

**UNIVERSITE LOUIS PASTEUR - STRASBOURG 1**

**THESE DE DOCTORAT**

**Discipline :** Mathématiques

**Présentée par :** Abdelhadi Belkhirat

**Titre :** “Sur des métriques dans l’espace de Teichmüller.”

**Unité de recherche :** UMR N7501 CNRS. IRMA

**Directeur de thèse :** Papadopoulos Athanase  
Chargé de recherche au C.N.R.S

**2**

---

2

*À mes parents,  
à Mouna,  
à Ferial.*



# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse M. Athanase Papadopoulos pour son soutien indéfectible surtout dans les moments de doute, pour sa patience, sa disponibilité, sa rigueur et ses constants encouragements.

Je remercie vivement M. Marc Troyanov de m'avoir invité à Lausanne et pour son aide et ses conseils lors de la rédaction de ce texte. Travailler avec lui fût pour moi un grand honneur et une occasion de profiter de son esprit vif et de sa grande culture scientifique, qu'il en trouve ici le témoignage de ma reconnaissance.

Je remercie également, Messieurs les professeurs Patrick Foulon et Ruth Kellerhals qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs sur ma thèse. Plusieurs de leurs travaux m'ont été une source d'inspiration. Mes remerciements vont aussi à M. Vladimir Touraev qui a bien voulu faire partie du Jury.

Je saisis cette occasion pour témoigner toute mon amitié à Djamel, Mourad, Denis, Saïd, Nordine et Fabrizio pour leur soutien durant une période difficile.

Je ne saurais oublier de remercier le ministère de l'enseignement supérieur Algérien pour son soutien financier et d'avoir accepté de prolonger ma bourse.

Enfin, je dédie cette thèse à mes parents, mes frères, mes amis et à tous ceux qui m'ont aidé un jour.



# Introduction et description des résultats obtenus

On s'intéresse dans cette thèse à l'étude des propriétés de certaines 'métriques' définies sur l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  d'une surface  $S$  connexe, orientable et fermée ou de volume fini. On rappelle qu'on peut définir plusieurs métriques sur  $\mathbb{T}(S)$ , entre autres la métrique de Weil-Petersson, la métrique de Teichmüller et dernièrement Thurston a défini une nouvelle métrique non symétrique qu'on appellera dans cette thèse la pseudo-métrique de Thurston (voir l'appendice, pour une définition de pseudo-métrique), comme suit:

$$\mathcal{K}(g, h) = \sup_{\alpha \in \mathbf{S}} \log \left( \frac{l_h(\alpha)}{l_g(\alpha)} \right), \quad (*)$$

où  $\mathbf{S}$  est l'ensemble des classes d'isotopie de courbes fermées simples non homotopes à un point sur la surface et  $l_h(\alpha)$  désigne la longueur mesurée avec la métrique hyperbolique  $h$  de l'unique géodésique dans la classe d'isotopie de  $\alpha$ . Il montre que cette quantité est égale à:

$$L(g, h) = \inf_{\varphi \sim \text{id}} \log (\mathcal{L}(\varphi)), \quad (**)$$

où  $\varphi$  est un homéomorphisme de la surface et

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sup_{x \neq y} \left( \frac{d_h(\varphi(x), \varphi(y))}{d_g(x, y)} \right)$$

est sa constante de Lipschitz. La pseudo-métrique  $\mathcal{K}$  est séparante et elle n'est pas symétrique (voir le paragraphe 1.9.6 du premier chapitre).

Cette thèse est consacrée à l'étude et à la comparaison entre la métrique de Teichmüller et la pseudo-métrique de Thurston. Certains résultats concernent

une surface  $S$  fermée de genre  $g \geq 2$ , d'autres concernent le tore pointé  $S_{1,1}$  et enfin on décrit certaines propriétés d'une surface  $T^2$  de genre 1 (tore sans pointe). La thèse se compose de quatre chapitres relativement indépendants les uns des autres, et d'un appendice où on a rassemblé des définitions et des résultats utilisés tout au long de cette thèse et d'un exemple élémentaire de pseudo-métrique  $\delta$  définie sur le demi plan supérieur  $\mathbb{H}^2$ .

