OPÉRADES, ALGÈBRES DE LEIBNIZ ET TRIPLES DE JORDAN

Mémoire de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches

Allahtan Victor GNEDBAYE

Université de N'Djaména
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées
Département de Mathématique et d'Informatique
BP: 1027, N'Djaména (Tchad)
et
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex (France)
E-mail: gnedbaye@math.u-strasbg.fr (up to August 2003)

Table des matières

Classification A.M.S. (2000) : 16Y99, 17A30, 17A32, 17A42, 17B55, 17B56, 17C99, 18B99, 18D10, 18D99, 18G40, 18G50, 18G60, 18G99, 55U35.

Mots clés : Homologie de Leibniz, algèbres de Lie étendues, suites spectrales, extensions centrales universelles, algèbres k-aires, opérades quadratiques, dualité de Koszul, triples de Jordan, produits tensoriels non abéliens, algèbres dendriformes, algèbres perm, algèbres pré-Lie, dérivations, algèbres différentielles graduées.

Liste des publications et prépublications

[1] (avec M. Wambst), "*Jordan Triples and Operads*", J. of Algebra, t. 231, (2000), p. 744-757.

[2] "*A non-abelian tensor product of Leibniz algebras*", Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. 49, (1999), p. 1149–1177.

[3] "*Third homology groups of universal central extensions of a Lie algebra*", Afrika Mat., t. 10, (1999), p. 46–63.

[4] "*Leibniz homology of extended Lie algebras*", K-Theory, t. 13, (1998), p. 169–178.

[5] "*Suite spectrale d'une extension d'algèbres de Leibniz*", C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., t. 324, (1997), p. 1327–1332.

[6] "*Opérades des algèbres $(k+1)$-aires*", Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), p. 83–113, Contemp. Math., t. 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[7] "*Les algèbres k-aires et leurs opérades*", C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., t. 321, (1995), p. 147–152.

[8] "*Sur l'homologie des algèbres de Leibniz, opérades des algèbres k-aires*", Thèse de Doctorat, Univ. L. Pasteur de Strasbourg I, 1995. Prépublication de l'I.R.M.A. 1995/22.

[9] "*Extended Leibniz algebras and factorization of some operadic functors*", Prépublication 2001.

[10] (avec J.-L. Loday et M. Wambst) "*Lissité dans un contexte non unitaire*", [Programme de recherche, (2003), en préparation].

Placées dans le cadre de l'"*algèbre homologique non commutative*" et de la "*théorie des opérades*", mes activités de recherches se scindent en deux parties indépendantes. La première est consacrée à la généralisation de certaines propriétés classiques des algèbres de Lie au cadre non commutatif des "*algèbres de Leibniz*". J'y étudie les extensions centrales universelles, une «version Leibniz» de la suite spectrale de Hochschild-Serre, des produits tensoriels non abéliens, et la notion d'"*algèbres de Leibniz étendues*" (par un certain type de nouvelles algèbres). La seconde partie s'occupe des opérades des algèbres à "*opérations k-aires*" (i.e., dont le produit porte sur k variables), avec une étude particulière des "*triples de Jordan*" qui sont des algèbres ternaires ($k=3$) issues de certaines relations algébriques entre des opérateurs provenant de la "*Mécanique Quantique*".

Ce travail suggère des perspectives d'approfondissement rassemblées en fin de chacun des trois chapitres. Le programme de recherche à court terme consiste en une introduction d'une notion de lissité dans un contexte non nécessairement unitaire. Avec en vu une idée d'opérade lisse sur une autre, qui parachèverait la triangulation du diagramme opéradique de J.-L. Loday, et munie de bonnes enveloppes universelles ou d'algèbres Lie-Leibniz admissibles.

Dans ce qui suit, les références bibliographiques de mes articles sont numérotées de [1] à [10] et se trouvent dans la liste des (pré)publications ci-dessus (p. 2); celles des autres auteurs sont signalées par les initiales, [C-E], [Lo1] par exemple, et sont rassemblées à la fin de ce Mémoire synthétique.

Introduction.— Découvertes par J.-L. Loday en 1989 [Lo1], les *algèbres de Leibniz* sont une variation non commutative d'algèbres de Lie usuelles, caractérisées par l'*identité de Leibniz*

$$[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]].$$

En d'autres termes, l'opérateur $[-,z]$ est une dérivation pour le crochet. Il existe une théorie de (co)homologie HL pour ces nouveaux objets algébriques, développée pour l'essentiel par Loday-Pirashvili [L-P], et ayant des propriétés semblables à celles de la théorie de (co)homologie H de Chevalley-Eilenberg pour les algèbres de Lie [C-E]. Rappelons que les algèbres de Lie sont des exemples d'algèbres de Leibniz et que le qualificatif *non commutatif* se rapporte à la présence du foncteur "*puissance tensorielle* $\mathfrak{g}^{\otimes n}$" dans le complexe de Loday-Pirashvili à la place du foncteur "*puissance extérieure* $\Lambda^n(\mathfrak{g})$" dans celui de Chevalley-Eilenberg. On a donc un morphisme canonique $can_*:\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g})\longrightarrow \mathrm{H}_*(\mathfrak{g})$ permettant de comparer les deux théories d'homologie lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie.

Dans un premier temps, adaptant les constructions de H. Garland [Gar], nous donnons dans [3] des critères caractérisant l'universalité d'une extension centrale d'une algèbre de Leibniz donnée $\mathcal{L}$. Nous en déduisons des critères d'existence et nous montrons qu'alors le noyau de l'extension centrale universelle est canoniquement isomorphe au module d'homologie $\mathrm{HL}_2(\mathcal{L})$. Nous comparons, pour toute algèbre de Lie (donc de Leibniz) parfaite $\mathfrak{g}$, son extension centrale universelle $\mathfrak{U}$ dans la catégorie des algèbres de Leibniz à son extension $\mathfrak{u}$ dans la catégorie des algèbres de Lie. Ensuite nous déterminons et comparons les modules d'homologie $\mathrm{HL}_3(\mathfrak{U})$, $\mathrm{HL}_3(\mathfrak{u})$ et $\mathrm{H}_3(\mathfrak{u})$. Ces derniers calculs reposent sur la *suite spectrale* de Hochschild-Serre pour les algèbres de Lie, ainsi que sa «version Leibniz», un peu plus difficile à manipuler, construite dans [5]. La complexité de cette nouvelle suite spectrale s'explique par la présence d'un "*produit libre*" dans la "*Formule du type Künneth*" pour l'homologie de Leibniz [Lo3], alors que dans le cas classique, c'est le produit tensoriel qui intervient.

Parallèlement, j'ai construit un *produit tensoriel non abélien* $\star$ pour les algèbres de Leibniz [2]. Ceci nécessite l'introduction des notions d'*algèbres de Leibniz (pré)croisées* et de *bidérivations* d'algèbres de Leibniz. Ainsi, pour toute algèbre de Leibniz parfaite $\mathcal{L}$, son extension centrale universelle peut être réalisée comme carré $\mathcal{L}\star\mathcal{L}$. De plus, j'ai obtenu un début de théorie de *(co)homologie non abélienne* pour les algèbres de Leibniz, analogue à celle de D. Guin pour les algèbres de Lie [Gu]. Cela permet de comparer le premier module d'homologie de Hochschild du type Milnor d'une algèbre associative quelconque à son homologie de Hochschild classique. Dans le même esprit, Kurdiani-Pirashvili ont muni le carré tensoriel (au sens linéaire) $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ de toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'une structure non abélienne d'algèbre de Leibniz [K-P]. Nous en donnons une version générale en dotant le produit tensoriel $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}$ d'une structure non abélienne d'algèbre de Leibniz, pourvu que les deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ opèrent mutuellement l'une sur l'autre (de manières compatibles).

Dans un travail antérieur [4], j'ai déterminé l'homologie de Leibniz des *algèbres de Lie étendues par une algèbre commutative*, en fonction de l'homologie de Hochschild de l'algèbre commutative et des coïnvariants des puissances symétriques de l'algèbre de Lie. Il était donc intéressant d'essayer de définir une notion d'"*algèbres de Leibniz étendues*" par un type d'algèbres. Ceci a conduit à introduire les "*algèbres perm*" satisfaisant les relations d'*associativité et de commutativité à droite*

$$(ab)c=a(bc)=a(cb).$$

Il s'avère que ce nouveau type d'algèbres est en dualité de Koszul (au sens des opérades) au type des "*algèbres pré-Lie*", satisfaisant la relation *pseudo-associative et pseudo-symétrique à droite*

$$a(bc)-(ab)c=a(cb)-(ac)b.$$

Chapoton-Livernet ont montré par une étude homologique que les opérades correspondant à ces deux types d'algèbres sont de Koszul [Ch-L]. En fait, les algèbres pré-Lie permettent la factorisation

$$(\mathbf{As}) \hookrightarrow (\mathbf{Pr\acute{e}\text{-}Lie}) \stackrel{-}{\longrightarrow} (\mathbf{Lie})$$

du foncteur classique de "*Liesation*"

$$(\mathbf{As}) \stackrel{-}{\longrightarrow} (\mathbf{Lie}),\ A \mapsto A_{Lie} := (A,\ [a,b] := ab - ba).$$

J.-L. Loday a construit la catégorie (**Dias**) d'un certain type d'algèbres ayant deux opérations associatives, notées $\dashv$ et $\vdash$ (avec certaines compatibilités), appelées "*digèbres associatives*" [Lo5]. Elles donnent naissance à un foncteur vers la catégorie (**Leib**) des algèbres de Leibniz

$$(\mathbf{Dias}) \stackrel{-}{\longrightarrow} (\mathbf{Leib}),\ (D, \dashv,\ \vdash) \mapsto D_{Leib} := (D,\ [x,y] := x \dashv y - y \vdash x)$$

analogue à celui ci-dessus. Nous montrons une fois encore qu'il y a une factorisation

$$(\mathbf{Dias}) \hookrightarrow (\mathbf{Pr\acute{e}\text{-}Leib}) \stackrel{-}{\longrightarrow} (\mathbf{Leib})$$

pour une certaine catégorie d'algèbres (**Pré-Leib**) dichotomisant les algèbres pré-Lie. De plus, nous déterminons l'opérade **Ricod** (de l'anglais "*right-commutative and dendriform*") duale de celle des algèbres pré-Leib. Il se trouve que l'on a une nouvelle factorisation

$$(\mathbf{Zinb}) \longrightarrow (\mathbf{Ricod}) \longrightarrow (\mathbf{Dend})$$

du foncteur de la catégorie des algèbres Zinbiel (duales des algèbres de Leibniz) vers celle des algèbres dendriformes (duales des digèbres):

$$(\mathbf{Zinb}) \longrightarrow (\mathbf{Dend}),\ (Z,\ .) \mapsto Z_D := (Z,\ x \prec y := x.y,\ x \succ y := y.x).$$

En résumé, nous avons une "*triangulation*" du diagramme commutatif de foncteurs de Loday, dont la symétrie (par rapport à l'axe médian de l'opérade auto-duale **As** des algèbres associatives non unitaires) reflète la dualité de Koszul des opérades correspondantes:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Dend} & & \mathbf{Dias} \arrow[d] & \\
 & \mathbf{Ricod} \arrow[u] \arrow[dr] & & \mathbf{Pr\acute{e}\text{-}Leib} \arrow[dr] & \\
\mathbf{Zinb} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{As} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{Leib}. \\
 & \mathbf{Perm} \arrow[ur] & & \mathbf{Pr\acute{e}\text{-}Lie} \arrow[ur] \arrow[d] & \\
 & \mathbf{Com} \arrow[u] & & \mathbf{Lie} &
\end{tikzcd}$$

(L-G)

Habituellement, on décrit les algèbres par "*générateurs*" et "*relations*". Il existe un autre formalisme, celui des *opérades* introduites par J. P. May [May], qui consiste à se donner *toutes* les opérations que l'on peut effectuer sur un nombre fini de variables, et *toutes* les relations entre ces opérations. Ginzburg-Kapranov ont montré que l'on pouvait définir une théorie de "*dualité de Koszul*" pour les opérades "*quadratiques*" en un certain sens [G-K]. En fait, une opérade peut être vue comme une algèbre associative dans la catégorie monoïdale des Σ-modules où Σ est le groupoïde réunion des groupes symétriques $\Sigma_n, n \in \mathbb{N}$. En examinant la théorie de Ginzburg-Kapranov, on s'aperçoit que la "*quadraticité*" porte en fait sur les relations et non sur les générateurs. J'ai donc étendu cette dualité aux opérades engendrées par des Σ-modules concentrés en degré $(k+1)$ où $k \geq 1$ est un entier quelconque [6]. Une algèbre sur une telle opérade est alors une *algèbre* $(k+1)$*-aire*.

Les deux manières d'écrire l'*associativité classique* $(k=1)$,

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{ou} \quad (ab)c - a(bc) = 0$$

se généralisent en l'*associativité totale* (k relations)

$$(a_0 \cdots a_{i-1}(a_i \cdots a_{i+k})a_{i+k+1} \cdots a_{2k}) = ((a_0 \cdots a_k)a_{k+1} \cdots a_{2k})$$

où $i = 1, \cdots, k$, et en l'*associativité partielle* (une relation)

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik}(a_0 \cdots a_{i-1}(a_i \cdots a_{i+k})a_{i+k+1} \cdots a_{2k}) = 0.$$

De même, j'ai généralisé les notions de *commutativité*, d' *(anti)symétrie* et l'*identité de Jacobi* permettant de définir les *algèbres de Lie* $(k+1)$*-aires* déjà considérées par Hanlon-Wachs [H-W]. Nous construisons les algèbres $(k+1)$-aires *libres* sur un espace vectoriel donné pour les quatre types suivants: totalement associatif ($\mathbf{tAs}^{<k>}$), partiellement associatif ($\mathbf{pAs}^{<k>}$), symétrique et totalement associatif ($\mathbf{stAs}^{<k>}$), et de Lie ($\mathbf{Lie}^{<k<}$). Je décris les opérades quadratiques $(k+1)$-aires correspondantes et je montre les dualités de Koszul:

$$(\mathbf{tAs}^{<k>})^! \cong \mathbf{pAs}^{<k>} \quad \text{et} \quad (\mathbf{stAs}^{<k>})^! \cong \mathbf{Lie}^{<k>}.$$

Par ailleurs, la trivialité de l'homologie des algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives libres montre que l'opérade $\mathbf{pAs}^{<k>}$ est de Koszul, et donc aussi sa duale $\mathbf{tAs}^{<k>}$ (cf. [G-K]). Il en est de même pour les opérades $\mathbf{Lie}^{<k>}$ et $\mathbf{stAs}^{<k>}$, d'après les résultats ⟪resitués⟫ de Hanlon-Wachs (cf. 3.2).

Afin de se raccrocher aux objets existant dans la nature, dans [1], M. Wambst et moi avons étudié l'exemple des *triples de Jordan* qui sont des algèbres ternaires $(k=2)$ dont le produit $\{- - -\} : A \otimes A \otimes A \to A$ satisfait les relations

$$\{xyz\} = \{zyx\} \quad \text{et} \quad \{xy\{zuv\}\} + \{z\{yxu\}v\} = \{\{xyz\}uv\} + \{zu\{xyv\}\}$$

pour tous $x, y, z, u, v \in A$, (*cf.* [L-M], [Me], [Ne]). Nous avons décrit l'opérade quadratique gouvernant ces algèbres et montré que son opérade duale est l'opérade **Papas** des algèbres ternaires *partiellement associatives et partiellement anti-symétriques*, c'est-à-dire dont le produit $(- - -) : B \otimes B \otimes B \to B$ satisfait les relations

$$(abc) = -(cba) \quad \text{et} \quad ((abc)de) + (a(bcd)e) + (ab(cde)) = 0, \ \forall \ a, b, c, d, e \in B.$$

Notre prochain objectif est de décrire l'objet libre dans la catégorie des algèbres papas afin de construire l'homologie opéradique des triples de Jordan; ceci pour pouvoir confirmer la «Koszulité» des opérades correspondantes. Pour ce faire H. Rubenthaler nous a signalé un article de I. Satake qui réalise une correspondance entre les algèbres de Jordan simples et les algèbres de Lie $\mathbb{Z}_3$-graduées ([Sa]).

1 Extensions et produits tensoriels d'algèbres de Leibniz

1.1 Préliminaires.— Une "*algèbre de Leibniz*" sur un anneau commutatif et unitaire $\mathbb{K}$ est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module $\mathcal{L}$, muni d'une application bilinéaire $[-,-] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ (appelée *crochet*) satisfaisant l'"*identité de Leibniz*"

$$[[x,y],z] = [[x,z],y] + [x,[y,z]] \tag{1.1.1}$$

pour tous $x, y, z \in \mathcal{L}$. En présence de l'anti-symétrie (i.e., $[x,x] = 0, \forall\, x \in \mathcal{L}$), l'identité de Leibniz est équivalente à l'identité de Jacobi; donc les algèbres de Lie sont des exemples d'algèbres de Leibniz.

Un morphisme d'algèbres de Leibniz est une application linéaire $f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ telle que l'on ait $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ pour tous $x, y \in \mathcal{L}_1$. Il est clair que les algèbres de Leibniz et leurs morphismes forment une catégorie que l'on note (**Leib**).

Un idéal bilatère d'une algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$ est un sous-module $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$ tel que $[x,y] \in \mathcal{H}$ et $[y,x] \in \mathcal{H}$ pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{H}$. Pour tout idéal bilatère $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$, le module quotient $\mathcal{L}/\mathcal{H}$ hérite d'une structure d'algèbre de Leibniz induite par le crochet de $\mathcal{L}$. En particulier, désignons par $([x,x])$ l'idéal bilatère engendré par tous les crochets $[x,x]$ où x parcourt $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre de Leibniz quotient $\mathcal{L}/([x,x])$ est en fait une algèbre de Lie dite "*canoniquement associée à* $\mathcal{L}$" et on la note $\mathcal{L}_{Lie}$.

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Leibniz et soit $\mathcal{L}' := [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ le sous-module de $\mathcal{L}$ engendré par tous les crochets $[x,y]$ où x et y parcourent $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$ est dite "*parfaite*" si $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Il est clair que tout sous-module de $\mathcal{L}$ contenant $\mathcal{L}'$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}$.

1.1.2 Exemples.— i) Si $(\mathfrak{g}, [-,-], d)$ est une algèbre de Lie différentielle, alors le crochet donné par $[x,y]_d := [x, d(y)]$, confère au $\mathbb{K}$-module $\mathfrak{g}$ une structure d'algèbre de Leibniz.

ii) Soit M une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, vue comme $\mathfrak{g}$-module à droite avec une action notée m^x où $(m,x) \in M \times \mathfrak{g}$. Pour tout morphisme $\mathfrak{g}$-équivariant $f : M \longrightarrow \mathfrak{g}$, le crochet défini par $[m, m'] := m^{f(m')}$, induit une structure d'algèbre de Leibniz sur M. En fait toute algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$ s'obtient de cette manière en considérant la projection canonique $\mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_{Lie}$.

iii) Soit A une algèbre associative et soit $b_3 : A^{\otimes 3} \longrightarrow A^{\otimes 2}$ le bord de Hochschild donné par

$$b_3(x \otimes y \otimes z) := xy \otimes z - x \otimes yz + zx \otimes y,\ \forall\, x, y, z \in A.$$

Alors le $\mathbb{K}$-module $\mathrm{L}(A) := A^{\otimes 2}/\mathrm{im}(b_3)$ est une algèbre de Leibniz pour le crochet défini par

$$[x \otimes y, z \otimes t] := (xy - yx) \otimes (zt - tz),\ \forall\, x, y, z, t \in A.$$

1.1.3 Algèbres de Leibniz libres.— Soit V un $\mathbb{K}$-module et soit $\bar{\mathrm{T}}(V) := \oplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$ l'algèbre tensorielle non unitaire libre sur V. Alors le crochet défini par récurrence par

$$[x, v] := x \otimes v,\ \text{si } x \in \bar{\mathrm{T}}(V) \text{ et } v \in V,$$
$$[x, y \otimes v] := [x,y] \otimes v - [x \otimes v, y],\ \text{si } x, y \in \bar{\mathrm{T}}(V) \text{ et } v \in V,$$

satisfait l'identité de Leibniz. L'algèbre de Leibniz ainsi obtenue est l'"*algèbre de Leibniz libre sur* V" et on la note $\mathcal{F}(V)$ (voir [L-P]). L'*algèbre de Lie libre sur* V n'est autre que l'algèbre $\mathcal{F}(V)_{Lie}$ et l'on a la formule

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n = [\ldots[[v_1, v_2], v_3], \ldots v_n],\ \forall\, v_1, \ldots v_n \in V.$$

1.1.4 Semi-représentations d'une algèbre de Leibniz.— Une "*semi-représentation*" d'une algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$ est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module M muni d'une action $[-,-] : M \times \mathcal{L} \longrightarrow M$ satisfaisant la relation

$$[m,[x,y]] = [[m,x],y] - [[m,y],x]$$

pour tous $x, y \in \mathcal{L}$ et $m \in M$. C'est équivalent à la donnée d'une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_{Lie}$ dans le sens classique. Par exemple toute algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$ est une semi-représentation sur elle-même par l'"*action adjointe*", i.e. le crochet de définition. Dans [L-P], on trouvera des notions de (co)représentations d'une algèbre de Leibniz avec une notion convenable d'"*enveloppe universelle*", (voir aussi 1.4.1).

