\phi}$ la forme linéaire sur $C^*(G)$ ou $C^*(G)''$ associé.

G étant discret, $\delta_x \in l^1(G)$ pour $x \in G$, et nous avons

$$(\forall x \in G) \quad \phi(x) \ = \ \check{\phi}(\tilde{\delta_x})$$

Le lemme suivant est à rapprocher du théorème de Radon -Nykodym dans la cas d'un groupe abélien. En effet, si G est un groupe abélien discret, $\mathcal{A}(G)$ contient δ_e, image de Fourier de la mesure de Haar normalisée du groupe compact $\hat{G}$; d'après le théorème de Raond-Nykodym classique des mesures appliqué à $\hat{G}$, toute mesure absolument continue sur $\hat{G}$ est donnée par un élément f de l'espace $L^1(\hat{G})$.

Lemme 2.4.1. *Soit G un groupe discret, si $\phi \in \mathcal{P}(G)$ est absolument continue par rapport à δ_e alors $\phi \in \mathcal{A}(G)$.*

Démonstration. $\check{\delta_e}$ est une trace positive sur $C^*(G)$, il s'étend en une trace normale positive sur l'algèbre de von Neumann $C^*(G)''$:

$$(\forall X \in C^*(G)'') \quad \check{\delta_e}\ (X) \ = \ \big(\rho''(X)\delta_e,\ \delta_e\big)$$

où $\delta_e \in l^2(G)$.

D'après le théorème de décomposition de Lebesgue 2.3.5, il existe un élément $t_0 \in C^*(G)''$, $0 \leq t_0 \leq 1$. Considérons $p \ : \ \sigma(t_0) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$ la mesure spectrale de t_0, alors :

$$(\forall X \in C^*(G'')) \quad \check{\phi}(X) \ = \ \sum_{n\geq 1} \check{\delta}_e(t_0^n s(\delta_e) X s(\delta_e) t_0^n)$$

Posons $T_n \ = \ t_0^n s(\delta_e) = \ s(\delta_e) \ t_0^n$ then :

$$(\forall X \in C^*(G)'') \quad \check{\phi}(X) \ = \ \sum_{n\geq 1} \check{\delta}_e(T_n X T_n)$$

Soit $T \in C^*(G)''$, posons

$$\begin{array}{rcl} u_T \ : \ G & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & u_T\ (x) \ = \ \check{\delta}_e\big(T w(\tilde{\delta_x}) T\big) \end{array}$$

Pour tout $x \in G$:

$$\begin{aligned} u_T(x) \ &= \ \big(\rho''(T^*)\rho'' w(\tilde{\delta_x})\rho''(T)\delta_e, \ \delta_e\big) \\ &= \ \big(\rho(x)\rho''(T)\delta_e, \ \rho''(T)\delta_e\big) \end{aligned}$$

où $\rho''(T)\delta_e \in l^2(G)$, et donc $u_T \in \mathcal{A}(G)$.

La série $\sum_{n\geq 1} \check{u}_{T_n}$ converge en tout point $C^*(G)''$, en particulier en tout point de G :

pour $f \in l^1(G)$ et $p < q$ des entiers positifs :

$$\begin{aligned} |\sum_{n=p}^{q} \check{u}_{T_n}\ (\tilde{f})| \ &= \ |\sum_{n=p}^{q} \big(\rho''(T_n)\rho(\tilde{f})\rho''(T_n)\delta_e, \ \delta_e\big)| \\ &= \ |\sum_{n=p}^{q} \big(\rho(\tilde{f})\rho''(T_n)\delta_e, \ \rho''(T_n)\delta_e\big)| \\ &\leq \ \|\rho(f)\| \ |\sum_{n=p}^{q} \big(\rho''(T_n)\delta_e, \ \rho''(T_n)\delta_e\big) \\ &\leq \ \|\tilde{f}\|_{C^*(G)} \ \sum_{n=p}^{q} u_{T_n}(e) \end{aligned}$$

Soit,

$$\|\sum_{n=p}^{q} \check{u}_{T_n}\| \ \leq \ \sum_{n=p}^{q} u_{T_n}(e)$$

Nous savons que la série $\sum_{n\geq 1} u_{T_n}(e)$ converge. En particulier, la série $\sum_{n\geq 1} \check{u}_{T_n}$ vérifie le critère de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{A}(G)$, elle converge donc dans l'espace $\mathcal{A}(G)$. D'autre part, cette série représente ϕ, nous en déduisons que ϕ est un élément de $\mathcal{A}(G)$. $\square$

Remarque 2.4.1. *Si $\phi \in \mathcal{B}(G)$, nous disposons de la décomposition polaire de ϕ qui s'écrit $\phi(x) =\mid \phi \mid (U^*x)$ pour $x \in C^*(G)''$, où U est une isométrie partielle élément de $C^*(G)''$.*

D'autre part, $\mid \phi^* \mid (x) =\mid \phi \mid (U^*xU)$ si $x \in C^*(G)''$. Si q est un projecteur central alors

$$\mid \phi \mid (q) = 0 \Rightarrow \mid \phi^* \mid (q) = 0.$$

Si $\phi \in \mathcal{B}(G)$ est absolument continue par rapport à δ_e, en considérant le projecteur $q = I - s\ (\delta_e)$, nous en déduisons immédiatement que Φ^* est absolument continue par rapport à δ_e.

Si $\phi \in \mathcal{B}(G)$ est absolument continue par rapport à δ_e, ϕ est combinaison linéaire de forme normale hermitienne absolument continue par rapport à δ_e (car Φ^* est absolument continue par rapport à δ_e). En utilisant la décomposition de Jordan des formes hermitiennes, nous en déduisons que $\Phi \in \mathcal{A}(G)$.

Et donc

$$A_{\delta_e} \subset \mathcal{A}(G).$$

En fait, ces espaces sont égaux.

De manière plus générale, si $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre et (w, H_w) la représentation universelle de $\mathcal{A}$, , $\mathcal{A}''$ le bidual de $\mathcal{A}$, considérons u une trace normale positive sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}''$ et (π, H_u, ξ_u) une représentation cyclique associée à u, nous définissons l'espace $\mathcal{A}_u$ des formes normales absolument continues par rapport à u, et l'espace $\mathcal{A}_\pi$ défini par Arsac [1] adhérence de l'espace des coéfficients de la représentation π.

Lemme 2.4.2. *Sous ces notations, on a*

$$\mathcal{A}_\pi \subset \mathcal{A}_u.$$

Démonstration. Soit $p_u\ :\ H_w \to H_w$ le projecteur orthogonal sur l'espace de Hilbert H_u.