Dans le premier chapitre, on définit l'espace de Teichmüller d'une surface  $S$  de genre  $g \geq 2$  et puis on rappellera les notions de bases de la théorie de Teichmüller, on introduit la métrique de Teichmüller et on fixera les notations utilisées dans cette thèse. On aborde dans la deuxième partie, quelques notions sur la théorie de Thurston concernant les feuilletages et les laminations géodésiques mesurés, et on définit la pseudo-métrique de Thurston, qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

Dans le second chapitre, on compare le comportement asymptotique de certains rayons géodésiques dans l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  d'une surface fermée  $S$  de genre  $g \geq 2$ . Plus précisément:

Soit  $r$  un rayon géodésique pour la métrique de Teichmüller dont la direction est donnée par une différentielle quadratique de Jenkins-Strebel  $q$ , dont le nombre de cylindres doit être strictement inférieur à  $3g - 3$ , et  $r'$  un rayon géodésique pour la pseudo-métrique de Thurston dont la direction est donnée par le feuilletage horizontal associé à  $q$ . Nous montrons que ces deux rayons  $r$  et  $r'$  ne restent pas à une distance bornée l'un de l'autre. Il y a ici deux résultats distincts, la distance étant mesurée une première fois avec la métrique de Teichmüller et une seconde fois avec la pseudo-métrique de Thurston. On dira que les deux rayons  $r$  et  $r'$  sont *divergents*.

Le troisième chapitre est divisé en deux parties. Dans la première, on compare la métrique de Teichmüller  $d$  et la pseudo-métrique Thurston  $\mathcal{K}$  dans l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S_{1,1})$ , où  $S_{1,1}$  désigne un tore pointé. On montre que l'application:

$$id : (\mathbb{T}(S_{1,1}), d) \longrightarrow (\mathbb{T}(S_{1,1}), \mathcal{K})$$



n'est pas une quasi-isométrie. Pour une définition de cette notion voir la définition A.2 de l'appendice. On rappelle que  $\mathbb{T}(S_{1,1})$  muni de la métrique de Teichmüller est isométrique au disque de Poincaré. La technique de la démonstration repose sur des estimations entre les longueurs extrémales et hyperboliques d'une classe d'homotopie de courbes simples fermées et non homotopes à un point ou à une pointe, dues à Maskit, et sur un exemple dans le cas du tore pointé où ces inégalités prennent une forme "presque optimale", cet exemple est dû aussi à Maskit.

Dans la deuxième partie, on montre que  $d$  et  $\mathcal{K}$  sont reliées par une relation qui ressemble à la double inégalité figurant dans la définition A.1, sauf que la constante  $c = c(y)$  figurant dans cette même inégalité dépend seulement de la structure conforme marquée  $y$  et non de la structure conforme marquée  $x$ . Ce dernier résultat est démontré pour toute surface, de caractéristique d'Euler-Poincaré négative.

Dans le chapitre 4, on compare les pseudo-métriques  $\mathcal{K}$  et  $L$  sur l'espace de Teichmüller du tore.

Les pseudo-métriques  $\mathcal{K}$  et  $L$  définies par (\*) et (\*\*) respectivement, ne sont pas invariantes lorsqu'on multiplie l'une ou l'autre des métriques par une constante positive. Dans le cas du tore, où l'espace de Teichmüller est construit à partir des métriques plates, cela pose un problème et nous devons redéfinir  $\mathcal{K}$  de façon que cette quantité soit invariante sous l'action de  $\mathbb{R}_+^*$ . On propose alors ces nouvelles définitions:

Dans un tore marqué  $T^2$ , chaque élément de  $\mathbb{Z}^2$  correspond à une classe d'isotopie de courbe sur  $T^2$ . On notera dans la suite  $\epsilon$  la classe d'isotopie correspondant au générateur  $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ .

A toute paire  $g, h$  de métriques sur  $T^2$ , on associe donc le réel

$$\mathcal{K}(g, h) = \sup_{\alpha \in \mathbf{S}(T^2)} \log \left( \frac{l_h(\alpha)/l_h(\epsilon)}{l_g(\alpha)/l_g(\epsilon)} \right),$$

où  $\mathbf{S}(T^2)$  désigne l'ensemble des classes d'isotopies de lacets non triviaux dans  $T^2$  et  $\epsilon \in \mathbf{S}(T^2)$  est la classe d'isotopie définie plus haut.

Il est clair que cette quantité est invariante sous l'action de  $\mathbb{R}_+^*$  et sous l'action du groupe  $\text{Diff}_0(T^2)$ , en particulier  $\mathcal{K}$  définit une fonction

$$\mathcal{K} : \mathbb{T}(T^2) \times \mathbb{T}(T^2) \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est une pseudo-métrie.

