Grégory Ginot
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur – C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France

Caractère de Chern et opérations d'Adams en homologie cyclique, algèbres de Gerstenhaber et théorème de formalité

Classification mathématique par sujets (2000)
Primaire : 16E40, 18G10, 18G55, 18G60, 19D55, 53D55, 55P43
Secondaire : 13D03, 16E40, 16S80, 17A70, 17B70, 18D50, 19C20, 55U35.

Mots clés : homologie cyclique, K-théorie algébrique, homologie de Hochschild topologique, homologie cyclique topologique, opérations d'Adams, algèbres à homotopie près, algèbres de Gerstenhaber, algèbres de Poisson, déformations, produits star, homologie de Mac Lane, homologie opéradique, symboles de Loday, symboles de Steinberg, éléments cyclotomiques.

À tous les nombreux membres de la famille Ginot

Merci avant tout à Christian Kassel pour ses encouragements, la grande liberté dont il m'a laissé jouir tout au long de ma thèse et les très très nombreuses heures passées à me relire. Je sais qu'il n'a pas ménagé sa peine pour corriger mes travaux

Merci à Jean-Louis Cathelineau, Benjamin Enriquez et Bernhard Keller pour avoir accepté de lire mon travail attentivement, l'intérêt qu'il lui ont porté et bien sûr pour leurs remarques et corrections.

Merci a Jean-Louis Loday qui a accepté de faire partie du jury et qui, surtout, a toujours été disponible pour répondre à mes questions.

Merci à Gillou avec qui il est très agréable et fructueux de travailler malgré les difficultés à faire concorder nos emplois du temps respectifs.

Merci à John Rognes et tout le Département de Mathématiques de l'Université d'Oslo pour son accueil chaleureux pendant un séjour de 3 mois qui est à l'origine du chapitre 2.

Merci à ceux qui ont participé aux différents groupes de travail de l'Équipe Algèbre et Topologie sans lesquels je n'aurais pas pris autant de plaisir à travailler sur cette thèse

Merci aux pensionnaires du bureau 114 pour ses trois années passées ensemble dans la bonne humeur, aux pensionnaires du 212 (et pas seulement pour le thé...), du 113 et à tous ceux qui ont participé au Séminaire des doctorants et surtout au pot qui le suit chaque jeudi.

Merci enfin à tous ceux que j'ai oublié dans cette liste...

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Cette thèse est consacrée à plusieurs points d'algèbre homologique relevant de ce que Connes a appelé la géométrie non commutative et de travaux récents de Kontsevich sur la quantification des variétés de Poisson.

Au début des années 1980 Connes a défini un analogue non commutatif de la cohomologie de de Rham, à savoir l'homologie cyclique ainsi qu'un analogue algébrique du caractère de Chern qui relie la K-théorie topologique d'une variété à sa cohomologie de de Rham. Le caractère de Chern algébrique relie la K-théorie algébrique d'un anneau à son homologie cyclique (négative). Ce caractère de Chern étendu convenablement à ce que Waldhausen et Bökstedt appellent les anneaux à homotopie près a permis le calcul dans les années 1980 de la K-théorie algébrique de certains espaces topologiques [**BHM**].

L'homologie cyclique est intimement liée à la théorie d'homologie des algèbres associatives que Hochschild avait définie dans les années 1940. Comme l'a observé Gerstenhaber dans les années 1960 [**Ge**], la cohomologie de Hochschild joue un rôle central dans la théorie des déformations des algèbres associatives. Ce faisant, Gerstenhaber exhibait sur le complexe de cochaînes de la cohomologie de Hochschild des structures supplémentaires que l'on résume maintenant sous le nom d'algèbres de Gerstenhaber. Ces structures ont connu récemment un regain d'intérêt dans la solution donnée par Kontsevich [**Ko1**], puis par Tamarkin [**Ta**] du problème de quantification des variétés de Poisson.

La thèse comporte quatre chapitres que nous présentons maintenant en détail.

Le premier chapitre, intitulé "*Formules explicites pour le caractère de Chern en K-théorie algébrique*", concerne le caractère de Chern algébrique. L'homologie cyclique est une théorie d'homologie des algèbres associatives introduites par Connes [**Co**] et Tsygan [**Ts**] pour jouer le rôle de la cohomologie de de Rham en géométrie non commutative. Connes, Karoubi [**Kar**] *et al.* ont ensuite construit un caractère de Chern non commutatif liant la K-théorie algébrique à l'homologie cyclique. Goodwillie et Jones ont montré que la version optimale de ce caractère est une application $ch : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ de la K-théorie algébrique d'un anneau vers son homologie cyclique négative. L'ingrédient principal dans la construction du caractère de Chern algébrique $ch : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ est une application fonctorielle $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$, définie pour tout groupe G, de l'homologie d'Eilenberg-Mac Lane du groupe vers l'homologie cyclique négative de l'anneau $\mathbf{Z}[G]$ du groupe. Bien que le caractère de Chern algébrique ait été beaucoup étudié au cours des quinze dernières années, il n'existait jusqu'à présent pas de formule explicite au niveau des complexes de "chaînes". Le but de ce premier chapitre est de donner une formule explicite du morphisme de complexes $\Upsilon_* : C_*(G) \to \mathcal{B}C_*^-(\mathbf{Z}G)$ qui va du complexe standard d'homologie d'un groupe G vers le bicomplexe donnant l'homologie cyclique négative de l'anneau du groupe, puis, lorsqu'on applique cette construction au groupe $G = GL(A)$ des matrices carrées inversibles à coefficients dans un anneau A, d'obtenir des cycles explicites dans le bicomplexe négatif représentant la classe du caractère de Chern de certains éléments importants en K-théorie algébrique. Voici les principaux résultats obtenus dans le chapitre 1.

(a) : Nous donnons, pour tout groupe G, une formule explicite pour le morphisme $\Upsilon_* : (C_*(G), b) \to (\mathcal{B}C_*^-(\mathbf{Z}G), b + B)$. Si on se restreint aux complexes normalisés cette formule prend une forme simple, à savoir pour tout $g_0, \dots, g_n \in G$, on a

$$\Upsilon_n([g_0, \dots, g_n]) = \sum_{i \geq 0} \left((-1)^i \sum_{k=0}^{i} \left(s_{(g_0)}B\right)^k s_{(g_0)} \left(s_{(g_1)}B\right)^{i-k} [g_1, \dots, g_n] \right) u^i$$

où u est une variable de degré -2 et, pour tout $h, g_0, \dots, g_n \in G$, on a

$$s_{(h)}[g_0, \dots, g_n] = [h, g_0, \dots, g_n].$$

(b) : En degré 2, on sait que le groupe $K_2(A)$ de K-théorie algébrique est le noyau du morphisme d'évaluation $St(A) \to E(A)$ du groupe de Steinberg $St(A)$ de l'anneau A vers le sous-groupe $E(A)$ de $GL(A)$ engendré par les matrices élémentaires. Le groupe $St(A)$ a une présentation bien connue sur des générateurs $x_{ij}(t)$, $i \neq j$ et $t \in A$. Nous donnons une formule pour le caractère de Chern $ch_2 : K_2(A) \to HC_2^-(A)$ appliqés à des éléments de $K_2(A)$ qui sont exprimés comme des mots en les $x_{ij}(t)$. Ces formules induisent en particulier des cycles explicites représentant le caractère de Chern algébrique d'éléments importants (notamment en arithmétique) de $K_2(A)$, à savoir les symboles de Steinberg et les symboles de Dennis et Stein.

(c) : Nous effectuons également des calculs en degré $n \geq 3$. Par exemple, pour le symbole de Loday $<< b_1, \dots, b_n >> \in K_n(A)$ $(b_1 b_2 = \cdots =$

$b_n b_1 = 0$), nous établissons la formule :

$$ch(<< b_1, \dots, b_n >>) = B(1, b_1, \dots, b_n)$$

où B est le bord de Connes. Nous traitons aussi le cas des éléments cyclotomiques de Soulé.

(d) : La K-théorie algébrique et l'homologie cyclique négative sont munis d'un produit [**Lo1**], [**HJ**]. McCarthy a démontré (de manière non explicite) que le caractère de Chern est multiplicatif [**MCa1**]. Comme de nombreux éléments en K-théorie sont construits comme produits d'éléments de degré ≤ 2, il est important d'étudier cette multiplicativité au niveau des chaînes. Nous donnons une nouvelle preuve élémentaire de la multiplicativité du caractère de Chern et en déduisons une formule efficace pour construire des cycles représentant $ch(x * y)$ où $*$ désigne le produit en K-théorie algébrique. Enfin, la K-théorie algébrique et l'homologie cyclique négative sont munis de λ-opérations. Cathelineau [**Ca**] a généralisé un théorème de Goodwillie [**Go**] pour montrer que, si I est un idéal nilpotent dans la $\mathbb{Q}$-algèbre A, le caractère de Chern relatif est un isomorphisme de λ-anneaux

$$ch \; : \; K_n(A, I) \otimes \mathbb{Q} \cong HC_n^-(A, I).$$

Un résultat analogue a été montré par Geller et Weibel [**GW**] pour l'homologie cyclique $HC_*^-(A)/HC_*^-(A_0)$ de toute $\mathbb{Q}$-algèbre graduée $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$. Nous déduisons des calculs précédents et du théorème de Goodwillie une nouvelle preuve de ces résultats.

Le chapitre 2, intitulé "*Adams operations on topological Hochschild and topological cyclic homology*" est consacré à l'homologie de Hochschild topologique $THH(A)$ et l'homologie cyclique topologique $TC(A)$ d'un anneau à homotopie près. Dans les années 1970, Waldhausen [**Wa**] a défini une K-théorie algébrique des anneaux à homotopie près (ou spectres). A la fin des années 1980, Bökstedt *et al* [**BHM**] ont construit des généralisations topologiques THH et TC de l'homologie de Hochschild et cyclique pour ces anneaux à homotopie près. Ils ont aussi construit une généralisation du caractère de Chern algébrique

$$K(A) \xrightarrow{ch} TC(A) \longrightarrow THH(A)$$

dans le but de calculer la K-théorie algébrique d'un espace topologique.

Une bonne catégorie d'anneaux à homotopie près sur laquelle les foncteurs $K(-)$, $TC(-)$ et $THH(-)$ sont définis est celle des $\mathbb{S}$-algèbres, une version combinatoire des spectres topologiques découverte par Segal [**Se**]. Gerstenhaber-Schack [**GS**] et Loday [**Lo4**] ont construit des opérations d'Adams λ^k sur l'homologie cyclique et l'homologie de Hochschild $HH_*(R)$ d'un anneau discret R. Ces opérations induisent des décompositions en sous-espaces propres de $HH_*(R)$ et $HC_*^-(R)$ qui ont été intensivement étudiées et sont reliées, par exemple, à la décomposition de Hodge en géométrie algébrique et à l'homologie d'André-Quillen. Le but principal du chapitre 2 est d'étendre les λ-opérations à l'homologie de Hochschild et cyclique topologiques. Voici les principaux résultats obtenus.

(a) : Pour toute $\mathbb{S}$-algèbre commutative A, il existe des opérations $(\Phi^k)_{k\geq 0}$ sur $THH(A)$ qui induisent une structure de λ-anneau (à multiplication triviale) sur l'homotopie stable $\pi_*(THH(A))$. De plus, pour tout nombre premier p et tout $k \geq 0$ premier avec p, il y a une opération Φ^k sur $TC(A,p)$ induisant une structure de λ-anneau (à multiplication triviale) sur $\pi_*(TC(A,p))$ et qui commute avec l'application naturelle $TC(A,p) \to THH(A)$.

(b) : Les opérations $(\Phi^k)_{k\geq 0}$ induisent des filtrations $F_*\pi_n(THH(A))$ analogues à celles obtenues pour l'homologie de Hochschild d'un anneau discret. Nous en étudions les propriétés. Par exemple, nous montrons que les opérations Φ^k induisent des décompositions de la forme

$$\pi_n THH(R) \otimes \mathbb{Q} \cong \oplus_{i=1}^n \pi_n THH(R, \mathbb{Q})^{(i)}.$$

Nous étudions également les filtrations induites sur $\pi_*(TC(A,p))$.

(c) : Il existe des produits sur $THH(A)$ et $TC(A,p)$ pour toute $\mathbb{S}$-algèbre commutative A, c'est-à-dire des morphismes de $\mathbb{S}$-algèbres

$$\mu : THH(A) \wedge THH(A) \to THH(A), \quad \breve{\mu} : TC(A,p) \wedge TC(A,p) \to TC(A,p).$$

Nous établissons que nos opérations $(\Phi^k)_{k\geq 0}$ commutent à μ et $\breve{\mu}$.

(d) : Le foncteur d'Eilenberg-Mac Lane H de la catégorie des anneaux discrets vers la catégorie des $\mathbb{S}$-algèbres permet de définir $THH(R)$ et $TC(R)$ pour des anneaux discrets. Nous comparons les λ-opérations sur $THH(R)$ et les λ-opérations standards sur $HH_*(R)$.

(e) : Il existe d'autres catégories de spectres topologiques pour lesquelles il existe une théorie satisfaisante pour l'homologie de Hochschild topologique. Bien que ces théories ne s'étendent pas à l'homologie cyclique topologique, nous étendons nos constructions pour $THH(A)$ à certaines d'entre elles. En particulier, nous montrons que les opérations $(\Phi^k)_{k\geq 0}$ construites coïncident avec celles constuites par McCarthy sur l'homologie de Mac Lane et McClure, Schwänzl et Vogt sur le modèle $R \otimes S^1$ [**MCa2**], [**MCSV**].

Le chapitre 3 intitulé "*Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*" est consacré aux algèbres de Gerstenhaber, une structure algébrique qui existe sur le complexe de cochaînes de n'importe quelle algèbre associative et que l'on retrouve aussi en géométrie différentielle et en physique théorique.

Une algèbre de Gerstenhaber est une algèbre graduée associative et commutative $(G, \mu(-,-))$ munie d'une structure d'algèbre de Lie sur sa suspension $G[1]$ et telle que le crochet $[-,-]$ soit une dérivation pour le produit μ.

Une conjecture récente de Deligne [**Del**] a motivé la recherche d'une version plus faible de cette structure, la notion d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près. Tamarkin a utilisé de manière essentielle cette structure dans ses travaux sur la formalité et a prouvé une version algébrique de la conjecture de Deligne (*i.e.* il existe une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près sur le complexe de cochaînes de Hochschild) [**Ta**]. L'approche de Tamarkin utilise une construction des algèbres de Gerstenhaber à homotopie près basée sur la théorie de la dualité de Koszul des opérades introduite par Ginzburg et Kapranov [**GK**] en 1994. Cette théorie donne un moyen canonique pour définir des structures algébriques à homotopie près pour n'importe quelle opérade $\mathcal{O}$ qui soit de Koszul. Dans ce cas, une $\mathcal{O}$-algèbre à homotopie près est une algèbre sur le modèle minimal de $\mathcal{O}$. Cette théorie donne aussi un moyen de définir une théorie d'homologie associée aux $\mathcal{O}$-algèbres.

Dans le chapitre 3, nous explicitons la structure des algèbres de Gerstenhaber à homotopie près ainsi que le complexe définissant l'homologie des algèbres de Gerstenhaber donnés par la théorie des opérades. Nous obtenons les résultats suivants.

(a) : Une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près est la donnée d'un espace vectoriel $\mathbb{N}$-gradué A muni d'une famille d'applications

$$m_{p_1,\ldots,p_n} : A^{\otimes p_1} \otimes \ldots \otimes A^{\otimes p_n} \to A$$

pour tout $n, p_1, \ldots, p_n \geq 1$ vérifiant les trois conditions suivantes : Les applications $m_{p_1,\ldots,p_n}$ sont alternées en les variables $p_1, \ldots, p_n$; pour $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ fixés, l'application $m_{p_1,\ldots,p_n}(x_1, \ldots, -, \ldots, x_n)$ s'annule sur les "shuffles" ; les applications $m_{p_1,\ldots,p_n}$ s'étendent en des opérations $\Lambda^*(\oplus A^{\otimes *}) \to \Lambda^*(\oplus A^{\otimes *})$ encore notées $m_{p_1,\ldots,p_n}$ et vérifiant $d^2 = 0$, où

$$d = \sum_{n,p_1,\ldots,p_n} m_{p_1,\ldots,p_n}.$$

(b) : L'homologie d'une algèbre de Gerstenhaber $(G, *, [-,-])$ est celle du complexe

$$C_m(G) = \bigoplus_{p_1+\cdots+p_n=m} \underline{G^{\otimes p_1}} \otimes \ldots \otimes \underline{G^{\otimes p_n}}$$

muni de la différentielle d défini comme ci-dessus avec $m_2 = *$, $m_{1,1} = [-,-]$ et $m_{p_1,\ldots,p_n} = 0$ sinon. L'espace $\oplus \underline{G^{\otimes *}}$ est le quotient de l'algèbre tensorielle sur G par le produit "shuffle".

(c) : Ce complexe est muni d'une structure de bicomplexe et on en déduit une suite spectrale $E^2_{*,*} = H_q(\Lambda^*\mathrm{Harr}_*(A)[1], d_{[-,-]})$ (où $d[-,-]$ est la différentielle induite par $[-,-]$) convergeant vers l'homologie $H\mathcal{G}_*(A)$ de $C_*(G)$.

(d) : Les techniques employées permettent de donner une démonstration simple de la koszulité de l'opérade des algèbres de Gerstenhaber et de donner des exemples de calcul de l'homologie de certaines algèbres de Gerstenhaber.

(e) : Nous montrons aussi que les constructions effectuées pour les algèbres de Gerstenhaber à homotopie près se généralisent sans peine aux algèbres de Poisson à homotopie près (et aux algèbres n-aires en général).

Le chapitre 4 de la thèse est intitulé "*Formality theorem for Poisson manifolds*". C'est le résultat d'un travail commun avec G. Halbout (IRMA). Voici ce dont il s'agit.

Dans le cas de l'anneau A_0 des fonctions C^∞ sur une variété différentielle M, la cohomologie de Hochschild de A_0 est isomorphe à l'algèbre de Lie $\Gamma(M, \Lambda^{\cdot} M)$ des formes multi-différentielles. Le complexe de cochaînes $C^*(A_0, A_0)$ d'applications multilinéaires $A_0^{\otimes *} \to A_0$ définissant la cohomologie de Hochschild de A_0 a également une structure d'algèbre de Lie. Le quasi-isomorphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg $\varphi \ : \Gamma(M, \Lambda^{\cdot} M) \to C^*(A_0, A_0)$ n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie, mais, en 1997, Kontsevich a montré qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie à homotopie près induisant φ. Ce résultat, qui est fondamental pour l'étude des déformations et des star-produits, signifie qu'il existe des applications $\phi^n \ : \ \Lambda^n \Gamma(M, \Lambda^{\cdot} M) \to C_*(A_0, A_0)$ telles que $\phi^1 = \varphi$ est le morphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg et l'on a l'égalité

$$\left[\sum_{n \geq 0} \phi^n, \sum_{n \geq 0} \phi^n\right]_G = \sum_{n \geq 0} \phi^n \circ [-,-]_S$$

où $[-,-]_S$ est le crochet de Schouten sur $\Gamma(M, \Lambda^{\cdot} M)$ et $[-,-]_G$ est le crochet construit par Gerstenhaber sur $C^*(A_0, A_0)$. Utilisant des méthodes issues de la théorie des opérades, Tamarkin a montré que $C^*(A_0, A_0)$ pouvait être muni d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près, et qu'il y avait un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber à homotopie près

$$\Phi \ : \Gamma(M, \Lambda^{\cdot} M) \to C^*(A_0, A_0)$$

quand $M = \mathbb{R}^n$ si on munit $(\Gamma(M, \Lambda^{\cdot} M), \mu(-,-), [-,-]_S$ de la structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près canonique induite par sa struture d'algèbre de Gerstenhaber.

Nous étendons le résultat de Tamarkin au cas où M est muni d'un crochet de Poisson π. On note A la déformation de A_0 obtenu par Kontsevich en quantifiant le crochet de Poisson π. Elle est munie d'un star-produit $*_\pi$.

Notre résultat principal est l'existence d'un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber à homotopie près entre $(\Gamma(M, \Lambda^{\cdot} M), [\pi, -])$ et le complexe de Hochschild $C^*(A, A)$ de A muni du star-produit $*_\pi$.

Les chapitres 1, 2, 3, 4 ont donné lieu à des publications actuellement soumises.

CHAPITRE 1

FORMULES EXPLICITES POUR LE CARACTÈRE DE CHERN EN K-THÉORIE ALGÉBRIQUE

Abstract : In this paper we give an explicit formula for the map $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ inducing Goodwillie-Jones universal algebraic Chern character from algebraic K-theory to negative cyclic homology of a ring. In degree 2 we compute the map ch_2 from Milnor's $K_2(A)$ to $HC_2^-(A)$ (with A a ring) and give explicit cycles for the Chern character of Steinberg and Dennis-Stein symbols. In higher degree we compute formulas for the Chern character of Loday symbols and Soulé's cyclotomic elements. From the previous results we get a new proof of the compatibility of the Chern character with K-theory and cyclic homology products as well as with λ-operations in the nilpotent relative case.

Résumé : On donne ici une formule explicite pour l'application $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ induisant le caractère de Chern algébrique universel de Goodwillie-Jones de la K-théorie algébrique d'un anneau vers son homologie cyclique négative. En degré 2 on décrit le caractère de Chern de la K-théorie de Milnor vers l'homologie négative et on donne des cycles explicites pour l'image dans l'homologie cyclique négative des symboles de Steinberg et de Dennis-Stein. En degré supérieur on calcule le caractère de Chern des symboles de Steinberg généralisés et de Loday ainsi que des éléments cyclotomiques de Soulé. On donne également une preuve élémentaire de la compatibilité du caractère de Chern avec les produits en K-théorie et en homologie cyclique et, dans le cas relatif nilpotent, de la compatibilité avec les λ-opérations.

Mots-clés : Homologie cyclique, K-théorie algébrique, caractère de Chern, éléments cyclotomiques, symboles de Steinberg, symboles de Loday.

Au début des années 1980, Connes [**Co**] et Tsygan [**Ts**] ont défini l'homologie cyclique comme théorie d'homologie associée à toute algèbre associative A au-dessus d'un corps commutatif k de caractéristique nulle (voir aussi [**LQ**]).

Peu de temps après, Goodwillie [**Go**] et John Jones [**Jo**] ont introduit des groupes $HC_*^-(A)$ d'homologie cyclique négative et construit une application naturelle $ch : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ de la K-théorie algébrique de A vers son homologie cyclique négative. Cette application est souvent appelée *caractère de Chern algébrique* car elle généralise le caractère de Chern construit par Connes et Karoubi en degré $* = 0, 1$ dans le cadre de la géométrie non commutative. Précisément, Weibel [**We1**] a montré que les classes de Chern définies par Karoubi se factorisaient à travers l'application de Goodwillie-Jones. L'un des résultats principaux de Goodwillie (démontré dans [**Go**]) et l'un des plus importants en théorie de l'homologie cyclique énonce que l'application ch induit un isomorphisme

$$ch : K_*(A, I) \cong HC_*^-(A, I)$$

sur les groupes relatifs lorsque I est un idéal nilpotent de A.

L'ingrédient principal dans la construction du caractère de Chern algébrique $ch : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ est une application fonctorielle $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$, définie pour tout groupe G, de l'homologie d'Eilenberg-Mac Lane du groupe vers l'homologie cyclique négative de l'anneau $\mathbf{Z}[G]$ du groupe. Dans [**Go**] la construction de Υ_* se fait à l'aide de la méthode des modèles acycliques bien connue en topologie algébrique ; dans [**Jo**] elle est basée sur un calcul de l'homologie cyclique d'un certain complexe mixte attaché à G. Aucune de ces méthodes n'est explicite et, sauf en degré $* = 0, 1$ où il est facile de deviner des formules, il n'existe pas de morphisme connu au niveau des complexes induisant l'application $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ en homologie. En raison de la grande importance du caractère de Chern algébrique et de la place centrale qu'il occupe dans la géométrie non commutative de Connes, il semble extrêmement désirable de disposer d'une formule pour une application au niveau des complexes et pas seulement au niveau des classes d'homologie.

Dans ce travail, nous comblons cette lacune en construisant un morphisme de complexes explicite induisant l'application $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ en homologie. Lorsqu'on applique cette construction au groupe $G = GL(A)$ des matrices carrées inversibles (de toute taille) à coefficients dans l'anneau A, nous obtenons des formules explicites pour le caractère de Chern algébrique $ch_* : K_*(A) \to HC_*^-(A)$. Ceci nous permet par exemple d'obtenir des cycles explicites pour l'image dans l'homologie cyclique négative d'éléments bien connus en K-théorie algébrique, comme les symboles de Steinberg, de Dennis-Stein, de Loday et les éléments cyclotomiques de Soulé. La même méthode nous permet de démontrer de manière élémentaire que le caractère de Chern algébrique commute aux produits en K-théorie algébrique et en homologie cyclique négative (McCarthy [**MCa1**] avait démontré cela dans le cadre de l'homologie cyclique des catégories exactes).

Voici le plan de l'article. Le paragraphe 1 est consacré à quelques rappels sur l'homologie des groupes et sur l'homologie cyclique, le paragraphe 2 à quelques rappels sur la K-théorie algébrique. Au paragraphe 3 nous donnons des formules explicites pour le caractère de Chern algébrique $ch : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ et l'application $\Upsilon_* : H_*(G) \to HC_*^-(\mathbf{Z}[G])$ mentionnés plus haut. Le paragraphe 4 est consacré au degré 2 et à la détermination de cycles explicites représentant l'image des symboles de Steinberg et des symboles de Dennis-Stein en homologie cyclique négative. Au paragraphe 5 nous nous plaçons en degré ≥ 2 et déterminons explicitement le caractère de Chern des symboles de Loday et des éléments cyclotomiques de Soulé. A partir des calculs sur les symboles de Loday on obtient une nouvelle preuve de la compatibilité du caractère de Chern avec les λ-opérations en K-théorie et homologie cyclique relative dans le cas d'un idéal nilpotent I tel que $I^k \to I^k/I^{k+1}$ soit scindé pour $k \geq 1$([**Ca**]) et du noyau de l'augmentation de l'homologie cyclique et de la K-théorie d'une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée ([**GW**]). Nous établissons la compatibilité des produits avec le caractère de Chern algébrique au paragraphe 6.

Dans toute la suite k sera un anneau commutatif. Les algèbres considérées seront unitaires. La lettre u désignera une variable de degré -2 de telle sorte que, si C_* est un module cyclique, son bicomplexe négatif s'écrit $\mathrm{ToT}\mathcal{B}C_*^- = \prod_{i\geq 0} C_{*+2i}u^i$. De plus on notera ch_n^i la composante dans la colonne $-i$ du caractère de Chern *i.e.* $ch_n = \sum_{i\geq 0} ch_n^i u^i$. Enfin, on posera $(-1)! = 1$.

1.1. Homologie cyclique et homologie des groupes

1.1.1. Quelques modules cycliques. — Un module cyclique C (*cf.* [**Lo5**]) est la donnée d'un module simplicial et, pour tout $n \geq 0$, d'une action compatible du groupe cyclique $\mathbb{Z}/n+1\mathbb{Z}$. Plus précisément, C est une famille $(C_n)_{n\geq 0}$ de k-modules équipée de morphismes $d_i : C_n \to C_{n-1}$, $s_i : C_n \to C_{n+1}$ $(i = 0, ..., n)$ et $\tau_n : C_n \to C_n$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ pour $i < j$,
2. $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ pour $i \leq j$,
3. $d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j, \\ \mathrm{id} & \text{si } i = j, j+1, \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1, \end{cases}$
4. $\begin{cases} \tau_n^{n+1} = \mathrm{id}, \\ d_i \tau_n = \tau_{n-1} d_{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ s_i \tau_n = \tau_{n+1} s_{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ d_0 \tau_n = d_n, \\ s_0 \tau_n = \tau_{n+1}^2 s_n. \end{cases}$

On pose $t_n = (-1)^n \tau_n$ et $N_n = \mathrm{id} + t_n + ... + t_n^n$. Dans la suite l'indice n sera généralement sous-entendu. Un morphisme de k-modules entre deux modules cycliques est un morphisme cyclique s'il commute avec les applications de structure d_i, s_j et τ.

A un module cyclique C on associe naturellement deux complexes (C_*, b) et (C_*, b') où

$$b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i \quad \text{et} \quad b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i.$$

Un exemple classique de module cyclique est le complexe de Hochschild d'une algèbre associative et unitaire. Si A est une telle k-algèbre, on pose $C_n(A) = A^{\otimes n+1}$. On utilise la notation $(a_0, ..., a_n)$ pour $a_0 \otimes ... \otimes a_n$ où $a_0, ..., a_n \in A$. Pour $i \geq 1$ on écrira aussi $(a_1, ..., a_n)^i$ pour le tenseur $\otimes_{j=1}^i a_1 \otimes ... \otimes a_n$ et $(a_1, ..., a_n)^0$ sera un tenseur vide. On munit $C_*(A)$ d'une structure de module cyclique en posant :

$$\begin{array}{rcll}
d_i(a_0, ..., a_n) & = & (a_0, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_n) & \text{si } 0 \leq i \leq n-1, \\
d_n(a_0, ..., a_n) & = & (a_n a_0, a_1, ..., a_{n-1}), & \\
s_i(a_0, ..., a_n) & = & (a_0, ..., a_i, 1, a_{i+1}, ..., a_n) & \text{si } 0 \leq i \leq n, \\
\tau(a_0, ..., a_n) & = & (a_n, a_0, ..., a_{n-1}). &
\end{array}$$

L'homologie du complexe $(C_*(A), b)$ est par définition l'homologie de Hochschild de A, notée $HH_*(A)$.

Soit maintenant G un groupe. Pour tout $n \geq 0$, on note $E_n(G) = k[G^{n+1}]$ et on notera $[g_0, ..., g_n] (g_i \in G)$ les élément de la base canonique de $E_n(G)$. On écrira aussi $[g_1, ..., g_n]^i$ pour l'élément $[g_1, ..., g_n, g_1, ..., g_n, ..., g_1, ..., g_n]$ où la séquence $g_1, ..., g_n$ est répétée i fois et $[g_1, ..., g_n]^0$ sera l'ensemble vide. Pour $i = 0, ..., n$, on définit $d_i : E_n(G) \to E_{n-1}(G)$, $s_i : E_n(G) \to E_{n+1}(G)$ et $\tau : E_n(G) \to E_n(G)$ par

$$\begin{array}{rcl}
d_i([g_0, ..., g_n]) & = & [g_0, ..., \widehat{g_i}, ..., g_n], \\
s_i([g_0, ..., g_n]) & = & [g_0, ..., g_i, g_i, ..., g_n], \\
\tau([g_0, ..., g_n]) & = & [g_n, g_0, ..., g_{n-1}].
\end{array}$$

Le symbole $\widehat{g_i}$ signifie que la lettre g_i est omise dans la formule.

On montre facilement que $E_*(G)$ muni de ces applications est un module cyclique. Le complexe $E_*(G)$ est muni d'une structure de G-module *via* l'application diagonale $g.[g_0, ..., g_n] = [g.g_0, ..., g.g_n]$. De plus, $(E_*(G), b)$ est la résolution libre standard du G-module trivial k et $(E_*(G), b')$ est une résolution libre de $\{0\}$. L'homologie du complexe $(C_*(G), b)$, où on note $C_n(G) = k \otimes_{k[G]} E_n(G)$ (avec G agissant trivialement sur k) et b la différentielle induite, est l'homologie d'Eilenberg Mac-Lane du groupe G, notée $H_*(G)$. Il y a une autre résolution $k[G]$-libre standard de k, la résolution *bar*. Par définition $E_n^{\mathrm{bar}}(G) = (k[G])[G^n]$ et on notera $[g_1 \mid ... \mid g_n]$ les éléments de la base de $E_n^{\mathrm{bar}}(G)$. Le groupe G agit sur $E_n^{\mathrm{bar}}(G)$ par $g.(g_0[g_1 \mid ... \mid g_n]) = g.g_0[g_1 \mid ... \mid g_n]$ pour tout $g, g_0, ..., g_n \in G$. On note $C_n^{\mathrm{bar}}(G) = k \otimes_{k[G]} E_n^{\mathrm{bar}}(G)$. Il y a un isomorphisme G-linéaire de complexes $\varphi^{\mathrm{bar}} : E_n^{\mathrm{bar}}(G) \to E_n(G)$ donné, pour tout $g_0, g_1, ..., g_n \in G$, par

$$\varphi^{\mathrm{bar}}(g_0[g_1 \mid ... \mid g_n]) = [g_0, g_0g_1, ..., g_0g_1...g_n].$$

Donnons un dernier exemple de module cyclique (*cf.* [**Kar**]) ; il fait le lien entre les deux précédents. Appelons NG_n le sous-module de $C_n(k[G]) = k[G]^{n+1}$ engendré par les éléments $(g_0, ..., g_n)$ tels que $g_0...g_n = 1$. Comme $g_0...g_n = 1$ implique $g_ng_0...g_{n-1} = 1$, la structure cyclique du complexe de Hochschild de $k[G]$ se restreint à NG_*. Nous noterons $HH_*(NG)$ l'homologie du complexe (NG_*, d).

L'application linéaire $\varphi : E_*(G) \to NG_*$ donnée, pour tout n, par

$$\varphi[g_0, ..., g_n] = (g_n^{-1}g_0, ..., g_{n-1}^{-1}g_n)$$

est un morphisme cyclique vérifiant $\varphi[gg_0, ..., gg_n] = \varphi[g_0, ..., g_n]$, ce qui implique que φ induit un isomorphisme de modules cycliques $\varphi : C_*(G) \to NG_*$. Par conséquent $\varphi : H_*(G) \simeq HH_*(NG)$.

Il sera pratique de donner une étiquette à certains éléments de G pour donner les formules explicites des paragraphes 1.3.3, 1.4, 1.5.3, 1.5.4. Si on munit un élément $g \in G$ d'une étiquette on le note $\widetilde{g}$. On note $\widetilde{E}_*(G)$ le complexe $E_*(G)$ avec la condition supplémentaire que les éléments de la base canonique de $E_*(G)$ sont éventuellement étiquetés. On appelle $\widetilde{N}$ l'application définie, pour $[x_0, ..., x_n] \in \widetilde{E}_n(G)$, par $\widetilde{N}[x_0, ..., x_n] = 0$ si aucun x_i n'est étiquetté et sinon

$$\widetilde{N}[x_0, ..., x_n] = \delta\left(\sum t^k[x_0, ..., x_n]\right)$$

où k est tel que x_{n-k+1} soit étiqueté et $\delta : \widetilde{E}_*(G) \to E_*(G)$ est l'application qui supprime les étiquettes. On étiquette de la même façon les éléments de NG_* (*via* φ). En d'autres termes, faire agir $\widetilde{N}$ sur une chaîne revient à faire agir sur cette chaîne toutes les permutations cycliques qui placent un élément étiqueté en position 0.

1.1.2. Les bicomplexes associés. — Pour un module cyclique C_*, l'application $s = \tau s_n$ est une homotopie pour la différentielle b' et l'application $B = (1-t)sN : C_n \to C_{n+1}$ vérifie

$$B^2 = bB + Bb = 0,$$

c'est à dire qu'un module cyclique est naturellement doté d'une structure de complexe mixte (*cf.* [**Ka1**]). A un module cyclique C_* on peut associer trois bicomplexes ([**HJ**], [**Lo5**]) :

Le bicomplexe périodique $\mathcal{B}C_*^{\mathrm{per}}$ est le suivant :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & b\downarrow & & b\downarrow & & b\downarrow \\
 & & & \dots & \xleftarrow{B} & C_2 & \xleftarrow{B} & C_1 & \xleftarrow{B} & \dots \\
 & & & b\downarrow & & b\downarrow & & b\downarrow & & \\
 & \dots & \xleftarrow{B} & C_2 & \xleftarrow{B} & C_1 & \xleftarrow{B} & C_0 & & \\
 & b\downarrow & & b\downarrow & & b\downarrow & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
\text{Colonne} & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2
\end{array}$$

Le complexe total associé est

$$(\mathrm{ToT}\mathcal{B}C_n^{\mathrm{per}} = \prod_{p+q=n} \mathcal{B}C_{p,q}^{\mathrm{per}}, b+B)$$

où $\mathcal{B}C_{p,q}^{\mathrm{per}} = C_{q-p}$ si $q \geq p$ et 0 sinon. On appelle *homologie cyclique périodique* de C_* et on note HC_*^{per} l'homologie de $\mathrm{ToT}\mathcal{B}C_*^{\mathrm{per}}$.

De la même façon on construit le bicomplexe cyclique $\mathcal{B}C_*$ obtenu de $\mathcal{B}C_*^{\mathrm{per}}$ en ne gardant que les colonnes de numéro ≥ 0 et le bicomplexe négatif $\mathcal{B}C_*^-$ obtenu cette fois-ci en ne considérant que les colonnes ≤ 0. On notera HC_* (*homologie cyclique*) et HC_*^-(*homologie cyclique négative*) les homologies des complexes totaux associés, respectivement.

Reprenons les exemples précédents. Si A est une k-algèbre, alors on retrouve évidemment la (b, B) définition de l'homologie cyclique de A et ses variantes périodique et négative.

Dans le cas du module cyclique $E_*(G)$ associé à un groupe G, on a

$$s[g_0, ..., g_n] = [g_n, g_0, ..., g_n]$$

et

$$\begin{aligned} B[g_0, ..., g_n] &= \sum_{i=0}^{n} \big((-1)^{ni}[g_{n-i}, g_{n-i+1}, ..., g_{n-i}] \\ &\quad +(-1)^{n(i+1)}[g_{n-i}, g_{n-i}, g_{n-i+1}, ..., g_{n-i-1}]\big) . \end{aligned}$$

Comme au paragraphe précédent, on définit respectivement $\mathcal{B}C_*^-(G)$, $\mathcal{B}C_*^{\mathrm{per}}(G)$ et $\mathcal{B}C_*(G)$ comme les bicomplexes $k \otimes_{k[G]} \mathcal{B}E_*^-$, $k \otimes_{k[G]} \mathcal{B}E_*^{\mathrm{per}}$ et $k \otimes_{k[G]} \mathcal{B}E_*$. On notera respectivement $HC_*^-(G)$, $HC_*^{\mathrm{per}}(G)$ et $HC_*(G)$ les groupes d'homologie de ces bicomplexes. Karoubi (*cf.* [**Kar**]) a montré que $HC_*^-(G) = \prod_{p\geq 0} H_{n+2p}(G)$ et donc qu'il existe un morphisme fonctoriel injectif $H_*(G) \hookrightarrow HC_*^-(G)$.

On note aussi $HC_*^-(NG)$ l'homologie du bicomplexe négatif $\mathcal{B}C_*^-(NG)$ associé au module cyclique NG_*. Il est clair que $\varphi : C_*(G) \to NG_*$ passe aux bicomplexes (puisque B est obtenue à partir de τ, s_i, d_i) pour donner une application que nous noterons encore $\varphi : \mathcal{B}C_*^-(G) \to \mathcal{B}C_*^-(NG)$. Cette application induit un isomorphisme $\varphi : HC_n^-(G) \cong HC_*^-(NG)$.

1.2. Rappels de K-théorie algébrique

1.2.1. Définitions générales. — On utilisera ici la construction "+" de Quillen ; on pourra par exemple consulter [**Lo1**] pour un exposé détaillé de ce qui suit. Si G est un groupe, on note BG son espace classifiant et BG^+ la construction + associée à un sous-groupe normal parfait N de G. Rappelons que, par construction, il existe une équivalence d'homologie $BG \to BG^+$ et que $\pi_1(BG^+) = G/N$.

Si G est le groupe linéaire $GL(A) = \varinjlim GL_n(A)$ où A est un anneau, le sous-groupe $E(A)$ engendré par les matrices élémentaires est parfait et normal et on peut donc appliquer la construction + au couple $(GL(A), E(A))$. On définit le $n^{\text{ème}}$ groupe de K-théorie algébrique de A par $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+)$ si $n > 0$. Pour $n = 0$, on définit $K_0(A)$ comme le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{P}(A)$ des modules projectifs de type fini sur A. Les applications d'Hurewicz allant des groupes d'homotopie d'un espace à ses groupes d'homologie à coefficients entiers induisent une famille naturelle de morphismes de groupes pour tout $n > 0$:

$$H : K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \to H_n(BGL(A)^+) = H_n(BGL(A)) = H_n(GL(A)).$$

Par ailleurs $BGL(A)^+$ est muni d'une structure de H-espace qui permet de munir $K_*(A)$ d'un produit appelé produit de Loday (*cf.* [**Lo1**]) dont nous rappelons la définition dans la partie 6.

1.2.2. Les groupes K_1 et K_2. — Le sous-groupe des commutateurs de $GL(A)$ est exactement le sous-groupe élémentaire $E(A)$ $(= [E(A), E(A)])$ et donc $H_1(GL(A)) = GL(A)/E(A)$. D'après les propriétés de la construction +, on a aussi

$$K_1(A) = GL(A)/E(A) = H_1(GL(A)).$$

On peut également appliquer la construction + au couple $(E(A), E(A))$ et on en déduit que $BE(A)^+$ est le revêtement universel de $BGL(A)^+$. En particulier $K_2(A) = \pi_2(E(A)^+)$ et le morphisme d'Hurewicz induit un isomorphisme $K_2(A) \cong H_2(E(A))$.

Rappelons maintenant la définition originelle du groupe $K_2(A)$ par Milnor ([**Mi**]). Le groupe de Steinberg $St(A)$ de l'anneau A est le groupe présenté par les générateurs $x_{i,j}(t)$, $i,j \geq 1, i \neq j$, $t \in A$ et les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} x_{i,j}(t)x_{i,j}(u) = x_{i,j}(t+u), & \\ [x_{i,j}(t), x_{k,\ell}(u)] = 1 & \text{si } j \neq k \text{ et } i \neq \ell, \\ [x_{i,j}(t), x_{j,\ell}(u)] = x_{i,\ell}(tu) & \text{si } i \neq \ell. \end{array}$$

Le groupe $St(A)$ est la limite inductive des groupes $St_n(A)$ (définis par les mêmes relations, mais avec des générateurs $x_{i,j}(t)$ tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$). Si $e_{i,j}(t)$ $(i \neq j)$ désigne la matrice élémentaire qui a t comme coefficient sur l'intersection de la ligne i et de la colonne j, des 1 sur sa diagonale et 0 partout ailleurs, alors pour tout n on a un morphisme de groupes $\psi : St_n(A) \to E_n(A)$ qui envoie $x_{i,j}(t)$ sur $e_{i,j}(t)$, et donc également un morphisme $\psi : St(A) \to E(A)$.

Le groupe de Steinberg et le morphisme ψ définissent une extension centrale universelle de $E(A)$ et donc $\ker(\psi) \cong H_2(E(A)) \cong K_2(A)$. On peut ainsi identifier $K_2(A)$ à un sous-groupe de $St(A)$ et on a la suite exacte :

$$1 \to K_2(A) \to St(A) \xrightarrow{\psi} E(A) \to 1.$$

En particulier $K_2(A)$ est le centre de $St(A)$.

1.3. Caractère de Chern explicite

1.3.1. Caractère de Chern algébrique. — Dans cette partie on rappelle la construction du caractère de Chern algébrique construit par Goodwillie [**Go**] et Jones [**Jo**]. On peut également consulter [**Kar**], [**Lo5**] et [**We1**] par exemple.

Soit A une k-algèbre unitaire. La projection canonique sur la colonne 0, $P : \mathcal{B}C_*^-(A) \to C_*(A)$, est un morphisme de complexes. Le caractère de Chern est un morphisme de groupes $ch_* : K_*(A) \to HC_*^-(A)$ défini de manière à faire commuter le diagramme 3.1.1.

$$\begin{tikzcd} K_*(A) \arrow[rr, "D_*"] \arrow[dr, "ch_*"'] & & HH_*(A) \\ & HC_*^-(A) \arrow[ur, "P"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

Dans ce diagramme, $D_* : K_*(A) \to HH_i(A)$ est l'application de Dennis construite en 1975 dans [**De2**] dont nous commençons par rappeler la définition.

Le morphisme d'Hurewicz donne une application $H : K_i(A) \to H_i(GL(A))$ *via* l'équivalence d'homologie $BGL(A) \to BGL(A)^+$.

Posons $G = GL(A)$ pour simplifier. On a vu que l'on a un isomorphisme de modules cycliques $\varphi : C_*(G) \to NG_*$. On en déduit que la composée

$$C_*(G) \xrightarrow{\varphi} NG_* \hookrightarrow C_*(k[G])$$

est un morphisme injectif de modules cycliques.

Pour tout $n, m \geq 1$, on a aussi une application $k[GL_m(A)]^{\otimes n+1} \to \mathcal{M}_m(A)^{\otimes n+1}$ qui ne commute cependant pas avec les stabilisations

$$j : GL_m(A) \to GL_{m+1},\ \alpha \mapsto j(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i : \mathcal{M}_m \to \mathcal{M}_{m+1},\ \alpha \mapsto i(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La trace généralisée de Dennis est l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_m(A)^{\otimes n+1} \to A^{\otimes n+1}$ définie par :

$$\mathrm{tr}(\alpha^0, ..., \alpha^n) = \sum (\alpha^0_{i_0,i_1}, \alpha^1_{i_1,i_2}, ..., \alpha^n_{i_n,i_0})$$

où la somme est étendue à tous les couples d'indices $i_0, ..., i_n = 1, ..., m$. Il est bien connu ([**Lo5**]) que cette application induit pour tout $m \in \mathbb{N}$ des isomorphismes $\mathrm{tr} : HC^-_*(\mathcal{M}_m(A)) \xrightarrow{\sim} HC^-_*(A)$, $\mathrm{tr} : HH_*(\mathcal{M}_m(A)) \xrightarrow{\sim} HH_*(A)$ compatibles avec les stabilisations *i.e.* $\mathrm{tr} : HC^-_*(\mathcal{M}(A)) \cong HC^-_*(A)$ où $\mathcal{M}(A) = \varinjlim \mathcal{M}_m(A)$. De plus leurs inverses sont induits par $\mathrm{inc} : A \to \mathcal{M}_1(A)$ qui à $a \in A$ associe la matrice $[a]$.

L'application composée $\overline{C}_n(k[GL_m(A)]) \longrightarrow \overline{C}_n(\mathcal{M}_m(A)) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \overline{C}_n(A)$ se stabilise car $\mathrm{tr}(j(\alpha^0), ..., j(\alpha^n)) = \mathrm{tr}(\alpha^0, ..., \alpha^n) + 1^{\otimes n+1}$ et que l'on travaille sur des complexes normalisés. On a donc un morphisme bien défini

$$k[G]^{\otimes n+1} \longrightarrow \mathcal{M}(A)^{\otimes n+1} \xrightarrow{tr} C_n(A).$$

On définit *l'application de Dennis* comme la composée des applications :

$$D_i : K_i(A) \xrightarrow{\psi} H_i(GL(A)) \xrightarrow{\varphi} HH_i(NGL(A)) \longrightarrow HH_i(\mathcal{M}(A)) \xrightarrow{tr} HH_i(A).$$

C'est un morphisme de groupes pour tout $i \geq 1$.

Si C_* est un module cyclique, la projection P de $\mathcal{B}C^-_*$ sur C_* obtenue en ne conservant que la colonne numéro 0 est un morphisme de complexes. Bien que l'inclusion de cette colonne dans $\mathcal{B}C^-_*$ ne soit évidemment pas un morphisme de complexes, on a vu que, dans le cas du module cyclique $E_*(G)$ associé à un groupe G, il y a une injection $H_*(G) \hookrightarrow HC^-_*(G)$. Dans [**Go**](Lemme II.3.2) Goodwillie a montré que cette injection était induite par un morphisme de complexes $\Upsilon_* : C_*(G) \to \mathcal{B}C^-_*(G)$ dont la restriction à la colonne 0 est l'identité et, qu'en fait, deux tels morphismes de complexes étaient homotopes.

De même que précédemment on dispose aussi d'une application composée

$$\mathcal{B}^-_* NG \hookrightarrow \mathcal{B}^-_*(k[G]) \to \mathcal{B}^-_*(\mathcal{M}(A)).$$

De plus, $\overline{\mathcal{B}C}_*^-(k[G]) \longrightarrow \overline{\mathcal{B}C}_*^-(\mathcal{M}(A)) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \overline{\mathcal{B}C}_*^-(A)$ se stabilise également et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_i(A) & \xrightarrow{H} & H_i(G) & \xrightarrow{\varphi} & HH_i(NG) & \longrightarrow & HH_i(\mathcal{M}(A)) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & HH_i(A) \\
& & \uparrow p & & \uparrow p & & \uparrow p & & \uparrow p \\
& & HC_i^-(G) & \xrightarrow{\psi} & HC_i^-(NG) & \longrightarrow & HC_i^-(\mathcal{M}(A)) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & HC_i^-(A)
\end{array}$$

pour $G = GL(A)$. Il est clair que la composée suivante $\mathrm{ch}_n : K_n(A) \to HC_n^-(A)$ (où $n \geq 1$) est un morphisme de groupes qui fait commuter le diagramme 3.1.1.

$$K_n(A) \xrightarrow{H} H_n(GL(A)) \xrightarrow{\Upsilon_n} HC_n^-(A) \xrightarrow{\varphi} HC_n^-(NGL(A)) \longrightarrow HC_n^-(\mathcal{M}(A)) \xrightarrow{\mathrm{tr}} HC_n^-(A).$$

On appelle cette composée le *caractère de Chern algébrique.*

1.3.2. Une application de $E_*(G)$ dans $\mathcal{B}E_*^-(G)$. — D'après Goodwillie [**Go**] on a vu que, non seulement il existe une application au niveau des chaînes induisant $H_*(G) \hookrightarrow HC_*^-(G)$, mais aussi que cette injection est induite par tout morphisme de complexe $\Upsilon_* : C_*(G) \to \mathcal{B}C_*^-(G)$ dont la restriction à la colonne 0 est l'identité. Dans ce paragraphe on va expliciter une telle application.

Rappelons que l'on a noté $E_*(G)$ le complexe $E_*(G) = k[G^{n+1}]$ muni de l'action diagonale de G et que $C_*(G) = k \otimes_{k[G]} E_*(G)$ est le complexe d*Eilenberg-MacLane classique (*c.f.* 1.1.1). Rappelons aussi que u désigne une variable de degré -2 de telle sorte que

$$\mathrm{ToT}\mathcal{B}E_n^-(G) = \prod_{p \geq 0} E_{n+2p}(G) u^p$$

et que, si $\Upsilon_* : E_*(G) \to \mathcal{B}E_*^-(G)$ est une application linéaire graduée de degré 0, on note Υ_n sa restriction à $E_n(G)$ et on écrit Υ_n comme la série formelle $\Upsilon_n = \sum_{i \geq 0} \Upsilon_n^i u^i$ pour tout $n \geq 0$. Une telle application est un morphisme de complexes si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $i \geq 0$, on a

$$b\Upsilon_n^i + B\Upsilon_n^{i-1} = \Upsilon_{n-1}^i b \qquad (1)_n^i$$

où on pose $\Upsilon_n^{-1} = 0$, $\Upsilon_{-1}^i = 0$ pour $n, i \geq 0$.

La formule obtenue pour Υ_* utilise une famille "paramétrée" d'homotopies contractantes (dans $E_*(G)$) pour b que nous définissons d'abord.

Définition 1.3.1. — *Soit h un élément de G. On définit $s_{(h)} : E_*(G) \to E_{*+1}(G)$ comme l'application k-linéaire telle que $s_{(h)}[g_0, ..., g_n] = [h, g_0, ..., g_n]$ pour tout $g_0, ..., g_n \in G$.*

On peut remarquer que l'application $[g_0, ..., g_n] \mapsto s_{(g_n)}[g_0, ..., g_n]$ coïncide en fait avec l'homotopie contractante (pour b') $s = \tau s_n$ définie dans le module cyclique $E_*(G)$ (*cf.* paragraphe 1.1.2).

Lemme 1.3.2. — *Pour tous $h, g, g_0, ..., g_n \in G$, on a*

i) $s_{(h)}b + bs_{(h)} = \mathrm{id} = s_{(h)}b' + b's_{(h)}$;

ii) $s_{(g.h)}[g.g_0, ..., g.g_n] = g.s_{(h)}[g_0, ..., g_n]$.

Démonstration: On a

$$\begin{aligned} bs_{(h)}[g_0, ..., g_n] &= [g_0, ..., g_n] + \sum_{i \geq 0}(-1)^{i+1}[h, g_0, ..., \widehat{g_i}, ..., g_n] \\ &= [g_0, ..., g_n] - s_{(h)}b[g_0, ..., g_n]. \end{aligned}$$

De plus on a

$$s_{(g.h)}[g.g_0, ..., g.g_n] = [g.h, ..., g.g_n] = g.[h, ..., g_n]$$

par G-linéarité des symboles [...]. □

Les opérateurs $s_{(h)}$ ne sont pas G-linéaires. Cependant la relation *ii)* du lemme sera suffisante pour assurer la linéarité de l'application Υ_*.

Dans la suite on va construire des applications k-linéaires en utilisant des morphismes $s_{(h)}$ successifs dont on fera varier l'indice h selon les vecteurs de base de $k[G^*]$. Pour cela précisons quelques notations :

Soient $f_1, ..., f_m$ des endomorphismes gradués k-linéaires de $E_*(G)$ et f un endomorphisme de degré $\ell \in \mathbb{Z}$ de $E_*(G)$. Pour $x_0, ..., x_n \in G$, on définit les éléments $x_k^j \in G$, $k_i \in k$ comme les solutions de

$$f([x_0, ..., x_n]) = \sum_{i=1}^{r} k_i[x_0^i, ..., x_{n+\ell}^i].$$

Définition 1.3.3. — *On note $(S_f f_1 ... S_f f_m)f$ l'endomorphisme k-linéaire de $E_*(G)$ donné, pour tout $[g_0, ..., g_n] \in E_n(G)$, par*

$$(S_f f_1 ... S_f f_m)f([x_0, ..., x_n]) = \sum_{i=1}^{r} k_i s_{(x_0^i)} \circ f_1 \circ ... \circ s_{(x_0^i)} \circ f_m([x_0^i, ..., x_{n+\ell}^i]).$$

En particulier $(S_{\mathrm{id}} f)\mathrm{id}$ est l'application k-linéaire $[g_0, ..., g_n] \mapsto s_{(g_0)} f([g_0, ..., g_n])$ que l'on notera plus simplement $S_{\mathrm{id}} f$. On utilisera aussi la notation $(S_f f_1)^i S_{f_1} f_1$ pour $(S_f f_1 ... S_f f_1)f$ avec i itérations de $S_f f_1$. Par abus on note aussi $(S_f f_1)^0 f = f$ et $(S_f f_1)^i f = 0$ si $i < 0$.

Donnons pour commencer une formule pour $\Upsilon_0 : E_0(G) \to \mathcal{B}E_0^-(G)$. On utilise les notations de la partie 1.1.1, en particulier $[g]^n = [g, ..., g]$.

Lemme 1.3.4. — *Dans $E_*(G)$, pour $g \in G$, $i \geq 0$, on a*

i) $b[g]^{2i+1} = [g]^{2i}$, $B[g]^{2i+1} = 2(2i+1)[g]^{2i+2}$;

ii) $b[g]^{2i} = 0$, $B[g]^{2i} = 0$;

iii) L'application (G-linéaire) $\Upsilon_0([g]) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{(2i)!}{i!}[g]^{2i+1}$ vérifie $(1)_0^*$.

Démonstration: On a $b[g]^{2i+1} = \sum_{j=0}^{2i+1}(-1)^j[g]^{2i} = [g]^{2i}$ et

$$B[g]^{2i} = (1-t)\circ s\circ N[g]^{2i} = (2i+1)(1-t)\circ s[g]^{2i+1} = 2(2i+1)[g]^{2i+2}.$$

On montre $ii)$ de même. Il résulte de $i)$ que, quel que soit $i \geq 0$, on a $(1)_0^i$:

$$\begin{aligned} B\left((-1)^i\frac{(2i)!}{i!}[g]^{2i+1}\right) &= (-1)^i\frac{2(2i+1)(2i)!}{i!}[g]^{2i+2} \\ &= -b\left((-1)^{i+1}\frac{(2i+1)!}{(i+1)!}[g]^{2i+3}\right). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.3.5. — *L'application k-linéaire Υ_* définie, pour tout $n \geq 0$ et $i \geq 1$, par*

$$\Upsilon_n^0 = \mathrm{id} \text{ et } \Upsilon_n^i = (-1)^i(S_{\mathrm{id}}B)^i + (-1)^i\sum_{k=0}^{i-1}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_bB)^{i-k}b)$$

est un morphisme de complexes G-linéaire de $E_*(G)$ dans $\mathcal{B}E_*^-(G)$ induisant une injection de $H_*(G)$ dans $HC_*^-(G)$.

On notera encore $\Upsilon_* : C_*(G) \to \mathcal{B}C_*^-(G)$ l'application induite.

Démonstration: On doit vérifier que la famille d'applications linéaires $(\Upsilon_n^i)_{n,i\geq 0}$ vérifie l'égalité $(1)_n^i$ pour tous $n \geq 0, i \geq 0$. On pose $\Upsilon_{-1} = 0$. Comme $\Upsilon_n^0 = \mathrm{id}$, on a $b\Upsilon_*^0 = \Upsilon_{*-1}^0 b$ et donc $(1)_*^0$ est vérifiée.

Déjà Υ_0 vérifie $(1)_0^*$. En effet, d'aprés le $i)$ du lemme 1.3.4, un rapide calcul montre que Υ_0 est l'application définie dans ce lemme en $iii)$.

L'application Υ_* vérifie les formules suivantes pour $n \geq 1$, $i \geq 1$:

$$\Upsilon_n^i = S_{\mathrm{id}}(\Upsilon_{n-1}^i b - B\Upsilon_n^{i-1}). \qquad (2)_n^i$$

En effet, si $g_0, ..., g_n \in G$, par définition de Υ_*, on a

$$\begin{aligned} \Upsilon_{n-1}^i b[g_0,...,g_n] &= (-1)^i\left((S_{\mathrm{id}}B)^i + (-1)^i\sum_{k=0}^{i-1}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_bB)^{i-k}b)\right)b[g_0,...,g_n] \\ &= (-1)^i\left((s_{(g_1)}B)^i[g_1,...,g_n] + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(s_{(g_0)}B)^i[g_0,...,\widehat{g_i},...,g_n]\right) \end{aligned}$$

car $b^2 = 0$ et par définition de S_{id}, S_d. On trouve donc

$$\Upsilon_{n-1}^i b[g_0,...,g_n] = (-1)^i(S_bB)^i b[g_0,...,g_n].$$

Regardons $B\Upsilon_n^{i-1}$ pour $n \geq 0$, $i \geq 1$:

$$-B\Upsilon_n^{i-1} = (-1)^i B(S_{\mathrm{id}}B)^{i-1} + (-1)^i B\sum_{k=0}^{i-2}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_bB)^{i-1-k}b).$$

On applique maintenant les expressions obtenues pour calculer $-S_{\mathrm{id}}B\Upsilon_n^{i-1}$ et $S_{\mathrm{id}}\Upsilon_{n-1}^i b$. On obtient

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{id}}(\Upsilon_{n-1}^i b - B\Upsilon_n^{i-1}) &= (-1)^i \Big(S_{\mathrm{id}}((S_bB)^i b) + S_{\mathrm{id}}B(S_{\mathrm{id}}B)^{i-1} \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{i-2} S_{\mathrm{id}}B(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_bB)^{i-1-k}b)\Big) \\ &= \Upsilon_n^i \end{aligned}$$

ce qui prouve $(2)_n^i$ pour $n \geq 0$, $i \geq 1$.

Prouvons maintenant le théorème par récurrence sur $n \geq 0$. Il faut montrer que pour tout $n \geq 0$, $(1)_n^*$ est vérifiée et que Υ_n est G-linéaire. On a obtenu le résultat pour $n = 0$. Supposons avoir vérifié les égalités $(1)_m^*$ et la G-linéarité de Υ_m pour tout indice $m \leq n$. Démontrons alors les équations $(1)_{n+1}^i$ où $i \geq 0$. Comme on a déjà vu le résultat pour $i = 0$, on raisonne par récurrence sur i. Supposons donc avoir prouvé $(1)_{n+1}^j$ pour $j \leq i$ et étudions $(1)_{n+1}^{i+1}$. Si $g_0, ..., g_n \in G$, d'après la formule $(2)_{n+1}^{i+1}$, on a

$$\begin{aligned} b\Upsilon_{n+1}^{i+1}[g_0, ..., g_{n+1}] &= bs_{g_0}(\Upsilon_n^{i+1}b - B\Upsilon_{n+1}^i)[g_0, ..., g_{n+1}] \\ &= -s_{g_0}b(\Upsilon_n^{i+1}b - B\Upsilon_{n+1}^i)[g_0, ..., g_{n+1}] \\ &\quad +(\Upsilon_n^{i+1}b - B\Upsilon_{n+1}^i)[g_0, ..., g_{n+1}] \end{aligned}$$

par le i) du lemme 1.3.2. Or, les égalité $(1)_n^{i+1}$ et $b^2 = 0$ donnent

$$b\Upsilon_n^{i+1}b = (\Upsilon_{n-1}^{i+1}b - B\Upsilon_n^i)b = -B\Upsilon_n^i b.$$

De plus $bB = -Bb$ implique $bB\Upsilon_{n+1}^i = -Bb\Upsilon_{n+1}^i$. Les égalités $(1)_{n+1}^i$ et $B^2 = 0$ donnent $bB\Upsilon_{n+1}^i = -B\Upsilon_n^i b$. D'où

$$b\Upsilon_{n+1}^{i+1}[g_0, ..., g_{n+1}] = (\Upsilon_n^{i+1}b - B\Upsilon_{n+1}^i)[g_0, ..., g_{n+1}]$$

pour tout $[g_0, ..., g_{n+1}]$ ce qui montre $(2)_{n+1}^{i+1}$ et assure que Υ_* est un morphisme de complexes.