Si nous notons s_u le support de u, nous allons montrer dans une première étape que s_u est le plus petit projecteur $q \in \mathcal{A}''$ tel que $p_u \leq q$.

Dans un second temps, nous considérons l'espace $F_\pi = \text{Vect}\{\xi *_\pi \xi,\ \xi \in H_u\}$ des coefficients de la représentation π et nous allons montrer que $F_\pi \subset A_u$. A_u étant fermé, la preuve sera achevée.

Si q est un projecteur de $\mathcal{A}''$ tel que $p_u \leq q$ alors

$$u(I-q) = \big(w(I-q)p_u\xi_u,\ p_u\xi\big) = 0$$

Donc $I - q \leq I - s_u$, soit encore $s_u \leq p_u$.
D'autre part, on a $u(s_u x s_u) = u(x)$ pour $x \in \mathcal{A}''$, donc

$$\big(\pi(x)\pi''(s_u)\xi_u, \pi''(s_u)\xi_u\big) = \big(\pi(x)\xi_u, \xi_u\big) \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

Ainsi, comme le membre de gauche est une représentation cyclique de u, nous en déduisons $\pi''(s_u)\xi_u = \xi_u$.

$$u(x) = \big(\pi''(s_u)\pi(x)\pi''(s_u)\xi_u, \xi_u\big) \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

Alors $x \mapsto \pi''(s_u)\pi(x)\pi''(s_u)$ est une représentation car u est une trace, et c'est une représentation cyclique de vecteur cyclique ξ_u, donc $\pi''(s_u)\pi(x)\pi''(s_u) = \pi(x)$ pour $x \in \mathcal{A}$ et $\pi''(s_u)\pi(x)\xi_u = \pi(x)\xi_u$ for $x \in \mathcal{A}$. Donc $\pi''(s_u)|_{H_u} = I_{H_u}$.
Ainsi $s_u p_u = w(s_u)p_u = \pi''(s_u)p_u = p_u$, ce qui signifie exactement que $p_u \leq s_u$.
Prenons $v \in F_\pi$, $v(x) = \big(\pi(x)\eta, \eta\big)$ avec $x \in \mathcal{A}$ et $\eta \in H_u$, la représentation est cyclique dans l'espace de Hilbert $H_v \subset H_u$, adhérence de $\mathrm{Vect}\{\pi(x).\eta, x \in \mathcal{A}\}$. Ainsi $p_v \leq p_u$ et donc $s_v \leq s_u$.

□

Dans ce cas, $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}_\rho(G)$ où ρ est la représentation régulière de G. Donc, nous avons $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}_{\delta_e}$.

2.4.2 Lemme de Translation

Le résultat suivant est une généralisation du lemme dit de translation dans le cas d'un groupe discret non-abélien (Rudin [25]).

Lemme 2.4.3 (Lemme de translation). *Soit G un groupe discret, soit $\phi \in \mathcal{B}(G)$ et (x_α) un suite généralisée d'éléments distincts de G.*

On considère ϕ_α défini par

$$(\forall x \in G) \quad \phi_\alpha\ (x)\ =\ \phi\ (x_\alpha x)$$

*Si $(\check{\phi_\alpha})$ converge *-faiblement vers $\check{\psi}$ dans $\mathcal{B}(G)$ alors $\check{\psi}$ est singulière par rapport à $\check{\delta_e}$.*

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{B}(G)$, puisque ϕ est combinaison linéaire d'au plus quatre éléments positif de $\mathcal{B}(G)$, il est clair que l'on peut supposer $\check{\phi}$ positif.

Ecrivons la décomposition de Lebesgue de ϕ par rapport à δ_e :

$\check{\Phi} = \check{\Phi}_a + \check{\Phi}_s$ où $\check{\Phi}_a$ et $\check{\Phi}_s$ sont éléments de $\mathcal{P}(G)$ (l'ensemble des fonctions de type positifs sur G), on peut les voir comme formes positives normales sur $C^*(G)''$ et donc :

1. Φ_a est absolument continue par rapport à δ_e.
2. Φ_s est singulière par rapport à δ_e.

Quitte à considérer des "sous-suites" généralisées, on peut supposer que $(\check{\phi}_a)_\alpha$ et $(\check{\phi}_s)_\alpha$ sont ultrafaiblement convergentes vers $\check{\Psi}_1$ et respectivement $\check{\Psi}_2$, de sorte que $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ dans $\mathcal{B}(G)$.

D'après le lemme 2.4.1, ϕ_a est une fonction continue de limite nulle à l'infini, et donc

$$(\forall x \in G) \quad lim(\phi_a)_\alpha(x) = 0$$

Si $(\check{\phi}_a)_\alpha$ converge ultrafaiblement vers Ψ_1, alors

$$(\forall x \in G) \quad lim(\phi_a)_\alpha(x) = \psi_1(x)$$

Et donc $\psi_1 = 0$.

Pour tout α et $f \in C^*(G)$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}
|(\check{\phi}_s)_\alpha\ (f)| &= |\check{\phi}_s\ (\tilde{\delta_{x_\alpha}} f)| \\
&\leq \check{\phi}_s\ (\tilde{\delta_{x_\alpha}} \tilde{\delta_{x_\alpha}}^*)^{1/2} \check{\phi}_s\ (f^* f)^{1/2} \\
&\leq \check{\phi}_s\ (e)^{1/2} \check{\phi}_s\ (f^* f)^{1/2} \qquad (f \in C^*(G))
\end{aligned}$$

Et donc en considérant les termes limites :

$$(\forall f \in C^*(G)) \quad |\check{\psi}_2\ (f)| \leq \check{\phi}_s\ (e)^{1/2} \check{\phi}_s\ (f^* f)^{1/2} \qquad (1)$$

Nous étendons cette inégalité dans $C^*(G)''$, soit $g \in C^*(G)''$ avec $\|g\| = 1$, d'après le théorème de Kaplansky, il existe (f_α) dans $C^*(G)$, telle que $\big(w(f_\alpha)\big)$ converge fortement vers g.

Soit $\xi \in \mathcal{H}_w$:

$$\begin{aligned}
< w(f_\alpha^* f_\alpha)\xi,\ \xi > &= \|\big(g - w(f_\alpha)\xi\big)\| + < g\xi,\ w(f_\alpha)\xi > \\
&\quad + < w(f_\alpha)\xi,\ g\xi >
\end{aligned}$$

Par conséquent $\big(w(f_\alpha^* f_\alpha)\big)$ converge faiblement vers g^*g dans la boule unité de $C^*(G)''$.