1.1.5 Homologie d'une algèbre de Leibniz.— Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Leibniz et soit M une semi-représentation de $\mathcal{L}$. On a un complexe bien défini $(\mathrm{T}^*(\mathcal{L},M) := M \otimes \mathcal{L}^{\otimes *},\ d)$ où la différentielle $d : \mathrm{T}^n(\mathcal{L},M) \longrightarrow \mathrm{T}^{n-1}(\mathcal{L},M)$ est donnée par la formule (voir [Lo1])

$$d(x_0,\cdots,x_n) := \sum_{0\leq i<j\leq n} (-1)^{j+1}(x_0,\cdots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1},\cdots,\widehat{x_j},\cdots,x_n)$$

pour tous $x_0 \in M$ et $x_1,\cdots,x_n \in \mathcal{L}$; ici on adopte la notation $(x_0,\cdots,x_n) := x_0 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathrm{T}^n(\mathcal{L},M)$, $\widehat{x_j}$ signifiant l'omission de x_j. L'homologie de ce complexe est notée $\mathrm{HL}_*(\mathcal{L},M)$, et simplement $\mathrm{HL}_*(\mathcal{L})$ si $M = \mathbb{K}$ est muni de l'action triviale de $\mathcal{L}$. On vérifie aisément que

$$\mathrm{HL}_0(\mathcal{L}) \cong \mathbb{K}, \quad \mathrm{HL}_1(\mathcal{L}) \cong \mathcal{L}_{ab} := \mathcal{L}/[\mathcal{L},\mathcal{L}],$$
$$\mathrm{HL}_0(\mathcal{L},M) \cong M_{\mathcal{L}} := M/[M,\mathcal{L}],$$
$$\mathrm{HL}_*(\mathcal{L},\mathcal{L}) \cong \mathrm{HL}_{*+1}(\mathcal{L}).$$

On observera que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors le complexe $(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g},M),d)$ n'est autre qu'un relèvement du complexe classique de Chevalley-Eilenberg $(M\otimes\Lambda^*(\mathfrak{g}),d)$ définissant l'homologie $\mathrm{H}_*(\mathfrak{g},M)$ des algèbres de Lie (voir [C-E]). On a donc en homologie des morphismes canoniques $can_* : \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g},M) \longrightarrow \mathrm{H}_*(\mathfrak{g},M)$ qui sont un isomorphisme en degré 0, et un épimorphisme en degré 1. Plus généralement, J.-L. Loday et T. Pirashvili définissent une théorie de (co)homologie des algèbres de Leibniz à coefficients dans des (co)représentations, et en donnent une interprétation en termes de foncteurs dérivés Tor-Ext (voir [L-P]).

1.2 Extensions centrales universelles d'une algèbre de Leibniz.— Une suite exacte d'algèbres de Leibniz

$$(\mathcal{E}) \qquad 0 \to \mathcal{H} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{L} \to 0$$

est appelée "*extension de $\mathcal{L}$ par $\mathcal{H}$*". Le morphisme i est un isomorphisme d'algèbres de Leibniz de $\mathcal{H}$ sur le *noyau* $\ker(p)$ de l'extension. Ainsi nous nous contenterons d'écrire $p : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$, l'extension $(\mathcal{E})$, et par abus de langage, nous dirons que l'algèbre de Leibniz $\mathcal{E}$ est une extension de $\mathcal{L}$.

Une extension $p : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ est dite "*scindée*" ou "*inessentielle*" dans la catégorie (**Leib**) s'il existe un morphisme d'algèbres de Leibniz $s : \mathcal{L} \to \mathcal{E}$ tel que $ps = \mathrm{id}_{\mathcal{L}}$; l'application s est appelée une "*section*" de p.

Une "*extension centrale*" d'une algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$ est une extension $p : \mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ dont le noyau vérifie $[\ker(p),\mathcal{C}] = [\mathcal{C},\ker(p)] = 0$.

Une extension centrale $\alpha : \mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ est dite "*universelle*" si, pour toute extension centrale $p : \mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$, il existe un unique morphisme d'algèbres de Leibniz $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ tel que $p\phi = \alpha$. Il est clair qu'une extension centrale universelle, lorsqu'elle existe, est unique (à un unique isomorphisme près).

En adaptant les constructions de H. Garland ([Gar]) qui a traité le cas des algèbres de Lie, nous obtenons la caractérisation suivante (voir [3] ou [8]) :

Théorème 1.2.1 (Gnedbaye-Loday-Pirashvili). *i) Une extension centrale d'algèbres de Leibniz $\alpha : \mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ est universelle si, et seulement si, l'algèbre de Leibniz $\mathcal{U}$ est parfaite et toute extension centrale de $\mathcal{U}$ est scindée dans la catégorie* (**Leib**).

ii) Une algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$ (libre en tant que $\mathbb{K}$-module) admet une extension centrale universelle si, et seulement si, elle est parfaite. De plus, le noyau de l'extension centrale universelle est canoniquement isomorphe au module $\mathrm{HL}_2(\mathcal{L})$.

1.2.2 Remarques.— On peut interpréter homologiquement ces critères par les égalités

$$\mathrm{HL}_1(\mathcal{L}) = \mathrm{HL}_1(\mathcal{U}) = \mathrm{HL}_2(\mathcal{U}) = 0.$$

En fait, Loday-Pirashvili ont montré que l'on a une bijection canonique $\mathrm{HL}^2(\mathcal{L}, M) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}(\mathcal{L}, M)$ avec les classes d'équivalence d'extensions "*abéliennes*" (c'est-à-dire que M est une algèbre de Leibniz de crochet identiquement nul) de $\mathcal{L}$ par M. En prenant $M = \mathrm{HL}_2(\mathcal{L})$ avec une action triviale de $\mathcal{L}$, on obtient $\mathrm{HL}^2(\mathcal{L}, \mathrm{HL}_2(\mathcal{L})) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}(\mathcal{L}, \mathrm{HL}_2(\mathcal{L}))$. Or, par le "*Théorème des coefficients universels*", on a un isomorphisme

$$\mathrm{HL}^2(\mathcal{L}, \mathrm{HL}_2(\mathcal{L})) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{HL}_2(\mathcal{L}), \mathrm{HL}_2(\mathcal{L})) = \mathrm{End}(\mathrm{HL}_2(\mathcal{L})).$$

L'extension "*centrale*" universelle correspond à l'élément $\mathrm{id}_{\mathrm{HL}_2(\mathcal{L})} \in \mathrm{End}(\mathrm{HL}_2(\mathcal{L}))$. Une présentation linéaire de cet espace sera donnée en 1.4.14 (voir aussi 1.4.22) comme carré de $\mathcal{L}$ pour un certain produit tensoriel non abélien.

1.2.3 Cas des algèbres de Lie.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie parfaite et libre en tant que $\mathbb{K}$-module. Elle admet donc une extension centrale universelle $\alpha : \mathfrak{U} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ dans la catégorie (**Leib**) des algèbres de Leibniz, et une extension centrale universelle $\alpha' : \mathfrak{u} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ dans la catégorie (**Lie**) des algèbres de Lie. Je montre que

Proposition 1.2.4. *Si le $\mathbb{K}$-module $\mathfrak{u}$ est libre (e.g., lorsque $\mathbb{K}$ est un corps commutatif), alors l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{U}$ est l'extension centrale universelle de l'algèbre de Lie parfaite $\mathfrak{u}$ dans la catégorie* (**Leib**). *De plus on a un isomorphisme $\mathfrak{u} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_{Lie}$.*

On en déduit un diagramme commutatif aux lignes et aux colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & \ker(can_2) & \longrightarrow & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{u}) & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathfrak{U} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 & & (\mathbf{Leib}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}_2(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathfrak{u} \cong \mathfrak{U}_{Lie} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 & & (\mathbf{Lie}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & (\mathbf{Leib}) & & & & & &
\end{array}$$

qui fournit des isomorphismes

$$\ker(\mathfrak{U} \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_{Lie} \cong \mathfrak{u}) \cong \mathrm{HL}_2(\mathfrak{U}_{Lie}) \cong \mathrm{HL}_2(\mathfrak{u}) \cong \ker(can_2 : \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_2(\mathfrak{g})).$$

1.2.5 Troisièmes modules d'homologie.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie parfaite sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. En utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre et sa ⟪version Leibniz⟫ rappelée ci-après (cf. 1.3, voir aussi [H-S] et [5]), on obtient les résultats suivants:

Théorème 1.2.6. *Soit $\mathfrak{U}$ (resp. $\mathfrak{u}$) l'extension centrale universelle de l'algèbre de Lie parfaite $\mathfrak{g}$ dans la catégorie* (**Leib**) *(resp.* (**Lie**)*). Alors on a un diagramme commutatif (non naturel)*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{HL}_3(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g})^{\otimes 2} & \oplus & \mathrm{HL}_3(\mathfrak{g}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
\mathrm{HL}_3(\mathfrak{u}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g})^{\otimes 2}/K^{\otimes 2} & \oplus & \mathrm{HL}_3(\mathfrak{g}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}_3(\mathfrak{u}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{S}^2(\mathrm{H}_2(\mathfrak{g})) & \oplus & \mathrm{H}_3(\mathfrak{g})
\end{array}$$

où $K := \ker(\mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_2(\mathfrak{g})) \cong \ker(\mathfrak{U} \twoheadrightarrow \mathfrak{u} \cong \mathfrak{U}_{Lie}) \cong \mathrm{HL}_2(\mathfrak{u})$ et S^2 est le foncteur puissance symétrique.

La commutativité (non évidente) est une ⟪chasse aux diagrammes⟫ car on a un début de ⟪petits complexes⟫

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & ??? & \longrightarrow & \mathrm{S}^2(\mathfrak{l}) & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \\
\longrightarrow & \mathfrak{l}^{\otimes 3} & \longrightarrow & \mathfrak{l}^{\otimes 2} & \longrightarrow & \mathfrak{l} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \| \\
\longrightarrow & \Lambda^3(\mathfrak{l}) & \longrightarrow & \Lambda^2(\mathfrak{l}) & \longrightarrow & \mathfrak{l}\,,
\end{array}$$

qui fournit en homologie la suite exacte

$$(\dagger) \qquad \mathrm{HL}_3(\mathfrak{l}) \to \mathrm{H}_3(\mathfrak{l}) \to \mathrm{S}^2(\mathfrak{l})/\sim \to \mathrm{HL}_2(\mathfrak{l}) \to \mathrm{H}_2(\mathfrak{l}) \to 0.$$

Ici "$\sim$" représente les relations engendrées dans $\mathrm{S}^2(\mathfrak{l})$ par les éléments de la forme

$$([x,y],z) - ([x,z],y) - (x,[y,z]), \quad \forall\, x,y,z \in \mathfrak{l}.$$

Appliquée aux algèbres de Lie $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{g}$, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{HL}_3(\mathfrak{u}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_3(\mathfrak{u}) & \longrightarrow & \mathrm{S}^2(\mathfrak{u})/\sim & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathrm{HL}_3(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_3(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{S}^2(\mathfrak{g})/\sim & \longrightarrow & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_2(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Ceci permet de voir que $\mathrm{HL}_3(\mathfrak{g}) \cap K^{\otimes 2} = 0$, le reste résultant de calculs peu pertinents.

1.2.7 Les algèbres de Steinberg.— Rappelons que pour toute algèbre associative A, on note $\mathfrak{sl}_n(A)$ l'algèbre de Lie des matrices carrées de taille n à coefficients dans A et de trace nulle dans l'*abélianisé* $A_{ab} := A/[A,A]$ (où $[A,A]$ désigne le sous-module de A engendré par les éléments de la forme $[a,b] := ab - ba$, a et b parcourant A). L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$ est parfaite pour $n \geq 3$ et admet donc une extension centrale universelle $\mathfrak{st}_n(A)$ (resp. $\mathfrak{stl}_n(A)$) dans la catégorie (**Lie**) (resp. (**Leib**)). Il est clair que $\mathfrak{st}_n(A) \cong \mathfrak{stl}_n(A)_{Lie}$.

Par ailleurs Kassel-Loday généralisent un résultat de S. Bloch (où l'algèbre A est supposée commutative) et obtiennent un isomorphisme (cf. [K-L] et [Bl])

$$\mathrm{H}_2(\mathfrak{sl}_n(A)) \cong \mathrm{HC}_1(A), \quad \forall n \geq 5$$

où $\mathrm{HC}_1(A)$ désigne l'homologie cyclique de A. Loday-Pirashvili obtiennent un isomorphisme analogue (cf. [L-P] et [Lo1])

$$\mathrm{HL}_2(\mathfrak{sl}_n(A)) \cong \mathrm{HH}_1(A), \quad \forall n \geq 5$$

où $\mathrm{HH}_1(A)$ désigne l'homologie de Hochschild de A. Comme application du Théoreme 1.2.6, remarquons que l'isomorphisme de Loday-Quillen [L-Q] (resp. Cuvier-Loday [Lo1])

$$\mathrm{H}_*(\mathfrak{gl}(A)) \cong \Lambda(\mathrm{HC}_{*-1}(A)) \quad (\text{resp. } \mathrm{HL}_*(\mathfrak{gl}(A)) \cong \mathrm{T}(\mathrm{HH}_{*-1}(A))), \tag{1.2.8}$$

où l'algèbre A est commutative et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, permet de calculer les modules

$$\mathrm{H}_3(\mathfrak{sl}(A)) \cong \mathrm{HC}_2(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{HL}_3(\mathfrak{sl}(A)) \cong \mathrm{HH}_2(A).$$

On réécrit le diagramme précédent avec $K := \ker(\mathrm{HH}_1(A) \longrightarrow \mathrm{HC}_1(A)) \cong \mathrm{HL}_2(\mathfrak{st}(A))$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{HL}_3(\mathfrak{stl}(A)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{HH}_1(A)^{\otimes 2} & \oplus & \mathrm{HH}_2(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
\mathrm{HL}_3(\mathfrak{st}(A)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{HH}_1(A)^{\otimes 2}/K^{\otimes 2} & \oplus & \mathrm{HH}_2(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}_3(\mathfrak{st}(A)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{S}^2(\mathrm{HC}_1(A)) & \oplus & \mathrm{HC}_2(A).
\end{array}$$

1.3 Suite spectrale d'une extension d'algèbres de Leibniz.— Nous rappelons ici la construction d'une «version Leibniz» de la suite spectrale de Hochschild-Serre, utilisée ci-dessus dans la détermination des troisièmes modules d'homologie des extensions centrales universelles (cf. 1.2.5). Nous supposons ici que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Leibniz et soit M (resp. $\mathcal{H}$) une représentation (resp. un idéal bilatère) de $\mathcal{L}$. La famille (F_*^p) définie par

$$F_n^p := \begin{cases} M \otimes \mathcal{H}^{\otimes (n-p)} \otimes \mathcal{L}^{\otimes p}, & \text{si } n \geq p \\ M \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}, & \text{si } n \leq p, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

est une filtration *bornée* du complexe $(\mathrm{T}^*(\mathcal{L}, M), d)$. Elle détermine donc une suite spectrale $(E^r)_{r\geq 1}$ qui converge vers l'homologie de Leibniz $\mathrm{HL}_*(\mathcal{L}, M)$. Cette suite spectrale est caractérisée par ([5])

Théorème 1.3.2. *i) Pour tout idéal à droite $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$, on a les isomorphismes*

$$E^1_{0,q} \cong \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M), \quad E^1_{p,q} \cong \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M) \otimes (\mathcal{L}/\mathcal{H}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes (p-1)} \quad \forall\, p > 0,\ \forall\, q \geq 0.$$

ii) Pour tout idéal bilatère $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$ et tout entier $q \geq 0$, on a les isomorphismes

$$E^2_{0,q} \cong \mathrm{HL}_0(\mathcal{L}/\mathcal{H}, \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M)), \quad E^2_{1,q} \cong \mathrm{HL}_1(\mathcal{L}/\mathcal{H}, \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M)),$$

et une longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{HL}_{p-1}(\mathcal{L}, \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M) \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{HL}_p(\mathcal{L}, \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M)) \longrightarrow E^2_{p,q} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{HL}_{p-2}(\mathcal{L}, \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M) \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{HL}_1(\mathcal{L}, \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M)) \longrightarrow E^2_{1,q} \longrightarrow 0.$$

iii) Si l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}/\mathcal{H}$ opère trivialement sur $\mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M)$, alors pour tout entier $p \geq 2$, on a l'isomorphisme $E^2_{p,q} \cong \mathrm{HL}_q(\mathcal{H}, M) \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathcal{L}, \mathcal{L}/\mathcal{H})$.

Nous obtenons ainsi un procédé récursif de calcul de groupes d'homologie, un peu plus difficile à manipuler que sa version originale. Et cette complexité s'explique par la présence dans la "*Formule du type Künneth*" pour l'homologie de Leibniz d'un "*produit libre*" à la place du produit tensoriel classique (cf. [Lo3]).

Exemples 1.3.3.— Nous avons déjà vu une utilisation de cette suite spectrale pour le calcul des modules d'homologies des extensions centrales universelles d'une algèbre de Lie parfaite (cf. Théorème 1.2.6). Par ailleurs, appliquée à l'extension (définissant l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$ où $A_{ab} := A/[A, A]$)

$$0 \longrightarrow \mathfrak{sl}_n(A) \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(A) \longrightarrow A_{ab} \longrightarrow 0$$

cette suite spectrale spécialise les isomorphismes globaux (1.2.8) en l'isomorphisme

$$\mathrm{HL}_2(\mathfrak{gl}_n(A)) \cong \mathrm{HH}_1(A) \;\oplus\; (A_{ab})^{\otimes 2}, \quad \forall n \geq 3$$

analogue à celui de Kassel-Loday ([K-L]) pour l'homologie de Chevalley-Eilenberg

$$\mathrm{H}_2(\mathfrak{gl}_n(A)) \cong \mathrm{HC}_1(A) \;\oplus\; \Lambda^2(A_{ab}), \quad \forall n \geq 3.$$

1.4 Produits tensoriels non abéliens d'algèbres de Leibniz.— Nous introduisons la notion d'*algèbres de Leibniz (pré)croisées* comme une généralisation simultanée des notions de représentation et d'idéal bilatère. Nous construisons aussi l'algèbre de Leibniz des *bidérivations*, et nous établissons son adjoint à gauche en termes de *produit tensoriel non abélien.*

1.4.1 Algèbres de Leibniz (pré)croisées.— Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{M}$ des algèbres de Leibniz. Une "*action de Leibniz*" de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{M}$ est la donnée de deux opérations

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},\ (g, m) \mapsto {}^g m \quad \text{et} \quad \mathfrak{M} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{M},\ (m, g) \mapsto m^g$$

satisfaisant les axiomes

$$m^{[g,g']} \overset{i)}{=} (m^g)^{g'} - (m^{g'})^g,\ {}^{[g,g']}m \overset{ii)}{=} ({}^g m)^{g'} - {}^g(m^{g'}),\ {}^g({}^{g'}m) \overset{iii)}{=} -{}^g(m^{g'}),$$
$${}^g[m, m'] \overset{iv)}{=} [{}^g m, m'] - [{}^g m', m],\ [m, m']^g \overset{v)}{=} [m^g, m'] + [m, m'^g],\ [m, {}^g m'] \overset{vi)}{=} -[m, m'^g]$$

pour tous $m, m' \in \mathfrak{M}$ et $g, g' \in \mathfrak{g}$. On dit alors que $\mathfrak{M}$ est une "$\mathfrak{g}$-*algèbre de Leibniz*".

Par exemple tout idéal bilatère d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz. D'autre part, tout $\mathbb{K}$-module M muni de deux opérations d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ satisfaisant les axiomes i), ii) et iii) est appelé "*représentation de* $\mathfrak{g}$" (voir [L-P]). Ainsi les représentations d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ sont les $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz abéliennes.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. Une "$\mathfrak{g}$-*algèbre de Leibniz pré-croisée*" est la donnée d'une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz $\mathfrak{M}$ munie d'un morphisme d'algèbres de Leibniz $\mu : \mathfrak{M} \to \mathfrak{g}$ tel que

$$\mu({}^g m) = [g, \mu(m)] \quad \text{et} \quad \mu(m^g) = [\mu(m), g] \tag{1.4.2}$$

pour tous $g \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathfrak{M}$. Si de plus les relations

$$(1.4.3) \qquad {}^{\mu(m)}m' = [m, m'] \quad \text{et} \quad m^{\mu(m')} = [m, m'], \ \forall\, m, m' \in \mathfrak{M},$$

sont vérifiées, alors le couple $(\mathfrak{M}, \mu)$ est dit "$\mathfrak{g}$-*algèbre de Leibniz croisée*". Par exemple, tout idéal bilatère $\mathfrak{h}$ d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée pour l'inclusion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ (e.g., $(\mathfrak{g}, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ en est une). Par ailleurs, si $\alpha : \mathfrak{c} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$ est une extension centrale d'algèbres de Leibniz (cf. 1.2), alors les opérations définies par

$$(1.4.4) \qquad {}^{g}c := [\alpha^{-1}(g), c] \quad \text{et} \quad c^{g} := [c, \alpha^{-1}(g)]$$

où $\alpha^{-1}(g)$ est un antécédent quelconque de g dans $\mathfrak{c}$, confèrent au couple $(\mathfrak{c}, \alpha)$ une structure de $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée.

Un morphisme de $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz (pré)croisées de $(\mathfrak{M}, \mu)$ dans $(\mathfrak{N}, \nu)$ est la donnée d'un morphisme d'algèbres de Leibniz $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ tel que

$$(1.4.5) \qquad f({}^{g}m) = {}^{g}(f(m)), \ f(m^{g}) = (f(m))^{g} \ \text{et} \ \mu = \nu \circ f$$

pour tous $m \in \mathfrak{M}$ et $g \in \mathfrak{g}$. Nous désignons par (**pc-Leib**$(\mathfrak{g})$) (resp. (**c-Leib**$(\mathfrak{g})$)) la catégorie des $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz pré-croisées (resp. croisées). On observera qu'une suite exacte de $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz n'est autre qu'une suite exacte d'algèbres de Leibniz.