On démontre de même la G-linéarité de Υ_*. En effet Υ_0^* et $\Upsilon_*^0 = \mathrm{id}$ sont G-linéaires. Supposons que Υ_{n-1}^* et Υ_n^{i-1} ($n \geq 1$, $i \geq 1$) le soient également, alors quel que soient $g, g_0, ..., g_n \in G$, en appliquant la formule $(2)^i_n$, on a

$$\begin{aligned}\Upsilon^i_n[g.g_0, ..., g.g_n] &= s_{(g.g_0)}\left(\Upsilon^i_{n-1}b - B\Upsilon^{i-1}_n\right)[g.g_0, ..., g.g_n] \\ &= s_{(g.g_0)}\left(g.(\Upsilon^i_{n-1}b - B\Upsilon^{i-1}_n)[g_0, ..., g_n]\right) \\ &= g.\left(s_{(g_0)}\left(\Upsilon^i_{n-1}b - B\Upsilon^{i-1}_n\right)[g_0, ..., g_n]\right)\end{aligned}$$

(par G-linéarité des applications Υ^{i-1}_n, Υ^i_{n-1}, b et B et grâce à la relation *ii*) du lemme 1.3.2). En particulier Υ^i_n est alors G-linéaire et on conclut une nouvelle fois par récurrence. □

1.3.3. Etude de Υ_* dans les complexes normalisés. — Si C_* est un module simplicial, le sous-module engendré en tout degré n par les images des dégénérescences $s_0, ..., s_{n-1}$ est acyclique ([**Lo5**]). En particulier, on appelle *normalisé* de C_* le complexe quotient défini pour tout $n \geq 0$ par

$$\overline{C}_n = C_n/(s_0(C_{n-1}) + ... + s_{n-1}(C_{n-1})).$$

Ce quotient est un quasi-isomorphisme *i.e.* on a $H_*(C_*) = H_*(\overline{C}_*)$. Remarquons que $\overline{C}_*(A)$ est obtenu à partir de $C_*(A)$ en annulant les tenseurs $(a_0, ..., a_n)$ tels que $a_i = 1$ pour un indice $i > 0$. Autrement dit, $\overline{C}_n(A) = A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$ où on a noté $\overline{A} = A/k$. En ce qui concerne $\overline{E}_*(G), \overline{C}_*(G)$, ils sont obtenus en annulant les éléments $[g_0, ..., g_n]$ pour lesquels il existe $0 \leq i \leq n-1$ tel que $g_i = g_{i+1}$.

Dans la suite on travaillera le plus souvent avec des complexes normalisés pour simplifier les formules. On va donner dans cette partie une formule explicite pour $\Upsilon_* : \overline{C}_*(G) \to \overline{\mathcal{B}C}^-_*(G)$. Remarquons que, dans $C_*(G)$, on peut toujours supposer qu'une chaîne s'écrit $[1, g_1, ..., g_n]$. En pratique, les cycles de $C_*(G)$ apparaissent naturellement sous cette forme (c'est par exemple le cas pour les cycles étudiés dans les paragraphes 1.4, 1.5).

Si $n \geq 1$ et $i \geq 1$ on note I^i_n l'ensemble suivant

$$I^i_n = \{\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n, j) \in \mathbb{N}^{\times n} \times \{1, ..., n\} \ / \ \alpha_0 + ... + \alpha_n = i-1\}.$$

On note $\Gamma^i_n : E_n(G) \to E_{n+2i}(G)$ $(n \geq 1, i \geq 1)$ l'application k-linéaire définie, pour $g_0, ..., g_n \in G$, par

$$\begin{aligned}\Gamma^i_n([g_0, ..., g_n]) = \sum_{\alpha \in I^i_n} &\eta_\alpha[g_0, g_j, [g_0, g_j]^{\alpha_0}, g_{j+1}, [g_0, g_{j+1}]^{\alpha_{j+1}}, g_{j+2}, [g_0, g_{j+2}]^{\alpha_{j+2}}, ... \\ &\quad ..., g_j, [g_0, g_j]^{\alpha_j}]\end{aligned}$$

avec $\eta_\alpha = (-1)^{n(n-j)+i}(i-1)!$. On peut remarquer que Γ^*_* est G-linéaire et donc définit une famille d'applications $\Gamma^i_n : C_n(G) \to C_{n+2i}(G)$ $(n, i \geq 1)$.

Pour $n \geq 1$, $1 \leq k < i$, on introduit le (gros) ensemble suivant

$$\begin{aligned} K_n^{k,i} \;=\; & \{\beta = \left((\beta_0^0, ..., \beta_0^{\alpha_0}), (\beta_1^0, ..., \beta_1^{\alpha_1}), ..., (\beta_n^0, ..., \beta_n^{\alpha_n}), (\rho_0^1, ...\rho_0^{\alpha_0}), \ldots, (\rho_n^0, ..., \rho_n^{\alpha_n}), j, \rho_0^0\right), \\ & (\text{ avec } \alpha_*, \beta_*^*, \rho_*^* \in \mathbb{N} \text{ et } 2 \leq j \leq n) \quad / \quad \alpha_1 = 0, \alpha_0 + ... + \alpha_n = i - k - 1 \\ & \text{et } \rho_0^0 + \sum_{p=0}^{n} \left(\beta_p^0 + \sum_{q=1}^{\alpha_p} \beta_p^q + \rho_p^q \right) = k. \} \end{aligned}$$

Si $n \geq 1$, $1 \leq k \leq i-1$, on note $\nabla_n^{k,i} : E_n(G) \to E_{n+2i}(G)$ l'application G-linéaire définie, pour $g_1, ..., g_n \in G$, par

$$\nabla_n^{k,i}[1, g_1, ..., g_n] =$$

$$\widetilde{N} \sum_{\beta \in K_n^{k,i}} \eta_\beta \left[1, g_1, [\widetilde{1}, g_1]^{\rho_0^0}, g_j, [\widetilde{1}, g_j]^{\beta_0^0},]_0[, g_{j+1}, [\widetilde{1}, g_{j+1}]^{\beta_{j+1}^0},]_{j+1}[, ..., g_j, [\widetilde{1}, g_j]^{\beta_j^0},]_j[\right]$$

avec $\eta_\beta = (-1)^{(n-1)(n-j)}(i-1-k)!(k-1)!$ et $]_p[$ est vide si $\alpha_p = 0$ et sinon

$$]_p[= \left[g_1, [\widetilde{1}, g_1]^{\rho_p^1}, g_p, [\widetilde{1}, g_p]^{\beta_p^1}, ..., g_1, [\widetilde{1}, g_1]^{\rho_p^{\alpha_p}}, g_p, [\widetilde{1}, g_p]^{\beta_p^{\alpha_p}}\right];$$

pour $p = 0$, on remplace les g_p qui apparaissent dans la formule de $]_p[$ par g_j. Dans cette formule $\widetilde{N}$ est défini comme dans la partie 1.1.1.

Théorème 1.3.6. — *Dans $\overline{BE}_*^-(G)$, pour $a, b \in G$, on a*

$$\Upsilon_0[a] = [a]u^0 \quad \Upsilon_1[a, b] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i i! [a, b]^{\times i+1} u^i.$$

Si $n \geq 2$ et $g_1, ..., g_n \in G$, on a dans $\overline{C}_*(G)$ les formules suivantes

(a) : $\Upsilon_n^0[1, g_1, ..., g_n] = [1, g_1, ..., g_n]$,

(b) : $\Upsilon_n^1[1, g_1, ..., g_n] = \Gamma_n^1[1, g_1, ..., g_n] + s_{(1)}\Gamma_{n-1}^1[g_1, ..., g_n]$,

(c) : $\Upsilon_n^i[1, g_1, ..., g_n] = \Gamma_n^i[1, g_1, ..., g_n] + s_{(1)}\Gamma_{n-1}^{i-1}[g_1, ..., g_n] + \sum_{k=1}^{i-1} \nabla_n^{k,i}[1, g_1, ..., g_n]$ *si $i \geq 2$.*

On écrit facilement la formule définissant $\Gamma_n^i[1, ..., g_n]$ de la manière suivante : on part de la chaîne $[1, g_1, ..., g_n]$ et on insére i fois une paire $[1, g_j]$ (avec $1 \leq j \leq n$). Une telle insertion se fait toujours juste à droite de l'élément g_j initial. Ensuite on effectue toutes les permutations cycliques (avec signe) t^ℓ qui place un des 1 "inséré" en position 0 et enfin on multiplie par $(-1)^i(i-1)!$.

On peut de la même façon écrire assez facilement les chaînes apparaissant dans la définition de $\nabla_n^{k,i}$. On part de $[g_1, ..., g_n]$, puis on insére $i-k$ fois une chaîne $[g_1, g_j]$ $(2 \leq j \leq n)$. Les insertions se font toujours à droite du g_j initial. Ensuite on ajoute 1 à gauche d'un g_1 inséré. Puis on insére k fois des chaînes du type $[\widetilde{1}, g_j]$ avec cette fois $1 \leq j \leq n$. On finit en multipliant par

$(-1)^{(n-1)(n-j)+i}(k-1)!(i-k-1)!$ et en faisant agir $\widetilde{N}$ c'est à dire toutes les permutations cycliques qui placent un 1 étiquetté en position 0.

Cette construction apparaît clairement dans le lemme suivant.

Lemme 1.3.7. — *Pour $n \geq 1$, $j \geq 0$, $1 \leq k < i$, on a les formules suivantes dans $\overline{E}_{n+2i}(G)$.*

$$\Gamma_n^j = (-1)^j (S_{\mathrm{id}}B)^j, \quad \nabla_n^{k,i} = \Gamma_{n+2(i-k)}^k S_{\mathrm{id}}(\Gamma_{n-1}^{i-k} d_0).$$

Démonstration du Lemme: Pour $g_0, ..., g_n \in G$, on a

$$\begin{aligned}(s_{(g_0)}B)[g_0, ..., g_n] &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n(n-j)} [g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_{j-1}, g_j] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n(n-j)} [g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_{j-1}, g_j]\end{aligned}$$

(car $[g_0, g_0, g_1, ...]$ est nul dans $\overline{E}_*(G)$) ; c'est à dire, au signe -1 près, la formule donnée dans le lemme pour Γ_n^1 (si $\alpha \in I_n^1$, alors $\eta_\alpha = (-1)^{n(n-i)+1}$ et $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$). De plus

$$(-1)^{n(n-j)} [g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_{j-1}, g_j] = t^{n-j} [g_0, g_1 ..., g_j, [g_0, g_j], g_{j+1}, ..., g_n],$$

donc

$$B \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n(n-j)} [g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_{j-1}, g_j] = \sum_{j=1}^{n} B[g_0, g_1, ..., g_j, [g_0, g_j], g_{j+1}, ..., g_n].$$

En composant par $s_{(g_0)}$ et en remarquant une nouvelle fois que les chaînes de la forme $[g_0, g_0, ...]$ sont triviales dans $\overline{E}_*(G)$ on trouve :

$$(s_{(g_0)}B)^2 [g_0, ..., g_n] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n(n-j)} \sum_{k=1}^{n} [g_0, g_j, g_{j+1}, ..., g_k, [g_0, g_k], g_{k+1}, ..., g_j].$$

Or, si $\alpha \in I_n^2$, on a $\eta_\alpha = (-1)^{n(n-j)+2} = (-1)^{n(n-j)}$ et il existe $1 \leq k \leq n$ tel que $\alpha_k = 1$, les autres α_j étant nuls. Donc

$$\Gamma_n^2 [g_0, ..., g_n] = (s_{(g_0)}B)^2 [g_0, ..., g_n].$$

Pour Γ_n^i, $i \geq 2$, on obtient la formule du lemme en $i-1$ itération du calcul $(s_{(g_0)}B)[g_0, ..., g_n]$. Les factorielles apparaissent dans le calcul de $(s_{(g_0)}B)^i$ car, pour une itération ℓ donnée, une chaîne

$$[g_0, g_j, [g_0, g_j]^{\alpha_0}, g_{j+1}, [g_0, g_{j+1}]^{\alpha_{j+1}}, ..., g_j, [g_0, g_j]^{\alpha_j}]$$

n'est obtenue qu'à partir d'une chaîne de l'itération $\ell - 1$ qui contient $\alpha_0 + \alpha_j + 1$ fois l'élément g_j, $\alpha_1 + 1$ fois l'élément g_1,..., $\alpha_n + 1$ fois l'élément g_n. Il y en a exactement $\ell - 1$ et, la composition par B éliminant les signes (comme ci dessus dans la preuve pour Γ_n^2), leurs coefficients s'ajoutent.

La formule pour $\nabla_n^{i,k}$ s'obtient directement en "composant" les formules obtenues pour Γ_*^*. □

Démonstration du Théorème 1.3.6 : La formule pour Υ_*^0 est immédiate (puisque Υ est l'identité sur la colonne 0).

On a déjà donné une formule pour Υ_0 dans le lemme 1.3.4 : $\Upsilon_0([a]) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\frac{(2i)!}{i!}[a]^{2i+1}$. Comme les complexes sont normalisés, il ne reste que le terme de la colonne 0.

D'après le théorème 1.3.5, pour $n \geq 1, i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\Upsilon_n^i[g_0,...,g_n] &= (-1)^i(S_{\mathrm{id}}B)^i[g_0,...,g_n] + (-1)^i\sum_{k=0}^{i-1}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_bB)^{i-k}b)[g_0,...,g_n] \\ &= (-1)^i\left((s_{(g_0)}B)^i + \sum_{k=0}^{i-1}(s_{(g_0)}B)^k s_{(g_0)}\left((s_{(g_1)}B)^{i-k}d_0\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j(s_{(g_0)}B)^{i-k}d_j\right)\right)[g_0,...,g_n] \quad \text{car } b = \sum d_j.\end{aligned}$$

Mais une chaîne de la forme $[...,g_0,g_0,...]$ est triviale dans $\overline{E}_*(G)$, donc

$$\left(\sum_{k=0}^{i-1}(s_{(g_0)}B)^k s_{(g_0)}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(s_{(g_0)}B)^{i-k}d_j\right)\right)[g_0,...,g_n] = 0 \in \overline{E}_*(G).$$

On obtient alors la formule suivante (pour n, $i \geq 0$)

$$\Upsilon_n^i = (-1)^i\sum_{k=0}^{i}(S_{\mathrm{id}}B)^k S_{\mathrm{id}}((S_{d_0}B)^{i-k}d_0). \tag{3.6.1}$$

Pour $n = 1$, $i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\Upsilon_1^i[a,b] &= (-1)^i\sum_{k=0}^{i}(s_{(a)}B)^k s_{(a)}(s_{(b)}B)^{i-k}[b] \\ &= (-1)^i(s_{(a)}B)^k s_{(a)}[b]\end{aligned}$$

car $(s_{(b)}B)^{i-k}[b] = \frac{(2(i-k))!}{(i-k)!}[b]^{2i-2k+1}$ (*cf.* Lemme 1.3.4) est nul dans $\overline{E}_*(G)$ si $k \neq i$. En particulier, on a

$$\Upsilon_1^1[a,b] = -[a,b,a,b].$$

Comme $B[a,b,a,b] = 2[b,a,b,a,b] - 2[a,b,a,b,a]$, on a

$$\Upsilon_1^2[a,b] = 2[a,b]^{\times 3}.$$

En itérant on trouve (pour $i \geq 0$)

$$\Upsilon_1^i[a,b] = \sum_{i\geq 0}(-1)^i i![a,b]^{\times i+1}u^i.$$

Pour $n \geq 2$, le Lemme 1.3.7 et la formule (3.6.1) impliquent que

$$\Upsilon_n^i = \Gamma_n^i + S_{\mathrm{id}}(\Gamma_{n-1}^i d_0) + \sum_{k=1}^{i-1} \nabla_n^{k,i}$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 1.3.6. □

Remarque : Un élément inversible a d'un anneau A définit un élément dans $K_1(A)$ donné par la matrice $[a]$. Son image par le morphisme d'Hurewicz $H : K_1(A) \to H_1(GL(A))$ est le cycle $[1,a] \in C_1(GL(A))$. Le Théorème 1.3.6 permet alors de calculer son caractère de Chern :

$$\begin{aligned} ch_1(a) &= \mathrm{tr}(\varphi(\Upsilon_1([1,a]))) = \mathrm{tr}(\varphi(\sum_{i\geq 0}(-1)^i i![1,a]^{i+1}u^i)) \\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i i!(a^{-1},a)^{i+1}u^i. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule donnée dans [**Ka2**], Théorème 10.2.

1.4. Le caractère de Chern en bas degré

Dans ce paragraphe on va étudier le caractère de Chern algébrique en degré 2 $ch_2 : K_2(A) \longrightarrow HC_2^-(A)$ où A est une k-algèbre associative.

1.4.1. Le caractère de Chern en degré 2. — On sait que le groupe $K_2(A)$ est isomorphe à $H_2(E(A))$ *via* le morphisme d'Hurewicz et donc ch_2 est entièrement déterminé par la composée

$$\overline{C}_2(E(A)) \xrightarrow{\Upsilon_2} \overline{\mathcal{B}C}_2^-(E(A)) \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathcal{B}C}_2^-(k[GL(A)]) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \overline{\mathcal{B}C}_2^-(A).$$

Mais on a également vu que $K_2(A)$ est le centre de l'extension centrale universelle $St(A) \xrightarrow{\psi} E(A)$. On va donner une formule générale pour le caractère de Chern d'un élément de $K_2(A)$ défini comme sous-groupe de $St(A)$.

Posons $J_p^q = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{N}^p \ / \ \alpha_1 + ... + \alpha_p = q\}$ et rappelons que $\widetilde{N} : \overline{C}_*(k[GL(A)]) \to \overline{C}_*(k[GL(A)])$ a été défini au paragraphe 1.1.1.

Théorème 1.4.1. — *Soit $x = x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n) \in K_2(A)$. En notant $e_r = e_{i_r,j_r}(t_r)$, $E_r = e_1...e_r$ $(1 \leq r \leq n))$ on a :*

$$\begin{aligned} ch_2(x) &= \operatorname{tr}\Bigg(\sum_{r=2}^{n}\sum_{i\geq 0}\Big((-1)^i i!(E_r^{-1}, E_{r-1}, e_r, (e_r^{-1}, e_r)^i) \\ &\quad +(-1)^i\sum_{k=0}^{i-1}(i-k-1)!k!\sum_{\alpha\in J^{i-k}_{2(k+1)}}\widetilde{N}(E_r^{-1}, E_{r-1}, (\widetilde{E}_{r-1}^{-1}, E_{r-1})^{\alpha_1}, e_r, (\widetilde{E}_r^{-1}, E_r)^{\alpha_2}, \\ &\quad e_r^{-1}, (\widetilde{E}_{r-1}^{-1}, E_{r-1})^{\alpha_3}, ..., e_r^{-1}, (\widetilde{E}_{r-1}^{-1}, E_{r-1})^{\alpha_{2k+1}}, e_r, (\widetilde{E}_r^{-1}, E_r)^{\alpha_{2k+2}})\Big)\, u^i\Bigg). \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème on va donner une formule explicite pour l'isomorphisme de groupe $H : K_2(A) \to H_2(E(A))$. Effectuons d'abord quelques rappels sur la formule de Hopf et le calcul différentiel de Fox [**Fo**].

Soit $1 \to R \to F \to G \to 1$ une présentation d'un groupe G, le groupe F étant libre. On suppose que S est un système générateur de F et que R est le sous-groupe normal engendré par un ensemble de relations. La formule de Hopf énonce que

$$H_2(G) \simeq (R \cap [F,F])\,/[R,F].$$

On peut expliciter cet isomorphisme en utilisant le calcul différentiel de Fox (*cf.* [**Bro**], [**Fo**]). Rappelons que, si A est un F-module, une dérivation $d : F \to A$ est une application vérifiant $d(fg) = d(f) + fd(g)$ pour tous $f, g \in F$. En particulier d est uniquement déterminé par l'image ds des générateurs $s \in S$. Ainsi pour $f \in F$ il existe une unique famille $\frac{df}{ds} \in F, s \in S$ telle que $d(f) = \sum_{s\in S}\frac{df}{ds}ds$ pour toute dérivation d.

Précisément, si $f = s_1...s_n$, alors

$$d(f) = d(s_1) + s_1 d(s_2) + \cdots + s_1...s_{n-1}d(s_n).$$

Si $f \in F$, notons $\overline{f}$ l'image de f dans G. On munit $C_2^{\mathrm{bar}}(G)$ d'une structure de F-module à gauche de la manière suivante : si $f \in F$, $a, b \in G$, alors $f[a \mid b] = [\overline{f}a \mid b]$. Soit alors $\delta : F \to C_2^{\mathrm{bar}}(G)$ la dérivation (unique) définie par $\delta(f) = \sum_{s\in S}[\overline{df/ds} \mid \overline{s}]$. On notera encore δ la restriction de δ à R. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} (k[G])[R] \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\delta"'] & (k[G])[S] \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\delta'"'] & k[G] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & k \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ C_2^{\mathrm{bar}}(G) \arrow[r] & C_1^{\mathrm{bar}}(G) \arrow[r] & C_0^{\mathrm{bar}}(G) \arrow[r] & k. \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme dont les applications sont G-linéaires, δ est la restriction de l'application définie ci dessus, $\delta'[s] = [\overline{s}]$, pour tout $r \in R$, $d_2[f] = \sum_{s\in S} \overline{\frac{df}{ds}}[s]$, $d_1[s] = 1$ pour tout $s \in S$ et $r \in R$. On en déduit que $\delta : R \to \ker(C_2^{\mathrm{bar}} \to C_1^{\mathrm{bar}})$ induit un isomorphisme en homologie par passage aux quotients.

Supposons que $r = [a_1, b_1]...[a_n, b_n] \in R$. Regardons le groupe libre $\check{F}$ engendré par $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$. Soit $\check{r}$ le relateur $\check{r} = [x_1, y_1]...[x_n, y_n]$. Posons $\check{R}_i = [x_1, y_1]...[x_i, y_i]$ et $\check{R}_0 = 1$, alors, pour toute dérivation d, on a :

$$d(\check{r}) = \sum_{i=1}^{r} \left(\check{R}_{i-1}dx_i + \check{R}_{i-1}x_i dy_i - \check{R}_{i-1}x_i y_i x_i^{-1}dx_i - \check{R}_i dy_i\right).$$

On en déduit, *via* le morphisme de groupes $x_i \mapsto a_i$, $y_i \mapsto b_i$, qu'en posant $R_i = \overline{[a_1, b_1]...[a_i, b_i]}$ et $R_0 = 1$, on a

$$\delta(r) = \sum_{i=1}^{n} \left([R_{i-1} \mid \overline{a}_i] + [R_{i-1}\overline{a}_i \mid \overline{b}_i] - [R_i\overline{b}_i \mid \overline{a}_i] - [R_i \mid \overline{b}_i]\right). \tag{4.1.1}$$

Lemme 1.4.2. — *Si $x = x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n) \in K_2(A)$, l'isomorphisme d'Hurewicz $H : K_2(A) \to H_2(E(A))$ est donné dans $\overline{C}_2(E(A))$ par le cycle suivant :*

$$H(x) = \sum_{k=2}^{n} [1, E_{k-1}, E_k]$$

où E_k $(k \geq 1)$ est défini comme dans le théorème 1.4.1.

Démonstration du Lemme: Soit F le groupe libre engendré par les symboles $x_{i,j}(t)$ où $i, j \geq 1$, $i \neq j$ et $t \in A$. Soit R le sous-groupe normal engendré par les relations définissant le groupe de Steinberg (*cf.* 1.2.2) et par les éléments de $K_2(A)$. On a alors $G = F/R = E(A)$ et on va utiliser les résultats précédenst sur le calcul différentiel de Fox pour cette présentation de $E(A)$. Pour $x = x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n)$ un élément de $K_2(A)$, on a

$$\delta(x) = \delta(x_{i_1,j_1}(t_1)) + \ldots + x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_{n-1},j_{n-1}}(t_{n-1})\delta(x_{i_n,j_n}(t_n)).$$

Donc, dans $\overline{C}_2(E(A))$, on a (en posant $E_0 = 1$)

$$\begin{aligned} H(x) &= \varphi^{\mathrm{bar}} \sum_{k=1}^{n} [\overline{x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_{k-1},j_{k-1}}(t_{k-1})} \mid \overline{x_{i_k,j_k}(t_k)}] \\ &= \varphi^{\mathrm{bar}} \sum_{k=1}^{n} [E_{k-1} \mid e_{i_k,j_k}(t_k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} [1, E_{k-1}, E_k]. \end{aligned}$$

Le terme pour $k=1$ est $[1,1,E_1]$, donc est trivial dans le normalisé $\overline{C_2}(E(A))$ ce qui achève la preuve. $\square$

Démonstration du Théorème 1.4.1 : Soit $x = x_{i_1,j_1}(t_1)...x_{i_n,j_n}(t_n) \in K_2(A)$, on doit calculer $\mathrm{tr}\circ\varphi\circ\Upsilon_2\circ H(x) \in HC_2^-(A)$. D'aprés le lemme 1.4.2 et le théorème 1.3.6, pour $i \geq 1$, on a

$$\Upsilon_2^i H(x) = \sum_{r=2}^{n}\left(\Gamma_2^i[1,E_{r-1},E_r] + s_{(1)}\Gamma_1^{i-1}[E_{r-1},E_r] + \sum_{k=1}^{i-1}\nabla_n^{k,i}[1,E_{r-1},E_r]\right).$$

Or, en explicitant les formules de Γ et ∇ pour $n=2$, on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{i-1}[E_{r-1},E_r] &= (-1)^{i-1}(i-2)!\sum_{p+q=i-2}[E_{r-1},E_r,[E_{r-1},E_r]^p,E_{r-1},E_r,[E_{r-1},E_r]^q]\\ &= (-1)^{i-1}(i-1)![E_{r-1},E_r]^i.\end{aligned}$$

Pour $\alpha \in I_2^i$, $\eta_\alpha = (-1)^i(i-1)!$, pour $\beta \in K_2^{k,i}$, on a

$$\eta_\beta = (-1)^{1*0+i}(i-1-k)!(k-1)! = (-1)^i(i-1-k)!(k-1)!.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Gamma_2^i[1,E_{r-1},E_r] &= (-1)^i(i-1)!\sum_{p+q=i-1}\widetilde{N}[1,E_{r-1},[\widetilde{1},E_{r-1}]^p,E_r,[\widetilde{1},E_r]^q],\\ \nabla_2^{i-k,i}[1,E_{r-1},E_r] &= \nu_k^i\sum_{\alpha\in J_{2(k+1)}^{i-k}}\widetilde{N}[1,E_{r-1},[\widetilde{1},E_{r-1}]^{\alpha_1},E_r,[\widetilde{1},E_r]^{\alpha_2},...\\ &\qquad ...,E_{r-1},[\widetilde{1},E_{r-1}]^{\alpha_{2k+1}},E_r,[\widetilde{1},E_r]^{\alpha_{2k+2}}]\end{aligned}$$

avec $J_{2(k+1)}^{i-k}$ défini comme dans le théorème 1.4.1 et $\nu_k^i = (-1)^i(i-k-1)!k!$. Il suffit de composer les formules obtenues pour Γ, ∇ par φ pour achever la preuve. $\square$

1.4.2. Symboles en degré 2. — On va ici calculer le caractère de Chern d'éléments importants du groupe K_2 comme les symboles de Steinberg et ceux de Dennis et Stein. Les symboles de Steinberg sont étudiés en détail dans [**Mi**] et, pour ce qui concerne les symbole de Dennis et Stein, on pourra consulter [**DS**] ou [**MS**]. Si a,b sont deux éléments inversibles d'un anneau A qui commutent, considérons les matrices diagonales $X_a = \mathrm{diag}(a,a^{-1},1)$, $X'_b = \mathrm{diag}(b,1,b^{-1})$. Ces deux matrices commutent et donc, si $\check{X}_a,\check{X}'_b$ sont des relèvements de X_a,X'_b dans $St(A)$, l'élément $\{a,b\} = [\check{X}_a,\check{X}'_b]$ appartient à $K_2(A)$ et est indépendant du choix de $\check{X}_a,\check{X}'_b$ (car $K_2(A)$ est central). L'élément $\{a,b\}$ est appelé *symbole de Steinberg*. Il est bimultiplicatif, antisymétrique et vérifie

$$\{a,1-a\}=1, \qquad \{a,-a\}=1$$

pour tout élément inversible a. On conviendra que lorsque on écrit $\{a, b\}$ c'est que $a, b \in A^{\times}$ (le sous-groupe des éléments inversibles de A) et qu'ils commutent.

Pour a, $b \in A$, $0 \leq k < i$, notons

$$\mathrm{ST}_k^i(a,b) =$$

$$\widetilde{N}\Big(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{2k+2}=i-k} ((ab)^{-1}, a, (\widetilde{a}^{-1}, a)^{\alpha_1}, b, (\widetilde{ab}^{-1}, ab)^{\alpha_2}, b^{-1}, (\widetilde{a}^{-1}, a)^{\alpha_3}, \ldots, b, (\widetilde{ab}^{-1}, ab)^{\alpha_{2k+2}})\Big)$$

où $\widetilde{N}$ est défini au paragraphe 1.1.1.

Théorème 1.4.3. — *Le caractère de Chern du symbole de Steinberg $\{a, b\}$ est représenté par le cycle*

$$\begin{aligned} ch_2(\{a,b\}) \;&=\; \sum_{i\geq 0}(-1)^i \Bigg(i!((ab)^{-1}, a, (b, b^{-1})^i, b) - ((ab)^{-1}, b, (a, a^{-1})^i, a) \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{i-1}(i-k-1)!k!(\mathrm{ST}_k^i(a,b) - \mathrm{ST}_k^i(b,a)) \Bigg) u^i. \end{aligned}$$

Démonstration: L'élément $\{a, b\} = [\check{X}_a, \check{X}'_b]$ n'est pas donné comme produit de générateurs du groupe de Steinberg. Mais, puisque il est donné sous la forme d'un commutateur de deux matrices de $St(A)$, on peut utiliser la formule 4.1.1 du paragraphe 4.1 pour calculer $H(\{a, b\})$ sans décomposer le symbole de Steinberg $\{a, b\}$ en produit de générateurs du groupe $St(A)$. On trouve (dans $C_2(GL(A))$)

$$\begin{aligned} H(\{a,b\}) &= \varphi^{\mathrm{bar}}([X_a \mid X'_b] - [X'_b \mid X_a]) \\ &= [1, X_a, X_a X'_b] - [1, X'_b, X'_b X_a] \\ &= [1, X_a, X_a X'_b] - [1, X'_b, X_a X'_b] \end{aligned}$$

par commutativité de X_a et X'_b. On obtient donc

$$ch_2(\{a,b\}) = \mathrm{tr}\left(\varphi\left(\Upsilon_2\left([1, X_a, X_a X'_b] - [1, X'_b, X_a X'_b]\right)\right)\right).$$

Les matrices X_a, X'_b, $X_a X'_b$ sont diagonales. Après composition par Υ_2 et φ, on obtient des chaînes de $k[GL_3(A)]^{\otimes 2+2*} \subset C_{2+*}(k[GL(A)])$ de la forme $k_j(M_0^j, M_1^j, \ldots, M_{2+2*}^j)$, ($j \in \mathbb{N}$, $k_j \in k$) où les matrices $M_\ell^j \in GL_3(A)$ ($0 \leq \ell \leq n + 2*$, $j \geq 0$) sont diagonales. En particulier on a

$$\mathrm{tr}(M_0^j, M_1^j, \ldots, M_{2+2*}^j) = \sum_{i=1}^{3}((M_0^j)_{i,i}, (M_1^j)_{i,i}, \ldots, (M_{2+2*}^j)_{i,i}).$$

Comme les matrices M_ℓ^j ne peuvent être égales qu'à X_a, X'_b, $X_aX'_b$ et leurs inverses on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\varphi\Upsilon_2)([1,X_a,X_aX'_b]-[1,X'_b,X_aX'_b]) &= \varphi\,(\Upsilon_2)(\,[1,a,ab]+[1,a^{-1},a^{-1}]\\ &\qquad +[1,1,b^{-1}]-[1,b,ab]\\ &\qquad -[1,1,a^{-1}]+[1,b^{-1},b^{-1}])\\ &= \varphi\Upsilon_2([1,a,ab]-[1,b,ab])\end{aligned}$$

dans le complexe normalisé $\overline{\mathcal{BC}_2^-}(A)$. Le calcul de $\varphi(\Upsilon_2)([1,a,ab]-[1,b,ab])$ est analogue à celui de $\varphi\Upsilon_2([1,E_{r-1},E_r])$ effectué dans la preuve du Théorème 1.4.1. On trouve

$$\Gamma_2^i[1,a,ab]=(-1)^i(i-1)!\,\mathrm{ST}_0^i(a,b),$$

$$s_{(1)}\Gamma_1^i[1,a,ab]=(-1)^i i!\,((ab)^{-1},a,(b,b^{-1})^i,b),$$

et, pour $1\le k<i$, $\nabla_2^{i-k,k}([1,a,ab])=(-1)^i(i-k-1)!k!\,\mathrm{ST}_k^i(a,b)$.

□

Passons maintenant aux symboles de Dennis et Stein. Soient a,b deux éléments de A qui commutent et tels que $1-ab$ soit inversible. Pour $i\neq j$, notons

$$P_{i,j}(a,b)=x_{j,i}(-b(1-ab)^{-1})x_{i,j}(-a)x_{j,i}(b)x_{i,j}((1-ab)^{-1}a).$$

Les éléments $\psi(P_{i,j}(a,s))$ et $\psi((H_{i,j}(as,1))$ ont même image dans $E(A)$. Le *symbole de Dennis-Stein* associé est par définition

$$<a,b>=P_{i,j}(a,b)P_{i,j}^{-1}(ab,1)\in K_2(A).$$

Ces symboles sont indépendants de i et j et on peut donc prendre $i=1,j=2$ pour faire les calculs. Par convention on supposera, que lorsque on écrit $<a,b>$, c'est que a,b vérifient les propriétés ci-dessus.

Rappelons que les symboles $<a,b>$ sont antisymétriques et vérifient pour tout a,b,c

$$<r,b><a,c>=<a,b+c-abc>,\quad <a,bc>=<ab,c><ca,b>.$$

De plus, si a est inversible, alors le symbole $<a,b>$ est un symbole de Steinberg : $<a,b>=\{a,1-ab\}$. Enfin dans le cas où $ab=0$ le symbole $-<a,b>$ coïncide avec le symbole de Loday $<<a,b>>$ ([**Lo3**]).

On associe à $<a,b>$ les matrices de $E(A)$ suivantes :

$$T=\begin{bmatrix}1 & -a\\ -s(1-as)^{-1} & (1-as)^{-1}\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ s & 1\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}1-as & -a\\ 0 & (1-as)^{-1}\end{bmatrix}.$$

On note $\overline{J_q^p}$ l'ensemble suivant

$\overline{J_p^q}=\{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{2q+2})\in\mathbb{N}^{2q+2}\ /\ \alpha_1+...+\alpha_{2q+2}=p$ et $\alpha_2,...,\alpha_{2q+1}\ge 1\}$.

Théorème 1.4.4. — *Le caractère de Chern des symboles de Dennis et Stein est représenté par le cycle* $\sum_{i\geq 0} ch_2^i(<a,b>)u^i$ *où*

$$ch_2^0(<a,b>) = (1, b(1-ab)^{-1}, a) + (a, (1-ab)^{-1}, b) - ((1-ab)^{-1}, a, b) - (1, (1-ab)^{-1}, ab),$$

et si $i > 0$

$$\begin{aligned} ch_2^i(<a,b>) &= i![(1, (b(1-ab)^{-1}, a)^{i+1}) - (1, ((1-ab)^{-1}, ab)^{i+1})] \\ &\quad + (-1)^i \sum_{k=0}^{i/3} (i-k-1)!k! \sum_{\alpha \in \overline{J_k^{i-k}}} \widetilde{N}(V^{-1}, T, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_1}, U, (\widetilde{V}^{-1}, V)^{\alpha_2}, \\ &\quad U^{-1}, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_3}, ..., U^{-1}, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_{2k+1}}, U, (\widetilde{V}^{-1}, V)^{\alpha_{2k+2}}). \end{aligned}$$

Démonstration: Le symbole $<a,b>$ est égal à

$$x_{21}(-s(1-as)^{-1})x_{12}(-a)x_{21}(s)x_{12}((1-as)^{-1}(a-as))x_{21}(-1)x_{12}(as)x_{21}((1-as)^{-1})$$

c'est à dire un produit de sept générateurs. Notons $e_1, ..., e_7$ les sept matrices élémentaires associées (*i.e.* $e_1 = e_{2,1}(-b(1-ab)^{-1}), ..., e_7 = e_{2,1}((1-ab)^{-1})$). Posons également $E_i = e_1...e_i$ pour $i = 1...7$ et $E_0 = 1$.

D'aprés le Théorème 1.4.1 (et avec les mêmes notations), pour $i \geq 0$, la composante dans la colonne $-i$ du caractère de Chern de $<a,b>$ est (dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$)

$$\begin{aligned} ch_2^i(<a,b>) &= \operatorname{tr}\Bigg(\sum_{r=2}^{7} \big((-1)^i (E_r^{-1}, E_{r-1}, e_r, (e_r^{-1}, e_r)^i) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{\alpha \in J_{2(k+1)}^{i-k}} c_i^k \widetilde{N}(E_r^{-1}, E_{r-1}, (\widetilde{E}_{r-1}^{-1}, E_{r-1})^{\alpha_1}, e_r, (\widetilde{E}_r^{-1}, E_r)^{\alpha_2}, \\ &\quad e_r^{-1}, (\widetilde{E}_{r-1}^{-1}, E_{r-1})^{\alpha_3}, ..., e_r^{-1}, (\widetilde{E}_{r-1}^{-1}, E_{r-1})^{\alpha_{2k+1}}, e_r, (\widetilde{E}_r^{-1}, E_r)^{\alpha_{2k+2}})\big)\Bigg) \end{aligned}$$

avec $c_i^k = (-1)^i (i-k-1)!k!$. On définit $C_\alpha(r)$, $\alpha \in J_{2(k+1)}^{i-k}$ de telle sorte que $C_\alpha(r)$ vérifie la formule suivante

$$\begin{aligned} ch_2^i(<a,b>) &= \sum_{r=2}^{7} (-1)^i \Bigg(\operatorname{tr}(E_r^{-1}, E_{r-1}, e_r, (e_r^{-1}, e_r)^i) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-1} (i-k-1)!k! \sum_{\alpha \in J_{2(k+1)}^{i-k}} \operatorname{tr}(C_\alpha(r)) \Bigg). \end{aligned}$$

Rappelons que, dans le complexe normalisé $\overline{C}_{2+2i}(A)$, une chaîne $(x_0, ..., x_{n+2i})$ est nulle dès que l'un des coefficients x_j, $j > 0$, est dans k (on dira d'un tel coefficient qu'il est trivial).

Etudions $\mathrm{tr}(E_r^{-1}, E_{r-1}, e_r, (e_r^{-1}, e_r)^i)$ (avec $2 \le r \le 7$) pour commencer. Prenons $r = 2$ par exemple. Par définition de la trace généralisée de Dennis (*cf.* 1.3.1), on doit calculer

$$\sum_{i_0,\dots,i_n \in \{1,2\}^{3+2i}} ((E_2^{-1})_{i_0,i_1}, (E_{2-1})_{i_1,i_2}, (e_2)_{i_2,i_3}, (e_2^{-1})_{i_3,i_4}, (e_2)_{i_4,i_5}, \dots).$$

Pour $i \ge 1$, comme $e_2^{-1} = e_{1,2}(a)$, le coefficient $(e_2^{-1})_{i_3,i_4}$ est non trivial si et seulement si $i_3 = 1$ et $i_4 = 2$. Mais, si $i_4 = 2$, alors $(e_2)_{i_4,i_5}$ est trivial car $e_2 = e_{1,2}(-a)$. En conclusion $\mathrm{tr}(E_2^{-1}, E_1, e_2, (e_2^{-1}, e_2)^i)$ est nulle dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$ pour $i \ge 1$.

Pour $i = 0$, comme $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} (1-ab)^{-1} & a \\ -b(1-ab)^{-1} & 1 \end{bmatrix}$ on trouve

$$\mathrm{tr}(E_2^{-1}, E_1, e_2) = (1, b(1-ab)^{-1}, a).$$

On trouve de même que, pour $r = 3, \dots 7$, $\mathrm{tr}(E_r^{-1}, E_{r-1}, e_r, (e_r^{-1}, e_r)^i) = 0$ si $i \ge 1$ et on a

$$ch_2^0(< a, b >) = (1, b(1-ab)^{-1}, a) + (a, (1-ab)^{-1}, b) - ((1-ab)^{-1}, a, b) - (1, (1-ab)^{-1}, ab).$$

On va maintenant calculer $\mathrm{tr}(C_\alpha(2))$, $\alpha \in J_{2(k+1)}^{i-k}$ dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$ $(i \ge 1)$. Par définition de la trace on est ramené à étudier les termes de la forme

$$\begin{aligned} \mu_\omega^\ell(\alpha) \quad = \quad & t^\ell((E_2^{-1})_{\omega_0,\omega_1}, (E_1)_{\omega_1,\omega_2}, (\widetilde{E}_1^{-1})_{\omega_2,\omega_3}, \dots \\ & \dots, (e_2)_{\omega_{1+2p},\omega_{2+2p}}, (\widetilde{E}_2^{-1})_{\omega_{2+2k},\omega_{3+2k}}, \dots, (E_2)_{\omega_{2+2i},\omega_0}) \end{aligned}$$

où ℓ est un indice appartenant à $\{1, \dots, 2+2i\}$ dont l'action sur $C_\alpha(2)$ place en position 0 un coefficient venant de $\widetilde{E}_2^{-1}$ ou $\widetilde{E}_1^{-1}$ (en particulier $\ell > 0$), et $\omega \in \Omega = \{\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{2+2i}) \in \{1,2\}^{3+2i}\}$.

Comme les coefficients triviaux (*i.e.* ceux inclus dans k) induisent des chaînes nulles dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$, on peut se contenter de calculer les éléments $\mu_\omega^\ell(\alpha)$ pour lesquels aucun coefficient (en position non nulle) est trivial. Rappelons que

$$E_1 = e_{2,1}(-b(1-ab)^{-1}), \quad e_2 = e_{1,2}(-a) \;\text{ et }\; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b(1-ab)^{-1} & (1-ab)^{-1} \end{bmatrix}.$$

En particulier $(E_1)_{\omega_1,\omega_2}$ est trivial sauf si $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$. On supposera désormais que $\omega_1 = 2$ et $\omega_2 = 1$. Si $\omega_0 = 2$, alors $(E_2^{-1})_{\omega_0,\omega_1} = 1$ et $\mu_\omega^\ell(\alpha) = 0$. On peut donc aussi supposer que $\omega_0 = 1$.

Supposons $\alpha_1 > 0$, alors

$$\mu_\omega^\ell(\alpha) = (-a, -b(1-ab)^{-1}, (\widetilde{E}_1^{-1})_{1,\omega_3}, (E_1)_{\omega_3,\omega_4}, \dots).$$

Mais $(\widetilde{E}_1^{-1})_{1,\omega_3} = 1$ si $\omega_3 = 1$ et 0 sinon. Le seul cas possible, pour que $\mu_\omega^\ell(\alpha) \ne 0$, est $r_3 = 1$ (et $\ell = 1 + 2i$). Or, si $r_3 = 1$, $(E_1)_{\omega_3,\omega_4}$ est trivial $(E_1 = e_{2,1}(-b(1-ab)^{-1}))$. On peut se ramener à calculer les $\mu_\omega^\ell(\alpha)$ pour lesquels $\alpha_1 = 0$. Comme $\omega_2 = 1$ et que $(e_2)_{1,1}$ est trivial, on peut aussi supposer que $\omega_3 = 2$. Si $\alpha_2 = 0$ (en particulier $k > 0$ puisque $i \geq 1$) , on doit calculer

$$\mu_\omega^\ell(\alpha) = (-a, -b(1-ab)^{-1}, -a, (e_2^{-1})_{2,\omega_4}, ...)$$

qui est nul dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$ car $(e_2^{-1})_{2,*}$ est trivial. On se limite donc à regarder les cas où $\alpha \in J_{2(k+1)}^{i-k}$ est tel que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$. Si $k > 0$, le tenseur de $\overline{C}_{2+2i}(A)$ en position $3+2\alpha_2$ est de la forme $(e_2)^{-1}_{\omega_{3+2\alpha_2},\omega_{4+2\alpha_2}}$. Il est non trivial si $\omega_{3+2\alpha_2} = 1$ et $\omega_{4+2\alpha_2} = 2$. On doit donc calculer

$$((E_2^{-1}, E_2)^{\alpha_2})_{2,1} = ((E_2^{-1})_{2,\omega_4}, (E_2)_{\omega_4,\omega_5}, (E_2^{-1})_{\omega_5,\omega_6}, ..., (E_2)_{\omega_{2+2\alpha_2},1}).$$

Si $k = 0$, alors, comme $\omega_0 = 1$, on doit aussi calculer $((E_2^{-1}, E_2)^i)_{2,1}$.

Comme on ne s'intéresse qu'aux tenseurs $((E_2^{-1}, E_2)^{\alpha_2})_{2,1}$ non nuls, rappelons qu' au plus une seule des matrices $\widetilde{E}_2^{-1}$ peut donner un 1 (et que cette matrice est fixée par le choix de ℓ). Si $\omega_4 \neq 2$, $(\widetilde{E}_2^{-1})_{2,1} = b(1-ab)^{-1}$ et alors $\omega_5 = 2$ car $(E_2)_{1,1} = 1$, ce qui ramène à l'étude de $((E_2^{-1}, E_2)^{\alpha_2 - 1})_{2,1}$. On peut poursuivre cette réduction tant que le coefficient venant de E_2^{-1} n'est pas 1.

Regardons de même $(E_2)_{\omega_{2+2\alpha_2},1}$. Il est trivial à moins que $\omega_{2+2\alpha_2} = 2$. Le coefficient $(R_2)_{1,1} = 1$ ce qui implique que les seuls termes non triviaux sont ceux pour lesquels $r_{2i+2} = 2$. Or $(E_2^{-1})_{\omega_{1+2\alpha_2},2} = a$ si $\omega_{1+2\alpha_2} = 1$ et 1 sinon. Donc, si on suppose encore $(E_2^{-1})_{\omega_{1+2\alpha_2},2} \neq 1$, on peut se réduire à l'étude de $((E_2^{-1}, E_2)^{\alpha_2})_{2,1}$.

Comme il ne peut y avoir qu' au plus un seul 1 dans les coefficients de $((E_2^{-1}, E_2)^{\alpha_2})_{2,1}$, par réduction à droite et à gauche, on se raméne au calcul de $(E_2^{-1}, E_2)_{2,1}$. Alors $\omega_4 = 1$ donne un terme trivial et par conséquent $(E_2^{-1}, E_2)_{2,1} = (1, -b(1-ab)^{-1})$.

En particulier, si $\mu_\omega^\ell(\alpha) \neq 0$, alors il y a un 1 dans les coefficients des tenseurs provenant de $((E_2^{-1}, E_2)^{\alpha_2})_{2,1}$ (et ℓ est donc fixé). Montrons que, si $k > 0$, $\mu_\omega^\ell(\alpha) = 0$. Supposons $\alpha_3 > 0$, on doit calculer

$$(...., (e_2^{-1})_{1,2}, (\widetilde{E}_1^{-1})_{2,\omega_{5+2\alpha_2}}, (E_1^{-1})_{\omega_{5+2\alpha_2},6+2\alpha_2}, ...).$$

Or $(\widetilde{E}_1^{-1})_{2,\omega_{5+2\alpha_2}}$ est non trivial uniquement pour $\omega_{5+2\alpha_2} = 1$. On en déduit que $(E_1^{-1})_{\omega_{5+2\alpha_2},6+2\alpha_2}$ est trivial et $\mu_\omega^\ell(\alpha) = 0$. Si $\alpha_3 = 0$, on doit calculer $(..., (e_2^{-1})_{1,2}, (e_2)_{2,\omega_{5+2\alpha_2}}, ...)$ qui est une chaîne nulle dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$ car $(e_2)_{2,*}$ est trivial.

En conclusion on peut se limiter au cas $k = 0$ (et donc $\alpha_2 = i$) *i.e.* au calcul de

$$t^\ell(-a, -b(1-ab)^{-1}, -a, (E_2^{-1}, E_2)^i_{2,1}).$$

En reprenant le calcul effectué pour $(E_2^{-1}, E_2)^i_{2,1})$ et en sommant sur les i choix possibles pour ℓ on obtient

$$\sum_{k=0}^{i-1}(i-k-1)!k! \sum_{\alpha \in J^{i-k}_{2(k+1)}} \mathrm{tr}(C_\alpha(2)) = (-1)^i i(1, (b(1-ab)^{-1}, b)^{i+1}).$$

En faisant un raisonnement analogue on caclcule $\mathrm{tr}(C_\alpha(r))$, $r = 3, ...7$. Comme $U = e_3$, $V = E_3$ et $T = E_2$, avec les notations du théorème on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(C_\alpha(3)) &= (V^{-1}, T, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_1}, U, (\widetilde{V}^{-1}, V)^{\alpha_2}, \\ & \quad U^{-1}, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_3}, ..., U^{-1}, (\widetilde{T}^{-1}, T)^{\alpha_{2k+1}}, U, (\widetilde{V}^{-1}, V)^{\alpha_{2k+2}}) \end{aligned}$$

et que cette chaîne est triviale si $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, ..., 2k+1$.

On a $e_4 = e_{1,2}((1-ab)^{-1}(a-ab))$ et $E_4 = \begin{bmatrix} 1-ab & -ab \\ 0 & (1-ab)^{-1} \end{bmatrix}$. Ces matrices étant triangulaires supérieures, on obtient facilement $\mathrm{tr}(C_\alpha(4)) = 0$ quel que soit $\alpha \in J^{i-k}_{2(k+1)}$.

De plus $e_5 = e_{2,1}(-1)$, donc $(e_5)_{\omega,\omega'}$ est trivial que que soit $\omega, \omega' \in \{1, 2\}$ et $\mathrm{tr}(C_\alpha)(5) = 0$ pour tout α. De même $E_7 = \mathrm{id}$ implique que $\mathrm{tr}(C_\alpha(7)) = 0$. Enfin le calcul de $\mathrm{tr}(C_\alpha(6)$ est totalement analogue à celui de $\mathrm{tr}(C_\alpha(1)$ et on trouve

$$\sum_{k=0}^{i-1}(i-k-1)!k! \sum_{\alpha \in J^{i-k}_{2(k+1)}} \mathrm{tr} C_\alpha(6) = (-1)^{i-1} i(1, ((1-ab)^{-1}, ab)^{i+1}).$$

$\square$

Corollaire 1.4.5. — *Soit A un anneau contenant $\mathbb{Q}$. Si $a, b \in A$ sont tels que $ab = 0$, alors le caractère de Chern du symbole de Loday $<< a, b >>$ est*

$$ch_2(<< a, b >>) = ((1, a, b) - (1, b, a))u^0 = B(a, b)u^0.$$

Démonstration: Quand $ab = 0$, d'après le Théorème 1.4.4, on a

$$ch_2^0(< a, b >) = (1, a, b) - (1, b, a) = B(a, b).$$

On peut de plus calculer facilement la somme correspondant au terme $\mathrm{tr}(C_\alpha(3))$ ($\alpha \in \overline{J^{i-k}_k}$) de la preuve du Théorème 1.4.4. En effet les termes diagonaux de la matrice V (du Théorème 1.4.4) sont alors égaux à 1. Le calcul de $\mathrm{tr}(C_\alpha(3))$ devient alors analogue à celui de $\mathrm{tr}(C_\alpha(1))$ et, pour $i \geq 1$, on trouve (dans $\overline{C}_{2+2i}(A)$)

$$ch_2^i = i!(1, (a, b)^{i+1}) - i!(1, (b, a)^{i+1}).$$

Si A contient $\mathbb{Q}$, notons $z(<< a,b >>)$ la chaîne de $\mathrm{ToT}\mathcal{B}C_3^-$ définie par

$$z(<< a,b >>) = \sum_{i\geq 1}(i!/(i+1))(a,b)^{i+1}u^{i-1}.$$

Alors $b(z(<< a,b >>)) = 0$ et

$$B(z(<< a,b >>)) = i!\sum_{i\geq 1}((1,(a,b)^{i+1}) - (1,(b,a)^{i+1}))u^i$$

ce qui assure que les termes des colonnes strictement négatives sont des bords.

$\square$

Remarque : *i*) La formule donnée est valable dans le complexe non normalisé $\mathcal{B}C_2^-(A)$.

ii) Si A ne contient pas $\mathbb{Q}$, on peut quand même définir l'élément $z(<< a,b >>)$ (apparaissant dans la preuve du corollaire 1.4.5) sur les colonnes $-i$ telles que $i+1$ ne soit pas premier. On trouve alors

$$ch_2^i(<< a,b >>) = \sum_{p\in\mathcal{P}}(p-1)!\,((1,(a,b)^p) - (1,(b,a)^p))\,u^{p-1}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des entiers p premiers.

Exemple : Quand A est une k-algèbre *commutative* contenant $\mathbb{Q}$, on sait qu'il existe une application $\pi_n : \overline{C}_n(A) \to \Omega_A^n$ (pour tout $n \geq 0$) où Ω_A^n est le $n^{\text{ième}}$ module extérieur sur l'algèbre Ω_A^1 des formes différentielles commutatives sur A, *i.e.* l'algèbre engendré par les symboles xdy où $x,y \in A$, d est k-linéaire et vérifie, pour tout $x,y \in A$,

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Cette application est définie, pour tout $a_0, a_1, ..., a_n \in A$, par

$$\pi_n(a_0,...,a_n) = \frac{1}{n!}a_0da_1...da_n.$$

Cette application induit un morphisme de bicomplexes de $\mathcal{B}C_*^-(A)$ dans le bicomplexe suivant, noté $\mathcal{B}N\Omega_A^*$,

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0\downarrow & & 0\downarrow & & 0\downarrow \\
\leftarrow & \Omega_A^2 & \xleftarrow{d} & \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} & \Omega_A^0 \\
 & 0\downarrow & & 0\downarrow & & \\
\xleftarrow{d} & \Omega_A^1 & \xleftarrow{d} & \Omega_A^0 & & \\
 & 0\downarrow & & & & \\
\xleftarrow{d} & \Omega_A^0 & & & &
\end{array}$$

qui est un quasi-isomorphisme si A est lisse, *cf.* [**LQ**].

Calculons la composée $\pi_2 \circ ch_2(< a, b >)$. On a

$$\begin{aligned}
\pi_2 ch_2^0(< a, b >) &= \pi_2 D_2(< a, b >) \\
&= \frac{1}{2}\Big(d(b(1-ab)^{-1})da + ad((1-ab)^{-1})db \\
&\quad -(1-ab)^{-1}dadb - d((1-ab)^{-1})d(ab)\Big) \\
&= -(1-ab)^{-1}dadb.
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi un calcul qui est dans [**De1**].

En revanche, si $i \geq 1$, alors $ch_2^i(< a, b >)$ est une combinaison linéaire de chaînes de $A \otimes \overline{A}^{\otimes 2i+2}$ dont les $2i+2$ derniers tenseurs appartiennent à l'ensemble

$$\{a^\alpha, b^\alpha, (1-ab)^\alpha, (b(1-ab)^{-1})^\alpha, ab; \alpha = \pm 1\}.$$

On en déduit alors que $\pi_2 \circ ch_2^i(< a, b >) = 0$ et par conséquent,

$$\pi_2 \circ ch_2(< a, b >) = (-(1-ab)^{-1}dadb)u^0.$$

Corollaire 1.4.6. — *Si A est une k-algèbre commutative lisse contenant $\mathbb{Q}$, alors*

$$ch_2(< a, b >) = D_2(< a, b >)u^0 = (-(1-ab)^{-1}dadb)u^0.$$

Remarque : Dans de nombreux cas les groupes $K_2(A)$ ou $K_2(A, I)$ (où I est un idéal bilatère de A et $K_*(A, I)$ les groupes de K-théorie relative associés) sont engendrés par les symboles de Dennis et Stein (voir, par exemple, [**Mi**], [**MS**], [**DS**], [**We2**], [**Mu**]). Par exemple, si A est un anneau local ou si la paire (A, I) est telle que l'idéal I soit radical, alors la projection P sur la colonne 0 restreinte à l'image du caractère de Chern est injective, *i.e.* $ch_2 = D_2\, u^0$.

1.5. Quelques calculs en degré supérieur

Dans les deux paragraphes suivants on va calculer le caractère de Chern des symboles de Loday $<< b_1, ..., b_n >>$ et des symboles de Steinberg généralisés $\{a_1, ..., a_n\}$ pour $n > 2$.

1.5.1. Symboles de Steinberg généralisés. — Lorsque A est un anneau commutatif, on a un produit gradué commutatif ([**Lo1**], voir aussi le paragraphe 1.6)

$$K_p(A) \times K_q(A) \xrightarrow{*} K_{p+q}(A).$$

En particulier, si $a_1, ..., a_n$ sont des éléments inversibles de A et $\{a_1\}, ..., \{a_n\}$ leurs images dans $K_1(A)$, alors $\{a_1, ..., a_n\} = \{a_1\} * ... * \{a_n\}$ est dans $K_n(A)$.

Supposons maintenant que A ne soit plus nécessairement commutatif, mais que l'on ait des matrices $m_1, ..., m_n$ dans $GL_r(A)$ qui commutent deux à deux. Soit θ l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}] \to \mathcal{M}_r(A)$ qui envoie chaque générateur x_i sur m_i. On a alors un morphisme induit

$$\theta_* : K_n(\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}]) \to K_n(A)$$

et on note $\{m_1, ..., m_n\} = \theta_*\{x_1, ..., x_n\}$.

Par définition, si $a_1, ..., a_n$ sont des éléments inversibles qui commutent, *le symbole de Steinberg généralisé* est $\{a_1, ..., a_n\} = \theta_*(\{x_1, ..., x_n\}) \in K_n(A)$.

On reprend les notations du Théorème 1.3.6.

Théorème 1.5.1. — *Soient $a_1, ..., a_n$ des éléments inversibles d'un anneau A qui commutent deux à deux. Le symbole de Steinberg généralisé $\{a_1, ..., a_n\}$ vérifie*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_n(\{a_1, ..., a_n\}) \;\; = \;\; \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \Bigg(\sum_{i \geq 0} \varphi \big(s_{(1)} \Gamma_{n-1}^{i-1} [\overline{a}_1^\sigma, ..., \overline{a}_n^\sigma] \\ + \Gamma_n^i + \sum_{k=1}^{i-1} \nabla_n^{k,i}) [1, \overline{a}_1^\sigma, ..., \overline{a}_n^\sigma] \Big) u^i \Bigg) \end{aligned}$$

où $\overline{a}_j^\sigma = a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} ... a_{\sigma(j)}$ pour $j = 1...n$.

Remarque : On constate que la formule donnée par le Théorème 1.5.1 pour $n = 2$ est la même que celle donnée par le Théorème 1.4.3.

Avant de démontrer ce théorème calculons l'image par le morphisme d'Hurewicz $H : K_n(A) \to H_n(GL(A))$ des symboles $\{m_1, ..., m_n\}$ où $m_1, ..., m_n$ sont des matrices de $GL_r(A)$ qui commutent deux à deux, résultat utilisé également pour démontrer le Théorème 1.5.3. Dans $GL_*(A)$, on a les opérateurs suivants :

$$\begin{array}{lll} GL_*(A) \xrightarrow{\mathrm{diag}^1} GL_{3*}(A) & GL_*(A) \xrightarrow{\mathrm{diag}^2} GL_{3*}(A) & GL_*(A) \xrightarrow{\mathrm{inc}} GL_{3*}(A) \\ m \mapsto diag(m, m^{-1}, 1), & m \mapsto diag(m, 1, m^{-1}), & m \mapsto diag(m, 1, 1). \end{array}$$

On associe aux matrices $m_1, ..., m_n$ les matrices M_i $(i = 1...n)$ de $GL_{3^{n-1}r}(A)$ définies par

$$\begin{aligned} &M_1 = (\mathrm{diag}^1)^{n-1}(m_1), \quad M_2 = (\mathrm{diag}^1)^{n-2}\mathrm{diag}^2(m_2) \\ &\text{et } M_i = (\mathrm{diag}^1)^{n-i}\mathrm{diag}2(\mathrm{inc})^{i-2}(m_i) \text{ pour } i = 3...n. \end{aligned}$$

Lemme 1.5.2. — *Soient $m_1, ..., m_n$ des éléments de $GL_r(A)$ qui commutent. L'image de l'élément $\{m_1, ..., m_n\}$ par le morphisme d'Hurewicz $H : K_n(A) \to H_n(GL(A))$ est donnée par le cycle*

$$H(\{m_1, ..., m_n\}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) [1, M_{\sigma(1)}, M_{\sigma(1)} M_{\sigma(2)}, ..., M_{\sigma(1)} M_{\sigma(2)} ... M_{\sigma(n)}]$$

où Σ_n est le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments.