Puisque la topologie faible et la topologie ultrafaible coïncident sur la boule unité, $\big(w(f_\alpha^* f_\alpha)\big)$ converge ultrafaiblement vers g^*g. En utilisant cet argument avec l'inégalité (1), nous étendons (1) à la boule unité de $C^*(G)''$, et sans difficulté particulière à $C^*(G)''$:

$$\forall g \in C^*(G)'' \quad |\check{\psi}_2(g)| \;\leq \check{\phi}_s(e)^{1/2}\check{\phi}_s\;(g^*g) \qquad (2)$$

Soit $\check{\psi} \;=\; U\,|\check{\psi}|$ la décomposition polaire de ψ, où U est une isométrie partielle élément de $C^*(G)''$, nous pouvons écrire :

$$\forall g \in C^*(G)'' \quad |\check{\psi}|\;(g) \;=\; \check{\psi}\;(U^*g)$$

En prenant $g_1 \;=\; U^*g$ dans (2) :

$$\forall g \in C^*(G)'' \quad |\,|\,\check{\psi}_2\,|\;(g)| \;\leq \check{\phi}_s(e)^{1/2}\check{\phi}_s\;(g^*UU^*g) \qquad (3)$$

Soit p un projecteur de $C^*(G)''$, d'après (3) on a

$$\check{\phi}_s\;(p) \;=\; 0 \Rightarrow |\check{\psi}_2|\;(p) \;=\; 0$$

Cela signifie que $\check{\psi}_2$ est absolument continue par rapport à $\check{\phi}_s$, puisque $\check{\phi}_s$ est singulière par rapport à $\check{\delta}_e$. nous en déduisons que $\check{\psi}_2$ est singulière par rapport à $\check{\delta}_e$.

Finalement, $\check{\psi} \;=\; \check{\psi}_2$ est singulière par rapport à $\check{\delta}_e$. $\square$

2.5 Fonctions opérant sur $\mathcal{B}(G)$

Le théorème suivant est la première étape vers un résultat sur les groupes discrets quelconques semblables au théorème K-K-R sur les groupes discrets abéliens, dans la démonstration classique sur les groupes abéliens on distingue trois étapes : si F opére sur l'algèbre de Fourier-Stieltjes d'un groupe abéliens discrets, on montre succesivement que F est continue à l'aide du "lemme de translation", en utilisant une unité approchée bornée de $L^1(G)$ on obtient une propriété qui va au-délà de la continuité et de la simple opération de F sur $B(G)$: l'image d'un compact de $B_{\mathbb{R}}(G)$ est un ensemble borné de $B_{\mathbb{R}}(G)$. La démonstration classique de cette seconde étape suppose que le groupe G soit moyennable, et dans ce cas cette propriété s'étend sans difficulté aux cas non-abéliens. La dernière étape de la démonstration classique repose sur l'existence sur un groupe compact d'une mesure telle que ces itérés de convolution sont deux à deux disjoints. Dans le cas d'un groupe non-abélien discrets, cette propriété peut s'interpréter de deux façons, ou bien il existe un représentation π de G telle que les itérés tensoriels $\otimes^n \pi$ sont deux à deux disjoints, ou bien il existe une fonction de type positif $u \in B(G)$ telle que les itérés u^n sont disjoints comme formes normales sur le bidual de $C^*(G)''$; cette seconde propriété est plus faible que la requête faite sur les représentations.

En corollaire du lemme de translation nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. *Soit G un groupe discret, F une fonction complexe définit sur la droite réelle, $\eta > 0$, supposons que $F(g) \in \mathcal{B}(G)$ dès que $g \in \mathcal{A}(G)$ est une fonction réelle vérifiant $\|g\| < \eta$, alors F est continue à l'origine.*

Démonstration. Cette démonstration reprend la démarche de la preuve de Rudin [25], utilisant en chemin notre lemme de translation.

Quitte à rempacer F par $F - F(0)$, on peut supposer $F(0) = 0$.

Supposons que F ne soit pas continue à l'origine, il existe un suite de nombres réels (a_n) et $\epsilon > 0$ vérifiant :

$$\sum_n |a_n| < \eta$$
$$|F(a_n)| > \epsilon$$

Il existe une suite (x_n) d'éléments distincts de G tels que

$$(\forall i,\ j,\ k < n) \quad x_n \neq x_i x_j^{-1} x_k$$

Considérons alors la fonction réelle définie par :

$$(\forall x \in G) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}(x)$$

g est un élément de $\mathcal{A}(G)$ vérifiant $\|g\| < \eta$.

Par hypothèse, il existe $\phi \in \mathcal{B}(G)$ telle que

$$\phi\ (x_n) = F(a_n)$$
$$\phi\ (x) = 0\ if\ x \notin \{x_n\}$$

Posons $\phi_n\ (x) = \phi(x_n x)$ pour $x \in G$, et soit ψ

ultrafaiblement adhérent à (ϕ_n). Le lemme de translation nous assure que $\check{\psi}$ est singulière par rapport à $\check{\delta_e}$.

On the other hand, if we prove that $\psi = 0$; indeed, since

$$|\phi_n\ (e)| = |\phi\ (x_n)| = |F(a_n)| > \epsilon$$

We see that $|\psi\ (e)| \geq \epsilon$, hence $\check{\psi} \neq 0$, and this contradiction concludes the proof.

Nous devons donc montrer que $\check{\psi}$ est absolument continue par rapport à $\check{\delta}_e$:

si $x \neq e$, $\phi_n(x) \neq 0$ si et seulement si il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $x_n x = x_m$, i.e. $x = x_n^{-1} x_m$. Par construction de la suite (x_n), un élément $x \neq e$ a au plus une unique représentation de la forme $x = x_n^{-1} x_m$, donc

$$(\forall x \neq e) \quad \lim_n \phi_n(x) = 0$$

C'est pourquoi

$$(\forall x \in G) \quad \psi\ (x) = \psi\ (e)\ \delta_e\ (x)$$

ψ est absolument continue par rapport à δ_e. Ceci achève la démonstration. □

Corollaire 2.5.2. *Soit G un groupe discret. Si F est une fonction complexe définie sur la droite réelle et si F opère sur $\mathcal{B}(G)$ alors F est continue sur la droite réelle.*

Démonstration. pour $t \in \mathbf{R}$, nous pouvons appliquer le théorème à la fonction $s \mapsto F\ (s+t)$. □

2.6 Le groupe libre à un nombre fini de générateurs

2.6.1 Préliminaires sur les fonctions radiales

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la situation où le groupe est le groupe libre à $r \geq 2$ générateurs $G = \mathbb{F}_r$, groupe non-moyennable mais qui vérifie le théorème K-K-R. En effet si x est un élément qui n'est pas l'élément neutre alors le groupe $< x >$ engendré par x est un sous-groupe abélien infini de G, on en déduit facilement d'après la partie 2.1, que si F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui opère sur $B(G)$ alors F opère sur $B(< x >)$, et donc d'après le théorème K-K-R sur les groupes discrets abéliens, F se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$.