On définit la *pseudo-métrie  $L$  de Lipschitz normalisée* entre deux surfaces riemanniennes marquées  $(S, g)$  et  $(S', h)$  de genre 1 par

$$L(g, h) := \inf_{\varphi} (\log \mathcal{L}(\varphi)),$$

où  $\varphi : S \rightarrow S'$  est un homéomorphisme préservant le marquage et

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sup_{x \neq y} \left( \frac{d_h(\varphi(x), \varphi(y))/l_h(\epsilon)}{d_g(x, y)/l_g(\epsilon)} \right).$$

Observons que  $L(g, h)$  est une quantité invariante sous l'action de  $\mathbb{R}_+^*$  et de  $\text{Diff}_0(T^2)$

$$L(\lambda\phi^*g, \mu\psi^*h) = L(g, h)$$

pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\phi \in \text{Diff}_0(S)$  et  $\psi \in \text{Diff}_0(S)$ . En particulier,  $L$  définit une fonction sur l'espace de Teichmüller du tore

$$L : \mathbb{T}(T^2) \times \mathbb{T}(T^2) \rightarrow \mathbb{R},$$

et il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une pseudo-métrie.

On montre que  $\mathcal{K}$  est égale à la pseudo-métrie de Lipschitz  $L$  en construisant explicitement une application Lipschitzienne  $f$  telle que sa constante de Lipschitz  $\text{Lip}(f)$  soit égale à  $\exp(\mathcal{K}(\cdot, \cdot))$ . On montre que  $\mathcal{K}$  est aussi égale à la pseudo-métrie  $\delta$  définie dans l'appendice, (voir proposition A.4). Il en résulte que  $\mathcal{K}$  est une pseudo-métrie non séparante (contrairement au cas où  $\mathcal{K}$  est définie sur des structures hyperboliques marquées) et non symétrique; et que son symétrisé  $S\mathcal{K}$  est égal à la métrique de Teichmüller  $d$ , (ou à la métrique de Poincaré  $h$ ). On montre aussi qu'il n'existe pas d'application

$$f : (\mathbb{T}(T^2), d) \longrightarrow (\mathbb{T}(T^2), \mathcal{K})$$

qui soit une quasi-isométrie. La démonstration repose sur le résultat démontré dans l'appendice (voir proposition A.7). Ce dernier résultat est plus fort que le résultat démontré dans le chapitre 3 dans le cas des métriques hyperboliques définies sur le tore pointé, puisque on a montré dans ce cas que l'identité (et non pas une application quelconque) n'est pas une quasi-isométrie.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels sur la théorie de Teichmüller</b>	<b>17</b>
1.1	Introduction . . . . .	17
1.2	Définition de l'espace de Teichmüller . . . . .	17
1.3	Structure conforme, structure complexe . . . . .	19
1.3.1	Structure hyperbolique, structure complexe . . . . .	19
1.4	(p,q)-différentielles . . . . .	20
1.5	Application quasi-conforme . . . . .	21
1.6	Distance de Teichmüller . . . . .	22
1.6.1	Différentielles quadratiques . . . . .	23
1.7	Application et géodésique de Teichmüller . . . . .	26
1.7.1	L'expression locale de l'application de Teichmüller $f_{K,q}$ . . . . .	27
1.8	Expression de $d$ en fonction de la longueur extrémale . . . . .	28
1.9	Pseudo-métrique et géodésique de Thurston . . . . .	30
1.9.1	Feuilletages mesurés . . . . .	30
1.9.2	Laminations géodésiques mesurées . . . . .	33
1.9.3	Couplage de feuilletages mesurés . . . . .	34
1.9.4	Action du groupe modulaire . . . . .	35
1.9.5	Pseudo-métrique de Thurston . . . . .	37

1.9.6	Non-symétrie de la pseudo-métrie de Thurston . . . . .	38
1.10	Une paramétrisation de $\mathbb{T}(S)$ et les “Stretch lines” . . . . .	39
1.10.1	Une paramétrisation de $\mathbb{T}(S)$ . . . . .	39
1.10.2	Géodésiques pour la pseudo-métrie de Thurston . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Comportement asymptotique de certains rayons géodésiques</b>	<b>43</b>
2.1	Introduction . . . . .	43
2.2	Description de Masur des rayons géodésiques de Jenkins-Strebel	43
2.2.1	Les différentielles quadratiques de Jenkins et de Strebel	44
2.3	Divergence de rayons géodésiques . . . . .	47
2.3.1	Démonstration de la proposition 2.3.3: . . . . .	50
2.3.2	Démonstration du Théorème 2.3.2: . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Comparaison de métriques sur le tore pointé</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Théorème de Kerckhoff . . . . .	56
3.3	Inégalités de Maskit . . . . .	57
3.4	Exemple de Maskit . . . . .	57
3.5	Démonstration du théorème 3.4.3 . . . . .	60
3.5.1	Construction d'une structure hyperbolique . . . . .	60
3.5.2	Démonstration du théorème 3.4.3 . . . . .	64
3.6	Relation entre les deux pseudo-métriques $d$ et $\mathcal{K}$ . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Le cas du tore plat</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	L'espace de Teichmüller du tore plat . . . . .	70
4.3	La pseudo-métrie $\mathcal{K}$ de Thurston . . . . .	72
4.4	La pseudo-métrie $L$ . . . . .	73