Démonstration: Par naturalité de H on se ramène à l'étude de $H(\{x_1, ..., x_n\})$. On raisonne par récurrence sur n, le résultat pour $n = 2$ ayant été démontré dans la preuve du Théorème 1.4.3. Nous appelons R l'anneau commutatif $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n, x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}]$ et $\mu : R \otimes R \to R$ la multiplication. On a, dans $K_{n+1}(R)$, l'égalité de symboles $\{x_1, ..., x_{n+1}\} = \{x_1, ..., x_n\} * \{x_{n+1}\}$ (par définition des symboles $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$). On identifie x_i à la matrice $[x_i], i \leq n$ et x_{n+1} avec la matrice $\mathrm{inc}^{n-1}([x_{n+1}])$.

Reprenons les notations du paragraphe 1.6. D'après la remarque précédent le Corollaire 1.6.5, on a

$$\begin{aligned} H(\{x_1, ..., x_{n+1}\}) &= H(\{x_1, ..., x_n\} * \{x_{n+1}\}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mu_* \big(h_* \big(sh \big([1, X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)}, ... \\ &\qquad \ldots, X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)}...X_{\sigma(n)}], [1, x_{n+1}]\big)\big)\big) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mu_* \big(sh \big(\mathrm{diag}_1 \big([1, X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)}...X_{\sigma(n)}]\big), \\ &\qquad\qquad \mathrm{diag}_2 ([1, x_{n+1}])\big)\big). \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, $\sigma \in \Sigma_n$, notons $\check{X}_i^\sigma = \mathrm{diag}_1(X_{\sigma(1)}...X_{\sigma(i)})$. On a

$$\begin{aligned} H(\{x_1, ..., x_{n+1}\}) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \big([1 \otimes 1, \check{X}_1^\sigma \otimes 1, ..., \check{X}_n^\sigma \otimes 1, \check{X}_n^\sigma \otimes \mathrm{diag}_2(x_{n+1})] \\ &\quad -[1 \otimes 1, \check{X}_1^\sigma \otimes 1, ..., \check{X}_{n-1}^\sigma \otimes \mathrm{diag}_2(x_{n+1}), \check{X}_n^\sigma \otimes \mathrm{diag}_2(x_{n+1})] \\ &\quad +... + (-1)^n \, [1 \otimes 1, 1 \otimes \mathrm{diag}_2(x_{n+1}), .., \check{X}_n^\sigma \otimes \mathrm{diag}_2(x_{n+1})]\big) \\ &= \sum_{\gamma \in \Sigma_{n+1}} \varepsilon(\gamma)[1, X_{\gamma(1)}, X_{\gamma(1)}X_{\gamma(2)}, ..., X_{\gamma(1)}X_{\gamma(2)}...X_{\gamma(n+1)}]. \end{aligned}$$

On obtient la formule du lemme en composant par θ_*. □

Démonstration du Théorème 1.5.1 : On identifie $a_1, ..., a_n$ à des matrices de $GL_1(A)$. Le lemme 1.5.2 implique que

$$ch_n(\{a_1, ..., a_n\}) = \mathrm{tr}\varphi\Upsilon_n\Big(\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma)[1, A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}, ..., A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}...A_{\sigma(n)}]\Big)$$

où les matrices $A_{\sigma(i)}$ sont définies comme dans le lemme 1.5.2. Toutes ces matrices sont diagonales, donc on peut raisonner comme dans la preuve du Théorème 1.4.3 pour montrer que, pour $\sigma \in \Sigma_n$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\varphi\Upsilon_n([1, A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}, ..., A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}...A_{\sigma(n)}]) = \\ &\qquad\qquad \varphi\Upsilon_n([1, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(n)}]). \end{aligned}$$

(On peut aussi utiliser le corollaire 1.6.5). Le Théorème est alors une conséquence du Théorème 1.3.6. □

1.5.2. Symboles de Loday. — On veut ici calculer le caractère de Chern des symboles de Loday $<< b_1, ..., b_n >>$ (définis dans [**Lo3**]) pour $n > 2$.

Si $b_1, ..., b_n$ sont des éléments de A tels que $b_1 b_2 = b_2 b_3 = ... = b_n b_1 = 0$, notons $R_i,\ i = 1...n$ les matrices élémentaires suivantes

$$R_i = e_{i,i+1}(b_i), \text{ si } 1 \leq i < n \text{ et } R_n = e_{n,1}(b_n).$$

Les matrices R_i commutent deux à deux ce qui permet de définir *le symbole de Loday*

$$<< b_1, ..., b_n >>= \theta_* \{x_1, ..., x_n\}$$

où θ est le morphisme associé à $R_1, ..., R_n$ comme dans le paragraphe 1.5.1.

Théorème 1.5.3. — *Soient $b_1, ..., b_n$, $n \geq 3$, des éléments d'un anneau A tels que $b_1 b_2 = b_2 b_3 = ... = b_n b_1 = 0$. Alors, dans $\mathcal{B}C_n^-(A)$, le caractère de Chern du symbole de Loday $<< b_1, ..., b_n >>$ est donné par le cycle*

$$\begin{aligned} ch_n(<< b_1, ..., b_n >>) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(n-1)(j-1)} (1, b_j, ..., b_{j-1}) u^0 \\ &= B((b_1, ..., b_n)) u^0. \end{aligned}$$

Démonstration: Rappelons que, pour $i = 1...n-1$, on a $R_i = e_{i,i+1}(b_i)$ et $R_n = e_{n,1}(b_n)$. Pour tout $i \geq 0$, on doit calculer

$$ch_n^i = \mathrm{tr}\varphi\Upsilon_n(H(<< b_1, ..., b_n >>)).$$

Notons $\times : H_*(GL(A)) \otimes H_*(GL(A)) \to H_*(GL(A))$ le "shuffle" produit (*cf.* paragraphe 1.6). Comme $<< b_1, ..., b_n >>= \{R_1, ..., R_n\} = \{R_1\} * ... * \{R_n\}$, d'après le Corollaire 1.6.5, il suffit de calculer

$$\mathrm{tr}\varphi\Upsilon_n \left(H(\{R_1\}) \times H(\{R_2\}) \times ... \times H(\{R_n\})\right).$$

En notant $\pi_j^\sigma = R_{\sigma(1)} R_{\sigma(2)} ... R_{\sigma(j)}$ $(j = 1...n)$, on a

$$H(\{R_1\}) \times H(\{R_2\}) \times ... \times H(\{R_n\}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) [1, \pi_1^\sigma, \pi_2^\sigma, ..., \pi_n^\sigma].$$

On obtient cette formule à partir de celle du Lemme 1.5.2 en remplaçant les matrices intervenants par leur premier bloc diagonal de taille n (*cf.* Corollaire 1.6.5).

Intéressons nous d'abord au cas de $i = 0$; on a :

$$ch_n^0(<< b_1, ..., b_n >>) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \left(\mathrm{tr}((\ (\pi_n^\sigma)^{-1}, R_1^\sigma, R_2^\sigma, ..., R_n^\sigma)) \right).$$

On travaille dans $\overline{C}_n(A)$. Rappelons qu'un élément de A est dit trivial s'il appartient à k. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$ et tout $i = (i_0, ..., i_n) \in \{1, ..., n\}^{n+1}$, on doit calculer

$$\mu_i(\sigma) = (((\pi_n^\sigma)^{-1})_{i_0,i_1}, (R_1^\sigma)_{i_1,i_2}, (R_2^\sigma)_{i_2,i_3}, ..., (R_n^\sigma)_{i_n,i_0}).$$

Or, $(R_1^\sigma)_{i_1,i_2}$ est trivial sauf si $i_1 = \sigma(1)$ et $i_2 = \sigma(1) + 1$. Les tenseurs $\mu_i(\sigma)$ non nuls dans $\overline{C}_n(A)$ vérifient donc $i_1 = \sigma(1)$ et $i_2 = \sigma(1) + 1$. Plaçons nous dans ce cas là. Le coefficient $(R_2^\sigma)_{\sigma(1)+1,i_3}$ est trivial à moins que $\sigma(2) = \sigma(1) + 1$ (modulo n) et $i_3 = \sigma(2) + 1 = \sigma(1) + 2$ (modulo n). En poursuivant le raisonnement on obtient, pour $0 \leq i \leq n$, que $\mu_i(\sigma)$ est nul dans $\overline{C}_n(A)$ sauf si, pour tout $j = 1...n$, $\sigma(i) = \sigma(1) + i - 1$ modulo n (c'est à dire σ est une permutation circulaire) et que $i_j = \sigma(j)$. On obtient alors (en sommant sur toutes les permutations circulaires)

$$ch_n^0(<< b_1, ..., b_n >>) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(n-1)(j-1)} (1, b_j, ..., b_{j-1}).$$

Passons au calcul de ch_n^i, $i \geq 1$. D'après le Théorème 1.3.6, pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on a l'égalité suivante dans $\overline{C}_{n+2i}(A)$

$$\Upsilon_n^i[1, \pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma] = \Gamma_n^i[1, \pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma] + s_{(1)}\Gamma_{n-1}^{i-1}[\pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma] + \sum_{k=1}^{i-1} \nabla_n^{k,i}[1, \pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma].$$

On note $\overline{\Gamma}_n^i(\sigma) = \varphi(\Gamma_n^i[1, \pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma])$, $\check{\Gamma}_n^i(\sigma) = \varphi(s_{(1)}\Gamma_{n-1}^{i-1}[\pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma])$ et $\overline{\nabla}_n^{k,i}(\sigma) = \varphi(\nabla_n^{k,i}[1, \pi_1^\sigma, ..., \pi_n^\sigma])$ de sorte que

$$ch_n^i(<< b_1, ..., b_n >>) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \left(\mathrm{tr} \left(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma) + \check{\Gamma}_n^i(\sigma) \sum_{k=1^i-1} \overline{\nabla}_n^{k,i}(\sigma) \right) \right).$$

On montre que, $\sum_{i\geq 1} \left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma)) \right) u^i$, $\sum_{i\geq 1} \left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\check{\Gamma}_n^i(\sigma)) \right) u^i$ ainsi que $\sum_{i\geq 1} \left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\sum_{k=1}^{i-1} \overline{\nabla}_n^{k,i}(\sigma)) \right) u^i$ sont tous trois des bords de $\overline{\mathcal{B}C}_n^-(A)$. Les preuves de ces trois cas sont complétement analogues ; on donne ci-dessous la preuve pour $\sum_{i\geq 1} \left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma)) \right) u^i$. Pour $i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_n^i(\sigma) \quad = \quad \widetilde{N} \sum_{\alpha_1+...+\alpha_n=i} & ((\pi_n^\sigma)^{-1}, R_{\sigma(1)}, ((\widetilde{\pi_1^\sigma})^{-1}, \pi_1^\sigma)^{\alpha_1}, R_{\sigma(2)}, ((\widetilde{\pi_2^\sigma})^{-1}, \pi_2^\sigma)^{\alpha_2}, \ldots \\ & \ldots, R_{\sigma(n)}, ((\widetilde{\pi_n^\sigma})^{-1}, \pi_n^\sigma)^{\alpha_n}). \end{aligned}$$

Pour $\sigma \in \Sigma_n$, $\omega = (\omega_0, ..., \omega_{n+2i}) \in \{1, ..., n\}^{n+2i+1}$ et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = i$, On doit calculer

$$\mu_{\omega,\alpha}^{\ell,\sigma} = t^\ell((\pi_n^\sigma)_{\omega_0,\omega_1}^{-1}, (R_{\sigma(1)})_{\omega_1,\omega_2}, ..., (\pi_n^\sigma)_{\omega_{n+2i},\omega_0})$$

où ℓ est un indice tel que la permutation cyclique t^ℓ place en position 0 un coefficient venant de $(\widetilde{\pi_j^\sigma})^{-1}$ $(j = 1, ..., n)$.

Mais $(R_{\sigma(1)})_{\omega_1,\omega_2}$ est trivial (*i.e.* dans k) sauf si $\omega_1 = \sigma(1)$ et $\omega_2 = \sigma(1)+1$. Donc $(\ell \neq n+2i)$ $\mu^{\ell,\sigma}_{\omega,\alpha} = 0$ dans $\overline{C}_{n+2i}(A)$ si $\omega_1 \neq \sigma(1)$ ou $\omega_2 \neq \sigma(1)+1$. On suppose désormais cette condition vérifiée.

Supposons de plus que $\alpha_1 > 0$. Rappelons que $\pi_1^\sigma = e_{\sigma(1),\sigma(1)+1}(b_{\sigma(1)})$. Comme $((\pi_1^\sigma)^{-1})_{\sigma(1)+1,\omega_3} = 1$ si $\omega_3 = \sigma(1)+1$ et 0 sinon, si le tenseur $\mu^{\ell,\sigma}_{\omega,\alpha}$ est non nul, alors $\omega_3 = \sigma(1)+1$ et $\ell = n+2i-1$. Mais alors $(\pi_1^\sigma)_{\sigma(1)+1,\omega_4}$ est trivial et donc $\mu^{\ell,\sigma}_{\omega,\alpha}$ est nul dès que $\alpha_1 > 0$. On est donc ramené à considérer les tenseurs $\mu^{\ell,\sigma}_{\omega,\alpha}$ pour lesquels $\alpha_1 > 0$, $\omega_1 = \sigma(1)$ et $\omega_2 = \sigma(1)+1$. Ils sont de la forme

$$\mu^{\ell,\sigma}_{\omega,\alpha} = t^\ell((\pi_n^\sigma)^{-1}_{\omega_0,\sigma(1)}, b_{\sigma(1)}, (R_{\sigma(2)})_{\sigma(1)+1,\omega_3}, ..., (\pi_n^\sigma)_{\omega_{n+2i},\omega_0}).$$

Pour que $(R_{\sigma(2)})_{\sigma(1)+1,\omega_3}$ soit non trivial, il faut que $\sigma(2) = \sigma(1)+1$ (modulo n) et $\omega_3 = \sigma(2)+1 = \sigma(1)+2$ (modulo n). De même que précédemment, on peut montrer que $\alpha_2 > 0$ implique $\mu^{\ell,\sigma}_{\omega,\alpha} = 0$. En itérant ce raisonnement on se ramène à considérer les tenseurs $\mu^{\ell,\sigma}_{\omega,\alpha}$ pour lesquels $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$, et pour $j = 1...n$, $\omega_j = \sigma(j) = \sigma(1)+j-1$ (modulo n). En particulier σ est une permutation circulaire. On doit donc calculer

$$\mu^{2\ell,\sigma}_{\omega,\alpha} = t^{2\ell}(-b_{\sigma(n)}, b_{\sigma(1)}, ..., b_{\sigma(n)}, (\pi_n^\sigma)^{-1}_{\sigma(1),\omega_{n+1}}, (\pi_n^\sigma)_{\omega_{n+1},\omega_{n+2}}, ..., , (\pi_n^\sigma)_{\omega_{n+2i},\sigma(n)})$$

avec $\ell = 1 \ldots i$. Les coefficients inconnus sont de la forme $\pm b_{\sigma(j)}$, 1, ou 0. Donc, si $\mu^{2\ell,\sigma}_{\omega,\alpha} \neq 0$, alors, il y a au plus un 1 qui apparaît (et 2ℓ est alors fixé), les autres coefficients sont de la forme $\pm b_{\sigma(j)}$ et de plus, si $(\pi_n^\sigma)^{\pm 1}_{r_k,r_{k+1}} = \pm b_{\sigma(j)}$, alors $(\pi_n^\sigma)^{\pm 1}_{r_{k+1},r_{k+2}} = \pm b_{\sigma(j+1)}$ ou 1. Par conséquent, à un coefficient près, les tenseurs $\mu^i_{\kappa,\alpha}(\sigma)$ ne donnent que deux types de chaînes non nulles :

- **(i) :** les chaînes $C_j^s = (1, (b_j, ..., b_{j-1})^{1+s}) \in C_{n+ns}(A)$
- **(ii) :** les chaînes $\check{C}_j^s = (b_j, ..., b_{j-1})^{1+s} \in C_{n+ns-1}(A)$.

Supposons que $n = 2m$. Alors, on a $\Upsilon_n^i : C_n(GL(A)) \to C_{n+2i}(A)$, mais $ns - 1 = 2ms - 1$ est impair (donc $\neq 2i$). En particulier, seules les chaînes C_j^s sont possibles pour $i = sm$. De plus σ étant fixé, il y a i choix possibles pour s. En sommant sur les n permutations circulaires possibles on trouve chaque C_j^s précédé du coefficient $(-1)^{i+j-1}i$.

Si maintenant $n = 2m+1$, on obtient des chaînes C_j^s pour s pair et $i = sn/2$. En sommant encore sur les permutations possibles, on trouve chaque chaîne C_j^s (s pair) précédé du coefficient $(-1)^i i$.

Mais on obtient également des $\check{C}_j^k$ avec $k = 2s+1$ impair (et $i = 1/2(nk-1)$). Après avoir sommé sur les n permutations circulaires, on obtient chaque $\check{C}_j^s$ précédé du coefficient $(-1)^{i+1}i$.

En résumé on a obtenu, en notant $i(n,s) = 1/2(n(2s+1)-1)$

– Si $n = 2m$, $\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma)) = 0$ si $i \neq sm$, et, pour $s \geq 0$,

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^{sm}(\sigma)) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(sm)!\,(1,(b_j,...,b_{j-1})^{1+s}).$$

– Si $n = 2m+1$, $\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma)) = 0$ si $i \neq sn, 1/2(n(2s+1)-1)$, et

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^{sn}(\sigma)) = \sum_{j=1}^{n}(sn)!\,(1,(b_j,...,b_{j-1})^{1+2s}),$$

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^{i(n,s)}(\sigma)) = -\sum_{j=1}^{n} i(n,s)!\,(b_j,...,b_{j-1})^{2+2s}.$$

Pour terminer la démonstration, on doit maintenant montrer que

$$\sum_{i\geq 1}\left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma))\right)u^i$$

est un bord de $\mathcal{B}C_*^-(A)$. Comme $n \geq 3$, on a $sm \geq s+1$ si $n = 2m$ (resp. $sn \geq 2s+1$ si $n = 2m+1$, $s > 0$). Donc $s+1$ divise $i!$ avec $i = ms$ (resp. divise $i!$ avec $i = ns$). Soit alors, pour $n = 2m$,

$$z << b_1,...,b_n >> = \sum_{s>0} \frac{(sm)!}{s+1}(b_1,...,b_n)^{s+1}u^{sm-1}.$$

On a $b(z << b_1,...,b_n >>) = 0$ (car $b_i b_{i+1} = 0$) et

$$B(z << b_1,...,b_n >>) = \sum_{i>0}\left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma))\right)u^i,$$

c'est à dire que $\sum_{i>0}\left(\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\varepsilon(\sigma)\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}_n^i(\sigma))\right)u^i$ est un bord. Si $n = 2m+1$ on pose

$$\begin{aligned} z << b_1,...,b_n >> \;&=\; \sum_{s>0}\frac{(sn)!}{2s+1}(b_1,...,b_n)^{2s+1}u^{sn-1} \\ &\quad + \sum_{s\geq 0}\frac{i(n,s)!}{2}(1,(b_1,...,b_n)^{2l+2})u^{i(n,s)+1}. \end{aligned}$$

On obtient encore

$$(b+B)(z << b_1, ..., b_n >>) = \sum_{i>0} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) \mathrm{tr}(\overline{\Gamma}^i_n(\sigma)) \right) u^i.$$

□

Remarque : Une formule pour le caractère de Chern du symbole de Loday de dimension 2 $<< b_1, b_2 >>$ est donnée dans le corollaire 1.4.5 à partir de celle pour les symboles de Dennis et Stein. Le calcul du théorème 1.5.3 s'applique sans changement pour $ch_2(<< b_1, b_2 >>)$, à part le dernier paragraphe. On retrouve alors exactement la même formule que celle du Corollaire 1.4.5.

Lorsque A est une algèbre commutative contenant $\mathbb{Q}$, il existe des décompositions (appelées *décompositions de Hodge*) de $K_*(A)$ et $HC_*^-(A)$ obtenues à partir d'opérations appelées *λ-opérations* (*cf.* [**Kr**] [**Ca**],[**LP**], [**Lo5**]). Les λ-opérations sur la K-théorie d'un anneau sont induites par le produit extérieur de matrices. Pour $M \in GL_m(A)$ on note $\Lambda^j_{\times,m}(M)$ la matrice carrée inversible sur $\Lambda^j A^m$ définie par

$$\Lambda^j_{\times,m}(M)(v_1 \wedge .... \wedge v_j) = M(v_1) \wedge .... \wedge M(v_j).$$

D'aprés [**Ca**], sur la partie primitive de l'homologie du groupe $GL(A)$, les λ-opérations sont données, pour tout $M_0, ..., M_n \in GL_m(A)$, $n \geq 1$, $k \geq 1$, par

$$\lambda^k_n[M_0, ..., M_n] = \bigoplus_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{m-1+i}{i} (\Lambda^{k-i}_{\times,m})_*[M_0, ..., M_n]$$

où on a noté $\bigoplus$ l'application induite par la somme directe de matrices (*cf.* 1.6). Les λ-opérations sur l'homologie cyclique proviennent des opérations extérieures de matrices sur l'algèbre de Lie associée *via* le morphisme de Loday-Quillen ([**LP**]). On considère ici les λ-opérations qui sont appelées "vraies" λ opérations dans [**Lo5**]. Explicitement ces opérations sont données par les applications $\mathcal{B}C_*^-(A) \xrightarrow{\overline{\lambda}^k_*} \mathcal{B}C_*^-(A)$ définies par $\overline{\lambda}^k_n = \sum_{i \geq 0} k^{-i} \widetilde{\lambda}^k_{n+2i} u^i$ où, pour tout $x_0, ..., x_m \in A$, on a

$$\widetilde{\lambda}^k_m(x_0, ..., x_m) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{m+i}{i} \sum_{\sigma \in S_{m,k-i}} (-1)^{k-1} \varepsilon(\sigma)(x_0, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)})$$

où $S_{m,k}$ est l'ensemble des permutations de Σ_m ayant $k-1$ descentes.

Corollaire 1.5.4. — *Si A est une algèbre commutative contenant $\mathbb{Q}$, alors, pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\widetilde{\lambda}^k_n(ch_n << b_1, ..., b_n >>) = k\ ch_n(\lambda^k_n(<< b_1, ..., b_n >>)).$$

Ce corollaire a été obtenu en K-théorie et homologie cyclique multi-relative par Geller et Weibel dans [**GW**].

Démonstration: D'après le Théorème 1.5.3 et [**LP**], [**Lo5**] on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_n^k(ch_n(<< b_1, ..., b_n >>)) &= \widetilde{\lambda}_n^k(B(b_1, ..., b_n))u^0 \\ &= kB(\widetilde{\lambda}_{n-1}^k(b_1, ..., b_n))u^0 \\ &= k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n-1+i}{i}\sum_{\sigma\in S'_{n,k}}(-1)^{k-1}\varepsilon(\sigma)(1, b_{\sigma(j)}, ..., b_{\sigma(j-1)})u^0\end{aligned}$$

où $S'_{n,k}$ est l'ensemble des permutations de Σ_n avec $k-1$ descentes et telles que $\sigma(1) = 1$. En notant toujours H le morphisme d'Hurewicz et $\oplus$ l'application induite par la somme directe des matrices en homologie, d'après [**Ca**], on a

$$H(\lambda_n^k << b_1, ..., b_n >>) = \bigoplus_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n-1+i}{i}(\Lambda_{\times,n}^{k-i})_* H(<< b_1, ..., b_n >>).$$

En utilisant les arguments des preuves du Lemme 5.3 de [**LP**] et du théorème 1.5.3, on obtient

$$\begin{aligned}ch_n(\lambda_n^k << b_1, ..., b_n >>) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n-1+i}{i}\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\varepsilon(\sigma)tr(\varphi\Upsilon_n[1, E_{\sigma(1)}, \dots \\ &\qquad \dots, R_{\sigma(1)}...R_{\sigma(n)}]) \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+k-1}\binom{n-1+i}{i}\sum_{\sigma\in U_{n,k-i}}\varepsilon(\sigma)(1, b_{\sigma(1)}, \dots \\ &\qquad \dots, b_{\sigma(n)})u^0\end{aligned}$$

où $U_{n,k-i}$ est l'ensemble des conjugués de τ (la permutation circulaire standard) ayant k descentes cycliques. Or, on a une bijection naturelle $U_{n,k-i} \cong S'_{n,k}$ ce qui donne la conclusion. □

On obtient comme corollaire du Théorème 1.5.3 et du Corollaire 1.5.4 le résultat suivant de Cathelineau ([**Ca**], Théorème 1) et Geller et Weibel ([**GW**], Théorème 2.3)

Corollaire 1.5.5. — *Soit A une algèbre commutative contenant $\mathbb{Q}$ et I un idéal nilpotent de A tel que, pour tout $k \geq 1$, le morphisme d'algèbres $I^k \to I^k/I^{k+1}$ est scindé. Alors le caractère de Chern $ch_* : K_*(A, I) \to HC_*^-(A, I)$ vérifie, pour tout $n \geq 1$, $\widetilde{\lambda}_n^k\, ch_n = k\; ch_n\, \lambda_n^k$.*

Soit $A = \oplus_{i\geq 0} A_i$ une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée. Alors le caractère de Chern ch_* : $K_*(A)/K_*(A_0) \to HC_*^-(A)/HC_*^-(A_0)$ induit sur les augmentations vérifie, pour tout $n \geq 1$, $\widetilde{\lambda}_n^k\, ch_n = k\, ch_n\, \lambda_n^k$.

Démonstration: On doit montrer que l'isomorphisme de Goodwillie ([**Go**], Théorème II.3.4) est un isomorphisme de λ-anneaux (*i.e.* anneau muni de λ-opérations). Les arguments de [**Go**], paragraphe III (voir aussi [**Ca**], Remarque 2.5) permettent de se ramener au cas où I est scindé. Par hypothèse on se trouve alors dans la situation $I^k \to I^k/I^{k+1}$ est scindé pour tout $k \geq 0$ (avec la convention $I^0 = A$) et la première assertion du corollaire se ramène alors à la seconde (cf.[**Go**] paragraphe 4.1). Ces arguments sont utilisables car l'homologie cyclique relative des anneaux simpliciaux est déterminée point par point. On se ramène alors au cas d'un idéal scindé I de carré nul grâce aux arguments de Kantorovitz ([**Kan**]).

D'après les calculs du paragraphe IV.2 de [**Go**], l'image de $B : HC_{n-1}(A,I) \xrightarrow{\cong} HC_n^-(A,I)$ est engendrée par des cycles

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{nj}(1, x_j, ..., x_{j-1})$$

où $x_k \in I$. En particulier $x_k x_{k+1} = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et donc

$$x = ch_n(<< x_1, ..., x_k >>)$$

d'après le Théorème 1.5.3. Comme $ch_n : K_n(A,I) \to HC_n^-(A,I)$ est un isomorphisme, le corollaire découle immédiatement du Corollaire 1.5.4. $\square$

Exemple : D'après [**GW**] on sait que, si $a_1, ..., a_n \in A$ et $a_1a_2 = ... = a_na_1 = 0$, alors le symbole généralisé de Dennis et Stein $< a_1, ..., a_n >$ (*cf.* [**Lo3**]) est égal à $\mu_n^{(n)}(-(n-1)! << a_1, ..., a_n >>)$ où $\mu_n^{(n)} : K_n(A) \to K_n^{(n)}(A)$ est la projection sur le dernier facteur de la décomposition de Hodge de $K_n(A)$. En particulier,

$$\begin{aligned} ch_n(< a_1, ..., a_n >) &= ch_n \mu_n^{(n)}(-(n-1)! << a_1, ..., a_n >>) \\ &= \sum_{i\geq 0} e_{n+i}^{(n+i)} ch_n^i(-(n-1)! << a_1, ..., a_n >>) u^i \end{aligned}$$

où $e_n^{(n)}$ désigne le $n^{\text{ième}}$ idempotent eulérien. Ainsi, pour $n > 1$, on a

$$ch_n(< a_1, ..., a_n >) = -\sum_{\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)(1, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) u^0.$$

On trouvera dans [**GW**] une étude très détaillée des symboles de Loday et de leurs décompositions de Hodge. Par exemple, Geller et Weibel prouvent en utilisant le corollaire précédent, que

$$<< x, x, y, y, z >> - << y, y, x, x, z >>$$

est un élément non trivial de $K_5^{(2)}(\mathbb{Q}[x,y,z]/(x,y,z)^2)$.

1.5.3. Eléments cyclotomiques. — On va travailler dans cette partie en K-théorie à coefficients (*cf.* [**Br**]) et on va donner une formule pour le caractère de Chern des éléments cyclotomiques définis par Soulé dans [**So**].

Commençons par quelques rappels sur la K-théorie, l'homologie cyclique à coefficient et le caractère de Chern qui les relie.

Soit $M_k^n = S^{n-1} \cup_f D^n$ l'espace de Moore où D^n est une cellule de dimension n attachée à S^{n-1} suivant une application f de degré k. Pour $n > 1$ et tout espace pointé X, on note $\pi_n(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = [M_k^n, X]$ l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues de M_k^n à X et on définit $K_n(A, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ comme le groupe $K_n(A, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) = \pi_n(BGL(A)^+, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Les morphismes d'Hurewicz se définissent également pour l'homotopie à coefficients ; on dispose ainsi d'applications naturelles $K_n(A, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \to H_n(A, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Le produit usuel s'étend (si q impair) pour donner deux produits

$$K_n(A) \times K_m(A, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{*} K_{m+n}(A, \mathbb{Z}/q) \quad \text{et}$$

$$K_i(A, \mathbb{Z}/q) \times K_j(A, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{\#} K_{i+j}(A, \mathbb{Z}/q).$$

Si (C_*, d) est un complexe et f est un endomorphisme du complexe C_*, le cône de f est le complexe $c(f) := (C_* \oplus C_{*-1}, \delta)$ où $\delta(x,y) = d(x) + f(y) \oplus -d(y)$ pour tout $x, y \in C_*$. Si $(\mathcal{C}_*, b)$ est un k-module cyclique et n un entier naturel, On note $n_\times : \mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_*$ la multiplication par n. Suivant Karoubi et Lambre ([**KL**]), on appelle *homologie à coefficients dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'homologie $H_*(\mathcal{C}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ du cône $\mathcal{C}(n_\times)$. *L'homologie cyclique négative à coefficients dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'homologie du cône $\mathcal{BC}_*^-(n_\times)$.

Remarque : Pour un groupe G, on a un quasi-isomorphisme de complexe $\psi : C_*(G)(n_\times) \to C_*(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini, pour $x \in C_m(G),\ y \in C_{m-1}(G)$, par

$$\psi(x \oplus y) = \overline{x}$$

où $\overline{x}$ est la réduction des coefficients de x modulo n.

En effet, si $x = \sum \lambda_i [g_0^i, ..., g_m^i]$ est une chaîne de $C_m(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, notons $\check{x}$ la même somme où les scalaires λ_i sont cette fois-ci considérés comme entiers. Evidemment deux choix de $\check{x}$ diffèrent par une chaîne ny, $y \in C_m(G)$. Si x est un cycle, alors $d(\check{x})$ est un multiple de n. Soit alors $\rho(x) = \check{x} \oplus -d(\check{x})/n$. Notons que deux choix de $\check{x}$ changent $\rho(x)$ par

$$ny \oplus -d(y) = \delta(0 \oplus y)$$

i.e. un bord du cône. De plus $\rho(d(x)) = \delta(x \oplus 0)$, donc $\rho : H_*(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to H_*(c(n_\times))$ est bien définie et $\psi \circ \rho = \mathrm{id}$. On notera $C_*(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ le complexe $C_*(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Pour $m \geq 2$, on a un morphisme d'Hurewicz ([**Br**], [**Ne**])

$$K_m(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{H} H_m(GL(A), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

qui à un élément de $K_m(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ associe un cycle de $C_m(G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De plus, la mutiplication $n_\times$ commute avec Υ_*, donc

$$\Upsilon_* \oplus \Upsilon_{*-1} : C_*(G)(n_\times) \to \mathcal{B}C_*^-(G)(n_\times)$$

est un morphisme de complexes qui induit l'identité sur la première colonne de chaque facteur. Les morphisme φ et tr commutent également avec $n_\times$. On peut donc définir le caractère de Chern à coefficients de la manière suivante.

Définition 1.5.6. — *Pour $m \geq 2$, le caractère de Chern à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le morphisme de groupes $ch : K_m(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to HC_m^-(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ défini par la composée des morphismes de groupes suivants*

$$K_m(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho \circ H} H_m(GL(A), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Upsilon_m \oplus \Upsilon_{m-1}} HC_m^-(GL(A), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

et

$$HC_m^-(GL(A), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi \oplus \varphi} HC_m^-(\mathbb{Z}[GL(A)], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{tr} \oplus \mathrm{tr}} HC_m^-(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Une démonstration analogue à celle de [**We1**], Proposition 4.3 assure que la définition précédente coïncide avec celle de Karoubi et Lambre [**KL**].

Par la suite, p désignera un nombre premier impair et on identifiera les éléments inversibles d'un anneau A avec des matrices inversibles $(1,1)$. On notera $\mu_q(A)$ les racines q-ièmes de l'unité dans A. On a $\pi_2(BA^*, \mathbb{Z}/q) \cong \mu_q(A)$. Comme $\pi_2(BA^*, \mathbb{Z}/q) \subset K_2(A, \mathbb{Z}/q)$, il existe un morphisme de groupes

$$\beta : \mu_q(A) \to K_2(A, \mathbb{Z}/q) = \pi_2(BGL(A)^+, \mathbb{Z}/q).$$

Soient F un corps de nombre, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers, A le localisé en p de $\mathcal{O}_F$. Pour $n \geq 1$ on note $F_n = F(\mu_{p^n})$ l'extension de F obtenue en rajoutant les racines p^n-ième de l'unité, A_n la clôture intégrale de A dans F_n et N_n la norme associée à l'extension F_n de F.

Soient $w \in \mu_q(A)$ et v un élément inversible de A. L'élément

$$c^k(v, w) = v * \beta(w)^{\#k}$$

est un élément de $K_{2k+1}(A, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

En particulier, si $F = \mathbb{Q}(\mu_{qp^m})$, où q est premier à p et $m \geq 0$, et $(w_n \in \mu_{qp^n}(A))_{n \geq sup(m,2)}$ est une famille de racines de l'unités telles que $w_n^p = w_{n-1}$ (pour $n \geq 3$), alors l'élément

$$c^i((w_n)) = (N_n((1 - w_n) * \beta(w_n^q)^{\# i-1}))_{n \geq sup(m,2)}$$

est dans $K_{2i-1}(A, \mathbb{Z}_p) = \varprojlim K_{2i-1}(A, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Soit J_k^q (k, $q \geq 1$) l'ensemble des $\bar{i} = (i_1, ..., i_k) \in \{1, ..., q\}^{\times k}$. Pour $1 \leq j \leq k$, on pose $r_j = i_1 + ... + i_j + j - 1$, $r_j' = r_j + 1$, $r_j'' = r_j + 2$ et enfin $r_0 = r_0' = 0$, $r_0'' = 1$. Pour $\bar{i} \in J_k^q$, on définit les chaînes suivantes dans $C_{2k+1}(G)$:

$$\begin{aligned} x_{\bar{i}}(v, w) &= (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} [1, w^{r_1}, w^{r_1'}, w^{r_2}, w^{r_2'}, ..., w^{r_j}, w^{r_j'}, vw^{r_j'}, vw^{r_{j+1}}, \ldots \\ &\qquad \ldots, vw^{r_k}, vw^{r_k'}] \in C_{2k+1}(G), \\ y_{\bar{i}}(v, w) &= (-1)^k k! \sum_{j=1}^{k} [1, w^{r_1}, w^{r_1'}, w^{r_2}, ..., w^{r_j}, vw^{r_j}, vw^{r_j'}, ..., vw^{r_k}, vw^{r_k'}] \in C_{2k+1}(G). \end{aligned}$$

Pour $\bar{i} \in J_{k-1}^q$ on définit les chaînes suivantes dans $C_{2k}(G)$:

$$\begin{aligned} z_{\bar{i}}(v, w) &= (-1)^{k-1} k! \sum_{j=0}^{k-1} ([1, w, w^{r_1'}, w^{r_1''}, w^{r_2'}, ..., w^{r_j'}, vw^{r_j'}, vw^{r_j''}, \ldots \\ &\qquad \ldots, vw^{r_{k-1}'}, vw^{r_{k-1}''}] \in C_{2k}(G), \\ t_{\bar{i}}(v, w) &= (-1)^{k-1} k! \sum_{j=0}^{k-1} [1, w, w^{r_1'}, w^{r_1''}, w^{r_2'}, w^{r_2''}, ..., w^{r_j''}, uw^{r_j''}, vw^{r_{j+1}'}, \ldots \\ &\qquad \ldots, vw^{r_k'}, uw^{r_k''}] \in C_{2k}(G). \end{aligned}$$

Théorème 1.5.7. — *Soit w une racine q-ième de l'unité. Pour $s \geq 0$, $k \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} ch_{2k+1}^s(c^k(v, w)) &= \sum_{\bar{i} \in J_k^q} \varphi \left(\Gamma_{2k+1}^s + s_{(1)} \Gamma_{2k}^s d_0 + \sum_{\ell=1}^{s-1} \nabla_{2k+1}^{\ell, s} \right) (x_{\bar{i}}(v, w) - y_{\bar{i}}(v, w)) \\ &\quad \oplus \sum_{\bar{i} \in J_{k-1}^q} \varphi \left(\Gamma_{2k}^s + s_{(1)} \Gamma_{2k-1}^s d_0 + \sum_{\ell=1}^{i-1} \nabla_{2k}^{\ell, s} \right) (z_{\bar{i}}(v, w) - t_{\bar{i}}(v, w)). \end{aligned}$$

Les applications ∇ et Γ ont été définies au paragraphe 3. Avant de démontrer le Théorème 1.5.7, donnons l'image par le morphisme d'Hurewicz du morphisme β.

Lemme 1.5.8. — *Le morphisme de groupes* $H\circ\beta : \mu_q(A) \to H_2(GL(A), \mathbb{Z}/q)$ *est déterminé, pour tout* $w \in \mu_q(A)$, *par le cycle*

$$H \circ \beta(w) = -\sum_{i=1}^{q}[1, w^i, w^{i+1}] \oplus [1, w].$$

Démonstration: Le groupe $H_1(A^*)$ est engendré par les classes des éléments $[1, a]$ où $a \in A^*$ et le noyau de la mutiplication par q est donc engendré par les $[1, w]$. Or

$$d(-\sum_{i=1}^{q}[1, w^i, w^{i+1}] \oplus [1, w]) = 0.$$

Donc $H\circ\beta(w)$ est un cycle de $H_2(GL(A), \mathbb{Z}/q)$ dont l'image dans $H_2(GL_1(A))$ est la classe de $[1, w]$. □

Démonstration du Théorème 1.5.7 :

L'image par le morphisme d'Hurewicz de $\# : K_i(A, \mathbb{Z}/q) \otimes K_j(A, \mathbb{Z}/q) \to K_{i+j}(A, \mathbb{Z}/q)$ est (avec les notations du paragraphe 1.6) la composée de l'application (où $G = GL(A)$)

$$K_i(A, \mathbb{Z}/q) \otimes K_j(A, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{\phi\otimes\phi} H_i(G, \mathbb{Z}/q) \otimes H_j(G, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{sh} H_{i+j}(G \otimes G, \mathbb{Z}/q)$$

par l'application $H_{i+j}(G \otimes G, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{h} H_{i+j}(GL(A), \mathbb{Z}/q)$. Le "shuffle" est ici calculé en utilisant le complexe $C_n(GL(A), \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. En calculant $\rho \circ sh \circ \psi$ on obtient que

$$sh(x \oplus y, r \oplus s) = sh(x, r) \oplus (sh(y, r) + (-1)^{|x|} sh(x, s))$$

dans $C_*(GL(A))(q_\times)$. De même, $sh(u, x \oplus y) = sh(u, x) \oplus sh(u, y)$. De plus le produit tensoriel de matrice de taille $(1, 1)$ est simplement leur produit. D'après le Corollaire 1.6.5, on a

$$ch_{2k+1}(c^k(v, w)) = (\mathrm{tr} \oplus \mathrm{tr})(\varphi \oplus \varphi)(\Upsilon_{2k+1} \oplus \Upsilon_{2k})\mu \left(H(v) * (H(\beta(w)))^{\#k}\right)$$

où $\mu : GL_1(A)\otimes GL_1(A) \to GL_1(A)$ est le produit de matrices $(1, 1)$. Calculons, pour commencer, $\mu(H(\beta(w)))^{\#k} = x_k \oplus z_k$. D'après le Lemme 1.5.8, on a

$$\begin{aligned}
x_2 &= \sum_{i_1=1, i_2=1}^{q} sh([1, w^{i_1}, w^{i_1+1}], [1, w^{i_2}, w^{i_2+1}]) \\
&= \sum_{i_1=1, i_2=1}^{q} ([1, w^{i_1}, w^{i_1+1}, w^{i_1+i_2+1}, w^{i_1+i_2+2}] + [1, w^{i_2}, w^{i_2+1}, w^{i_2+i_1+1}, w^{i_2+i_1+2}] \\
&= 2 \sum_{i_1=1, i_2=1}^{q} [1, w^{i_1}, w^{i_1+1}, w^{i_1+i_2+1}, w^{i_1+i_2+2}].
\end{aligned}$$

On obtient de même $z_2 = -2\sum_{i_1=1}^{q}[1, w, w^{i_1+1}, w^{i_1+2}]$. En itérant on trouve

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{J_k}[1, w^{r_1}, w^{r'_1}, w^{r_2}, w^{r'_2}, ..., w^{r_k}, w^{r'_k}] \\ z_k &= \sum_{J_{k-1}}[1, w, w^{r'_1}, w^{r''_1}, w^{r'_2}, w^{r''_2}, ..., w^{r'_{k-1}}, w^{r''_{k-1}}]. \end{aligned}$$

En multipliant par $[1, v]$ on trouve

$$\mu\left(H(v) * (H(\beta(w)))^{\# k}\right) = \sum_{\overline{i}\in J_k^q}(x_{\overline{i}}(v,w) - y_{\overline{i}}(v,w)) \oplus \sum_{\overline{i}\in J_{k-1}^q}(z_{\overline{i}}(v,w) - t_{\overline{i}}(v,w)).$$

On conclut en utilisant le Théorème 1.3.6. □

Exemple : Prenons $k = 1$, $(w_n)_{n\geq m} \in \varprojlim \mu_{qp^n}$. Pour $n \geq 2$, on a $N_n(w_n^q) = w_n^{qp^{n-m}}$ et $N_n(1 - w_n) = 1 - w_n^{p^{n-m}} \in A^*$. Posons $\tau_n = w_n^{p^{n-m}}$. D'après le Théorème 1.5.7, pour $n \geq 2$, en notant $\check{P} : HC_n^-(A, \mathbb{Z}/p) \to HH_n(A, \mathbb{Z}/p)$ la projection sur la colonne 0 (sur les deux facteurs), on a

$$\begin{aligned} D_3(c^1(w_n)) &= \check{P}\left(N_n(\varphi \circ ch_3(c^1(1 - w_n, w_n^q)))\right) \\ &= p^{n-m}\sum_{i=1}^{p^m}\Big[((1-\tau_n)^{-1}\tau_n^{-(i+1)q}, \tau_n^{iq}, \tau_n^q, \tau_n) \\ &\quad -((1-\tau_n)^{-1}\tau_n^{-(i+1)q}, \tau_n^{iq}, \tau_n, \tau_n^q) + ((1-\tau_n)^{-1}\tau_n^{-(i+1)q}, \tau_n, \tau_n^{qi}, \tau_n^q)\Big] \\ &\quad \oplus((1-\tau_n)^{-1}\tau_n^{-q}, \tau_n, \tau_n^q) - ((1-\tau_n)^{-1}\tau_n^{-q}, \tau_n^q, \tau_n). \end{aligned}$$

En particulier, si $q = 1$, alors $D_3(c^1((w_n)))$ est dans l'image de l'application $HH_3(A) \to HH_3(A, \mathbb{Z}_p)$. Précisemment, pour $n \geq 2$, $D_3(c^1(w_n))$ est une somme de produits :

$$D_3(c^1(w_n)) = p^{n-m}\sum_{i=1}^{p^m} sh((1, 1-\tau_n), (1, \tau_n^q i, \tau_n^q)) \in HH_3(A).$$

1.5.4. Algèbres commutatives lisses. — Quand A est une k-algèbre commutative lisse, on sait (*cf.* [**LQ**]) que $HC_n^-(A) = HN_{dR}^n(A)$, où

$$HN_{dR}^n(A) = \mathrm{Ker}(d : \Omega_A^n \to \Omega_A^{n+1}) \times \prod_{i>0} H_{dR}^{n+2i}(A),$$

et que cet isomorphisme est induit par l'appplication $\pi_n : \overline{C}_n(A) \to \Omega^n_A$ défini, pour tout $a_0, a_1, ..., a_n \in A$, par

$$\pi_n(a_0, ..., a_n) = \frac{1}{n!} a_0 da_1 ... da_n.$$

On note encore $ch_n : K_n(A) \to HN^n_{dR}(A)$ la composée du caractère de Chern algébrique et du quasi-isomorphisme π_n.

Si $n \geq 2$, on note $\nu_n : H_n(GL(A)) \to HN^n_{dR}(A)$ la composée des applications suivantes

$$H_n(GL(A)) \xrightarrow{\Upsilon_n} HC^-_n(GL(A)) \xrightarrow{\varphi} HC^-_n(NGL(A)) \xrightarrow{\mathrm{tr}} HC^-_n(A) \xrightarrow{\pi_n} HN^n_{dR}(A)$$

de sorte que, *via* l'identification $HC^-_n(A) \cong HN^n_{dR}(A)$, on ait $ch_n = \nu_n \circ H$.

Pour $n \geq 2$, $1 \leq k \leq i$ on introduit l'ensemble suivant

$$\begin{aligned}\overline{K}^{k,i}_n \quad = \quad & \{\beta = ((\beta^0_0, ..., \beta^{\alpha_0}_0), ..., (\beta^0_n, ..., \beta^{\alpha_n}_n), \rho^0_0, (\rho^1_0, ...\rho^{\alpha_0}_0), ..., (\rho^0_n, ..., \rho^{\alpha_n}_n), j, \\ & \varepsilon^0_{\beta_0}, ..., \varepsilon^{\alpha_0}_{\beta_0}, ..., \varepsilon_{\beta^0_n}, ..., \varepsilon^{\alpha_n}_{\beta_n}, \varepsilon_{\rho^1_0}, ..., \varepsilon^{\alpha_0}_{\rho_0}, ..., \varepsilon_{\rho^1_n}, ..., \varepsilon^{\alpha_n}_{\rho_n}) \text{ (avec } \alpha_*, \beta^*_*, \rho^*_* \in \mathbb{N}, \\ & \varepsilon^*_* \in \{0,1\} \text{ et } 2 \leq j \leq n) \quad / \quad \alpha_1 = 0, \alpha_0 + ... + \alpha_n = i - k \\ & \text{ et } \sum 2\beta^*_* + 2\rho^*_* + \varepsilon^*_{\beta_*} + \varepsilon^*_{\rho_*} = n + 2i\}.\end{aligned}$$

L'ensemble des ε^*_* est ordonné de la manière suivante

$$\varepsilon^0_{\beta_0} < ... < \varepsilon^{\alpha_0}_{\beta_0} < \varepsilon^0_{\beta_1} < ... < \varepsilon^{\alpha_n}_{\rho_n} \text{ (\textit{i.e.} par ordre lexicographique).}$$

Pour $\beta \in \overline{K}^{k,i}_n$ on note $\mathrm{sg}(\beta) = (-1)^{(n+1)(n-j)+\sum \overline{\delta}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})}$ où la somme se fait sur l'ensemble ordonné des ε^*_* et $\overline{\delta}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = 0$ si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ et 1 sinon.

Pour $g, h \in GL(A)$, $2 \leq i \leq n$ et $\beta \in \overline{K}^{k,i}_n$ on note $P_\beta(g, h, i)$ le produit de matrice de $\mathcal{M}(\Omega^1_A)$ suivant

$$P_\beta(g,h,i) = (dgg^{-1})^{2\beta^0_i + \varepsilon^0_{\beta_i}} (dhh^{-1})^{2\rho^1_i + \varepsilon^1_{\rho_i}} (dgg^{-1})^{2\beta^1_i + \varepsilon^1_{\beta_i}} ... (dhh^{-1})^{2\rho^{\alpha_i}_i + \varepsilon^{\alpha_i}_{\rho_i}} (dgg^{-1})^{2\beta^{\alpha_i}_i + \varepsilon^{\alpha_i}_{\beta_i}}$$

Théorème 1.5.9. — *Le caractère de Chern $ch_1 : H_1(GL(A)) \to HN^1_{dR}(A)$ est donné, pour tout $g \in GL(A)$, par la formule suivante*

$$ch_1[1, g] \quad = \quad \sum_{i \geq 0} (-1)^i \frac{i!}{(1+2i)!} \mathrm{tr}\big((dgg^{-1})^{2i+1}\big) u^i.$$

Pour $g_1, ..., g_n \in GL(A)$, le morphisme de groupes $\nu_n = \sum_{i \geq 0} \nu^i_n u^i : H_n(GL(A) \to HN^n_{dR}(A)$ est donné par les formules suivantes ($i \geq 0$).

$$\begin{aligned}\nu^i_n[1, g_1, ..., g_n] \quad = \quad & \sum_{k=0}^{i} \sum_{\overline{K}^{k,i}_n} c^k_i(\beta) \mathrm{tr}\Big((dg_1 g_1^{-1})^{2\rho^0_0 + \varepsilon_{\rho^0_0}} P_\beta(g_2, g_1, 2) P_\beta(g_3, g_1, 3) ... \\ & ... P_\beta(g_{n-1}, g_1, n-1) P_\beta(g_n, g_1, n)\Big)\end{aligned}$$

où le coefficient $c^k_i(\beta)$ vaut $\frac{(i-k-1)!(k-1)!}{(n+2i)!}\mathrm{sg}(\beta)$.

Démonstration: Soit $\Omega^1(A)$ le A-bimodule des 1-formes différentielles non commutatives (c'est-à-dire le bimodule engendré par les éléments xdy, $x, y \in A$ où d est k-linéaire et vérifie $d(xy) = xdy + (dx)y$ pour tout $x, y \in A$) et

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes_A ... \otimes_A \Omega^1(A)$$

l'espace des n-formes différentielles. On note $\Omega^*_{\mathrm{ab}}(A)$ le quotient de $\Omega^*(A)$ par le sous-module engendré par les commutateurs. On sait (*cf.* [**Kar**]) que, pour tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme $\pi_n : \overline{C}_n(A) \cong \Omega^n(A)$ donné, pour $a_0, ..., a_n \in A$, par

$$\pi_n(a_0, ..., a_n) = \frac{1}{n!} a_0 da_1 ... da_n.$$

De plus, l'application B induit la différentielle d *via* cet isomorphisme et le bord b induit l'application nulle sur $\Omega^*_{\mathrm{ab}}(A)$.

Notons $HNDR^*(A)$ l'homologie du bicomplexe $\mathcal{B}N\Omega^*(A)$ suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0\downarrow & & 0\downarrow \\
 & & & & \cdots & \stackrel{d}{\leftarrow} & \Omega^3_{ab}(A) & \stackrel{d}{\leftarrow} & \Omega^2_{ab}(A) \\
 & & & & & & 0\downarrow & & 0\downarrow \\
\cdots & \stackrel{d}{\leftarrow} & \Omega^3_{ab}(A) & \stackrel{d}{\leftarrow} & & & \Omega^2_{ab}(A) & \stackrel{d}{\leftarrow} & \Omega^1_{ab}(A) \\
 & & 0\downarrow & & & & 0\downarrow & & 0\downarrow \\
\cdots & \stackrel{d}{\leftarrow} & \Omega^2_{ab}(A) & \stackrel{d}{\leftarrow} & & & \Omega^1_{ab}(A) & \stackrel{d}{\leftarrow} & \Omega^0_{ab}(A) \\
 & & 0\downarrow & & & & 0\downarrow & & \\
\text{Colonne} & & -2 & & & & -1 & & 0.
\end{array}$$

L'application π_* induit un morphisme de bicomplexes $\breve{\pi} : \mathcal{B}C^-_*(A) \to \mathcal{B}N\Omega^*(A)$. De plus, on a une application $\mathrm{tr} : \Omega^n_{\mathrm{ab}}(\mathcal{M}_r(A)) \to \Omega^n_{\mathrm{ab}}(A)$ (pour tout n) définie par

$$\mathrm{tr}(A_0 dA_1 ... dA_n) = \sum (A_0)_{k_0,k_1} d(A_1)_{k_1,k_2} ... d(A_n)_{k_n,k_0}$$

où la somme est étendue à tous les $n+1$-uplets $\{k_0, ..., k_n\}$ de $\{1, ..., r\}^{\times n+1}$. En effet, il est clair que $\mathrm{tr} \circ d = d \circ \mathrm{tr}$ et que la trace d'un commutateur est un commutateur. Comme A est commutative, on a une application évidente $\rho : (\Omega^n_{\mathrm{ab}}(A), d) \to (\Omega^n_A, d)$. L'image par ρ de $\mathcal{B}N\Omega^*(A)$ est un bicomplexe dont l'homologie est $HN^*_{dR}(A)$.

Les carrés du diagramme (5.7.1) sont commutatifs (pour tout n)

On en déduit l'égalité de morphismes $\nu_n = \rho \circ \mathrm{tr} \circ \breve{\pi}_n \circ \varphi \circ \Upsilon_n$. Or, dans le module gradué $\Omega^n_{ab}(\mathcal{M}(A))$, les commutateurs gradués sont triviaux. En

$$\begin{array}{ccccccc} K_n(A) & \xrightarrow{\varphi\circ\Upsilon_n} & HC_n^-(\mathcal{M}(A)) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & HC_n^-(A) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & HC_n^-(A) \\ & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ & & HNDR^n(\mathcal{M}(A)) & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & HNDR^n(A) & \xrightarrow{\rho} & HN^n_{dR}(A). \end{array}$$

(5.7.1)

particulier, on a

$$\begin{aligned} \varphi\Gamma^i_n[1,g_1...,g_n] &= \sum_{\alpha\in I^i_n}\eta_\alpha(g_j^{-1},g_j,(g_j^{-1},g_j)^{\alpha_0},g_j^{-1}g_{j+1},(g_{j+1}^{-1},g_{j+1})^{\alpha_{j+1}},... \\ &\quad ...,g_{j-1}^{-1}g_j,(g_j^{-1},g_j)^{\alpha_j}) \\ \pi_{n+2i}(\varphi(\Gamma^i_n))[1,g_1...,g_n] &= \mathrm{sg}(\alpha)\sum_{\alpha\in J^i_n}\frac{(i-1)!}{(n+2i)!}(dg_1g_1^{-1})^{2\alpha_1+\varepsilon_1}...(dg_ng_n^{-1})^{2\alpha_n+\varepsilon_n} \end{aligned}$$

où J^i_n est l'ensemble

$$\{\alpha=(\alpha_0,...,\alpha_n,j,\varepsilon_0,...,\varepsilon_n)\in\mathbb{N}^{\times n}\times\{1,...,n\}\ /\ 2(\alpha_0+...+\alpha_n)+\varepsilon_0+...+\varepsilon_n=n+2i\},$$

et $\mathrm{sg}(\alpha)=(-1)^{(n+1)(n-j)+\sum_{i=1}^{n-1}\bar{\delta}(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1})}$. On peut faire le même calcul pour $\nabla^{k,i}_n[1,g_1,...,g_n]$ ce qui donne la formule du théorème en passant à la trace. $\square$

Exemple : On va donner ici un exemple explicite d'élément de $K_1(A)$ dont le caractère de Chern est non trivial alors que sa trace de Dennis l'est. Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, i une racine carrée de -1 dans $\mathbb{C}$. On appelle A l'anneau $\mathbb{C}[x,y,z,t]/(x^2+y^2+z^2+t^2-1)$ et M la matrice

$$\begin{pmatrix} x-iy & -z+it \\ z+it & x+iy \end{pmatrix}.$$

On a $\det(M)=1$, ce qui implique que M définit un élément m dans $K_1(A)$. D'après le Théorème 1.5.9, on a

$$\begin{aligned} ch_1(m) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i i!/(1+2i)!\mathrm{tr}(d(M)M^{-1})^{2i+1}u^i \\ &= 2(xdx+ydy+zdz+tdt)u^0 \\ &\quad -12/6\,(xdydzdt-ydxdzdt+zdxdydt-tdxdydz)u^1. \end{aligned}$$

Or,

$$2(xdx+ydy+zdz+tdt)=d(x^2+y^2+z^2+t^2)=d(1)=0,$$

donc $ch_1(m)=ch_1^1(m)u^0$. De plus,

$$ch_1^1(m)=-6(xdydzdt-ydxdzdt+zdxdydt-tdxdydz)$$

est un multiple non nul de la forme volume de S^3. En particulier, on a $m \neq 0$ dans $K_1(A)$ alors que $D_1(m) = 2(xdx + ydy + zdz + tdt) = 0$.

On trouve de nombreux exemples de calcul de ce type dans [**Kar**]. On peut, en fait, pour tout $i \geq 2$, trouver des matrices $m_i \in GL(A_i)$, où A_i est l'anneau $\mathbb{C}[x_1, ..., x_{2+2i}]/(x_1^2 + \ldots + x_{2+2i}^2 - 1)$, telles que $ch_1^i(m_i)$ soit un multiple non nul de la forme volume de S^{1+2i}.

Remarque : En conservant les notations du Corollaire 1.5.4, on vérifie facilement, pour tout $k \geq 1$, que $H(\lambda_1^k(m)) = (-1)^{k-1}k[1, M]$, c'est-à-dire

$$ch_1(\lambda_1^k(m)) = (-1)^k 2k\,\omega\,u^1$$

où $\omega = xdydzdt - ydxdzdt + zdxdydt - tdxdydz$. De même, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda_1^k}(-2\,\omega\,u^1) &= -\frac{2}{k}\widetilde{\lambda_3^k}(\omega)u^1) \\ &= (-1)^k 2k^2\omega\,u^1. \end{aligned}$$

En d'autres termes, on obtient $\widetilde{\lambda}_1^k(ch_1(m)) = ch_1(\lambda_1^k(m))$ (cf 1.5.4).

1.6. Commutation avec le produit

La compatibilité du produit de Loday en K-théorie et du produit de Hood-Jones en homologie cyclique *via* le caractère de Chern a été démontrée par McCarthy (*cf.* [**MCa1**]) en utilisant la notion de catégorie exacte avec cofibrations. Dans cette partie on se propose de donner une démonstration simpliciale, dans l'esprit du papier original de Hood et Jones (*cf.* [**HJ**]).

Rappelons la définition du *produit de Loday* en K-théorie que l'on note $*$. L'espace $BGL(A)^+$ est muni d'une structure de H-espace induit par la somme directe de matrices : pour $\alpha \in GL_n(A)$, $\beta \in GL_m(A)$, on définit $\alpha \oplus \beta$ par

$$\alpha \oplus \beta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Cette construction s'étend à $GL(A)$ tout entier par $\alpha \oplus \beta = \gamma$ où, pour tout $i,, j \geq 1$,

$$\gamma_{2i,2j} = \beta_{i,j}, \quad \gamma_{2i+1,2j+1} = \alpha_{i,j},$$

les autres coefficients de γ étant nuls. On note $\ominus$ l'inverse (à homotopie près) de $\oplus$. Le produit tensoriel des matrices induit un morphisme de groupe

$$\mu_{p,q} : GL_p(A) \times GL_q(A') \to GL(A \otimes A').$$

Alors $\widehat{\mu}_{p,q}(x, y) = \mu_{p,q}(x, y) \ominus \mu_{p,q}(x, 1) \ominus \mu_{p,q}(1, y)$ induit une application

$$\widehat{\mu} : BGL(A)^+ \wedge BGL(A')^+ \to BGL(A \otimes A')^+$$

qui induit $*$ sur les groupes d'homotopie.

Passons à la définition du produit de Hood-Jones ([**HJ**], [**Lo5**]). Si X_*, X'_* sont des modules simpliciaux, on pose

$$(X \times X')_* = X_* \otimes X'_* \quad \text{et} \quad (X \otimes X')_* = \bigoplus_{p+q=*} X_p \otimes X'_q.$$

Si ce sont, en plus, des modules cycliques, on note respectivement $\mathcal{B}^-(X \times X')$, $\mathcal{B}^-(X \otimes X')$ les bicomplexes négatifs associés et $HC_*^-((X \times X'))$, $HC_*^-((X \otimes X'))$ leurs groupes d'homologie.