Sur le groupe libre à un nombre fini de générateurs, on peut définir la longueur d'un mots relatif à l'alphabet choisi au départ (c.f Figà-Talamanca et Picardello [15]). Pour chaque entier naturel n, considérons l'ensemble des mots de longueur n,
$W_n = \{x \in \mathbb{F}_r \ : |\, x \,| = n \}$.

Définition 2.6.1. *Une fonction f définie sur $\mathbb{F}_r$ est radiale si elle est constante sur les ensembles W_n.*

W_0 ne contient que l'élément neutre, W_n contient $2r(2r-1)^{n-1}$ éléments, nous allons considérer les fonctions caractéristiques normalisées de ces ensembles :
- $\mu_0 = \delta_e$
- pour chaque entier naturel n, posons $\mu_n(x) = \frac{1}{2r(2r-1)^{n-1}}\delta_{W_n}(x)$ pour $x \in F_r$.

Ainsi, chaque fonction radiale s'écrit $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\mu_n$. Nous allons considérer la sous-algèbre de $B(\mathbb{F}_r)$ constituée des fonctions radiales sur $\mathbb{F}_r$, $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Nous allons rappeler quelques résultats sur cette algèbre, ces résultats sont développés par Figà-Talamanca et Picardello dans [15].

Pour décrire les éléments de $B_{\#}(F_r)$, nous avons besoin d'introduire des fonctions radiales particulières, les fonction sphériques.

Définition 2.6.2. *Une fonction ϕ sur $\mathbb{F}_r$ est sphérique si elle vérifie les conditions suivantes :*
- *ϕ est radiale*
- *$\phi * f = c\,\phi$ pour tout fonction radiale f à support fini, c est une constante qui dépend de f et ϕ.*
- *$\phi(e) = 1$*

ϕ étant radiale on peut poser pour chaque entier naturel n, $\phi(n) = \phi(x^n)$ si x est un générateur de $\mathbb{F}_r$.

La proposition suivante décrit plus précisément les fonctions sphériques :

Proposition 2.6.1. *si ϕ est sphérique alors*

$$\phi(n+1) \;=\; \frac{2r}{2r-1}\phi(1)\phi(n) - \frac{1}{2r-1}\phi(n-1)$$

Ainsi une fonction sphérique est entièrement déterminée par sa valeur sur les générateurs du groupe $\mathbb{F}_r$.
Pour $t \in [-1,1]$, la fonction sphérique ψ_t qui prend la valeur t sur les mots de longueur 1 est définie de manière unique.

La proposition suivante permet de décrire les éléments de $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ à l'aide de ces fonctions sphériques.

Proposition 2.6.2. *Si $u \in B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ alors il existe une unique mesure m_u de Radon bornée sur le compact $[-1,1]$ tel que*

$$u(x) \;=\; \int_{-1}^{1} \psi_t(x)dm_u(t) \quad \forall x \in \mathbb{F}_r$$

Nous citons encore un résultat qui va nous permettre dans la section suivante de déterminer les caractères de l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Théorème 2.6.3. *Si $u \in B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ et si $m_u(\{-1,\ 1\}) \;=\; 0$ alors le rayon spectral de la classe $u + A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ de u dans l'algèbre quotient $B_{\#}(\mathbb{F}_r)/A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ est nul.*

2.6.2 Caractères de l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Nous allons ici décrire les caractères de l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Proposition 2.6.4. *Soit χ un caractère continu, non nul de $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$, il existe un élément $x \in \mathbb{F}_r$ tel que $\chi\ (u) \;=\; u(x)$ pour toute fonction $u \in A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si u est un élément de $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ n'ayant pas de zéros alors l'idéal I_u engendré par u est dense dans $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

En effet, si v est une fonction radiale à support fini alors $v \;=\; \dfrac{v}{u}\, u \in I_u$, ce qui montre que I_u contient les fonctions radiales à support fini et donc I_u est dense dans $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Ceci nous permet de voir que si un idéal fermé I vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{F}_r \quad \exists v \in I \quad \text{tel que } v(x) \neq 0$$

Alors $I = A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

On se donne une suite de nombres tous non nuls (c_n) tel que

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_n \in l^2_{\#}(\mathbb{F}_r).$$

Pour chaque entier naturel n, il existe une fonction $u_n \in I$ telle que $u_n(x) = c_n$ si $x \in W_n$.

Considérons alors la suite de fonctions $f_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \mu_n$ c'est une suite de fonctions de $l^2_{\#}(\mathbb{F}_r)$ convergente dans $l^2_{\#}(\mathbb{F}_r)$. Notons f cette limite, chaque f_N est un élément de l'idéal I et la convergence dans $l^2_{\#}(\mathbb{F}_r)$ entraine la convergence dans l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$, on en déduit que l'idéal I contient une fonction qui ne s'annule pas sur le groupe $\mathbb{F}_r$ et d'après la remarque plus haut, l'idéal fermé I coïncide avec l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Il nous reste à déterminer les idéaux maximaux de $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Notons pour $x \in \mathbb{F}_r$, $I_x = \{ u \in A_{\#}(\mathbb{F}_r) \; u(x) = 0 \}$

Les idéaux de cette forme sont des idéaux maximaux, si $u \notin I_x$ alors l'idéal I engendré par I_x et u vérifie la condition suivante :
pour tout $y \in \mathbb{F}_r$ il existe $v \in I$ telle que $v(y) \neq 0$, et donc d'après ce qui précède $I = A_{\#}(\mathbb{F}_r)$. Ce qui montre que l'idéal I_x est maximal.

Réciproquement, on se donne un idéal fermé J supposé maximal dans l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$, il existe au moins un élément $x \in \mathbb{F}_r$ qui est un zéro commun aux éléments de I car sinon I serait dense dans $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Ainsi, J est contenu dans l'idéal fermé I_x, et par maximalité on a nécessairement $J = I_x$.

Si maintenant, on se donne χ un caractère continu non nul de l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$, le noyau de χ est un idéal maximal de $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$, il existe donc un élément $x \in \mathbb{F}_r$ tel que $ker\ \chi = I_x$ et donc pour toute $u \in A_{\#}(\mathbb{F}_r)$, $\chi\,(u) = u(x)$.

□

Cette description des caractères de l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ nous permet de voir qu'ils sont tous hermitiens et donc l'algèbre $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ est symétrique. Ce résultat va nous servir dans la description des caractères de l'algèbre $B\#(\mathbb{F}_r)$.