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>15</b>
<hr/>	
<b>A Appendice : Espaces pseudo-métriques</b>	<b>77</b>
A.1 Un exemple de pseudo-métrique . . . . .	78
<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>





# Chapitre 1

## Rappels sur la théorie de Teichmüller

### 1.1 Introduction

On rappelle dans la première partie de ce chapitre, les notions de bases de la théorie de Teichmüller. On introduit la métrique de Teichmüller et on fixera les notations utilisées dans cette thèse. On aborde dans la deuxième partie, quelques notions sur la théorie de Thurston concernant les feuilletages et les laminations mesurés, et on définit la pseudo-métrique de Thurston, qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

### 1.2 Définition de l'espace de Teichmüller

Soit  $S$  une surface orientée de genre  $g$  supérieur ou égal à 2. On note par  $\mathfrak{M}(S)$  l'ensemble des métriques riemanniennes sur la surface  $S$  et  $\mathcal{H}(S)$  le sous ensemble de  $\mathfrak{M}(S)$  formé des métriques hyperboliques. On rappelle qu'une métrique hyperbolique est une métrique riemannienne de courbure constante égale à  $-1$ .

**Définition 1.2.1** *L'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  de la surface  $S$  est le quotient  $\mathcal{H}(S)/\text{Diff}_0(S)$ , où  $\text{Diff}_0(S)$  désigne le groupe des difféomorphismes, isotopes à l'identité de  $S$ .*

**Remarque :**  $\text{Diff}_0(S)$  agit à gauche sur  $\mathcal{H}(S)$ , par l'action suivante:

$$\begin{aligned} \text{Diff}_0(S) \times \mathcal{H}(S) &\longrightarrow \mathcal{H}(S) \\ (\phi, h) &\longrightarrow \phi^*(h). \end{aligned}$$

Le fait que l'on puisse faire varier continûment une structure hyperbolique sur une surface, et que l'espace des paramètres est de dimension  $6g - 6$ , était déjà connu de Riemann (voir Krzysztof [24]). Pour donner une idée de ce fait, il faut d'abord que l'on définisse la topologie de l'espace de Teichmüller. La manière dont Thurston le fait est la suivante:

On considère les structures hyperboliques comme des éléments de l'espace des fonctionnelles  $\mathbb{R}_+^{\mathbf{S}}$ , où  $\mathbf{S}$  désigne l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples fermées sur la surface, qui ne sont pas homotopes à un point (non homotopiquement triviales). A une structure hyperbolique  $h$ , on associe une fonction "longueur" notée  $l(h, \cdot)$  ou  $l_h(\cdot)$ , définie de telle sorte que la longueur  $l(h, [\alpha])$  de l'élément  $[\alpha]$  de  $\mathbf{S}$  soit égale à la longueur de l'unique géodésique sur la surface munie de la métrique  $h$ , dans la classe d'isotopie  $[\alpha]$ .

L'espace de Teichmüller s'injecte de cette manière dans l'espace  $\mathbb{R}_+^{\mathbf{S}}$  et acquiert ainsi une topologie qui en fait un espace homéomorphe à une boule ouverte de dimension  $6g - 6$ .

Une autre approche pour définir une topologie de l'espace de Teichmüller est due à Nielsen:

On choisit sur la surface  $S$  une collection  $C_1, \dots, C_{3g-3}$  de courbes simples fermées disjointes, non homotopes à un point et deux à deux non homotopes. Pour chaque métrique hyperbolique sur  $S$ , on peut représenter ces courbes, de manière unique comme des géodésiques fermées disjointes  $\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3}$ .

On peut alors définir une collection de  $6g - 6$  nombres réels, les  $3g - 3$  premiers étant les longueurs des géodésiques fermées disjointes  $\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3}$ , et les autres représentant les angles que font entre eux les deux "côté" de chacune de ces géodésiques. Ces  $(3g - 3)$  derniers nombres sont appelés paramètres de twist. Ainsi, l'espace de Teichmüller admet une paramétrisation globale (coordonnées de Fenchel-Nielsen) par le produit  $\mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$ , (voir [13], exposé 7).