1.4.6 Bidérivations d'algèbres de Leibniz pré-croisées.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et soient $(\mathfrak{M}, \mu)$ et $(\mathfrak{N}, \nu)$ des $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz pré-croisées. Une "*dérivation*" de $(\mathfrak{M}, \mu)$ dans $(\mathfrak{N}, \nu)$ est la donnée d'une application linéaire $d : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ telle que

$$(1.4.7) \qquad d([m, m']) = d(m)^{\mu(m')} + {}^{\mu(m)}d(m'), \ \forall\, m, m' \in \mathfrak{M}.$$

Une "*anti-dérivation*" de $(\mathfrak{M}, \mu)$ dans $(\mathfrak{N}, \nu)$ est la donnée d'une application linéaire $D : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ telle que

$$(1.4.8) \qquad D([m, m']) = D(m)^{\mu(m')} - D(m')^{\mu(m)}, \ \forall\, m, m' \in \mathfrak{M}.$$

Par exemple, si $(\mathfrak{N}, \nu)$ est une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée et si $n \in \mathfrak{N}$, alors l'application

$$\mathrm{ad}_n : \mathfrak{g} \to \mathfrak{N}, \ g \mapsto {}^{g}n \quad (\text{resp. } \mathrm{Ad}_n : \mathfrak{g} \to \mathfrak{N}, \ g \mapsto -n^{g})$$

est une dérivation (resp. anti-dérivation) de $(\mathfrak{g}, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ dans $(\mathfrak{N}, \nu)$.

Si $(\mathfrak{M}, \mu)$ et $(\mathfrak{N}, \nu)$ sont des $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz pré-croisées, on note $\mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ le $\mathbb{K}$-module librement engendré par les triples (d, D, g), où d (resp. D) est une dérivation (resp. anti-dérivation) de $(\mathfrak{M}, \mu)$ dans $(\mathfrak{N}, \nu)$ et g est un élément de $\mathfrak{g}$ tels que

$$(1.4.9) \qquad \nu(d(m)) = \mu(m^{g}), \ \nu(D(m)) = -\mu({}^{g}m), \ {}^{h}d(m) = {}^{h}D(m) \ \text{et} \ D(m^{h}) = -D({}^{h}m)$$

pour tous $h \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathfrak{M}$. On vérifie immédiatement que

Proposition 1.4.10. *Soit $(\mathfrak{M}, \mu)$ une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz pré-croisée et soit $(\mathfrak{N}, \nu)$ une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée. Alors le $\mathbb{K}$-module* $\mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *est une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz pré-croisée pour le crochet défini par $[(d, D, g), (d', D', g')] := (\delta, \Delta, [g, g'])$, les opérations étant données par ${}^{h}(d, D, g) := ({}^{h}d, {}^{h}D, [h, g])$ et $(d, D, g)^{h} := (d^{h}, D^{h}, [g, h])$, et pour le morphisme $\rho :$* $\mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \to \mathfrak{g}$, *$(d, D, g) \mapsto g$, où l'on a posé*

$$\delta(m) := d'(m^{g}) - d(m^{g'}), \ \Delta(m) := -D(m^{g'}) - d'({}^{g}m),$$
$$({}^{h}d)(m) = d(m^{h}) - d(m)^{h}, \ ({}^{h}D)(m) := {}^{h}d(m) - d({}^{h}m),$$
$$(d^{h})(m) := d(m)^{h} - d(m^{h}), \ (D^{h})(m) := D(m)^{h} - D(m^{h}), \ \forall\, m \in \mathfrak{M}, \ \forall\, h \in \mathfrak{g}.$$

1.4.11 Produit tensoriel non abélien d'algèbres de Leibniz.— Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des algèbres de Leibniz avec des actions de Leibniz mutuelles l'une sur l'autre. Un "*accouplement de Leibniz*" de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ est la donnée d'un triple $(\mathfrak{P}, h_1, h_2)$ où $\mathfrak{P}$ est une algèbre de Leibniz et $h_1 : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathfrak{P}$ (resp. $h_2 : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{P}$) est une application bilinéaire telle que l'on ait pour tous $m, m' \in \mathfrak{M}$ et $n, n' \in \mathfrak{N}$:

$$\begin{aligned}
h_1(m, [n, n']) &= h_1(m^n, n') - h_1(m^{n'}, n),\\
h_2(n, [m, m']) &= h_2(n^m, m') - h_2(n^{m'}, m),\\
h_1([m, m'], n) &= h_2({}^{m}n, m') - h_1(m, n^{m'}),\\
h_2([n, n'], m) &= h_1({}^{n}m, n') - h_2(n, m^{n'}),\\
h_1(m, {}^{m'}n) = -h_1(m, n^{m'}),&\ \ h_2(n, {}^{n'}m) = -h_2(n, m^{n'}),\\
h_1(m^n, {}^{m'}n') &= [h_1(m, n), h_1(m', n')] = h_2({}^{m}n, m'^{n'}),\\
h_1({}^{n}m, n'^{m'}) &= [h_2(n, m), h_2(n', m')] = h_2(n^m, {}^{n'}m'),\\
h_1(m^n, n'^{m'}) &= [h_1(m, n), h_2(n', m')] = h_2({}^{m}n, {}^{n'}m'),\\
h_1({}^{n}m, {}^{m'}n') &= [h_2(n, m), h_1(m', n')] = h_2(n^m, m'^{n'}).
\end{aligned}$$

Par exemple, si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont des idéaux bilatères d'une même algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, alors en posant $\mathfrak{P} := \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ et en définissant $h_1(m, n) := [m, n]$ et $h_2(n, m) := [n, m]$, on obtient un accouplement de Leibniz $(\mathfrak{P}, h_1, h_2)$ de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$.

Un accouplement de Leibniz $(\mathfrak{P}, h_1, h_2)$ de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ est dit "*universel*" si, pour tout autre accouplement de Leibniz $(\mathfrak{P}', h_1', h_2')$ de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$, il existe un unique morphisme d'algèbres de Leibniz $\theta : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ tel que $\theta h_1 = h_1'$ et $\theta h_2 = h_2'$. Il est clair qu'un accouplement de Leibniz universel, quand il existe, est unique (à un unique isomorphisme près). Le théorème suivant propose la construction d'un accouplement de Leibniz universel en termes de "*produit tensoriel non abélien*".

Théorème 1.4.12. *Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des algèbres de Leibniz avec des actions de Leibniz mutuelles l'une sur l'autre. Désignons par V le $\mathbb{K}$-module librement engendré par les symboles $m*n$ et $n*m$ où $m \in \mathfrak{M}$ et $n \in \mathfrak{N}$. Soit $\mathfrak{M}\star\mathfrak{N}$ l'algèbre de Leibniz quotient de l'algèbre de Leibniz libre $\mathcal{F}(V)$ par l'idéal bilatère défini par les relations*

i) $\lambda(m * n) = \lambda m * n = m * \lambda n,\ \ \lambda(n * m) = \lambda n * m = n * \lambda m,$

ii) $(m + m') * n = m * n + m' * n,\ \ (n + n') * m = n * m + n' * m,$
$m * (n + n') = m * n + m * n',\ \ n * (m + m') = n * m + n * m',$

iii) $m * [n, n'] = m^n * n' - m^{n'} * n,\ \ n * [m, m'] = n^m * m' - n^{m'} * m,$
$[m, m'] * n = {}^{m}n * m' - m * n^{m'},\ \ [n, n'] * m = {}^{n}m * n' - n * m^{n'},$

iv) $m * {}^{m'}n = -m * n^{m'},\ \ n * {}^{n'}m = -n * m^{n'},$

v) $m^n * {}^{m'}n' = [m * n, m' * n'] = {}^{m}n * m'^{n'},$
$m^n * n'^{m'} = [m * n, n' * m'] = {}^{m}n * {}^{n'}m',$
${}^{n}m * n'^{m'} = [n * m, n' * m'] = n^m * {}^{n'}m',$
${}^{n}m * {}^{m'}n' = [n * m, m' * n'] = n^m * m'^{n'}$

pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $m, m' \in \mathfrak{M}$, $n, n' \in \mathfrak{N}$. Considérons les applications linéaires

$$h_1 : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathfrak{M} \star \mathfrak{N},\ \ h_1(m, n) := m * n \quad \text{et} \quad h_2 : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \star \mathfrak{N},\ \ h_2(n, m) := n * m.$$

Alors le triple $(\mathfrak{M}\star\mathfrak{N}, h_1, h_2)$ est l'accouplement de Leibniz universel de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$; on l'appelle "produit tensoriel non abélien" de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$.

1.4.13 Exemples.— Si les actions de Leibniz mutuelles sont triviales, alors l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{M} \star \mathfrak{N}$ est abélienne et, en notant $\mathfrak{M}_{ab} := \mathfrak{M}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ et $\mathfrak{N}_{ab} := \mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$, on a

$$\mathfrak{M} \star \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}_{ab} \otimes \mathfrak{N}_{ab}\ \oplus\ \mathfrak{N}_{ab} \otimes \mathfrak{M}_{ab}.$$

Examinons à présent le cas où $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{g}$, les actions mutuelles coïncidant avec le crochet de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$. Le $\mathbb{K}$-module V du Théorème 1.4.12 s'identifie donc à deux copies de $\mathfrak{g} * \mathfrak{g}$, alors que les relations dans l'algèbre de Leibniz libre $\mathcal{F}(V)$:

$$\begin{gathered}\text{i) et ii) expriment la } \mathbb{K}\text{-bilinéarité des symboles } x * y,\\ \text{iii) se traduisent par } x * [y,z] = [x,y] * z - [x,z] * y,\\ \text{iv) deviennent ici } x * [y,z] = -x * [z,y],\\ \text{v) s'interprètent par } [x * y, z * t] = [x,y] * [z,t].\end{gathered}$$

Rappelons que le $\mathbb{K}$-module sous-jacent à $\mathcal{F}(V)$ est $\bar{\mathrm{T}}(V) := \oplus_{n\geq 1} V^{\otimes n}$ et que l'on a

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n = [[[v_1, v_2], v_3] \ldots v_n], \quad \forall\ v_i \in V.$$

Si l'on pose $v_i := x_i * y_i \in V$, puis $z_i := [x_i, y_i] \in \mathfrak{g}$, alors grâce aux relations v), on a

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n &= [[[x_1 * y_1, x_2 * y_2], v_3] \ldots v_n] = [[[x_1, y_1] * [x_2, y_2], v_3] \ldots v_n] \\ &= [[[z_1 * z_2, x_3 * y_3], v_4] \ldots v_n] = [[[[z_1, z_2], z_3], v_4] \ldots], v_n] = \cdots \\ \cdots &= [[[z_1, z_2], z_3] \ldots z_n]. \end{aligned}$$

On en déduit donc une application bien définie

$$\mathcal{F}(V)[\text{modulo v})] \longrightarrow V, \quad v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto [[[[z_1, z_2], z_3] \ldots z_n]$$

qui est surjective. Il est alors clair que le carré tensoriel $\mathfrak{g} \star \mathfrak{g}$ s'identifie à la somme directe

$$\mathfrak{g} \star \mathfrak{g} \cong (\ \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}\ \oplus\ \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}\ )\ [\text{modulo} \begin{cases} x \otimes [y,z] = [x,y] \otimes z - [x,z] \otimes y \\ x \otimes [y,z] = -x \otimes [z,y] \end{cases}], \tag{1.4.14}$$

le crochet de Leibniz devenant $[x \otimes y, z \otimes t] = [x,y] \otimes [z,t]$. Et l'on retrouve la caractérisation précédente lorsque $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{g}$ est une algèbre de Leibniz abélienne (cf. 1.4.13).

Supposons à présent que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ soient des $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz pré-croisées. Alors on peut définir une action de Leibniz de $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{N}$) sur $\mathfrak{N}$ (resp. $\mathfrak{M}$) par

$${}^{m}n := {}^{\mu(m)}n \quad \text{et} \quad n^m := n^{\mu(m)} \quad (\text{resp. } {}^{n}m := {}^{\nu(n)}m \quad \text{et} \quad m^n := m^{\nu(n)}). \tag{1.4.15}$$

Ainsi on vérifie immédiatement que (voir [2])

Proposition 1.4.16. *Soient $(\mathfrak{M}, \mu)$ et $(\mathfrak{N}, \nu)$ des $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz pré-croisées. Les opérations données par*

$$\begin{cases} {}^{g}(m * n) := {}^{g}m * n - {}^{g}n * m, \ {}^{g}(n * m) := {}^{g}n * m - {}^{g}m * n, \\ (m * n)^g := m^g * n + m * n^g, \ (n * m)^g := n^g * m + n * m^g, \end{cases}$$

confèrent au produit tensoriel $\mathfrak{M} \star \mathfrak{N}$ (pour les actions de Leibniz mutuelles (1.4.15)*) une structure de $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz pré-croisée pour le morphisme $\eta : \mathfrak{M} \star \mathfrak{N} \to \mathfrak{g}$ défini sur les générateurs par*

$$\eta(m * n) := [\mu(m), \nu(n)] \quad \textit{et} \quad \eta(n * m) := [\nu(n), \mu(m)]. \tag{1.4.17}$$

De plus, si l'une des $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz $(\mathfrak{M}, \mu)$ ou $(\mathfrak{N}, \nu)$ est croisée, il en est de même pour $\mathfrak{M} \star \mathfrak{N}$.

On observera que si $(\mathfrak{N}, \nu)$ est une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée, alors le foncteur $F(-) := - \star \mathfrak{N}$ est exact à droite de la catégorie (**pc-Leib**$(\mathfrak{g})$) vers la catégorie (**c-Leib**$(\mathfrak{g})$).

1.4.18 Théorème d'adjonction.— Nous mettons en évidence le fait que, pour toute $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée $(\mathfrak{N},\nu)$, le foncteur $-\star\mathfrak{N}$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{N},-)$. Pour des raisons techniques, nous supposons que les relations

$$iv)\qquad m * {}^{\mu(m')}n = -m * n^{\mu(m')},\ n * {}^{\nu(n')}m = -n * m^{\nu(n')}$$

définissant le produit tensoriel $\mathfrak{M}\star\mathfrak{N}$ sont étendues aux relations

$$iv)'\qquad m * {}^{g}n = -m * n^{g},\ n * {}^{g}m = -n * m^{g}$$

pour tous $m, m' \in \mathfrak{M}$, $n, n' \in \mathfrak{N}$ et $g \in \mathfrak{g}$. Afin d'éviter toute confusion, nous notons ce dernier produit tensoriel $\mathfrak{M}\star_{\mathfrak{g}}\mathfrak{N}$. Par exemple, les $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz $\mathfrak{M}\star\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}\star_{\mathfrak{g}}\mathfrak{N}$ coïncident lorsque les morphismes μ et ν sont surjectifs.

Théorème 1.4.19. *Soit $(\mathfrak{N},\nu)$ (resp. $(\mathfrak{M},\mu)$) une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz (pré)croisée. Alors on a un isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules*

$$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{pc\text{-}Leib}(\mathfrak{g}))}(\mathfrak{M}, \mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{N},\mathfrak{P})) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{c\text{-}Leib}(\mathfrak{g}))}(\mathfrak{M}\star_{\mathfrak{g}}\mathfrak{N},\mathfrak{P}).$$

En fait, dans un sens, si $\phi \in \mathrm{Hom}_{(\mathbf{pc\text{-}Leib}(\mathfrak{g}))}(\mathfrak{M}, \mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{N},\mathfrak{P}))$ et $(d_m, D_m, g_m) := \phi(m)$ pour $m\in\mathfrak{M}$, alors on lui associe l'application $\Phi : \mathfrak{M}\star_{\mathfrak{g}}\mathfrak{N} \to \mathfrak{P}$ définie sur les générateurs par

$$\Phi(m*n) := -D_m(n) \quad \text{et} \quad \Phi(n*m) := d_m(n),\ \forall\, m\in\mathfrak{M}, n\in\mathfrak{N}.$$

Dans l'autre sens, si $\sigma \in \mathrm{Hom}_{(\mathbf{c\text{-}Leib}(\mathfrak{g}))}(\mathfrak{M}\star_{\mathfrak{g}}\mathfrak{N},\mathfrak{P})$, on lui associe l'application $\Sigma : \mathfrak{M} \to \mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{N},\mathfrak{P})$ définie par $\Sigma(m) := (\delta_m, \Delta_m, \mu(m))$, $m\in\mathfrak{M}$, où

$$\delta_m(n) := \sigma(n*m) \quad \text{et} \quad \Delta_m(n) := -\sigma(m*n),\ \forall\, n\in\mathfrak{N}.$$

1.4.20 Cohomologie non abélienne d'algèbres de Leibniz.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et soit $(\mathfrak{M},\mu)$ une $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée. Etant donné un élément $m\in\mathfrak{M}$, on désigne par d_m (resp. D_m) la dérivation (resp. l'anti-dérivation) $g\mapsto {}^{g}m$ (resp. $g\mapsto -m^{g}$) de $(\mathfrak{g}, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})$ dans $(\mathfrak{M},\mu)$, et par $\overline{\mu(m)} := \mu(m) \bmod Z(\mathfrak{g})$, où $Z(\mathfrak{g}) := \{x\in\mathfrak{g} : [x,y] = [y,x] = 0, \forall\, y\in\mathfrak{g}\}$ est le "*centre*" de $\mathfrak{g}$. On vérifie immédiatement que le triple $(d_m, D_m, \overline{\mu(m)})$ est un élément bien défini de $\mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g},\mathfrak{M})$. De plus, le $\mathbb{K}$-module $\mathfrak{J}$ librement engendré par les bidérivations $(d_m, D_m, \overline{\mu(m)}), m\in\mathfrak{M}$, est un idéal bilatère de $\mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g},\mathfrak{M})$.

On appelle "*cohomologie non abélienne*" de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans la $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée $(\mathfrak{M},\mu)$, l'algèbre de Leibniz quotient $\mathfrak{HL}^1(\mathfrak{g},\mathfrak{M}) := \mathrm{Bider}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g},\mathfrak{M})/\mathfrak{J}$. En degré 0, on pose $\mathfrak{HL}^0(\mathfrak{g},\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{g}} := \{m\in\mathfrak{M} : {}^{g}m = m^{g} = 0,\ \forall\, g\in\mathfrak{g}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments *invariants*.

De même, on appelle "*homologie non abélienne*" de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans la $\mathfrak{g}$-algèbre de Leibniz croisée $(\mathfrak{N},\nu)$, les algèbres de Leibniz $\mathfrak{HL}_0(\mathfrak{g},\mathfrak{N}) := \mathrm{coker}\Psi_{\mathfrak{N}}$ et $\mathfrak{HL}_1(\mathfrak{g},\mathfrak{N}) := \ker\Psi_{\mathfrak{N}}$ où $\Psi_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{N}\star\mathfrak{g} \to \mathfrak{N}$ est le morphisme de $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz croisées donné sur les générateurs par

$$\Psi_{\mathfrak{N}}(n*g) := n^{g} \quad \text{et} \quad \Psi_{\mathfrak{N}}(g*n) := {}^{g}n,\ g\in\mathfrak{g},\ n\in\mathfrak{N}.$$

On a la caractérisation suivante de ces (co)homologies

Théorème 1.4.21. *Pour toute suite exacte de $\mathfrak{g}$-algèbres de Leibniz croisées*

$$0 \to (\mathfrak{A}, 0) \overset{\alpha}{\to} (\mathfrak{B}, \lambda) \overset{\beta}{\to} (\mathfrak{C}, \mu) \to 0,$$

on a une suite exacte de $\mathbb{K}$-modules en cohomologie

$$0 \to \mathfrak{HL}^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{A}) \to \mathfrak{HL}^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{HL}^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{C}) \overset{\partial}{\to} \mathfrak{HL}^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{A}) \to \mathfrak{HL}^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{B}) \overset{\beta^1}{\to} \mathfrak{HL}^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{C})$$

où β^1 est un morphisme d'algèbres de Leibniz, et une suite exacte de $\mathbb{K}$-modules en homologie

$$\mathfrak{HL}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{A}) \to \mathfrak{HL}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{HL}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{C}) \overset{\partial}{\to} \mathfrak{HL}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{A}) \to \mathfrak{HL}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{B}) \to \mathfrak{HL}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{C}) \to 0.$$

En fait, pour la suite exacte en homologie, puisque le foncteur $- \star \mathfrak{g}$ est exact à droite, on applique le "*Lemme du serpent*" au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathfrak{A} \star \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{B} \star \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{C} \star \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{\mathfrak{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{\mathfrak{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{\mathfrak{C}}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{C} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

1.4.22 Extensions centrales universelles.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz parfaite (et libre en tant que $\mathbb{K}$-module), et soit $\Psi := \Psi_{\mathfrak{g}}$ le morphisme définissant l'homologie non abélienne $\mathfrak{HL}_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. On vérifie que le morphisme $\Psi : \mathfrak{g} \star \mathfrak{g} \twoheadrightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ est une extension centrale "*(uni)verselle*" d'algèbres de Leibniz (voir 1.2, 1.4.14 et [3, Lemme 2.4]). L' unicité provient de [9, Lemme I.4]. Par conséquent on a un isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules $\mathfrak{HL}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g})$.