2.6.3 Caractères de l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$

Nous voulons ici décrire les caractères continues de l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$. Nous pouvons distinguer deux types de caractères, les caractères qui ont une trace non nulle sur $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ et les autres.
$A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ est un idéal fermé de $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$, tout caractère non nul de $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ se prolonge en un caractère non nul de $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$. Outre les caractères définis par $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ nous allons nous intéresser aux caractères de $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ dont la restriction à $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ est nulle. La proposition suivante va décrire le comportement d'un tel caractère sur une classe de fonction plus large que $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ à savoir les fonctions de $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ qui ont une limite nulle à l'infini, condition qui se traduit en terme de mesure sur $[-1,\ 1]$, à une mesure qui ne porte pas les extrémités $\{-1\}$ et $\{1\}$.

Proposition 2.6.5. *Si χ est un caractère de $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$, nul sur $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$, soit $u \in B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ vérifiant la condition $m_u\{-1, 1\} = 0$ alors $\chi(u) = 0$.*

Démonstration. D'après la théorème 2.6.3, le rayon spectral de u par rapport à l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)/A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ est nul, ainsi pour tout $\epsilon > 0$, chaque entier n, il existe $v_n \in A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ tel que

$$\| u^n + v_n \|_B \leq \epsilon^n$$

Soit χ un caractère qui s'annule sur $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$,

$$| \chi(u^n + v_n) | \leq \epsilon^n \quad \text{soit} \quad | \chi(u) | \leq \epsilon \ \text{ pour tout } \ \epsilon > 0$$

□

Les deux éléments correspondant respectivement à la mesure δ_1 et δ_{-1} sont deux caractères du groupe $\mathbb{F}_r$, 1 et $u_0(x) = (-1)^{|x|}$. Ainsi, les caractères de $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ qui ne se lisent pas dans $A_{\#}(\mathbb{F}_r)$ sont les caractères de la sous-algèbre à deux éléments $\{1,\ u_0\}$.

Si χ est un caractère non nul de cette algèbre, il est entièrement déterminer par la relation $\chi(u_o) = \pm \chi(1)$. Ainsi tous les caractères de l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ sont hermitiens, et l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ est donc symétrique. Il s'ensuit que la fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ opère sur $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$.

Le théorème K-K-R est donc faux sur l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$, l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ ne contient donc pas l'information du théorème sur l'algèbre $B(\mathbb{F}_r)$. Le passage par un sous-groupe abélien pour montrer que le théorème K-K-R est vrai sur l'algèbre $B(\mathbb{F}_r)$ ne permet pas d'expliquer et nous maintient dans un aveuglement sur la rigidification de la situation lorsque l'on passe de l'algèbre $B_{\#}(\mathbb{F}_r)$ à l'algèbre $B(\mathbb{F}_r)$.

Chapitre 3

Une caractérisation des groupes discrets.

Introduction

En 1957, S. Helgason a démontré dans [17] que sur un groupe G séparable unimodulaire localement compact, non compact, et connexe, les opérateurs spectralement continus sur $L^1(G)$ et commutant avec les translations à droites sont identiquement nuls.

Poursuivant cette étude dans le cadre de la théorie $L^1(G)$, en 1964, S. Sakai a étendu ce résultat pour tout groupe localement compact, non-compact. Nous allons dans cette partie essayer de voir ce qu'il en est dans la théorie $\mathcal{A}(G)$, algèbre de Fourier d'un groupe localement compact G.

Un opérateur T sur $L^1(G)$ qui commutent avec les translations à droite est de la forme $Tg = \mu * g$ où $g \in L^1(G)$ et μ est une mesure de Radon bornée sur le groupe G. Ainsi, si nous voulons transposer le problème sur l'algèbre de Fourier $\mathcal{A}(G)$ d'un groupe localement compact G nous devons interpréter cette condition de commutation avec les translations en considérant les opérateurs sur $\mathcal{A}(G)$ de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G) &\to \mathcal{A}(G) \\ v &\mapsto u.v \end{aligned}$$

où $u \in \mathcal{B}(G)$.

Il suffit en fait de restreindre l'étude pour $u \in \mathcal{A}(G)$. Si un tel opérateur n'est pas nul pour un certain $u \in \mathcal{B}(G)$ alors pour tout $w \neq 0 \in \mathcal{A}(G)$ l'opérateur de multiplication par wu est non nul également. Et si tous les opérateurs définis par un élément de $\mathcal{A}(G)$ sont nuls alors il n'existe pas d'opérateurs non nul défini par un un élément de $\mathcal{B}(G)$. Nous allons considérer le sous-espace de $\mathcal{A}(G)$ défini par

$$\mathcal{S}(G) = \{ u \in \mathcal{A}(G) \ : \text{ there exists } c > 0 \text{ such that } \| u\, v \|_{\mathcal{A}(G)} \leq c \| v \|_\infty, \quad \forall v \in \mathcal{A}(G)\}$$

Il représente l'espace des opérateurs de multiplication spectralement continus sur $\mathcal{A}(G)$. Cet espace nous permet de donner un caractérisation des groupes discrets parmi les groupes localement compact. En effet, si G est un groupe discret $\mathcal{S}(G) \neq \{0\}$, il contient notemment l'espace $l^2(G)$. Nous allons montrer que la réciproque, si $\mathcal{S}(G) \neq \{0\}$ alors G est un groupe discret.

3.1 Préliminaires

Pour une lecture plus aisée, nous reformulons dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$, où G est un groupe localement compact, des résultats classiques sur $L^1(G)$, où G est une groupe localement compact abélien (c.f. Cartan et Godement [5]). Nous nous intéressons plus particulièrement au résultat suivant :

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}(G)$ vérifiant la condition suivante :

$$(1) \ \ \forall x \in G \ \text{ there exists } u \in \mathcal{I} \text{ such that } u\ (x) \neq 0$$

alors

$$\mathcal{A}(G) \cap \mathcal{C}_c(G) \subset \mathcal{I}$$

où $\mathcal{C}_c(G)$ est l'espace des fonctions complexes continues à support compact. Cela signifie que l'idéal $\mathcal{A}(G) \cap \mathcal{C}_c(G)$ est le plus petit idéal de $\mathcal{A}(G)$ qui vérifie la condition (1).

Dans cette partie, G désigne un groupe localement compact.