## 1.3 Structure conforme, structure complexe

**Définition 1.3.1** Deux métriques  $h, h'$  sont dites conformes s'il existe une fonction  $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , telle que

$$h' = e^{2u} h.$$

Une classe d'équivalence de métriques conformes sur  $S$  s'appelle une *structure conforme*. Si  $S$  est une surface orientable, alors les structures conformes s'identifient avec les structures complexes (voir Bers [9]). Une surface orientable munie d'une structure conforme (ou complexe) s'appelle une surface de Riemann.

### 1.3.1 Structure hyperbolique, structure complexe

On a ce théorème classique, dit d'uniformisation, pour les surfaces de genre  $g \geq 2$  (voir Berger [7] pour une preuve élégante)

**Théorème 1.3.2** Dans chaque classe conforme, il existe une et une seule métrique hyperbolique.

On a ce résultat qui fait le lien entre les métriques riemanniennes et les structures conformes voir Lichtenstein [27] ou Chern [11].

**Théorème 1.3.3** (Coordonnées isothermes)

Pour toute métrique riemannienne  $g$ , il existe un atlas orienté  $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$  et une fonction  $\phi$  tels que, sur  $U_\alpha$ , on a

$$g = \phi_\alpha(z_\alpha) |dz_\alpha|^2 = \phi_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha) \cdot (dx_\alpha^2 + dy_\alpha^2),$$

De plus, sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ , la fonction

$$z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe.

La structure complexe définie par l'atlas  $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$  est dite *induite* par la métrique  $g$ .

Un argument simple de partition de l'unité permet d'associer à toute structure complexe une métrique riemannienne et donc une structure conforme sur la surface. En conclusion, on a donc le résultat suivant

**Théorème 1.3.4** *Sur une surface orientée (paracompacte), on a une bijection entre*

- 1.) *Les structure conforme;*
- 2.) *les structure hyperbolique;*
- 3.) *les structure complexe.*

On utilisera dans la suite de cette thèse les termes structure conforme (marquée), structure hyperbolique (marquée) ou structure complexe (marquée) pour désigner un point de l'espace de Teichmüller.

## 1.4 (p,q)-différentielles

Soit  $S$  une surface de Riemann,  $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$  un atlas de  $S$  et  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Une collection  $\phi$  de fonctions  $\phi_\alpha$  à valeurs complexes définies sur  $U_\alpha$  est une  $(p, q)$ -différentielle sur  $S$  si  $\phi_\alpha$  est mesurable pour tout  $\alpha$ , et

$$\phi_\beta(z_\beta) = \phi_\alpha(z_\alpha) \left( \frac{dz_\alpha}{dz_\beta} \right)^p \left( \overline{\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}} \right)^q,$$

sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ , lorsque cette intersection n'est pas vide.

Une différentielle  $\phi$  est holomorphe (resp. méromorphe) si toutes les fonctions  $\phi_\alpha$  sont holomorphes (resp. méromorphes).

### Cas particuliers importants

- 1.) On dit que  $\mu$  est une *différentielle de Beltrami* si  $\mu = (\mu_\alpha)$  est une  $(-1, 1)$ -différentielle, et  $\|\mu_\alpha\|_\infty \leq 1$ .

- 2.) Une  $(2, 0)$ -différentielle holomorphe est appelée une *différentielle quadratique*.

## 1.5 Application quasi-conforme

Il existe plusieurs approches pour définir les applications quasi-conformes, nous exposons ici les approches analytique et géométrique.

Avant de définir la notion de quasi-conformalité d'une application, il faut définir la notion de fonction absolument continue sur les lignes, (ou en anglais "absolutely continuous on lines=ACL").

**Définition 1.5.1** Une fonction réelle, continue  $f$  est dite absolument continue sur les lignes, sur un domaine  $A \subset \mathbb{C}$ , si pour tout rectangle fermé  $B = \{x + iy \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset A$ , la fonction  $x \mapsto f(x + iy)$  est absolument continue sur  $[a, b]$ , pour presque tout  $y \in [c, d]$  et la fonction  $y \mapsto f(x + iy)$  est absolument continue sur  $[c, d]$ , pour presque tout  $x \in [a, b]$ .

**Notation:** Les notations  $\partial f$  et  $\bar{\partial} f$  désignent  $\frac{\partial f}{\partial z}$  et  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  respectivement.

**Définition 1.5.2** Soit  $f : A \rightarrow A'$  un homéomorphisme entre deux domaines du plan  $\mathbb{C}$ . Alors  $f$  est dite  $K$ -quasi-conforme si

1.)  $f$  est ACL

2.)  $|\bar{\partial} f| \leq \frac{K-1}{K+1} \cdot |\partial f|$

On peut maintenant définir globalement la notion d'application  $K$ -quasi-conforme entre deux surfaces de Riemann.