1.4.23 Homologie de Hochschild du type Milnor.— Soit A une algèbre associative vue comme l'algèbre de Leibniz (en fait de Lie) par $[a, b] := ab - ba$ où $a, b \in A$. Et soit $\mathrm{L}(A) := A^{\otimes 2}/\mathrm{im}(b_3)$ l'algèbre de Leibniz (non-Lie) de l'Exemple 1.1.2.iii). Alors les opérations définies par

$$\begin{aligned}
A \times \mathrm{L}(A) \to \mathrm{L}(A), &\ {}^{a}(x \otimes y) := [a, x] \otimes y - [a, y] \otimes x, \\
\mathrm{L}(A) \times A \to \mathrm{L}(A), &\ (x \otimes y)^a := [x, a] \otimes y + x \otimes [y, a]
\end{aligned}$$

confèrent à $\mathrm{L}(A)$ une structure de A-algèbre de Leibniz, croisée pour le morphisme suivant

$$\mu_A : \mathrm{L}(A) \to A, \ x \otimes y \mapsto [x, y] = xy - yx.$$

De plus, on a une suite exacte d'algèbres de Leibniz

$$0 \to \mathrm{HH}_1(A) \to \mathrm{L}(A) \xrightarrow{\mu_A} [A, A] \to 0.$$

Les actions mutuelles de Leibniz de A et $\mathrm{HH}_1(A)$ étant triviales, on a

$$\mathfrak{HL}_0(A, \mathrm{HH}_1(A)) = \mathrm{HH}_1(A)$$

et

$$\mathfrak{HL}_1(A, \mathrm{HH}_1(A)) = A \star \mathrm{HH}_1(A) \cong A_{ab} \otimes \mathrm{HH}_1(A) \ \oplus \ \mathrm{HH}_1(A) \otimes A_{ab}$$

où $A_{ab} := A/[A,A]$. Par ailleurs, on vérifie que $\mathfrak{HL}_0(A,[A,A]) \cong [A,A]/[A,[A,A]]$. La suite exacte du Théorème 1.4.21 s'écrit alors

$$\begin{aligned}(1.4.24) \qquad A_{ab}\otimes \mathrm{HH}_1(A) \;\oplus\; \mathrm{HH}_1(A)\otimes A_{ab} \to \mathfrak{HL}_1(A,\mathrm{L}(A)) \to \mathfrak{HL}_1(A,[A,A]) \to \\ \to \mathrm{HH}_1(A) \to \mathrm{HH}_1^M(A) \to [A,A]/[A,[A,A]] \to 0\end{aligned}$$

où $\mathrm{HH}_1^M(A) \cong \mathfrak{HL}_0(A,\mathrm{L}(A))$ est l'"*homologie de Hochschild du type Milnor*" de A c'est-à-dire le quotient de $A\otimes A$ par les relations

$$a\otimes[b,c]=0,\;\; [a,b]\otimes c=0,\;\; b_3(a\otimes b\otimes c)=0$$

pour tous $a,b,c\in A$ (voir [Lo1, 10.6.19]).

1.5 Perspectives.— Nous donnons ici une généralisation de la structure non abélienne d'algèbre de Leibniz sur le carré tensoriel (au sens linéaire) d'une algèbre de Lie construite par Kurdiani-Pirashvili [K-P]. L'objectif, à long terme, étant de rechercher une structure algébrique englobant les groupes, avec un "*produit*" permettant de compléter le tableau suivant de correspondances:

$C_2^{Leib}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ (est une algèbre de Leibniz)	???
$C_2^{Lie}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ (est une algèbre de Lie)	$C_2(\mathrm{G}) = \mathbb{Z}[\mathrm{G}\times\mathrm{G}]$

où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et G est un groupe. Ceci rejoindrait les conjectures de J.-L. Loday sur les "*coquecigrues*" dans la détermination de l'obstruction à la périodicité en K-théorie algébrique (cf. [Lo2]). Par ailleurs, nous rappelons aussi l'existence d'une filtration plus fine du complexe de Leibniz qui pourrait donner une suite spectrale plus facile à manipuler mais dont les termes EL^2 ne sont décrits que conjecturalement.

1.5.1 Structure non abélienne d'algèbre de Leibniz.— Rappelons qu'une action à gauche (resp. droite) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ (resp. de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}$) est la donnée d'une application bilinéaire $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$) notée $(g,h)\mapsto {}^g h$ (resp. $(g,h)\mapsto g^h$) vérifiant les axiomes

$$\begin{gathered}{}^g[h,h'] = [{}^g h,h'] + [h,{}^g h'] \quad \text{et} \quad {}^{[g,g']}h = {}^g({}^{g'}h) - {}^{g'}({}^g h) \\ (\text{ resp. } [g,g']^h = [g^h,g'] + [g,g'^h] \quad \text{et} \quad g^{[h,h']} = (g^h)^{h'} - (g^{h'})^h\ )\end{gathered}$$

pour tous $g,g'\in\mathfrak{g}$ et $h,h'\in\mathfrak{h}$. Deux telles actions sont dites "*compatibles*" si les relations suivantes sont vérifiées

$$g^{({}^{g'}h)} = [g,g'^h] \quad \text{et} \quad {}^{(g^h)}h' = [{}^g h,h'],\ \forall\, g,g'\in\mathfrak{g},\ h,h'\in\mathfrak{h}.$$

Avec ces données, on vérifie que le crochet défini ci-dessous confère au $\mathbb{K}$-module $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}$ une structure non triviale d'algèbre de Leibniz

$$(1.5.2) \qquad [g\otimes h, g'\otimes h'] := [g,g'^{h'}]\otimes h + g\otimes[h,{}^{g'}h'].$$

On observera que l'on retrouve la construction de Kurdiani-Pirashvili en prenant simplement $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$, les actions coïncidant avec le crochet de Lie. Bien que l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}$ ne soit pas une algèbre de Lie, on a des "*opérations*" de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$) sur $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}$:

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}\times(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}, \quad {}^g(g'\otimes h') := [g,g']\otimes h' + g'\otimes{}^g h', \\ (\text{ resp. } (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h})\times\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}, \quad (g\otimes h)^{h'} := g^{h'}\otimes h + g\otimes[h,h']\ ).\end{gathered}$$

De plus, les applications linéaires suivantes sont des morphismes d'algèbres de Leibniz

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g},\ g \otimes h \mapsto g^h \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h},\ g \otimes h \mapsto {}^g h.$$

Pour en revenir aux structures (pré)-croisées introduites précédemment, signalons que Baues-Conduché [B-C] ont utilisé les "*modules (pré)-croisés sur un groupe*" pour énoncer un théorème du type Witt pour leur notion d'"*algèbres de Lie partielles*" (qui ressemblent étrangement aux algèbres de Leibniz). Une modification convenable de la structure de module (pré)-croisé pourrait fournir un prototype des coquecigrues. Avec l'espoir que le gradué associé à la suite centrale descendante ait une structure d'algèbre de Leibniz pour le crochet induit par les commutateurs. L'analogue du théorème de Witt exprimerait alors le fait que l'algèbre de Leibniz ainsi obtenue est libre si l'objet initial (la coquecigrue) est libre.

1.5.3 Vers une filtration plus fine.— L'expression de la "*Formule de type Künneth pour l'homologie de Leibniz*" fait penser qu'il pourrait exister une autre filtration du complexe de Loday-Pirashvili pour l'homologie de Leibniz. En effet, on peut considérer la filtration $(FL_*^p)_{p\geq 0}$ où FL_n^p est le sous-espace de $M \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ engendré par les éléments $m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ tels qu'au moins $(n-p)$ facteurs x_i soient dans $\mathcal{H}$. Il est clair que la précédente filtration $(F_*^p)_{p\geq 0}$ est une sous-filtration de $(FL_*^p)_{p\geq 0}$. Néanmoins les termes EL^2 de la suite spectrale dérivant de cette nouvelle filtration sont légèrement un peu plus compliqués à décrire. La méthode des "*intégrales itérées de Chen*" utilisée déjà dans [Lo3] pourrait permettre de montrer que, si $M = \mathbb{K}$ et si l'action diagonale adjointe de $\mathcal{L}/\mathcal{H}$ sur $\mathrm{HL}_*(\mathcal{H})$ est triviale, alors les termes EL^2 s'obtiennent par

$$EL^2_{p,q} \cong (\mathrm{HL}_*(\mathcal{L}/\mathcal{H}) \star \mathrm{HL}_*(\mathcal{H}))_{p+q}. \tag{1.5.4}$$

Ici $\star$ désigne le *produit libre* des modules gradués, c'est-à-dire l'analogue non commutatif du produit tensoriel classique $\otimes$, qui intervient par exemple dans l'isomorphisme

$$\mathrm{T}(V \ \oplus\ V') \cong \mathrm{T}(V) \star \mathrm{T}(V').$$

Pour être plus précis, le terme $EL^2_{p,q}$ serait la somme directe des composantes

$$X_{i_1} \otimes Y_{i_2} \otimes X_{i_3} \otimes Y_{i_4} \otimes \cdots, \quad i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \cdots = p + q$$

telles que, ou bien $X_* = \mathrm{HL}_*(\mathcal{L}/\mathcal{H})$ et $Y_* = \mathrm{HL}_*(\mathcal{H})$, ou bien $X_* = \mathrm{HL}_*(\mathcal{H})$ et $Y_* = \mathrm{HL}_*(\mathcal{L}/\mathcal{H})$.

Comme application, on pourrait déterminer la (co)homologie de Leibniz des algèbres de Virasoro, qui sont les extensions centrales universelles de l'algèbre de Lie des dérivations, notée $Der(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$. Un calcul de Loday et Pirashvili montre que l'on a un isomorphisme (cf. [L-P]):

$$\mathrm{HL}^2(Der(\mathbb{C}[z, z^{-1}])) \cong \mathrm{H}^2(Der(\mathbb{C}[z, z^{-1}]))\ .$$

Ainsi l'extension centrale universelle, dans le cadre des algèbres de Leibniz, coïncide avec celle dans le cadre des algèbres de Lie. Il serait intéressant de savoir ce qu'il se passe pour les algèbres de Lie $Der(\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}])$, $n \geq 2$ (conversation avec G. Halbout).

2 Algèbres de Leibniz étendues et opérades

2.1 Préliminaires.— Etant données une algèbre associative unitaire et commutative A et une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le $\mathbb{K}$-module $A \otimes \mathfrak{g}$ admet une structure d'algèbre de Lie pour le crochet défini par

$$[a \otimes x, b \otimes y] := (ab) \otimes [x, y]. \tag{2.1.1}$$

Ce type d'algèbres, appelées "*algèbre de Lie étendues*", interviennent naturellement dans l'étude des conjectures de Macdonald (sur les systèmes de racines [Hn]) ou des algèbres de Kac-Moody [Hd2]. A cet effet A. Haddi ([Hd1], [Hd3]) exprime l'homologie de Chevalley-Eilenberg $\mathrm{H}_*(A \otimes \mathfrak{g})$ en fonction de l'homologie cyclique $\mathrm{HC}_*(A)$ et des coïnvariants des puissances symétriques $\mathrm{S}^*(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$. Nous en donnons une «version non commutative» en déterminant l'homologie de Leibniz $\mathrm{HL}_*(A \otimes \mathfrak{g})$ en fonction de l'homologie de Hochschild $\mathrm{HH}_*(A)$ et des coïnvariants des puissances symétriques $\mathrm{S}^*(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ ([4]). Ce travail a suscité l'introduction d'un type d'algèbres avec des conditions minimales pour que le $\mathbb{K}$-module $R \otimes \mathcal{L}$ muni du crochet (2.1.1) soit une algèbre de Leibniz si l'algèbre $\mathcal{L}$ en est une. Les algèbres répondant à cette généralisation, dites "*algèbres perm*", sont assujetties aux axiomes d'"*associativité et de commutativité à droite*"

$$(ab)c = a(bc) = a(cb). \tag{2.1.2}$$

Revisitons les catégories de Loday, issues de l'étude des opérades reliées à celle des algèbres de Leibniz [Lo6]. Les "*algèbres de Zinbiel*" (ou algèbres de Leibniz duales), dont la catégorie est notée (**Zinb**), sont caractérisées par l'identité

$$(ab)c = a(bc) + a(cb). \tag{2.1.3}$$

Les "*digèbres associatives*" sont définies par deux opérations, $\dashv$ et $\vdash$, satisfaisant les axiomes

$$\begin{cases} x \dashv (y \dashv z) = (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z) \\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) \\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) = (x \vdash y) \vdash z. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Leur catégorie est notée (**Dias**) et on a un foncteur

$$(\mathbf{Dias}) \xrightarrow{-} (\mathbf{Leib}),\ (D, \dashv, \vdash) \mapsto D_{Leib} := (D,\ [x, y] := x \dashv y - y \vdash x) \tag{2.1.5}$$

analogue au foncteur classique de "*Liesation*"

$$(\mathbf{As}) \xrightarrow{-} (\mathbf{Lie}),\ A \mapsto A_{Lie} := (A,\ [a, b] := ab - ba). \tag{2.1.6}$$

La catégorie duale de (**Dias**) est la catégorie (**Dend**) des "*algèbres dendriformes*" définies par deux opérations, $\prec$ et $\succ$, assujetties aux axiomes

$$\begin{cases} (a \prec b) \prec c = & a \prec (b \prec c) + a \prec (b \succ c) \\ a \succ (b \prec c) = & (a \succ b) \prec c \\ a \succ (b \succ c) = & (a \prec b) \succ c + (a \succ b) \succ c. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

De même, on a deux foncteurs

$$(\mathbf{Zinb}) \longrightarrow (\mathbf{Dend}),\ (Z,\ .) \mapsto Z_{Dend} := (Z,\ x \prec y := x.y,\ x \succ y := y.x), \tag{2.1.8}$$

$$(2.1.9) \qquad (\mathbf{Zinb}) \xrightarrow{+} (\mathbf{Com}),\ (Z,\ .) \mapsto Z_{Com} := (Z,\ x * y := x.y + y.x)$$

rendant commutatif le diagramme suivant de Loday dont nous proposons une triangulation

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Dend} \arrow[dr] & & \mathbf{Dias} \arrow[dr] & \\
\mathbf{Zinb} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{As} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{Leib}\ . \\
 & \mathbf{Com} \arrow[ur] & & \mathbf{Lie} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(L)

2.2 Homologie de Leibniz d'algèbres de Lie étendues.— Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, A une algèbre associative unitaire et commutative, et M un A-bimodule symétrique. Alors les opérations suivantes

$$(2.2.1) \qquad \begin{cases} [-,-] : \mathfrak{g}_A \times \mathfrak{g}_A \longrightarrow \mathfrak{g}_A, & [ax, by] := (ab) \otimes [x, y] \\ [-,-] : \mathfrak{g}_M \times \mathfrak{g}_A \longrightarrow \mathfrak{g}_M, & [mx, ay] := (ma) \otimes [x, y] \end{cases}$$

confèrent au $\mathbb{K}$-module $\mathfrak{g}_A := A \otimes \mathfrak{g}$ une structure d'algèbre de Lie, puis au $\mathbb{K}$-module $\mathfrak{g}_M := M \otimes \mathfrak{g}$ une structure de $\mathfrak{g}_A$-module. On peut donc considérer l'homologie de Leibniz $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)$ (cf. 1.1.5), dont nous calculons les premiers modules.

Rappelons que l'*abélianisé* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab} := \mathrm{U}(\mathfrak{g})/[\mathrm{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{U}(\mathfrak{g})]$ est le quotient de l'enveloppe universelle $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par le sous-module $[\mathrm{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{U}(\mathfrak{g})]$ engendré par les commutateurs $[\alpha, \beta] := \alpha\beta - \beta\alpha$ où α et β parcourent $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Par ailleurs, l'*homologie de Hochschild* $\mathrm{H}_*(A, M)$ est définie comme étant l'homologie du complexe $(C_*(A, M) := M \otimes A^{\otimes *}, b)$ où le bord $b : C_n(A, M) \longrightarrow C_{n-1}(A, M)$ opère par

$$(2.2.2) \quad b(m, a_1, \ldots, a_n) := (ma_1, a_2, \ldots, a_n) + \\ + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p (m, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n) \ + \ (-1)^n (a_n m, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

2.2.3 Un morphisme de complexes.— En munissant le $\mathbb{K}$-module $C_*(A, M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ de la différentielle $b \otimes \mathrm{id}$, un calcul immédiat montre que l'application

$$\lambda_n : \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \longrightarrow C_n(A, M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$$

définie par

$$(2.2.4) \qquad \lambda_n(mx, a_1x_1, \ldots, a_nx_n) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(m, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) \otimes x x_{\sigma(n)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

est un morphisme de complexes. On en déduit des applications naturelles

$$\lambda_* : \mathrm{HL}_n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \longrightarrow \mathrm{H}_n(A, M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$$

qui par composition induisent des morphismes

$$(2.2.5) \qquad \phi_* := (\pi_* \otimes \eta^{-1}) \circ \lambda_* : \mathrm{HL}_n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \longrightarrow (M \otimes_A \Omega^n_{A|\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{K}} (\mathrm{S}^{n+1}\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}.$$

On rappelle que $\Omega^n_{A|\mathbb{K}} := \Lambda^n_A(\Omega^1_{A|\mathbb{K}})$ désigne le A-module des n-formes différentielles de Kähler et que les morphismes π_* et celui de Poincaré-Birkhoff-Witt η (non normalisé ici) sont donnés par (voir [Kas], [Lo1])

$$\pi_* : \mathrm{H}_n(A,M) \longrightarrow M \otimes_A \Omega^n_{A|\mathbb{K}}, \quad (m,a_1,\ldots,a_n) \mapsto m \otimes_A da_1 \cdots da_n,$$
$$\eta : (\mathrm{S}^*\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}, \quad xx_1\cdots x_n \mapsto \sum_{\sigma\in\Sigma_n} xx_{\sigma(n)}\cdots x_{\sigma(n)}.$$

2.2.6 Premiers modules.— L'on suppose ici que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle. Ainsi, l'homologie de Hochschild admet une décomposition en parties négative et positive $\mathrm{HH}_*(A,M) = \mathrm{H}^-_*(A,M) \ \oplus\ \mathrm{H}^+_*(A,M)$ par rapport à l'involution

$$u : C_n(A,M) \longrightarrow C_n(A,M), \quad u(m,a_1,\ldots,a_n) := (-1)^{n(n+1)/2}(m,a_n,\ldots,a_2,a_1)$$

et aux sous-complexes $C^{\pm}_n(A,M) := \{z \in C_n(A,M) : u(z) = \pm z\}$. On vérifie que les applications λ_* induisent des morphismes bien définis sous cette décomposition

$$\lambda'_1 : \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M) \longrightarrow \mathrm{H}^-_1(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad = \quad \mathrm{H}_1(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}},$$
$$\lambda'_2 : \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M) \longrightarrow \mathrm{H}^-_2(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad \oplus \quad \mathrm{H}^+_2(A,M)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}.$$

En examinant le complexe des coïnvariants $(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}, d)$ sous l'action diagonale de $\mathfrak{g}$ définie par

$$[(mx,a_1x_1,\ldots,a_nx_n),z] := \sum_{i=0}^{n}(mx,a_1x_1,\ldots,a_{i-1}x_{i-1},a_i[x_i,z],a_{i+1}x_{i+1},\ldots,a_nx_n),$$

l'on récupère un isomorphisme (resp. un épimorphisme)

$$\tilde\lambda'_1 : \mathrm{HL}_1(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$$
$$(\textit{resp. } \tilde\lambda'_2 : \mathrm{HL}_2(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^-_2(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad \oplus \quad \mathrm{H}^+_2(A,M)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}})$$

pourvu que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit parfaite. On observera qu'à l'instar des algèbres de Lie, lorsque la $\mathcal{H}$-représentation $\mathcal{L}$ est complètement réductible ($\mathcal{H}$ étant un idéal bilatère de l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$), alors on a un isomorphisme $\mathrm{HL}_*(\mathrm{T}^*(\mathcal{L},\mathbb{K})_{\mathcal{H}}) \cong \mathrm{HL}_*(\mathcal{L},\mathbb{K})$ (cf. [Lo1, 10.6.6]). Par ailleurs, on sait que l'homologie de Leibniz réalise le décalage $\mathrm{HL}_n(\mathcal{L},\mathcal{L}) = \mathrm{HL}_{n+1}(\mathcal{L},\mathbb{K})$. Il en résulte donc que

Théorème 2.2.7. *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie parfaite, et A une algèbre associative unitaire et commutative. Si l'algèbre de Lie $A\otimes\mathfrak{g}$ est une représentation complètement réductible de $\mathfrak{g}$ pour l'action donnée par $[a\otimes x,y] := a\otimes[x,y]$, alors on a un isomorphisme (2.2.8) et un épimorphisme (2.2.9)*

$$\tilde\lambda'_1 : \mathrm{HL}_2(A\otimes\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}_1(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \cong \Omega^1_{A|\mathbb{K}}\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \tag{2.2.8}$$

$$\tilde\lambda'_2 : \mathrm{HL}_3(A\otimes\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{HH}^-_2(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad \oplus \quad \mathrm{HH}^+_2(A)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}. \tag{2.2.9}$$

2.2.10 Lien avec le cas classique et les extensions centrales.— Rappelons que sous les hypothèses du Théorème 2.2.7, A. Haddi ([Hd3]) obtient deux isomorphismes

$$\mathrm{H}_p(A\otimes\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HC}^-_{p-1}(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad \oplus \quad \mathrm{HC}^+_{p-1}(A)\otimes(\mathrm{S}^p\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}, \ p=2,3$$

où $\mathrm{HC}_*^{\pm}(A)$ désigne les parties négative et positive de l'homologie cyclique de A. Via ces isomorphismes et ceux du Théorème 2.2.7, l'application canonique *can* s'identifie à l'application $I^{\pm}\otimes \mathrm{id}$ où $I : \mathrm{HH}_n(A) \to \mathrm{HC}_n(A)$ est le morphisme de la longue suite exacte de Connes (cf. [Lo1]). En d'autres termes, nous avons un diagramme commutatif pour $p = 2, 3$:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{HL}_p(A\otimes\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{HH}^-_{p-1}(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} & \oplus & \mathrm{HH}^+_{p-1}(A)\otimes(\mathrm{S}^p\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \\
{\scriptstyle can}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle I^{\pm}\otimes\mathrm{id}} \\
\mathrm{H}_p(A\otimes\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{HC}^-_{p-1}(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} & \oplus & \mathrm{HC}^+_{p-1}(A)\otimes(\mathrm{S}^p\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}.
\end{array}$$

En particulier la surjection canonique $\mathrm{HL}_2(A\otimes\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_2(A\otimes\mathfrak{g})$ n'est autre que la flèche naturelle

$$\Omega^1_{A|\mathbb{K}}\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow (\Omega^1_{A|\mathbb{K}}/dA)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}. \tag{2.2.11}$$

On observera qu'il n'y a pas d'erreur d'indéxation dans l'expression de module $\mathrm{HL}_3(A\otimes\mathfrak{g})$ car lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est parfaite on a un isomorphisme (cf. [8, Lemme I.6])

$$\Lambda^3(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \cong (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}, \quad x\wedge y\wedge z \mapsto x\otimes[y,z]. \tag{2.2.12}$$