Lemme 3.1.1. *Soit K un compact de G, il existe $u \in \mathcal{A}(G)$ à support compact tel que $0 \leqslant u\ (x) \leqslant 1 \ \ \forall x \in G$ and $u\ (x) = 1 \ \ \forall x \in K$.*

Démonstration. c.f. Eymard [13] □

Lemme 3.1.2. *Si K est un compact de G, considérons $u_0 \in \mathcal{A}(G)$ n'admettant aucun zéros sur K, il existe $v \in \mathcal{A}(G)$ telle que*

$$u_0\ (x)\ v\ (x) = 1 \qquad \forall x \in K.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{I}_K = \{ h \in \mathcal{A}(G) : h(x) = 0 \ \forall x \in K \}$, $\mathcal{I}_K$ est unidéal fermé de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$. Posons $\mathcal{R}_K = \mathcal{A}(G)/\mathcal{I}_K$, $\mathcal{R}_K$ est une algèbre de Banach, et soit $\pi_K : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{R}_K$ l'application quotient associée.

Il existe $u_K \in \mathcal{A}(G)$ telle que $u_K(x) = 1 \ \ \forall x \in K$, alors $\forall h \in \mathcal{A}(G) \ \ u_K h - h \in \mathcal{I}_K$ and $\pi_K(u_K)$ is a unit of $\mathcal{R}_K$.

Donc, $\mathcal{R}_K$ est une algèbre de Banach commutative unitaire.

Nous voulons savoir si $\pi_K(u_0)$ admet un inverse dans l'algèbre $\mathcal{R}_K$.

Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal dans $\mathcal{R}_K$, et $p_{\mathcal{M}} : \mathcal{R}_K \to \mathcal{R}_K/\mathcal{M}$ l'application quotient associée, alors $\pi_K(u_0)$ est inversible si pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de $\mathcal{R}_K$, $p_{\mathcal{M}}\big(\pi_K(u_0)\big) \neq 0$.

Soit $\Phi_{\mathcal{M}} = p_{\mathcal{M}} \circ \pi_K : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{R}_K/\mathcal{M}$, or $\mathcal{R}_K/\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Gel'fand-Masur.

Donc $\Phi_{\mathcal{M}}$ est une forme linéaire bornée multiplicative, en d'autres termes $\Phi_{\mathcal{M}}$ est un caractère de $\mathcal{A}(G)$.

Les caractères de $\mathcal{A}(G)$ sont donnés par les éléments de G, il existe donc un élément $x_{\mathcal{M}} \in G$ tel que

$$\phi_{\mathcal{M}}(h) = h(x_{\mathcal{M}}) \qquad \forall h \in \mathcal{A}(G)$$

C'est pourquoi, $u_K(x_{\mathcal{M}}) = \phi_{\mathcal{M}}(u_K) = 1$ soit $x_{\mathcal{M}} \in K$.

Soit $u_0 \in \mathcal{A}(G)$ tel que $u_0(x) \neq 0 \qquad \forall x \in K$ alors

$$\phi_{\mathcal{M}}(u_0) = u_0(x_{\mathcal{M}}) \neq 0$$

$\pi_K(u_0)$ est inversible dans $\mathcal{R}_K$, il existe donc un élément $v \in \mathcal{A}(G)$ vérifiant $\pi_K(u_0\, v) = \pi_K(u_K)$, i.e.

$$u_0(x)\, v(x) = 1 \qquad \forall x \in K.$$

□

Lemme 3.1.3. *Soit u, $v \in \mathcal{A}(G)$ tels que l'ensemble des zéros de v est contenu dans l'intérieur de l'emsemble des zéros de u, et supposons que u est à support compact, alors il existe un élément $w \in \mathcal{A}(G)$ tel que $u = v\, w$.*

Démonstration. Soit K un compact de G tel que :

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 && \forall x \in G \setminus K \\ v(x) &\neq 0 && \forall x \in K \end{aligned}$$

Il existe $v_1 \in \mathcal{A}(G)$ tel que $v\ (x)\ v_1(x)\ = 1$.

Considérons $w\ =\ u\ v_1 \in \mathcal{A}(G)$, alors

$$v\ (x)\ w\ (w)\ =\ \big(v\ v_1\ u\big)\ (x)\ =\ \begin{cases} u\ (x) & \text{for } x \in K \\ 0 & \text{for } x \in G \setminus K \end{cases}$$

Donc $u\ =\ v\ w$.

□

Théorème 3.1.4. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de l'algèbre $\mathcal{A}(G)$ tel que*

$$(1) \qquad \forall x \in G \textit{ there exists } \ u \in \mathcal{I} \textit{ such that } u\ (x)\ \neq\ 0$$

alors $\mathcal{A}(G) \cap \mathcal{C}_c(G) \subset \mathcal{I}$.

Démonstration. Soit K un compact de G et U un voisinage compact de K dans G. Pour chaque $x_0 \in U$ il existe un élément $u \in \mathcal{I}$ tel que $\mid u\ (x)\ \mid > 1$.

u est continue il existe donc un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que

$$\mid u\ (x)\ \mid > 1 \qquad \forall x \in V_{x_0}.$$

Puisque U est compact, il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in U$, $V_1 \ldots V_n$ leurs voisinages respectifs, $u_1 \ldots u_n \in \mathcal{I}$ tels que

$$\begin{array}{ll} U \subset V_1 \ldots\ V_n & \\ \mid u_i\ (x)\ \mid \geq 1 & \forall x \in V_i,\ i \in \{1, \ldots n\} \end{array}$$

Considérons la somme $u_0\ =\ \sum_{i=1}^{n} u_i\ \overline{u_i}\ =\ \sum_{i=1}^{n} \mid u_i \mid^2 \in \mathcal{I}$, alors

$$u_0\ (x) \geq 1 \qquad \forall x \in U$$

Soit $u \in \mathcal{A}(G) \cap \mathcal{C}_c(G)$, $K\ =\ \mathit{supp}\ u$, il existe $u_0 \in \mathcal{I}$ tel que $u_0\ (x) \neq 0 \quad \forall x \in K$. Si $Z\ (v)$ est l'ensemble des zéros d'un élément $v \in \mathcal{A}(G)$, alors

$$Z\ (u_0)\ \subset Z\ (u)^o.$$

D'après le lemme 3.1.3, il exsite un élément $w \in \mathcal{A}(G)$ vérifiant $u\ =\ u_0\ w \in \mathcal{I}$. Et donc

$$\mathcal{A}(G) \cap \mathcal{C}_c(G) \subset \mathcal{I}.$$

□

3.2 Une caractérisation des groupes discrets.

Considérons

$\mathcal{S}(G) = \{ u \in \mathcal{A}(G) :$ there exists $c > 0$ such that $\| u\, v \|_{\mathcal{A}(G)} \leq c \| v \|_\infty, \quad \forall v \in \mathcal{A}(G)\}$.