**Définition 1.5.3** Un homéomorphisme entre deux surfaces de Riemann  $S$  et  $S'$  est  $K$ -quasi-conforme si pour toute coordonnée locale  $(U_\mu, z_\mu)$  (resp.  $(V_\nu, z_\nu)$ ) dans l'atlas définissant la structure  $S$  (resp.  $S'$ ), l'application

$$z_\nu \circ f \circ z_\mu^{-1}$$

est  $K$ -quasi-conforme sur  $z_\mu(U_\mu \cap U_\nu) \subset \mathbb{C}$ .

L'application  $f$  est dite quasi-conforme si elle est  $K$ -quasi-conforme pour un certain  $K \geq 1$ .

**Remarque :** On vérifie facilement (voir Lehto [25], p.176-177) que la notion de quasi-conformalité ne dépend pas du choix du paramètre local, puisque les fonctions de transitions sont conformes.

Voyons l'autre approche, géométrique:

Soit  $S$  une structure de surface Riemann. Un *quadrilatère*  $Q$  dans  $S$  est un disque plongé avec quatre points distincts marqués sur sa frontière.  $Q$  est conformément équivalent à un unique rectangle euclidien à une constante multiplicative près (voir Ahlfors [4] chapitre 2). La longueur divisée par la largeur de ce rectangle est appelée le *module* de  $Q$  et il est noté  $\text{Mod}(Q)$ .

Si  $f : S \rightarrow S'$  est un homéomorphisme entre deux surfaces de Riemann, alors  $f(Q)$  est un quadrilatère dans  $S'$  pour chaque  $Q \subset S$ .

On a ce résultat qui stipule que les deux approches analytique et géométrique sont équivalentes (voir Lehto [25]).

**Théorème 1.5.4** *Si*

$$K = \sup_{Q \subset S} \frac{\text{Mod}(f(Q))}{\text{Mod}(Q)}$$

*est fini lorsque  $Q$  parcourt l'ensemble de tous les quadrilatères dans  $S$ , alors  $f$  est  $K$ -quasi-conforme.*

## 1.6 Distance de Teichmüller

Pour définir cette distance, Teichmüller a considéré le problème de minimisation suivant:

Pour tous  $g, h \in \mathbb{T}(S)$ , on pose

$$d(g, h) = \inf \{ \log K(f) \mid \text{où } f : (S, g) \rightarrow (S, h) \text{ est une application } K\text{-quasi-conforme isotope à l'identité} \}$$

**Théorème 1.6.1** *d est une métrique sur  $\mathbb{T}(S)$ .*

Pour une démonstration de ce théorème, voir Bers [8], Abikoff [1], Lehto [25] ou Gardiner [16].

### 1.6.1 Différentielles quadratiques

On a vu qu'une  $(2, 0)$ -différentielle s'appelle une différentielle quadratique. Voyons maintenant les propriétés géométriques d'un tel objet.

Supposons que  $S$  est surface de Riemann définie par l'atlas  $\{(U_\mu, z_\mu)\}$ . Une différentielle quadratique holomorphe  $q$  sur  $S$  est donnée par une famille de fonctions holomorphes  $(q_\mu)$  chacune définie sur une carte  $U_\mu$  de coordonnée  $z_\mu$  avec la condition de compatibilité

$$q_\mu(z_\mu)dz_\mu^2 = q_\nu(z_\nu)dz_\nu^2,$$

sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ .

Au voisinage d'un point  $z_0 = z(p_0) = 0$ , on introduit un paramètre  $w$  défini par  $w = \int_{z_0}^z \sqrt{q(\xi)}d\xi$ . En différentiant, on a  $dw = \sqrt{q(z)}dz$  et donc  $dw^2 = q(z)dz^2$ . La relation de compatibilité montre que  $q(w) \equiv 1$ . Noter que  $q$  est supposée être une différentielle quadratique holomorphe, donc au voisinage de chaque point, on peut écrire  $q$  comme une série entière. Soit  $p_0$  un zéro d'ordre  $n$  de  $q$ , et soit  $z$  un paramètre autour de  $p_0$  tel que  $z(p_0) = 0$ . L'expression de  $q$  est donc donnée par  $q(z) = z^n(a_n + a_{n+1}z + a_{n+2}z^2 \dots)$  avec  $a_n \neq 0$ .