Par ailleurs, l'algèbre de Lie $A\otimes\mathfrak{g}$ étant aussi parfaite, elle admet une extension centrale universelle $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_A)$ dans la catégorie des algèbres de Leibniz, telle que $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}_A) := \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_A)_{Lie}$ soit l'extension centrale universelle de $A\otimes\mathfrak{g}$ dans la catégorie des algèbres de Lie. En vertu de ce qui précède et du Théorème 1.2.6, on en déduit que

$$\mathrm{HL}_2(\mathfrak{u}(\mathfrak{g}_A)) \cong \ker(can_2 : \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}_A) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_2(\mathfrak{g}_A)) \cong d(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}. \tag{2.2.13}$$

2.3 Factorisation de certains foncteurs opéradiques.— Rappelons que les "*algèbres pré-Lie*" sont définies avec un produit satisfaisant la relation (voir [Ge], [Dz], [Ch-L] et [9])

$$(ab)c - a(bc) = (ac)b - a(cb), \tag{2.3.1}$$

et permettent la factorisation du foncteur de "*Liesation*" (2.1.6) bien connu :

$$(\mathbf{As}) \hookrightarrow (\mathbf{Pré\text{-}Lie}) \xrightarrow{-} (\mathbf{Lie}). \tag{2.3.2}$$

De même, nous contruisons une catégorie (**Pré-Leib**) d'algèbres ayant deux opérations, $\dashv$ et $\vdash$, satisfaisant les axiomes

$$\begin{cases} x\dashv(y\dashv z) - (x\dashv y)\dashv z = x\dashv(z\vdash y) - (x\dashv z)\dashv y \\ x\vdash(y\dashv z) - (x\vdash y)\dashv z = x\vdash(z\vdash y) - (x\dashv z)\vdash y \\ x\vdash(y\vdash z) - (x\vdash y)\vdash z = x\vdash(z\dashv y) - (x\vdash z)\dashv y. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Et nous obtenons une factorisation du foncteur de Loday (2.1.5):

$$(\mathbf{Dias}) \hookrightarrow (\mathbf{Pré\text{-}Leib}) \xrightarrow{-} (\mathbf{Leib}). \tag{2.3.4}$$

Grâce à la dualité de Koszul de Ginzburg-Kapranov pour les opérades (voir [9], [Fr3], [G-K], [M-S-S], ou 3.1), nous montrons que

Théorème 2.3.5. *i) Les algèbres pré-Lie sont gouvernées par une opérade quadratique qui admet pour duale l'opérade des algèbres "associatives et commutatives à droite" (dites "algèbres perm"), caractérisées par les relations*

$$(ab)c = a(bc) = a(cb). \tag{2.3.6}$$

ii) De même, les algèbres pré-Leibniz sont gouvernées par une opérade quadratique qui admet pour duale l'opérade des algèbres "dendriformes et commutatives à droite" (dites "algèbres ricod"), caractérisées par les axiomes

$$\begin{cases} (a \prec b) \prec c &= a \prec (b \prec c) + a \prec (b \succ c) \\ a \prec (b \prec c) &= a \prec (c \succ b) \\ a \succ (b \prec c) &= (a \succ b) \prec c \\ a \succ (b \succ c) &= a \succ (c \prec b) \\ a \succ (b \succ c) &= (a \prec b) \succ c + (a \succ b) \succ c. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Il se trouve que le foncteur (2.1.8) (resp. (2.1.9)) admet une factorisation (resp. un prolongement) rendant commutative la triangulation suivante du diagramme de Loday:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Dend} & & \mathbf{Dias} \arrow[d] & \\
 & \mathbf{Ricod} \arrow[u] \arrow[dr] & & \textbf{Pré-Leib} \arrow[dr] & \\
\mathbf{Zinb} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{As} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{Leib}. \\
 & \mathbf{Perm} \arrow[ur] & & \textbf{Pré-Lie} \arrow[ur] \arrow[d] & \\
 & \mathbf{Com} \arrow[u] & & \mathbf{Lie} &
\end{tikzcd}$$

(L-G)

On observera que la symétrie de ce diagramme (par rapport à l'axe médian de l'opérade auto-duale **As** des algèbres associatives non unitaires) reflète la dualité de Koszul des opérades correspondantes. De plus, hormis les opérades **Ricod** et **Pré-Leib** (dont nous n'avons pas encore construit la théorie de (co)homologie prédite), toutes ces opérades sont de Koszul, la ⟪Koszulité⟫ des opérades **Perm** et **Pré-Lie** étant due à Chapoton-Livernet [Ch-L]. Signalons qu'en conséquence de ces nouvelles dualités de Koszul (cf. [G-K, 2.2.9]), nous obtenons deux autres structures d'algèbre de Lie:

Proposition 2.3.8. *Si R est une algèbre perm et si P est une algèbre pré-Lie, alors le $\mathbb{K}$-module $R\otimes P$ est une algèbre de Lie pour le crochet donné par*

$$[r\otimes p, r'\otimes p'] := rr'\otimes pp' - r'r\otimes p'p,\ \ r,r'\in R,\ \ p,p'\in P. \tag{2.3.9}$$

Si $(R_d, \prec, \succ)$ est une algèbre ricod et si $(D_p, \dashv, \vdash)$ est une algèbre pré-Leibniz, alors le $\mathbb{K}$-module $R_d\otimes D_p$ est une algèbre de Lie pour le crochet donné par

$$\begin{aligned}[r\otimes d, r'\otimes d'] := (r\prec r')\otimes(d\dashv d') - (r'\succ r)\otimes(d'\vdash d)\\ - (r'\prec r)\otimes(d'\dashv d) + (r\succ r')\otimes(d\vdash d'),\ \ r,r'\in R_d,\ \ d,d'\in D_p.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Dans ce qui suit, nous nous attacherons à étudier la (co)homologie des algèbres perm que nous espérons relier à celle des algèbres de Leibniz, comme au paragraphe 2.2. En effet on vérifie aisément que (cf. [9]):

Proposition 2.3.11. *Soient R algèbre perm et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. Alors $\mathbb{K}$-module $R\otimes\mathfrak{g}$ muni du crochet défini par*

$$[r\otimes x, s\otimes y] := (rs)\otimes[x,y],\ \ r,s\in R,\ \ x,y\in\mathfrak{g}, \tag{2.3.12}$$

est une algèbre de Leibniz que nous appelons "algèbre de Leibniz étendue".

2.4 Cohomologie des algèbres perm.— Les algèbres perm (qui sont commutatives dès qu'elles ont une unité, ce que nous excluons ici car l'unitalisée d'une algèbre perm n'est pas forcément commutative) ont le prototype général suivant

Proposition 2.4.1. *Soit A une algèbre associative et commutative, et soit R un A-module à droite muni d'un morphisme de A-modules $f : R \longrightarrow A$. Alors le produit défini par $(r,r')\mapsto rf(r')$, confère une structure d'algèbre perm au $\mathbb{K}$-module R.*

Par exemple, en prenant $A := \mathrm{S}(V) = \bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{S}_n(V)$, $R = V\otimes\mathrm{S}(V)$ muni de la structure naturelle (multiplication à droite dans $\mathrm{S}(V)$) de $\mathrm{S}(V)$-module, la "*fusion*"

$$f : V\otimes\mathrm{S}(V)\longrightarrow\mathrm{S}(V),\quad f(v) = v,\ \ f(v_0\otimes v_1\cdots v_n) := v_0v_1\cdots v_n, \forall\ v, v_i\in V, \tag{2.4.2}$$

permet d'obtenir le théorème suivant ([9])

Théorème 2.4.3. *L'algèbre perm libre sur un $\mathbb{K}$-module V est le $\mathbb{K}$-module* $\mathrm{Perm}(V) := V\otimes\mathrm{S}(V)$ *muni du produit défini par*

$$(u\otimes a).(v\otimes b) := u\otimes(avb),\ \ u,v\in V,\ \ a,b\in\mathrm{S}(V). \tag{2.4.4}$$

Signalons aussi que si (A,d) est une algèbre differentielle commutative (i.e., $d : A\to A$ satisfait $d^2 = 0$ et $d(ab) = adb + bda$), alors le produit donné par $(a,b)\mapsto adb$ vérifie les identités (2.3.6) des algèbres perm.

2.4.5 Représentations d'une algèbre perm.— Une *représentation* d'une algèbre perm R (ou une *R-représentation*) est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module M muni de deux actions de R, $R\times M\longrightarrow M$ et $M\times R\longrightarrow M$, satisfaisant pour tous $a,b,c\in R$ et $m\in M$ les axiomes

$$\text{(perm-rep)}\qquad \begin{cases} (mb)c \overset{1}{=} m(bc) \overset{2}{=} m(cb),\\ (am)b \overset{3}{=} a(mb) \overset{4}{=} a(bm) \overset{5}{=} (ab)m.\end{cases}$$

En fait, les relations 1, 3 et 5 disent que M est un bimodule (non unitaire) sur l'algèbre associative R; les relations 2 et 4 expriment la "*commutativité à droite*" de M vis-à-vis des actions de R. Par exemple, toute algèbre perm R est une R-représentation. D'autres exemples peuvent s'obtenir par la notion suivante d'"*algèbre enveloppante*".

2.4.6 Algèbre enveloppante d'une algèbre perm.— Soit R une algèbre perm, et soient R_g et R_d des copies de R, vues comme $R_g = R \otimes \mathbb{K}$ et $R_d = \mathbb{K} \otimes R$. On considère le $\mathbb{K}$-module

$$E(R) := R \otimes R \quad \oplus \quad R_g \quad \oplus \quad R_d$$

muni du produit associatif défini par la table suivante:

	$s \otimes s'$	s_g	s'_d
$r \otimes r'$	$(rs) \otimes (r's')$	$(rs) \otimes r'$	$r \otimes (r's')$
r_g	$(rs) \otimes s'$	$(rs)_g$	$r \otimes s'$
r'_d	$s \otimes (r's')$	$s \otimes r'$	$(r's')_d$

(Table)

Proposition 2.4.7. *Toute R-représentation est équivalente à la donnée d'un $E(R)$-module à gauche.*

En fait, si M est une R-représentation, alors sa structure de module sur l'algèbre associative $E(R)$ s'obtient par les opérations

$$(r \otimes r').m := (rm)r' = r(mr'), \;\; r_g.m := rm, \;\; r'_d.m := mr', \;\; r, r' \in R, \;\; m \in M.$$

Réciproquement, tout $E(R)$-module M est une R-représentation par

$$r.m := r_g.m, \;\; m.r := r_d.m, \;\; r \in R, \;\; m \in M.$$

On observera que l'"*unitalisé* " de $E(R)$ n'est autre que

$$E(R)^+ \cong E(R^+) = R^+ \otimes R^{+op} = (R^+)^e$$

alors que l'unitalisé $R^+ := R \oplus \mathbb{K}$, $(r, \lambda).(r', \lambda') := (rr' + \lambda r' + \lambda' r, \; \lambda\lambda')$ n'est pas en général commutatif (mais simplement commutatif à droite).

2.4.8. Extensions abéliennes d'une algèbre perm.— Soit R une algèbre perm et soit M une R-représentation vue comme une algèbre perm abélienne (i.e., $mm' = 0, \; \forall \; m, m' \in M$). Une *extension abélienne de R par M* est une courte suite exacte d'algèbres perm

$$(E) \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} R \longrightarrow 0.$$

Deux telles extensions (E) et (E') sont dites "*équivalentes*" s'il existe un morphisme d'algèbres perm $\phi : E \to E'$ tel que $p' \circ \phi = p$ et $\phi \circ j = j'$, c'est-à-dire rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"'] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j'"] & E' \arrow[r, "p'"] & R \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par le "*Lemme des cinq*", un tel morphisme ϕ est nécessairement bijectif. Par exemple, la somme directe $R \oplus M$ est une extension abélienne de R par M (pour les inclusion et projection évidentes). De plus cette dernière est trivialement "*scindée*". On se reportera au paragraphe 1.2 pour retrouver ce qu'est une algèbre perm *scindée* ou *inessentielle.*

Toute extension abélienne (E) avec une section $\mathbb{K}$-linéaire s de p fournit une nouvelle structure de R-representation sur M par les opérations

$$r.m := s(r)j(m) \quad \text{et} \quad m.r := j(m)s(r),$$

les produits à droite étant effectués dans E. Cette nouvelle structure est naturellement indépendante du choix de la section s. Comme dans les cas classiques (cf. [C-E]), nous nous contenterons des classes d'équivalence des extensions abéliennes scindées dont la structure R-représentation de M coïncide avec celle induite par les sections.

2.4.9.— Soit $f : R \times R \to M$ une application $\mathbb{K}$-bilinéaire et soit $R \oplus_f M$ le $\mathbb{K}$-module $R \oplus M$ muni du produit défini par

$$(\mu) \qquad (r, m).(r', m') := (rr', rm' + mr' + f(r, r')).$$

On vérifie sans peine que le produit (μ) est associatif si, et seulement si,

$$(\alpha) \qquad f(r, r')r'' + f(rr', r'') = rf(r', r'') + f(r, r'r''), \ \forall\, r, r', r'' \in R$$

et est commutatif à droite si, et seulement si,

$$(\beta) \qquad rf(r', r'') + f(r, r'r'') = rf(r'', r') + f(r, r''r'), \ \forall\, r, r', r'' \in R.$$

En fait, la relation (α) peut se réécrire

$$rf(r', r'') - f(rr', r'') + f(r, r'r'') - f(r, r')r'' = 0$$

c'est-à-dire la condition de 2-cocyclicité pour le cobord de Hochschild des algèbres associatives (avec unité, voir [Lo1]).

D'un autre côté, la relation (β) exprime le fait que

$$r(f(r', r'') - f(r'', r')) = f(r, r'r'') - f(r, r''r')$$

c'est-à-dire la ⟪double version duale⟫ (linéairement parlant) de la commutativité à droite. On peut la voir comme une conjonction des généralisations suivantes:

$$(\beta') \qquad af(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n+1)}) = af(a_1, \ldots, a_{n+1}), \ \forall\, \sigma \in \Sigma_{n+1}$$

et

$$(\beta'') \qquad f(a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, ba_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) = f(a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j b, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

où $f : R^{\otimes\, n+1} \longrightarrow M$ et $j = 1, \ldots, n$. Une preuve de la stabilité de ces relations par rapport au cobord de Hochschild nécessite des relations supplémentaires (cf. [9])

$$(\beta''_0) \qquad af(ba_0, a_1, \ldots, a_n) = af(a_0 b, a_1, \ldots, a_n),$$
$$(\beta'_0) \qquad aa'_j f(a_0, \ldots, a_n) = aa_j f(a_0, \ldots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \ldots, a_n), \ j = 0, \ldots, n,$$
$$(\gamma) \qquad af(a_0, \ldots, a_{j-1}, a_j b, a_{j+1}, \ldots, a_n) = af(a_0 b, a_1, \ldots, a_n), \ j = 1, \ldots, n.$$

Ainsi, nous obtenons le résultat suivant

Proposition 2.4.10. *Si $f : R^{\otimes n+1} \longrightarrow M$ satisfait les relations (β'), (β'_0), (β''), (β''_0) et (γ), il en est de même pour son cobord de Hochschild $\delta(f)$.*

2.4.11.— On convient alors de définir la "*cohomologie d'une algèbre perm R à valeurs dans une R-représentation M*" comme étant l'homologie du complexe

$$\mathbb{B}^*(R,M) = (\bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{B}^n(R,M),\ \delta) \quad \text{où}$$

$$\mathbb{B}^0(R,M) := M,\ \mathbb{B}^1(R,M) := \{f : R \to M :\ af(bc) = af(cb),\ \forall\ a,b,c \in R\},$$
$$\mathbb{B}^n(R,M) := \{f \in \mathrm{Hom}(R^{\otimes n},\ M) \text{ vérifiant } (\beta'),(\beta'_0),(\beta''),(\beta''_0) \text{ et } (\gamma)\}$$

pour $n \geq 2$, le cobord de Hochschild δ opérant comme à l'accoutumée par

$$\begin{aligned}\delta(f)(a_0,\dots,a_n) &:= a_0 f(a_1,\dots,a_n)\\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(a_0,\dots,a_{i-1},a_i a_{i+1},a_{i+2},\dots,a_n) + (-1)^{n+1} f(a_0,\dots,a_{n-1})a_n.\end{aligned}$$

On la note $\mathrm{H}^*_{\mathrm{perm}}(R,M)$ ou simplement $\mathrm{H}^*_{\mathrm{perm}}(R) := \mathrm{H}^*_{\mathrm{perm}}(R,R)$.

Pour $n = 0$, $\mathrm{H}^0_{\mathrm{perm}}(R,M)$ est le sous-module des "*éléments symétriques*" de M par R, c'est-à-dire

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{perm}}(R,M) = M^R := \{m \in M : rm = mr,\ \forall\ r \in R\}.$$

Pour $n = 1$, un 1-cocycle est une application K-linéaire $D : R \longrightarrow M$ telle que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b),\ \forall\ a,b \in R$$

c'est-à-dire une "*dérivation*" de R dans M. On observera que grâce à la commutativité à droite dans M, la relation supplémentaire $aD(bc) = aD(cb)$ est automatiquement vérifiée par les dérivations. L'ensemble des dérivations de R dans M est noté $\mathrm{Der}(R,M)$ et nous avons

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{perm}}(R,M) = \mathrm{Der}(R,M)/\{\text{dérivations intérieures}\}$$

où "{dérivations intérieures}" est le sous-module des dérivations de la forme $\mathrm{ad}_m(r) := [m,r] = mr - rm$, pour un élément $m \in M$ fixé.

Pour $n = 2$, nous avons le théorème classique de classification

Théorème 2.4.12. *Soit R algèbre perm et soit M une R-représentation. Alors il existe une bijection canonique*

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{perm}}(R,M) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}(R,M)$$

avec l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions abéliennes scindées de R par M.

2.4.13 Remarques.— Naïvement on pourrait faire comme J.-L. Loday qui définit l'homologie de Hochschild des algèbres associatives non unitaires en posant (cf. [Lo1, 1.4.1])

$$\mathrm{HH}_*(A) := \mathrm{coker}(\mathrm{HH}_*(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{HH}_*(A^+)).$$

Mais ce procédé appliqué aux algèbres perm redonne l'homologie classique de Hochschild, laquelle n'est pas celle prédite par la théorie des opérades. En fait M. Wambst possède une théorie d'homologie convenable (construite à partir des "*arbres enracinées*", cf. [Ch-L]) et il nous reste à mettre en évidence son ⟪opéradicité⟫ qui fait appel à d'autres arbres planaires.

2.5 Perspectives.— L'objectif à court terme est de déterminer l'homologie des algèbres de Leibniz étendues par une algèbre perm, c'est-à-dire du type $R \otimes \mathfrak{g}$ (cf. 2.3). Nous espérons la relier à l'homologie des algèbres perm comme ce qui a été fait au paragraphe 2.2 où l'unité de l'algèbre commutative A semble jouer un rôle important. Ceci nécessite une ⟪dédualisation⟫ de la cohomologie des algèbres perm construite ci-dessus (cf. 2.4). Un premier examen indique que cela relève d'une notion d'"*algèbre homologique dans un contexte non nécessairement unitaire*", qui semble-t-il avait été abordée dans un certain sens par D. Quillen [Qu2]. Le secret dessein de la recherche de cette théorie d'homologie est de donner une généralisation du Théorème de Cuvier-Loday-Quillen-Tsygan (cf. [Cu], [Lo1], [L-Q], [Ts], ou 1.2.8) sous une forme semblable à

$$\mathrm{HL}_*(R \otimes \mathfrak{g}) \cong \mathrm{H}_*^{perm}(R) \star \mathbb{V}_*(\mathfrak{g}) \tag{2.5.1}$$

pour un analogue non commutatif $\star$ du produit tensoriel classique (cf. 1.4), où $\mathbb{V}$ serait un foncteur de source la catégorie des algèbres de Leibniz, qui devrait s'exprimer en bas degrés par

$$\mathbb{V}_1(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}_{ab} = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \quad \text{et} \quad \mathbb{V}_2(\mathfrak{g}) = \mathrm{S}^2(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}(\text{ ou plutôt } \mathrm{T}^2(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}...?) \tag{2.5.2}$$

sous réserve d'hypothèses de réductibilité sur $\mathfrak{g}$ (cf. 2.2.7). On pourrait alors aussi avoir une nouvelle interprétation des extensions centrales universelles (cf. 1.4.2) sous la forme

$$\mathfrak{U}(A \otimes \mathfrak{g}) \cong \mathrm{HB}(A) \star \mathfrak{U}(\mathfrak{g}). \tag{2.5.3}$$

En hommage à Emile Borel dont un des théorèmes utilisant la "*partition de l'unité*" m'avait fait rêver, comme bien d'autres taupin(e)s [Merci à Nicole Bopp]. On observera que dans les calculs 2.2.6 (voire [9, Lemme 6] ou 1.2.7), on a un isomorphisme $\Lambda^3(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \cong \mathrm{S}^2(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est parfaite (cf. (2.2.12)). Ceci garantit provisoirement une certaine cohérence de mes résultats (un calcul de D. Chataur & Cie exprime étrangement un isomorphisme $\mathrm{HL}_3(\mathfrak{st}_n(A)) \cong \mathrm{HH}_2(A)$). Ainsi le module $\mathbb{V}_3(\mathfrak{g})$ pourrait prendre la forme conjecturale

$$\mathbb{V}_3(\mathfrak{g}) \cong E^3(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} = \Lambda^3(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad \oplus \quad \mathrm{S}^3(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}, \tag{2.5.4}$$

après une suspension arrangeant les graduations. Je me permets de nommer "*algèbre de Loday*" ou "*algèbre de Leibniz exceptionnelle*" toute algèbre réalisant un isomorphisme du type (2.5.1) ou (2.5.3) [clin d'œil à Ale Frabetti].