Rappelons qu'un (p,q)-*shuffle* est une permutation σ de $\{1, ..., p+q\}$ telle que $\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q)$. On associe à un "shuffle" σ une application $\sigma : X_p \otimes X'_q \to (X \times X')_{p+q}$ définie par

$$\sigma(x,y) = (s_{\sigma(p+q)-1} ... s_{\sigma(p+1)-1}(x) \otimes s_{\sigma(p)-1} ... s_{\sigma(1)-1}(y)).$$

On définit $sh : (X \otimes X')_* \to (X \times X')_*$ en posant, pour tout $n \geq 0$, $sh_n = \sum \varepsilon(\sigma)\sigma$ où la somme est étendue à tous les (p,q)-shuffles σ tels que $p+q = n$. Cette application est un morphisme de complexes qui définit un produit associatif et gradué commutatif. De plus, comme $\varphi : C_*(G) \to NG_*$ est un morphisme de modules cycliques, en particulier $sh \circ \varphi = \varphi \circ sh$.

Remarquons que, dans le cas du complexe $C_*(A)$, pour toute permutation γ, on a une application induite $\gamma_. : C_n(A) \to C_n(A)$ $(a_0, ..., a_n) \mapsto (a_0, a_{\gamma^{-1}(1)}, ..., a_{\gamma^{-1}(n)})$. On constate alors que $\sigma((x_0, ..., x_p), (y_0, ..., y_q)) = \sigma_.(x_0 \otimes y_0, x_1 \otimes 1, ..., x_p \otimes 1, 1 \otimes y_1, ..., 1 \otimes y_q)$ si σ est un (p,q)-shuffle.

Rappelons enfin qu'un (p,q)-shuffle cyclique est une permutation obtenue en effectuant une permutation circulaire sur l'ensemble $\{1, ..., p\}$ et une autre sur $\{p+1, ..., p+q\}$, puis en mélangeant ces deux ensembles de telle sorte que 1 apparaisse avant $p+1$ dans $(\sigma(1), ..., \sigma(p+q))$. Un (p,q)-shuffle cyclique σ donne une application $C_p(A) \otimes C_q(A) \to C_{p+q}(A \otimes A)$ défini par

$$(a_0, ..., a_p) \otimes (b_0, ..., b_q) \mapsto \varepsilon(\sigma)\sigma.(a_0 \otimes b_0, a_1 \otimes 1, ..., a_q \otimes 1, 1 \otimes b_1, ..., 1 \otimes b_q).$$

On définit $sh'_* : (C(A) \otimes C(A'))_* \to (C(A) \times C(A'))_{*+2}$ par $sh'(a,b) = \sum \varepsilon(\sigma)\sigma(s(a), s(b))$ où la somme est étendue à tous les (p,q)-shuffles cycliques tels que $p+q = *$. Dans les complexes normalisés on a les égalités

$$[b, sh] = 0, \quad [B, sh'] = 0, \quad [B, sh] + [b, sh'] = 0.$$

Alors *le produit de Hood-Jones* est l'application

$$S_\times^- : \mathcal{B}^-(C(A) \otimes C(A')) \to \mathcal{B}^-(C(A) \times C(A'))$$

définie par :

$$S_\times^-(x,y) = sh(x \times y) + sh'(x \times y)u = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{i} sh(x^j, y^{i-j}) + \sum_{j=0}^{i-1} sh'(x^j, y^{i-1-j}) \right) u^i$$

pour tout $x = \sum x^i u^i \in \mathcal{B}C_p^-(A)$, $y = \sum y^i u^i \in \mathcal{B}C_q^-(A')$.

Théorème 1.6.1. — *Le caractère de Chern commute avec le produit de Loday en K-théorie et le produit de Hood-Jones en homologie cyclique. Précisément, si A, A' sont deux k-algèbres, $p, q \geq 1$ et $(x, y) \in K_p(A) \times K_q(A')$, alors*

$$ch_{p+q}(x * y) = S_\times^-(ch_p(x), ch_q(y)).$$

Pour démontrer ce théorème, on va construire, en homologie des groupes, pour G, G' deux groupes, un analogue

$$S_\times^- : \mathcal{B}_*^-(C_*(G) \otimes C_*(G')) \to \mathcal{B}_*^-(C_*(G) \times C_*(G'))$$

du produit $S_\times^-$ et prouver qu'il commute avec Υ_*.

Définition 1.6.2. — *On note $\check{sh}'$ l'application définie, pour tout $p, q \geq 0$ par*

$$\check{sh}' = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \sum_{\sigma \in \Sigma(i,j)} \varepsilon(\sigma)\sigma(l(t^i x), l(t^j y))$$

où $x \in C_p(G), y \in C_q(G')$ et $\Sigma(i, j)$ est l'ensemble des $(p+1, q+1)$-shuffles tels que $\sigma(1+i) < \sigma(p+2+j)$.

Lemme 1.6.3. — *Soit $\check{S}_\times^- : HC_p^-(G) \otimes HC_q^-(G') \to HC_{p+q}^-(C_*(G) \times C_*(G'))$ l'application $\check{S}_\times^- = sh + \check{sh}'u$.*

- **i) :** *On a $\varphi(\check{S}_\times^-) = S_\times^-(\varphi \otimes \varphi)$,*
- **ii) :** *l'application $\check{S}_\times^-$ définit un produit associatif gradué commutatif $HC_p^-(G) \otimes HC_q^-(G') \to HC_{p+q}^-(C_*(G) \times C_*(G'))$.*
- **iii) :** *On a $[b, sh] = 0, \quad [B, \check{sh}'] = 0, \quad [B, sh] + [b, \check{sh}'] = 0$.*

Démonstration: On vérifie facilement que, pour $x \in C_p(G)$, $y \in C_q(G')$, on a $\varphi(\check{sh}'(x, y)) = sh'(\varphi(x), \varphi(y))$. On a alors, $\varphi\check{S}_\times^- = S_\times^-\varphi$ ce qui permet de conclure pour *ii*) en remarquant que le produit sur $\mathcal{B}^-(NG \otimes NG')_*$ s'obtient par restriction du produit de Hood-Jones associé aux algèbres $k[G]$ et $k[G']$. Les relations de *iii*) s'obtiennent également par restriction et composition avec φ. □

Lemme 1.6.4. — *Le diagramme suivant est commutatif pour tout $p, q \geq 0$:*

$$\begin{array}{ccc} H_p(G) \otimes H_q(G') & \xrightarrow{sh} & H_{p+q}(G \times G') \\ \Upsilon_p \otimes \Upsilon_q \downarrow & & \Upsilon_{p+q} \downarrow \\ HC_p^-(G) \otimes HC_q^-(G') & \xrightarrow{\check{S}_\times^-} & HC_{p+q}^-(G \times G'). \end{array}$$

Démonstration: Soit pour $n \geq 0$, $\gamma_n : (C_*(G) \otimes C_*(G'))_n \to \mathcal{B}_n^-(C_*(G) \times C_*(G'))$ défini, pour $p+q=n$, par $\gamma_n = \Upsilon_n(sh) - \check{S}_\times^-(\Upsilon_p \otimes \Upsilon_q)$. On va montrer que γ_* est homotope à 0. On pose $\gamma_n = \sum \gamma_n^i u^i$. On cherche donc une famille $(\theta_n)_{n\geq 0}$ d'applications G-linéaires telles que pour tout $n, i \geq 0$ on ait

$$\gamma_n^i = b\theta_n^i + B\theta_n^{i-1} + \theta_{n-1}^i b. \qquad (1)_n^i$$

Dans le complexe normalisé, on a

$$\begin{aligned}\gamma_0(x,y) &= \Upsilon_0(sh(x,y)) - \check{S}_\times^-(\Upsilon_0(x) \otimes \Upsilon_0(y)) \\ &= sh(x,y)u^0 - \check{S}_\times^-(xu^0 \otimes yu^0) \\ &= sh(x,y)u^0 - sh(x,y)u^0 = 0.\end{aligned}$$

De même, quel que soit $n \geq 0$, $\gamma_n^0 = 0$ et, quel que soit $x \in C_n(G)$, $y \in C_0(G')$, on a $\gamma_n(x,y) = 0$. On va raisonner de la même façon que dans le théorème 1.3.5. Posons $\theta_n^0 = 0 = \theta_n^{-1}$ et $\theta_0 = 0$. On définit, pour $i \geq 1, n \geq 1$,

$$\theta_n^i = s_{\mathrm{id}}(\gamma_n^i - B\theta_n^{i-1} - \theta_{n-1}^i b).$$

Cette formule s'étend à $n=0$ et $i=0$ en posant $\theta_{-1} = 0 = \theta_n^{-1}$. De plus, les θ_n^i sont bien G-linéaires par récurrence sur n. Clairement la famille (θ_n^i) vérifie $(1)_n^i$ pour $n=0$ ou $i=0$. Supposons que les égalités $(1)_m^*$ sont satisfaites pour tout $0 \leq m$. Montrons par récurence sur i que les égalités $(1)_{n+1}^i$ sont satisfaites pour tout $i \geq 0$. On connait le résultat pour $i=0$. Supposons donc, que les égalités $(1)_{n+1}^j$ sont satisfaites pour $0 \leq j \leq i$. Montrons que l'égalité $(1)_{n+1}^{i+1}$ est satisfaite. On a

$$b\theta_{n+1}^{i+1} = \gamma_{n+1}^{i+1} - B\theta_{n+1}^i - \theta_n^{i+1}b - s_{id}b(\gamma_{n+1}^{i+1} - B\theta_{n+1}^i - \theta_n^{i+1}b). \qquad (2_n^i)$$

On a, pour $x \in C_p(G)$, $y \in C_q(G')$ (avec $p+q=n+1$),

$$\begin{aligned} b\gamma_{n+1}^{i+1}(x,y) &= b\Upsilon_{n+1}^{i+1}sh(x,y) - b(\check{S}_\times^-(\Upsilon_p(x) \otimes \Upsilon_q(y)))^{i+1} \\ &= \Upsilon_n^{i+1}bsh(x,y) - B\Upsilon_{n+1}^i sh(x,y) \\ &\quad -b\left(\sum_{j=0}^{i+1} sh(\Upsilon_p^j(x) \otimes \Upsilon_q^{i+1-j}(y)) + \sum_{j=0}^{i} \check{sh}'(\Upsilon_p^j(x) \otimes \Upsilon_q^{i-j}(y))\right).\end{aligned}$$

De plus, par hypothèse de récurrence on a

$$-bB\theta_{n+1}^i = B\gamma_{n+1}^i - B\theta_n^i b, \quad -b\theta_n^{i+1}b = -\gamma_n^{i+1}b + B\theta_n^i b.$$

Donc, en posant $B_n^i = \gamma_{n+1}^{i+1} - B\theta_{n+1}^i - \theta_n^{i+1}b$, on trouve

$$\begin{aligned}
bB_n^i(x,y) &= b\gamma_{n+1}^{i+1}(x,y) + B\gamma_{n+1}^i(x,y) - \gamma_n^{i+1}b(x,y)\\
&= \Upsilon_n^{i+1}bsh(x,y) - B\Upsilon_{n+1}^i sh(x,y) + B\Upsilon_{n+1}^i sh(x,y) - \Upsilon_n^{i+1}shb(x,y)\\
&\quad -b\left(\sum_{j=0}^{i+1} sh(\Upsilon_p^j(x)\otimes\Upsilon_q^{i+1-j}(y)\right) + \sum_{j=0}^{i}\check{sh}'(\Upsilon_p^j(x)\otimes\Upsilon_q^{i-j}(y)))\\
&\quad -B\left(\sum_{j=0}^{i} sh(\Upsilon_p^j(x)\otimes\Upsilon_q^{i-j}(y)) + \sum_{j=0}^{i-1}\check{sh}'(\Upsilon_p^j(x)\otimes\Upsilon_q^{i-j-1}(y))\right)\\
&\quad +\left(\sum_{j=0}^{i+1} sh(\Upsilon_p^j\otimes\Upsilon_q^{i+1-j}) + \sum_{j=0}^{i}\check{sh}'(\Upsilon_p^j\otimes\Upsilon_q^{i-j})\right) b(x,y)\\
&= -b\check{sh}'\left(\sum_{j=0}^{i}\Upsilon_p^j(x)\otimes\Upsilon_q^{i-j}(y)\right) - Bsh\left(\sum_{j=0}^{i}\Upsilon_p^j(x)\otimes\Upsilon_q^{i-j}(y)\right)\\
&\quad +\sum_{j=0}^{i+1} sh(B\Upsilon_p^{j-1}(x)\otimes\Upsilon_q^{i+1-j}(y) + \Upsilon_p^j(x)\otimes B\Upsilon_q^{i-j}(y))\\
&\quad -\check{sh}'\left(\sum_{j=0}^{i}(\Upsilon_{p-1}^j bx\otimes\Upsilon_q^{i-j}(y) + \Upsilon_p^j(x)\otimes\Upsilon_{q-1}^{i-j}by)\right)\\
&\quad +\check{sh}'\left(\sum_{j=0}^{i-1} B\Upsilon_p^j x\otimes\Upsilon_q^{i-1-j}y + \Upsilon_p^j x\otimes B\Upsilon_q^{i-1-j}y\right).
\end{aligned}$$

D'aprés le Lemme 1.6.3, on a $[B,sh]+[b,\check{sh}']=0$. Il en résulte que $B_n^i=0$ et $(1)_{n+1}^{i+1}$ est vérifiée. □

Démonstration du Théorème 1.6.1 :

Intéressons-nous à l'image de $*$ par le morphisme d'Hurewicz H (cf par exemple [**Ga2**]). La somme directe de matrices et l'application diagonale induisent une structure d'algèbre de Hopf sur $H_*(GL(A\otimes A'))$ dont la partie primitive est exactement l'image de H. En posant

$$h(x,y) = x\otimes y\ominus x\otimes 1\ominus 1\otimes y,$$

on obtient, par fonctorialité, que $H(x*y) = h_*(sh(H(x),H(y))$. Précisément, le produit induit par h_* sur l'algèbre de Hopf $H_*(GL(A\otimes A'))$ restreint à la partie primitive coincide exactement avec $*$ ([**Ga2**]).

Le théorème découle de la commutativité du diagramme suivant (où on a posé $G=GL(A)$, $G'=GL(A')$, $\mathcal{M}=\mathcal{M}(A)$ et $\mathcal{M}'=\mathcal{M}'(A)$) :

$$\begin{tikzcd}
K_p(A) \otimes K_q(A') \arrow[r, "*"] \arrow[d, "H\otimes H"'] & K_{p+q}(A \otimes A') \arrow[dr, "H"] & \\
H_p(G) \otimes H_q(G') \arrow[r, "sh"] \arrow[d, "\Upsilon_p\otimes\Upsilon_q"'] & H_{p+q}(G \times G') \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\Upsilon_{p+q}"'] & H_{p+q}(GL(A \otimes A')) \arrow[d, "\Upsilon_{p+q}"'] \\
HC^-_p(G) \otimes HC^-_q(G') \arrow[r, "\check{S}^-_\times"] \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"'] & HC^-_{p+q}(G \times G') \arrow[d, "\varphi"'] & HC^-_{p+q}(GL(A \otimes A')) \arrow[d, "\varphi"'] \\
HC^-_p(\mathcal{M}) \otimes HC^-_q(\mathcal{M}') \arrow[r, "S^-_\times"] \arrow[d, "\mathrm{tr}\otimes\mathrm{tr}"'] & HC^-_{p+q}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}') \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] & HC^-_{p+q}(\mathcal{M}(A \otimes A')) \arrow[d, "\mathrm{tr}"'] \\
HC^-_p(A) \otimes HC^-_q(A') \arrow[r, "S^-_\times"] & HC^-_{p+q}(A \otimes A') \arrow[r, "\mathrm{id}"] & HC^-_{p+q}(A \otimes A').
\end{tikzcd}$$

D'après les Lemmes 1.6.3, 1.6.4 et le début de la démonstration, il suffit de démontrer que $\mathrm{tr}\varphi\Upsilon_{p+q}h_* = \mathrm{tr}\varphi\Upsilon_{p+q}$. Mais $(p, q \geq 1)$ $\mathrm{tr}\varphi((x\otimes 1)_* \oplus (1 \otimes y)_*) = 0$ car $\mathrm{tr}1_{GL(A)}\mathrm{tr}1_{GL(A')} = 0$ dans le complexe normalisé. $\square$

Remarque : Sur la partie primitive de $H_*(GL(A \otimes A'))$, l'application h_* est induite par $\mu_{p,q}(x, y) \ominus \mu_{p,q}(x, 1) \ominus \mu_{p,q}(1, y)$ qui est homotope à

$$\mu_{p,q}(x, y) \oplus \mu_{p,q}(x^{-1}, 1) \oplus \mu_{p,q}(1, y^{-1})$$

dans $BGL(A \otimes A')^+$. On peut donc y remplacer $h(x, y)$ par

$$(x \oplus x^{-1} \oplus 1) \otimes (y \oplus 1 \oplus y^{-1}).$$

On peut aussi remarquer que le diagramme commutatif de la preuve du Théorème 1.6.1 implique le Corollaire suivant où on définit $\check{C}h_{p,q} : H_p(GL(A)\otimes H_q(GL(A')) \to HC^-_{p+q}(A \otimes A')$ comme la composée suivante

$$H_p(G\otimes H_q(G') \xrightarrow{sh} H_{p+q}(GL(A\otimes A')) \xrightarrow{\Upsilon_{p+q}} HC^-_{p+q}(GL(A\otimes A')) \xrightarrow{\mathrm{tr}\circ\varphi} HC^-_{p+q}(A\otimes A').$$

Corollaire 1.6.5. — *Soit $x \in K_p(A)$, $y \in K_q(A')$. Le caractère de Chern $ch_{p+q}(x * y)$ est égal à $\check{C}h_{p,q}(H(x), H(y))$*

En particulier, si $x \in Prim(H_p(GL_m(A)) \subset K_p(A)$ et $y \in Prim(H_q(GL_m(A')) \subset K_q(A')$, alors $H(x * y) \in H_{p+q}(GL_{3m}(A \otimes A'))$ et, pour calculer $ch_{p+q}(x * y)$, il suffit de calculer $\check{\mathrm{tr}}\varphi\Upsilon_{p+q}H(x * y)$ où

$$\check{\mathrm{tr}}(M^0, ..., M^n) = \sum_{i_0,..,i_n=1}^{m} ((M^0)_{i_0,i_1}, ..., (M^n)_{i_n,i_0}),$$

i.e. $\check{\mathrm{tr}}$ est la trace de Dennis du tenseur obtenu à partir de $(M^0, ..., M^n)$ en projetant chaque tenseur sur son premier bloc diagonal de taille m.

CHAPITRE 2

ADAMS OPERATIONS IN TOPOLOGICAL HOCHSCHILD AND CYCLIC HOMOLOGY

Abstract : The aim of this paper is to define and study Adams operations on topological Hochschild and cyclic homology. Our operations are analogous to the standard Adams operations defined in Hochschild and (negative) cyclic homology of a ring. For example, we prove that these operations induce a filtration on $\pi_* THH(A)$. We also show that these operations commute with products and we compare them with standard Adams operations for rings and in Mac Lane homology. Finally we extend the definition of our operations to various models describing $THH(A)$ and show that our operations coincide with McClure-Schwänzl-Vogt ones on the model $A \otimes S^1$.

Résumé : Le but de cet article est de définir des opérations d'Adams sur l'homologie de Hochschild topologique et l'homologie cyclique topologique. On construit des opérations similaires aux opérations d'Adams standard définies sur l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique négative d'un anneau. On montre, par exemple, que ces opérations induisent une filtration sur $\pi_* THH(A)$. On montre aussi que ces opérations sont multiplicatives et on les compare avec les opérations classiques pour les anneaux et en homologie de Mac Lane. Enfin on étend ces opérations à différents modèles pour $THH(A)$ et on montre que nos constructions coincident avec celles de McClure, Schwänzl et Vogt sur le modèle $A \otimes S^1$.

Keywords : Adams operations, topological Hochschild homology, topological cyclic homology, Mac Lane homology

Adams operations on the Hochschild homology of a commutative algebra were first defined by Gerstenhaber and Schack [**GS**] and Loday [**Lo4**]. These operations, often called λ-operations, induce a structure of a γ-ring (see [**Hi**], [**Kr**] for example). For instance they provide a nice decomposition of Hochschild homology groups in characteristic zero. In the general case they induce an interesting filtration; some part of it could be identified with other well known theories such as Harrison homology. Moreover most of these results extend to the cyclic homology of a commutative algebra and its variants (including Goodwillie's negative cyclic homology).

In the mid 1980's, Bökstedt (following ideas of Goodwillie) defined and studied topological Hochschild homology $THH(F)$ of a functor F with smash product ([**Bo1**], [**Bo2**]) mainly to extend standard Hochschild homology to the case of rings up to homotopy. Later on, Bökstedt, Hsiang and Madsen [**BHM**] defined topological cyclic homology, a topological generalisation of negative cyclic homology. There is a topological variant of Dennis trace map $D : K(F) \to THH(F)$ for a functor with smash product F, which factors as $K(F) \xrightarrow{ch} TC(F) \longrightarrow THH(F)$.

Since then a lot of work has been done to construct categories of spectra equipped with smash product having nice associative and commutative properties at the space level (and not only the homotopy level), see [**EKMM**], [**MCSV**], [**Se**], [**Ly2**], [**Sc**] for example. The aim was to provide a good setting for "brave new algebras", that is to say topological generalisations of algebraic constructions to homotopy ring spaces. Henceforth we will work in the framework of Γ-spaces and $\mathbb{S}$-algebras in the sense of [**Ly2**] and [**Sc**].

The main goal of this paper is to extend the standard algebraic λ-operations in Hochschild and cyclic homology to topological Hochschild and cyclic homology.

Loday [**Lo4**] constructed λ-operations not only for commutative algebras but also for any functor $F : Fin \to Mod$ from the category Fin of finite sets to the category Mod of modules over a commutative ring k. McCarthy [**MCa2**] gave a geometric description of Loday's λ-operations which we follow to define analogous operations Φ^k on $THH(A)$. Here, $THH(A)$ stands for Bökstedt's topological Hochschild homology of a commutative $\mathbb{S}$-algebra A (in the sense of [**Ly2**], [**Sc**]). Beyond its simplicity, the main advantage of this approach is that it extends easily to topological cyclic homology.

The paper is organized as follows. Section one is a recollection of standard facts about Γ-spaces [**Se**] and $\mathbb{S}$-algebras. In section two, we construct the Φ^k operations on $THH(A)$ and show that they induce the structure of a γ-ring on homotopy groups. We then extend these results to topological cyclic homology in Section three. Section four is devoted to proving that the operations Φ^k commute with products in topological Hochschild and cyclic homology. We compare these operations with standard operations on Hochschild homology and negative cyclic homology of discrete rings in Section five. That leads to a natural definition of topological Harrison homology. We also compare the operations Φ^k with operations defined on Mac Lane homology of a ring by McCarthy [**MCa2**]. Finally in Section six, we show that these operations are compatible with various models for THH. In particular, we show that they coincide with operations Ψ^k introduced by McClure, Schwänzl and Vogt on the model $A \otimes S^1$.

The author would like to thank the University of Oslo for its support and especially John Rognes who spent a lot of time answering all his questions.

Notations : For the remainder of the paper we let *Fin* be the the category of finite sets $k_+ = \{0, 1, ..., k\}, k \geq 0$ and any maps. Following Segal [**Se**], we let Γ^{op} be the category of finite pointed sets $k_+ = \{0, 1, ..., k\}, k \geq 0$ and pointed maps *i.e.* maps fixing 0. We use the notation Δ for the usual simplicial category and *Simp'* will be the category of simplicial pointed sets (also called spaces). Given a simplicial object X_* in a category, we denote $|X|$ its geometric realisation.

The category Top will be the category of topological spaces and we will denote Δ^r_+ the standard r-simplex with based point.

Additionally, for any field K or commutative ring k and spectrum X, we will denote $H_*(X, K)$, $H_*(X, k)$ the spectrum homology $HK_*(X)$ and $Hk_*(X)$.

Throughout the paper we shall make no distinctions between the expressions "λ-operations" and "Adams operations". λ-operations on a ring without unit I are a family of operations $(\Phi^k : I \to I)_{k\geq 0}$ that induce a structure of a γ-ring on I. When the multiplication is trivial it means that the operations Φ^k are ring maps satisfying $\Phi^0 = 0$, $\Phi^1 = \mathrm{id}$ and $\Phi^k(\Phi^{k'}) = \Phi^{kk'}$. We refer to [**Hi**] and [**Kr**] for definitions and properties of γ-rings.

2.1. A few facts about Γ-spaces and $\mathbb{S}$-algebras

Γ-spaces were first studied by Segal [**Se**] (also see [**Ly2**], [**Sc**]). A *Γ-space* X is a functor $X : \Gamma^{op} \to Simp'$. We write Γsp for the category of Γ-spaces. The *underlying space* of X is $X(1_+)$. The category Γ^{op} admits inner operations $\vee$ (wedge sum), $\wedge$ (smash product) defined by $k_+ \vee \ell_+ = (k+\ell)_+$ and $k_+ \wedge \ell_+ = (k\ell)_+$ (with lexicographic order).

A Γ-space X naturally extends into a functor (still called X) *Simp'* $\to$ *Simp'*. First, X induces a functor X : *Sets'* $\to$ *Simp'* (where *Sets'* stands for the category of all pointed sets and pointed maps) defined by

$$X(E) = \operatorname*{colim}_{k_+ \to E} X(k_+).$$

Next, if $K \in$ *Simp'*, we let $X(K) \in$ *Simp'* be the simplicial space whose p-simplices are

$$X(K)_p = X(K_p)_p.$$

For $L \in$ *Simp'*, there is a natural application $X(K) \wedge L \to X(K \wedge L)$. Taking K to be the m-sphere S^m, we see that X induces a connective spectrum

$X(S) : n \mapsto X(S^n)$. By definition, *the homotopy groups of* X are the homotopy groups of this spectrum, that is

$$\pi_k(X) = \pi_k(X(S)) = \operatorname*{colim}_n \pi_{k+n} X(S^n).$$

The smash product of two Γ-spaces X, Y is defined as the following Γ-space :

$$X \wedge Y = \left(k_+ \mapsto \operatorname*{colim}_{m_+ \wedge n_+ \to k_+} X(m_+) \wedge Y(n_+) \right).$$

There is a particular Γ-space (called the sphere Γ-space) $\mathbb{S} : \Gamma^{op} \hookrightarrow$ *Simp'* defined by

$$k_+ \mapsto (n \mapsto k_+).$$

The induced extension *Simp'* $\xrightarrow{\mathbb{S}}$ *Simp'* is the identity and the associated spectrum is the sphere spectrum $n \mapsto S^n$.

The category $(\Gamma sp, \wedge, \mathbb{S})$ is a symmetric monoidal category for the smash product. A $\mathbb{S}$-*algebra* is a monoid in this category ; hence a $\mathbb{S}$-algebra is a Γ-space A together with an associative product $\mu : A \wedge A \to A$ and a unit $\eta : \mathbb{S} \to A$ compatible with μ. The $\mathbb{S}$-algebra A is said to be commutative if $\mu \circ T = \mu$ (where T is the twist morphism). This means that the following diagram is commutative for all $k, \ell \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} A(k_+) \wedge A(\ell_+) & \xrightarrow{\mu} & A(k_+ \wedge \ell_+) \\ T \downarrow & & \downarrow A(T') \\ A(\ell_+) \wedge A(k_+) & \xrightarrow{\mu} & A(\ell_+ \wedge k_+) \end{array}$$

where $T' : \Gamma^{op} \to \Gamma^{op}$ is the isomorphism exchanging the two ordering relations.

Notice that a $\mathbb{S}$-algebra A also induces a connective functor with smash product (see [**Bo1**] for example). For all $K, L \in$ *Simp'*, there is a natural product $A(K) \wedge A(L) \to A(K \wedge L)$ and the associated spectrum is a ring-spectrum. Given a $\mathbb{S}$-algebra A, a A-*module* is a Γ-space M together with an action $A \wedge M \to M$. We denote by A-mod the category of A-modules. The coequalizer map in the category Γsp of

$$M \wedge A \wedge N \rightrightarrows M \wedge N$$

yields a smash product of A-modules denoted by $M \wedge_A N$ for which A is a unit. We call A-algebras the monoids in the symmetric monoidal category $(A\text{-mod}, \wedge_A, A)$.

2.2. λ-operations on $THH(A)$

2.2.1. Definition of THH(A). — Following Bökstedt [**Bo1**], we denote I the subcategory of Γ^{op} obtained by restricting to maps $k_+ \to \ell_+$ which are injective. We set $S^{q+} = S^1 \wedge ... \wedge S^1$ (q factors). More generally, for $x = (x_0, ..., x_q) \in I^{q+1}$, we set $S^x = S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_q}$.

Consider a $\mathbb{S}$-algebra A with associative product μ. For $x = (x_0, ..., x_q) \in I^{q+1}$, we define $G(A,x)$ to be the Γ-space $k_+ \mapsto G(A,x)(k_+)$, where $G(A,x)(k_+)$ is the simplicial set whose p-simplices are given by

$$G(A,x)_p(k_+) = \mathrm{Hom}_{Simp'}(S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_q} \wedge \Delta^p_+ \; ; \; A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_q}) \wedge k_+).$$

This defines a functor from I^{q+1} to Γ-spaces by $x \mapsto G(A,x)$.

We define (*cf.* [**Bo1**], [**Bo2**], [**PW**]) a cyclic Γ-space $THH(A)_* = (q \mapsto THH(A)_q)$ where $THH(A)_q$ is the Γ-space

$$THH(A)_q = \operatorname*{hocolim}_{x \in I^{q+1}} G(A,x).$$

The cyclic structure of $THH(A)_*$ is given by faces $d_i : THH(A)_n \to THH(A)_{n-1}$, degeneracies $s_j : THH(A)_n \to THH(A)_{n-1}$ and cyclic permutations $t : THH(A)_n \to THH(A)_n$. The map t is induced by the cyclic permutation

$$\begin{array}{ccc} \tau : I^{n+1} & \to & I^{n+1} \\ (x_0, ..., x_n) & \mapsto & (x_n, x_0, ..., x_{n-1}). \end{array}$$

There is a functor $\partial_i : I^{n+1} \to I^n$ given by

$$\partial_i(x_0, ..., x_n) = \begin{cases} (x_0, x_1 ..., x_i \vee x_{i+1}, ..., x_n) & \text{if } i < n \\ (x_n \vee x_0, x_1, ..., x_n) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

The map $d_i : THH(A)_n \to THH(A)_{n-1}$ is the map induced by

$$\widetilde{d_i} : G(A,x) \to G(A, \partial_i(x))$$

defined, for every map $f \in G(A,x)$ and $i < n$, by

$$\widetilde{d_i}(f) = \mathrm{id}_{A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{i-1}})} \wedge \mu \wedge \mathrm{id}_{A(S^{x_{i+1}}) \wedge ... \wedge A(S^{x_n})} \circ f \circ \gamma_i$$

where γ_i is induced by the isomorphism $S^{x_i \vee x_{i+1}} \cong S^{x_i} \wedge S^{x_{i+1}}$. For $i = n$,

$$\widetilde{d_n}(f) = t \circ (\mu \wedge \mathrm{id}_{A(S^{x_2}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{n-1}})}) \circ f \circ \gamma_1 \circ \tau$$

Degeneracies are defined in a similar way. We denote $THH(A) = |THH(A)_*|$ the geometric realisation of $THH(A)_*$.

Given a $\mathbb{S}$-algebra B, one can also define topological Hochschild homology in the category of B-algebras (instead of $\mathbb{S}$-algebras). It suffices to replace, for any B-algebra A, the smash product in the definition of $G(A,x)$ by the smash product $\wedge_B$ of B-algebras. We will denote $THH^A(B)$ the ensuiing topological Hochschild homology of A over B.

Remark : Given a A-bimodule M, one can replace the factor $A(S^{x_0})$ in the definition of $G(A,x)_p$ by $M(S^{x_0})$ to define Γ-spaces $G(A,M,x)_q$. This leads to a simplicial (not cyclic) Γ-space $THH(A,M)_*$ with the same faces and degeneracies than $THH(A)_*$ (except that one replaces the product map by the bimodule structure maps when necessary). We will need this generalisation in Section 2.5.2.

2.2.2. McCarthy's operations φ^k. — Recall that there is a functor $\mathrm{sd}_r : \Delta \to \Delta$ (the edgewise subdivision functor) defined by

$$\mathrm{sd}_r([n]) = [n] \cup [n] \cup ... \cup [n] \quad (r \text{ factors}).$$

When X is a simplicial Γ-space (*a fortiori* a cyclic one) we denote $\mathrm{sd}_r(X) = X \circ \mathrm{sd}_r$. We identify Δ_+^{rn-1} with the r-fold join of Δ_+^{n-1} with itself. There is a map $D_r :\mid \mathrm{sd}_r(X) \mid \to \mid X \mid$ induced by

$$\begin{array}{ccc} X_{rn-1} \times \Delta_+^n & \longrightarrow & X_{rn-1} \times \Delta_+^{rn-1} \\ (x, u) & \mapsto & (x, \frac{u}{r} \oplus ... \oplus \frac{u}{r}) \quad (r \text{ factors}) \end{array}$$

which is a homeomorphism (*cf.* [**BHM**] Lemma 1.1).

We now recall the construction of a natural system from McCarthy [**MCa2**]. *A natural system* on X is a family of simplicial maps $(\varphi^k : \mathrm{sd}_k(X) \to X)_{k \geq 0}$ such that $\varphi^0 = *$, $\varphi^1 = \mathrm{id}$ and the diagram (2.2.1.1) is commutative up to homotopy

$$\begin{tikzcd} \mathrm{sd}_{rs}(X) \arrow[r, "\mathrm{sd}_s(\varphi^r)"] \arrow[dr, "\varphi^{rs}"'] & \mathrm{sd}_s(X) \arrow[d, "\varphi^s"] \\ & X. \end{tikzcd} \qquad (2.2.1.1)$$

For the remainder of the paper we denote Φ^r the composite map $\Phi^r = \mid \varphi^r \mid \circ D_r^{-1}$. A natural system is said to be *cyclic* if $\varphi_{n-1}^r \circ t = t \circ \varphi_{n-1}^r$.

There exists a functor $\Theta : \Delta^{op} \to \Gamma^{op}$ (*cf.* [**Lo4**]) which is the identity on the objects and satisfies $\Theta(f)(i) = j$ if there exists j such that $f(j-1) < i \leq f(j)$ and is 0 if not. Henceforth a Γ-space is considered a simplicial set by Θ.

McCarthy [**MCa2**] gave a "universal" construction of natural systems on Fin and Γ-spaces as follows. We define a family of applications $\varphi_n^r \in Hom_{\Gamma^{op}}(rn + r - 1, n)$ by setting $\varphi_n^r(p) = p\ [n+1]$.

Lemma 2.2.1. — **(McCarthy [MCa2])** *If X is a Γ-space (respectively a Fin-space), then the familly $(X \circ \varphi_n^r)$ defines a natural system (resp. a cyclic one).*

2.2.3. Commutative $\mathbb{S}$-algebras. — We have seen that for any $\mathbb{S}$-algebra there exists a functor $THH(A) : \Delta^{op} \longrightarrow \Gamma sp$. We wish to apply lemma 2.2.1 to define λ-operations on $THH(A)$ when A is commutative. So we need to prove that in that case there exists a factorisation for $THH(A) : \Delta^{op} \to \Gamma sp$ through *Fin*, i.e. a functor $\widetilde{TH(A)} : Fin \longrightarrow \Gamma sp$ such that $THH(A)$ is the composite

$$THH(A) := \qquad \Delta^{op} \xrightarrow{\Theta} Fin \xrightarrow{\widetilde{TH(A)}} \Gamma sp.$$

Lemma 2.2.2. — *Such a factorisation exists if and only if A is a commutative $\mathbb{S}$-algebra.*

Proof: First, suppose A is a commutative $\mathbb{S}$-algebra. On objects we define $\widetilde{TH(A)}_n = THH(A)_n$. For a morphism $\delta : [n] \to [m]$ and a map

$$f : S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_n} \wedge \Delta^p_+ \to A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_n}) \wedge k_+$$

we wish to construct a map

$$\delta(f) : S^{y_0} \wedge ... \wedge S^{y_m} \wedge \Delta^p_+ \to A(S^{y_0}) \wedge ... \wedge A(S^{y_m}) \wedge k_+.$$

For $0 \leq i \leq m$, define $y_i = x_{i_1} \vee ... \vee x_{i_k}$ when $\delta^{-1}(i) = \{i_1, ..., i_k\}$ and $y_i = 0_+$ if $\delta^{-1}(i) = \emptyset$. We denote by k_i the cardinal of the set $\delta^{-1}(i)$. Let π be the unique permutation that reindexes $x_0 \vee ... \vee x_n$ in the form $x_{0_0} \vee x_{0_1} \vee ... \vee x_{0_{k_0}} \vee ... \vee x_{m_0} \vee ... \vee x_{m_{k_m}}$.

Then $\delta(f)$ is the composite map

$$\begin{aligned} S^{y_0} \wedge ... \wedge S^{y_m} \wedge \Delta^p_+ &\to S^{x_{0_0}} \wedge ... \wedge S^{x_{0_{k_0}}} \wedge ... \wedge S^{x_{m_{k_m}}} \wedge \Delta^p_+ \\ &\xrightarrow{\pi} S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_n} \wedge \Delta^p_+ \xrightarrow{f} A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_n}) \wedge k_+ \\ &\xrightarrow{\mu\circ\pi} A(S^{x_{0_0}} \wedge ... \wedge S^{x_{0_{k_0}}}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{n_0}} \wedge ... \wedge S^{x_{n_{k_n}}}) \wedge k_+ \\ &\to A(S^{y_0}) \wedge ... \wedge A(S^{y_m}) \wedge k_+. \end{aligned}$$

This construction is compatible with the morphisms of the category I^{q+1}.

We have to prove that this functor is well defined and that the desired factorisation holds. In particular we have to check that $\Theta(d_0) = \Theta(d_1)$, where d_0, d_1 are the two morphisms $[1] \to [0]$ in Δ^{op}. Let f be a map :

$$S^{x_0} \wedge S^{x_1} \wedge \Delta^p_+ \to A(S^{x_0}) \wedge A(S^{x_1}) \wedge k_+.$$

The map $d_0(f)$ is the composite map

$$S^{x_0 \vee x_1} \wedge \Delta^p_+ = S^{x_0} \wedge S^{x_1} \wedge \Delta^p_+ \xrightarrow{f} A(S^{x_0}) \wedge A(S^{x_1}) \wedge k_+ \xrightarrow{\mu} A(S^{x_0} \wedge S^{x_1}) \wedge k_+.$$

With the notations of section 2.1, $d_1(f)$ is the composite map

$$\begin{aligned} S^{x_1 \vee x_0} \wedge \Delta^p_+ &= S^{x_1} \wedge S^{x_0} \wedge \Delta^p_+ \overset{f\circ T}{\to} A(S^{x_0}) \wedge A(S^{x_1}) \wedge k_+ \\ &\overset{T}{\to} A(S^{x_1}) \wedge A(S^{x_0}) \wedge k_+ \overset{\mu}{\to} A(S^{x_1} \wedge S^{x_0}) \wedge k_+. \end{aligned}$$

Denoting i, j the two isomorphims $i : S^n \cong S^{x_0 \vee x_1}$, $j : S^n \cong S^{x_1 \vee x_0}$ and $T' = j \circ i^{-1}$ the isomorphism $S^{x_0 \vee x_1} \cong S^{x_1 \vee x_0}$, we see that the following diagram (2.2.2.1) is commutative for all maps f when A is commutative :

$$\begin{tikzcd}
S^n \wedge \Delta^p_+ \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "i"] & S^{x_1 \vee x_0} \wedge \Delta^p_+ \arrow[d, "T'"] & \\
S^{x_0 \vee x_1} \wedge \Delta^p_+ \arrow[d, "f"] & S^{x_1} \wedge S^{x_0} \wedge \Delta^p_+ \arrow[l, "T^{-1}"] & \\
A(S^{x_0}) \wedge A(S^{x_1}) \wedge k_+ \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "\mu"] & A(S^{x_1}) \wedge A(S^{x_0}) \wedge k_+ \arrow[r, "\mu"] & A(S^{x_1} \wedge S^{x_0}) \wedge k_+ \arrow[dl, "A(j)"] \\
A(S^{x_0} \wedge S^{x_1}) \wedge k_+ \arrow[r, "A(i^{-1})"] & A(S^n) \wedge k_+. &
\end{tikzcd} \qquad (2.2.2.1)$$

Hence $d_0(f) = d_1(f)$. Checking the other simplicial identities is done in an analogous way.

On the other side, if a factorisation exists, then we must have $\Theta(d_0) = \Theta(d_1)$. Applying this to any $x_0, x_1 \in I^2$, we see that the diagram (2.2.2.1) has to be commutative for any map $f : S^{x_0} \wedge S^{x_1} \wedge \Delta^p_+ \to A(S^{x_0}) \wedge A(S^{x_1}) \wedge k_+$.

It follows that for every x_0, x_1, we have a commutative diagram of the form

$$\begin{array}{ccc} A(S^{x_0}) \wedge A(S^{x_1}) & \xrightarrow{\mu} & A(S^{x_0} \wedge S^{x_1}) \\ T \downarrow & & \downarrow A(T') \\ A(S^{x_1}) \wedge A(S^{x_0}) & \xrightarrow{\mu} & A(S^{x_0}) \wedge A(S^{x_1}). \end{array}$$

Hence the $\mathbb{S}$-algebra is commutative. $\square$

The lemma implies that there is a natural system $\varphi^k : \mathrm{sd_k THH(A)_*} \to \mathrm{THH(A)_*}$ and operations $\Phi^k =: |\varphi^k| \circ D^{-1} : THH(A) \to THH(A)$. As in [**MCa2**], there is an explicit description of the φ^k operations. A r-simplex in $(\mathrm{sd}_q(THH(A)))_{n-1}$ is given by a chain

$$X^0 \leftarrow X^1 \leftarrow ... \leftarrow X^r = x = (x_0, ..., x_{q(n+1)-1})$$

where each $X^i \in I^{qn}$ together with a map

$$f : S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_{q(n)-1}} \wedge \Delta^p_+ \to A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{q(n)-1}}) \wedge k_+.$$

Such a map can be written as a "matrix"

$$\begin{pmatrix} S^{x_0} & S^{x_1} & \dots & S^{x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S^{x_{(q-1)n}} & S^{x_{(q-1)n+1}} & \dots & S^{x_{qn-1}} \end{pmatrix} \wedge \Delta^p_+ \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} A(S^{x_0}) & A(S^{x_1}) & \dots & A(S^{x_{n-1}}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A(S^{x_{(q-1)n}}) & A(S^{x_{(q-1)n+1}}) & \dots & A(S^{x_{qn-1}}) \end{pmatrix} \wedge k_+.$$

With this notation, for $0 \leq i \leq n-2$, the faces $d_i f$ of $\mathrm{sd_q(THH(A))}$, which are maps from $\begin{pmatrix} S^{x_0} & \dots & S^{x_i \vee x_{i+1}} & \dots & S^{x_{n-1}} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ S^{x_{(q-1)n}} & \dots & S^{x_{(q-1)n+i} \vee x_{(q-1)n+i+1}} & \dots & S^{x_{qn-1}} \end{pmatrix} \wedge \Delta^p_+$ to

$$\begin{pmatrix} A(S^{x_0}) & \dots & A(S^{x_i \vee x_{i+1}}) & \dots & A(S^{x_{n-1}}) \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ A(S^{x_{(q-1)n}}) & \dots & A(S^{x_{(q-1)n+i} \vee x_{(q-1)n+i+1}}) & \dots & A(S^{x_{qn-1}}) \end{pmatrix} \wedge k_+,$$

are given by multiplications of the adjacent columns and degeneracies by the insertion of a column of unit maps. The "last face" operator d_{n-1} is given by first cyclically rotating the last column and then multiplying it with the first one to get

$$\begin{pmatrix} S^{x_0} & \dots & S^{x_{n-1}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ S^{x_{(q-1)n}} & \dots & S^{x_{qn-1}} \end{pmatrix} \wedge \Delta^p_+ \xrightarrow{d_{n-1}f} \begin{pmatrix} A(S^{x_{q(n-1)} \vee x_{q_0}}) & \dots & A(S^{x_{n-1}}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A(S^{x_{(q-1)n-1} \vee x_{(q-1)n}}) & \dots & A(S^{x_{qn-1}}) \end{pmatrix} \wedge k_+.$$

Lemma 2.2.3. — *With this presentation of* $(\mathrm{sd}_q(THH(A)))_{n-1}$, *operations* φ^k *are given by*

$$\begin{pmatrix} S^{x_0} & \dots & S^{x_{n-1}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ S^{x_{(q-1)n}} & \dots & S^{x_{qn-1}} \end{pmatrix} \wedge \Delta^p_+ \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} A(S^{x_0}) & \dots & A(S^{x_{n-1}}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A(S^{x_{(q-1)n}}) & \dots & A(S^{x_{qn-1}}) \end{pmatrix} \wedge k_+$$

$$\xrightarrow{\mu \wedge \dots \wedge \mu} A(S^{x_0 \vee x_n \vee \dots \vee x_{(q-1)n}}) \wedge \dots \wedge A(S^{x_{n-1} \vee x_{2n-} \vee \dots \vee x_{qn-1}}).$$

Proof: Formally the proof is analogous to the computation in [**MCa2**] Section 5. $\square$

To every γ-ring (R, Φ^k) we can associate a natural filtration (see [**Hi**], [**Kr**]) $F^\gamma_n R$ $(n \geq 0)$ defined by

$$F^\gamma_p X = \langle \Phi^{p_1}(x_1) \dots \Phi^{p_s}(x_s)\,;\, x_1, .., x_s \in R \text{ and } p_1 + \dots + p_s \geq p \rangle$$

The notation $\langle y_1 \dots y_p \rangle$ stands for the abelian group generated by monomials $y_1 \cdots y_p$.

Recall that we have operations $\Phi^k = \varphi^k \circ D_k^{-1}$ on $THH(A)$ thanks to lemma 2.2.1 and lemma 2.2.2. They induce a decreasing filtration $(F_k)_{k \geq 0}$ on

$THH(A)$ defined by $F_k(q_+) = \{\Phi^m(THH(A))(q_+), m \geq k\}$. We denote by F_p/F_{p+1} the homotopy cofiber of the map $F_{p+1} \to F_p$.

Theorem 2.2.1. — **i) :** *For every commutative $\mathbb{S}$-algebra A, the abelian group $\pi_*(THH(A))$ equipped with the trivial multiplication and the operations Φ^k is a γ-ring.*

ii) : *For every commutative ring k, the γ-ring structure induces canonical filtrations $\widetilde{F_n^\gamma} = F_n^\gamma \pi_*(THH(A))$ on $\pi_*(THH(A))$ and also $F_n^\gamma = F_n^\gamma H_*(THH(A), k)$ on $H_*(THH(A), k)$. Moreover, there are spectral sequences of the form*

$$\widetilde{E}^1_{p,q} = \pi_p(F_q/F_{q+1}) \Rightarrow \pi_{p+q}(THH(A)) \quad \textit{and}$$
$$E^1_{p,q} = H_p(F_q/F_{q+1}, k) \Rightarrow H_{p+q}(THH(A), K).$$

iii) : *One has $F^\gamma_{n+2}(H_n(THH(A), K)) = 0$ and*

$$F_1^\gamma(H_n(THH(A), K)) = F_2^\gamma(H_n(THH(A), K)) = H_n(THH(A), K)$$

if K is a field. Analogous results hold for the filtration $F_*H_*(THH(A), K)$ induced on $H_*(THH(A), K)$ by the spectral sequence $E^1_{*,*}$ of ii).

iv) : *For the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers there is a natural decomposition*

$$\pi_n(THH(A)) \otimes \mathbb{Q} = \pi_n^{(1)}(THH(A), \mathbb{Q}) \oplus ... \oplus \pi_n^{(n)}(THH(A), \mathbb{Q}).$$

A stronger result than *iii)* is obtained in Corollary 2.5.3 after the study of these operations in the case of discrete rings.

Proof:

i) : It follows from Lemma 2.2.2 that the operations Φ^k define a natural system on $THH(A)$. The definition of a natural system implies that the following diagram (2.2.1.1) is commutative

$$\begin{tikzcd}
{\mid THH(A) \mid} & {\mid \mathrm{sd_s THH(A)} \mid} \arrow[l, "D_s"'] \arrow[r, "\varphi^s"] & {\mid THH(A) \mid} \\
& {\mid \mathrm{sd_{rs} THH(A)} \mid} \arrow[ul, "D_{rs}"] \arrow[u, "D_r"] \arrow[r, "\mathrm{sd_r}\varphi^s"] \arrow[dr, "\varphi^{rs}"'] & {\mid \mathrm{sd_r THH(A)} \mid} \arrow[u, "D_r"'] \arrow[d, "\varphi^r"] \\
& & {\mid THH(A) \mid}
\end{tikzcd} \qquad (2.2.1.1)$$

and we finally have $\Phi^r\Phi^s = \Phi^{rs}$. This implies that $(\pi_*(THH(A)), 0, (\Phi^k)_{k\geq 0})$ is a γ-ring.

ii) : The filtration $\widetilde{F_n^\gamma}$ is the canonical decreasing filtration associated to the γ-ring structure on $\pi_*(THH(A))$. There is also a γ-ring structure on $H_*(THH(A), K)$ (the proof is analogous to (i)) that induces the filtration F_n^γ.

The spectral seqences $E^1_{p,q}$ and $\widetilde{E}^1_{p,q}$ are those induced by the filtration F_* and converge to $\pi_*(THH(A))$ and $H_*(THH(A), K)$ thanks to property (iii) and Mittag-Leffler condition.

iii) : It is well known that the skeleton filtration on $THH(A)$ induces a converging spectral sequence (*cf.* [**Bo2**])

$$G^2_{r,s} = HH_r(H_*(A, K))_s \Rightarrow H_{r+s}(THH(A), K),$$

where, for a graded ring R_*, $HH_r(R_*)_s$ means the subgroup of the Hochschild homology $HH_r(R_*)$ generated by tensors of total degree s in $R_*^{\otimes *}$.

More precisely, since there is a well-known stable homotopy equivalence [**Bo1**]

$$THH(A)_r \cong A \wedge A \wedge ... \wedge A \ (r+1 \text{ factors}),$$

the term G^1 of this spectral sequence is

$$\begin{aligned} G^1_{r,*} &= H_*(THH(A)_r, K) \\ &\cong H_*(A, K)^{\otimes r+1} \end{aligned}$$

and Künneth's theorem implies

$$G^1_{r,*} = H_*(THH(A)_s, K) \cong H_*(A, K) \otimes ... \otimes H_*(A, K) \ (s+1 \text{ factors}).$$

The simplicial structure induced on $H_*(A, K)^{\otimes *}$ by the simplicial structure of $THH(A)$ is exactly the one defining the standard Hochschild complex. Hence, through this identification, the induced operations $\widetilde{\Phi^k}$ on $H_*(THH(A)_s, K)$ are defined by

$$(C_*(H_*(A, K), H_*(A, K)) \circ \varphi^r_s) \circ D_r^{-1}$$

where $C_*(B, B)$ stands for the Hochschild complex of an associative algebra. Hence these operations are the ones given by the *Fin*-abelian group

$$\mathcal{L}(A, A) = \left(q \mapsto A^{\otimes q+1}\right)$$

via Lemma 2.2.1. McCarthy ([**MCa2**] Example 3.8) has proved that these operations coincide up to the sign $(-1)^{k-1}$ with Loday's standard operations λ^k on the Hochschild complex (*cf.* [**Lo4**]).

Then it follows from [**Lo4**], Theorem 3.5 that $F_{n+2}(HH_r(H_s(A, K))) = 0$ when $r \leq n$. Consequently, for $r+s \leq n$, one has $F_{n+2}(HH_r(H_s(A, K))) = 0$ and we finally get $F_{n+2}(H_n(THH(A), K)) = 0$. The other claims are proved in the same way.

iv) : The theory of γ-rings ([**Hi**], [**Kr**]) implies that, when $k = \mathbb{Q}$, there is a decomposition in eigenspaces of the Adams operations

$$\pi_n(THH(A)) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{j \geq 1}^{\infty} \pi_n^{(j)}(THH(A), \mathbb{Q}).$$

But, as $\pi_n(THH(A)) \otimes \mathbb{Q} \cong H_n(THH(A), \mathbb{Q})$, the conclusion is an immediate consequence of *iii*).

□

Remark : (1) Lemma 2.2.2 and Theorem 2.2.1 also hold in the category of commutative B-algebras for a commutative $\mathbb{S}$-agebra B. Moreover if M is a symmetric A-bimodule over a commutative $\mathbb{S}$-algebra A, then the functor $THH(A, M)$ factors as

$$T\Delta^{op} \xrightarrow{\Theta} \Gamma^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\widetilde{TH(A,M)}} \Gamma sp.$$

The proof is similar to the one of Lemma 2.2.2. Again, Theorem 2.2.1 holds for $THH(A, M)$.

(2) Let X be any spectrum. We denote by $[X\,,\, THH(A)]_n$ the homotopy group of degree n maps $X \to THH(A)$, *i.e.*

$$[X\,,\, THH(A)]_n = \operatorname*{colim}_r [X(S^{n+r})\,,\, THH(A)(S^r)].$$

Here we denote $X(S^k)$ the k^{th}-space of the spectrum X. There is a product $THH(A) \wedge THH(A) \xrightarrow{m} THH(A)$ (see section 2.4) inducing a ring structure on $[X, THH(A)]_*$. Mimicking [**Kr**], Section 5, one can prove that the operations Φ^k induce a γ-ring structure on $[X, THH(A)]_*$. Moreover the ring structure is trivial when each $X(S^r)$ is a co-H-space.

2.3. λ-operations on $TC(A)$

2.3.1. Frobenius and restriction maps. — For the remainder of the paper we fix a prime number p and we denote by $C_p \subset S^1$ the cyclic group of p roots of unity.

In this section we first recall the definition of the Frobenius and restriction maps and then of the topological cyclic homology $TC(A)$ of an $\mathbb{S}$-algebra A. The standard reference for this is [**BHM**].

The group S^1 acts on every cyclic space and in particular on the cyclic Γ-space $THH(A)_*$. This action restricts to an action of C_{p^n} so that we get a Γ-space $k_+ \mapsto THH(A)^{C_{p^n}}$. If one identifies C_{p^n} with the multiplicative subgroup of S^1 generated by $e^{2i\pi/p^n}$, the group $C_{p^{n-1}}$ becomes a subgroup of index p in C_{p^n}. In particular, any fixed point of $THH(A)$ under the action of C_{p^n} is a fixed point of $THH(A)$ under the action of $C_{p^{n-1}}$. For any $n > 0$, we define the *Frobenius morphism* as the following inclusion

$$F = F_p : THH(A)^{C_{p^n}} \to THH(A)^{C_{p^{n-1}}}.$$

We denote $TF(A,p) = \operatorname*{holim}_{n,F} THH(A)^{C_{p^n}}$.

Now, consider the group C_p as a subgroup of C^{p^n}. Then there is an identification $C_{p^{n-1}} \cong C_{p^n}/C_p$.

It is well known (see [**BHM**]) that the subdivision $\mid \mathrm{sd}_p THH(A) \mid$ comes together with a simplicial action of the group C_p and that this action coincides with the C_p-action on $THH(A)$ through the homeomorphism

$$D : \mid \mathrm{sd}_p THH(A) \mid \xrightarrow{\simeq} THH(A).$$

Again, a R-simplex on $\mathrm{sd}_p THH(A)_{q-1}$ is given by a chain

$$X^0 \leftarrow X^1 \leftarrow ... \leftarrow X^r = x = (x_0, ..., x_{pq-1})$$

in I^{pq} and a map

$$f : S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_{pq-1}} \wedge \Delta^r_+ \to A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{pq-1}}) \wedge k_+.$$

The C_p-invariants are given by the diagonal map $\mathrm{diag}_p : I^q \to I^{pq}$ defined by

$$y \mapsto (y, y, ..., y).$$

Indeed, for a C_p-invariant X, there exists a chain

$$Y^0 \leftarrow ... \leftarrow Y^r = Y = (y_0, ..., y_{q-1})$$

such that $X^0 = \mathrm{diag}_p(Y^0)$, $X^1 = \mathrm{diag}_p(Y^1)$,..., $X^r = x = \mathrm{diag}_p(y)$ and the map f is equivalent to a C_p-equivariant map

$$f : (S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_{q-1}})^{\wedge p} \wedge \Delta^r_+ \to (A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{q-1}}))^{\wedge p} \wedge k_+.$$

Hence, there is a map $R_p : THH(A)^{C_p} \to THH(A)$ defined by

$$R_p(\mathrm{diag}_p(Y^0) \leftarrow ... \leftarrow \mathrm{diag}_p(Y^r)) = Y^0 \leftarrow ... \leftarrow Y^r$$

and

$$R_p(f) := f^{C_p} : S^{x_0} \wedge ... \wedge S^{x_{q-1}} \wedge \Delta^r_+ \to A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{q-1}}) \wedge k_+.$$

Since this map R_p is cyclic, the previous construction can be lifted to the $C_{p^{n-1}}$-fixed points on $THH(A)$. Finally, for every $n > 0$, one can define *restriction maps*

$$R = R_p : THH(A)^{C_{p^n}} \to THH(A)^{C_{p^{n-1}}}.$$

We denote $TR(A,p) = \operatorname*{holim}_{n;R} THH(A)^{C_{p^n}}$ henceforth.

We can now state the definition of $TC(A,p)$. Let RF be the category defined by objects $\{1, p, p^2, ..., p^n, ...\}$ and morphisms $r, f : p^k \to p^{k-1}$ $(k > 0)$ that satisfy $rf = fr$. As the maps R and F are commuting, there is a well-defined functor $RF \to \Gamma sp$ defined by $p^n \mapsto THH(A)^{C_{p^n}}$, $r \mapsto R$ and $f \mapsto F$.

The p-primary component of *topological cyclic homology* of an $\mathbb{S}$-algebra A is defined by

$$TC(A,p) = \operatorname*{holim}_{r,f \in RF} THH(A)^{C_{p^n}}.$$

2.3.2. Operations on $TC(A,p)$ when A is a commutative $\mathbb{S}$-algebra. — In characteristic p, whenever k is a natural number coprime with p, there are well defined operations Φ^k on the negative cyclic homology $HC_*^-(R)$ of a commutative ring R that extend the λ-operations on the Hochschild homology $HH_*(R)$ (see [**Lo4**], [**Lo5**]). In this section, we extend the operations Φ^k defined in Section 2.2.3 to $TC(A,p)$ under the condition k and p are coprime integers.

Theorem 2.3.1. — **i) :** *Let A be a commutative $\mathbb{S}$-algebra, p a prime number and k an integer coprime with p. The operations Φ^k defined on $THH(A)$ induce operations (still denoted) Φ^k on $TC(A,p)$ such that the ring $\pi_*(TC(A,p))$ with trivial multiplication becomes a γ-ring.*

ii) : *The canonical projection $TC(A,p) \to THH(A)$ is compatible with the Φ^k operations on both sides.*

iii) : *For every commutative ring k, the γ-ring structure induces canonical filtrations $F_n^\gamma(H_n(TC(A),k))$ on $H_n(TC(A,p),k)$. Whenever K is a field, one has $F_1^\gamma(H_n(TC(A),K)) = 0$ w.*

The proof of the theorem relies on the two following lemmas.

Lemma 2.3.1. — *Let A be a commutative $\mathbb{S}$-algebra and k an integer coprime with p. Then $\Phi^k : THH(A) \to THH(A)$ restricts to $THH(A)^{C_{p^n}}$ for any $n \geq 0$.*

Proof: Suppose given $x \in THH(A)^{C_{p^n}}$ and $m \in C_{p^n} \subset S^1$. Lemmas 2.2.1 and 2.2.2 imply that the family $(\Phi^k)_{k \geq 0}$ is a cyclic natural system on $THH(A)$. It follows from [**MCa2**], Lemma 1.4 that, for every k, one has

$$\begin{aligned} \Phi^k(m.x) &= (km).\Phi^k(x) \\ \Phi^k(x) &= (km).\Phi^k(x) \end{aligned}$$

Hence $\Phi^k(x)$ is fixed under the action of $k.m$ for all $m \in C_{p^n}$. But, since k is coprime with p, then $k.m$ runs over the whole group C_{p^n}, so that we have $\Phi^k(x) \in THH(A)^{C_{p^n}}$. □

Lemma 2.3.2. — *Let A be a commutative $\mathbb{S}$-algebra and k an integer coprime with p. The Φ^k commutes with $F = F_p$ and $R = R_p$.*

Proof: The commutativity of F with Φ^k is very easy to prove.