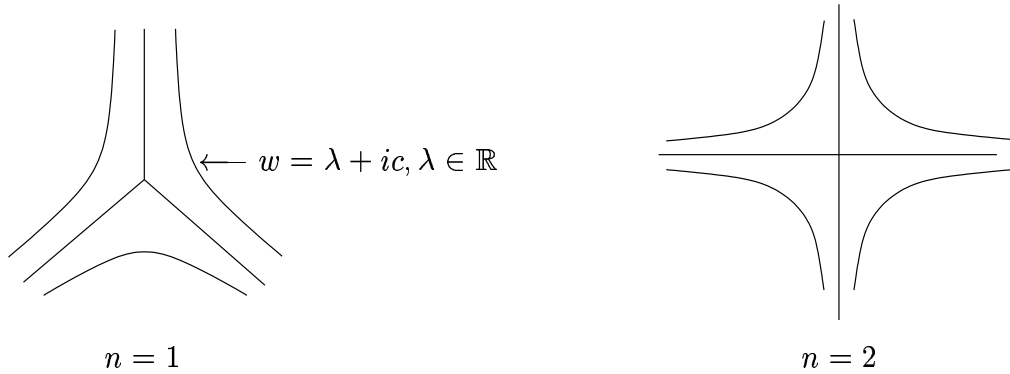
Supposons que  $z$  assez proche de zéro pour qu'il soit inclus dans une branche où la fonction  $(a_n + a_{n+1}z + a_{n+2}z^2 \dots)^{\frac{1}{2}} = (b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots)$  est définie. En intégrant  $\sqrt{q}$  terme à terme, on obtient :  $w = z^{\frac{n+2}{2}}(c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots)$  avec

$$c_k = \frac{2b_k}{n + 2(k + 1)}.$$

Notons  $\xi = z(c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots)^{\frac{2}{n+2}}$  où  $z$  appartient à une branche sur laquelle  $(c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots)^{\frac{2}{n+2}}$  est définie. On obtient ainsi la représentation  $w = \frac{n+2}{2}(\xi^{(n+2)})^{\frac{1}{2}}$ . On a alors:

$$dw^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \xi^n d\xi^2.$$

Le paramètre  $w \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\xi^{n+2} \geq 0$ , ce qui implique que  $\xi \in \mathbb{R}^+ c_k$  avec  $c_k = \exp(\frac{k}{n+2} 2\pi i)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$ . Le paramètre  $w \in i\mathbb{R}$  si et seulement si  $\xi^{n+2} \leq 0$ . Ce qui implique que  $\xi \in \mathbb{R}^- c_k$ . Par conséquent, par chaque zéro de  $q$  d'ordre  $n$  passent  $(n+2)$  trajectoires sur lesquelles  $q$  est réelle et  $(n+2)$  trajectoires sur lesquelles  $q$  est purement imaginaire. Par exemple, on a pour  $n = 1$  et  $n = 2$  les figures suivantes:



**Figure 1.1**

Si l'on pose  $w = u + iv$  et on munit le  $w$ -plan de la métrique euclidienne alors  $|dw| = |q(z)|^{1/2} |dz|$  définit une métrique localement euclidienne sur la surface en dehors des singularités (les zéros) de  $q$  et qui au voisinage d'un zéro de  $q$  est isométrique à un cône euclidien dont l'angle au sommet est  $\pi$  fois le nombre des séparatrices du feuilletage horizontal (ou vertical) de  $q$  issues de ce zéro. Une telle métrique est une métrique plate singulière associée à la différentielle quadratique  $q$ . La longueur d'un arc  $\gamma$  sur la surface est:

$$|\gamma|_q = \int_{\gamma} |q(z)|^{1/2} |dz| = \int_{\gamma'} |dw|,$$

où  $\gamma'$  est l'image de  $\gamma$  sur le  $w$ -plan. L'élément d'aire de cette métrique est donné par

$$dudv = |q(z)| dx dy.$$

En intégrant l'élément d'aire sur toute la surface on obtient l'aire de la surface pour cette métrique. Cette aire est notée

$$\|q\| = \iint_M dudv = \iint_M |q(z)| dx dy.$$



Si  $q(z)dz^2$  est un réel positif (resp. négatif) le long d'un arc de courbe (c'est-à-dire  $q(\gamma(t)) \cdot \gamma'^2(t) > 0$ , resp.  $q(\gamma(t)) \cdot \gamma'^2(t) < 0$ ) alors  $(q(z))^{1/2}dz$  est réel (resp. imaginaire pur) et donc il correspond à un segment de la droite réelle  $v = 0$  (resp. à la droite imaginaire  $u = 0$ ).

La relation de compatibilité implique que, si  $\gamma$  est un arc qui correspond à  $u_\alpha = 0$  (ou  $v_\alpha = 0$ ) sur un domaine  $U_\alpha$ , alors  $\gamma$  correspond à  $u_\beta = 0$  (ou  $v_\beta = 0$ ) sur n'importe quel domaine de  $U_\beta$  dont l'intersection avec  $U_\alpha$  contient un morceau de  $\gamma$ . Ainsi en chaque point, une différentielle quadratique définit bien deux trajectoires, géodésiques par construction, l'une horizontale (celle qui correspond à  $v = 0$ ) et l'autre verticale (celle qui correspond à  $u=0$ ).