Plus généralement, j'ai l'espoir d'introduire un "*produit tensoriel universel* " $\star$ donnant naissance à un isomorphisme

$$\mathrm{H}_*^{CE}(A \otimes B) \cong \mathrm{H}_*^{\mathcal{P}}(A) \star \mathrm{H}_*^{\mathcal{P}^!}(B) \tag{2.5.5}$$

où A est une algèbre d'un type gouverné par une opérade quadratique $\mathcal{P}$ et B une $\mathcal{P}^!$-algèbre; le produit tensoriel $A \otimes B$ étant une algèbre de Lie comme signalé par Ginzburg-Kapranov (cf. [G-K, 2.2.9]) et pour laquelle on peut déterminer son homologie de Chevalley-Eilenberg. Ceci rejoindrait les travaux de B. Vallette (*conversations personnelles*).

Etant donnée une algèbre perm R (non nécessairement unitaire), un candidat au module des 1-formes différentielles est (cf. 1.4.24)

$$\mathbb{D}(R|\mathbb{K}) := [R,R]/[R,[R,R]]. \tag{2.5.6}$$

Nous donnons ici un exemple du foncteur conjectural $\mathbb{V}$ ci-dessus donnant l'analogue des n-formes différentielles de Kaehler en un type de nouvelles algèbres dites "*positivantes*" par

$$\mathbb{D}^*(R|\mathbb{K}) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{D}^n(R|\mathbb{K}) \text{ avec } \mathbb{D}^n(R|\mathbb{K}) := \mathbb{D}(R|\mathbb{K}) \otimes \Lambda_R^n(\mathbb{D}(R|\mathbb{K})). \tag{2.5.7}$$

C'est l'algèbre perm différentielle graduée libre sur notre fameux $\mathbb{D}(R|\mathbb{K})$.

3 Opérades k-aires et triples de Jordan (non nécessairement unitaire)

Dans tout ce qui suit, le corps $\mathbb{K}$ est commutatif et de caractéristique nulle. Je reprends textuellement les constructions basiques (et cohérentes avec celles de Ginzburg-Kapranov), de J.-L. Loday (voir [Lo4], [G-K] et [Fr3]). Pour l'aspect historique, et les liens avec d'autres domaines scientifiques (à savoir la "*Topologie Algébrique*", la "*Physique Théorique*", le lecteur trouvera son bonheur en consultant les ouvrages spécialisés suivants : [May], [L-S-V], [Fr3], [M-S-V], [Ma1]) ainsi que les références qui y sont citées. Nous introduirons les algèbres k-aires et les triples de Jordan au paragraphe 3.3.

3.1 Préliminaires.— Désignons par $\Sigma := \oplus_{n\geq 1}\Sigma_n$ le groupoïde réunion ascendante des groupes symétriques usuels $\Sigma_n \subset \Sigma_{n+1}$. Un Σ-module est la donnée d'une famille $(\mathcal{C}(n))_{n\geq 1}$ où, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{C}(n)$ est un $\mathbb{K}[\Sigma_n]$-module au sens classique (i.e., un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec une action de l'algèbre associative $\mathbb{K}[\Sigma_n]$ du groupe Σ_n). Une "*opérade linéaire*" (ou "*algébrique*") est un Σ-module $\mathcal{P}$ muni d'opérations linéaires

$$\gamma : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_n) \longrightarrow \mathcal{P}(i_1 + i_2 + \cdots + i_n) \tag{3.1.1}$$

appelées "*compositions*" et satisfaisant les axiomes de P. May (associativité et équivariance, et aussi une unité $\mathbf{1}$ dans $\mathcal{P}(1)$, cf. [May]). Elémentairement, étant donnés un entier $n \geq 1$, des éléments $\mu_j \in \mathcal{P}(i_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, un élément $\mu \in \mathcal{P}(n)$, on leur associe par composition l'élément $\gamma(\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ de $\mathcal{P}(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)$. C'est-à-dire une application qui, à tout $m = (i_1 + i_2 + \cdots + i_n)$-uplet $(x_1, x_2 \ldots, x_m)$, associe par "*substitution*" l'élément

$$\gamma(\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n)(x_1, x_2, \ldots, x_m) := \mu(\mu_1(x_1, \cdots, x_{i_1}), \ldots, \mu_m(x_{i_1+1}, \cdots, x_m)).$$

3.1.2 Remarques.— On observera qu'une "*algèbre sur une opérade*" donnée $\mathcal{P}$ (ou une $\mathcal{P}$-*algèbre*) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'applications $\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A$ (appelées "*évaluations*") pour tout entier $n \geq 1$, et compatibles avec les axiomes de P. May. Nous venons en fait de définir un "*morphisme d'opérades*". En effet, si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (vu comme *algèbre abélienne* i.e., $(v_1, v_2) = 0$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$), on peut lui associer une opérade des "*endomorphismes*" $\mathcal{E}\mathrm{nd}(V) := \oplus_{n\geq 1}\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$ d'espaces vectoriels. Pour plus de clarté, nous renvoyons le lecteur aux articles pré-cités et aussi leurs formes non opéradiques de S. Priddy [Pr], Beilinson-Ginzburg-Soergel [B-G-S] et Y. Manin [Man].

3.1.3 Opérades libres.— Le foncteur "*oubli*" de source la catégorie des opérades linéaires (avec les morphismes évidents) et de but celle des espaces vectoriels (les Σ-modules en fait), admet un adjoint à gauche. À tout Σ-module $\mathbb{E}$, on associe opérade "*libre*" $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ qui admet une présentation en termes d'algèbre tensorielle libre pour un carré tensoriel $\boxtimes$ construite par J.-L. Loday (cf. [Lo4]). Mieux, la plupart des algèbres "*binaires intéressantes et connues*" sont gouvernées par une opérade linéaire $\mathcal{P}$ qui peut être vue comme quotient de $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ avec $\mathbb{E} = (0, \mathcal{P}(2), 0, \cdots, 0, \cdots)$ par l'idéal bilatère de l'algèbre associative $\mathcal{P}$ engendré par les relations caractéristiques $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(3)$ (et si $\mathcal{R}$ n'est pas Σ_3-équivariant, on le symétrise par $\mathcal{R} \otimes \mathbb{K}[\Sigma_3]$).

On observera que pour tout type d'algèbres codées par une certaine opérade $\mathcal{P}$, l'objet libre sur un espace vectoriel donné V s'obtient par

$$\mathrm{Libre}_{\mathcal{P}}(V) := \oplus_{n\geq 1}(\mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n})_{\Sigma_n} \tag{3.1.4}$$

c'est-à-dire les coïnvariants pour l'action de Σ_n. En d'autres termes, l'espace $\mathcal{P}(n)$ représente la partie n-multilinéaire de l'algèbre du type $\mathcal{P}$ librement engendrée par l'espace vectoriel de base $x_1, x_2, \ldots, x_n$ où chaque x_i apparaît une et une seule fois. Par exemple les algèbres associatives classiques sont gouvernées par une opérade quadratique (en un sens qui apparaîtra au paragraphe 3.2 suivant). On a $\mathbf{As} := \oplus_{n\geq 1}\mathbf{As}(n)$ où $\mathbf{As}(n) = \mathbb{K}[\Sigma_n]$, c'est-à-dire la "*représentation régulière*" de Σ_n.

3.2 Dualité de Koszul des opérades quadratiques $(k+1)$-aires.— Soit $k \geq 1$ un entier et soit E un Σ_{k+1}-module de dimension finie. En posant $\mathbb{E}(n) = 0$ si $n \neq k+1$ et $\mathbb{E}(k+1) = E$, on obtient une famille $\mathbb{E} := (0,\dots,0,E,0,\dots,0,\dots)$ concentrée en degré $(k+1)$. Dans ces conditions l'opérade libre $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ se décrit par

$$(3.2.1) \qquad \mathcal{T}(\mathbb{E})(n) = \begin{cases} 0, \ si\ n \neq 1\ mod\ k \\ \bigoplus_{\substack{(mk+1)\text{-arbres} \\ (k+1)\text{-aires}}} E(T), \ si\ n = mk+1. \end{cases}$$

L'on voudra bien se reporter à [8] ou à [G-K] pour une illustration en termes d'arbres $(k+1)$-aires, i.e. dont chaque sommet admet exactement $(k+1)$-arêtes rentrantes; les $(mk+1)$-arbres $(k+1)$-aires étant les arbres $(k+1)$-aires ayant exactement $(mk+1)$-feuilles.

Lorsque $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}(\mathbb{E})(2k+1)$ est un sous-espace stable par l'action de Σ_{2k+1}, nous désignons par $(\mathcal{R})$ l'idéal bilatère engendré par $\mathcal{R}$ dans l'opérade libre $\mathcal{T}(\mathbb{E})$ vue comme une algèbre associative dans la catégorie monoïdale des Σ-modules. Le quotient $\mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R}) := \mathcal{T}(\mathbb{E})/(\mathcal{R})$ hérite de la structure d'opérade de $\mathcal{T}(\mathbb{E})$. Nous appelons "*opérade quadratique $(k+1)$-aire engendrée par E modulo les relations $\mathcal{R}$*" toute opérade linéaire de la forme $\mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})$.

Lorsque $k = 1$, on retrouve la définition de Ginzburg-Kapranov. Par cas classique, nous entendrons dorénavant le cas $k = 1$. Une algèbre sur une opérade $(k+1)$-aire est une "*algèbre $(k+1)$-aire*", c'est-à-dire dont le produit fait intervenir $(k+1)$ variables. Le lecteur voudra bien me pardonner les notations "$(k+1)$-*aires*" assez dures à prononcer phonétiquement, mais simplifiant une certaine formulation.

Désignons par $E^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K}) \otimes (\mathbf{sgn})$, le dual linéaire tensorisé par la représentation "*signature*" de Σ_{k+1} (E étant toujours un $\mathbb{K}[\Sigma_{k+1}]$-module de dimension finie), et par $\mathcal{R}^\perp$ l'"*orthogonal*" de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{T}(\mathbb{E}^\vee)(2k+1) \cong \mathcal{T}(\mathbb{E})(2k+1)^\vee$. Nous définissons l'"*opérade duale de $\mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})$ l'opérade quadratique $(k+1)$-aire*"

$$(3.2.2) \qquad \mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})^! := \mathcal{P}^{<k>}(E^\vee,\mathcal{R}^\perp).$$

3.2.3 Remarques.— Puisque le $\mathbb{K}[\Sigma_{k+1}]$-module E est de dimension finie, il est clair que l'on a $(\mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})^!)^! \cong \mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})$. Pour plus de détails sur l'"*orthogonalité*", signalons que J-L. Loday [Lo6] donne un produit scalaire général que l'on peut adapter au gré de certaines amours. Nous étudierons ci-après quelques-unes des algèbres $(k+1)$-aires généralisant les algèbres binaires classiques. Mais avant, signalons qu'il est nécessaire d'avoir une idée précise de l'espace $\mathcal{T}(\mathbb{E})(2k+1)$ dans lequel nous choisissons un sous-espace Σ_{2k+1}-équivariant (cf. [8]):

Proposition 3.2.4. *Le $\mathbb{K}[\Sigma_{2k+1}]$-module $\mathcal{T}(\mathbb{E})(2k+1)$ s'identifie au module induit*

$$(3.2.5) \qquad \mathcal{T}(\mathbb{E})(2k+1) = \mathrm{Ind}_{\Sigma_{k+1}\times\Sigma_k}^{\Sigma_{2k+1}}(E \otimes E).$$

L'espace vectoriel $\mathcal{T}(\mathbb{E})(2k+1)$ est donc isomorphe à un nombre de copies de $E \otimes E$ égal au coefficient binômial $(2k+1)!/(k+1)!k!$.

3.2.6 Remarques.— On observera que dans le cas classique $(k = 1)$, on a :

$$(3.2.7) \qquad \mathcal{T}(\mathbb{E})(3) \cong \mathrm{Ind}_{\Sigma_2\times\Sigma_1}^{\Sigma_3}(E \otimes E) = 3(E \oplus E).$$

Des exemples bien connus de dualité de Koszul apparaissent en homotopie rationnelle, la dualité entre le modèle de Quillen et celui de Sullivan (cf. [F-H-T], [Qu1]) $\mathbf{Com}^! = \mathbf{Lie}$ et

$\mathbf{Lie}^! = \mathbf{Com}$; tout comme l'auto-dualité $\mathbf{As}^! = \mathbf{As}$. Ici $\mathbf{As}$ (resp. $\mathbf{Com}$, resp. $\mathbf{Lie}$) sont les opérades des algèbres binaires associatives non unitaires (resp. associatives commutatives non unitaires, resp. de Lie). Une version non anti-symétrique des algèbres de Lie (appelées "*algèbres de Leibniz*") donne naissance à une foule d'autres algèbres binaires avec un joli diagramme opéradique dont nous avons donné une triangulation (cf. 2.3.7).

3.2.8 Algèbres $(k+1)$-aires associatives .— Soit $k \geq 1$ un entier. Les deux manières d'écrire l'*associativité classique* ($k = 1$), $(ab)c = a(bc)$ ou $(ab)c - a(bc) = 0$, se généralisent en l'*associativité totale* (k relations)

$$(a_0 \cdots a_{i-1}(a_i \cdots a_{i+k})a_{i+k+1} \cdots a_{2k}) = ((a_0 \cdots a_k)a_{k+1} \cdots a_{2k}) \tag{3.2.9}$$

où $i = 1, \cdots, k$, et en l'*associativité partielle* (une relation)

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik}(a_0 \cdots a_{i-1}(a_i \cdots a_{i+k})a_{i+k+1} \cdots a_{2k}) = 0. \tag{3.2.10}$$

Nous désignons par $(\mathbf{tAs}^{<k>})$ (resp. $(\mathbf{pAs}^{<k>})$) la catégorie des algèbres $(k+1)$-aires "*totalement*" (resp. "*partiellement*") associatives. Il est clair que si l'entier k est impair, alors nous avons un foncteur bien défini $(\mathbf{tAs}^{<k>}) \longrightarrow (\mathbf{pAs}^{<k>})$, et que les deux notions coïncident pour $k = 1$. Par ailleurs, on observera que si $(A, \bullet)$ est une algèbre binaire associative, alors le produit défini par $(a_0 \cdots a_k) := a_0 \bullet \cdots \bullet a_k$, où les a_i parcourent A, $i = 1, \ldots, k$, confère à $(A, (---))$ une structure d'algèbre $(k+1)$-aire totalement associative, et ce pour tout entier $k \geq 1$. Avant de construire les objets $(k+1)$-aires associatifs libres, on vérifie aisément que (cf. [6]):

Proposition 3.2.11. *Soit A (resp. B) une algèbre $(k+1)$-aire totalement (resp. partiellement) associative. Alors l'espace vectoriel $A \otimes B$ est une algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative pour le produit diagonal donné par*

$$(a_0 \otimes b_0, \ldots, a_k \otimes b_k) := (a_0 \cdots a_k) \otimes (b_0 \cdots b_k), \ \forall\ a_i \in A, \ \forall\ b_i \in B. \tag{3.2.12}$$

3.2.13 Magmas $(k+1)$-aires.— Soit $k \geq 1$ un entier et soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notons $(\mathbf{A}_n^{<k>}(V))_{n \geq 0}$ la suite de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels définis par récurrence par $\mathbf{A}_0^{<k>}(V) := V$ et, si l'entier $n \geq 1$:

$$\mathbf{A}_n^{<k>}(V) := \bigoplus_{\substack{0 \leq n_0, \ldots, n_k \leq n-1 \\ n_0 + \cdots + n_k = n-1}} \mathbf{A}_{n_0}^{<k>}(V) \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}_{n_k}^{<k>}(V). \tag{3.2.14}$$

Alors la "*multiopération*" induite par la "$(k+1)$-*concaténation*":

$$(w_0 \cdots w_k) := w_0 \otimes \ldots \otimes w_k \ \in \mathbf{A}_n^{<k>}(V) \text{ avec } n := n_0 + \cdots + n_k + 1 \tag{3.2.15}$$

où $w_i \in \mathbf{A}_{n_i}^{<k>}(V)$, confère à $\mathbf{A}_*^{<k>}(V) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{A}_n^{<k>}(V)$ une structure d'algèbre $(k+1)$-aire sans relation, appelée le $(k+1)$-*magma* ou le "*magma*" $(k+1)$-aire. On observera que toute algèbre $(k+1)$-aire est le quotient d'un magma $(k+1)$-aire $\mathbf{A}_*^{<k>}(V)$ pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V bien déterminé, par l'idéal multilatère engendré par les relations caractérisant ladite algèbre $(k+1)$-aire (cf. [6]).

3.2.16 Nombres de Catalan généralisés.— On observera aussi que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbf{A}_n^{<k>}(V)$ est isomorphe à un nombre de copies de $V^{\otimes nk+1}$ égal au "*nombre Catalan*

$(k{+}1)$-*aire*" $a_n^{<k>}$ où la suite $(a_n^{<k>})_{n\geq 0}$ obéit à la relation de récurrence définie par $a_0^{<k>}=1$ et, si l'entier $n\geq 1$:

$$a_n^{<k>} := \sum_{\substack{0\leq n_0,\dots,n_k\leq n-1\\ n_0+\dots+n_k=n-1}} a_{n_0}^{<k>}\cdots a_{n_k}^{<k>}. \tag{3.2.17}$$

Par exemple en bas degré, on a $a_0^{<k>}=1, a_1^{<k>}=1$ et

$$a_2^{<k>}=k+1,\ a_3^{<k>}=(k+1)(3k+2)/2,\ a_4^{<k>}=(k+1)(16k^2+20k+6)/6. \tag{3.2.18}$$

Ainsi la série formelle $Y:=\sum_{n\geq 0} a_n^{<k>}X^{nk+1}$ vérifie l'équation $Y^{k+1}=Y-X$.

3.2.19 Algèbres $(k+1)$-aires associatives libres.— On vérifie que l'"*algèbre $(k+1)$-aire totalement associative libre sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V*" admet pour $\mathbb{K}$-espace vectoriel sous-jacent l'espace

$$\mathbf{tAs}_*^{<k>}(V)=\bar{\mathrm{T}}^{<k>}(V):=\bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes nk+1}, \tag{3.2.20}$$

le produit étant donné par la $(k+1)$-*concaténation* (3.2.15).

Si l'entier $k=2q+1$ est impair, alors l'"*algèbre $2(q+1)$-aire partiellement associative libre sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V*" admet pour $\mathbb{K}$-espace vectoriel sous-jacent l'espace $\mathbf{pAs}_*^{<k>}(V):=\bigoplus_{n\geq 0}\mathbf{pAs}_n^{<k>}(V)$ où $\mathbf{pAs}_0^{<k>}(V):=V$ et, pour $n\geq 1$, les $\mathbf{pAs}_n^{<k>}(V)$ obéissent à la relation de récurrence suivante:

$$\mathbf{pAs}_n^{<k>}(V):=\bigoplus_{\substack{0\leq n_1,\dots,n_k\leq n-1\\ n_1+\dots+n_k=n-1}} V\otimes\mathbf{pAs}_{n_1}^{<k>}(V)\otimes\ldots\otimes\mathbf{pAs}_{n_k}^{<k>}(V). \tag{3.2.21}$$

Ici, le produit $2(q+1)$-aire est donné par: pour tous $W_i\in\mathbf{pAs}_{n_i}^{<k>}(V)$, $i=0,\dots,k$, on pose

$$(W_0\cdots W_k):=W_0\otimes\ldots\otimes W_k \quad \text{si } n_0=0,\ \text{i.e. } W_0\in V \tag{3.2.22}$$

et, si $n_0\geq 1$ et pour $W_0:=w_0^0\otimes\ldots\otimes w_k^0$ avec $w_0^0\in V$, on pose

$$(W_0\cdots W_k):=-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{ik}w_0^0\otimes\ldots\otimes w_{i-1}^0\otimes(w_i^0\cdots w_k^0W_1\cdots W_i)\otimes \otimes W_{i+1}\otimes\ldots\otimes W_k. \tag{3.2.23}$$

De même l'espace vectoriel $\mathbf{pAs}_n^{<k>}(V)$ est isomorphe à un nombre de copies de $V^{\otimes nk+1}$ égal au nombre $p_n^{<k>}$ où la suite $(p_n^{<k>})_{n\geq 0}$ est assujettie à la récurrence définie par $p_0^{<k>}=1$ et, si l'entier $n\geq 1$:

$$p_n^{<k>} := \sum_{\substack{0\leq n_1,\dots,n_k\leq n-1\\ n_1+\dots+n_k=n-1}} p_{n_1}^{<k>}\cdots p_{n_k}^{<k>}. \tag{3.2.24}$$

Par exemple en bas degré, on a $p_0^{<k>}=1,\ p_1^{<k>}=1$ et

$$p_2^{<k>}=k,\ p_3^{<k>}=k(3k-1)/2,\ p_4^{<k>}=(k+1)(8k^2-6k+1)/6. \tag{3.2.25}$$

On observera qu'il existe toutefois des algèbres $(2q+1)$-aires partiellement associatives. En effet, il suffit d'en connaître une, puis d'utiliser la Proposition 3.2.11. Nous en étudierons au chapitre 3.3 suivant concernant les "*Triples de Jordan*" et leurs algèbres duales (au sens de la dualité de Koszul).

3.2.26 Dualité de Koszul pour les algèbres $(k+1)$-aires associatives.— Rappelons que lorsque $\mathcal{P}$ représente l'opérade d'un certain type d'algèbres, l'espace vectoriel $\mathcal{P}(n)$ s'identifie à la partie n-multilinéaire (i.e., engendrée par les monômes contenant chaque x_i une fois et une seule) de l'algèbre libre du même type sur l'espace vectoriel V de base $x_1, \ldots, x_n$ où $n \geq 1$ est un entier.