Posons

$$\| u \|_* = \sup_{\|v\|_\infty \leq 1} \| u\, v \|_{\mathcal{A}(G)} \qquad \text{for } u \in \mathcal{S}(G)$$

La proposition suivante rassemble quelques propriétés de $\mathcal{S}(G)$:

Proposition 3.2.1. *Supposons $\mathcal{S}(G) \neq \{0\}$ alors :*

i. $\mathcal{S}(G)$ est un idéal de $\mathcal{A}(G)$, invariant par translation et dense dans $\mathcal{A}(G)$.

ii. $\mathcal{A}(G) \cap \mathcal{C}_c(G) \subseteq \mathcal{S}(G)$ où $\mathcal{C}_c(G)$ est l'espace des fonctions complexes continues sur G à support compact.

Démonstration. i. Soit $u \in \mathcal{S}(G)$, $v,\ w \in \mathcal{A}(G)$ alors

$$\begin{aligned} \| u\, v\, w \|_{\mathcal{A}(G)} &\leq \| u\, v \|_{\mathcal{A}(G)} \| v \|_{\mathcal{A}(G)} \\ &\leq \| u \|_* \| w \|_\infty \| v \|_{\mathcal{A}(G)} \end{aligned}$$

Donc $u\, v \in \mathcal{S}(G)$ et

$$\| u\, v \|_{\mathcal{A}(G)} \leq \| u \|_* \| v \|_{\mathcal{A}(G)}$$

$\mathcal{S}(G)$ est donc un idéal de $\mathcal{A}(G)$.

Soit $x \in G,\ u \in \mathcal{S}(G),\ v \in \mathcal{A}(G)$:

$$\begin{aligned} \| \tau_x u\, v \|_{\mathcal{A}(G)} &= \| \tau_x\, (u \tau_{x^{-1}} v) \|_{\mathcal{A}(G)} &= \| u\, \tau_{x^{-1}} v \|_{\mathcal{A}(G)} \\ &\leq \| u \|_* \| \tau_{x^{-1}} v \|_\infty &= \| u \|_* \| v \|_{\mathcal{A}(G)} \end{aligned}$$

Alors $\tau_x u \in \mathcal{S}(G)$ et $\| \tau_x u \in \mathcal{S}(G) \|_* \leq \| u \|_*$.

D'autre part, $\| u \|_* = \| \tau_{x^{-1}} \tau_x u \|_* \leq \| \tau_x u \|_*$.

Donc

$$\| u \|_* = \| \tau_x u \|_* \qquad \forall x \in G$$

Soit $u \in \mathcal{S}(G)$ tel que $u \neq 0$, il exist un élément $x_0 \in G$ vérifiant $u\ (x_0) \neq 0$, soit $x \in G$ et considérons $v = \tau_{x\, x_0^{-1}} u \in \mathcal{S}(G)$, alors $v\ (x) = u\ (x_0\, x^{-1}\, x) = u\ (x_0) \neq 0$.

Pour chaque élément $x \in G$ il existe $v \in \mathcal{S}(G)$ tel que $v\ (x) \neq 0$, le théorème de Wiener dans $\mathcal{A}(G)$ nous assure que $\mathcal{S}(G)$ est un idéal dense de $\mathcal{A}(G)$.

ii. C'est une conséquence immédiate du point i. et des préliminaires. ☐

Nous citons ici deux théorèmes que nous utiliserons dans la démonstrations du théorème 3.2.5.

Théorème 3.2.2. *Soit A une C^* algèbre et E un L-espace abstrait, T un opérateur borné défini sur A à valeurs dans E, alors T est faiblement compact.*

Démonstration. c.f. Sakai [27]. □

Théorème 3.2.3. *Soit A un AL-espace, T un endomorphisme borné de A faiblement compact, alors $T^{\,2}$ est un opérateur fortement compact.*

Démonstration. c.f. Sakai [27] et l'article de Bartle, Dunford and Schwartz [2] □

Théorème 3.2.4. *Soit G un groupe localement compact, K un compact de G, soit $\mathcal{A}_K(G) = \{ u \in \mathcal{A}(G) \ : \ supp\ u \subseteq K \}$, alors*

i. $\mathcal{A}_K(G)$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}(G)$

ii. Le specre de Gel'fand de $\mathcal{A}_K(G)$ est l'intérieur de K, K^o.

iii. l'image par la transformée de Gel'fand $\mathcal{A}_K(G) \to \mathcal{C}_0(K^o)$ de $\mathcal{A}_K(G)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(K^o)$.

Démonstration. Le point i. est immédiat.

ii. Soit $u \in \mathcal{A}_K(G)$

$$\{ x \in G, \text{ such that } u\ (x) \neq 0\} \subset K^o$$

Donc, si χ est un caractère de $\mathcal{A}_K(G)$, il se prolonge en un caractère de $\mathcal{A}(G)$ car $\mathcal{A}_K(G)$ est un idéal de $\mathcal{A}(G)$, il existe donc un élément $x_0 \in G$ vérifiant

$$\chi\ (u) = u\ (x_0) \qquad \forall u \in \mathcal{A}_K(G)$$

Si $x_0 \notin K^o$ alors $\chi\ (u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{A}_K(G)$.

Si $x_0 \in K^o$ alors il est clair qu'il existe $u \in \mathcal{A}_K(G)$ tel que $(x_0) \neq 0$.

Ainsi, le spectre de Gel'fand de $\mathcal{A}_K(G)$ s'identifie à K^o.

iii. Si $\widehat{\mathcal{A}_K(G)}$ est l'image de $\mathcal{A}_K(G)$ par la transformation de Gel'fand, il sépare les points de K^o et $\forall x \in K^o$ il existe $u \in \mathcal{A}_K(G)$ tel que $u\ (x) \neq 0$, donc d'après le théorème de Stone-Weierstrass $\widehat{\mathcal{A}_K(G)}$ est dense dans $\mathcal{C}_0(K^o)$.

□

Théorème 3.2.5. *Soit G un groupe localement compact, supposons que $\mathcal{S}(G) \neq \{0\}$ alors G est un groupe discret.*

Démonstration. Nous allons montrer que tout compact de G est un ensemble fini.
Considérons $u \in \mathcal{S}(G)$, $u \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} T_u \ : \ \mathcal{C}_0(G) &\to \mathcal{A}(G) \\ v &\mapsto u\,v \end{aligned}$$

est faiblement compact d'après le théorème 3.2.2

Soit $\mathcal{B}_1(G)$ la boule unité fermée de $\mathcal{C}_0(G)$, et $\mathcal{A}_1(G)$ la boule unité fermée de $\mathcal{A}(G)$, alors

$$T_u\big(\mathcal{A}_1(G)\big) \subseteq T_u\big(\mathcal{A}(G) \cap \mathcal{B}_1(G)\big) \subseteq T_u\big(\mathcal{B}_1(G)\big)$$

Donc $T_u\big(\mathcal{A}_1(G)\big)$ est relativement faiblement compact, et donc $T_u : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$ est faiblement compact.