The commutativity of R with Φ^k follows from the commutativity of the following diagram (2.3.2.1), which we shall prove below.

$$\begin{array}{ccccc}
(THH(A))^{C_{p^n}} & \xleftarrow{D_p} & (\mid \mathrm{sd}_p THH(A) \mid^{C_p})^{C_{p^{n-1}}} & \xrightarrow{R} & (THH(A))^{C_{p^{n-1}}} \\
\uparrow{\scriptstyle D_k} & & \uparrow{\scriptstyle D_k} & & \uparrow{\scriptstyle D_k} \\
\mid \mathrm{sd}_k THH(A) \mid^{C_{p^n}} & \xleftarrow{D_p} & \mid \mathrm{sd}_{pk} THH(A) \mid^{C_{p^n}} & \xrightarrow{R} & \mid \mathrm{sd}_k THH(A) \mid^{C_{p^{n-1}}} \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi^k} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{sd}_p \varphi^k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^k} \\
(THH(A))^{C_{p^n}} & \xleftarrow{D_p} & \mid \mathrm{sd}_p THH(A) \mid^{C_{p^n}} & \xrightarrow{R} & (THH(A))^{C_{p^{n-1}}}.
\end{array} \qquad (2.3.2.1)$$

Let us check the commutativity of (2.3.2.1) From [**BHM**] 1.12, we have $\mathrm{sd}_k \mathrm{sd}_p X = \mathrm{sd_{kp}X} = \mathrm{sd_p sd_k X}$ and the commutativity of the following diagram (2.3.2.2)

$$\begin{tikzcd}
\mid \mathrm{sd_{pk}X} \mid \arrow[r, "D_p"] \arrow[dr, "D_{pk}"'] & \mid \mathrm{sd_k X} \mid \arrow[d, "D_k"] \\
& \mid X \mid .
\end{tikzcd} \qquad (2.3.2.2)$$

for every Γ-space X. In particular, we deduce that the following diagram (2.3.2.3) is also commutative.

$$\begin{tikzcd}
\mid THH(A) \mid & \mid \mathrm{sd_p THH(A)} \mid \arrow[l, "D_p"'] \\
\mid \mathrm{sd_k THH(A)} \mid \arrow[u, "D_k"] & \mid \mathrm{sd_{pk} THH(A)} \mid . \arrow[l, "D_p"] \arrow[u, "D_k"'] \arrow[ul, "D_{pk}"']
\end{tikzcd} \qquad (2.3.2.3)$$

Since D is a S^1-equivariant map, we deduce that the upper left square in Diagram (2.3.2.1) is commutative.

Now, we study the lower left square of (2.3.2.1). Let $(x, u) \in THH(A)_{kpq-1} \times \Delta_+^{q-1}$. The element $\varphi^k \circ D_p(x, u)$ is given by the composition

$$(x, u) \xrightarrow{1 \times d_p} \left(x, \frac{u}{p} \oplus \ldots \oplus \frac{u}{p}\right) \xrightarrow{\varphi^k} \left(\varphi^k(x), \frac{u}{p} \oplus \ldots \oplus \frac{u}{p}\right).$$

Likewise, $D_p \circ \varphi^k(x)$ is induced by

$$(x,u) \overset{\varphi^k\times 1}{\longrightarrow} \left(\varphi^k(x),u\right) \overset{1\times d_p}{\longrightarrow} \left(\varphi^k(x), \frac{u}{p} \oplus ... \oplus \frac{u}{p}\right)$$

which proves the commutativity of the lower left square of (2.3.2.1).

The commutativity of the upper right square of Diagram (2.3.2.1) follows from an analogous computation (we may also use of the naturality of the map D).

To complete the proof, it is enough to check that the lower right square is also commutative. Recall that a r-simplex in $THH(A)^{C_p}_{q-1}$ is fully determined by a chain

$$\mathrm{diag}X^0 \leftarrow \mathrm{diag}X^1 \leftarrow ... \leftarrow \mathrm{diag}X^r = \mathrm{diag}x \text{ where } x = (x_0,...,x_{q-1}) \in I^q$$

and a C_p-equivariant map $f : x \wedge \Delta^r_+ \to y \wedge k_+$ where

$$y = A(S^{x_0}) \wedge ... \wedge A(S^{x_{pq-1}}).$$

It follows from the formula given in Lemma 2.2.3 that

$$R(\varphi^k(\mathrm{diag}(x))) = R(\mathrm{diag}(x_0x_q...x_{(k-1)q},...)) = (x_0x_q...x_{(k-1)q},...).$$

It is easy to check that the computation of $\varphi^k(R(\mathrm{diag}(x)))$ yields the same result. $\square$

Proof of Theorem 2.3.1 :

i) : Recall that $TC(A,p) = \underset{r,f\in RF}{\mathrm{holim}}\, THH(A)^{C_{p^n}}$. Lemma 2.3.1 states that Φ^k restricts to each $THH(A)^{C_{p^n}}$ for k coprime with p. Moreover, Lemma 2.3.2 asserts that Φ^k commutes with R and F, hence it induces well-defined operation Φ^k on the homotopy limit. The relation $\Phi^r\Phi^s = \Phi^{rs}$ is a consequence of Theorem 2.2.1 (i).

i) : It follows easily from the definition of $TC(A,p)$.

: The proof of property $iii)$ is an easy consequence of Theorem 2.2.1.(iii).

$\square$

2.4. Adams operations and products

Product structures on $THH(A)$ and $TC(A,p)$ have been first studied by Hesselholt and Madsen ([**HM**]). Here we will follow Brun's presentation ([**Bru**]). When A is a commmutative $\mathbb{S}$-algebra, then the Γ-spaces $THH(A)$ and $TC(A,p)$ naturally becomes $\mathbb{S}$-algebras, *i.e.* there exist a product $m : THH(A) \wedge THH(A) \to THH(A)$ and $\check{m} : TC(A,p) \wedge TC(A,p) \to TC(A,p)$.

Theorem 2.4.1. — *Let A be a commutative $\mathbb{S}$-algebra. The following diagrams are commutative for all $k \geq 0$:*

$$\begin{array}{ccc} THH(A) \wedge THH(A) & \xrightarrow{m} & THH(A) \\ \Phi^k \wedge \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ THH(A) \wedge THH(A) & \xrightarrow{m} & THH(A), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TC(A,p) \wedge TC(A,p) & \xrightarrow{\check{m}} & TC(A,p) \\ \Phi^k \wedge \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ TC(A,p) \wedge TC(A,p) & \xrightarrow{\check{m}} & TC(A,p). \end{array}$$

Proof: First we deal with $THH(A)$. It is enough to check that the following diagram (2.4.1.1) is commutative for all $k, r \geq 1$.

$$\begin{tikzcd} THH(A)_r \wedge THH(A)_r \arrow[r, "\mu_r"] & THH(A)_r \\ \mathrm{sd_k THH(A)_r} \wedge \mathrm{sd_k THH(A)_r} \arrow[u, "D_k \wedge D_k"] \arrow[r, "\mathrm{sd_k}\mu_\mathrm{r}"] \arrow[d, "\varphi^k \wedge \varphi^k"'] & \mathrm{sd_k THH(A)_r} \arrow[u, "D_k"'] \arrow[d, "\varphi^k"] \\ THH(A)_r \wedge THH(A)_r \arrow[r, "\mu_r"] & THH(A)_r. \end{tikzcd} \tag{2.4.1.1}$$

For the upper square of the diagram, the commutativity follows easily from the naturality of D_*.

Now denote $\widetilde{G}(A, x, y)(s_+)$ the simplicial set whose m-simplices are given by

$$\widetilde{G}(A, x, y)_m(s_+) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}imp}{}^{,}(S^{x_0 \vee y_0} \wedge \ldots \wedge S^{x_r \vee y_r} \wedge \Delta^r_+ \,;\, A(S^{x_0 \vee y_0}) \wedge \ldots \wedge A(S^{x_r \vee y_r}) \wedge s_+).$$

We define $\widetilde{G}(A, x, y)$ the Γ-space $\Big(s_+ \mapsto \widetilde{G}(A, x, y)(s_+)\Big)$. The product m (see [**Bru**]) is given by the composition

$$\begin{array}{rcl} m : \underset{x \in I^r}{\mathrm{hocolim}}\, G(A, x) \wedge \underset{y \in I^r}{\mathrm{hocolim}}\, G(A, y) & \xrightarrow{i} & \underset{(x,y) \in (I \times I)^r}{\mathrm{hocolim}}\; G(A, x) \wedge G(A, y) \\ & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \underset{(x,y) \in (I \times I)^r}{\mathrm{hocolim}}\; \widetilde{G}(A, x, y) \\ & \xrightarrow{j} & \underset{z \in I^r}{\mathrm{hocolim}}\, G(A, z). \end{array}$$

The map i is induced by the smash product of Γ-spaces and the map j by the functor $\vee^r : I^r \times I^r \to I^r$.

There is a map $\check{\mu} : G(A, x) \wedge G(A, y) \to \widetilde{G}(A, x, y)$ which, to any map

$$f : S^x \wedge S^y \wedge \Delta^m_+ \to A(S^x) \wedge A(S^y) \wedge s_+,$$

associates the composite map

$$\begin{array}{lcl} S^{x_0\vee y_0}\wedge\ldots\wedge S^{x_r\vee y_r}\wedge\Delta^m_+ & \xrightarrow{T} & S^x\wedge S^y\wedge\Delta^r_+ \\ & \xrightarrow{f} & A(S^{x_0})\wedge\ldots\wedge A(S^{y_0})\wedge\cdots\wedge A(S^{y_r})\wedge s_+ \\ & \xrightarrow{\mu^k\circ T^{-1}} & A(S^{x_0\vee y_0})\wedge\ldots\wedge A(S^{x_r\vee y_r})\wedge s_+. \end{array}$$

This map induces a map

$$\widetilde{\mu}:\operatorname*{hocolim}_{(x,y)\in(I\times I)^r} G(A,x)\wedge G(A,y)\to\operatorname*{hocolim}_{(x,y)\in(I\times I)^r}\widetilde{G}(A,x,y).$$

The maps i and j clearly commute with Φ^k (for all $k\geq 0$). Hence, the commutativity of the lower square of (2.4.1.1) will follow from the commutativity of the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{sd_k THH(A)_k}\wedge\mathrm{sd_k THH(A)_k} \arrow[r, "\mathrm{sd_k}\widetilde{\mu}"] \arrow[d, "\varphi^k\wedge\varphi^k"'] & \mathrm{sd_k THH(A)_r} \arrow[d, "\varphi^k"'] \\ THH(A)_k\wedge THH(A)_k \arrow[r, "\widetilde{\mu}"] & THH(A)_k \end{tikzcd}$$

This is a consequence of the commutativity of the $\mathbb{S}$-algebra A, the proof being analogous to the one of Lemma 2.2.2.

The product $\breve{m}: TC(A,p)\wedge TC(A,p)\to TC(A,p)$ is given by the composite

$$\begin{array}{lcl} \breve{m}:\operatorname*{hocolim}_{x\in RF} THH(A)^{C_x}\wedge\operatorname*{hocolim}_{y\in RF} THH(A)^{C_y} & \xrightarrow{\mathrm{can}} & \operatorname*{hocolim}_{(x,y)\in RF\times RF} THH(A)^{C_x}\wedge THH(A)^{C_y} \\ & \xrightarrow{\mathrm{dg}^*} & \operatorname*{hocolim}_{z\in RF} THH(A)^{C_z}\wedge THH(A)^{C_z} \\ & \xrightarrow{m} & \operatorname*{hocolim}_{z\in RF} THH(A)^{C_z}. \end{array}$$

The maps can and dg^* are defined in [**HM**]. They are induced by the smash product of Γ-spaces and the diagonal functor $\mathrm{dg}: RF\to RF\times RF$.

The maps Φ^k commute with the structural maps of the category RF by Lemma 2.3.2, the diagonal map and the product m, hence with $\breve{m}$. $\square$

2.5. Discrete rings

2.5.1. Adams operation on THH(R). — Let R be a discrete ring. There is a natural Γ-space HR defined by

$$HR : \begin{cases} k_+ \mapsto R \oplus ... \oplus R \ (k \text{ factors}) \\ \\ (f : k_+ \to \ell_+) \mapsto HA(f)(a_1, ..., a_k) = (b_1, ..., b_\ell) \text{ with } b_j = \sum\limits_{f(i)=j} a_i. \end{cases}$$

The space HR is called the *Eilenberg-Mac Lane Γ-space associated to R.* The product map $R \otimes R \to R$ and the unit $k \to R$ give a $\mathbb{S}$-algebra structure on HR which is commutative when R is.

We define the *topological Hochschild homology* of the ring R as the space $THH(HR)$, often simply denoted $THH(R)$.

There exist operations λ^k and $\Phi^k = (-1)^{k-1}\lambda^k$ (known as λ-operations) defined on the Hochschild homology group of a commutative algebra (*cf.* [**Lo4**], [**Lo5**], [**MCa2**]). Given a commutative flat k-algebra R, there exist well known isomorphims ([**EKMM**]) $\pi_n^{Hk}(THH(HR)) \cong HH_n^k(R)$ where $THH^{Hk}(HR)$ is topological Hochschild homology in the category of Hk-algebra and $HH^k(R)$ the Hochschild homology of R in the category of k-algebra. In particular $\pi_n(THH(HR)) \otimes \mathbb{Q} \cong HH_n(R)$ when R contains $\mathbb{Q}$. If Moreover R is graded we denote $HH_r^k(R)_s$ its Hochschild homology groups where s is the internal degree and r the homology degree.

Theorem 2.5.1. — **i) :** *For a discrete commutative ring R which contains $\mathbb{Q}$ the following diagram is commutative for all $n \geq 1$*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(THH(HR)) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\simeq} & HH_n(R) \\ \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ \pi_n(THH(HR)) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\simeq} & HH_n(R). \end{array}$$

ii) : *Suppose R is a flat commutative k-algebra where k a commutative ring with unit. Then the following diagram is commutative for all $n \geq 1$:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(THH^{Hk}(HR)) & \xrightarrow{\simeq} & HH_n(R) \\ \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ \pi_n(THH^{Hk}(HR)) & \xrightarrow{\simeq} & HH_n(R). \end{array}$$

iii) : *If A is a commutative $\mathbb{S}$-algebra and K is any field, then there is a converging spectral sequence*

$$G^2_{r,s} = HH_r^K(H_*(A,K))_s \Rightarrow H_{r+s}(THH(A), K)$$

such that the operations Φ^k induced on the term $G^2_{*,*}$ coincide with the standard λ-operations on the Hochschild homology.

Proof: We proceed as in the proof of Theorem 2.2.1. The space $THH(A)$ is the cyclic Γ-space $q \mapsto THH(A)_q$. It is well known ([**Bo1**]) that the filtration of $THH(A)$ by its skeleta gives rise to a first quadrant spectral sequence $G^2_{r,s} = HH^K_r(H_*(A,K))_s$ converging towards $H_{r+s}(THH(A), K)$ for any field K. Its first term is

$$G^1_{r,*} = H_*(A,K)^{\otimes r+1}.$$

The cyclic structure of $THH(A)$ induces the structure of a cyclic space $q \mapsto H_*(A,K)^{\otimes q+1}$ which was shown to be the structure defining the Hochschild complex of $H_*(A,K)$ (as an K-algebra). The operations Φ^k come only from the factorisation of the cyclic structure of $THH(A)$ as a *Fin*-structure. Hence, as in the proof of Theorem 2.2.1.(iii), we find that the Φ^k operations induced on the Hochschild complex $C_*(H_*(A,K))$ coincide with the standard Φ^k operations on it. This proves (iii).

Now, if $A = HR$ with $\mathbb{Q} \subset R$, one has $H_0(HR,\mathbb{Q}) = R \otimes \mathbb{Q} = R$ and $H_n(HR,\mathbb{Q}) = 0$ for $n \geq 1$. Hence the spectral sequence collapses and we have $HH_n(R) = HH^{\mathbb{Q}}_n(R) \cong H_n(THH(HR), \mathbb{Q})$. But, since R contains $\mathbb{Q}$, we get

$$\pi_n(THH(HR)) \otimes \mathbb{Q} \cong H_n(THH(R), \mathbb{Q}) \cong HH_n(R)$$

which proves (i).

Finally, when R is a flat k-algebra, the spectral sequence coming from the skeleta filtration has a first term :

$$G^1_{r,0} = R \otimes_k ... \otimes_k R \ (r+1 \text{ factors}) \text{ and } G^1_{r,s} = 0 \text{ if } s \geq 1$$

because $HR^{\wedge_{Hk} r+1} \cong HR^{\otimes_k r+1}$ (*cf.* [**Ro**],[**Sc**]). The beginning of this proof together with the collapsing of the spectral sequence give (ii).

□

Example : Bökstedt [**Bo2**] proved that $\pi_n(THH(\mathbb{Z}/p)) = \mathbb{Z}/p$ when n is even and is 0 for n odd. We now compute the operations φ^k acting on $\pi_*(THH(\mathbb{Z}/p))$. The proof of Bökstedt relies on the fact that $THH(\mathbb{Z}/p)$ is an Eilenberg-Mac Lane spectra and the analysis of the spectral sequence $G^2_{*,*}$ of theorem 2.5.1.(iii) converging to $H_*(THH(\mathbb{Z}/p), F_p)$, where F_p denotes the field with p element. In fact, for all $q \geq 0$, there is equivalence

$$HF_p \wedge THH_q(\mathbb{Z}/p) \cong HF_p \wedge (HF_p)^{q+1} \cong (HF_p \wedge HF_p) \wedge_{HF_p} (HF_p)^{q+1}$$

hence (by [**Ro**].12.2) the spectral sequence takes the form

$$G^2_{*,*} = HH_*(H_*(HF_p, F_p)) \Longrightarrow H_*(HF_p, F_p) \otimes \pi_*(THH(\mathbb{Z}/p)).$$

It is well known that $H_*(HF_p, F_p)$ is the symmetric graded $\mathbb{Z}/p$-algebra on generators $(\xi_i)_{i\geq 1}$ of degrees $2^i - 1$ if $p = 2$ and $(\xi_i)_{i\geq 1}, (\tau_j)_{j\geq 0}$ of respective degree $2p^i - 2$, $2p^j - 1$. Bökstedt shows that in the case $p = 2$, the spectral sequence collapses at level $G^2_{*,*}$ and that, for p odd, the term $G^\infty_{*,*}$ is generated by the elements $d\tau_j$ in $HH_1(H_*(HF_p, F_p)) \cong \Omega_{H_*(HF_p,F_p)}$ (the module of Kähler differential).

But the standard Adams operations λ^k on Hochschild homology acts on $d\tau_j \in HH_1(H_*(HF_p, F_p))$ by multiplication by k. Then Theorem 2.5.1.(iii) insures that operations λ^k acts on $\pi_{2n}(THH(\mathbb{Z}/p))$ by multiplication by $k^{c_1+\cdots+c_{\ell(n)}}$ where the c_j are the digits of the unique decomposition $n = c_1 p^{i_1} + \ldots c_{\ell(n)} p^{i_{\ell(n)}}$ of n in base p. Moreover $F^\gamma_{c_1+\cdots+c_{\ell(n)}+2}\pi_{2n}(THH(\mathbb{Z}/p)) = 0$.

Corollary 2.5.1. — *For a commutative ring R over $\mathbb{Q}$, the term $E^1_{p,1}$ of the spectral sequence of Theorem 2.2.1.(ii) is isomorphic to the p^{th} Harrison homology group of the ring R, denoted $Harr_p(R)$ henceforth.*

Proof: By Theorem 2.5.1 the term $E^1_{p,1}$ of the spectral sequence is isomorphic to the term $E^1_{p,1}$ of the spectral sequence associated to the λ-filtration on the Hochschild complex (see [**Lo4**]). Theorem 3.5.(c) of [**Lo4**] implies that this term is precisely $Harr_p(R)$. □

Remark : Clearly the same proof insures that, when R is a flat commutative k-algebra, the term $E^1_{p,1}$ of the spectral sequence associated to $THH^{Hk}(HR)$ of Theorem 2.2.1.(ii) is isomorphic to Harrison homology $Harr_n(R)$ of R as a k-algebra.

The previous corollary leads naturally to a definition of topological Harrison homology for commutative $\mathbb{S}$-algebra.

Définition 2.5.2. — *The topological Harrison homology of a commutative $\mathbb{S}$-algebra A is the cofiber*

$$THarr(A) = F_2/F_3$$

where F_* is the filtration of Theorem 2.2.1 on $THH(A)$ induced by the Adams operations.

In particular the topological Harrison homology groups with value in the commutative ring k are

$$H_*(THarr(A), K) = E^1_{*,2}$$

where $E^1_{*,*}$ is the spectral sequence of Theorem 2.2.1.(ii).
Example : We want to compute $\pi_*(THarr(H\mathbb{Z}/p))$. We proceed as in the example following Theorem 2.5.1. Similarly to the case of Theorem 2.5.1.(iii), the skeleta filtration induces a spectral sequence

$$Harr_*(H_*(HF_p, F_p)) \Longrightarrow H_*(THarr(HF_p), F_p) \cong H_*(HF_p, F_p) \otimes \pi_*(THarr(HF_p)).$$

But for $A = \mathbb{Z}/p$, $Harr_p(H_*(A, F_p)) = 0$ for $p \geq 2$ and the spectral sequence collapses. Hence, the topological Harrison homology group of $\mathbb{Z}/2$ are

$$\pi_{2^i}(THarr(\mathbb{Z}/2)) = \mathbb{Z}/2 \text{ for } i \geq 0 \quad \text{and} \quad \pi_n(THarr(\mathbb{Z}/2)) = 0 \text{ if } n \neq 2^i.$$

In the case of $\mathbb{Z}/p$, these groups are

$$\pi_{2p^i-1}(THarr(\mathbb{Z}/p)) = \pi_{2p^i}(THarr(\mathbb{Z}/p)) = \mathbb{Z}/p \text{ for } i \geq 0$$

and $\pi_n(THarr(\mathbb{Z}/p)) = 0$ if $n \neq 2p^i - 1$ or $2p^i$.

As this section deals with linear categories, it is of interest to restrict one's attention to Γ-spaces that factors through functors $\Gamma^{\mathrm{op}} \to s\mathcal{A}b$ (where $s\mathcal{A}b$ stands for the category of simplicial abelian groups), that is to say to Γ-simplicial abelian groups (see [**Bru**], [**Du1**] for details). Henceforth we denote the category of Γ-simplicial abelian groups by $\Gamma s\mathcal{A}b$. The Eilenberg-MacLane functor $H : s\mathcal{A}b \to \Gamma\mathrm{sp}$ factors through the forgetful functor $U : \Gamma s\mathcal{A}b \to \Gamma\mathrm{sp}$ to give a functor $\bar{H} : s\mathcal{A}b \to \Gamma s\mathcal{A}b$. The category $\left(\Gamma s\mathcal{A}b, \otimes, \bar{H}\mathbb{Z}\right)$ is symmetric monoidal with unit $\bar{H}\mathbb{Z}$. An $\bar{H}\mathbb{Z}$-algebra is a monoid in this category. When R is a commutative ring, $\bar{H}R$ is a commutative $\bar{H}\mathbb{Z}$-algebra.

Theorem 2.5.2. — *Let A be an $\bar{H}\mathbb{Z}$-algebra and M a A-bimodule. Then the filtration induced by the operations Φ^k satisfies $F^{\gamma}_{n+2}\pi_n(THH(A, M)) = 0$ and*

$$F^{\gamma}_1(\pi_n(THH(A, M)) = F^{\gamma}_2\pi_n(THH(A, M)) = \pi_n(THH(A, M)).$$

The same results also holds for the filtration $F_*\pi_*(THH(A, M))$.

The theorem applies to $A = \bar{H}R$ and $M = \bar{H}R$, with R a (simplicial) ring, hence the result holds for $\pi_*THH(HR)$.

Proof: Replacing smash product by tensor product in the definition of THH gives an algebraic analogous theory for $\bar{H}\mathbb{Z}$-algebras (*cf.* [**Bru**], [**Du1**]) as follows. The γ-simplicial abelian group $AG(A, M, x)$ has q-simplices given by :

$$AG(A, M, x)_q(k_+) = \mathrm{Hom}_{s\mathcal{A}b}\left(\mathbb{Z}(S^{x_0})\otimes ... \otimes \mathbb{Z}(S^{x_q})\ ;\ M(S^{x_0})\otimes ... \otimes A(S^{x_q})\otimes \mathbb{Z}(k_+)\right)$$

whith $\mathbb{Z}(X) = \mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}*$. For a commutative $\bar{H}\mathbb{Z}$-algebra A and a bimodule M, we define

$$\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(A, M)_q = \operatorname*{hocolim}_{x \in I^{q+1}} AG(A, M, x)_q$$

The structure maps are analogous to those of $THH(A, M)$. The proof of Lemma 2.2.2 can be mimicked to show that there is a factorisation of the functor $\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(A,M)} \Gamma s\mathcal{A}b$ through Γ^{op} :

$$\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(A, M) := \qquad \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\Theta} \Gamma^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\widetilde{\underline{HH}}^{\mathbb{Z}}(A,M)} \Gamma s\mathcal{A}b.$$

Hence Lemma 2.2.1 gives Adams operations Φ^r on $\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(A,M)$. It is well known ([**Du1**]) that the inclusion

$$M(S^{x_0}) \wedge \ldots \wedge A(S^{x_q}) \wedge k_+ \mapsto M(S^{x_0}) \otimes \ldots \otimes A(S^{x_q}) \otimes \mathbb{Z}(k_+)$$

induces an equivalence $THH(A,M) \cong \underline{HH}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(A),M)$. It is straightforward to check that the previous map is compatible with λ-operations.

As $\widetilde{\underline{HH}}^{\mathbb{Z}}(A,M)$ is a Γ-Γ-simplicial abelian group, Loday's explicit combinatorial operations λ^k [**Lo4**] (lying in $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$) are defined on $\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(A,M)$. But the computations in [**MCa2**] Section 3, Lemma 2.2.3 and [**MCa2**] 3.9 imply that Loday's λ^k operations coincide (up to a sign) with the previous operations Φ^k defined on $\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(A,M)$. Then the combinatorial computation in [**Lo4**] 3.9 (also see [**Lo5**] 6.4.5) yields the desired result. □

Corollary 2.5.3. — *For any $\mathbb{S}$-algebra A, the following identities hold :*

$$F_1^{\gamma}(\pi_n(THH(A)) = F_2^{\gamma}\pi_n(THH(A)) = \pi_n(THH(A)),$$

$$F_{n+2}^{\gamma}\pi_n(THH(A)) = 0 \qquad \textit{and} \qquad F_1^{\gamma}(\pi_n(TC(A)) = \pi_n(TC(A)).$$

Proof: By results of Dundas [**Du1**], we know that exists an equivalence

$$THH(A) \xrightarrow{\simeq} \operatorname*{holim}_{S\in\mathcal{P}-\emptyset} THH((A)_S)$$

where $\mathcal{P}$ is the set of finite partitions of $\{1,2,\ldots\}$ and each $\mathbb{S}$-algebra $(A)_S$ is equivalent to an Eilenberg-Mac Lane Γ-space $H(R)_S$ for some simplicial ring $(R)_S$. The construction of the $\mathbb{S}$-algebra $(A)_S$ is based on the iteration of the adjunction $A \mapsto U\mathbb{Z}(A)$. As already seen in the proof of Theorem 2.5.2, the λ-operations are compatible with the two functors U and $\mathbb{Z}(-)$. Hence it suffices to prove the result for each $H(R)_S$ which was done in Theorem 2.5.2. □

Remark : The results of this section could be lifted to the category of simplicial discrete rings.

2.5.2. Mac Lane homology. — It is known from Pirashvili and Waldhausen [**PW**] that, for any discrete ring R, there is a natural isomorphism $\pi_*(THH(HR,H)) \cong H_*^{ML}(R,R)$ where $H_*^{ML}(R,R)$ is the Mac Lane homology of the ring R. Throughout this section, for any category $\mathcal{C}$ and c,d two objects in $\mathcal{C}$, we use the notation $\mathcal{C}(c,d)$ for the set of morphism from c to d in $\mathcal{C}$.

Let $\mathcal{P}_R$ be the additive category of finitely generated projective modules over the commutative ring R. The Mac Lane homology of R is the homology of the simplicial module

$$q_+ \mapsto D_q(R) = \bigoplus_{c_0\leftarrow c_1\leftarrow\cdots\leftarrow c_q} \mathcal{P}_R(c_0,c_q)$$

with faces and degeneracies defined as for the Hochschild complex (*cf.* [**JP**]). McCarthy defined λ-operations on Mac Lane homology in [**MCa2**], Section 6 in the following way : let T^r be a linear functor from $\mathcal{P}_R^r$ to $\mathcal{P}_R$ such that, for any $p_1, \cdots, p_r \in \mathcal{P}_R$, we have

$$T^r(p_1,\dots,p_r) = p_1 \otimes \cdots \otimes p_r \qquad \text{and} \qquad T^r(R,\dots,R) = R.$$

We denote τ a natural isomorphism $T^r \to T^r \circ t$ where $t(p_1,\dots,p_r) = (p_r, ..., p_1)$. Now, for any $= (f_0, \dots\dots, \dots f_{r(q-1)}) \in \mathrm{sd_r(D_*(R))_{q-1}}$ (with $f_i \in \mathcal{P}_R(c_{i+1}, c_i)$, we define

$$\varphi^r(f_0, \dots\dots, \dots f_{r(q-1)}) =$$
$$\big(\tau \circ T^r(f_0,\dots,f_{(r-1)q}), T^r(f_1,\dots,f_{(r-1)q+1}),\dots,T^r(f_{q-1},\dots,f_{(qr-1)})\big)$$

These maps define a natural system on $D_*(R)$ (see [**MCa2**]), hence yield Adams operations Φ^k on $H_*^{ML}(R,R)$.

Theorem 2.5.3. — *There is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} H_*^{ML}(R,R) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_*(THH(HR,HR)) \\ \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ H_*^{ML}(R,R) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_*(THH(HR,HR)). \end{array}$$

Proof: The map $\varphi^r : \mathrm{sd_r D_*(R) \to D_*(R)}$ above also induces a natural system on the simplicial abelian group with q-simplices

$$C\mathcal{P}_q(R) = \bigoplus_{c_0 \leftarrow c_1 \leftarrow \cdots \leftarrow c_q} \mathcal{P}_R(c_0, c_q) \otimes \bigotimes_{i=1}^{q} \mathbb{Z}\,(\mathcal{P}_R)\,(c_i, c_{i-1}).$$

Again the faces and degeneracies are defined as for Hochschild homology. There is a map $\alpha : F_*(R) \to C\mathcal{P}_*(R)$ sending $c_0 \leftarrow \cdots \leftarrow c_q$ to its class in $C\mathcal{P}_q(R)$; it induces an isomorphism in homology (*cf.* [**Du2**]). By construction, α commutes with the maps φ^r.

Topological Hochschild homology can be defined for any Γ-simplicial category $\mathcal{C}$ (see [**Du1**]). The definition is like the one for topological Hochschild homology of a $\mathbb{S}$-algebra with $A(S^{x_0}) \wedge \cdots \wedge A(S^{x_q})$ replaced by the joint

$$\bigvee_{c_0,\dots,c_q \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(c_0, c_q)(S^{x_0}) \wedge \cdots \wedge \mathcal{C}(c_q, c_{q-1})(S^{x_q})$$

in the definition of $G(A,x)$ (Section 2.2.3). Again, the maps φ^r above are compatible with the morphisms of the category I^{q+1} and the simplicial structure of $q_+ \mapsto THH_q(\mathcal{P}_R)$ (the proof is like the one of Lemma 2.2.2), hence yield a natural system on $THH(\mathcal{P}_R)$.

We denote $\mathcal{P}_R^\vee$ the Γ-simplicial category with the same objects as $\mathcal{P}_R$ and morphism $\mathcal{P}_R^\vee(c,d)(k_+) = \mathcal{P}_R(c, \bigvee^k d)$. From [**Du3**], we have the homotopy equivalence $H\mathcal{P}_R(c,d) \cong \mathcal{P}_R^\vee(c,d)$. We denote $\mathbb{Z}(S^x) = \mathbb{Z}(S^{x_0}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}(S^{x_q})$, from [**Du2**], Section 4, we know that there is a simplicial abelian group $\mathcal{R}(R)$ with q-simplices given by

$$\mathcal{R}_q(R) = \operatorname*{holim}_{x\in I^{q+1}} s\mathcal{A}b \left(\mathbb{Z}(S^x)\,;\ \bigoplus_{c_0,\ldots,c_q\in\mathcal{P}_R} \mathcal{P}_R^\vee(c_0,c_q)(S^{x_0}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{q} \mathbb{Z}\left(\mathcal{P}_R^\vee\right)(c_i,c_{i-1})(S^{x_i}) \otimes - \right)$$

and equivalences

$$C\mathcal{P}(R) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}(R) \xleftarrow{\simeq} THH(H\mathcal{P}_R). \tag{2.5.3.1}$$

The last map is similar to the equivalence $\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\bar{H}R), \bar{H}R) \cong THH(HR)$ in the proof of Theorem 2.5.2 and it is straightforward to check that it commutes with the natural system φ^k.

The ring R is a projective module over itself. Thus, there is a map

$$\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\bar{H}R), \bar{H}R) \xrightarrow{\beta} \mathcal{R}(R)$$

where $\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\bar{H}R, \bar{H}R))$ is the Γ-abelian group defined in the proof of Theorem 2.5.2. As $\underline{HH}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\bar{H}R, \bar{H}R)) \cong THH(HR)$ [**Du1**], this map β is an equivalence by the left equivalence of (2.5.3.1) and Morita equivalence of $THH(HR)$ (see [**DMC**], 2.5). The formula of Lemma 2.2.3 implies that the map β is compatible with the operations φ^k defined in this proof and in the proof of Theorem 2.5.2. The latter then implies the desired result. □

2.5.3. Homotopy fixed points. — In this section we are looking for compatibility results between the λ-operations on (negative) cyclic homology of a ring and topological Hochschild and cyclic homology. There are canonical maps

$$\gamma_n : THH(A)^{C_{p^n}} \longrightarrow THH(A)^{hC_{p^n}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}imp'}(EC_{p^n+}, THH(A))^{C_{p^n}}$$

between fixed points of $THH(A)$ and homotopy fixed points $THH(A)^{hC_{p^n}}$. Taking homotopy limits induces a map

$$\Gamma_p : TF(A,p) \longrightarrow \operatorname*{holim}_{n,F_p} THH(A)^{hC_{p^n}}.$$

After p-adic completion we have a map

$$\Gamma : TF(A,p)\widehat{_p} \to (THH(A)^{hS^1})\widehat{_p}.$$

It follows from Lemma 2.3.2 that the operations Φ^k extend to $TF(A,p)$ for k coprime with p. Moreover, there exist operations $\widetilde{\Phi^k}$ on $THH(A)^{hC_{p^n}}$ defined by composition : if $f : EC_{p^n+} \to THH(A)$, then $\widetilde{\Phi}^k(f) = \Phi^k \circ f$. After p-adic completion Φ^k induces operations on $(THH(A)^{hS^1})\widehat{_p}$.

Theorem 2.5.4. — *For a commutative $\mathbb{S}$-algebra A the following diagram is commutative :*

$$\begin{array}{ccc} TF(A,p)\hat{}_p & \xrightarrow{\Gamma} & (THH(A)^{hS^1})\hat{}_p \\ \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ TF(A,p)\hat{}_p & \xrightarrow{\Gamma} & (THH(A)^{hS^1})\hat{}_p. \end{array}$$

Proof: It is clear that the operations Φ^k commute with the maps γ_n. Moreover they are compatible with the various colimits hence the result. □

For a discrete ring R there are wellknown isomorphims $\pi_n(THH(HR)^{hS^1}) \otimes \mathbb{Q} \cong HC_n^-(R\otimes\mathbb{Q})$ (see [**CJ**]) between the homotopy groups of $THH(HR)^{hS^1}$ and the negative cyclic homology groups $HC_*^-(R)$ after rationalization. Moreover there exist operations Φ^k on the negative cyclic homology of a ring (see [**Lo5**]).

Theorem 2.5.5. — *Given a discrete ring R there is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(THH(HR)^{hS^1}) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\simeq} & HC_n^-(R\otimes\mathbb{Q}) \\ \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ \pi_n(THH(HR)^{hS^1}) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\simeq} & HC_n^-(R\otimes\mathbb{Q}) \end{array}$$

where the left vertical arrow is Loday's λ-operation Φ^k.

When k is a commutative unital algebra over a field K and R is a flat commutative k-algebra, there is a commutative diagram, for all $n \geq 0$ and k coprime with the characteristic of K,

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(THH^{Hk}(HR)^{hS^1}) & \xrightarrow{\simeq} & HC_n^-(R) \\ \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ \pi_n(THH^{Hk}(HR)^{hS^1}) & \xrightarrow{\simeq} & HC_n^-(R) \end{array}.$$

Proof: The complex $\mathcal{B}C_*^-(R)$ defining negative cyclic homology $HC_*^-(R)$ is the complex

$$\left(\sum_{k\geq 0} C_*(R,R)u^k, b+Bu\right),$$

where u is a degree -2 variable, B is Connes's operator and $C_*(R,R)$ is the Hochschild complex of R ([**Lo5**]). The operations Φ^k on $\mathcal{B}C_*^-(R)$ are given by $\Phi^k(xu^j) = k^{-j}\Phi^k(x)u^j$ and linearity. The filtration by columns induces a converging spectral sequence whose first term is $HH_{r+s}(R)$.

The space $S^\infty = \varinjlim_{n\geq 0} S^{2n+1}$ is a classifying space for S^1. Therefore,

$$THH(HR)^{hS^1} \cong Top_{S^1}(S^\infty, THH(HR)).$$

Following Cohen and Jones [**CJ**] we observe that there is a spectral sequence associated to the system

$$\cdots \to Hom_{S^1}(S^{2n+1}, THH(HR)) \to \ldots \to Hom_{S^1}(S^3, THH(HR)) \to THH(HR)$$

converging towards $\pi_*(THH^{Hk}(HR)^{hS^1})$. The term $E^1_{r,s}$ of this spectral sequence is $\pi_{r+s}(THH^{Hk}(HR)) \cong HH_{r+s}(R)$, the boundary map being induced by the S^1-action. In particular, we can replace $THH(HR)$ by the standard Hochschild cyclic module $q \mapsto R^{\otimes q+1}$ (denoted $HH(R,R)$). It follows from Theorem 2.5.1.(ii) that Adams operations are preserved under this identification. Hence it is enough to prove that the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} H_n(HH(R,R)^{hS^1}) & \xrightarrow{\simeq} & HC_n^-(R\otimes F) \\ \Phi^k \downarrow & & \downarrow \Phi^k \\ H_n(HH(R,R)^{hS^1}) & \xrightarrow{\simeq} & HC_n^-(R\otimes F). \end{array}$$

The isomorphism $H_n(HH(R,R)^{hS^1}) \cong HC_n^-(R)$ is established in [**CJ**], Lemma 1.3. The equivalence of operations on both sides holds at the level $E^1_{r,s}$, hence on the abutment.

To prove the result for $\pi_n(THH(HR)^{hS^1}) \otimes \mathbb{Q}$, one proceeds along the same path : replace $\pi_*(THH^{Hk}(HR)^{hS^1})$ by $\pi_*(THH(HR)^{hS^1}) \otimes \mathbb{Q}$ and use Theorem 2.5.1.(i) instead of 2.5.1.(ii). □

There is a homotopy cofiber sequence ([**BHM**], [**HM**]), called the norm-restriction sequence,

$$THH(A)_{hC_{p^n}} \xrightarrow{N} THH(A)^{C_{p^n}} \xrightarrow{R} THH(A)^{C_{p^{n-1}}}$$

which is somehow analogous to Connes's SBI sequence in cyclic homology ([**Lo5**], [**BHM**]).

Theorem 2.5.6. — *For k coprime with p, there exists operations $(\Phi^k)_{k\geq 0}$ on $THH(A)_{hC_{p^n}}$ such that the following diagram is commutative :*

$$\begin{array}{ccccc} THH(A)_{hC_{p^n}} & \xrightarrow{N} & THH(A)^{hC_{p^n}} & \xrightarrow{R} & THH(A)^{hC_{p^{n-1}}} \\ \Phi^k \downarrow & & \Phi^k \downarrow & & \Phi^k \downarrow \\ THH(A)_{hC_{p^n}} & \xrightarrow{N} & THH(A)^{hC_{p^n}} & \xrightarrow{R} & THH(A)^{hC_{p^{n-1}}}. \end{array}$$

Proof: Recall that $THH(A)_{hC_{p^n}}$ is the Γ-space $k_+ \mapsto EC_{p^n} \wedge_{C_{p^n}} THH(A)(k_+)$, where EC_{p^n} is a free contractible C_{p^n}-space. Henceforth, we take the bar construction on C_{p^n} as a model for EC_{p^n} that is to say EC_{p^n} has q-simplices $C_{p^n}^{q+1}$ and C_{p^n} acts by multiplication on the first factor. We identify C_{p^n} with the subgroup of S^1 generated by $e^{2i\pi/p^n}$. There is a map $\widetilde{\Phi}^k : EC_{p^n} \to EC_{p^n}$, defined for any $y \in C^*_{p^n}$ and $e^{2i\ell\pi/p^n} \in C_{p^n}$, by

$$\widetilde{\Phi}^k(e^{2i\ell\pi/p^n} \times y) = e^{2ik\ell\pi/p^n} \times y.$$

For k coprime with p, we define $\Phi^k : THH(A)_{hC_{p^n}} \to THH(A)_{hC_{p^n}}$ as the map defined, for any $e \in EC_{p^n}$ and $t \in THH(A)$, by

$$e \wedge t \mapsto \widetilde{\Phi}^k(e) \wedge \Phi^k(t).$$

This is welldefined because the C_{p^n}-action is compatible with Φ^k in the sense that, for any $x \in C_{p^n}$ and $t \in THH(A)$ we have $\Phi^k(x.t) = \widetilde{\Phi}^k(x).\Phi^k(t)$. Indeed, we can make the C_{p^n}-action simplicial *via* the identification $THH(A) \cong |\mathrm{sd}_{p^n} THH(A)_*|$. Hence we have a *Fin*-$\Gamma$-space $\big(q \mapsto EC_{p^n} \wedge_{C_{p^n}} (\mathrm{sd_{p^n}THH(A)})_\mathrm{q}\big)$. The theorem then follows from the commutativity of the two left squares of Diagram (2.3.2.1) and the simpliciality of the operations Φ^k given by Lemma 2.2.1. □

2.6. Operations on $thh(A)$ and $A \otimes S^1$

There exist two other definitions for topological Hochschild homology given by Elmendorff, Kriz, Mandell and May [**EKMM**] and McClure, Schwänzl and Vogt [**MCSV**]. We refer to [**EKMM**] for definitions and notations. Howewer these theories can not be used to define topological cyclic homology. Nevertheless, in this section we extend our construction to these two models for topological Hochschild homology.

Suppose given (for the remainder of the section) a q-cofibrant commutative $\mathbb{S}$-algebra L and a L-algebra B (*i.e.* $\mu : B \wedge_L B \to B$, $\eta : L \to B$).

There exists a cyclic L-module $thh^L(B)_*$ such that

$$thh^L(B)_q = B^{\wedge_L (q+1)}$$

for all $q \geq 0$ and the structural maps are the faces

$$d_i = \begin{cases} \mathrm{id}^i \wedge \mu \wedge \mathrm{id}^{q-i} \text{ si } 0 \leq i \leq q-1, \\ \mu \wedge \mathrm{id}^q \circ \tau \text{ si } i = q, \end{cases}$$

degeneracies $s_j = \mathrm{id}^j \wedge \eta \wedge \mathrm{id}^{q-j+1}$ and the permutation t on the $q+1$ factors of $thh^L(B)_q$. We denote $thh^L(B)$ the geometric realisation of $thh^L(B)_*$.

The functor $q \mapsto thh^L(B)_q$ being cyclic, the results of section 2.2.3 extend without difficulty to $thh^L(B)$

Lemma 2.6.1. — *There exists a factorisation of $thh^L(B)$ of the form*

$$thh^L(B) : \Delta^{op} \xrightarrow{\Theta} Fin' \xrightarrow{\widetilde{thh(B)}} \Gamma sp$$

if and only if B is commutative.

Proof: It is analogous to the proof of Lemma 2.2.2. In particular, the functor $\widetilde{thh(B)}$ is given by $\widetilde{thh(B)}_n = thh^L(B)$ and, for any map $\delta : [n] \to [m]$ and $b = (b_0, ..., b_n) \in B^{\wedge(n+1)}$, we define $\delta(b) = (y_0, ..., y_m)$, where $y_i = \mu(b_{i_1}, ..., b_{i_k})$ (we set $\delta^{-1}(i) = \{i_1, ..., i_k\}$ and $y_i = 0_+$ if $\delta^{-1}(i) = \emptyset$). □

Theorem 2.6.1. — *Suppose given a commutative L-algebra B. The operations*

$$\Phi^k = (thh(B) \circ \varphi^k) \circ D_k^{-1} : thh(B) \to thh(B)$$

induce a structure of λ-ring on $\pi_*(thh^L(B))$ equipped with trivial multiplication.

Proof: Lemma 2.6.1 and Lemma 2.2.1 imply that the operations $\varphi^k = (thh(B) \circ \varphi^k)$ define a (cyclic) natural system on $thh^L(B)$. The remainder of the proof proceeds as for Theorem 2.2.1.(i). □

We know from Shipley [**Sh**] that for a cofibrant $\mathbb{S}$-algebra B, the two spaces $thh^L(B)$ and $THH(B)$ are homotopically equivalent when B is a cofibrant $\mathbb{S}$-algebra.

Theorem 2.6.2. — *Let B be a cofibrant L-algebra. The equivalence between $thh^L(B)$ and $THH^L(B)$ preserve the operations Φ^k.*

Remark : As a consequence, Theorem 2.2.1 and Corollary 2.5.3 hold for $thh^L(B)$.

Proof: According to [**Sh**], the equivalence is induced by a "zigzag" map Θ between the simplicial spaces defining $thh^L(B)$ and $THH^L(B)$ defined by

$$R^{\wedge_L(*+1)} \overset{\alpha}{\to} L(R^{\wedge_L(*+1)}) \overset{\beta}{\to} ML(R^{\wedge_L(*+1)}) \overset{\gamma}{\leftarrow} DL(R^{\wedge_L(*+1)}) \overset{D\alpha}{\leftarrow} D(R^{\wedge_L(*+1)})$$

together with an application $\psi_* : THH(R)_* \to D(R^{\wedge_L(*+1)})$ (denoted $\phi_.$ in [**Sh**]). The functors L, M and D are defined in [**Sh**]. We have to check that

$$\beta \circ \alpha \circ \Phi^k = \Phi^k = \gamma \circ D \circ \alpha.$$

This holds because the functors L, M and D are simplicial and because Φ^k commutes with the structural maps involved in the various colimits associated to the functors M and D. Likewise, one has $\phi^k \psi_* = \psi_* \Phi^k$. □

The categories of commutative $\mathbb{S}$-algebras or L-algebras (in the sense of [**EKMM**]) is tensored (seeé[**MCSV**]) over the category of topological spaces. This means that, for all commutative $\mathbb{S}$-algebras A, B, there are natural homeomorphisms

$$Hom_{\mathbb{S}}(A \otimes S^1, B) \cong \mathrm{Top}(S^1, Hom_{\mathbb{S}}(A, B))$$

where $Hom_{\mathbb{S}}$ stands for the set of morphisms in the category of commutative $\mathbb{S}$-algebras.

Let B be a L-algebra. McClure, Schwänzl and Vogt [**MCSV**] showed that there exists a natural isomorphism of L-algebras

$$thh^L(B) = B \otimes S^1.$$

Precisely, there is a simplicial isomorphism $thh^L(B)_* \cong B \otimes S^1_*$ (*cf.* [**MCSV**], [**EKMM**]) which induces the isomorphism $thh^L(B) = B \otimes S^1$ after realisation. Here, we identify S^1_* with the simplicial set $\Delta(1)_*/\partial\Delta(1)_*$ where $\Delta(1)_*$ is the standard 1-simplex and $\partial\Delta(1)_*$ is its boundary.

The maps $\Psi^k : S^1 \to S^1$, $k \geq 0$ defined by

$$\Psi^k(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi kt}.$$

induce Adams operations, denoted $\mathrm{id} \otimes \Psi^k$, on $B \otimes S^1$ (*cf.* [**MCSV**]).

Theorem 2.6.3. — *The following diagram is commutative*

$$\begin{tikzcd}
B \otimes S^1 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Psi^k"'] & thh^L(B) \arrow[d, "\Phi^k"] \\
B \otimes S^1 \arrow[r, "\simeq"] & thh^L(B).
\end{tikzcd}$$

Proof: We have to prove that the diagram (2.6.3.1) below is commutative

$$\begin{tikzcd}
thh^L(B) & B \otimes S^1 \arrow[l, "\simeq"'] & \mid S^1_* \mid \arrow[l, "B\otimes -"'] & \mid S^1_* \mid \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "\Psi^k"] \\
\mid \mathrm{sd}_k thh^L(B)_* \mid \arrow[u, "D_k"] \arrow[d, "\varphi^k"] & \mid \mathrm{sd_k B \otimes S^1_*} \mid \arrow[l, "\simeq"] \arrow[u, "D_k"] \arrow[d, "\varphi^k"] & \mid \mathrm{sd_k S^1_*} \mid \arrow[u, "D_k"] \arrow[d, "\varphi^k"] & \\
thh^L(B) & B \otimes S^1 \arrow[l, "\simeq"] & \mid S^1_* \mid \arrow[l, "B\otimes -"] & \mid S^1_* \mid . \arrow[l, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd} \tag{2.6.3.1}$$

The left squares of (2.6.3.1) commute by naturality of D and transfer of simplicial structure. The middle rectangle is commuting in view of [**MCSV**], Proposition 4.3. Finally, a computation analogous to [**MCa2**], Lemma 1.4 insures the commutativity of the right rectangle of (2.6.3.1). □

Theorem 2.6.3 give a new proof of the $THH(B)$-part of Theorem 2.4.1 when B is cofibrant.

Corollary 2.6.2. — *The operations Φ^k commute with the product on $thh^L(B)$.*

Proof: The product on $B \otimes S^1$ is induced by the composite (see [**MCSV**])

$$(B \otimes S^1) \wedge (B \otimes S^1) \xrightarrow{\simeq} B \otimes (S^1 \sqcup S^1) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} B \otimes S^1$$

where $f : S^1 \sqcup S^1 \to S^1$ is the codiagonal map. It is easy to check that

$$f \circ (\Psi^k \sqcup \Psi^k) = \Psi^k \circ f.$$

Hence the following diagram is commutative :

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes S^1) \wedge (B \otimes S^1) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Psi^k \wedge \mathrm{id}\otimes\Psi^k"'] & B \otimes (S^1 \sqcup S^1) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\Psi^k \sqcup \Psi^k)"'] & B \otimes S^1 \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Phi^k"] \\
(B \otimes S^1) \wedge (B \otimes S^1) \arrow[r, "\simeq"] & B \otimes (S^1 \sqcup S^1) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] & B \otimes S^1.
\end{tikzcd}$$

The $THH^L(B)$ part of Theorem 2.4.1 follows from Theorems 2.6.3 and 2.6.2 in the case B is cofibrant. $\square$

CHAPITRE 3

HOMOLOGIE ET MODÈLE MINIMAL DES ALGÈBRES DE GERSTENHABER

Abstract : We study strong homotopy Gerstenhaber algebras ($\mathcal{G}_\infty$-algebra for short) and homology of Gerstenhaber algebras from an operadic point of view. We give an explicit description of $\mathcal{G}_\infty$-algebras defined as algebras over the minimal model of the operad $\mathcal{G}$ describing the Gerstenhaber algebras. We also describe the Ginzburg-Kapranov operadic complex which calculates the homology of $\mathcal{G}$-algebras and give a spectral sequence converging toward it as well as a few examples of calculations. Finally we give the structure of Poisson algebras up to homotopy (again defined as algebras over the minimal model of Poisson algebras).

Résumé : On étudie ici les notions d'algèbres de Gerstenhaber à homotopie près et d'homologie des algèbres de Gerstenhaber du point de vue de la théorie des opérades. Précisément, on donne une description explicite des $\mathcal{G}$-algèbres à homotopie près (c'est à dire d'algèbres sur le modèle minimal de l'opérade $\mathcal{G}$ des algèbres de Gerstenhaber). On décrit également le complexe calculant l'homologie des $\mathcal{G}$-algèbres. On donne une suite exacte qui converge vers cette homologie et quelques exemples de calculs. Enfin on explicite la structure d'algèbre de Poisson à homotopie près.

Keywords : Gerstenhaber algebras, Poisson algebras, strong homotopy algebras, operadic homology.

La notion d'algèbre de Gerstenhaber (notée aussi $\mathcal{G}$-algèbre) a été introduite par Murray Gerstenhaber [**Ge**] en 1963. Précisément, Gerstenhaber a montré que la cohomologie de Hochschild $HH^*(A)$ de toute algèbre associative A peut être munie d'un cup-produit de degré 0 et d'un crochet de degré 1. Le cup-produit est associatif et commutatif et le crochet munit la suspension de $HH^*(A)$ d'une structure d'algèbre de Lie. De plus le crochet est une dérivation pour le produit.

Ce type de structure apparaît aussi fréquemment en physique et en calcul différentiel. Par exemple, l'espace gradué des multi-champs de vecteurs sur une variété différentiable M, muni du crochet de Schouten-Nijenhuis, est une algèbre de Gerstenhaber.

Il existe aussi une interprétation topologique. Une des opérades topologiques les plus étudiées est l'opérade des petits disques $\mathcal{D}$. Précisément, $\mathcal{D}(n)$ est l'espace des configurations de n petits disques à l'intérieur du disque unité du plan. La composition est induite par contraction et insertion de telles configurations dans les petits disques. La structure d'une algèbre de Gerstenhaber est décrite par une certaine opérade $\mathcal{G}$. Cohen [**Ch**] a montré que l'opérade $\mathcal{G}$ est isomorphe à l'homologie de l'opérade $\mathcal{D}$.

L'intérêt pour l'étude de $\mathcal{G}$-algèbres à homotopie près (notée aussi $\mathcal{G}_\infty$-algèbres) a grandi après que Deligne [**Del**] a conjecturé que l'isomorphisme précédent se relevait au niveau des chaîes, c'est à dire qu'il existait une structure de $\mathcal{D}$-algèbre sur le complexe de cochaînes de Hochschild $C^*(A, A)$. D'un point de vue algébrique cette conjecture signifie qu'il existe une structure naturelle de $\mathcal{G}_\infty$-algèbre sur $C^*(A, A)$. En fait une telle structure est l'analogue en géométrie non commutative de la $\mathcal{G}$-structure sur les multi-champs de vecteur d'une variété.

Différentes réponses à cette conjecture (utilisant différentes notions de $\mathcal{G}$-algèbre à homotopie près) ont été apportées notamment par [**GJ**], [**Vo**], [**Ta**]. Kontsevich et Soibelman ont démontré une généralisation de cette conjecture [**Ko3**], [**KS**]. En 1998, Tamarkin [**Ta**] a donné une nouvelle preuve du théorème de formalité de Kontsevich en utilisant (et démontrant) l'existence d'une structure de $\mathcal{G}$-algèbre à homotopie près sur $C^*(A, A)$.

Etant donnée une "structure algébrique" $\mathcal{P}$, *i.e.* une opérade $\mathcal{P}$, la notion la plus canonique de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près est celle d'algèbre sur le modèle minimal de $\mathcal{P}$ *cf.* [**GK**], [**Ma2**], [**Ma3**]. Le modèle minimal d'une opérade $\mathcal{P}$ consiste en une opérade libre munie d'une différentielle et d'un quasi-isomorphisme avec $\mathcal{P}$. Lorsque $\mathcal{P}$ est de Koszul, d'après Ginzburg et Kapranov [**GK**], son modèle minimal (noté $\mathcal{P}_\infty$) est donné par la bar construction de $\mathcal{P}$.

Bizarrement, les définitions explicites de $\mathcal{G}$-algèbres à homotopie près introduites pour répondre à la conjecture de Deligne ne sont pas décrites en tant qu'algèbres sur le modèle minimal de $\mathcal{G}$. Le premier objectif de ce papier est de donner une description explicite de la structure d'une $\mathcal{G}_\infty$-algèbre à partir du modèle minimal de $\mathcal{G}$. Il est implicite que la définition de Tamarkin et Tsygan [**TT**] correspond à celle donnée par le modèle minimal de $\mathcal{G}$, mais uniquement dans le cas d'algèbres de dimension finie et que, de plus, certaines relations ne sont pas explicitées.

Dans [**GK**], Ginzburg et Kapranov ont donné un moyen de construire explicitement un complexe $(C_*^{\mathcal{P}}(A), d)$ associé à toute $\mathcal{P}$-algèbre A. Ce complexe est tel que la nullité de la composée

$$C_3^{\mathcal{P}}(A) \xrightarrow{d} C_2^{\mathcal{P}}(A) \xrightarrow{d} C_1^{\mathcal{P}}(A)$$

se déduise des relations décrivant la structure des $\mathcal{P}$-algèbres. Dans le cas des algèbres associatives, commutatives et de Lie, on retrouve les complexes standards de Hochschild, de Harrison et de Chevalley-Eilenberg respectivement. Plus généralement, le complexe donné par Ginzburg et Kapranov calcule l'homologie de Quillen associée aux $\mathcal{P}$-algèbres. En fait certains calculs de Tamarkin [**Ta**] s'interprétent facilement comme des calculs en homologie des algèbres de Gerstenhaber.

Le deuxième objectif de ce papier est de décrire l'homologie opéradique des $\mathcal{G}$-algèbres (appelée par la suite homologie de Gerstenhaber). On décrit le complexe et la différentielle calculant l'homologie de Gerstenhaber $H\mathcal{G}_*(A)$ d'une $\mathcal{G}$-algèbre A. Ce complexe est en fait un bicomplexe et on en déduit une suite spectrale convergeant vers $H\mathcal{G}_*(A)$ dans l'esprit de [**Ma1**]. En utilisant la suite spectrale précédente, on calcule également $H\mathcal{G}_*(A)$ lorsque A est une algèbre de Gerstenhaber libre, une algèbre de Gerstenhaber libre sur une algèbre de Lie, ou une $\mathcal{G}$-algèbre dont l'une des opérations est triviale.

On peut effectuer les mêmes calculs dans le cadre des algèbres de Poisson (ou plus généralement des n-algèbres). Le dernier objectif de ce papier est de donner une description explicite de la structure d'algèbre de Poisson à homotopie près.

Le paragraphe 1 est constitué de rappels sur la théorie des opérades. Dans le paragraphe 2 on rappelle la définition des algèbres de Gerstenhaber et de l'opérade $\mathcal{G}$ qui les décrit et on donne la structure des $\mathcal{G}$-algèbres libres. On décrit les algèbres de Gerstenhaber à homotopie près dans le paragraphe 3. Le complexe calculant l'homologie des $\mathcal{G}$-algèbres est explicité au paragraphe 4 ainsi qu'une suite spectrale $E^2_{*,*} = H_q(\bigwedge_* \mathrm{Harr}(A)^p[1], d_\ell)$ convergeant vers $H\mathcal{G}(A)$ pour toute $\mathcal{G}$-algèbre A. Dans le paragraphe 5, on illustre les résultats des paragraphes précédents en donnant une preuve élémentaire de la koszulité de l'opérade $\mathcal{G}$, en montrant que $H\mathcal{G}_*(A) = H_*^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$ (l'homologie de Cartan-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficient trivial) si A est l'algèbre de Gerstenhaber libre sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et en calculant l'homologie de Gerstenhaber des algèbres de Gerstenhaber ayant une opération triviale. Enfin, dans le paragraphe 6, on applique les méthodes du paragraphe 3 au cas des algèbres de Poisson.

Je tiens à remercier Gilles Halbout, Jean-Louis Loday et Mathieu Zimmermann sans qui le groupe de travail de Strasbourg sur les opérades n'aurait pas été aussi stimulant.

Notations : Dans toute la suite k sera un corps de caractéristique zéro et $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels. On notera S_n le groupe symmétrique sur n lettres ($n \geq 1$) et $\check{k}$ sera le k-espace vectoriel de dimension 1 muni, pour tout $n \geq 1$, de la représentation signature de S_n. On munit également k de la représentation triviale de S_n.

Pour V un espace vectoriel gradué (ou un complexe) et $n \in \mathbb{Z}$ on notera $V[n]$ le k-espace vectoriel gradué (complexe) $V[n] = k[n] \otimes V$ où $k[n]$ est le k-espace vectoriel gradué de dimension 1 concentré en degré $-n$. Si $x \in V$, on notera $s^n x$ l'élément correspondant dans $V[n]$ de degré $|x| - n$.