Puisque l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre $\mathbf{tAs}_*^{<k>}(V)$ est $\bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes nk+1}$, il est clair que l'opérade $\mathbf{tAs}^{<k>}$ des algèbres $(k+1)$-aires totalement associatives est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{tAs}^{<k>}(mk+1) = \mathbb{K}[\Sigma_{mk+1}] \quad \text{(représentation régulière)} \\ \mathbf{tAs}^{<k>}(n) = 0 \quad \text{si } n \neq 1 \bmod k. \end{array} \right. \tag{3.2.27}$$

L'espace vectoriel $E = \mathbf{tAs}^{<k>}(k+1)$ est alors de dimension $(k+1)!$ et est engendré par les éléments

$$x_\sigma := (x_{\sigma(0)} \cdots x_{\sigma(k)}), \ \forall\, \sigma \in \Sigma_{k+1}. \tag{3.2.28}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{T}(E)(2k+1) \cong ((2k+1)!/(k+1)!k!).(E \otimes E)$ est donc de dimension $(2k+1)!(k+1)$ et est engendré par les éléments

$$x_{\sigma,i} := (x_{\sigma(0)} \cdots x_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i)} \cdots x_{\sigma(i+k)})x_{\sigma(i+k+1)} \cdots x_{\sigma(2k)}), \tag{3.2.29}$$

pour tous $\sigma \in \Sigma_{2k+1},\ i = 0, 1, \ldots k$. Le sous-espace $\mathcal{R}_{tAs^{<k>}}$ est engendré par les $(2k+1)!k$ associateurs totaux

$$y_{\sigma,i} := x_{\sigma,i} - x_{\sigma,0}, \ \forall\, \sigma \in \Sigma_{2k+1}, \ \forall\, i = 1, \ldots k. \tag{3.2.30}$$

Ainsi nous avons $\mathbf{tAs}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathbb{K}[\Sigma_{k+1}], \mathcal{R}_{tAs^{<k>}})$.

De même j'ai montré que, si l'entier k est impair, l'opérade $\mathbf{pAs}^{<k>}$ des algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives est telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{pAs}^{<k>}(mk+1) = p_m^{<k>}.\mathbb{K}[\Sigma_{mk+1}] \quad (\, p_m^{<k>} \times \text{ représentation régulière}) \\ \mathbf{pAs}^{<k>}(n) = 0 \quad \text{si } n \neq 1 \bmod k. \end{array} \right. \tag{3.2.31}$$

Puisque les espaces $\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1)$ et $\mathbf{pAs}^{<k>}(k+1)$ sont identiques, il en est de même pour les opérades libres $\mathcal{T}(\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1))$ et $\mathcal{T}(\mathbf{pAs}^{<k>}(k+1))$. Le sous-espace $\mathcal{R}_{pAs^{<k>}}$ est engendré par les $(2k+1)!$ associateurs partiels

$$z_\sigma := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik} x_{\sigma,i} \tag{3.2.32}$$

et nous avons $\mathbf{pAs}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathbb{K}[\Sigma_{k+1}], \mathcal{R}_{pAs^{<k>}})$ si l'entier k est impair.

Théorème 3.2.33. *i) Si l'entier k est impair, alors les opérades $\mathbf{tAs}^{<k>}$ et $\mathbf{pAs}^{<k>}$ sont duales l'une de l'autre.*

ii) Si l'entier k est pair, alors on a $\mathbf{tAs}^{<k>!} \cong \mathcal{P}^{<k>}(\mathbb{K}[\Sigma_{k+1}], \mathcal{R}_{pAs^{<k>}})$.

En fait les espaces $\mathcal{R}_{tAs^{<k>}}$ et $\mathcal{R}_{pAs^{<k>}}$ sont d'une part de dimensions conjuguées par rapport à $\dim(\mathcal{T}(\mathbb{K}[\Sigma_{k+1}])) = (2k+1)!(k+1)$, et s'annihilent d'autre part par le produit scalaire caractérisé par l'orthogonalité de la famille $(x_{\sigma,i})$ et les relations

$$< x_{\sigma,i}, x_{\sigma,i} >:= (-1)^{k(i+1)}\mathrm{sgn}(\sigma), \ \forall\, \sigma \in \Sigma_{k+1}, \ i = 0, 1, \ldots k. \tag{3.2.34}$$

Le point ii) rappelle juste que nous n'avions pas linéairement décrit l'algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre pour cette parité (cf. 3.2.13 et 3.2.19).

3.2.35 Dualité de Koszul pour les algèbres de Lie $(k+1)$-aires.— Introduites par Hanlon-Wachs pour étudier certains problèmes combinatoires liés aux *réseaux de partitions*, les algèbres de Lie $(k+1)$-aires ont un *crochet* $[- - -] : L^{\otimes k+1} \longrightarrow L$ qui porte sur $(k+1)$ variables et qui satisfait l'*anti-symétrie*

$$[x_{\sigma(0)} \cdots x_{\sigma(k)}] = \mathrm{sgn}(\sigma)[x_0 \cdots x_k], \ \forall\, \sigma \in \Sigma_{k+1} \tag{3.2.36}$$

et l'*identité de Jacobi* $(k+1)$*-aire*

$$J(x_0, \cdots, x_{2k}) := \sum_{\sigma \in \Sigma_{2k+1}} [[x_{\sigma(0)} \cdots x_{\sigma(k)}]x_{\sigma(k+1)} \cdots x_{\sigma(2k)}] = 0. \tag{3.2.37}$$

Lorsque $k = 1$, on retrouve les algèbres de Lie binaires classiques. On observera aussi qu'en présence de l'anti-symétrie (3.2.36), l'identité de Jacobi (qui porte sur $(2k+1)!$ termes) se ramène à une relation ayant moins de termes

$$J'(x_0, \cdots, x_{2k}) := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}} [[x_{\sigma(0)} \cdots x_{\sigma(k)}]x_{\sigma(k+1)} \cdots x_{\sigma(2k)}] = 0, \tag{3.2.38}$$

et nous avons $J(x_0, \cdots, x_{2k}) = (k+1)!k!J'(x_0, \cdots, x_{2k})$, où $\mathrm{Sh}_{p,q}$ est l'ensemble des (p,q)-*shuffles* classiques. J'ai noté $(\mathbf{Lie}^{<k>})$ leur catégorie et j'ai démontré que l'on a (cf. [6]):

Théorème 3.2.39. *Toute algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative $(A, (- - -))$ donne naissance à une algèbre de Lie $(k+1)$-aire $A_{Lie} := (A, [- - -])$ pour le crochet défini par*

$$[a_0 \cdots a_k] = \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(a_{\sigma(0)} \cdots a_{\sigma(k)}). \tag{3.2.40}$$

C'est l'analogue du foncteur classique de *Liesation* (2.1.16) et l'algèbre de Lie ainsi obtenue est universelle parmi les morphismes de A vers les algèbres de Lie $(k+1)$-aires. Pour obtenir une dualité analogue à celle de Quillen-Sullivan en homotopie rationnelle, nous introduisons la catégorie $(\mathbf{stAs}^{<k>})$ des "*algèbres $(k+1)$-aires symétriques et totalement associatives*" caractérisées par les relations (3.2.9) et les relations

$$(a_{\sigma(0)} \cdots a_{\sigma(k)}) = (a_0 \cdots a_k), \ \forall\, \sigma \in \Sigma_{k+1}. \tag{3.2.41}$$

L'algèbre $(k+1)$-aire symétrique et totalement associative *libre* sur un espace vectoriel V s'obtient facilement comme étant l'espace $\mathbf{tAs}_*^{<k>}(V) := \bigoplus_{n\geq 0}(V^{\otimes nk+1})_{\Sigma_{nk+1}} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{S}_{nk+1}(V)$, muni de la $(k+1)$-concaténation. Ces algèbres sont gouvernées par une opérade quadratique $(k+1)$-aire $\mathbf{stAs}^{<k>}$ caractérisée par

$$\begin{cases} \mathbf{stAs}^{<k>}(mk+1) = \mathbf{1} & \text{(représentation unité)} \\ \mathbf{stAs}^{<k>}(n) = 0 & \text{si } n \neq 1 \bmod k \end{cases}. \tag{3.2.42}$$

Ainsi l'espace $E = \mathbf{stAs}^{<k>}(k+1)$ est engendré par l'élément $(a_0 \cdots a_k)$. L'espace vectoriel $\mathcal{T}(\mathbf{stAs}^{<k>}(k+1)) \cong (2k+1)!/(k+1)!k!.(E \otimes E)$ est de dimension $(2k+1)!/(k+1)!k!$ et est engendré par les éléments

$$s_\sigma := ((a_{\sigma(0)} \cdots a_{\sigma(k)})a_{\sigma(k+1)} \cdots a_{\sigma(2k)}),\ \forall\ \sigma\ \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}. \tag{3.2.43}$$

Le sous-espace Σ_{2k+1}-équivariant $\mathcal{R}_{stAs^{<k>}}$ est engendré par les $(-1+(2k+1)!/(k+1)!k!)$ associateurs totaux symétriques

$$st_\sigma := s_\sigma - s_{id},\ \forall\ \sigma\ \in \mathrm{Sh}_{k+1,k},\ \sigma \neq \mathrm{id}. \tag{3.2.44}$$

Ainsi nous avons $\mathbf{stAs}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathbf{1}, \mathcal{R}_{stAs^{<k>}})$.

L'algèbre de Lie $(k+1)$-aire *libre* sur un espace vectoriel donné V se construit dans [6] par l'intermédiaire d'une notion d'*enveloppe universelle* partiellement associative. Mais comme dans le cas classique, ce procédé ne donne pas une description satisfaisante de l'espace vectoriel sous-jacent (cf. [Re]). Toutefois, grâce à l'anti-symétrie du crochet de Lie, il n'est pas difficile de se convaincre que si $V = Vect_{\mathbb{K}}\{x_0, \ldots, x_k\}$ est de dimension $(k+1)$, alors la partie $(k+1)$-multilinéaire $E := \mathbf{Lie}^{<k>}(V)(k+1)$ est la représentation signature $(\mathbf{sgn})$ de Σ_{k+1} et est engendré par l'élément $[x_0 \cdots x_k]$. L'espace $\mathcal{T}(\mathbf{Lie}^{<k>}(E))(2k+1) \cong (2k+1)!/(k+1)!k!.(E \otimes E)$ est donc de dimension $(2k+1)!/(k+1)!k!$ et est engendré par les $(2k+1)!/(k+1)!k!$ éléments

$$l_\sigma := [[x_{\sigma(0)} \cdots x_{\sigma(k)}]x_{\sigma(k+1)} \cdots x_{\sigma(2k)}],\ \forall\ \sigma\ \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}. \tag{3.2.45}$$

Le sous-espace Σ_{2k+1}-équivariant $\mathcal{R}_{Lie^{<k>}}$ est engendré par le $(2k+1)$-relateur de Jacobi $J'(x_0, \cdots, x_{2k})$ vue comme la représentation signature $(\mathbf{sgn})$ de Σ_{2k+1}. Ainsi nous avons $\mathbf{Lie}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}((\mathbf{sgn}), (\mathbf{sgn}))$. De même, j'ai démontré dans [6] que

Théorème 3.2.46. *i) Si l'entier k est impair, alors les opérades* $\mathbf{stAs}^{<k>}$ *et* $\mathbf{Lie}^{<k>}$ *sont duales l'une de l'autre.*

ii) Si l'entier k est pair, alors on a $\mathbf{stAs}^{<k>!} \cong \mathcal{P}^{<k>}((\mathbf{sgn}), (\mathbf{sgn}))$.

On observera aussi que dans ma thèse de Doctorat [8, II.4 Cas pathologiques], j'avais donné une manière de construire des algèbres de Lie $2(q+1)$-aires, en partant d'une algèbre $2(q+1)$-aire partiellement associative suffisamment «grosse» décrite par générateurs et relations (de dimension finie). Nous illustrerons cette parité en travaillant dans le chapitre 3.3 suivant avec les Triples de Jordan, et leurs duales. Mais avant cela, montrons quelques critères homologiques permettant de décider de la «Koszulité» des opérades dont nous venons d'établir la dualité de Koszul. Pour ce qui suivra, nous contruisons l'homologie des algèbres $2(q+1)$-aires partiellement associatives et montrons la trivialité de l'homologie des algèbres $2(q+1)$-aires partiellement associatives libres $\mathbf{pAs}^{<k>}(V)$. Nous rappelons que nous avions donné une décomposition du complexe de Hanlon-Wachs pour les algèbres de Lie $(k+1)$-aires en somme directe de sous-complexes dont nous avions déduit l'homologie prédite par la théorie des opérades. Ce dernier résultat généralise la dualité de Quillen-Sullivan en homotopie rationnelle.

3.2.47 Homologie des algèbres $2(q+1)$-aires partiellement associatives.— Soit $(A, (---))$ une algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative où l'entier $k = 2q+1$ est impair. Adoptons les notations $C_n^{<k>}(A) := A^{\otimes nk+1}$ et $(a_0, \ldots, a_{nk}) := a_0 \otimes \ldots \otimes a_{nk} \in C_n^{<k>}(A)$. Puis considérons les applications linéaires $b_0^{<k>} \equiv 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$b_n^{<k>} := \sum_{i=0}^{k(n-1)} (-1)^{ik} d_i : C_n^{<k>}(A) \longrightarrow C_{n-1}^{<k>}(A)$$

où les opérateurs (d_i) sont définis par la formule

$$d_i(a_0,\ldots,a_{nk}) := (a_0,\ldots,a_{i-1},(a_i\cdots a_{i+k}),a_{i+k+1},\cdots,a_{nk}) \tag{3.2.48}$$

$(a_i\cdots a_{i+k})$ désignant le produit dans l'algèbre A. Alors les opérateurs (d_i) satisfont les relations pré-simpliciales $d_id_j = d_{j-k}d_i$ pour $0\le i<j-k$ et pour $n\ge 2$ et pour les entiers i tels que $0\le i\le k(n-2)$, nous avons

$$\sum_{j=i}^{k+i}(-1)^{k(i+j)}d_id_j = 0.$$

On a donc un complexe bien défini, lorsque $k=2q+1$ est impair, dont l'homologie est notée

$$p\mathrm{H}_n^{<k>}(A) := \mathrm{H}_n(C_*^{<k>}(A),\ b_*^{<k>}),\ n\in\mathbb{N}. \tag{3.2.49}$$

Théorème 3.2.50. *Soit $k=2q+1$ un entier impair et soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors pour l'algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre $\mathbf{pAs}^{<k>}(V)$, on a*

$$p\mathrm{H}_n^{<k>}(\mathbf{pAs}^{<k>}(V)) \cong \begin{cases} V & si\ n=0\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Je le démontre en exhibant une homotopie explicite entre les applications identité et nulle. Ainsi, par l'un des résultats classiques de Ginzburg-Kapranov, l'opérade $\mathbf{pAs}^{<k>}$ des algèbres est de Koszul, donc aussi sa duale $\mathbf{tAs}^{<k>}$ lorsque $k=2q+1$ est impair. Nous ne savons pas encore ce qu'il faut décider lorsque l'entier k est pair, mais nous avons un exemple d'étude en les Triples de Jordan. Toutefois, on peut signaler l'«absence de signes» dans les séries génératrices (car $(-1)^{nk+1}$ vaudrait constamment -1), ce qui pourrait contredire le rapport entre la dimension des espaces $\mathcal{P}^{<k>}(n)$ et les coefficients de la série génératrice associée à l'opérade $\mathcal{P}^{<k>}$ (cf. [Lo4]), assurant donc la «non Koszulité» des opérades correspondantes (cf. 3.2.16).

3.2.51 Homologie des algèbres de Lie $(k+1)$-aires (Ph. Hanlon et M. Wachs).— Pour toute algèbre de Lie $(k+1)$-aire $(L,\ [-\ -\ -])$, Hanlon-Wachs associent en toute généralité une théorie d'homologie et montrent sa trivialité lorsque l'on fait le calcul pour les algèbres de Lie $(k+1)$-aires libres (qu'ils construisent en termes d'arbres, cf. [H-W]). Il s'agit de l'homologie du complexe $(\Lambda^*(L),\ \partial_*)$ où la différentielle $\partial_r:\Lambda^r(L)\longrightarrow\Lambda^{r-k}(L)$ opère par $\partial_r\equiv 0$ si $r\le k$ et, pour $r>k$, on a:

$$\partial_r(x_1\wedge\cdots\wedge x_r) := \sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}_{r-k-1,k+1}}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge x_{\sigma(r-k-1)}\wedge[x_{\sigma(r-k)}\cdots x_{\sigma(r)}]. \tag{3.2.52}$$

Puisque ∂_r envoie $\Lambda^r(L)$ dans $\Lambda^{r-k}(L)$, il est clair que l'on a une décomposition du complexe de Hanlon-Wachs en somme directe de k sous-complexes

$$\cdots\to\Lambda^{nk+i}(L)\xrightarrow{\partial}\Lambda^{(n-1)k+i}(L)\to\cdots\to\Lambda^{k+i}(L)\xrightarrow{\partial}\Lambda^i(L)\to 0,\ i=1,\ldots,k.$$

Le «bon» complexe prédit par la théorie des opérades est celui correspondant à la valeur $i=1$, dont nous notons l'homologie $\mathrm{HW}_*(L)$ et dont on sait qu'il réalise

$$\mathrm{HW}_n^{<k>}(\mathbf{Lie}^{<k>}(V)) \cong \begin{cases} V & si\ \mathrm{n}=0\\ 0 & sinon.\end{cases} \tag{Hanlon-Wachs}$$

En d'autres termes l'opérade $\mathbf{Lie}^{<k>}$ des algèbres de Lie $(k+1)$-aires est de Koszul, donc aussi sa duale $\mathbf{stAs}^{<k>}$ des algèbres $(k+1)$-aires symétriques et totalement associatives.

3.2.53 Remarques.— Observons pour terminer ce paragraphe, qu'étant donnée une opérade quadratique $(k+1)$-aire $\mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R}) = \mathcal{T}(\mathbb{E})/(\mathcal{R})$ et une $\mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})$-algèbre A, on définit "*sa théorie d'homologie opéradique notée* $H_*^{\mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})}(A)$", dépendant de l'opérade duale $\mathcal{P}^{<k>!} := \mathcal{P}^{<k>}(E,\mathcal{R})^!$, en considérant le complexe

$$\delta : (\mathcal{P}^{<k>!}(nk+1)^\vee \otimes A^{\otimes\, nk+1})_{\Sigma_{nk+1}} \longrightarrow (\mathcal{P}^{<k>!}((n-1)k+1)^\vee \otimes A^{\otimes\,(n-1)k+1})_{\Sigma_{(n-1)k+1}}$$

où la différentielle δ peut être vue, à l'instar des travaux de J.-L. Koszul, comme étant "*l'unique anti-dérivation qui coïncide avec le produit de l'algèbre A en degré $(k+1)$ et dont la première trivialité $\delta\circ\delta = 0$ traduit exactement les relations en degré $(2k+1)$ définissant l'algèbre A*". On peut trouver une variante, avec des coefficients non triviaux, de cette caractérisation dans l'article de D. Balavoine [Ba].

3.3 Opérade des triples de Jordan (en collaboration avec Marc Wambst).— Introduites par P. Jordan [Jo] dans les années 30 du siècle dernier, les *algèbres de Jordan "axiomatisent"* certaines relations algébriques entre des opérateurs provenant de la Mécanique Quantique. Ce type d'algèbres et leurs avatars furent étudiés de manières éparses par divers auteurs parmi lesquels on peut citer N. Jacobson, K. McCrimmon, K. Meyberg et E. Neher (...voir la bibliographie générale ci-après).

Pour fixer les idées et les notations, une *algèbre de Jordan* sur un corps commutatif de caractéristique nulle (du moins, différente de 2 et 3) est la donnée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel J muni d'une opération binaire et commutative $* : J\times J \to J$ satisfaisant la relation

$$a^{*2}(a*b) = a*(a^{*2}*b),\ \forall\, a,b\in J. \tag{3.3.1}$$

Par exemple, toute algèbre associative binaire $(A,.)$ donne naissance à une algèbre de Jordan $(A,*)$ par

$$a*b := (a.b+b.a)/2,\ \forall\, a,b\in A. \tag{3.3.2}$$

Lorsque l'on oublie l'associativité de l'algèbre A (i.e., on travaille avec un magma), l'obstruction à l'associativité de l'algèbre $(A,*)$ s'écrit

$$Job(a,b,c) := (a*b)*c - a*(b*c) = [(a.b+b.a).c + c.(a.b+b.a) - a.(b.c+c.b) - (b.c+c.b).a]/4.$$

Par conséquent, en supposant que $(A,.)$ est associative, on a

$$Job(a,b,c) = ((b.a.c - b.c.a) - (c.a.b - a.c.b))/4 = [b,[a,c]]/4. \tag{3.3.3}$$

De même, il est clair que l'obstruction à l'associativité de l'algèbre de Lie $A_L := (A,[-,-])$ canoniquement associée à l'algèbre associative $(A,.)$ est

$$Lob(a,b,c) := [[a,b],c] - [a,[b,c]] = -[b,[a,c]] = -4Job(a,b,c). \tag{3.3.4}$$

Ainsi on obtient un nouveau type d'algèbres ternaires que nous baptisons "*algèbres de Job*" et que nous étudierons comme algèbre ternaire au-dessus d'une algèbre binaire fixée (voir aussi 3.5).

3.3.5 Triples de Jordan.— Revenons aux triples de Jordan qui sont l'objet principal de ce paragraphe. Rappelons que d'après O. Loos [Loo], K. Meyberg [Me] et E. Neher [Ne2], un *système triple de Jordan* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V muni d'une application quadratique $P : V \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ satisfaisant les identités

$$(STJ) \qquad \begin{aligned} L(x,y)P(x) &= P(x)L(y,x), \\ L(P(x)y,y) &= L(x,P(y)x), \\ P(P(x)y) &= P(x)P(y)P(x) \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in V$, où l'application $L(x,y) \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ est définie par

$$L(x,y)z := P(x+z)y - P(x)y - P(z)y, \ \forall\ x,y,z \in V. \tag{3.3.6}$$

Mieux, en posant $P(x,y) := P(x+y) - P(x) - P(y)$ l'application bilinéaire associée à P, on peut munir le $\mathbb{K}$-espace vectoriel V d'un produit ternaire (ou 3-produit)

$$\{xyz\} := P(x,z)y = L(x,y)z, \ \forall\ x,y,z \in V. \tag{3.3.7}$$

De manière évidente, ce 3-produit est *partiellement symétrique*, c'est-à-dire

$$\{xyz\} = \{zyx\}, \ \forall\ x,y,z \in V. \tag{3.3.8}$$

De plus, O. Loos [Loo] montre qu'il satisfait un certain nombre d'identités dérivant des identités (STJ), parmi lesquelles *une seule* est linéaire, à savoir:

$$\{xy\{zuv\}\} + \{z\{yxu\}v\} = \{\{xyz\}uv\} + \{zu\{xyv\}\}. \tag{3.3.9}$$

On convient donc d'appeler "*Triple de Jordan*", toute algèbre ternaire $\{---\} : T^{\otimes 3} \to T$ satisfaisant les identités (3.3.8) et (3.3.9). Nous commençons par comparer les triples de Jordan aux algèbres ternaires étudiées précédemment; puis nous déterminons l'opérade des triples de Jordan et son opérade quadratique duale. Il se trouve que cette dernière code les algèbres ternaires *partiellement associatives et partiellement anti-symétriques*, en abrégé "*algèbres papas*" (cf. 3.3.18).