Considérons $A_{sa}(G)$ l'espace vectoriel réel des éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}(G)$, $u \in A_{sa}(G)$ admet une décomposition de Jordan $u = u^+ - u^-$ où $u^+,\ u^- \in \mathcal{P}(G)$, on a alors $|u| = u^+ + u^-$ si $|u|$ est la partie polaire de u. $A_{sa}(G)$ munie de l'appication $u \mapsto |u|$ est un treillis de Banach vérifiant la propriété suivante :

si $u, v \in \mathcal{P}(G)$ alors

$$\| u + v \| = \| u \| + \| v \|$$

Donc A_{sa} est un L-espace sur $\mathbb{R}$ de Banach, et $\mathcal{A}(G) = A_{sa}(G) + iA_{sa}(G)$ est la complexification du treillis de Banach réel $A_{sa}(G)$, donc $\mathcal{A}(G)$ est un $L - space$ abstrait. (c.f. Schaefer [29].)

Et donc d'après le théorème 3.2.3, T_u^2 est fortement compact. Posons $u_0 = u^2 \in \mathcal{S}(G)$, alors $u_0.\mathcal{A}_1(G)$ est relativement compact dans $\mathcal{A}(G)$.

Soit K un compact de G, il existe un élément $u \in \mathcal{S}(G)$ à support compact tel que $u(x) = 1 \ \ \forall x \in K$. Soit $v \in \mathcal{A}_K(G)$ tel que $\| v \|_{\mathcal{A}(G)} = 1$, alors $v = u_0\, v \in u_0\mathcal{A}_1(G)$, donc

$$\mathcal{B}_1\big(\mathcal{A}_K(G)\big) \subset u_0\mathcal{A}_1(G)$$

et nous en déduisons que l'espace $\mathcal{A}_K(G)$ est de dimension finie.

D'après le théorème 3.2.4 iii., l'image par la transformation de Gel'fand de $\mathcal{A}_K(G)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(K^o)$, et d'après le résulat précédent c'est un espace fermé, donc $\mathcal{A}_K(G) \approx \mathcal{C}_0(K^o)$ est un espace de dimension finie, et donc K^o est un ensemble fini.

□

Si G est un groupe discret, nous savons que $\mathcal{S}(G)$ contient $L^2(G)$. Les espaces $\mathcal{S}(G)$ et $L^2(G)$ coïncident -t-ils dans le cas d'un groupe discret ? M.O. Gebuhrer et R. Szwarç ont récemment apporté un réponse positive à ce problème dans un article à paraître.

Bibliographie

[1] ARSAC G. Sur l'espace de banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire. *Publ. Dépt. Math. Lyon*, 13 :1–101, 1976.

[2] R.G. BARTLE, N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ. Weak compactness and vector mesures. *Canadian J.Math.*, 7, 289-305, 1955.

[3] BLOOM AND HEYER. *Harmonic Analysis of probability measures on hypergoups.* de Gruyter Studies in Mathematics 20, 1995.

[4] BOAS R.P. *Entire functions.* Academic press, New-York, 1954.

[5] CARTAN-GODEMENT. Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. *Ann. Sci. Ec. Norm. Super. III*, 64 :79–99, 1947.

[6] DE MICHELE L. AND SOARDI P.M. Functions which operate in the Fourier algebra of a compact group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45 :389–392, 1974.

[7] DE MICHELE L. AND SOARDI P.M. A Noncommutative Extension of Helson's Translation Lemma. *Bollettino Unione Mat. Ital.*, IV ser 9 :800–806, 1974.

[8] DIEUDONNÉ Jean. *Eléments d'analyse*, volume 6. Ed. Gauthiers-Vilars, 1975.

[9] DIXMIER J. *Les C^* algèbres et leurs représentations.* Gauthiers-Villard Paris, 1969.

[10] DIXMIER J. *Von Neumann algebras.* North, 1981.

[11] DUNKL C.F. Functions which operate in the Fourier algebra of a compact group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 :540–544., 1969.

[12] ESTERLE Jean. A complex-variable proof of the Wiener theorem. *Ann.Inst.Fourier,Grenoble*, 30, 1980.

[13] EYMARD Pierre. L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact. *Bull. Soc. math. France*, 92, 181-236, 1964.

[14] EYMARD Pierre *Analyse de Fourier Euclidienne.* Analyse Harmonique (Ecole d'été d'analyse harmonique, Université de Nancy I,1980, C.I.M.P.A.

[15] FIGÀ-TALAMANCA A. - PICARDELLO M. *Harmonic analysis on free groups.* Lecture notes in pure and applied mathematics, 1983.

[16] GEBUHRER Marc-Olivier. *Analyse harmonique sur les espaces de* Gelfand-Levitan *et applications à la théorie des semigroupes de convolution.* Thèse de Doctorat d'Etat ès sciences Math., Strasbourg, 1989.

[17] Sigurdur HELGASON. Topologies of groups algebras and a theorem of Littlewood. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 86, 269-283, 1957.

[18] KEGEL O.H. *Locally finite groups.* North Holland Publisher Comp., Amsterdam, North Holland, 1973.

[19] OL'SHANSKII. *Geometry of Defining Relations in Groups.* Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 1991.

[20] PEDERSEN. *C^* algebras and their automorphism groups.* Academic Press, 1979.

[21] PIER J. P. *Amenable locally compact groups.* John Wiley, New York, 1984.

[22] REITER H. *Classical harmonic analysis and locally compact groups.* Oxford Math. Monographs, Oxford, 1968.

[23] RIDER D. Functions which operate in the Fourier algebra of a compact group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28, 1971.

[24] RUDIN W. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill book Company, New York, 1987.

[25] RUDIN W. *Fourier Analysis on Groups.* Wiley classics Library, 1990.

[26] RUDIN W. *Analyse fonctionnelle.* Ediscience international, 1995.

[27] Shôichirô SAKAI. Weakly compact operators on operator algebras. *Pac. J. Math.*, 14, 659-664, 1964.

[28] SAKAI S. *C^*-algebras and W^*-algebras.* Springer, New York, 1971.

[29] H.H. SCHAEFER. *Banach Lattices and positive operators.* Springer, 1974.

[30] SCHWARTZ L. Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non-compacts. *C.R.Acad.sci.Paris*, 227 :424–426, 1948.

[31] TOMITA M. Spectral Theory of operator algebras i.ii. *Math.J. Okayama Univ.*, 9/10 :63–98/19–60, 1959/1960.

[32] WATSON G.N. *Treatise on theory of Bessel function.* Cambridge university press, cambridge, 1922.