3.1. Rappels sur les opérades

3.1.1. Définitions générales. — Un S-module M est la donnée d'une famille $(M(1), M(2), ..., M(n), ...)$ de k-espaces vectoriels telle que chaque $M(n)$ ($n \geq 1$) soit muni d'une structure de S_n-module. Si V est un espace vectoriel (gradué), l'espace $V^{\otimes n}$ est muni d'une action de S_n par permutation (avec la convention de signe de Koszul-Quillen). En particulier, pour $x_1, ..., x_n \in V$ et $\sigma \in S_n$, on notera $\varepsilon(\sigma)$ (on sous-entend la dépendance par rapport à $x_1, ..., x_n$) le signe défini par

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n)^\sigma = \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)}.$$

On notera également $\mathrm{sg}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)$. Plus généralement, soient $V_1, ..., V_n$ des espaces vectoriels gradués et $x_i \in V_i[p_i]$ ($i = 1...n$) ; on notera $\varepsilon'(\sigma)$ le signe défini par

$$(s^{p_1} x_1 \otimes ... \otimes s^{p_n} x_n)^\sigma = \varepsilon'(\sigma) s^{p_{\sigma(1)}} x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes s^{p_{\sigma(n)}} x_{\sigma(n)}$$

et $\mathrm{sg}'(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon'(\sigma)$. On notera aussi $| x_i |' = | x | - p_i$.

On associe à un S-module un foncteur (dit *foncteur de Schur*) $S(M, \Box)$: Vect $\to$ Vect (où Vect est la catégorie des espaces vectoriels) défini par

$$S(M, V) = \bigoplus_{n \geq 0} M(n) \otimes_{S_n} V^{\otimes n}.$$

On notera dans la suite simplement $M(V)$ l'espace vectoriel $S(M, V)$. Si M et N sont deux S-modules, on définit le S-module composé $M \circ N$ de telle sorte que le foncteur de Schur associé soit la composée des foncteurs de Schur de M et N. Précisément, on a

$$(M \circ N)(m) = \bigoplus_{n \geq 1} M(n) \otimes_{S_n} \left(\bigoplus_{p_1 + ... + p_n = m} \mathrm{Ind}_{S_{p_1} \times ... \times S_{p_n}}^{S_{p_1 + ... + p_n}} N(p_1) \otimes ... \otimes N(p_n) \right).$$

Une opérade (*cf.* [**May**], [**GK**]) est la donnée d'un S-module $\mathcal{P}$ et de transformations de foncteurs $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\eta : (k, 0, ...) \to \mathcal{P}$ satisfaisant des axiomes d'associativité et d'unité ([**GK**]). Une telle structure est en fait déterminée par des applications linéaires (compatibles avec les actions des groupes symétriques)

$$\gamma_{n,p_1,\ldots,p_n} : \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} \mathcal{P}(p_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(p_n) \longrightarrow \mathcal{P}(p_1 + \ldots + p_n)$$

appelées compositions.

Une algèbre sur une opérade $\mathcal{P}$ (*cf.* [**GJ**], [**GK**]) est la donnée d'un espace vectoriel A et d'une application $\rho : \mathcal{P}(A) \to A$, compatible avec l'inclusion de A dans $\mathcal{P}(A)$, telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \circ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathcal{P}(\rho)"'] & \mathcal{P}(A) \arrow[d, "\rho"] \\
\mathcal{P}(A) \arrow[r, "\rho"] & A.
\end{tikzcd}$$

Une structure de $\mathcal{P}$-algèbre est donc donnée par des applications

$$\rho_n : \mathcal{P}(n) \otimes_{S_n} A^{\otimes n} \to A.$$

Si V est un espace vectoriel, alors l'espace vectoriel $\mathcal{P}(V)$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre *via* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(V)) \overset{\gamma(\mathrm{id}_V)}{\longrightarrow} \mathcal{P}(V)$. Une telle $\mathcal{P}$-algèbre est appelée *$\mathcal{P}$-algèbre libre*. Ces algèbres sont caractérisées par la propriété universelle suivante : pour toute $\mathcal{P}$ algèbre A et tout application linéaire $V \overset{\varphi}{\longrightarrow} A$, il existe une unique application $\psi : \mathcal{P}(V) \to A$ qui fasse commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{P}(V) \arrow[dl, "\psi"] \\
& A & .
\end{tikzcd}$$

Toutes les notions présentées ici admettent des notions duales évidentes (*cf.* [**GJ**]). En particulier on a les notions de coopérades, coalgèbres sur une coopérade et coalgèbres colibres.

Suivant Tamarkin ([**Ta**]), quand M est un S-module, on note $M_{\{m\}}$ le S-module défini par $M_{\{m\}}(n) = M(n) \otimes \check{k}^{\otimes |m|}[m(n-1)]$ de telle sorte que, si $\mathcal{P}$ est une opérade, une structure de $\mathcal{P}_{\{m\}}$-algèbre sur A est équivalente à une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur $A[m]$.

3.1.2. Présentation d'une opérade. — Le foncteur oubli $U : \mathrm{Oper} \to S$-mod de la catégorie des opérades vers la catégorie des S-modules admet un adjoint à gauche $F : S\text{-mod} \to \mathrm{Oper}$. Une opérade de la forme $F(M)$ est dite *libre* et vérifie qu'il existe $i : M \to F(M)$ et que, pour tout morphisme de S-modules $M \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}$ (avec $\mathcal{P}$ une opérade), il existe un unique morphisme d'opérades $F(M) \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & F(M) \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathcal{P} & \end{tikzcd}$$

Une description du foncteur F en terme d'arbres est donnée dans [**GK**], [**GJ**] par exemple.

Soit M un S-module et $\mathcal{R}$ un idéal (engendré par R) de $F(M)$ c'est à dire un sous S-module de $F(M)$ tel que $\gamma(\mathcal{R} \circ F(M))$ et $\gamma(F(M) \circ \mathcal{R})$ soient inclus dans $\mathcal{R}$ (en particulier γ se restreint au S-module quotient $F(M)(*)/R(*)$). On note $\mathcal{O}p(M,R)$ l'opérade quotient de $F(M)$ par $\mathcal{R}$. L'opérade $\mathcal{O}p(M,R)$ est dite *présentée* par les générateurs M et les relations R.

Une opérade $\mathcal{O}p(M,R)$ est dite *binaire* si M est concentré en degré 2 *i.e.* $M = (0, M(2), 0, ...)$. Une opérade $\mathcal{O}p(M,R)$ est dite *quadratique* si R est inclus dans $FM(3)$. Dans toute la suite on ne s'intéressera qu'à des opérades binaires quadratiques.

Dualement on a une notion de coprésentation d'une coopérade.

Si $\mathcal{P} = \mathcal{O}p(M,R)$ est une opérade binaire quadratique, la coopérade duale $\mathcal{P}^\perp$ (*cf.* [**GJ**]) de $\mathcal{P}$ est la coopérade $co\mathcal{O}p(M[1], R^\perp[2])$ où $R^\perp = F(M)(3)/R$. Si $\mathcal{C}$ est la coopérade $\mathcal{C} = co\mathcal{O}p(N,Q)$, on définit l'opérade duale $\mathcal{C}^\perp = \mathcal{O}p(N[-1], Q^\perp[-2])$. On vérifie facilement que $(\mathcal{P}^\perp)^\perp = \mathcal{P}$ et que $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$.

3.1.3. Koszulité d'une opérade. — Soit $\mathcal{P} = \mathcal{O}p(M,R)$ une opérade binaire quadratique et V un espace vectoriel. D'après [**GK**], [**GJ**] l'espace vectoriel $\mathcal{P}^\perp(\mathcal{P}(V))$ peut être muni de manière naturelle d'une structure de complexe. La différentielle est donnée par l'application

$$d_\alpha : \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P} \xrightarrow{1 \otimes \alpha \otimes 1} \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P}$$

où α est la composée $\mathcal{P}^\perp \to \mathcal{P}^\perp(2) \cong \mathcal{P}(2)[1] \hookrightarrow \mathcal{P}[1]$. On dit qu'une opérade binaire quadratique est *de Koszul* si $(\mathcal{P}^\perp \circ \mathcal{P}, d_\alpha)$ est quasi-isomorphe à $(\mathrm{Id}, 0)$.

Il existe une résolution quasi-libre d'une opérade de Koszul, la construction bar (*cf.* [**GJ**]) : si $\mathcal{C}$ est une coopérade coaugmentée, la construction bar de $\mathcal{C}$ est l'opérade $co\mathcal{B}(\mathcal{C}) = F(\overline{\mathcal{C}}[-1])$. On la munit d'une différentielle $d_{\mathcal{B}}$ définie comme l'unique différentielle qui prolonge la co-composition de $\mathcal{C}$.

Cette différentielle est compatible avec les éventuelles différentielles $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{P}^{\perp}$, on a une application canonique $co\mathcal{B}(\mathcal{P}^{\perp}) \to \mathcal{P}$. Il est bien connu que cette application est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\mathcal{P}$ est de Koszul.

Exemple : L'opérade Ass des algèbres associatives est engendré par $mk[S_2]$ et la relation $m(m,1) = m(1,m)$. Cette opérade est "auto-duale", c'est à dire que $\mathrm{Ass}^{\perp} = (\mathrm{Ass}_{\{-1\}})^*$ où $*$ désigne le dual linéaire. Il est bien connu que Ass est une opérade de Koszul.

L'opérade des algèbres commutatives est l'opérade

$$\mathrm{Com} = \mathcal{O}p(mk, m(m,1) - m(1,m))$$

et l'opérade des algèbres de Lie est l'opérade

$$\mathrm{Lie} = \mathcal{O}p(\ell\check{k}, R_{\mathrm{Lie}}).$$

où R_{Lie} est la relation de Jacobi. Ces notions sont "duales" l'une de l'autre : $\mathrm{Com}^{\perp} = (\mathrm{Lie}_{\{-1\}})^*$ et $\mathrm{Lie}^{\perp} = (\mathrm{Com}_{\{-1\}})^*$ et elles sont de Koszul.

3.2. L'opérade des algèbres de Gerstenhaber

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué A muni d'une multiplication commutative et associative $m : A \otimes A \to A$ de degré 0 et d'un crochet $[\ ;\ ] : A \otimes A \to A$ de degré -1 tel que $(A[1], [\ ;\ ])$ soit une algèbre de Lie (graduée) et que le crochet $[\ ;\ ]$ soit une dérivation (graduée) pour la multiplication m.

Une algèbre de Gerstenhaber étant déterminée par la donnée de deux opérations binaires vérifiant des relations quadratiques, il existe une opérade décrivant leur structure algébrique. Rappelons que, pour une opérade binaire $\mathcal{O}p(M,R)$, le S_3-module $F(M)(3) = \mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3} M(2) \otimes M(2)$ où S_2 agit sur le deuxième facteur $M(2)$. Si m_1 et m_2 sont des opérations de $M(2)$, on note $m_1(m_2,1)$ l'élèment $m_1 \otimes m_2 \in F(M)(3)$. On note $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ la base canonique de la représentation standard $\mathrm{Ind}_{S_2}^{S_3} k$ et on identifie $\underline{x}, \underline{y}$ et $\underline{z}$ avec respectivement l'identité de S_3, la permutation circulaire standard $\tau = (123)$ et τ^2.

Lemme 3.2.1. — *L'opérade des algèbres de Gerstenhaber est l'opérade*

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}p(\ell k[1] \oplus mk, R)$$

où $R = R^{(-2)} \oplus R^{(-1)} \oplus R^{(0)}$ *avec*

$$\begin{aligned}
R^{(-2)} &= \mathrm{Vect}[\ell(\ell,1)\underline{x} + \ell(\ell,1)\underline{y} + \ell(\ell,1)\underline{z}] \\
R^{(-1)} &= \mathrm{Vect}\ \ell(m,1)\underline{x} + m(\ell,1)\underline{y} + m(\ell,1)\underline{z}] \\
&\quad \oplus \mathrm{Vect}[\ell(m,1)\underline{y} + m(\ell,1)\underline{z} + m(\ell,1)\underline{x}] \\
&\quad \oplus \mathrm{Vect}[\ell(m,1)\underline{z} + m(\ell,1)\underline{x} + m(\ell,1)\underline{y}] \\
R^{(0)} &= V/\mathrm{Vect}[m(m,1)\underline{x} + m(m,1)\underline{y} + m(m,1)\underline{z}].
\end{aligned}$$

Démonstration: Il est clair que l'opération m induit une structure commutative puisque k est la représentation triviale. De plus, les relations $R^{(0)}$ traduisent l'associativité de m. On remarque aisément que $R^{(-2)}$ est le S_3-sous-espace engendré par la relation de Jacobi (*i.e.* $R^{(-2)} \cong R_{\mathrm{Lie}}[2]$). Donc, si A est une $\mathcal{G}$-algèbre, l'opération ℓ induit une structure d'algèbre de Lie sur $A[1]$ *via* l'identification d'une application $\ell\check{k} \otimes (A[1])^{\otimes 2} \to A[1]$ avec une application $\ell k[1] \otimes A^{\otimes 2} \to A$. Enfin les relations $R^{(-1)}$ traduisent la compatibilité des opérations ℓ et m. □

Donnons un exemple, celui de l'algèbre de Gerstenhaber libre sur un espace vectoriel. Dans toute la suite on notera $\mathrm{Lie}(p) = \mathcal{O}p\left(\ell\check{k}, R^{(-2)}[-2]\right)(p)$. Rappelons que $\oplus_{p\geq 1}\mathrm{Lie}(p) \otimes A^{\otimes p}$ est l'algèbre de Lie libre sur A.

Lemme 3.2.2. — *Soit A un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué. L'algèbre de Gerstenhaber libre sur A est*

$$\mathcal{G}(A) = \bigoplus_{1\leq p_1 \leq \ldots \leq p_n} (\mathrm{Lie}(p_1) \otimes A[1]^{\otimes p_1}) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{Lie}(p_n) \otimes A[1]^{\otimes p_n})[-n].$$

Le produit commutatif m est donné (au signe près) sur $\mathcal{G}(A)$ par le produit extérieur. Précisément, soit $x_1, \ldots x_n$ et $y_1, \ldots, y_m$ des éléments de $A^{\otimes p_1}, \ldots, A^{\otimes p_n}$ et $A^{\otimes q_1}, \ldots, A^{\otimes q_n}$ respectivement. Pour $x \in A^{\otimes p}$, rappelons qu'on note $\mid x \mid' = \mid x \mid + p$. On a

$$m(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, y_1 \wedge \ldots \wedge y_q) = (-1)^{q(|x_1|' + \ldots + |x_p|')} x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q.$$

Le produit ℓ, appliqué aux éléments $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ et $y_1 \wedge \ldots \wedge y_q$, est donné par application de la règle de Leibniz (rappelons que le symbole $\wedge$ correspond à une itération de la multiplication m) à $\ell(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, y_1 \wedge \ldots \wedge y_q)$ puis par composition sur les algèbres de Lie libre.

Démonstration: Notons $m^{\circ n}$ un générateur de $\mathrm{Com}(n) = \mathcal{O}p(mk, R^{(0)})(n)$ (en particulier $m^{\circ 2} = m$).

Par définition, l'algèbre de Gerstenhaber libre sur A est

$$\mathcal{G}(A) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{G}(n) \otimes_{S_n} A^{\otimes n}.$$

Un élément de $\mathcal{G}(n)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de "compositions" des opérations m et ℓ. Mais les relations $R^{(-1)}$ assurent que tout terme du type $\ell(m,1)$ est égal, dans $\mathcal{G}(n)$, à une somme de deux termes de la forme $m(\ell,1)$. On peut donc écrire chaque élément de $\mathcal{G}(n)$ comme une somme de termes du type $m(m(...m(\ell(\ell(...\ell)...)$.

Il est bien connu (*cf.* [**GK**]) que les relations $R^{(0)}$ induisent une structure d'algèbre commutative et que les relations $R^{(2)}$ induisent une structure d'algèbre de Lie sur la suspension d'un espace vectoriel gradué. On en déduit un morphisme ($n \geq 2$) ψ de $\mathcal{G}(n)$ dans

$$\bigoplus_{0\leq j\leq n} m^{\circ j} k \underset{S_j}{\otimes} \left(\bigoplus_{p_1+...+p_j=n} (\mathrm{Lie}(p_1) \otimes \mathrm{sgn}_{p_1}[p_1])[-1] \otimes ... \otimes (\mathrm{Lie}(p_j) \otimes \mathrm{sgn}_{p_j}[p_j])[-1] \right).$$

Il est clair que la composition d'une opération commutative $m^{\circ j}$ (sur j variables) avec le produit tensoriel de j opérations $\ell_1, ..., \ell_j$ (sur $p_1, ..., p_j$ variables respectivement) induit un morphisme réciproque de ψ. Par conséquent $\mathcal{G}(n)$ est égal à

$$\bigoplus_{0\leq j\leq n} m^{\circ j} k \underset{S_j}{\otimes} \left(\bigoplus_{p_1+...+p_j=n} (\mathrm{Lie}(p_1) \otimes \mathrm{sgn}_{p_1}[p_1])[-1] \otimes ... \otimes (\mathrm{Lie}(p_j) \otimes \mathrm{sgn}_{p_j}[p_j])[-1] \right).$$

On obtient alors la formule du lemme en effectuant le produit tensoriel avec $A^{\otimes n}$. Les formules de composition s'en déduisent via l'identification

$$S^k(V[-1]) \cong V \wedge ... \wedge V[-k].$$

□

Remarque : En particulier l'algèbre commutative libre (sur A)

$$S(A) \cong \oplus_{n\geq 0}(A[1] \wedge ... \wedge A[1])[-n]$$

est une sous-algèbre commutative de $(\mathcal{G}(A), m)$. De même l'algèbre de Lie libre sur $A[1]$ (*i.e.* $\oplus_{p\geq 1}\mathrm{Lie}(p) \otimes A[1]^{\otimes p}$) est une sous-algèbre de Lie de $(\mathcal{G}(A), \ell)$.

3.3. Algèbres de Gerstenhaber à homotopie près

3.3.1. Modèle minimal d'une opérade. — Lorsque l'opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul, il existe une notion naturelle de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près (*cf.* [**GK**], [**Ma2**]). Précisément, un *modèle quasi-libre* pour une opérade $\mathcal{P}$ est un S-module libre $\mathcal{W} = F(M)$ muni d'une différentielle et d'un quasi-isomorphisme $\mathcal{W} \xrightarrow{i} \mathcal{P}$.

Un modèle est dit *minimal* si $d(M) \subset F(M)^{\geq 2}$. Un modèle minimal est unique à isomorphisme près ([**Ma2**]). On note $\mathcal{P}_\infty$ le modèle minimal de $\mathcal{P}$ s'il existe. Une *$\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près* est une algèbre sur le modèle minimal de $\mathcal{P}$ ([**GK**], [**Ma2**]).

Lorsque $\mathcal{P}$ est de Koszul, son bar complexe $co\mathcal{B}(\mathcal{C}) = F(\overline{\mathcal{C}}[-1])$ est un modèle quasi-libre de $\mathcal{P}$. On vérifie facilement qu'il est minimal. L'opérade $\mathcal{P}_\infty$ s'identifie donc à l'opérade $co\mathcal{B}(\mathcal{P}^\perp)$. En particulier, ses opérations binaires sont les mêmes que celles de $\mathcal{P}$. Il y a un lemme dû à Ginzburg, Kapranov [**GK**] et Getzler, Jones [**GJ**], qui va nous permettre d'identifier la structure des $\mathcal{P}_\infty$-algèbres.

Lemme 3.3.1. — ([**GK**], [**GJ**]) *Soit $\mathcal{C}$ une coopérade coaugmentée. La donnée d'une structure de $co\mathcal{B}(\mathcal{C})$-algèbre sur A est équivalente à la donnée d'une différentielle $d : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(A)[1]$.*

Donnons un bref aperçu de la démonstration car elle illustre la méthode que l'on va utiliser par la suite. L'opérade $co\mathcal{B}(\mathcal{C})$ étant libre, une structure de $co\mathcal{B}(\mathcal{C})$-algèbre est uniquement déterminée par la restriction $\gamma_{/co\mathcal{B}(\mathcal{C})^{(1)}}$: $\mathcal{C}(A) \to A$, c'est-à-dire par des applications

$$d_n : \mathcal{C}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A.$$

De même, comme $\mathcal{C}(A)$ est colibre, une différentielle $d : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(A)$ est aussi uniquement déterminée par une famille d'applications $d_n : \mathcal{C}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A$.

Les conditions de compatibilité de γ provenant de la structure d'opérade différentielle sont équivalentes à la condition $d^2 = 0$.

En particulier, une $\mathcal{P}_\infty$-algèbre est donnée par une différentielle $d : \mathcal{P}^\perp(A) \to \mathcal{P}^\perp(A)$. Les opérations binaires de $\mathcal{P}_\infty$ sont, par exemple, données par d_2.

Exemple : La construction précédente appliquée à l'opérade Ass redonne la notion d'algèbre associative à homotopie près (appelée A_∞-algèbres dans la littérature) introduite par Stasheff [**St**].

De même, si on prend l'opérade Lie, on retrouve la définition des L_∞-algèbres classiques (*cf.* [**LS**] par exemple) et pour l'opérade Com on obtient la notion usuelle de C_∞-algèbre.

3.3.2. L'opérade $\mathcal{G}_\infty$. — Par définition une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près, encore appelée $\mathcal{G}_\infty$-algèbre, est une algèbre sur le modèle minimal de l'opérade $\mathcal{G}$. Il est connu que les algèbres de Gerstenhaber sont de Koszul (*c.f.* [**GJ**], [**Ma1**], [**Ta**] et Proposition 3.5.1). Une structure de $\mathcal{G}_\infty$-algèbre sur un espace vectoriel A est donc uniquement déterminée par la donnée d'une codifférentielle sur la $\mathcal{G}^\perp$-coalgèbre libre sur A. Avant de décrire la structure des $\mathcal{G}_\infty$-algèbres on va donc s'intéresser à la coopérade $\mathcal{G}^\perp$.

Lemme 3.3.2. — *La coopérade duale de $\mathcal{G}$ est $\mathcal{G}^\perp \cong (\mathcal{G}^*)_{\{2\}}$. L'opérade duale (au sens de* [**GK**]*) de $\mathcal{G}$ est $\mathcal{G}^! = \mathcal{G}_{\{-1\}}$.*

Démonstration: Par définition, $\mathcal{G}^{\perp}$ est la coopérade co-engendrée par $M = \mathcal{G}(2)[1]$ et les co-relations

$$R^{\perp} = \frac{(F\mathcal{G}(2))(3)[2]}{R[2]}.$$

En particulier, $\mathcal{G}^{\perp}$ est engendrée par $\ell\, k[2] \oplus m\, k[1]$. De plus il est bien connu (*cf.* [**GK**] par exemple) que $(F\mathcal{G}(2))^{(0)}(3)/R^{(0)}$ correspond au sous-espace engendré par les relations de Jacobi et que $(F\mathcal{G}(2))^{(-2)}(3)/R^{(-2)}$ à celui engendré par la relation d'associativité. On vérifie facilement que $(F\mathcal{G}(2))^{(-1)}(3)/R^{(-1)}$ donne des relations symmétriques à celles de $R^{(-1)}$ en inversant le rôle de ℓ et m.

On a $(\mathcal{G}^*)(2) = \ell^*\, k[-1] \oplus m^* k$. Donc $(\mathcal{G}^*)_{\{2\}}(2) = \ell^*\, k[1] \oplus m^* k[2]$. On obtient aisément la première égalité du lemme en identifiant ℓ^* avec m et m^* avec ℓ. La seconde formule est une conséquence immédiate de la première et de la formule $\mathcal{P}^! = (\mathcal{P}^{\perp})^*_{\{1\}}$ ([**GJ**]). $\square$

On notera dans la suite $\underline{A^{\otimes p}}$ le quotient de $A^{\otimes p}$ par l'action des "shuffles" signés non triviaux, c'est à dire le quotient de $A^{\otimes *}$ par l'image de l'application

$$\mathrm{sh} : A^{\otimes m} \otimes A^{\otimes n} \to A^{\otimes m+n} \quad \text{où } m, n \geq 1.$$

Rappelons qu'un $(p, n-p)$-shuffle est une permutation σ de $\{1, ..., n\}$ telle que $\sigma(1) < ... < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < ... < \sigma(n)$. Le produit sh est défini, pour $a_1, ..., a_n \in A^{\otimes n}$, par

$$\mathrm{sh}(a_1 \otimes ... \otimes a_p, a_{p+1} \otimes ... \otimes a_n) = \sum_{(p,n-p)-\text{shuffles}} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Rappelons que $\underline{A^{\otimes p}}$ est la composante de degré $p-1$ du complexe de Harrison d'une algèbre commutative.

Lemme 3.3.3. — *La $\mathcal{G}^{\perp}$-coalgèbre libre sur un espace vectoriel gradué A est donnée par*

$$\mathcal{G}^{\perp}(A) = \bigoplus_{p_1 \leq ... \leq p_n} (\underline{A^{\otimes p_1}}[p_1] \wedge ... \wedge \underline{A^{\otimes p_n}}[p_n])[n-2].$$

Le coproduit δ_m est donné, pour $x_i \in A^{\otimes p_i}$ $(i = 1...n)$, par

$$\delta_m(x_1 \wedge ... \wedge x_n) = \sum \mathrm{sgn}'(\sigma) x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(i)} \otimes x_{\sigma(i+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)}$$

où la somme se fait sur tous les $(i, n-i)$-shuffles.

Le cocrochet δ_ℓ est donné par la formule suivante :

$$\delta_\ell(x_1 \wedge ... \wedge x_n) = \sum \mathrm{sgn}'(\sigma) \beta_k\, x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(i)} \wedge (v_1^k, \dots, v_j^k) \otimes (v_{j+1}^k, \dots$$
$$\dots, v_{p_k}^k) \wedge x_{\sigma(i+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)}.$$

Dans la formule précédente, la somme est étendue à tous les entiers $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq p_k$ *et toutes les permutations* σ *qui fixent* k *et telle que* $\sigma(1) < ... < \sigma(i)$ *et* $\sigma(i+1) < ... < \sigma(n)$ $(1 \leq i \neq k \leq n)$, *i.e.* σ *est un* $(i, n-1-i)$*-shuffle sur* $\{1, ..., n\} - \{k\}$. *On a noté* $x_k = (v_1^k, ..., v_j^k, v_{j+1}^k, ..., v_{p_k}^k)$. *Le signe* β_k *est donné par*

$$\beta_k = (-1)^{(|v_1|+...+|v_j|)(p_k-j)}.$$

Démonstration: Il suffit de faire une démonstration analogue à celle du lemme 3.2.2. On peut aussi appliquer le lemme 3.3.2. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^\perp(A) &= \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{G}^\perp(n) \otimes A^{\otimes n} \\
&= \bigoplus_{n\geq 0} (\mathcal{G}^*)_{\{2\}}(n) \otimes A^{\otimes n}.
\end{aligned}$$

Rappelons que $(\mathcal{G}^*)_{\{2\}}(n) = (\mathcal{G}^*)(n) \otimes \mathrm{sgn}_n[n-1] \otimes \mathrm{sgn}_n[n-1] = (\mathcal{G}^*)(n)[2n-2]$. D'après le lemme 3.2.2 (et avec les mêmes notations), comme $\mathcal{G}$ est de dimension finie, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^\perp(A) &= \bigoplus_{0\leq j\leq n} \Bigg((m^*)^{\circ j} k \otimes_{S_j} \bigoplus_{p_1+...+p_j=n} (\mathrm{Lie}^*(p_1) \otimes \mathrm{sgn}_{p_1}[p_1])[1] \otimes ... \\
&\qquad ... \otimes (\mathrm{Lie}^*(p_j) \otimes \mathrm{sgn}_{p_j}[p_j])[1] \Bigg) [-2] \otimes A^{\otimes n}. \\
&= \bigoplus_{0\leq j\leq n} \Bigg((m^*)^{\circ j} k \otimes_{S_j} \bigoplus_{p_1+...+p_j=n} (\mathrm{Lie}^*(p_1) \otimes \mathrm{sgn}_{p_1}[p_1]) \otimes ... \\
&\qquad ... \otimes (\mathrm{Lie}^*(p_j) \otimes \mathrm{sgn}_{p_j}[p_j]) \Bigg) \otimes_{S_j} \mathrm{sgn_j}[j-2] \otimes A^{\otimes n}.
\end{aligned}$$

On sait que l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\oplus_n \mathrm{Lie}(n) \otimes A^{\otimes n}) = \oplus_n A^{\otimes n}$ et que cette algèbre de Hopf est munie du coproduit engendré par les "shuffles" (sans signe). On en déduit que $\mathrm{Lie}^*(p) \otimes \mathrm{sgn}_p \otimes_{S_p} A^{\otimes p} = \underline{A^{\otimes p}}$ et que

$$\mathcal{G}^\perp(A) \;=\; \bigoplus_{p_1\leq ...\leq p_j} \left(\underline{A^{\otimes p_1}}[p_1] \otimes ... \otimes \underline{A^{\otimes p_j}}[p_j]\right)[n-2].$$

Le coproduit est défini à partir du coproduit sur la coalgèbre commutative sur l'espace vectoriel gradué $\oplus A^{\otimes p}[p-1]$ ce qui donne la formule pour δ_m. Le cocrochet est défini sur la coalgèbre de Lie colibre associée à A et étendu uniquement à $\mathcal{G}^\perp(A)$ comme dans [**Fr1**], Définition 2.1. $\square$

On peut maintenant décrire la structure d'une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près.

Théorème 3.3.4. — *Une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près est la donnée d'un espace vectoriel gradué muni d'une famille d'applications*

$$m_{p_1,\dots,p_n} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_n} \to A$$

de degré $3-(n+p_1+\dots+p_n)$ *pour tout* $n, p_1, \dots, p_n \geq 1$, *telles que*

i) : *pour tout* $x_1, \dots, x_n$ *dans* $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$ *et* $\sigma \in S_n$, *on ait*

$$m_{p_1,\dots,p_n}(x_1,\dots,x_n) = \mathrm{sg}'(\sigma) m_{p_{\sigma(1)},\dots,p_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)});$$

ii) : *pour tout* $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, *l'application de* $A^{\otimes p_i}$ *dans* A *donnée par*

$$y \mapsto m_{p_1,\dots,p_n}(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$$

s'annule sur les "shuffles" non triviaux ;

iii) : *l'unique codérivation* d *de* $\mathcal{G}^{\perp}(A)$ *étendant* $\sum_{p_1,\dots,p_n,n} m_{p_1,\dots,p_n}$ *vérifie* $d^2 = 0$.

La condition $iii)$ du théorème s'explicite de la manière suivante. Soient $x_1 = (v_1^1, \dots, v_{p_1}^1)$,..., $x_n = (v_1^n, \dots, v_{p_n}^n)$ des éléments de $A^{\otimes p_1}, \dots, A^{\otimes p_n}$ respectivement. La condition $iii)$ est équivalente à

$$\sum_{\substack{(s,n-s)\text{-shuffle} \\ s=1..n}} \quad \sum_{\substack{q_1+r_1=p_{\sigma(1)+1} \\ q_2+r_2=p_{\sigma(2)} \\ \dots \\ q_n+r_n=p_{\sigma(n)}}} \quad \sum_{\substack{\ell_1+q_1\leq p_{\sigma(1)} \\ \dots \\ \ell_s+q_s\leq p_{\sigma(s)}}} \pm M_q^{\ell}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(s)}) = 0$$

avec $q_{s+1} = \dots = q_n = 0$ et

$$M_q^{\ell}(x_1,\dots,x_s) = m_{r_1,\dots,r_n}\big((v_1^1,\dots,v_{\ell_1}^1, m_{q_1,\dots,q_s}(v(1),\dots,v(s)), v_{\ell_1+q_1+1}^1,\dots,v_{p_1}^1)\otimes\widehat{x_2}\dots$$
$$\dots\otimes\widehat{x_s}\otimes x_{s+1}\dots\otimes x_n\big).$$

Dans la formule précédente on a noté $\widehat{x_k}$ $(k = 1\dots s)$ le r_k-tenseur

$$\widehat{x_k} = (v_1^{p_k}, v_2^{p_k}, \dots, v_{\ell_k}^{p_k},\ v_{k+q_k+1}^{p_k}, \dots, v_{p_k}^{p_k}).$$

Pour $r = 1, \dots, s$, on a noté $v(j_r)$ l'élément de $A^{\otimes q_r}$ (qui depend aussi de i_r, q_r) suivant

$$v(j_r) = (v_{i_r+1}^{j_r}, \dots, v_{i_r+q_r}^{j_r}).$$

En particulier $\widehat{x_{j_k}} = x_j^k$ où on a oté le tenseur $v(j_k)$.

Le signe $\pm$ est obtenu en appliquant les conventions de signes de Koszul-Quillen en se rappelant que $m_{q_1,\dots,q_s}$ est de degré $3-(q_1+\dots+q_s)-s$. Explicitement, en notant τ la permutation associée au réindiçage du terme de gauche de la formule, on a

$$\pm = (-1)^{(1-q_1-\dots-q_s-s)\left(r_2+\dots+r_n+n-1+|v_1^{\sigma(1)}|+\dots+|v_{\ell_1}^{\sigma(1)}|+p_{\sigma(1)}+\ell_{\sigma(1)}\right)+\ell_{\sigma(1)}}\mathrm{sg}'(\tau).$$

Démonstration: Une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près sur A est donnée par une codifférentielle d sur la $\mathcal{G}^{\perp}$-coalgèbre $\mathcal{G}^{\perp}(A)$ libre sur A. Une telle codifférentielle est uniquement déterminée par sa projection sur $\mathcal{G}^{\perp}(A)(1) = A$. D'après le lemme 3.3.3 l'application d est donc définie par une famille d'applications

$$d_{p_1,\dots,p_n} : \bigoplus_{p_1 \leq \dots \leq p_n} (\underline{A^{\otimes p_1}}[p_1] \wedge \dots \wedge \underline{A^{\otimes p_n}}[p_n])[n-2] \longrightarrow A[1].$$

Il est clair que la donnée de $d_{p_1,\dots,p_n}$ est équivalente à la donnée d'applications

$$m_{p_1,\dots,p_n} : A^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes A^{\otimes p_n} \to A[3 - n - (p_1 + \dots + p_n)]$$

satisfaisant $i)$ et $ii)$ (car $\underline{A^{\otimes p}}$ est égal à $A^{\otimes n}$ quotienté par les “shuffles” non triviaux). Précisément, on a la formule

$$d_{p_1,\dots,p_n}(s^{n-2}s^{p_1}x_1 \wedge \dots \wedge s^{p_n}x_n) = (-1)^{\sum_{i=1}^{n}-1|x_i|(p_{i+1}+\dots+p_n)} m_{p_1,\dots,p_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Utilisant la structure de coalgèbre donnée par le lemme 3.3.3 pour écrire l'application d, on obtient que la condition $d^2 = 0$ correspond à la formule $iii)$. □

Explicitation en basses dimensions : L'application $m_1 : A \to A[1]$ vérifie $m_1^2 = 0$ d'après la propriété $iii)$ du théorème 3.3.4 ; c'est donc une différentielle sur A. L'application $m_2 : A^{\otimes 2} \to A$ est de degré $3 - 2 - 1 = 0$. Elle doit de plus vérifier $m_2(\mathrm{sh}(a, b)) = 0$ où $\mathrm{sh}(a, b) = (a, b) - (b, a)$ désigne le “shuffle” de a et b. Il en résulte que m_2 est une opération commutative. De plus, la condition $iii)$ pour des éléments de $A^{\otimes n}$ s'écrit sous la forme

$$\sum \pm m_j(a_1, \dots a_p, m_k(a_{p+1}, \dots, a_{p+j}), \dots, a_{j+k-1}) = 0,$$

c'est-à-dire $(A, m_1, m_2, \dots, m_n, \dots)$ définit une structure d'algèbre commutative à homotopie près.

De même, l'opération $m_{1,1} : A \otimes A \to A$ est de degré $3 - 1 - 1 - 2 = -1$. De plus, d'après le $i)$ du théorème 3.3.4, $\widetilde{m}_{1,1} : A[1] \otimes A[1] \to A[1]$ (induite par $m_{1,1}$) est antisymétrique. De même, les opérations $m_{1,\dots,1}$ (n facteurs 1) induisent des opérations n-linéaires alternées $\widetilde{m}_{1,\dots,1}$. On peut encore vérifier que la condition $iii)$ définit une structure d'algèbre de Lie à homotopie près sur $(A[1], \widetilde{m}_1, \widetilde{m}_{1,1}, \widetilde{m}_{1,1,1} \dots)$.

Les autres relations déduites de $iii)$ décrivent une chaîne de conditions de compatibilité du type Leibniz pour les opérations $m_{p_1,\dots,p_n}$. Par exemple, pour $m_{1,2}$ on obtient, d'après le théorème 3.3.4, pour tout $x, y, z \in A$,

$$\begin{aligned} m_1(m_{1,2}(x,y,z)) + m_{1,2}(m_1(x,y,z)) + m_{1,1}(x, m_2(y,z)) & \\ -m_2(m_{1,1}(x,y),z) + (-1)^{1+|y|(|x|+1)} m_2(y, m_{1,1}(x,z)) &= 0 \end{aligned}$$

où on a noté $m_1(x,y,z)$ la différentielle induite par m_1 sur $A \otimes (A^{\otimes 2}[1])$. En particulier $m_{1,2}$ fournit une homotopie pour l'identité de Leibniz du crochet $m_{1,1}$ et du produit m_2.

Dans [**TT**], Définition 1.1, Tamarkin et Tsygan ont donné une définition d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près très proche de la nôtre. Leur structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près est définie comme la donnée d'un espace gradué A et d'une différentielle d (de degré 1) sur l'algèbre extérieure sur l'algèbre de Lie libre sur le dual linéaire de A :

$$\Lambda^*(\mathrm{Lie}(A[1]^*)).$$

Corollaire 3.3.5. — *Si A est un espace vectoriel de dimension finie, la structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près donnée par le théorème 3.3.4 coincide avec celle de* [**TT**], *Définition 1.1.*

Démonstration: Les opérations définies sur A sont données par des applications

$$\delta_{p_1,\dots,p_n} : A[1]^* \to \mathrm{Lie}(A[1]^*)(p_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{Lie}(A[1]^*)(p_n).$$

Lorsque A est de dimension finie on a un isomorphisme canonique $(A^*)^* \cong A$ et les opérations $\delta_{p_1,\dots,p_n}$ induisent des opérations

$$\check{\delta}^*_{p_1,\dots,p_n} : (\mathrm{Lie}^*(A[1])(p_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{Lie}^*(A[1]^*)(p_n))\,[n] \to A[2]$$

par passage au dual et suspension.

Le raisonnement des démonstrations du lemme 3.3.3, du théorème 3.3.4 et de la remarque 1.2 de [**TT**] assure alors que les opérations $\check{\delta}^*_{p_1,\dots,p_n}$ vérifient les relations du théorème 3.3.4. Les opérations $\delta_{p_1,\dots,p_n}$ sont donc équivalentes aux opérations duales $m_{p_1,\dots,p_n}$ du théorème 3.3.4. □

Exemples : Il est clair que toute $\mathcal{G}$-algèbre (X,m,ℓ) est munie d'une structure de $\mathcal{G}_\infty$-algèbre donnée par $m_2 = m$, $m_{1,1} = \ell$ et $m_{p_1,\dots,p_n} = 0$ sinon. Cette structure correspond à la codifférentielle obtenue en prenant la codifférentielle de Harrison sur $\underline{A^{\otimes p}}$ et en prolongeant le crochet de Lie ℓ à $\Lambda(\underline{A^{\otimes *}})$.

Tamarkin a prouvé dans [**Ta**] (*cf.* aussi [**Hin**], [**TT**]) que le complexe de cochaînes de Hochschild d'une algèbre associative est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{G}_\infty$-algèbre *via* l'action des "braces" opérations de [**GV**]. Précisément, la structure de $\mathcal{G}_\infty$-algèbre induite sur $C^*(A,A)$ est obtenue en prenant les opérations $m_{p_1,\dots,p_n} = 0$ si $n \geq 3$. Les opérations m_p, $m_{p,q}$ sont induites, de manière non explicite, par la différentielle b, le cup-produit, le crochet de Gerstenhaber et les "braces" d'ordre supérieur *cf.* [**Ta**]. Cette structure est en fait un cas particulier de l'exemple suivant.

Une structure de $\mathfrak{BL}_\infty$-*algèbre* sur un espace vectoriel graduée X (*cf*. [**Hin**], [**Ta**]) est déterminée par la donnée d'une structure de bigèbre de Lie différentielle sur la cogèbre de Lie libre $\mathfrak{BL}(X) := \oplus_{n\geq 1}\underline{X^{\otimes p_1}}[n]$ engendrée par $X[1]$.

Lemme 3.3.6. — *Une structure de $\mathfrak{BL}_\infty$-algèbre sur l'espace vectoriel X est définie par des opérations*

- **i) :** $\ell_m : X^{\otimes m} \to X$ *de degré* $2-m$ *telles que l'unique codérivation de* $\mathfrak{BL}(X)$ *définie par* $\sum\limits_{m\geq 1} \ell_m$ *est une codifférentielle ;*
- **ii) :** $\ell_{p,q} : X^{\otimes p}\otimes : X^{\otimes q} \to X$ *de degré* $1-p-q$ *telle que l'unique crochet de* $\mathfrak{BL}(X)$ *défini par* $\sum\limits_{p,q\geq 1} \ell_{p,q}$ *induise une structure de bigèbre de Lie compatible avec la codifférentielle précédente.*

Démonstration: L'espace vectoriel $\mathfrak{BL}(X)$ étant muni d'une structure de cogèbre de Lie colibre, un calcul très facile et analogue à celui du théorème 3.3.4 donne le résultat. □

Toute $\mathfrak{BL}_\infty$-algèbre $(X, \ell_*, \ell_{*,*})$ est en particulier une $\mathcal{G}_\infty$-algèbre. En effet, il suffit de poser $m_{p_1} = \ell_{p_1}$, $m_{p_1,p_2} = \ell_{p_1,p_2}$ et $m_{p_1,\ldots,p_n} = 0$ pour $n \geq 3$. Cette structure définit bien une codifférentielle sur $\mathcal{G}^\perp(X)$: c'est précisément la codifférentielle de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie différentielle $\mathfrak{BL}(X)$. Via l'équivalence entre $\mathfrak{BL}_\infty$-algèbre et B_∞-algèbre ([**GJ**]) démontrée dans [**Ta**], il en résulte que toute B_∞-algèbre ou toute algèbre de Hirsch ([**Kad**]) est munie d'une structure naturelle de $\mathcal{G}_\infty$-algèbre.

3.4. Homologie des algèbres de Gerstenhaber

3.4.1. Homologie opéradique. — Dans [**GK**], Ginzburg et Kapranov ont étendu la dualité de Koszul des algèbres au cas des opérades pour obtenir une notion "naturelle" d'homologie des algèbres associées à une opérade $\mathcal{P}$ de Koszul. Précisément, ils ont explicité un complexe associé à toute $\mathcal{P}$-algèbre A, tel que la nullité de la composition des deux dernières flèches soit donnée par les relations de $\mathcal{P}$. Rappelons leur construction.

Le complexe associé à toute $\mathcal{P}$-algèbre A est simplement la $\mathcal{P}^\perp$-coalgèbre libre $\mathcal{P}^\perp(A)$ en tant qu'espace vectoriel. Si (A, δ) est une algèbre différentielle on munit le complexe précédent de l'unique codifférentielle qui prolonge $A \xrightarrow{\delta} A$. On le munit aussi de l'unique codifférentielle déterminée par l'application

$$d : \mathcal{P}^\perp(A) \longrightarrow \mathcal{P}^\perp(2) \otimes A^{\otimes 2} \cong \mathcal{P}(2) \otimes A^{\otimes 2}[1] \xrightarrow{\gamma} A[1].$$

L'homologie opéradique de A est l'homologie du complexe $(\mathcal{P}^\perp(A), d)$ (ou du bicomplexe $\mathcal{P}^\perp(A), d+\delta$ si A est différentielle).

Exemples : Si A est une algèbre associative le complexe $(\mathrm{Ass}^{\perp}(A), d)$ est le complexe de Hochschild (non unitaire) classique $(C_*(A, A) = A^{\otimes *}, b')$.

Si $(\mathfrak{g}, [\ ;\ ])$ est une algèbre de Lie, le complexe $(\mathrm{Lie}^{\perp}(\mathfrak{g}), d)$ est le complexe de Chevalley-Eilenberg $(\Lambda\mathfrak{g}, d_{[\ ;\ ]})$ dont on notera l'homologie $HCE_*(\mathfrak{g})$.

Enfin, si A est une algèbre commutative et associative, le complexe $(\mathrm{Com}^{\perp}(A), d)$ est le complexe de Harrison $(\underline{A^{\otimes *}}, b')$ obtenu en quotientant le complexe de Hochschild par les "shuffles" non triviaux (*i.e.* de la forme $\mathrm{sh}(x, y)$ où $x, y \in \underline{A^{\otimes * \geq 1}}$). Son homologie sera notée $\mathrm{Harr}_*(A)$.

3.4.2. Le complexe $\mathcal{G}^{\perp}(A)$. — Rappelons que l'opérade $\mathcal{G}$ est de Koszul. L'homologie opéradique d'une algèbre de Gerstenhaber A est donc donnée par l'homologie du complexe $C\mathcal{G}(A) = (\mathcal{G}^{\perp}(A), d)$ où d est induite par $\mathcal{G}(2) \otimes A^{\otimes 2} \to A$.

Théorème 3.4.1. — *L'homologie opéradique d'une algèbre de Gerstenhaber A est l'homologie du complexe $(C\mathcal{G}(A) = (\mathcal{G}^{\perp}(A), d)$ où, pour tout $x_1 = (v_1^1, ..., v_{i_1}^1)$,..., $x_n = (v_1^n, ..., v_{i_n}^n)$, la codifférentielle d est définie par*

$$\begin{aligned} d(x_1 \wedge ... \wedge x_n) \ &= \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \pm\, x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge (v_1^i, ..., m(v_j^i, v_{j+1}^i), ..., v_{p_i}^i) \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_n \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{q=1}^{p_i} \sum_{r=1}^{p_j} \pm x_1 \wedge ... x_{i-1} \wedge \big(v_1^i, ..., \ell(v_q^i, v_r^j), ..., v_{p_i}^i, v_1^j, \ldots \\ &\qquad \ldots, \widehat{v_r^j}, ..., v_{p_j}^j\big) \wedge x_{i+1} \ldots \wedge x_{j-1} \wedge \widehat{x_j} \wedge x_{j+1} \wedge \ldots \wedge x_n. \end{aligned}$$

On notera $H\mathcal{G}_*(A)$ et on appellera *homologie de Gerstenhaber* d'une $\mathcal{G}$-algèbre A les groupes d'homologie de $(C\mathcal{G}(A), d)$.

Les signes sont donnés dans la formule du théorème par les conventions de Koszul-Quillen. Le signe $\pm$ de la première ligne est $(-1)^{j-1+|x_1|'+...+|x_{i-1}|'}$. Le signe $\pm$ de la seconde est le produit $\varepsilon(\sigma)'\varepsilon(\tau)$ où σ est l'unique permutation telle que

$$(x_1 \wedge .. \wedge x_n)^{\sigma} = x_1 \wedge ... \wedge x_i \wedge x_j \wedge ... \wedge \widehat{x_j} \wedge ... \wedge x_n$$

et τ l'unique permutation telle que

$$(v_1^i, ..., v_{p_i}^i, v_1^j, ..., v_{p_j}^j)^{\tau} = (v_1^i, ..., v_q^i, v_r^j, ..., v_{p_i}^i, v_1^j, ..., \widehat{v_r^j}, ..., v_{p_j}^j).$$

La notation $\widehat{v_r^j}$ signifie qu'on a omis v_r^j dans la formule.

Avant de démontrer le théorème 3.4.1 on énonce le lemme suivant.

Lemme 3.4.2. — *La différentielle d du complexe $(\mathcal{G}^{\perp}(A), d)$ se décompose sous la forme $d = d_m + d_\ell$ où d_m est une somme de différentielles de Harisson et d_ℓ est une différentielle de Chevalley-Eilenberg.*

Démonstration: La différentielle d est induite par $\mathcal{G}^{\perp}(2)\otimes A^{\otimes 2}\to A$, c'est-à-dire par $m : A^{\otimes 2}\to A[1]$ et $\ell : A[1]\wedge A[1]\to A[1][1]$. On obtient facilement que d se décompose sous la forme $d = d_m + d_\ell$ où d_m et d_ℓ sont les différentielles induites par m et ℓ respectivement.

La différentielle d_m est l'unique codifférentielle induite par

$$\mathcal{G}^{\perp}(A)\to \mathcal{G}^{\perp}(2)\otimes A^{\otimes 2}\overset{m}{\to} A.$$

On déduit des formules pour le coproduit de $\mathcal{G}^{\perp}(A)$ du lemme 3.3.3 que

$$d_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \pm\, x_1\wedge \dots \wedge x_{i-1}\wedge (v_1^i,\dots,m(v_j^i,v_{j+1}^i),\dots,v_{p_i}^i)\wedge x_{i+1}\wedge\dots\wedge x_n.$$

En particulier, la différentielle d_m est une somme de différentielles de Harrison (*i.e.* de quotients de la différentielle de Hochschild non unitaire b'). Précisément, d_m est la somme (au signe près) des différentielles de Harisson sur les complexes $A^{\otimes p_1}$,..., $A^{\otimes p_n}$. De même, pour tout $x_1\in A^{\otimes p_1}$,...,$x_n\in A^{\otimes p_n}$, on obtient la formule

$$d_\ell(x_1\wedge\dots\wedge x_n) = \sum_{1\le i<j\le n}\sum_{q=1}^{p_i}\sum_{r=1}^{p_j} \pm x_1\wedge\dots x_{i-1}\wedge\big(v_1^i,\dots,\ell(v_q^i,v_r^j),\dots,v_{p_i}^i,v_1^j,\dots$$
$$\dots,\widehat{v_r^j},\dots,v_{p_j}^j\big)\wedge x_{i+1}\dots\wedge x_n.$$

En particulier la différentielle d_ℓ est la différentielle de Chevalley-Eilenberg associée au crochet $[\ ;\ ] : \mathcal{G}^{\perp}(A)\otimes\mathcal{G}^{\perp}(A)\to\mathcal{G}^{\perp}(A)$ qui prolonge le crochet $\ell : A\otimes A\to A$ (*cf.* [**Fr1**], Définition 2.1). $\square$

Démonstration du théorème 3.4.1 : On a déjà vu que le complexe opéradique est $(C\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}^{\perp}(A))$, c'est-à-dire

$$\bigoplus_{p_1\le\dots\le p_n}(\underline{A^{\otimes p_1}}[p_1]\wedge\dots\wedge\underline{A^{\otimes p_n}}[p_n])[n-2]$$

d'après le lemme 3.3.3. La formule pour la différentielle d découle alors du lemme 3.4.2 et de sa démonstration. $\square$

Remarque : D'après le lemme 3.4.2, la différentielle d, restreinte à $\underline{A}^*$, est simplement la différentielle de Harisson. De même, la différentielle d, restreinte à $\Lambda^*(A[1])$, est la différentielle de Chevalley-Eilenberg standard de l'algèbre de Lie $A[1]$.

La décomposition $d = d_m + d_\ell$ de la différentielle d du lemme 3.4.2 donne naturellement naissance à une suite spectrale qui converge vers l'homologie de Gerstenhaber.

Pour une $\mathcal{G}$-algèbre A, notons $\Lambda_q\mathrm{Harr}(A)^p$ l'espace vectoriel suivant :

$$\Lambda_q\mathrm{Harr}(A)^p[1] = \bigoplus_{\substack{p_1 \leq \dots \leq p_q \\ p_1 + \dots + p_q = p}} \mathrm{Harr}_{p_1}(A)[1] \wedge \dots \wedge \mathrm{Harr}_{p_q}(A)[1].$$

Théorème 3.4.3. — *Soit A une algèbre de Gerstenhaber. On a une suite spectrale convergente*

$$E^2_{p,q} = H_q(\Lambda_*\mathrm{Harr}(A)^p[1], d_\ell) \Longrightarrow H\mathcal{G}_{p+q}(A).$$

Démonstration: On définit un bidegré sur $\mathcal{G}^\perp(A)$. Pour $x \in \underline{A^{\otimes m}}$, on pose $\deg_1(x) = m - 1$ (*i.e.* le $\deg_1(x)$ correspond au nombre de multiplications nécessaires pour écrire x dans la cogèbre colibre $\mathcal{G}^\perp(A)$). On étend ce degré à $\mathcal{G}^\perp(A)$ en posant

$$\deg_1(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \deg_1(x_1) + \dots + \deg_1(x_n).$$

On définit un deuxième degré sur $\mathcal{G}^\perp(A)$ en posant $\deg_2(x_1\wedge\dots\wedge x_n) = n-1$. Autrement dit, $\deg_2(x)$ correspond au nombre de crochets nécessaires pour écrire x dans la cogèbre colibre $\mathcal{G}^\perp(A)$). Finalement, le bidegré $|\, x \,|$ est, par définition, $|\, x\, |= (\deg_1(x), \deg_2(x))$.

Le lemme 3.4.2 assure que d se décompose sous la forme $d = d_m + d_\ell$. De plus d_m est de bidegré $(-1, 0)$ et d_ℓ de bidegré $(0, -1)$. L'application d_m est en fait une différentielle, *i.e.* $d_m^2 = 0$, puisque c'est une somme de bord de Harrison. De plus, d_ℓ étant la différentielle induite par l'opération ℓ sur $\mathcal{G}^\perp(A)$, on a donc aussi $d_\ell^2 = 0$. Enfin la condition de compatibilité de Leibniz entre m et ℓ assure que $d_m d_\ell + d_\ell d_m = 0$. Par conséquent, le complexe $(C\mathcal{G}(A), d)$ est un bicomplexe (noté $(C\mathcal{G}(A), d_m, d_\ell)$) et $H\mathcal{G}_*(A)$ est l'homologie du complexe total associé.

Ce bicomplexe est contenu dans le premier quadrant puisque $\deg_1$ et $\deg_2$ sont toujours positifs. Il y a donc une suite spectrale convergent vers $H\mathcal{G}_*(A)$ dont le premier terme $E^1_{p,q}$ est obtenu en prenant l'homologie de $(\mathcal{G}^\perp(A)_{*,q}, d_m)$. Le terme $E^2_{p,q}$ est alors

$$E^2_{p,q} = H_q(\Lambda_*\mathrm{Harr}(A)^p, d_\ell).$$

□

3.5. Exemples

Dans cette partie on donne quelques exemples de calculs de l'homologie de Gerstenhaber $H\mathcal{G}_*(A)$ pour certaines $\mathcal{G}$-algèbres A.

Commençons par les algèbres de Gerstenhaber libres.

Proposition 3.5.1. — *Soit V un espace vectoriel gradué et $A = \mathcal{G}(V)$ l'algèbre de Gerstenhaber libre sur V. Alors, $H\mathcal{G}_0(A) = V$ et $H\mathcal{G}_p(A) = 0$ pour $p \geq 1$.*

Démonstration: On utilise la suite spectrale du théorème 3.4.3. On a

$$\begin{aligned} E^2_{p,q} &= H_q(\Lambda_*\mathrm{Harr}(A)^p, d_\ell) \\ &= H_q(\Lambda_*\mathrm{Harr}(\mathcal{G}(V))^p, d_\ell) \end{aligned}$$

On a vu, dans la démonstration du lemme 3.2.2, que $\mathcal{G}(V)$ est égal à

$$\bigoplus_{0\leq j\leq n} m^{\circ j} k \otimes_{S_m} \bigoplus_{p_1+\ldots+p_j=n} (\mathrm{Lie}(p_1)\otimes \mathrm{sgn}_{p_1}[p_1])[-1]\otimes \ldots \otimes (\mathrm{Lie}(p_j)\otimes \mathrm{sgn}_{p_j}[p_j])[-1].$$

En particulier $\mathcal{G}(V)$ s'écrit sous la forme d'une algèbre commutative libre $k[W]$ (où W est l'algèbre de Lie libre sur V à un décalage de degré près). On obtient alors (par koszulité des algèbres commutatives)

$$\mathrm{Harr}(\mathcal{G}(V))^p = \mathrm{Lie}(V).$$

On en conclut que $E^2_{*,*}$ est l'homologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie libre sur V. Par conséquent (par koszulité des algèbres de Lie) $E^2_{*,*}$ est concentré en degré 0 et la suite spectrale dégénère. On obtient alors $H\mathcal{G}(A)_* = 0$ si $* > 0$ et V sinon. $\square$

Remarque : La définition du complexe $(C\mathcal{G}(A), d)$ (et en particulier la condition $d^2 = 0$) ne nécessite pas que l'opérade $\mathcal{G}$ soit de Koszul (mais juste qu'elle soit binaire quadratique). C'est aussi le cas pour le lemme 3.4.2 et le théorème 3.4.3. Les calculs de la démonstration précédente sont donc indépendants de la koszulité de $\mathcal{G}$. Précisément, ils assurent que l'application $(\mathcal{G}^\perp(\mathcal{G}), d) \longrightarrow (\mathrm{Id}, 0)$ est un quasi-isomorphisme, *i.e.*, par définition, que l'opérade $\mathcal{G}$ est de Koszul. En particulier, cette démonstration redonne une preuve élémentaire de la Koszulité de l'opérade $\mathcal{G}$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie. On peut lui associer de manière canonique une algèbre de Gerstenhaber comme suit. Soit $X(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}[-1])$ l'algèbre symmétrique sur la désuspension de $\mathfrak{g}$, munie du produit de concaténation. La structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ s'étend de manière unique à $X(\mathfrak{g})$ et l'identité de Leibniz est facilement vérifiée. On dit que $X(\mathfrak{g})$ est *l'algèbre de Gerstenhaber libre* sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.5.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $X(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Gerstenhaber associée et $H^{\mathrm{Lie}}_*(\mathfrak{g})$ l'homologie de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients triviaux. Alors, on a*

$$H\mathcal{G}_*(X(\mathfrak{g}) = H^{Lie}_*(\mathfrak{g}).$$

Démonstration: Par définition, l'algèbre $X(\mathfrak{g})$ est une algèbre libre pour la multiplication commutative. Par conséquent, on a

$$Harr_n(X(\mathfrak{g})) = Harr_n(S(\mathfrak{g}[-1])) = \mathfrak{g}[-1]$$

si $n = 0$ et 0 sinon. On en déduit que le terme $E^2_{*,*}$ de la suite spectrale du théorème 3.4.3 est concentré en degré $(0, *)$. Donc la suite dégénère et

$$\begin{aligned} E^2_{0,q} &= H_q(\Lambda^*(\mathfrak{g}[-1])[1], d_\ell) \\ &= H_q^{Lie}(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

car, sur la partie de degré $(0, *)$, la différentielle d_ℓ est exactement la différentielle de Chevalley-Eilenberg (*cf.* la remarque consécutive au lemme 3.4.2). □

Exemple : Si R est une extension finie de k, la cohomologie de Hochschild $H^*(R, R)$ de la k-algèbre R à valeurs dans le bimodule R est une algèbre de Gerstenhaber sur le corps R. Précisément, d'après le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, on a $H^*(R, R) = S(A[1])$ où A est le R-espace vectoriel gradué $A = \mathrm{Der}(R, R)[-1]$. La structure d'algèbre de Lie sur $S(A[1])$ est induite par le crochet de Schouten. En particulier la proposition 3.5.2 assure que $H\mathcal{G}_*(HH^*(R, R)) = H_*^{Lie}(A)$.

Considérons maintenant les algèbres de Gerstenhaber ayant une opération triviale et calculons leur homologie. Il revient au même de calculer l'homologie de Gerstenhaber d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, vue comme $\mathcal{G}$-algèbre avec multiplication nulle, et l'homologie de Gerstenhaber d'une algèbre commutative A, vue comme $\mathcal{G}$-algèbre avec crochet nul.

Précisément, il existe un unique crochet de Lie de degré -1 sur la cogèbre $\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}[1]^{\otimes n}$ qui prolonge le crochet de $\mathfrak{g}$ (*cf.* [**Fr1**]). On note $\mathrm{LT}(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Lie associée. On munit alors $\mathfrak{g}[-1]$ d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber avec multiplication triviale. De même, on peut considérer l'algèbre commutative A comme une $\mathcal{G}$-algèbre avec crochet de Lie nul.

Proposition 3.5.3. — *Soient $(\mathfrak{g}, \ell)$ une algèbre de Lie et (A, m) une algèbre commutative. On a*

$$H\mathcal{G}_*(\mathfrak{g}[-1], 0, \ell) = H_*^{Lie}(\mathrm{LT}(\mathfrak{g})), \qquad H\mathcal{G}_*(A, m) = \Lambda^*(\oplus_{n\geq 0} Harr_n(A)).$$

Démonstration: On utilise encore la suite spectrale du théorème 3.4.3. Pour l'algèbre $(\mathfrak{g}[-1], 0, \ell)$, la multiplication étant triviale, il en résulte que le terme $E^1_{*,*}$ est simplement $\mathrm{LT}(\mathfrak{g})$. On vérifie facilement que la différentielle d_ℓ est la differentielle de Chevalley-Eilenberg de $\mathrm{LT}(\mathfrak{g})$. Le raisonnement est analogue pour l'algèbre $(A, m, 0)$. □

3.6. Algèbres de Poisson à homotopie près

Les méthodes des parties précédentes s'appliquent aussi sans peine aux algèbres de Poisson. Conservons les notations de la partie 3.2.