3.3.10 Exemples de triples de Jordan.— Il est clair que tout système triple de Jordan (V, P) définit un triple de Jordan $(V, \{---\})$ par (3.3.7). Les spécialistes montrent aussi que toute "*paire de Jordan*" dotée d'une involution donne naissance à un système triple de Jordan (cf. [Loo, Introduction], [McCr]). De plus, il est bien connu que toute algèbre de Jordan peut être obtenue par une algèbre associative binaire. Somme toute, le produit ternaire dérivant d'une paire de Jordan $(A, *)$ (ou une algèbre associative binaire) est donnée par

$$\{abc\} := a * (b * c) - b * (c * a) + c * (a * b) = (abc + cba)/2. \tag{3.3.11}$$

Plus généralement (cf. [1]), on vérifie sans coup férir que

Proposition 3.3.12. *Pour toute algèbre ternaire totalement associative $(A, (---))$, le 3-produit donné par*

$$\{abc\} := ((abc) + (cba))/2$$

confère à l'espace A une structure de triple de Jordan que nous notons $A_J := (A, \{---\})$.

3.3.13 Remarques.— Soient $(\mathbf{Jt})$ la catégorie des triples de Jordan et $(\mathbf{tAs})$ celle des algèbres ternaires totalement associatives (cf. 3.2). Alors le foncteur

(3.3.14) $$(-)_J : (\mathbf{tAs}) \longrightarrow (\mathbf{Jt}), \quad A \mapsto A_J$$

est analogue au foncteur classique de *Liesation* des algèbres associatives:

(3.3.15) $$(-)_L : (\mathbf{As}) \stackrel{-}{\longrightarrow} (\mathbf{Lie}), \quad A \mapsto A_L, \ ([a,b] := ab - ba).$$

Ce foncteur admet un adjoint à gauche UJ : $(\mathbf{Jt}) \longrightarrow (\mathbf{tAs})$ défini par

(3.3.16) $$\mathrm{UJ}(V, \{- - -\}) := \bar{\mathrm{T}}^{<2>}(V)/(x \otimes y \otimes z + z \otimes y \otimes x - 2\{xyz\}).$$

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\bar{\mathrm{T}}^{<2>}(V)_J$ le triple de Jordan associé à l'algèbre ternaire totalement associative libre sur V. Alors on a

Théorème 3.3.17. *Le triple de Jordan libre sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est la sous-algèbre $Jt(V)$ de $\bar{\mathrm{T}}^{<2>}(V)_J$ engendré par V, c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-triples de Jordan de $\bar{\mathrm{T}}^{<2>}(V)_J$ contenant le $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.*

3.3.18 Algèbres papas.— Une algèbre ternaire *partiellement associative et partiellement anti-symétrique* (ou *algèbre papas* en abrégé) est une algèbre ternaire $(P, (- - -))$ dont le 3-produit satisfait l'*anti-symétrie partielle* $(abc) = -(cba)$ et la relation

(3.3.19) $$((a_1a_2a_3)a_4a_5) + (a_1(a_2a_3a_4)a_5) + (a_1a_2(a_3a_4a_5)) = 0$$

pour tous $a, b, c, a_i \in A, i = 1, \cdots, 5$. Comme précédemment l'algèbre papas *libre* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V peut être obtenue comme quotient du 3-magma libre sur V (cf. 3.2.13) par son idéal trilatère engendré par les relations génératrices (i.e., (3.3.19) et l'anti-symétrie partielle).

3.3.20 Exemples.— Supposons que $V := Vect_{\mathbb{K}}\{a, b\}$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et que nous tronquions toutes les composantes $V^{\otimes j}$ où $j \geq 6$ dans 3-magma libre sur V. Alors on vérifie aisément que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $V(a, b)$ de dimension 7 engendré par

(3.3.21) $$a, \ b, \ (aab), (abb), \ (aa(aab)), \ (ba(aab)), \ (a(abb)b)$$

est une 3-algèbre papas. Pour en fabriquer d'autres, il suffit de remarquer que (cf. 3.2.11 et 3.2.41)

Proposition 3.3.22. *Soient S (resp. P) une 3-algèbre symétrique et totalement associative (resp. papas). Alors l'espace vectoriel $S \otimes P$ est une algèbre papas pour le 3-produit diagonal donné par*

(3.3.23) $$(a_0 \otimes b_0, a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) := (a_0a_1a_2) \otimes (b_0b_1b_2), \ \forall \ a_i \in S, \ \forall \ b_i \in P.$$

3.3.24 Remarques.— On observera que si $(T, \{- - -\})$ est un triple de Jordan et si $(P, (- - -))$ est une algèbre papas, alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $T \otimes P$ est une algèbre de Lie ternaire pour le crochet donné par (cf. [G-K, 2.2.9])

$$\begin{aligned}[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3] := & \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_3 \\ i=1,2,3}} \mathrm{sgn}(\sigma)\mu_i(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \otimes \mu_i^{\vee}(b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, b_{\sigma(3)}) \\ & = 6(\{a_1a_2a_3\} \otimes (b_1b_2b_3) + \{a_2a_3a_1\} \otimes (b_2b_3b_1) + \{a_3a_1a_2\} \otimes (b_3b_1b_2)).\end{aligned}$$

Ici on a considéré les opérations $\mu_i : T^{\otimes 3} \to T$ et leurs duales $\mu_i^\vee : P^{\otimes 3} \to P$ données par

$$\mu_i(a_1, a_2, a_3) := \{a_{\tau^i(1)} a_{\tau^i(2)} a_{\tau^i(3)}\} \quad \text{et} \quad \mu_i^\vee(b_1, b_2, b_3) := (b_{\tau^i(1)} b_{\tau^i(2)} b_{\tau^i(3)}), \tag{3.3.25}$$

où $\tau := (123) \in \Sigma_3, \tau^2 = \tau \circ \tau = (132)$, et $\tau^3 = \mathrm{id}$.

3.3.26 Dualité de Koszul des triples de Jordan et des algèbres papas.— Dans ce paragraphe, nous définissons l'opérade des triples de Jordan, ainsi que celle des algèbres papas. Puis nous montrons qu'elles sont duales l'une de l'autre. Ceci donne un exemple de dualité de Koszul des algèbres $(k+1)$-aires qui semblait manquer dans [8] lorsque l'entier k est pair.

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 engendré par les éléments

$$X_1 := \{a_2 a_1 a_3\}, \ X_2 := \{a_1 a_2 a_3\} \quad \text{et} \quad X_3 := \{a_1 a_3 a_2\}. \tag{3.3.27}$$

L'action de $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ sur $\mathbb{E}$ se définit naturellement, par exemple on a

$$(\tau_{12} - 3\tau_{123}).X_3 = X_2 - 3X_1 \text{ où } \tau_{123} = (123) \text{ et } \tau_{12} = (12).$$

En fait on a surtout

$$X_1 = \tau_{123}.X_2, \ X_3 = \tau_{23}.X_2 \quad \text{et} \quad \sigma.X_i = X_{\sigma(i)}, \ \sigma \in \Sigma_3. \tag{3.3.28}$$

De même, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{F}$ dimension 3 sur $\mathbb{K}$ engendré par les éléments

$$Y_1 := (b_2 b_1 b_3), \ Y_2 := (b_3 b_2 b_1) \quad \text{et} \quad Y_3 := (b_1 b_3 b_2) \tag{3.3.29}$$

sur lesquels Σ_3 opère par $\sigma.Y_i = \mathrm{sgn}(\sigma) Y_{\sigma(i)}, \ \sigma \in \Sigma_3$; puis on l'étend par linéarité sur l'algèbre $\mathbb{K}[\Sigma_3]$. Des longs et fastidieux calculs réalisés par Marc Wambst permettent d'établir le résultat attendu

Théorème 3.3.30 (Gnedbaye-Wambst). *Les triples de Jordan (resp. algèbres papas) sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle sont gouvernées par une opérade quadratique ternaire $\mathbf{Jord}_3 = \mathcal{P}^{<3>}(\mathbb{E}, \mathcal{R})$ (resp. $\mathbf{Papas} = \mathcal{P}^{<3>}(\mathbb{F}, \mathcal{S})$) et on a la dualité de Koszul ternaire*

$$\mathbf{Jord}_3^! \cong \mathbf{Papas} \quad \textit{et} \quad \mathbf{Papas}^! \cong \mathbf{Jord}_3 \tag{3.3.31}$$

où $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}(\mathbb{E})(5)$ est le sous-espace vectoriel de dimension 50 sur $\mathbb{K}$ engendré par les éléments

$$\sigma.(A + \tau_{35} A - \tau_{15}\tau_{24}.A - \tau_{13}.B), \ \sigma \in \Sigma_5 \tag{3.3.32}$$

et $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(\mathbb{F})(5)$ est le sous-espace vectoriel de dimension 40 sur $\mathbb{K}$ engendré par les éléments

$$\sigma.(A' + \tau_{15}\tau_{24}.A' + B'), \ \sigma \in \Sigma_5. \tag{3.3.33}$$

Ici on a posé $A := \{\{a_1 a_2 a_3\} a_4 a_5\}$ et $B := \{a_1 \{a_2 a_3 a_4\} a_5\}$ (resp. $A' := ((b_1 b_2 b_3) b_4 b_5)$ et $B' := (b_1 (b_2 b_3 b_4) b_5)$).

3.4 Complexe de Livernet-Wambst pour les triples de Jordan.— Muriel Livernet et Marc Wambst, par l'approche des ⟪codérivations⟫ introduites par David Balavoine [Ba], ont montré que l'on a un complexe bien défini pour les triples de Jordan. Il s'agit du complexe de chaînes $(LW_*(J), d_*)$ où la différentielle $d_n : J^{\otimes\,(2n+1)} \longrightarrow J^{\otimes\,(2n-1)}$ est définie par récurrence par $d_0(x) := 0$, $d_1(x \otimes y \otimes z) := \{xyz\}$ et, pour $n \geq 2$, on pose

$$(3.4.1) \quad d_{n+1}(x \otimes y \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2n+1}) := {}^{<x,y>}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2n+1}) \\ -2x + 1 \otimes y \otimes d_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2n+1}).$$

Ici l'on a noté

$$(3.4.2) \quad {}^{<x,y>}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2n+1}) := \sum_{i=1}^{n} (x_1 \otimes \ldots x_{i-1} \otimes \delta(x, y, x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{2n+1})$$

où

$$\delta(x, y, x_i) = \begin{cases} \{xyx_i\} & \text{si } i \text{ est impair,} \\ -\{yxx_i\} & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Les vérifications nécessaires se font comme dans le cas des algèbres Leibniz binaires ou n-aires (cf. [Lo1, 10.6.3], [C-L-P]). On la note provisoirement $\mathrm{HLW}_*(J)$ parce qu'aucun calcul n'a encore été effectué là-dessus, et nous ignorons si c'est la théorie d'homologie prédite opéradiquement. Et pendant que nous y sommes, signalons que Casas-Loday-Pirashvili ont montré que leurs n-algèbres de Leibniz avaient un complexe de chaînes analogue à celui de Livernet-Wambst, sans faire allusion aucune aux théories opéradiques récemment développées. Toutefois, ils obtiennent dans [C-L-P] la trivialité des modules d'homologie semblable aux trivialités des modules d'homologie (3.2.50) et (3.2.51), par une méthode dont la *joliesse* n'a d'égal que celle de la Duchesse d'Angoulême ou la jeunesse rebelle de Winona Ryder. Il serait bon de s'en inspirer pour la recherche d'une théorie d'homologie satisfaisante pour les triples de Jordan ou les algèbres de Jordan déjà abordées sans grand succès par N. Glassmann. Apparemment, le complexe de Livernet-Wambst serait plutot celui donnant l'homologie de Quillen des triples de Jordan, ce qui est largement suffisant pour avancer.

3.5 Perspectives [En collaboration avec J.-L. Loday et M. Wambst, cf. [10]].— On se propose d'étudier la notion de lissité pour des algèbres sur une opérade quelconque. Une première généralisation pour les algèbres associatives a déjà été faite par J. Cuntz et D. Quillen (baptisée algèbre quasi-libre). L'un des buts est de trouver une notion de formes différentielles dans ce cadre avec une généralisation du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg.

References

[A-L] S.A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 449–463.

[Ba] D. Balavoine, *Homology and cohomology with coefficients, of an algebra over a quadratic operad*, J. Pure Appl. Algebra **132** (1998), 221–258.

[B-C] H.J. Baues, D. Conduché, *The central series for Peiffer commutators in groups with operators*, J. Algebra **133** (1990), 1–34.

[B-G-S] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, Journ. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 473–527.

[Bl] S. Bloch, *The dilogarithm and extensions of Lie algebras*, Alg. K-theory, Evanston 1980, Springer Lecture Notes in Math. **854** (1981), 1–23.

[Ca-L] J. M. Casas, M. Ladra, *Perfect crossed modules in Lie algebras*, Comm. Alg. **23** (1995), 1625-1644.

[C-L-P] J. M. Casas, J.-L. Loday, T. Pirashvili, *Leibniz n-algebras*, Forum Math. **14** (2002), 189-207.

[Cat] J.-L. Cathelineau, *Homologie de degré trois d'algèbres de Lie simples déployées étendues à une algèbre commutative*, L'Enseign. Math. **33** (1987), 159-173.

[Ch] F. Chapoton, *Un endofoncteur de la catégorie des opérades*, Springer Lecture Notes in Math. **1763** (2001), 105-110.

[Ch-L] F. Chapoton , M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Inter. Math. Research Notes **8** (2001), 395-408.

[C-E] C. Chevalley, S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. A.M.S. **63** (1948), 85-124.

[Cu] Ch. Cuvier, *Algèbres de Leibnitz : définitions, propriétés*, Ann. Ecole Norm. Sup. **27** (1994), 1-45.

[Dz] A. Dzhumadil'daev, *Cohomologies and deformations of right-symmetric algebras*, J. Math. Sciences (New York) **93** (1999), 836-876.

[El] G. J. Ellis, *A non-abelian tensor product of Lie algebras*, Glasgow Math. J. **33** (1991), 101-120.

[F-H-T] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, vol. 205, Graduate Texts In Math. (Springer-Verlag), 2001.

[Fra] A. Frabetti, *Leibniz homology of dialgebras of matrices*, J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), 123-141.

[Fre1] B. Fresse, *Cogroups in algebras over an operad are free algebras*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), 637-676.

[Fre2] B. Fresse, *Lie theory of formal groups over an operad*, J. Algebra **202** (1998), 455-511.

[Fre3] B. Fresse, *Koszul duality for operads and homology of partition posets*, Prépublication de l'Université de Nice, 2002.

[Gau] Ph. Gaucher, *Lambda-opérations sur l'homologie d'une algèbre de Lie des matrices*, K-Theory **13** (1998), 151-167.

[Gar] H. Garland, *The arithmetic theory of free loop spaces*, Publ. Math. IHES **52** (1980), 181-312.

[Ge] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. **78** (1963), 267–288.

[Ge-Ka] E. Getzler, M. Kapranov, *Cyclic operads and cyclic homology (preprint 1994).*

[Ge-Jo] E. Getzler, J.D.S. Jones, *Operads, homotopy algebras and iterated integrals for double loop (preprint, http://arXiv.org/abs/hep-th/9403055).*

[G-K] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994), 203-272.

[Gl] N. Glassman, *Cohomology of Jordan algebras*, J. Algebra **15** (1970), 167-194.

[Gu] D. Guin, *Cohomologie des algèbres de Lie croisées et K-théorie de Milnor additive*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45 (1)** (1995), 93-118.

[Hd1] A. Haddi, *Homologie des algèbres de Lie étendues à une algèbre commutative*, Comm. Alg. **20** (1992), 1145-1166.

[Hd2] A. Haddi, *Les algèbres de Kac-Moody et l'homologie diédrale*, in : S. Gonzales (ed.), *Non-associative Algebra and its Applications (Oviedo, 1993)*, Math. Appl., Kluwer Acad. Publ., Dorderecht **303** (1994), 176-178.

[Hd3] A. Haddi, *Homologie de degré trois des algèbres de Lie étendues par une algèbre commutative*, C. R. Acad. sci. Paris, Série I Math. **321** (1995), 965-968.

[Hn] Ph. Hanlon, *Cyclic homology and the Macdonald conjectures*, Invent. Math. **86** (1986), 131-159.

[H-W] Ph. Hanlon, M. Wachs, *On Lie k-algebras*, Advances in Math. **113** (1995), 206-236.

[H-S] G. Hochschild, J.-P. Serre, *Cohomology of Lie algebras*, Annal. Math. **57** (1953), 591–603.

[Ja1] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, vol. 39, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. (Providence), 1969.

[Ja2] N. Jacobson, *Lie and Jordan triple systems*, Amer. J. Math. **49** (1971), 149–170.

[Jo] P. Jordan, *Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1933), 209- 217.

[Kas] Ch. Kassel, *L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes*, Invent. Math. **91** (1988), 221–251.

[K-L] Ch. Kassel, J.-L. Loday, *Extensions centrales des algèbres de Lie*, Annal. Inst. Fourier **32** (1982), 119–142.

[K-P] R. Kurdiani, T. Pirashvili, *A Leibniz algebra structure on the second tensor power*, J. Lie Theory **12** (2002), 583-596.

[Li1] M. Livernet, *Rational homotopy of Leibniz algebras*, Manuscripta Math. **96** (1998), 295–315.

[Li2] M. Livernet, *On a plus-construction for algebras over an operad*, K-theory **18** (1999), 317–333.

[Lo1] J.-L. Loday, *Cyclic homology* (second edition), vol. 301, Grund. math. Wiss., Springer-Verlag, 1998.

[Lo2] J.-L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, L'Enseignement Math. **39** (1993), 269–293.

[Lo3] J.-L. Loday, *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras*, Math. Zeit. **221** (1996), 41-47.

[Lo4] J.-L. Loday, *La renaissance des opérades*, Séminaire Bourbaki (Exp. No 792) **237** (1996), 47-74.

[Lo5] J.-L. Loday, *Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres)*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **321** (1995), 141-146.

[Lo6] J.-L. Loday, *Dialgebras* **1763** (2001), Springer Lecture Notes in Math..

[L-P] J.-L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Annal. **296** (1993), 139-158.

[L-Q] J.-L. Loday, D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helvetici **59** (1984), 565-591.

[L-S-V] J.-L. Loday, J. Stasheff, A. Voronov (editors), *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences*, vol. 202, Contemp. Math. (AMS), 1997.

[Loo] O. Loos, *Jordan Pairs*, vol. 460, Lect. Notes in Math. (Springer-Verlag), 1975.

[L-M] O. Loos, K. McCrimmon, *Speciality of Jordan triple systems*, Comm. in Alg. **5** (1977), 1057–1082.

[Man] Y. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, vol. 37, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1987, pp. 191–205.

[Ma1] M. Markl, *Distributive laws and Koszulness*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **46** (1996), 307–323.

[Ma2] M. Markl, *Distributive laws, bialgebras and cohomology*, Operads: Proceedings of Renaissance Conferences, Contemp. Math. (AMS) **202** (1997), 1–270.

[M-S-S] M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, vol. 96, Math. Surveys and Monographs (AMS), 2002.

[May] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer Lecture Notes in Math. **271** (1972), 47-674.

[McCl] J. Mc Cleary, *User's guide to spectral sequences*, vol. 12, Mathematics Lecture Series (Publish or Perish, Inc.), 1985.

[McCr1] K. McCrimmon, *A general theory of Jordan rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **56** (1960), 1072–1079.

[McCr2] K. McCrimmon, *Jordan triple systems: insights and ignorance*, Contemp. Math. (AMS) **131(2)** (1992), 625-637.

[Me] K. Meyberg, *Lectures on algebras and triple systems*, Lecture Notes, Univ. of Virginia (Charlottesville), 1972.

[Ne1] E. Neher, *On the classification of Lie and Jordan triples*, Comm. Algebra **13** (1985), 2615–2667.

[Ne2] E. Neher, *Jordan triple systems by the grid approach*, vol. 1280, Lectures Notes in Math. (Springer-Verlag), 1987.

[Ou1] J.M. Oudom, *La diagonale en homologie des algèbres de Leibniz*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **320** (1995), 1165–1170.

[Ou2] J.M. Oudom, *Théorème de Leray dans la catégorie des algèbres sur une opérade*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **329** (1999), 101–106.

[Pi] T. Pirashvili, *On Leibniz homology*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), 401–411.

[Pr] S. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. AMS, **152** (1970), 39–60.

[Qu1] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Maths **90** (1969), 205–295.

[Qu2] D. Quillen, *K_0 for nonunital rings and Morita invariance*, J. Reine Angew. Math. **472** (1996), 197–217.

[Re] Chr. Reutenauer, *Free Lie algebras*, vol. 7, London Math. Soc. Monographs. New Series, 1993.

[Ro] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math. **23** (1976), 187–188.

[Sa] I. Satake, *A formula in simple Jordan algebra*, Tohoku Math. J. **36** (1984), 611–622.

[Ts] B.L. Tsygan, *The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology*, Russian Math. Survey **38** (1983), 198–199.