Il est bien connu que l'opérade décrivant les algèbres de Poisson est l'opérade

$$\mathcal{P} = \mathcal{O}p(\ell\check{k} \oplus mk, R)$$

où $R = R_2 \oplus R_1 \oplus R_0$ avec

$$\begin{array}{rcl} R_2 & = & \mathrm{Vect}[\ell(\ell,1)\underline{x} + \ell(\ell,1)\underline{y} + \ell(\ell,1)\underline{z}] \\ R_1 & = & \mathrm{Vect}[\ell(m,1)\underline{x} + m(\ell,1)\underline{y} + m(\ell,1)\underline{z}] \\ & & \oplus\,\mathrm{Vect}[\ell(m,1)\underline{y} + m(\ell,1)\underline{z} + m(\ell,1)\underline{x}] \\ & & \oplus\,\mathrm{Vect}[\ell(m,1)\underline{z} + m(\ell,1)\underline{x} + m(\ell,1)\underline{y}] \\ R_0 & = & V/\mathrm{Vect}[m(m,1)\underline{x} + m(m,1)\underline{y} + m(m,1)\underline{z}]. \end{array}$$

On sait que l'algèbre de Poisson libre $\mathcal{P}(A)$ est l'algèbre tensorielle $\bigoplus A^{\otimes n}$ en tant qu'algèbre et que sa coopérade duale est $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{P}^{*}_{\{1\}}$.

On notera dans toute la suite $X \circledcirc Y$ le produit symétrique gradué de deux espaces vectoriels.

Lemme 3.6.1. — *La $\mathcal{P}^{\perp}$-coalgèbre libre sur un espace vectoriel gradué A est donnée par*

$$\mathcal{P}^{\perp}(A) = S^{*}\left(\underline{A^{\otimes *}}[*]\right) = \bigoplus_{p_1 \leq \cdots \leq p_n} \left(\underline{A^{\otimes p_1}}[p_1] \circledcirc \cdots \circledcirc \underline{A^{\otimes p_n}}[p_n]\right)[-1].$$

Le coproduit δ_m est donné, pour $x_i \in A^{\otimes p_i}$ $(i = 1...n)$, par

$$\delta_m(x_1 \circledcirc ... \circledcirc x_n) = \sum \varepsilon'(\sigma)\left(x_{\sigma(1)}\right) \circledcirc ... \circledcirc \left(x_{\sigma(i)} \otimes x_{\sigma(i+1)} \circledcirc ... \circledcirc x_{\sigma(n)}\right)$$

où la somme se fait sur tous les $(i, n-i)$-shuffles σ.

Le cocrochet δ_ℓ est lui donné par

$$\delta_\ell(x_1 \circledcirc ... \circledcirc x_n) = \sum \varepsilon'(\sigma)\beta_k\, x_{\sigma(1)} \circledcirc ... \circledcirc x_{\sigma(i)} \circledcirc (v_1^k, ..., v_j^k) \otimes (v_{j+1}^k, ..., v_{p_k}^k) \circledcirc x_{\sigma(i+1)} \circledcirc ... \circledcirc x_{\sigma(n)}.$$

Dans la formule précédente, la somme est étendue à tous les entiers $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq p_k$ et toutes les permutations σ qui fixent k et telle que $\sigma(1) < ... < \sigma(i)$ et $\sigma(i+1) < ... < \sigma(n)$ $(1 \leq i \neq k \leq n)$, i.e. σ est un $(i, n-1-i)$-shuffle sur $\{1, ..., n\} - \{k\}$. On a noté $x_k = (v_1^k, ..., v_j^k, v_{j+1}^k, ..., v_{p_k}^k)$. Le signe β_k est donné par

$$\beta_k = (-1)^{(p_k - j)(|v_1^k| + ... + |v_j^k|)}.$$

Démonstration: La démonstration est analogue à celle du lemme 3.3.3. En effet,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\perp}(A) &= \bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{P}^{\perp}(n)\otimes A^{\otimes n}\\ &= \bigoplus_{n\geq 0}(\mathcal{P}^{*})_{\{1\}}(n)\otimes A^{\otimes n}.\end{aligned}$$

On obtient, en reprenant les notations du lemme 3.3.3,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\perp}(A) &= \bigoplus_{0\leq j\leq n}((m^{*})^{\circ j}k\otimes_{S_j}\bigoplus_{p_1+\ldots+p_j=n}(\mathrm{Lie}^{*}(p_1)\otimes \mathrm{sgn}_{p_1}[p_1])\otimes\ldots\\ &\quad \ldots\otimes(\mathrm{Lie}^{*}(p_j)\otimes\mathrm{sgn}_{p_j}[p_j]))\otimes A^{\otimes n}[-1].\\ &= \bigoplus_{p_1\leq\cdots\leq p_n}(\underline{A^{\otimes p_1}}[p_1]\circledcirc\cdots\circledcirc\underline{A^{\otimes p_n}}[p_n])[-1].\end{aligned}$$

□

Nous en déduisons le théorème suivant qui décrit les algèbres de Poisson à homotopie près.

Théorème 3.6.2. — *Une algèbre de Poisson à homotopie près est la donnée d'un espace vectoriel gradué muni d'une famille d'applications*

$$\mu_{p_1,\ldots,p_n}: A^{\otimes p_1}\otimes\ldots\otimes A^{\otimes p_n}\to A$$

de degré $2-(p_1+\ldots+p_n)$ *pour tout* $n, p_1,\ldots,p_n\geq 1$, *telles que*

i) : *pour tout* $x_1,\ldots,x_n$ *dans* $A^{\otimes p_1},\ldots,A^{\otimes p_n}$ *et* $\sigma\in S_n$, *on ait*

$$\mu_{p_1,\ldots,p_n}(x_1,\ldots,x_n)=\varepsilon'(\sigma)\mu_{p_{\sigma(1)},\ldots,p_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)});$$

ii) : *pour tout* $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$, *l'application*

$$\begin{array}{ccl}A^{\otimes p_i} & \to & A\\ y & \mapsto & \mu_{p_1,\ldots,p_n}(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n)\end{array}$$

s'annule sur les "shuffles" non triviaux;

iii) : *l'unique codérivation* d *de* $\mathcal{P}^{\perp}(A)$ *étendant* $\sum\mu_{p_1,\ldots,p_n}$ *vérifie* $d^2=0$.

La condition *iii)* du théorème s'explicite de la manière suivante. Soient $x_1=(v_1^1,\ldots,v_{p_1}^1)$,..., $x_n=(v_1^n,\ldots,v_{p_n}^n)$ des éléments de $A^{\otimes p_1},\ldots,A^{\otimes p_n}$ respectivement. La condition *iii)* est équivalente à

$$\sum_{\substack{(s,n-s)\text{-unshuffles}\\ s=1..n}} \sum_{\substack{q_1+r_1=p_{\sigma(1)+1}\\ q_2+r_2=p_{\sigma(2)}\\ \dots\\ q_n+r_n=p_{\sigma(n)}}} \sum_{\substack{\ell_1+q_1\leq p_{\sigma(1)}\\ \dots\\ \ell_s+q_s\leq p_{\sigma(s)}}} \pm P_q^\ell(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(s)})=0$$

avec $q_{s+1}=...=q_n=0$ et

$$P_q^\ell(x_1,...,x_s)=\mu_{r_1,...,n}((v_1^1,...,v_{\ell_1}^1,\mu_{q_1,...,q_s}(v(1),...,v(s)),v^1_{\ell_1+q_1+1},...,v^1_{p_1})\otimes\widehat{x_2}\dots$$

$$\dots\otimes\widehat{x_s}\otimes x_{s+1}\dots\otimes x_n).$$

Dans la formule précédente on a noté $\widehat{x_j}$ $(k=1...s)$ le r_j-tenseur

$$\widehat{x_{j_k}}=(v_1^{p_j},v_2^{p_j},...,v_{\ell_j}^{p_j},\ v^{p_j}_{\ell_j+q_j+1},...,v^{p_j}_{p_j}).$$

Pour $r=1,...,s$, on a noté $v(r)$ l'élément de $A^{\otimes q_r}$ (qui depend aussi de i_r,q_r) suivant

$$v(r)=(v^r_{\ell_r+1},...,v^r_{\ell_r+q_r}).$$

En particulier $\widehat{x_k}=x_k$ où on a omis le tenseur $v(k)$ dans la formule.

Le signe $\pm$ est donné par la formule

$$\pm=(-1)^{(q_1+\dots+q_s)\left(r_2+\dots+r_n+|v_1^{\sigma(1)}|+\dots+|v_{\ell_1}^{\sigma(1)}|+p_{\sigma(1)}+\ell_{\sigma(1)}\right)+\ell_{\sigma(1)}}\varepsilon'(\tau)$$

où τ est la permutation associé au réindiçage de $x_1\circledcirc\dots\circledcirc x_n$.

Démonstration: L'opérade $\mathcal{P}$ étant de Koszul, une structure de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près sur un espace vectoriel A est déterminée par une codifférentielle sur $\mathcal{P}^\perp(A)$. Le lemme 3.6.1 et un calcul analogue à celui du théorème 3.3.4 permettent de conclure. □

Explicitations en basse dimension :

L'application μ_1 est de degré 1 et, d'après la propriété *iii*) du théorème 3.6.2, vérifie $\mu_1^2=0$. C'est donc une différentielle sur A. L'application $\mu_2 : A^{\otimes 2}\to A$ est de degré $2-2=0$. La propriéte *ii*) assure que μ_2 est une opération commutative (de même que pour l'opération m_2 de 3.3.4). De plus, la condition *iii*) pour des éléments de $A^{\otimes n}$ implique encore que $(A,\mu_1,\mu_2,...,\mu_n,...)$ définit une structure d'algèbre commutative à homotopie près.

De même, l'opération $\mu_{1,1} : A\otimes A\to A$ est de degré 0 et la propriété *i*) assure que $\mu_{1,1} : A\otimes A\to A$ est antisymétrique. On peut encore vérifier que la condition *iii*) définit une structure d'algèbre de Lie à homotopie près sur $(A,\mu_1,\mu_{1,1},\mu_{1,1,1}\dots)$.

On a également

$$\begin{array}{rcl} \mu_1(\mu_{1,2}(x,y,z)) + \mu_{1,2}(\mu_1(x,y,z)) + \mu_{1,1}(x,\mu_2(y,z)) & & \\ -(-1)^{|z|(|x|+|y|)}\mu_2(z,\mu_{1,1}(x,y)) - (-1)^{|y|(|x|)}\mu_2(y,\mu_{1,1}(x,z)) & = & 0 \end{array}$$

où on a noté $\mu_1(x,y,z)$ la différentielle induite par μ_1 sur $A \otimes (A^{\otimes 2})$. En particulier $\mu_{1,2}$ fournit une homotopie pour la relation de Leibniz du crochet $\mu_{1,1}$ et du produit μ_2.

□

Remarque : On peut appliquer les méthodes de la partie 3.4 pour définir une homologie naturelle des algèbres de Poisson. On trouve alors le complexe construit par Fresse [**Fr1**] 3.1, [**Fr2**]. En particulier, l'analogue de la suite spectrale 3.4.3 est la suite spectrale du théorème 0.2 de [**Fr1**]. De plus, le premier terme de cette suite spectrale s'identifie en terme de décompositions du complexe de Hochschild par les λ-opérations, *cf.* [**Fr1**], [**Fr2**].

Les calculs de la partie 3.5 s'étendent sans problème au cadre des algèbres de Poisson. Par exemple, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Poisson libre associée est $P(\mathfrak{g}) = S^*(\mathfrak{g})$ et on a

$$H\mathcal{P}_*(P(\mathfrak{g})) = H_*^{Lie}(\mathfrak{g}).$$

Ayant déterminé la structure des algèbres de Poisson et de Gerstenhaber à homotopie près, il est facile d'exhiber la structure des n-algèbres à homotopie près.

Rappelons (*cf.* [**GJ**]) que pour un entier $n \geq 0$, une n-algèbre est la donnée d'un espace vectoriel gradué A muni d'un produit commutatif gradué m : $A \otimes A \to A$ et d'un crochet $[\ ;\ ] : A_i \otimes A_j \to A_{i+j+n}$ de degré n qui induit une structure d'algèbre de Lie sur $A[n]$. On demande, en plus, que le crochet et le produit vérifie la condition de Leibniz suivante, pour tout $x, y, z \in A$:

$$[x; m(y,z)] = m([x;y],z) + (-1)^{(|x|+n)|y|} m(y,[x;z]).$$

Théorème 3.6.3. — **i) :** *Si n est pair, une structure de n-algèbre à homotopie près est donnée par une famille d'applications $\mu_{p_1,\ldots,p_k} : A^{\otimes p_1} \otimes \ldots \otimes A^{\otimes p_k} \to A$ de degré $2+n-(p_1+\ldots+p_k+nk)$ satisfaisant les relations i), ii) et iii) du théorème 3.6.2.*

ii) : *Si n est impair, une structure de n-algèbre à homotopie près est donnée par une famille d'applications $m_{p_1,\ldots,p_k} : A^{\otimes p_1} \otimes \ldots \otimes A^{\otimes p_k} \to A$ de degré $2 + n - (p_1 + \ldots + p_k + nk)$ satisfaisant les relations i), ii) et iii) du théorème 3.3.4.*

Démonstration: Le raisonnement est analogue à celui utilisé pour démontrer les théorèmes 3.3.4 et 3.6.2. On obtient alors qu'une structure de n-algèbre à homotopie près, sur un espace vectoriel gradué A, est uniquement déterminée par une famille d'applications

$$d_{p_1,\ldots,p_k} : A^{\otimes p_1} \otimes \ldots \otimes A^{\otimes p_k} \to A[2+n-nk-p_1 \ldots - p_k].$$

Pour déterminer les signes apparaissant dans les relations que doivent vérifier ces opérations, il suffit de distinguer deux cas selon la parité de n. Si n est pair, alors on retrouve le cas des algèbres de Poisson à homotopie près (qui correspondent à $n = 0$). Si n est impair, on retrouve les relations définissant les algèbres de Gerstenhaber à homotopie près (qui correspondent à $n = 1$).

□

CHAPITRE 4

A FORMALITY THEOREM FOR POISSON MANIFOLDS

Gregory Ginot & Gilles Halbout

Abstract : Let M be a differential manifold. Using different methods, Kontsevich and Tamarkin have proved a formality theorem, which states the existence of a Lie homomorphism "up to homotopy" between the Lie algebra of Hochschild cochains on $C^\infty(M)$ and its cohomology $(\Gamma(M, \Lambda TM),\ [-,-]_S)$. Suppose M is a Poisson manifold equipped with a Poisson tensor π; then one can deduce from this theorem the existence of a star product $\star$ on $C^\infty(M)$. In this paper we prove that the formality theorem can be extended into a Lie homomorphism "up to homotopy" between the Lie algebra of Hochschild cochains on the deformed algebra $(C^\infty(M), \star)$ and the Poisson complex $(\Gamma(M, \Lambda TM),\ [\pi, -]_S)$. We will first recall Tamarkin's proof and see how the formality maps can be deduced from Etingof-Kazhdan's theorem using only homotopies formulas. The formality theorem for Poisson manifolds will then follow.

Résumé : Soit M une variété différentiable. En utilisant des méthodes différentes, Kontsevich et Tamarkin ont démontré un théorème de formalité,ou plus précisément, qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie à homotopie près entre l'algèbre de Lie des cochaînes de Hochschild sur $C^\infty(M)$ et sa cohomologie $(\Gamma(M, \Lambda TM),\ [-,-]_S)$. Si M admet une structure de Poisson donnée par un tenseur π; alors on peut déduire de ce théorème l'existence d'un produit star $\star$ sur $C^\infty(M)$. Dans cet article on étend le théorème de formalité à l'algèbre de Lie des cochaînes de Hochshchild sur l'algèbre déformée

$(C^\infty(M), \star)$ et le complexe de Poisson $(\Gamma(M, \Lambda TM),\ [\pi, -]_S)$. Dans un premier temps on rappelle la preuve de Tamarkin et on montre comment les applications construites par le théorème de formalité peuvent îre déduites du théorème d'Etingof-Kazhdan via des homotopies explicites.

Keywords : Deformation quantization, star-product, homotopy formulas, homological methods.

0. Introduction

Let M be a differential manifold. Formality theorems link commutative objects with non-commutative ones. More precisely, one can define two graded Lie algebras $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$. The first one $\mathfrak{g}_1 = \Gamma(M, \Lambda TM)$ is the space of multivector fields on M. It is endowed with a graded Lie bracket $[-,-]_S$ called the Schouten bracket (see [**Kos**]).

The space $\mathfrak{g}_1$ can be identified with the cohomology of a cochain complex $\mathfrak{g}_2 = C^\cdot(A, A) = \bigoplus_{k\geq 0} C^k(A, A)$, the space of Hochschild cochains (generated by differential k-linear maps from A^k to A), where $A = C^\infty(M)$ is the algebra of smooth functions over M. The vector space $\mathfrak{g}_2$ is also endowed with a graded Lie algebra structure given by the Gerstenhaber bracket $[-,-]_G$ [**GV**]. The differential $b = [m, -]_G$ (where $m \in C^2(A, A)$ is the commutative multiplication in A) makes $\mathfrak{g}_2$ into a graded differential Lie algebra and the cohomology $H^*(\mathfrak{g}_2, b)$ of $\mathfrak{g}_2$ with respect to b coincides with $\mathfrak{g}_1$. More precisely, one can construct a quasi-isomorphism $\phi^1\ :\ \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, (the Hochschild-Kostant-Rosenberg quasi-isomorphism, see [**HKR**]) between the complexes $(\mathfrak{g}_1, 0)$ and $(\mathfrak{g}_2, b)$; it is defined, for $\alpha \in \mathfrak{g}_1$, $f_1, \cdots, f_n \in A$, by

$$\alpha \mapsto \big((f_1, \ldots, f_n) \mapsto\ \langle \alpha, df_1 \wedge \cdots \wedge df_n\rangle\big).$$

This map ϕ^1 is not a Lie algebra morphism, but the only obstructions for it to be are given by boundaries for the differential b. In fact, Kontsevich's formality theorem states that ϕ^1 induces a morphism if one relaxes the Lie algebras structures on $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$ into Lie algebras "up to homotopy" structures. In other words, setting $\phi^0 = m \in C^2(A, A)$, formality theorems can be seen as a construction of a collection of homotopies $\phi^n\ :\ \Lambda^n\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ such that ϕ^1 is the Hochschild-Kostant-Rosenberg morphism and the map $\phi = \sum_{n\geq 0} \phi^n$: $\Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ satisfies

$$[\phi, \phi]_G = \phi \circ m_1^{1,1} \tag{0.1}$$

where $m_1^{1,1} : \Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1 \to \Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1$ is the canonical differential induced by the Schouten Lie bracket on $\mathfrak{g}_1$. If one use Sweedlers's notations, the relation (0.1) becomes $\phi\big(m^1_{1,1}(X)\big) = [\phi(X^{(1)}), \phi(X^{(2)})]_G$ for all $X \in \Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1$.

The existence of such homotopies was proven by Kontsevich (see [**Ko1**] and [**Ko2**]) and Tamarkin (see [**Ta**]). They use different methods in their proofs. Nevertheless the two approaches are connected (see [**KS**]). In this paper we will use Tamarkin's methods (which are also well explained in [**Hin**]) to obtain a version of the formality theorem when the manifold M is equipped with a Poisson structure. Moreover, as in Tamarkin's proof, we will suppose that $M = \mathbb{R}^n$. In some cases the results can be globalized using techniques of Cattaneo, Felder and Tomassini (see [**CFT**]). More precisely, all our results are valid for a arbitrary manifolds up to Section 4.5 where acyclicity of the de Rham complex only holds for $M = \mathbb{R}^n$ and thus globalization is needed.

One of the goals of this paper is to make the maps ϕ^n given by Tamarkin's proof as explicit as possible. We could try to construct them by induction starting from ϕ^1 (the Hochschild-Kostant-Rosenberg quasi-isomorphism), but we would meet cohomological obstructions to build $(\phi^n)_{n\geq 2}$. Thus a natural idea consists in enlarging the structures in order to reduce the obstructions. More precisely, we know that the graded space $\mathfrak{g}_1 = \Gamma(M, \Lambda TM)$ equipped with the Lie bracket $[-,-]_S$ and the exterior product $\wedge$ has a graded Gerstenhaber algebra structure.

Although the complex $\mathfrak{g}_2$ equipped with the Gerstenhaber bracket and the cup-product is not a Gerstenhaber algebra, Tamarkin [**Ta**] has proved that $\mathfrak{g}_2$ can be endowed with a structure of Gerstenhaber algebras up to homotopy (see Section 4.1) and established the existence of a quasi-isomorphism of Gerstenhaber algebras up to homotopy between $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$.

The paper is organized as follows :

- In Section 4.1, taking our inspiration from the language of operads, we recall the definitions of Lie algebras up to homotopy (L_∞-algebras for short) and reformulate the problem as follows : the (differential) graded Lie algebra structure on $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$ are equivalent to codifferentials d_1 and d_2 on the exterior coalgebras $\Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1$ and $\Lambda^\cdot\mathfrak{g}_2$. A morphism of Lie algebras up to homotopy between $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$ is a morphism of differential coalgebras

$$\phi \;:\; (\Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1, d_1) \to (\Lambda^\cdot\mathfrak{g}_2, d_2).$$

  We will also recall the definition of Gerstenhaber algebras "up to homotopy" or G_∞-algebras (similarly given by a differential d on a peculiar coalgebra $\Lambda^\cdot\underline{\mathfrak{g}^{\otimes\cdot}}$) and morphism between them.
- In Section 4.2 we recall Tamarkin's construction of the G_∞-structure on $\mathfrak{g}_2$, given by a differential d_2 on $\Lambda^\cdot\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}}$.
- In Section 4.3 we prove (still following Tamarkin's approach) that there exists a G_∞-structure on $\mathfrak{g}_1$, given by a differential d_1' on $\Lambda^\cdot\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}$, and that there exists a G_∞-morphism $\psi : (\Lambda^\cdot\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}, d_1') \to (\Lambda^\cdot\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}}, d_2)$.

- In Section 4.4 we establish the existence of a G_∞-morphism $\psi' : (\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes^\cdot}}, d_1) \to (\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes^\cdot}}, d_1')$, where d_1 defines the Gerstenhaber structure on $\mathfrak{g}_1$ described in Section 4.1. We deduce this fact from the acyclicity of the complex
$$\Big(\mathrm{Hom}(\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes^\cdot}}), [m_1^{1,1} + m_1^2, -]\Big),$$
where $[-,-]$ denotes the graded commutator of morphisms,.
- In Section 4.5 we prove that the complex $\Big(\mathrm{Hom}(\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes^\cdot}}), [m_1^{1,1} + m_1^2, -]\Big)$ is acyclic for $M = \mathbb{R}^n$ and that homotopy formulas can be written out.
- In Section 4.6 we show that the G_∞-morphism $\phi = \psi \circ \psi' : (\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes^\cdot}}, d_1) \to (\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes^\cdot}}, d_2)$ induces the desired L_∞-morphism between $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$ and also in the same way an associative algebra morphism "up to homotopy" between these two spaces. Moreover when the manifold M is a Poisson manifold equipped with a Poisson tensor field $\pi \in \Gamma(M, \Lambda^2 TM)$ satisfying $[\pi, \pi]_S = 0$, then there exists a star-product on M, that is to say a deformation $m_\star$ of the product m on A whose linear term is π (see [**BFFLS1**] and [**BFFLS2**]). In this case $(\mathfrak{g}_1, [-,-]_S, [\pi, -]_S)$ becomes a graded differential Lie algebra (and even a Gerstenhaber algebra) and $(\mathfrak{g}_2, [-,-]_G, b_\star)$, where $b_\star$ is the Hochschild differential corresponding to the deformed product $m_\star$, is a new graded differential Lie algebra.
- In Section 4.7 we prove a formality theorem between the two differential graded Lie algebras $(\mathfrak{g}_{1\star}, [-,-]_S, [\pi, -]_S)$ and $(\mathfrak{g}_{2\star}, [-,-]_G, b_\star)$ following the same steps as in Sections 4.2, 4.3 and 4.4.

Remark : In this paper we emphasize the Lie structures of $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$, not their associative algebra structures. Hence, our gradings for the spaces $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, ... are shifted by one from what is usually done in the literature.

4.1. Definitions and notations

Let $\mathfrak{g}$ be any graded vector space. The exterior coalgebra $\Lambda^\cdot \mathfrak{g}$ is the cofree cocommutative coalgebra on the vector space $\mathfrak{g}$. In this paper we deal with graded spaces. Henceforth, for any graded vector space $\mathfrak{g}$, we choose the following degree on $\Lambda^\cdot \mathfrak{g}$: if $X_1, \dots, X_k$ are homogeneous elements of respective degrees $|X_1|, \dots |X_k|$, then the degree of $|X_1 \wedge \cdots \wedge X_k|$ is given by
$$|X_1 \wedge \cdots \wedge X_k| = |X_1| + \cdots + |X_k| - k.$$
In particular, the component $\mathfrak{g} = \Lambda^1 \mathfrak{g} \subset \Lambda^\cdot \mathfrak{g}$ is the same as the Lie algebra $\mathfrak{g}$ with degree shifted by one. The coalgebra $\Lambda^\cdot \mathfrak{g}$ being cofree, any degree one linear map $d^k : \Lambda^k \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ($k \geq 1$) extends into a coderivation $d^k : \Lambda^\cdot \mathfrak{g} \to \Lambda^\cdot \mathfrak{g}$ of the coalgebra $\Lambda^\cdot \mathfrak{g}$.

Let us recall the definition of Lie algebras "up to homotopy", called L_∞-algebras henceforth.

Definition 4.1.1. — *A vector space $\mathfrak{g}$ is endowed with a L_∞-algebra structure if there are degree one linear maps $m^{1,\dots,1} : \Lambda^k\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ such that if we extend them to maps $\Lambda^\cdot\mathfrak{g} \to \Lambda^\cdot\mathfrak{g}$, then $d \circ d = 0$ where d is the derivation*

$$d = m^1 + m^{1,1} + \cdots + m^{1,\dots,1} + \cdots .$$

For more details on L_∞-structures, see [**LS**]. It follows from the definition that a L_∞-algebra structure induces a differential coalgebra structure on $\Lambda^\cdot\mathfrak{g}$ and that the map $m^1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ is a differential.

The Lie algebra structure on $\mathfrak{g}_1 = \Gamma(M, \Lambda TM)$ is given by the Schouten bracket (see [**Kos**]) which extends the Lie bracket of vector fields in the following way :

$$[\alpha, \beta \wedge \gamma]_S = [\alpha, \beta]_S \wedge \gamma + (-1)^{|\alpha|(|\beta|+1)}\beta \wedge [\alpha, \gamma]_S \qquad (1.2)$$

for $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}_1$. For $f \in \Gamma(M, \Lambda^0TM) = C^\infty(M)$ and $\alpha \in \Gamma(M, \Lambda^1TM)$ we set $[\alpha, f]_S = \alpha \cdot f$, the action of the vector field α on f. The grading on $\mathfrak{g}_1$ is defined by $|\alpha| = n \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma(M, \Lambda^{n+1}TM)$

We reformulate the graded Lie algebra structure of $\mathfrak{g}_1$ into a L_∞-algebra structure as follows : the Schouten Lie bracket $[-,-]_S$ on $\mathfrak{g}_1$ is equivalent to a (degree one) map $m_1^{1,1} : \Lambda^2\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$ that we can extend canonically to $m_1^{1,1} : \Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1 \to \Lambda^\cdot\mathfrak{g}_1$. The Jacobi identity satisfied by $[-,-]_S$ then corresponds to the identity :

$$d_1 \circ d_1 = 0,$$

where $d_1 = m_1^{1,1}$. Hence the map $m_1^{1,1}$ defines a L_∞-algebra structure on $\mathfrak{g}_1$.

In the same way, the Lie algebra structure on the vector space $\mathfrak{g}_2 = C^\cdot(A, A)$ is given by the Gerstenhaber bracket $[-,-]_G$ defined, for $D, E \in \mathfrak{g}_2$, by

$$[D, E]_G = \{D|E\} - (-1)^{|E||D|}\{E|D\},$$

where

$$\{D|E\}(x_1, \dots, x_{d+e-1}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^{|E| \cdot i} D(x_1, \dots, x_i, E(x_{i+1}, \dots, x_{i+e}), \dots).$$

The space $\mathfrak{g}_2$ has a grading defined by $|D| = k \Leftrightarrow D \in C^{k+1}(A, A)$ and its differential is $b = [m, -]_G$, where $m \in C^2(A, A)$ is the commutative multiplication on A.

The Gerstenhaber bracket on $C^\cdot(A, A)$ is equivalent to a map $m_2^{1,1} : \Lambda^2\mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_2$ and the differential b is a degree one map $m_2^1 : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_2$. These maps extends to maps $\Lambda^\cdot\mathfrak{g}_2 \to \Lambda^\cdot\mathfrak{g}_2$. All identities defining the differential Lie algebra structure on $\mathfrak{g}_2$ (Jacobi relations for $[-,-]_G$, $b^2=0$, compatibility between b and $[-,-]_G$) can be summarized in the unique relation

$$d_2 \circ d_2 = 0,$$

where $d_2 = m_2^1 + m_2^{1,1}$. Hence the maps b and $[-,-]_G$ defines a L_∞-structure on $\mathfrak{g}_2$. In fact any differential Lie algebra $(\mathfrak{g}, b)$ has a L_∞-structure, with $m_2^1 = b$, $m_2^{1,1}$ is given by its bracket and $m^{1,\dots,1} : \Lambda^{k\geq 3}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} = 0$.

Definition 4.1.2. — *A L_∞-morphism between two L_∞-algebras $(\mathfrak{g}_1, d_1 = m_1^1 + \dots)$ and $(\mathfrak{g}_2, d_2 = m_2^1 + \dots)$ is a morphism of differential coalgebras*

$$\phi \ : \ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1, d_1) \to (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_2, d_2). \tag{1.3}$$

Such a map ϕ is uniquely determined by a collection of maps $\phi^n : \Lambda^n\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ as the differential coalgebras $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1$ and $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_2$ are cofree. In the case $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$ are respectively the graded Lie algebra $(\Gamma(M, \Lambda TM),\ [-,-]_S)$ and the differential graded Lie algebra $(C^{\cdot}(C^\infty(M), C^\infty(M)),\ [-,-]_G)$ it is easy to check that Definition (0.1) (from the introduction) and Definition (1.3) coincide.

A shuffle (of length n) is a permutation of $\{1,...,n\}$ $(n \geq 1)$ such that there exist $p, q \geq 1$ with $p+q=n$ and the following inequalities hold :

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p), \qquad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

For any permutation σ of $\{1,...,n\}$ and any graded variables $x_1, \dots, x_n$ we define the sign $\varepsilon(\sigma)$ (the dependence on $x_1, \dots x_n$ is implicit) by the identity

$$x_1 \dots x_n = \varepsilon(\sigma) x_{\sigma^{-1}(1)} \dots x_{\sigma^{-1}(n)}$$

which holds in the free graded commutative algebra generated by $x_1, \dots x_n$.

For any graded vector space $\mathfrak{g}$, each shuffle σ acts on $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ by the formula :

$$\sigma \cdot (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^\sigma \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots a_{\sigma^{-1}(n)}$$

for $a_0, \cdots, a_n \in \mathfrak{g}$, where $(-1)^\sigma$ is the sign of the permutation σ. We denote $\underline{\mathfrak{g}^{\otimes n}}$ the quotient of $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ by the image of all the maps $\mathrm{shuf}_{p,q} = \sum \sigma.(-)$, where the sum is over all shuffles of length $n = p+q$ with p, q fixed. The graded vector space $\oplus_{n\geq 0}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes n}}$ a quotient coalgebra of the tensor coalgebra $\oplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}^{\otimes n}$. It is well known (see [**GK**] for example) that this coalgebra $\oplus_{n\geq 0}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes n}}$ is the cofree Lie coalgebra on the vector space $\mathfrak{g}$ (with degree shifted by minus one).

Henceforth, for any space $\mathfrak{g}$, we denote $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$ the graded space

$$\bigoplus_{m\geq 1,\ p_1+\cdots+p_n=m} \underline{\mathfrak{g}^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\mathfrak{g}^{\otimes p_n}}.$$

We will use the following grading on $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$: for $x_1^1, \cdots, x_n^{p_n} \in \mathfrak{g}$, we define

$$|\underline{x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_1^{p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{x_n^1 \otimes \cdots \otimes x_n^{p_n}}| = \sum_{i_1}^{p_1} |x_1^{i_1}| + \cdots + \sum_{i_n}^{p_1} |x_n^{i_n}| - n.$$

Notice that the induced grading on $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g} \subset \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$ is the same than the one introduced above. The cobracket on $\oplus\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$ and the coproduct on $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}$ extend to a cobracket and a coproduct on $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$. The sum of the cobracket and the coproduct give rise to a coalgebra structure on $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$. It is well known that this coalgebra structure is cofree (see [**Gi2**],Section 3 for example).

Definition 4.1.3. — *A structure of Gerstenhaber algebra "up to homotopy" (G_∞-algebra for short) on a graded vector space $\mathfrak{g}$ is given by a collection of degree one maps*

$$m^{p_1,\ldots,p_n} \;:\; \underline{\mathfrak{g}^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\mathfrak{g}^{\otimes p_n}} \to \mathfrak{g}$$

indexed by $p_1, \ldots p_n \geq 1$ such that their canonical extension : $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$ satisfies $d \circ d = 0$, where

$$d = \sum_{m \geq 1,\; p_1 + \cdots p_n = m} m^{p_1,\ldots,p_n}.$$

More details on G_∞-structures are given in [**Gi2**]. Again, as the coalgebra structure of $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$ is cofree, the map d makes $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}^{\otimes \cdot}}$ a differential coalgebra.

Definition 4.1.4. — *A morphism of G_∞-algebras between two G_∞-algebras $(\mathfrak{g}_1, d_1)$ and $(\mathfrak{g}_2, d_2)$ is a map $\phi : (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, d_1) \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes \cdot}}, d_2)$ of codifferential coalgebras.*

The Lie algebra $\mathfrak{g}_1$ of multi-vector fields is in fact a Gerstenhaber algebra that is to say a graded Lie algebra structure with a graded commutative algebra structure (for the same space with grading shifted by -1) and a compatibility between the bracket and the product (expressing that the bracket is a derivation for the product) as in (1.2). On the space $\mathfrak{g}_1 = \Gamma(M, \Lambda TM)$, the commutative structure is given by the exterior product :

$$\forall \alpha,\ \beta \in \Gamma(M, \Lambda TM),\ \alpha \wedge \beta = (-1)^{(|\alpha|+1)(|\beta|+1)} \beta \wedge \alpha. \tag{1.4}$$

We can reformulate the graded Gerstenhaber structure into a G_∞-algebra structure as follows. The graded Lie algebra structure is still given by a map $m_1^{1,1} : \Lambda^2\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$, and the commutative graded algebra structure is given by a map $m_1^2 : \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes 2}} \to \mathfrak{g}_1$ (because $\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes 2}}$ is the quotient of $\mathfrak{g}_1^{\otimes 2}$ by the 2-shuffles, that is to say the elements $a \otimes b - (-1)^{(|a|+1)(|b|+1)} b \otimes a$). The maps $m_1^{1,1}$, m_1^2 above extend into degree one derivations

$$m_1^{1,1},\ m_1^2 \;:\; \wedge^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}} \to \wedge^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}.$$

All the identities defining the Gerstenhaber-algebra structure on $\mathfrak{g}_1$ can be summarized into the unique relation

$$d_1 \circ d_1 = 0$$

where $d_1 = m_1^{1,1} + m_1^2$. Hence the Gerstenhaber bracket and the exterior product define a G_∞-algebra structure on $\mathfrak{g}_1$. More generally, any Gerstenhaber algebra $(\mathfrak{g}, m, [-,-])$ has a canonical G_∞-structure given by $m^2 = m$, $m^{1,1} = [-,-]$, the other maps being zero.

4.2. A G_∞-structure on $\mathfrak{g}_2 = C^\cdot(A, A)$

The Lie algebra $\mathfrak{g}_2$ is also endowed with an associative product. It is the "cup" product $\cup$ defined, for $D, E \in \mathfrak{g}_2$ and $x_1, \ldots, x_{|D|+|E|+2} \in A$, by

$$(D \cup E)(x_1, \ldots, x_{|D|+|E|+2}) = (-1)^\gamma D(x_1, \ldots, x_{|D|+1}) E(x_{|D|+2}, \ldots, x_{|D|+|E|+2})$$

where $\gamma = (|E|+1)(|D|+1)$. The projection of this product on the cohomology of $(\mathfrak{g}_2, b)$ is the exterior product $\wedge$, but unfortunately $(\mathfrak{g}_2, [-,-]_G, \cup, b)$ is not a Gerstenhaber algebra. However the relations (1.2), (1.4) are satisfied up to a boundary for b.

Tamarkin stated the existence of a G_∞-structure on $\mathfrak{g}_2$. Our aim in this section is to build this G_∞-structure more explicitly. By Definition 4.1.3 we have to exhibit a differential d_2 on $\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}}$ satisfying, if

$$d_2 = m_2^1 + m_2^{1,1} + m_2^2 + \cdots + m_2^{p_1,\ldots,p_n} + \cdots,$$

1. m_2^1 is the map b and $m_2^{1,1}$ is the map $[-,-]_G$.
2. $d_2 \circ d_2 = 0$.

We first reformulate this problem : let $L_2 = \oplus\, \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes n}}$ be the cofree Lie coalgebra on $\mathfrak{g}_2$ (see Section 4.1 for the notation). Since L_2 is a cofree coalgebra, a Lie bialgebra structure on L_2 is given by degree one maps $l_2^n : \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes n}} \to \mathfrak{g}_2$, corresponding to the differential, and maps $l_2^{p_1,p_2} : \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes p_1}} \wedge \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes p_2}} \to \mathfrak{g}_2$, corresponding to the Lie bracket. These maps extend uniquely into a coalgebra derivation $L_2 \to L_2$ and a coalgebra map $L_2 \wedge L_2 \to L_2$ (still denoted l_2^m and $l_2^{p,q}$). The following lemma is well known.

Lemma 4.2.1. — *Suppose we have a differential Lie bialgebra structure on the Lie coalgebra L_2, with differrential and Lie bracket respectively determined by maps l_2^n and $l_2^{p_1,p_2}$ as above. Then $\mathfrak{g}_2$ has a G_∞-structure given, for all $p, q, n \geq 1$, by*

$$m_2^n = l_2^n, \qquad m_2^{p,q} = l_2^{p,q} \quad \textit{and} \quad m_2^{p_1,\ldots,p_r} = 0 \textit{ for } r \geq 3.$$

Proof: The map $d_2 = \sum_{i\geq 0} l_2^i + \sum_{p_1,p_2 \geq 0} l_2^{p_1,p_2} : \Lambda^\cdot L_2 \to \Lambda^\cdot L_2$ is the Chevalley-Eilenberg differential on the differential Lie algebra L_2 ; it satisfies $d_2 \circ d_2 = 0$. $\square$

Thus to obtain the desired G_∞-structure on $\mathfrak{g}_2$, it is enough to define a Lie bialgebra structure on L_2 given by maps l_2^n and $l_2^{p_1,p_2}$ with $l_2^1 = b$ and $l_2^{1,1} = [-,-]_G$.

Let us now give an equivalent formulation of our problem, which is stated in terms of the associated operads in [**Ta**] :

Proposition 4.2.2. — *Differential Lie bialgebra structures on the cofree Lie coalgebra $L_2 = \oplus_{n\geq 0}\ \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes n}}$ are in one-to-one correspondence with differential bialgebra structures on the cofree tensorial coalgebra $T_2 = \oplus_{n\geq 0}\ \mathfrak{g}_2^{\otimes n}$.*

A differential bialgebra structure on the cofree tensorial coalgebra $\oplus V^{\otimes n}$ associated to a vector space V is often called a B_∞-structure on V, see [**Bau**].

Proof: We follow the proof in [**Ta**]. Let V be a finite-dimensional vector space and V^* be the dual space. A differential bialgebra structure on $T = \oplus_{n\geq 0}\ V^{\otimes n}$ is given by maps $a^n : V^{\otimes n} \to V$ $(n \geq 2)$, corresponding to the differential, and maps $a^{p_1,p_2} : V^{\otimes p_1} \otimes V^{\otimes p_2} \to V$ $(p_1, p_2 \geq 0)$, corresponding to the product. We can define dual maps of the maps $\sum_{n\geq 0} a^n : T \to T$ and $\sum_{p_1,p_2\geq 0} a^{p_1,p_2} : T \otimes T \to T$, namely $D : \hat{T} \to \hat{T}$ and $\Delta : \hat{T} \to \hat{T}\hat{\otimes}\hat{T}$, where $\hat{T}$ is the completion of the tensor algebra $\oplus_{n\geq 0} V^{*\otimes n}$. The maps D and Δ are given by maps $a^{n*} : V^* \to V^{*\otimes n}$ and $a^{p_1,p_2*} : V^* \to V^{*\otimes p_1} \otimes V^{*\otimes p_2}$, and define a differential bialgebra structure on the complete free algebra $\hat{T}$. The tensor algebra $\oplus_{n\geq 0} V^{*\otimes n}$ is now graded as follows : $|x| = p$ when $x \in V^{*\otimes p}$.

Similarly, if we consider a differential Lie bialgebra structure on the cofree Lie coalgebra $L = \oplus_{n\geq 0}\ \underline{V^{\otimes n}}$, the duals maps d and δ of the structure maps $\sum_{n\geq 0} l^n$ and $\sum_{p_1,p_2\geq 0} l^{p_1,p_2}$ induce a differential Lie bialgebra structure on $\hat{L}$, the completion of the free Lie algebra $\oplus_{n\geq 0} Lie(V^*)(n)$ on V^*, where $Lie(V^*)(n)$ is the subspace of element of degree n.

We now replace formally each element x of degree n in $\hat{T}$ (resp. $\hat{L}$) by $h^n x$, where h is a formal parameter. Letting $|h| = -1$, we easily see that a differential associative (resp. Lie) bialgebra structure on the associative (resp. Lie) algebras $(\oplus_{n\geq 0} V^{*\otimes n})[[h]]$ (resp. $(\oplus_{n\geq 0} Lie(V^*)(n))[[h]]$) with the product and coproduct being of degree zero is equivalent to a differential associative (resp. Lie) bialgebra structure on the associative (resp. Lie) algebra $\hat{T}$ (resp. $\hat{L}$).

Suppose we have a differential free coalgebra $(\hat{T}, D, \Delta)$. We can apply Etingof-Kazhdan's dequantization theorem (see [**EK2**], Section 2.4) : there exists a Lie bialgebra $(\hat{L}', [-,-], \delta)$, generated as a Lie algebra by V^* and an injective map $I_{\mathrm{EK}} : \hat{L}'[[h]] \to (\oplus_{n\geq 0} V^{*\otimes n})[[h]]$ such that

1. the restriction $I_{\mathrm{EK}} : V^* \to V^*$ is the identity,
2. $I_{\mathrm{EK}}([a,b]) = I_{\mathrm{EK}}(a)I_{\mathrm{EK}}(b) - I_{\mathrm{EK}}(b)I_{\mathrm{EK}}(a)$, for all $a, b \in \hat{L}'$,

3. $(\Delta - \Delta^{\mathrm{op}})\, I_{\mathrm{EK}} = h I_{\mathrm{EK}} \delta + O(h^2)$,
4. the maps I_{EK}, δ and $[-,-]$ are given by universal formulas depending only on Δ and the product of $\hat{T}$,
5. if we apply Etingof-Kazhdan's quantization functor [**EK1**] to the Lie bialgebra $(\oplus_{n\geq 0} Lie(V^*)^n[[h]], \delta)$ we get the bialgebra $((\oplus_{n\geq 0} V^{*\otimes n})[[h]], \Delta)$ back.

The last condition implies that $\hat{L}'$ is free as a Lie algebra because $\hat{T}$ is free as an algebra so that $(\hat{L}', d, \delta)$ is a differential free Lie coalgebra, taking d such that $I_{\mathrm{EK}} \circ d = D \circ I_{\mathrm{EK}}$.

Starting now with a differential free Lie coalgebra L, we can use the same theorems to construct a differential free coalgebra such that this construction is the inverse of the previous one. This proves that differential Lie bialgebra structures on the free Lie coalgebra $\hat{L}$ and differential bialgebra structures on the free tensorial coalgebra $\hat{T}$ are in one-to-one correspondence and so, taking dual maps, differential Lie bialgebra structures on the cofree Lie coalgebra L and differential bialgebra structures on the cofree tensorial coalgebra T are also in one to one correspondence. Moreover, as the operations build in this correspondence are universal, depending only on the structure maps, the same assertion is still valid when V is the infinite-dimensional space $\mathfrak{g}_2$. □

Since the map I_{EK} defined in the precedent proof is the identity on V^*, the first terms a_2^1 and l_2^1 of the differentials will be the same on $T_2 = \oplus \mathfrak{g}_2^{\otimes n}$ and on $L_2 = \oplus_{n\geq 0}\, \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes n}}\ \mathfrak{g}_2^*$. For the same reason the first term $l_2^{1,1}$ of the Lie bracket on L_2 will be the antisymmetrization of the first term $a_2^{1,1}$ of the cobracket on T_2.

By Proposition 4.2.2, the problem of defining a Lie bialgebra structure on L_2 given by maps l_2^n and $l_2^{p_1,p_2}$ with $l_2^1 = b$ and $l_2^{1,1} = [-,-]_G$, is equivalent to defining a differential bialgebra structure on T_2 given by maps $a_2^n : \mathfrak{g}_2^{\otimes n} \to \mathfrak{g}_2$ and $a_2^{p_1,p_2} : \mathfrak{g}_2^{\otimes p_1} \otimes \mathfrak{g}_2^{\otimes p_2} \to \mathfrak{g}_2$ where $a_2^1 = b$ and $a_2^{1,1}$ is the product $\{-|-\}$ defined in Section 4.1. Indeed, the anti-symmetrization of $\{-|-\}$ is by definition $[-,-]_G$. The latter can be achieved using the braces (defined in [**GV**]) acting on the Hochschild cochain complex $\mathfrak{g}_2 = C^{\cdot}(A,A)$ for any algebra A. The braces operations are maps $a_2^{1,p} : \mathfrak{g}_2 \otimes \mathfrak{g}_2^{\otimes p} \to \mathfrak{g}_2$ $(p \geq 1)$ defined, for all homogeneous $D, E_1, \ldots, E_p \in \mathfrak{g}_2^{\otimes p+1}$ and $x_1, \ldots, x_d \in A$ (with $d = |D| + |E_1| + \cdots + |E_p| + 1$), by

$$a_2^{1,p}(D_1 \otimes (E_1 \otimes \cdots \otimes E_p))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_d) =$$

$$\sum (-1)^{\tau} D(x_1, \ldots, x_{i_1}, E_1(x_{i_1+1}, \ldots), \ldots, E_p(x_{i_p+1}, \ldots), \ldots)$$

where $\tau = \sum_{k=1}^{p} i_k(|E_k|+1)$. The maps $a_2^{1,p} : \mathfrak{g}_2 \otimes \mathfrak{g}_2^{\otimes p} \to \mathfrak{g}_2$ and $a_2^{q\geq 2,p} = 0$ give a unique bialgebra structure on the cofree cotensorial algebra $T_2 = \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}_2^{\otimes n}$. Similarly taking a_2^1 to be the Hochschild coboundary b and a_2^2 to be the cup-product $\cup$, and $a_2^{q\geq 3} = 0$, gives a unique differential bialgebra structure on the tensor coalgebra T_2. Theorem 3.1 in [**Vo**] asserts that these maps yield a differential bialgebra structure on the cofree coalgebra T_2 (the proof is a straightforward computation, also see [**GV**] and [**Kh**]).

Using this result, we can successively apply Proposition 4.2.2 and Lemma 4.2.1 to obtain the desired G_∞-structure on $\mathfrak{g}_2$ given by maps $m_2^{p_1,\dots,p_k}$ such that $m_2^1 = b$ and $m_2^{1,1} = [-,-]_G$. By construction, the maps $m_2^{p_1,\dots,p_k}$ are 0 for $k > 2$. Moreover, the map m_2^2 coincides, up to a Hochschild coboundary, with the cup-product $\cup$ because, when passing to cohomology, they both give the same map m_1^2, corresponding to the product $\wedge$ of the Gerstenhaber algebra $(\mathfrak{g}_1, [-,-]_S, \wedge)$.

4.3. A G_∞-morphism $\psi : (\mathfrak{g}_1, d_1') \to (\mathfrak{g}_2, d_2)$

The objective of this section is to prove the following proposition.

Proposition 4.3.1. — *There exist a differential d_1' on $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$ and a morphism of differential coalgebras $\psi : (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, d_1') \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes \cdot}}, d_2)$ such that the induced map $\psi^1 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ is the Hochschild-Kostant-Rosenberg map of Section 0.*

Proof: For $i = 1, 2$ and $n \geq 0$, let us set

$$V_i^{[n]} = \bigoplus_{p_1+\cdots+p_k=n} \underline{\mathfrak{g}_i^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\mathfrak{g}_i^{\otimes p_k}}$$

and $V_i^{[\leq n]} = \sum_{k\leq n} V_i^{[k]}$. Let $d_2^{p_1,\dots,p_k} : \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes p_1}} \wedge\cdots\wedge \underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes p_k}} \to \mathfrak{g}_2$ be the components of the differential d_2 defining the G_∞-structure of $\mathfrak{g}_2$ (see Definition 4.1.3) and denote $d_2^{[n]}$ and $d_2^{[\leq n]}$ the sums

$$d_2^{[n]} = \sum_{p_1+\cdots+p_k=n} d_2^{p_1,\dots,p_k} \qquad \text{and} \qquad d_2^{[\leq n]} = \sum_{p\leq n} d_2^{[p]}.$$

Clearly, $d_2 = \sum_{n\geq 1} d_2^{[n]}$. In the same way, we denote

$$d'^{[n]}_1 = \sum_{p_1+\cdots+p_k=n} d'^{p_1,\dots,p_k}_1 \qquad \text{and} \qquad d'^{[\leq n]}_1 = \sum_{1\leq k\leq n} d'^{[k]}_1.$$

We know from Section 4.1 that a morphism $\psi : (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}, d_1') \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}}, d_2)$ is uniquely determined by its components $\psi^{p_1,\dots,p_k} : \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes p_k}} \to \mathfrak{g}_2$. Similarly we set

$$\psi^{[n]} = \sum_{p_1+\cdots+p_k=n} \psi^{p_1,\dots,p_k} \qquad \text{and} \qquad \psi^{[\leq n]} = \sum_{1\leq k\leq n} \psi^{[k]}.$$

Again, we have $d_1' = \sum_{n\geq 1} d'^{[n]}_1$ and $\psi = \sum_{n\geq 1} \psi^{[n]}$.

We have to build both the differential d_1' and the morphism of codifferential ψ. In fact we will build the maps $d'^{[n]}_1$ and $\psi^{[n]}$ by induction. For the first terms, we set

$$d'^{[1]}_1 = 0 \qquad \text{and} \qquad \psi^{[1]} = \phi^1,$$

the Hochschild-Kostant-Rosenberg map (see Section 0).

Suppose we have built maps $(d'^{[i]}_1)_{i\leq n-1}$ and $(\psi^{[i]})_{i\leq n-1}$ satisfying

$$\psi^{[\leq n-1]} \circ d'^{[\leq n-1]}_1 = d_2^{[\leq n-1]} \circ \psi^{[\leq n-1]}$$

on $V_1^{[\leq n-1]}$ and $d'^{[\leq n-1]}_1 \circ d'^{[\leq n-1]}_1 = 0$ on $V_1^{[\leq n]}$. These conditions are enough to insure that d_1' is a differential and ψ a morphism of differential coalgebras. If we reformulate the identity $\psi \circ d'_1 = d_2 \circ \psi$ on $V_1^{[n]}$, we get

$$\psi^{[\leq n]} \circ d'^{[\leq n]}_1 = d_2^{[\leq n]} \circ \psi^{[\leq n]}. \tag{3.5}$$

If we take now into account that $d'^{[1]}_1 = 0$, and that on $V_1^{[n]}$ we have $\psi^{[k]} \circ d'^{[l]}_1 = d_2^{[k]} \circ \psi^{[l]} = 0$ for $k + l > n + 1$, the identity (3.5) becomes

$$\psi^{[1]} d'^{[n]}_1 + B = d_2^{[1]} \psi^{[n]} + A \tag{3.6}$$

where $B = \sum_{k=2}^{n-1} \psi^{[\leq n-k+1]} d'^{[k]}_1$ and $A = d_2^{[1]} \psi^{[\leq n-1]} + \sum_{k=2}^{n} d_2^{[k]} \psi^{[\leq n-k+1]}$ (we now omit the composition sign $\circ$). The term $d_2^{[1]}$ in (3.6) is the Hochschild coboundary b. So by the Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem (3.6) is equivalent to the cochain $B - A$ being a Hochschild cocycle. Therefore, in order to prove the existence of $d'^{[n]}_1$ and $\psi^{[n]}$, it is sufficient to prove that

$$d_2^{[1]}(B - A) = 0 \tag{3.7}$$

and to show that for any choice of those maps, we have

$$d'^{[\leq n]}_1 d'^{[\leq n]}_1 = 0 \text{ on } V_1^{[\leq n+1]}. \tag{3.8}$$

• We will first construct $d_1'^{[2]}$: for $n = 2$, we get $A = d_2^{[1]} \psi^{[1]} + d_2^{[2]} \psi^{[1]}$ and $B = 0$ so that

$$\psi^{[1]} d'^{[2]}_1 = d_2^{[1]} (\psi^{[2]} + \psi^{[1]}) + d_2^{[2]} \psi^{[1]}.$$

Thus ${d'_1}^{[2]}$ is the image of $d_2^{[2]}$ through the projection on the cohomolgy of $\mathfrak{g}_2$ and, as the Hochschild-Kostant-Rosenberg map $\psi^{[1]}$ is injective from $\mathfrak{g}_1 = H(\mathfrak{g}_2, b = d_2^{[1]})$ to $\mathfrak{g}_2$, we get

$$ {d'_1}^{[2]} = d_1^{[2]}. $$

• Let us prove (3.7) : we have $d_2^{[1]}(-A) = -\sum_{k=2}^n d_2^{[1]} d_2^{[k]} \psi^{[\leq n-k+1]}$. Using $d_2 d_2 = 0$, we get

$$ \begin{aligned} d_2^{[1]}(-A) &= \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{l=2}^{k} d_2^{[l]} d_2^{[k+1-l]} \right) \psi^{[\leq n-k+1]} \\ &= \sum_{l=2}^{n} d_2^{[l]} \left(\sum_{k=l}^{n} d_2^{[k+1-l]} \psi^{[\leq n-k+1]} \right). \end{aligned} $$

Clearly, we have $\sum_{k=l}^n d_2^{[k+1-l]} \psi^{[\leq n-k+1]} = \sum_{k=1}^{n-l+1} d_2^{[k]} \psi^{[\leq n-k+2-l]}$. Using once again $d_1^{[a]} d_1^{[b]} \psi^{[c]} = 0$ on $V_1^{[n]}$ for $a+b+c > n+2$, we add terms $\psi^{[n-k+2-l+k']}$ to $\psi^{[\leq n-k+2-l]}$ (for $0 \leq k' \leq k-1$) without changing the previous equality. Thus we have

$$ d_2^{[1]}(-A) = \sum_{l=2}^{n} d_2^{[l]} \left(\sum_{k=1}^{n-l+1} d_2^{[k]} \right) \psi^{[\leq n+1-l]} = \sum_{l=2}^{n} d_2^{[l]} d_2^{[\leq n+1-l]} \psi^{[\leq n+1-l]}. $$

Since $\left(d_2^{[l]}\right)_{l \geq 2}$ map $V_2^{[\leq k]}$ into $V_2^{[\leq k-1]}$, the previous equality has non-trivial terms only on $V_1^{[\leq n-1]}$. Thus we can apply the induction hypothesis $\psi^{[\leq k]} {d'}_1^{[\leq k]} = d_2^{[\leq k]} \psi^{[\leq k]}$ on $V_1^{[\leq k]}$ for $k \leq n-1$. We get

$$ d_2^{[1]}(-A) = \sum_{l=2}^{n} d_2^{[l]} \psi^{[\leq n+1-l]} {d'}_1^{[\leq n+1-l]}. $$

$$ d_2^{[1]}(B-A) = d_2^{[1]} \sum_{k=2}^{n-1} \psi^{[\leq n-k+1]} {d'}_1^{[k]} + \sum_{l=2}^{n} d_2^{[l]} \psi^{[\leq n+1-l]} {d'}_1^{[\leq n+1-l]}. $$

The term corresponding to $l = n$ vanishes since ${d'}_1^{[1]} = 0$. Using a previous argument on $V_1^{[n]}$ for $d_2^{[a]} \psi^{[b]} {d'}_1^{[c]}$, we add maps $\psi^{[p+p']}$ ($p' \geq 0$) to $\psi^{[\leq p]}$. If we then reindex the sum with respect to the terms ${d'}_1^{[l]}$, we get

$$ d_2^{[1]}(B-A) = \sum_{l=2}^{n-1} d_2^{[\leq n+1-l]} \psi^{[\leq n-1]} {d'_1}^{[l]}. $$

Therefore we have proved that $d_2^{[1]}(B-A) = \sum_{l=2}^{n-1} d_2^{[\leq n+1-l]} \psi^{[\leq n+1-l]} {d'_1}^{[l]}$. Since ${d'}_1^{[l]} \left(V_1^{[\leq k]} \right) \subset V_1^{[\leq k-1]}$, we can again apply the induction hypothesis, thus getting

$$d_2^{[1]}(B-A)=\sum_{l=2}^{n-1}\psi^{[\leq n+1-l]}d'^{[\leq n+1-l]}_1\,d'^{[l]}_1=0$$

because $d'^{[1]}_1=0$ and $d'^{[\leq n-1]}_1 d'^{[\leq n-1]}_1=0$ on $V_1^{[\leq n]}$, again by the induction hypothesis.

• We will finally prove (3.8), that is to say $d'^{[\leq n]}_1 d'^{[\leq n]}_1=0$ on $V_1^{[\leq n+1]}$. As $\psi^{[1]}$ is a quasi-isomophism between $(\mathfrak{g}_1,0)$ and $(\mathfrak{g}_2,b=d_2^{[1]})$, this is equivalent to say that $\psi^{[1]}\,d'^{[\leq n]}_1\,d'^{[\leq n]}_1$ is a boundary on $V_1^{[\leq n+1]}$. Using a previous degree argument, we get the following identity on $V_1^{[\leq n+1]}$:

$$\psi^{[1]}\,d'^{[\leq n]}_1\,d'^{[\leq n]}_1=\psi^{[\leq n]}\,d'^{[\leq n]}_1\,d'^{[\leq n]}_1.$$

By definition of $d'^{[\leq n]}_1$ we can write $\psi^{[\leq n]}\,d'^{[\leq n]}_1=d_2^{[\leq n]}\,\psi^{[\leq n]}$ as $d'^{[\leq n]}_1$ maps $V_1^{[\leq n+1]}$ to $V_1^{[\leq n]}$. Thus it is sufficient to prove that $d_2^{[\leq n]}\psi^{[\leq n]}d'^{[\leq n]}_1$ is a boundary when restricted to $V_1^{[\leq n+1]}$.

Now we have

$$d_2^{[\leq n]}\psi^{[\leq n]}d'^{[\leq n]}_1=b\psi^{[\leq n]}d'^{[\leq n]}_1+\sum_{2\leq k\leq n}d_2^{[\leq k]}\psi^{[\leq n]}d'^{[\leq n]}_1.$$

Since $\sum_{2\leq k\leq n}d_2^{[\leq k]}$ maps $V_2^{[\leq k]}$ to $V_2^{[\leq k-1]}$, the linear combination of maps

$$\sum_{2\leq k\leq n}d_2^{[\leq k]}\psi^{[\leq n]}d'^{[\leq n]}_1$$

has non-trivial summands only on $V_1^{[\leq n+1]}$. On the latter space we have

$$\sum_{2\leq k\leq n}d_2^{[\leq k]}\,\psi^{[\leq n]}\,d'^{[\leq n]}_1=\sum_{2\leq k\leq n}d_2^{[\leq k]}\,d_2^{[\leq n]}\,\psi^{[\leq n]},$$

by definition of $d'^{[\leq n]}_1$. Hence, the following identities hold on $V_1^{[\leq n+1]}$:

$$\begin{aligned}d_2^{[\leq n]}\,\psi^{[\leq n]}\,d'^{[\leq n]}_1&=b\psi^{[\leq n]}\,d'^{[\leq n]}_1-b\,d_2^{[\leq n]}\,\psi^{[\leq n]}+d_2^{[\leq n]}\,d_2^{[\leq n]}\,\psi^{[\leq n]}\\&=b\,\psi^{[\leq n]}\,d'^{[\leq n]}_1-b\,d_2^{[\leq n]}\,\psi^{[\leq n]}\end{aligned}$$

as $d_2d_2=0$. □

Conclusion : The only tool we have used in this section is the existence of a quasi-isomorphism between the complexes $(\mathfrak{g}_1,0)$ and $(\mathfrak{g}_2,b)$. Since we know explicit homotopy formulas for such a quasi-isomorphism (see [**DL**], [**Ha**]), we obtain explicit formulas for ${d'_1}^{[k]}$ and $\psi^{[k]}$.

4.4. A G_∞-morphism ψ' : $(\mathfrak{g}_1, d_1) \to (\mathfrak{g}_1, d_1')$

In this section, we will prove the following proposition.

Proposition 4.4.1. — *If the complex* $\left(\mathrm{End}(\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}), [m_1^{1,1} + m_1^2, -]\right)$ *is acyclic, then there exists a* G_∞*-morphism* $\psi' : (\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, d_1) \to (\Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, d_1')$ *such that the induced map* ${\psi'}^{[1]} : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$ *is the identity.*

We will use the same notations for $V_1^{[n]}$, $V_1^{[\leq n]}$, ${d'}_1^{[n]}$ and ${d'}_1^{[\leq n]}$ as in Section 4.3. We also denote

$$d_1 = \sum_{n \geq 1} d_1^{[n]} \qquad \text{and} \qquad d_1^{[\leq n]} = \sum_{1 \leq k \leq n} d_1^{[k]}$$

and similarly

$$\psi' = \sum_{n \geq 1} \psi^{[n]} \qquad \text{and} \qquad {\psi'}^{[\leq n]} = \sum_{1 \leq k \leq n} {\psi'}^{[n]}.$$

Proof: We will build the maps ${\psi'}^{[n]}$ by induction as in Section 4.3. For ${\psi'}^{[1]}$ we have to set :

$${\psi'}^{[1]} = \mathrm{Id} \ \text{(the identity map)}.$$

Suppose we have built maps $({\psi'}^{[i]})_{i \leq n-1}$ satisfying

$${\psi'}^{[\leq n-1]} d_1^{[\leq n]} = {d'_1}^{[\leq n]} {\psi'}^{[\leq n-1]}$$

on $V_1^{[\leq n]}$ (${d'_1}^{[\leq n]}$ maps $V_1^{[\leq l]}$ to $V_1^{[\leq l-1]}$). Expliciting the equation $\psi' d_1 = d_1' \psi'$ on $V_1^{[n+1]}$, we get

$${\psi'}^{[\leq n]} \, d_1^{[\leq n+1]} = {d'_1}^{[\leq n+1]} \, {\psi'}^{[\leq n]}. \tag{4.9}$$

If we now take into account that $d_1^{[i]} = 0$ for $i \neq 2$, ${d'_1}^{[1]} = 0$ and that on $V_1^{[n+1]}$ we have ${\psi'}^{[k]} d_1^{[l]} = {d'_1}^{[\leq k]} {\psi'}^{[l]} = 0$ for $k + l > n + 2$, the identity (4.9) becomes

$${\psi'}^{[\leq n]} \, d_1^{[2]} = \sum_{k=2}^{n+1} {d'_1}^{[k]} \, {\psi'}^{[\leq n-k+2]}.$$

We have seen in the previous section that ${d'_1}^{[2]} = {d_1}^{[2]}$. Thus (4.9) is equivalent to

$${d_1}^{[2]} {\psi'}^{[\leq n]} - {\psi'}^{[\leq n]} {d_1}^{[2]} = \left[{d_1}^{[2]}, {\psi'}^{[\leq n]}\right] = - \sum_{k=3}^{n+1} {d'_1}^{[k]} {\psi'}^{[\leq n-k+2]}.$$

Notice that $d_1^{[2]} = m_1^{1,1} + m_1^2$. By the acyclicity of the complex $(\mathrm{End}(\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}), [d_1^{[2]}, -])$, the construction of $\psi'^{[\leq n]}$ will be possible when $\sum_{k=3}^{n+1} d_1'^{[k]} \psi'^{[\leq n-k+2]}$ is a cocycle in this complex. Thus, to finish the proof, we have to check that

$$\left[d_1^{[2]}, \sum_{k=3}^{n+1} d_1'^{[k]}\, \psi'^{[\leq n-k+2]}\right] = 0 \text{ on } V_1^{[n+1]}. \tag{4.10}$$

We have

$$D_n = \left[d_1^{[2]}, \sum_{k=3}^{n+1} d_1'^{[k]}\, \psi'^{[\leq n-k+2]}\right] = \left[d_1^{[2]}, \sum_{k=1}^{n-1} d_1'^{[n+2-k]}\, \psi'^{[\leq k]}\right].$$

It follows that we can write

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_1^{[2]}, d_1'^{[n+2-k]}\right] \psi'^{[\leq k]} - \sum_{k=1}^{n-1} d_1'^{[n+2-k]} \left[d_1^{[2]}, \psi'^{[\leq k]}\right]. \tag{4.11}$$

Using the induction hypothesis for $\left(\psi'^{[\leq k]}\right)_{k\leq n-1}$, we get

$$[d_1{}^{[2]}, \psi'^{[\leq k]}] = -\sum_{l=3}^{k+1} d_1'^{[l]}\, \psi'^{[\leq k-l+2]} = -\sum_{l=1}^{k-1} d_1'^{[k+2-l]}\, \psi'^{[\leq l]}$$

on $V_1^{[\leq k+1]}$. The equation (4.11) then becomes

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_1^{[2]}, d_1'^{[n+2-k]}\right] \psi'^{[\leq k]} + \sum_{k=1}^{n-1} d_1'^{[n+2-k]} \left(\sum_{l=1}^{k-1} d_1'^{[k+2-l]}\, \psi'^{[\leq l]}\right).$$

Finally, we have

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[d_1^{[2]}, d_1'^{[n+2-k]}\right] \psi'^{[\leq k]} + \sum_{l=1}^{n-2} \left(\sum_{k=l+1}^{n-1} d_1'^{[n+2-k]} d_1'^{[k+2-l]}\right) \psi'^{[\leq l]}.$$

This implies

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left[d_1'^{[2]}, d_1'^{[n+2-k]}\right] + \sum_{p=k+1}^{n-1} d_1'^{[n+2-p]} d_1'^{[p+2-k]}\right) \psi'^{[\leq k]}.$$

But the maps

$$\left[d_1'^{[2]}, d_1'^{[n+2-k]}\right] + \sum_{p=k+1}^{n-1} d_1'^{[n+2-p]}\, d_1'^{[p+2-k]} = \sum_{q=2}^{n+2-k} d_1'^{[q]}\, d_1'^{[n+4-q-k]}$$

are zero because $d_1' d_1' = 0$ on $V_1^{[\leq n+2-k]}$. This yields the result. □

4.5. Acyclicity of the complex $\left(\mathrm{Hom}(\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot},\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}),[m_1^{1,1}+m_1^2,-]\right)$

In this section the manifold M is supposed to be the affine space $\mathbb{R}^m$ for $m \geq 1$. We prove the following proposition :

Proposition 4.5.1. — *If* $M=\mathbb{R}^m$*, the cochain complex* $\left(\mathrm{End}(\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}),[m_1^{1,1}+m_1^2,-]\right)$ *is acyclic.*

Proof: Since coalgebras maps $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}} \to \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}$ are in one-to-one correspondence with maps $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}} \to \mathfrak{g}_1$, we are left to check that the cochain complex

$$\left(\mathrm{Hom}(\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}},\mathfrak{g}_1),[m_1^{1,1}+m_1^2,-]\right)$$

is acyclic.

First we introduce an "external" bigrading on the cochain complex induced by duality from the following bigrading on $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}$:

$$|x|^{\mathrm{e}}=(p_1-1+\cdots+p_n-1,n-1)$$

if $x\in\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes p_1}}\wedge\cdots\wedge\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes p_n}}$. Let the internal degree of $x\in\mathfrak{g}_1$ be $|x|^{\mathrm{i}}=|x|+1$, where $|x|$ is the usual degree of an element of $\mathfrak{g}_1$. One recovers the usual degree on $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}$ by

$$|x|=|x|^{\mathrm{e}}_{\mathrm{tot}}+\sum_{i,k}|x_i^k|^{\mathrm{i}}$$

where $|x|^{\mathrm{e}}_{\mathrm{tot}}$ is the sum of the two components of $|x|^{\mathrm{e}}$.

The exterior product m_1^2 makes $\mathfrak{g}_1$ into an associative algebra which is graded commutative for the inner degree. For any vector space V, the space $\mathfrak{g}_1\otimes V$ is a $\mathfrak{g}_1$-module equiped with a $\mathfrak{g}_1$-action by multiplication on the first factor. Observe that

$$\left(\mathrm{Hom}(\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}},\mathfrak{g}_1),[m_1^{1,1}+m_1^2,-]\right)\cong\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{g}_1\otimes\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}},\mathfrak{g}_1),[m_1^{1,1}+m_1^2,-]\right),$$
$$\cong\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1\otimes\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}},\mathfrak{g}_1),[m_1^{1,1}+m_1^2,-]\right)$$

where $\mathfrak{g}_1$ acts (on the right and on the left) on itself by the multiplication m_1^2.

We now prove acyclicity of this last cochain complex. The codifferential $(\delta)^*=[m_1^{1,1}+m_1^2,-]$ splits in two parts $(\delta_1^2)^*+(\delta_1^{1,1})^*=(\delta)^*$ where $(\delta_1^2)^*$ is the codifferential of bidegree $(1,0)$ induced by m_1^2 and $(\delta_1^{1,1})^*$ is the one of bidegree $(0,1)$ induced by $m_1^{1,1}$. Thus, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1\otimes\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}},\mathfrak{g}_1)$ endowed with the bigrading $|-|^{\mathrm{e}}$ is a bicomplex lying in the first quadrant. The bigrading of an element $x\in\mathfrak{g}_1\otimes\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes p_1}}\wedge\ldots\wedge\mathfrak{g}_1\otimes\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes p_n}}$ is $|x|^{\mathrm{e}}=(p_1-1+\ldots+p_n-1,n-1)$.

The codifferential $(\delta_1^2)^*$ is dual to a differential δ_1^2. It is a standard calculation (see [**Lo5**], 1.5 for example) to show that δ_1^2, restricted to each summand

$\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$, is the usual Harrison boundary, that is to say the image of the Hochschild differential d acting on $\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot +1}$ onto its quotient $\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$ by the shuffles.

We now use the fact that $(\mathfrak{g}_1, m_1^2) = (\Gamma(M, \Lambda TM), \wedge)$ is a polynomial algebra. Denote by $\Omega_{\mathfrak{g}_1}$ the module of Kähler differential one-forms of the algebra $\mathfrak{g}_1$. Let $J : \mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot +1} \to \Lambda^{\cdot}\Omega_{\mathfrak{g}_1}$ be the map which sends $x_0 \otimes \cdots \otimes x_n$ to $x_0 dx_1 \cdots dx_n$ and $I : \Lambda^{\cdot}\Omega_{\mathfrak{g}_1} \to \mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot +1}$ be the anti-symmetrization map given by

$$J(x_0 dx_1 \cdots dx_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{(-1)^\sigma}{n!} \varepsilon(\sigma)\, x_0 \otimes x_{\sigma^{-1}(1)} \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$$

where S_n is the permutation group of $\{1, \cdots, n\}$, $(-1)^\sigma$ is the sign of σ and $\varepsilon(\sigma)$ the Koszul-Quillen sign (see Section 1). It is easy to check that $J \circ I = \mathrm{Id}$.

It is known from [**Ha**] that there exists a homotopy $s : \mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot +1} \to \mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot +2}$ such that $I \circ J = \mathrm{Id} + d \circ s + s \circ d$. We denote P the natural projection $\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot +1} \to \mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$. It is a standard computation (see [**Lo4**]) that the map J factors through $\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$ to give a map $J' : \mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}} \to \Omega_{\mathfrak{g}_1}$. There is also a map $I' = P \circ J : \Omega_{\mathfrak{g}_1} \to \mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$. Clearly $J' \circ I' = \mathrm{Id}$. Since the map P commutes with the differential d, the map $s' = P \circ s$ satisfies

$$I' \circ J' = \mathrm{Id} + d \circ s' + s' \circ d.$$

The map s' extends uniquely into a degree 1 homotopy h to $\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$ so that $\Lambda I' \circ \Lambda J' = \mathrm{Id} + \delta_1^2 \circ h + h \circ \delta_1^2$, where $\Lambda I'$, $\Lambda J'$ are the extensions of the degree zero maps I' and J'. Moreover $\Lambda J' \circ \Lambda I' = \mathrm{Id}$ and $\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\Omega_{\mathfrak{g}_1}$ is a (special) deformation retract of $\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$(see [**Ha**]). We denote $p : \Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^{\cdot}_{g_1}\Omega_{g_1}$ the projection. Since $\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$ is a bicomplex with differential $\delta = \delta_{1,1}^2 + \delta_1^{1,1}$, it follows from [**Ka2**], Section 3 that there exists a map $u : \Lambda^{\cdot}_{g_1}\Omega_{g_1} \to \Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}$ and a (degree one) map $H : \Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1 \otimes \underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}[1]$ such that $pu = \mathrm{Id}$ and $up = \mathrm{Id} + \delta H + H\delta$. Hence the cohomology we are looking for is the cohomology of the complex $\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\Omega_{g_1}, \mathfrak{g}_1), \delta_1^{1,1}\right)$ which sits in the complex

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1), \delta_1^{1,1}\right) \cong \left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{g}_1 \otimes \Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1), \delta_1^{1,1}\right).$$

In particular, the differential $\delta_1^{1,1}$ is induced by the usual exterior derivative (see [**HKR**]) on $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{g}_1 \otimes \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, \mathfrak{g}_1)$. To finish the proof, we proceed as in [**Ta**] and [**Hin**]. Recall from the introduction that $A = C^\infty(\mathbb{R}^m)$ is the algebra of smooth functions on $\mathbb{R}^m$. Let $\mathrm{Der}(A) = \Omega_A^*$ be the space of smooth derivations on A. Since $\mathfrak{g}_1$ is a A-module, by transitivity of the space of Kähler differentials for smooth manifolds, one has

$$\Omega_{\mathfrak{g}_1} \cong \mathfrak{g}_1 \otimes_A \Omega_A \oplus \Omega_{\mathfrak{g}_1/A}.$$

Since $\mathfrak{g}_1 \cong \Lambda_A^* \mathrm{Der}(A)$, we find that $\Omega_{\mathfrak{g}_1/A} \cong \mathfrak{g}_1 \otimes \mathrm{Der}(A)$ (with grading shifted by minus one on $\mathrm{Der}(A)$). Hence (see [**Ta**].3.5) there is an isomorphism

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_1}(\Lambda^{\cdot}_{\mathfrak{g}_1}\Omega_{g_1}, \mathfrak{g}_1), \delta_1^{1,1}\right) \cong \left(\Lambda^{1+\cdot}\Omega_{\mathfrak{g}_1}, d_{dR}\right)$$

where d_{dR} is de Rham's differential (the degree on the left hand of the isomorphism is the one induced by the inner degree of $\mathfrak{g}_1$). When $\mathfrak{g}_1 = \Gamma(\mathbb{R}^n, \Lambda\mathbb{R}^n)$ this complex is acyclic. □

Remark : At every step of this proof, it is possible to construct explicit homotopy formulas. So the coefficients $\psi'^{[n]}$ built in this section can be expressed in an explicit way from the G_∞-structure on $\mathfrak{g}_2$.

Corollary 4.5.2. — *If* $\mathfrak{g}_1 = \Gamma(\mathbb{R}^m, \Lambda T\mathbb{R}^m)$, *then there exists a* G_∞*-morphism* $\psi' : (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, d_1) \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, d_1')$ *such that the induced map* $\psi'^{[1]} : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$ *is the identity.*

Proof: It is an immediate consequence of Propositions 4.4.1 and 4.5.1. □

4.6. Consequences when M is a Poisson manifold

From the Sections 4.3, 4.4 and 4.5 we know that the map

$$\phi = \psi \circ \psi' : (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}, d_1) \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes \cdot}}, d_2)$$

is a G_∞-morphism when $M = \mathbb{R}^m$; in other words, we have the identity

$$\phi \circ d_1 = d_2 \circ \phi \text{ on } \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}. \tag{6.12}$$

Since $\phi : \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes \cdot}}$ is a coalgebra map, it restricts to the subcoalgebra $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1$ to give a coalgebra map $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1 \to \Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_2$. The restriction of d_1 and d_2 are respectively the codifferential induced by $m_1^{1,1}$ and the codifferential induced by $b + m_2^{1,1}$. When we restrict these maps to $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1$ and $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_2$, the previous equality (6.12) still holds with the difference that, now, d_1 and d_2 are the differential defining the L_∞-structures on $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$ of Section 4.1. So the restriction of ϕ to these coalgebras yields a morphism of differential coalgebras

$$\phi \ : \ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1, d_1) \to (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_2, d_2).$$

Thus we have constructed the desired L_∞-morphism between $(\mathfrak{g}_1, d_1)$ and $(\mathfrak{g}_2, d_2)$.

Remark : Similarly to Definitions 4.1.1, 4.1.3, one can define, on a vector space $\mathfrak{g}$, a C_∞-algebra structure given by degree one maps $a^m : \underline{\mathfrak{g}^{\otimes n}} \to \mathfrak{g}$

such that if we extend them to maps $\oplus\underline{\mathfrak{g}}^{\otimes\cdot} \to \oplus\underline{\mathfrak{g}}^{\otimes\cdot}$, then $D = \sum a^m$ satifies $D \circ D = 0$. In particular, a^2 yields a commutative operation on $\mathfrak{g}$, a^1 a differential and the product a^2 is associative up to homotopies for the differential a^1. Let us then consider the free Lie coalgebras $\oplus_{n\geq 0}\underline{\mathfrak{g}_1}^{\otimes n}$ and $\oplus_{n\geq 0}\underline{\mathfrak{g}_2}^{\otimes n}$. They are also subcoalgebras of respectively $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes\cdot}}$ and $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}}$. Hence we can restrict ϕ into a coalgebra map $\phi : \oplus\underline{\mathfrak{g}_1}^{\otimes n} \to \oplus\underline{\mathfrak{g}_2}^{\otimes n}$. Denoting $D_1 = m_1^2$ the codifferential induced by the exterior product $\wedge$, and D_2 the codifferential induced by $\sum_{n\geq 0} m_2^n$, the map ϕ yields a differential coalgebra morphism

$$\phi \ : \ \left(\oplus\underline{\mathfrak{g}_1}^{\otimes n}, D_1\right) \to \left(\oplus\underline{\mathfrak{g}_2}^{\otimes n}, D_2\right),$$

hence, a morphism of C_∞-algebras between $(\mathfrak{g}_1, D_1)$ and $(\mathfrak{g}_2, D_2)$. Through the Etingof-Kazdhan equivalence used in Proposition 4.2.2, this implies that there is a morphism of A_∞-algebras between $(\mathfrak{g}_1, \wedge)$ and $(\mathfrak{g}_2, \cup)$. More precisely, it means that there is a morphism $\left(\oplus\mathfrak{g}_1^{\otimes n}, \wedge\right) \to \left(\oplus\mathfrak{g}_2^{\otimes n}, b + \cup\right)$ of differential coalgebras between the tensor coalgebras of $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$. Details on C_∞ and A_∞-structures can be found in [**GK**] and [**St**].

From now on, we will suppose that the manifold M is a Poisson manifold equipped with a Poisson tensor π (satisfying $[\pi, \pi]_S = 0$). The L_∞-map ϕ allows us to construct a star-product on M (see [**BFFLS1**]). If $\hbar$ is a formal parameter and if we impose ϕ to be $\mathbb{R}[[\hbar]]$-linear, ϕ extends to a L_∞-morphism between $\mathfrak{g}_1[[\hbar]]$ and $\mathfrak{g}_2[[\hbar]]$. Set $\Pi_\hbar = \sum_{n\geq 0}\hbar^n\Lambda^n\pi \in \Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}_1$, where $\Lambda^n\pi = \underbrace{\pi \wedge \ldots \wedge \pi}_{n \text{ times}}$. If we define $m_\star = \phi(\Pi_\hbar)$, we get

$$[m_\star, m_\star]_G = 0. \tag{6.13}$$

This is a consequence of definition (0.1) of a L_∞-morphism given in Section 0 and of the fact that $[\pi, \pi]_S = 0$ implies $m_1^{1,1}(\Pi_\hbar) = 0$. The map $m_\star$ being an element of $\mathfrak{g}_2[[\hbar]]$ of degree one, it defines a bilinear map in $C^2(A, A)[[\hbar]]$, where $C^k(A, A)[[\hbar]]$ denotes the set of k-$\mathbb{R}[[\hbar]]$-linear maps in $C^k(A, A)$. The identity 6.13 implies that $m_\star$ is an associative product on $A[[\hbar]]$. Finally, by definition of ϕ, we have

$$m_\star = m + \hbar\phi^1(\pi) + \sum_{n\geq 2}\hbar^n\phi^n(\pi, \ldots, \pi),$$

where $\phi^1(\pi) = \{\cdot, \cdot\}$ is the Poisson bracket. This proves that $m_\star$ is a star-product on (M, π).

The spaces $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{g}_2$ can now be endowed with two new structures : the space $(\mathfrak{g}_1, [-, -]_S, [\pi, -]_S)$ becomes a graded differential Lie algebra (and even a Gerstenhaber algebra) whereas $(\mathfrak{g}_2, [-, -]_G, b_\star)$, where $b_\star$ is the Hochschild differential corresponding to the deformed product $m_\star$, is a new graded differential Lie algebra. As in the case when $\pi = 0$, we have the following result *à la* Hochschild-Kostant-Rosenberg.

Theorem 4.6.1. — *The complexes* $(\mathfrak{g}_2[[\hbar]], b_\star)$ *and* $(\mathfrak{g}_1[[\hbar]], [\hbar\pi, -]_S)$ *are quasi-isomorphic.*

Proof: Let us denote $\phi^1_\hbar$ the $\mathbb{R}[[\hbar]]$-linear map $\mathfrak{g}_1[[\hbar]] \to \mathfrak{g}_2[[\hbar]]$ given by

$$\alpha \mapsto \phi^1_\hbar(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \hbar^n \phi^{n+1}\left(\Lambda^n\pi \wedge \alpha\right) = \phi_{\mathfrak{g}_1}\left(\sum_{n\geq 0} \hbar^n \Lambda^n \pi \wedge \alpha\right)$$

for $\alpha \in \mathfrak{g}_1$, where $\phi_{\mathfrak{g}_1}$ denotes the projection of ϕ on $\mathfrak{g}_1$. Similarly, we write $\phi_{\mathfrak{g}_1\wedge\mathfrak{g}_1}$ for the projection of ϕ on $\mathfrak{g}_1 \wedge \mathfrak{g}_1$. We get

$$\begin{aligned}
\phi^1_\hbar([\hbar\pi, \alpha]_S) &= \phi_{\mathfrak{g}_1}\left(\sum_{n\geq 0} \hbar^n \Lambda^n\pi \wedge [\hbar\pi, \alpha]_S\right) \\
&= \phi_{\mathfrak{g}_1}\left(\sum_{n\geq 0} \hbar^{n+1} m_1^{1,1}\left(\Lambda^{n+1}\pi \wedge \alpha\right)\right) \\
&= m_2^{1,1}\left(\phi_{\mathfrak{g}_1\wedge\mathfrak{g}_1}\left(\sum_{n\geq 0} \hbar^{n+1}\Lambda^{n+1}\pi \wedge \alpha\right)\right) \\
&= \left[\phi\left(\sum_{n\geq 0} \hbar^n \Lambda^n \pi\right), \phi\left(\sum_{n\geq 0} \hbar^n\Lambda^n\pi\wedge\alpha\right)\right]_G \\
&= [m_\star, \phi^1_\hbar(\alpha)]_G \\
&= b_\star \phi^1_\hbar(\alpha).
\end{aligned}$$

Thus $\phi^1_\hbar$ is a morphism of complexes between $(\mathfrak{g}_1, [\hbar\pi, -]_S)$ and $(\mathfrak{g}_2[[\hbar]], b_\star)$. By definition, we can write $\phi^1_\hbar(\alpha) = \phi^1(\alpha) + \sum_{n\geq 1} \hbar^n \phi^{1,n}_\hbar$ where $\phi^{1,n}_\hbar$ are $\mathbb{R}[[\hbar]]$-linear maps. The proof of the theorem is then a consequence of the following lemma. □

Lemma 4.6.1. — *Let* $\varphi : (B, 0) \to (D, d)$ *be a quasi-isomorphism of cochain complexes. Suppose we have two deformed complexes* $(B[[\hbar]], b_\hbar)$ *and* $(D[[\hbar]], d_\hbar)$ *with* $b_\hbar = \sum_{n\geq 1} \hbar^n b_n$ *and* $d_\hbar = d + \sum_{n\geq 1} \hbar^n d_n$*, where* b_i *and* d_i *are* $\mathbb{R}[[\hbar]]$*-linear maps. Suppose in addition that there exists a morphism of complexes* $\varphi_\hbar = \varphi + \sum_{n\geq 1} \varphi_n$ *between* $(B[[\hbar]], b_\hbar)$ *and* $(D[[\hbar]], d_\hbar)$*, where* φ_i *are* $\mathbb{R}[[\hbar]]$*-linear maps. Then* $\varphi_\hbar$ *is a quasi-isomorphism.*

Proof: Suppose $\delta_\hbar = \sum_{n\geq 0} \hbar^n \delta_n \in D[[\hbar]]$ satisfies $d_\hbar \delta_\hbar = 0$. We will construct $\beta_n \in B$ by induction such that $\beta_\hbar = \sum_{n\geq 0} \beta_n$ satifies $b_\hbar \beta_\hbar = 0$ and $\varphi_\hbar(\beta_\hbar) = \delta_\hbar$. Since $d_\hbar \delta_\hbar = 0$, we have $d_0 \delta_0 = 0$, so that $\delta_0 = \varphi_0(\beta_0)$, ($\beta_0 \in B$ with $b_0 \beta_0 = 0$). This follows from φ_0 being a quasi-isomorphism between $(B, 0)$ and (D, d_0).

Suppose we have built $\beta_0, \ldots, \beta_n \in B$ such that for all $k \leq n$,

$$\delta_k = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(\beta_{k-i}) \tag{6.14}$$

and

$$\sum_{i=0}^{k} b_i \beta_{k-i} = 0. \tag{6.15}$$

We have shown that Relations (6.14) and (6.15) hold for $k = 0$. We will now construct β_{n+1} such that they hold for $k = n+1$. We can reformulate Relation (6.14) as follows :

$$\varphi_0(\beta_{n+1}) = \delta_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i(\beta_{n+1-i}).$$

Since φ_0 is a quasi-isomorphism between $(B, 0)$ and (D, d_0), this is equivalent to

$$d_0(\delta_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} d_0 \varphi_i(\beta_{n+1-i}) = 0. \tag{6.16}$$

Since $d_\hbar \delta_\hbar = 0$, we have $d_0 \delta_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n+1} d_i \delta_{n+1-i}$. Therefore

$$\begin{aligned}
(6.16) &\iff \sum_{i=1}^{n+1} d_i \delta_{n+1-i} + \sum_{i=1}^{n+1} d_0 \varphi_i \beta_{n+1-i} = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n+1} d_i \sum_{j=0}^{n+1-i} \varphi_j(\beta_{n+1-i-j}) + \sum_{i=1}^{n+1} d_0 \varphi_i \beta_{n+1-i} = 0 \\
&\iff \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1-i} d_i \varphi_j(\beta_{n+1-j-i}) = 0
\end{aligned}$$

($\beta_{n+1} = 0$ by convention). Since $\varphi_\hbar$ is a morphism of complexes, we obtain

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1-i} d_i \varphi_j(\beta_{n+1-j-i}) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1-i} \varphi_i(b_j \beta_{n+1-j-i}) = \varphi_0 \left(\sum_{j=0}^{n+1} b_j \beta_{n+1-j} \right). \tag{6.17}$$

So (6.16) $\Longleftrightarrow \varphi_0\left(\sum_{j=0}^{n+1} b_j\beta_{n+1-j}\right) = 0$. This relation will be satisfied provided we have proved Relation (6.15) for $k = n+1$. As φ_0 is a quasi-isomorphism of complexes between $(B,0)$ and (D,d_0), we only have to prove that $\varphi_0\left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j\beta_{n+1-j}\right)$ is a boundary. Using Relation (6.17), we have

$$\begin{aligned}
\varphi_0\left(\sum_{j=0}^{n+1} b_j\beta_{n+1-j}\right) &= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1-i} d_i\varphi_j(\beta_{n+1-j-i}) \\
&= d_0\sum_{j=0}^{n+1}\varphi_j(\beta_{n+1-j}) + \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1-i} d_i\varphi_j(\beta_{n+1-j-i}) \\
&= d_0\sum_{j=0}^{n+1}\varphi_j(\beta_{n+1-j}) + \sum_{i=1}^{n+1} d_i\delta_{n+1-i} \qquad \text{(thanks to (6.14))} \\
&= d_0\sum_{j=0}^{n+1}\varphi_j(\beta_{n+1-j}) - d_0\delta_{n+1}
\end{aligned}$$

because $d_\hbar\beta_\hbar = 0$. □

It is clear from the previous proof that we can build explicit homotopy formulas for the map $\phi^1_\hbar$ since in the proof of Theorem 4.6.1, we had $\phi^1_\hbar = \phi^1 + O(\hbar)$, with ϕ^1 the Hochschild-Kostant-Rosenberg map.

Remark 6.3 : Lemma 4.6.1 also holds for two cochain complexes (B,b) and (D,d), where $b_\hbar = b + \sum_{n\geq 1}\hbar^n b_n$ with $b \neq 0$, but we have no explicit homotopy formulas.

The cochains complexes $(B[[\hbar]], b_\hbar)$ and $(D[[\hbar]], d_\hbar)$ are filtered by the powers of $\hbar$. The p-component of the filtration is

$$F^p(B[[\hbar]]) = \hbar^p B[[\hbar]] \subset B[[\hbar]]$$

and similarly for $D[[\hbar]]$. The filtrations are decreasing and the differentials $b_\hbar$ and $d_\hbar$ respects the filtrations as well as the morphism $\varphi_\hbar$. Therefore, there are two spectral sequences with first terms given by

$$EB_1^{p,q} = H^{p+q}(F^qB[[\hbar]]/F^{q+1}B[[\hbar]])$$

and

$$ED_1^{p,q} = H^{p+q}(F^qD[[\hbar]]/F^{q+1}D[[\hbar]])$$

converging respectively to $H^\cdot(B[[\hbar]], b_\hbar))$ and $H^\cdot(D[[\hbar]], d_\hbar)$. The morphism $\varphi_\hbar$ induces a map of spectral sequences $\varphi_1^\hbar : EB_1^{\cdot,\cdot} \longrightarrow ED_1^{\cdot,\cdot}$.

It is easy to check that $EB_1^{p,q} \cong H^{p+q}(B)\hbar^q$, $ED_1^{p,q} \cong H^{p+q}(D)\hbar^q$ and that the map $\varphi_1^\hbar$ is induced by the quasi-isomorphim φ, hence is an isomorphism for all p,q. As the spectral sequences are strongly convergent in the sense of [**CE**], Section 15.2, it follows that $\varphi_\hbar$ induces an isomorphism $H^\cdot(B[[\hbar]], b_\hbar)) \cong H^\cdot(D[[\hbar]], d_\hbar)$.

Now, we are in the situation of Section 4.1 : we have two graded differential Lie algebras $(\mathfrak{g}_1, [-,-]_S, [\pi,-]_S)$ and $(\mathfrak{g}_2, [-,-]_G, b_\star)$ such that $H(\mathfrak{g}_2, b_\star) \cong H(\mathfrak{g}_1, [\pi,-]_S)$. The quasi-isomorphism $\phi^1_\hbar$ is not a Lie algebra morphism. The aim of the next section is to construct a L_∞-morphism between $(\mathfrak{g}_1, [\pi,-]_S)$ and $(\mathfrak{g}_2, b_\star)$.

4.7. A formality theorem for a Poisson manifold

In this section we define $d_{1\star}$ the map $d_{1\star} = m_1^{1,1} + m_1^2 + \hbar[\pi,-]_S : \Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes \cdot}}$, where $\mathfrak{g}_{1\star} = \mathfrak{g}_1[[\hbar]]$. As for the case $\pi = 0$, we will construct a G_∞-structure on $\mathfrak{g}_{2\star} = \mathfrak{g}_2[[\hbar]]$ given by a differential $d_{2\star} : \Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_{2\star}^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_{2\star}^{\otimes \cdot}}$, where $d_{2\star} = m^1_{2\star} + m_2^{1,1} + \cdots$ whith $m^1_{2\star}$ corresponding to the differential $b_\star = [m_\star, -]_G$. We will also prove, following the same steps as in the $\pi = 0$ case, that there exists a G_∞-morphism between the G_∞-algebras $(\mathfrak{g}_{1\star}, d_{1\star})$ and $(\mathfrak{g}_{2\star}, d_{2\star})$.

Theorem 4.7.1. — *One can build a G_∞-structure on $\mathfrak{g}_2[[\hbar]]$ determined by a differential $d_{2\star} : \Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_{2\star}^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^\cdot \underline{\mathfrak{g}_{2\star}^{\otimes \cdot}}$ with $d_{2\star} = m^1_{2\star} + m^{1,1}_{2\star} + \cdots + m^{p_1,\ldots,p_n}_{2\star} + \cdots$, where*

$$m^{p_1,\ldots,p_n}_{2\star} : \underline{\mathfrak{g}_2[[\hbar]]^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\mathfrak{g}_2[[\hbar]]^{\otimes p_n}} \to \underline{\mathfrak{g}_2[[\hbar]]^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\mathfrak{g}_2[[\hbar]]^{\otimes p_n}},$$

$m^1_{2\star} = b_\star = [m_\star, -]_G$ and $m^{1,1}_{2\star} = m_2^{1,1}$ is the Gerstenhaber bracket.

Proof: We can use the same arguments as in Section 4.2. Thanks to Lemma 4.2.1, it is enough to define a differential Lie bialgebra structure on the cofree Lie coalgebra $L_{2\star} = \oplus \underline{\mathfrak{g}_2[[\hbar]]^{\otimes n}}$. Etingof-Kazhdan's dequantization and quantization theorems can be used in the same way to prove it is enough to have a differential bialgebra structure on the cofree tensorial coalgebra $T_{2\star} = \oplus \mathfrak{g}_2[[\hbar]]^{\otimes n}$ since the correspondance in Proposition 4.2.2 was given by universal formulas.

So we want now to define a bialgebra structure on $T_{2\star}$ given by maps $a^n_{2\star}$ and $a^{p_1,p_2}_{2\star}$ such that $a^1_{2\star} = b_\star$ and $a^{1,1}_{2\star}$ is the product $\{-|-\}$ defined in Section 4.1. This can be done using braces as in the end of Section 4.2. This is because the braces inducing a bialgebra structure on $\mathfrak{g}_2$ are independent of the algebra structure on $\mathfrak{g}_2$. Thus a G_∞-structure can be built on $\mathfrak{g}_\star$ with $m^{p_1,\ldots,p_n}_{2\star} = 0$ for $n > 2$. $\square$

We can now state the analogue of Proposition 4.3.1.

Theorem 4.7.2. — *There exist a G_∞-structure on $\mathfrak{g}_1[[\hbar]]$ corresponding to a differential $d'_{1\star} : \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes\cdot}} \to \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes\cdot}}$ and a morphism of differential coalgebras*

$$\psi_\star \ : \ (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes\cdot}}, d'_{1\star}) \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{2\star}^{\otimes\cdot}}, d_{2\star})$$

such that the induced map $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ is the Hochschild-Kostant-Rosenberg map.

Proof: We will follow the proof of Proposition 4.3.1 and use the same notations. Let us denote

$$V_{i\star}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \hbar^k V_i^{[n-k]} \qquad \text{and} \qquad V_{i\star}^{(\leq n)} = \sum_{k=0}^{n} V_{i\star}^{(k)}.$$

There is a decomposition $d_{2\star} = \sum_{k\geq 0} \hbar^k d_{2\star}^{\{k\}}$. We denote $d_{2\star}^{\{k\}p_1,\ldots,p_l} : \mathfrak{g}_2^{p_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{g}_2^{p_l} \to \mathfrak{g}_2$ the components of $d_{2\star} : \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}} \to \Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}}$. Similarly, we denote $d_{2\star}^{\{k\}[n]}$ the map from $\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_2^{\otimes\cdot}}$ to itself defined by

$$d_{2\star}^{\{k\}[n]} = \sum_{p_1+\cdots+p_l=n} d_{2\star}^{\{k\}p_1,\ldots,p_l}.$$

We have the obvious identity $d_{2\star}^{\{k\}} = \sum_{n\geq 1} d_{2\star}^{\{k\}[n]}$. We can now define

$$d_{2\star}^{(m)} = \sum_{k+n=m} d_{2\star}^{\{k\}[n]}$$

and set

$$d_{2\star} = \sum_{m\geq 1} d_{2\star}^{(m)}, \quad d_{2\star}^{(\leq m)} = \sum_{i=1}^{m} d_{2\star}^{(i)}.$$

In the same way we set

$$d'_{1\star} = \sum_{m\geq 1} {d'_{1\star}}^{(m)}, \quad {d'_{1\star}}^{(m)} = \sum_{k+n=m} {d'_{1\star}}^{\{k\}[n]}, \quad {d'_{1\star}}^{(\leq m)} = \sum_{i=1}^{m} {d'_{1\star}}^{(i)},$$

$$\psi_\star = \sum_{m\geq 1} {\psi_\star}^{(m)}, \quad {\psi_\star}^{(m)} = \sum_{k+n=m} {\psi_\star}^{\{k\}[n]} \quad \text{and} \quad {\psi_\star}^{(\leq m)} = \sum_{i=1}^{m} {\psi_\star}^{(i)}.$$

The proof of Proposition 4.3.1 can now be reproduced, formally replacing the superscripts $[-]$ with $(-)$. We can build maps $d'_{1\star}$ and $\psi_\star$ by induction setting ${d'_{1\star}}^{(1)} = 0$ and $\psi_\star^{(1)} = \phi^1$, the Hochschild-Kostant-Rosenberg map. The proof then relies again only on the fact that ϕ^1 is a quasi-isomorphism of complexes from $(\mathfrak{g}_1, 0)$ to $(\mathfrak{g}_2, b = m_2^1 = m_{2\star}^{(1)})$ (for which we have homotopy formulas). Moreover, at order two we have again

$${d'_{1\star}}^{(2)} = {d_{1\star}}^{(2)} = \hbar[\pi, -]_S + d_1^{1,1} + d_1^2.$$

□

Using the grading $(-)$ along the lines of the proof of Theorem 4.4.1, we can prove in the same way the following.

Theorem 4.7.3. — *If the complex* $\left(\mathrm{End}(\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}), \left[m_1^{1,1} + m_1^2 + \hbar[\pi, -]_S, -\right]\right)$ *is acyclic, then there exists a* G_∞*-morphism* $\psi' : (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes \cdot}}, d_{1\star}) \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes \cdot}}, d'_{1\star})$ *such that the induced map* $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$ *is the identity.*

Theorems 4.7.2 and 4.7.3 hold for arbitrary Poisson manifolds.

Corollary 4.7.1. — *If* $\mathfrak{g}_1 = \Gamma(\mathbb{R}^m, \Lambda T\mathbb{R}^m)$*, there exists a* G_∞*-morphism*

$$\psi' : (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes \cdot}}, d_{1\star}) \to (\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{1\star}^{\otimes \cdot}}, d'_{1\star})$$

inducing the identity on $\mathfrak{g}_1$*.*

Proof: Using Theorem 4.7.3 it is enough to check that the cochain complex

$$\left(\mathrm{End}(\Lambda^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_1^{\otimes \cdot}}), \left[m_1^{1,1} + m_1^2 + \hbar[\pi, -]_S, -\right]\right)$$

is acyclic for $M = \mathbb{R}^m$. This follows from Proposition 4.5.1 and the following Lemma 4.7.2. □

Lemma 4.7.2. — *If a complex* (C, d_0) *is acyclic, then, for any differential* $d_\star = d_0 + \sum_{i\geq 1} \hbar^i d_i$*, the* $\mathbb{R}[[\hbar]]$*-linear complex* $(C[[\hbar]], d_0 + \sum_{i\geq 1} \hbar^i d_i)$ *is acyclic.*

This follows from Remark 6.3. Howewer, as we wish to be able to construct explicit homotopies, we give another proof.

Proof: Suppose we have $x = \sum_{i\geq 0} \hbar^i x_i \in C[[\hbar]]$ satisfying

$$d_\star x = 0. \tag{7.18}$$

We will construct by induction $y = \sum_{i\geq 0} \hbar^i y_i$ satisfying $x = d_\star y$.

Relation (7.18) at order 0 gives $d_0 x_0 = 0$; so by hypothesis there exists $y_0 \in C$ such that $x_0 = d_0 y_0$. Suppose we have built y_i for $i \leq n-1$ such that $x_k = \sum_{i=0}^k d_i y_{k-i}$ for all $k \leq n-1$. We want to build y_n such that $x_n = \sum_{i=0}^n d_i y_{n-i}$. From the acyclicity of the complex (C, d_0) this is equivalent to

$$d_0 \left(x_n - \sum_{i=1}^n d_i y_{n-i} \right) = 0. \tag{7.19}$$

We have

$$(7.19) \iff \sum_{i=1}^n d_i x_{n-i} + \sum_{i=1}^n d_0 d_i y_{n-i} = 0.$$

By the induction hypothesis, we obtain

$$
\begin{aligned}
(7.19) \iff & \sum_{i=1}^{n} d_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} d_j d_{i-j} y_{n-i} = 0 \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} d_i x_{n-i} - \sum_{j=1}^{n} d_j \sum_{i=j}^{n} d_{i-j} y_{n-i} = 0 \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} d_i x_{n-i} - \sum_{j=1}^{n} d_j \sum_{i=0}^{n-j} d_i y_{n-i-j} = 0 \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} d_i x_{n-i} - \sum_{j=1}^{n} d_j x_{n-j} = 0.
\end{aligned}
$$

This proves the result. □

As in Section 4.6, it is easy to see that $\phi_\star = \psi'_\star \circ \psi_\star$ is a G_∞-morphism between $\mathfrak{g}_{1\star}$ and $\mathfrak{g}_{2\star}$. Moreover $\phi_\star$ restricts to a L_∞-morphism

$$\widetilde{\phi_\star} : (\mathfrak{g}_1[[\hbar]], \hbar[\pi, -]_S, [-,-]_S) \to (\mathfrak{g}_2[[\hbar]], b_\star, [-,-]_G)$$

and also to a A_∞-morphism

$$\check{\phi}_\star : (\mathfrak{g}_1[[\hbar]], \hbar[\pi, -]_S, \wedge) \to (\mathfrak{g}_2[[\hbar]], b_\star, \sum_{i\geq 2} m^i_{2\star}).$$

If we now restrict the map $\phi_\star$ to $\phi_\star^{[1]} : \mathfrak{g}_1[[\hbar]] \to \mathfrak{g}_1[[\hbar]]$, we have

$$\phi_\star^{[1]}([\hbar\pi, \alpha]_S) = b_\star \phi_\star^{[1]}(\alpha)$$

for any $\alpha \in \mathfrak{g}_1$. So we have constructed another morphism of complexes $(\mathfrak{g}_1[[\hbar]], \hbar[\pi, -]_S) \to (\mathfrak{g}_2[[\hbar]], b_\star)$. According to Lemma 4.6.1, the map $\phi_\star^{[1]}$ is a quasi-isomorphism which is *a priori* different from the map $\phi^1_\hbar$. We leave the two following questions unanswered :

Question 1 : Are the two maps $\phi^1_\hbar$ and $\phi_\star^{[1]}$ the same ?

Question 2 : To prove the existence of the G_∞-morphism $\phi_\star$, we have used the grading $(-)$ which imposes the initial condition $\psi_\star^{(1)} = \phi^1$, the Hochschild-Kostant-Rosenberg morphism. Is it possible to build a map $\phi_\star$ such that $\phi_\star^{[1]} = \phi^1_\hbar$?

Remark : B. Keller helped us to give a partial answer to this second question, using the following proposition (see K. Lefèvre [**Le**] for a proof in the A_∞ case).

Proposition 4.7.3. — *Let A and B be two L_∞ (respectively A_∞, or G_∞)-algebras, with structures determined by differentials*

$$d_A \;:\; \Lambda^{\cdot} A \to \Lambda^{\cdot} A \text{ (respectively } \underline{A^{\otimes \cdot}} \to \underline{A^{\otimes \cdot}} \text{ or } \Lambda^{\cdot}\underline{A^{\otimes \cdot}} \to \Lambda^{\cdot}\underline{A^{\otimes \cdot}}),$$

and d_B defined in the same way. Denote $d_A = \sum_{n\geq 0} d_A^n(\cdot, \dots, \cdot)$, where d_A^n is a homogeneous component of d_A (in the G_∞ case, we write

$$d_A = \sum_{l\geq 0, n_1+\cdots+n_p=l} d_A^{n_1,\dots,n_p}$$

whith $d_A^{n_1,\dots,n_p} : \underline{A^{\otimes n_1}}\Lambda\dots\Lambda\underline{A^{\otimes n_p}} \to B$ and we order the maps $d_i^{n_1,\dots,n_p}$ such that $(n_1,\dots,n_p) \geq (m_1,\dots,m_q) \Leftrightarrow (n_1+\cdots+n_p > m_1+\cdots+m_q)$ or $(n_1+\cdots+n_p = m_1+\cdots+m_q$ and $(n_1,\dots,n_p) \geq (m_1,\dots,m_q)$ for the lexicographic order). Suppose there exists a "twisting" element $a \in A$ such that

$$\sum_{n\geq 0} d_A^n(a,\dots,a) = 0,$$

and a L_∞ (respectively A_∞, or G_∞)-morphism $\varphi = \sum_{n\geq 0}\varphi^n$ (using the same convention as above) between A and B. Then

(a) : *there exists a "twisted" L_∞ (respectively A_∞, or G_∞)-algebra structure on A with differential $d_{A_a} = \sum_{n\geq 0} d_{A_a}^n$ given by*

$$d_{A_a}^n(\cdot,\dots,\cdot) = \sum_{i\geq 0} d_A^{n+i}(\dots,a,\dots,a,\dots),$$

where the element a is inserted i times ;

(b) : *the element $b \in B$ defined by*

$$b = \sum_{n\geq 0}\varphi^n(a,\dots,a)$$

satisfies

$$\sum_{n\geq 0} d_B^n(b,\dots,b) = 0.$$

(c) : *there exists a "twisted" L_∞ (respectively A_∞, or G_∞)-algebra structure on B with differential $d_{B_b} = \sum_{n\geq 0} d_{B_b}^n$ given by*

$$d_{B_b}^n(\cdot,\dots,\cdot) = \sum_{i\geq 0} d_B^{n+i}(\dots,b,\dots,b,\dots)$$

where the element b is inserted i times ;

(d) : *there exists a L_∞ (respectively A_∞, or G_∞)-morphism between the two "twisted" L_∞ (respectively A_∞, or G_∞)-algebra structures on A and B given by $\varphi_{ab} = \sum_{n\geq 0} \varphi_{ab}^n$, where*

$$\varphi_{ab}^n(\cdot, \dots, \cdot) = \sum_{i\geq 0} \varphi^{n+i}(\dots, a, \dots, a, \dots)$$

where the element a is inserted i times.

In our case, where $A = \mathfrak{g}_1$ and $B = \mathfrak{g}_2$ and φ is Tamarkin's L_∞ (respectively A_∞, or G_∞)-morphism, and $a = \pi$ (the Poisson tensor field), we can apply the previous proposition, but only in the L_∞-case (because otherwise $\sum d_1^k(\pi, \dots, \pi) \neq 0$), and get a deformed L_∞-morphism between the graded Lie algebras $(\mathfrak{g}_1[[\hbar]], \hbar[\pi, -]_S, [-, -]_S)$ and $(\mathfrak{g}_2[[\hbar]], b_\star, [-, -]_G)$.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank D. Manchon and B. Keller for many useful suggestions. We also would like to thank C. Kassel for a careful reading of the paper.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] M. Basterra, *André-Quillen cohomology of commutative S-algebras*, J. Pure Appl. Algebra 144 (1999), no. 2, 111–143.

[Bau] J. H. Baues, *The double bar and cobar constructions*, Compos. Math. 43 (1981), 331–341.

[BFFLS1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics*, Lett. Math. Phys. 1 (1975/77), no. 6, 521–530

[BFFLS2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization, I and II*, Ann. Phys. 111 (1977), 61–151.

[Bo1] M. Bökstedt, *Topological Hochschild homology*, Preprint Bielefeld, 1986.

[Bo2] M. Bökstedt, *Topological Hochschild homology of $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/p$*, Preprint Bielefeld, 1986.

[BHM] M. Bökstedt, W. C. Hsiang, I. Madsen, *The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces*, Invent. Math. 111 (1993), no. 3, 465–539.

[BF] A. K. Bousfield, E. M. Friedlander, *Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets*, Lecture Notes in Math., 658, Springer, Berlin (1978), pp. 80–130.

[BK] A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Br] W. Browder, *Algebraic K-theory with coefficients $\mathbb{Z}/p$*, Lecture Notes in Math., 657, Springer, Berlin (1978), pp. 40–84.

[Bro] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Bru] M. Brun, *Topological Hochschild homology of Z/p^n*, J. Pure Appl. Algebra 148 (2000), no. 1, 29–76.

[BV] D. Burghelea, M. Vigué-Poirrier, *Cyclic homology of commutative algebras*, I. Algebraic topology 51–72, Lecture Notes in Math., 1318, Springer, Berlin-New York, 1988.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg *Homological algebra* , Princeton University Press, Princeton, N. J. (1956).

[Ca] J.-L. Cathelineau, *λ-structures in algebraic K-theory and cyclic homology.* K-Theory 4 (1990/91), no. 6, 591–606.

[CFT] A. S. Cattaneo, G. Felder, L. Tomassini, *Fedosov connections on jet bundles and deformation quantization*, math.QA/0111290 (to appear in IRMA Lecture Notes in Mathematics and Theoretical Physics : Deformation Quantization - Proceedings of the Meeting between Mathematicians and Theoretical Physicists, Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg (May 31 - June 2, 2001).

[Ch] F. C. Cohen, *The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$ spaces, $n \geq 0$, the homology of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Math., vol 533, Springer-Verlag, 1976, pp 207–351.

[CJ] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, *Algebraic K-theory of spaces and the Novikov conjecture*, Topology 29 (1990), no. 3, 317–344.

[Co] A. Connes, *Noncommutative differential geometry, I, II*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 62 (1985), 41–144.

[Del] P. Deligne, *Letter to Stasheff, Gerstenhaber, May, Schechtman, Drinfeld*, May 17, 1993.

[De1] K. R. Dennis, *Differentials in algebraic K-theory*, non publié, circa 1975.

[De2] K. R. Dennis, *Algebraic K-theory and Hochschild homology*, non publié, 1975-1976.

[DS] K. R. Dennis, M. R. Stein, *K_2 of discrete valuation rings*, Advances in Math. 18 (1975), no. 2, 182–238

[DL] M. De Wilde, P. B. A. Lecomte, *A homotopy formula for the Hochschild cohomology*, Compositio Math. 96 (1995), no. 1, 99–109

[Du1] B. I. Dundas, *The local structure of algebraic K-theory* http ://www.math.ntnu.no/~dundas

[Du2] B. I. Dundas, *The homology of additive categories*, preprint, http ://www.math.ntnu.no/~dundas

[Du3] B. I. Dundas, *The Cyclotomic trace for symmetric monoidal categories* in “Geometry and Topology” : Aarhus, Contemp. Math. 258, p. 121–144.

[DMC] B.I. Dundas, R. McCarthy, *Topological Hochschild homology of ring functors and exact categories*, J. Pure Appl. Algebra 109 (1996), no. 3, 231–294.

[EKMM] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, J. P. May,*Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, Mathematical Surveys and Monographs, 47. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[EK1] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras. I*, Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), no. 1, 1-41.

[EK2] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras. II, III*, Selecta Math. (N.S.) 4 (1998), no. 2, 213–231, 233–269.

[Fo] R. H. Fox, *Free differential calculus. I, Derivation in the free group ring.* Ann. of Math. (2) 57, (1953), 547–560.

[Fr1] B. Fresse, *Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 326 (1998), no. 9, 1053–1058.

[Fr2] B. Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, prépublication (1998).

[Ga2] P. Gaucher, *Produit tensoriel de matrices, homologie cyclique, homologie des algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 (1994), no. 2, 413–431.

[Ga2] P. Gaucher, *Lambda-opérations sur l'homologie d'une algèbre de Lie de matrices*, K-Theory 13 (1998), no. 2, 151–167

[GW] S. C. Geller, C. A. Weibel, *Hodge decompositions of Loday symbols in K-theory and cyclic homology*, K-Theory 8 (1994), no. 6, 587–632

[Ge] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) 78 1963 267–288.

[GS] M. Gerstenhaber, S. Schack, *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Algebra 48 (1987), no. 3, 229–247.

[GV] M. Gerstenhaber, A. Voronov, *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153.

[GJ] E. Getzler, J. D. S. Jones, *Operads, homotopy algebras and iterated loop spaces*, hep-th/9403055.

[Gi1] G. Ginot, *Formules explicites pour le caractéère de Chern en K-théorie algébrique*, Preprint Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg (2001), no. 8

[Gi2] G. Ginot, *Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*, Preprint Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg (2001), no. 42

[GK] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. 76 (1994), no. 1, 203–272.

[Go] T. G. Goodwillie, *Relative algebraic K-theory and cyclic homology*, Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 2, 347–402.

[Ha] G. Halbout *Formule d'homotopie entre les complexes de Hochschild et de de Rham*, Compositio Math. 126 (2001), No 2, 123–145.

[HM] L. Hesselholt, I. Madsen, *On the K-theory of finite algebras over Witt vectors of perfect fields*, Topology 36 (1997), no. 1, 29–101.

[Hi] H. L. Hiller, *λ-rings and algebraic K-theory.* J. Pure Appl. Algebra 20 (1981), no. 3, 241–266

[Hin] V. Hinich, *Tamarkin's proof of Kontsevich formality conjecture*, math.QA/0003052.

[HKR] G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Transactions AMS 102 (1962), 383-408

[HJ] C. E. Hood, J. D. S. Jones, *Some algebraic properties of cyclic homology groups*, K-Theory 1 (1987), no. 4, 361–384.

[HSS] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, *Symmetric spectra*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 1, 149–208.

[JP] M. Jibladze, T. Pirashvili, *Cohomology of algebraic theories*, Journal of ALgebra, 137(2) (1991) 253-296

[Jo] J. D. S. Jones, *Cyclic homology and equivariant homology*, Invent. Math. 87 (1987), 403–424.

[Kad] T. Kadeishvili, *Measuring the noncommutativity of DG-algebras*, preprint.

[Kan] M. R. Kantorovitz, *Adams operations and the Dennis trace map.* J. Pure Appl. Algebra 144 (1999), no. 1, 21–27.

[Kar] M. Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque No. 149, Soc. Math. France, Paris (1987).

[KL] M. Karoubi, T. Lambre, *Quelques classes caractéristiques en théorie des nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), no. 9, 755–760.

[Ka1] C. Kassel, *Cyclic homology, comodules, and mixed complexes*, J. Algebra 107 (1987), no. 1, 195–216.

[Ka2] C. Kassel, *Homologie cyclique, caractère de Chern et lemme de perturbation*, J. Reine Angew. Math. 408 (1990), 159–180.

[Ka3] C. Kassel, *A Künneth formula for the decomposition of the cyclic homology of commutative algebras.* Math. Scand. 70 (1992), no. 1, 27–33. (Appendix to : "Decomposition of the bivariant cyclic cohomology of commutative algebras" [Math. Scand. 70 (1992), no. 1, 5–26] by P. Nuss).

[Kh] M. Khalkhali, *Operations on cyclic homology, the X complex, and a conjecture of Deligne*, Comm. Math. Phys. 202 (1999), no.2, 309-323.

[Ko1] M. Kontsevich, *Formality conjecture. Deformation theory and symplectic geometry*, Math. Phys. Stud. 20, Ascona (1996), 139–156.

[Ko2] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, q-alg/9709040

[Ko3] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization. Moshé Flato (1937–1998)*, Lett. Math. Phys. 48 (1999), no. 1, 35–72.

[KS] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), 255–307, Math. Phys. Stud., 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Kos] J.-L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenjuis et cohomologie, in "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui"*, Astérisque (1985), 257–271.

[Kr] C. Kratzer, *λ-structure en K-théorie algébrique.* Comment. Math. Helv. 55 (1980), no. 2, 233–254.

[LS] T. Lada, J. D. Stasheff, *Introduction to SH Lie algebras for physicists* Internat. J. Theoret. Phys. 32 (1993), no. 7, 1087–1103.

[Le] K. Lefèvre, *Sur les A_∞-catégories*, Thesis, available at
http ://www.institut.math.jussieu.fr/~lefevre/

[Lo1] J.-L. Loday, *K-théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1976), no. 3, 309–377.

[Lo2] J.-L. Loday, *Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs*, J. Algebra 54 (1978), no. 1, 178–202.

[Lo3] J.-L. Loday, *Symboles en K-théorie algébrique supérieure*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 18, 863–866.

[Lo4] J.-L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives.* Invent. Math. 96 (1989), no. 1, 205–230.

[Lo5] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[LP] J.-L. Loday, C. Procesi, *Cyclic homology and lambda operations*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci., 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1989), 209–224.

[LQ] J.-L.Loday, D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helv. 59 (1984), no. 4, 569–591.

[Ly1] M. Lydakis, *Fixed point problems, equivariant stable homotopy, and a trace map for the algebraic K-theory of a point*, Topology 34 (1995), no. 4, 959–999.

[Ly2] M. Lydakis, *Smash products and Γ-spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 126 (1999), no. 2, 311–328.

[MCa1] R. McCarthy, *The cyclic homology of an exact category*, J. Pure Appl. Algebra 93 (1994), no. 3, 251–296.

[MCa2] McCarthy, Randy, *On operations for Hochschild homolog y*, Comm. Algebra 21 (1993), no. 8, 2947–2965.

[MCS] J. McClure, R. Staffeldt, *On the topological Hochschild homolgy of bu*, I. Amer. J. Math., 115 (1993), 1–45.

[MCSV] J. McClure,R. Schwänzl, R. Vogt, *$THH(R) \cong R \otimes S^1$ for E_∞ ring spectra*, J. Pure Appl. Algebra 121 (1997), no. 2, 137–159.

[MS] H. Maazen, J. Stienstra, *A presentation for K_2 of split radical pairs*, J. Pure Appl. Algebra 10 (1977/78), no. 3, 271–294.

[Ma1] M. Markl, *Distributive laws and Koszulness*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996), no. 2, 307–323.

[Ma2] M. Markl, *Models for operads*, Comm. Algebra 24 (1996), no. 4, 1471–1500.

[Ma3] M. Markl, *Homotopy Algebras are Homotopy Algebras*, math.AT/9907138.

[May] J. P. May, *Operads, algebras and modules*, Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), 15–31, Contemp. Math., 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Mi] J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 72. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971.

[Mu] T. Mulders, *Generating the tame and wild kernels by Dennis-Stein symbols*, K-Theory 5 (1991/92), no. 5, 449–470.

[Ne] J. Neisendorfer, *Primary homotopy theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 25 (1980), no. 232.

[PW] T. Pirashvili, F. Waldhausen, *Mac Lane homology and topological Hochschild homology*, J. Pure Appl. Algebra 82 (1992), no. 1, 81–98.

[Ro] A. Robinson, *Derived tensor products in stable homotopy theory*, Topology 22 (1983), no. 1, 1–18.

[SS] M. Schlessinger, J. Stasheff, *The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory*, J. Pure Appl. Algebra 38 (1985), no. 2-3, 313–322.

[Sc] S. Schwede, *Stable homotopical algebra and Γ-spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 126 (1999), no. 2, 329–356.

[Se] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology 13 (1974), 293–312.

[Sh] B. Shipley, *Symmetric spectra and topological Hochschild homology*, *K*-Theory 19 (2000), no. 2, 155–183.

[So] C. Soulé, *Eléments cyclotomiques en K-théorie*, Astérisque 147-148, Soc. Math. France (1987).

[St] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292 ; ibid. 108 1963 293–312.

[Ta] D. Tamarkin, *Another proof of Kontsevich formality conjecture*, math.QA/9803183.

[TT] D. Tamarkin, B. Tsygan, *Noncommutative differential calculus, homotopy BV algebras and formality conjectures*, Methods Funct. Anal. Topology 6 (2000), no. 2, 85–100.

[Ts] B. L. Tsygan, *Homology of matrix algebras over rings and Hochschild homology*, Uspekhi Mat. Nauk 38 (1983), 217–218 (= Russ. Math. Surveys 38 (1983), 198–199).

[Vo] A. Voronov, *Homotopy Gerstenhaber algebras*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II (Dijon), 307–331, Math. Phys. Stud., 22, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Wa] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of topological spaces. I* Algebraic and geometric topology Part 1, pp. 35–60, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.

[We1] C. A. Weibel, *Nil K-theory maps to cyclic homology*, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), no. 2, 541–558.

[We2] C. A. Weibel, *An introduction to algebraic K-theory*, http ://math.rutgers.edu :80/~weibel/Kbook.html