L'ensemble de toutes les trajectoires forme deux feuilletages mesurés transverses (l'un appelé horizontal, l'autre vertical) sur la surface dont les singularités sont les zéros de la différentielle quadratique  $q$  et les feuilles singulières sont celles qui correspondent aux trajectoires issues des zéros de  $q$ . La mesure transverse du feuilletage horizontal (resp. vertical) est donnée en chaque point par la quantité:  $|\operatorname{Im}(q(z))^{1/2} dz|$  (resp.  $|\operatorname{Re}(q(z))^{1/2} dz|$ ).

En utilisant le théorème de Riemann-Roch (voir Forster [14]), on peut calculer la dimension de l'espace des différentielles quadratiques :

**Théorème 1.6.2** *L'ensemble  $QD(S)$  des différentielles quadratiques sur la surface de Riemann  $S$ , est un espace vectoriel de dimension*

$$\dim_{\mathbb{C}}(QD(S)) = 3g + 3$$

où  $g$  désigne le genre de la surface  $S$ .

Pour plus d'informations sur les différentielles quadratiques, consulter le livre de Strebel [42].

## 1.7 Application et géodésique de Teichmüller

Dans ce paragraphe, on définit l'application ou la déformation de Teichmüller d'une structure conforme marquée.

**Théorème 1.7.1** (Teichmüller) *Soit  $g, h$  deux points dans  $\mathbb{T}(S)$ , si on pose  $K = \exp d(g, h)$ , alors il existe une et une seule application*

$$f : (S, g) \longrightarrow (S, h),$$

*telle que*

- 1.)  *$f$  est  $K$ -quasi-conforme,*
- 2.)  *$f$  est isotope à  $id$*

Cette application est l'*application de Teichmüller* entre  $(S, g)$  et  $(S, h)$ .

**Théorème 1.7.2** (Teichmüller) *Pour tous  $g \in \mathbb{T}(S)$ ,  $q \in QD(S, g)$  et  $k \in [0, 1)$ , il existe un unique élément  $h_{q,K} \in \mathbb{T}(S)$  et une unique application*

$$f_{q,K} : (S, g) \longrightarrow (S, h_{q,K}),$$

*tels que*

- 1.)  *$f_{q,K}$  est  $K$ -quasi-conforme, où  $K = \frac{1+k}{1-k}$*
- 2.)  *$f_{q,K}$  est isotope à  $id$ .*
- 3.)  *$\bar{\partial}f_{q,K} = \mu \cdot \partial f_{q,K}$  où  $\mu = k \cdot \frac{\bar{q}}{|q|}$  est une différentielle de Beltrami*

La différentielle de Beltrami  $\mu = k \cdot \frac{\bar{q}}{|q|}$  associé à la différentielle quadratique  $q$  est appelée la *différentielle de Teichmüller*. Pour la démonstration complète de ces deux théorèmes, on renvoie le lecteur aux références suivantes: Bers [8], Abikoff [1], Lehto [25] ou Gardiner [16].

**Définition 1.7.3** *On dit que  $h_{q,K}$  est la déformation de Teichmüller de la structure conforme  $g$  d'intensité  $k$  dans la direction de la différentielle quadratique  $q$ .*

**Proposition 1.7.4** *L'application de  $[1, +\infty[$  dans  $\mathbb{T}(S)$  définie par:*

$$K \mapsto h_{q,K}$$

*est un rayon géodésique dans la direction de la différentielle quadratique  $q$ .*

- Voir la définition A.1 dans l'appendice de cette thèse pour la notion de rayon géodésique.
- On notera la déformation de Teichmüller  $h_{q,K}$  par  $h_K$  si la différentielle quadratique  $q$  est fixée.

On désigne par  $QD_1(S, g)$  (resp.  $SQD_1(S, g)$ ) la boule unité ouverte (resp. la sphère unité) de l'espace des différentielles quadratiques  $QD(S, g)$ , (pour n'importe quelle norme). On a ce résultat de Teichmüller :

**Corollaire 1.7.5** *L'application de  $QD_1(S, g)$  dans  $\mathbb{T}(S)$  définie par*

$$q \mapsto (S, h_{K,q})$$

*est un homéomorphisme.*

Cet homéomorphisme est la paramétrisation de Teichmüller de  $\mathbb{T}(S)$  et la sphère unité  $SQD_1(S, g)$  s'avère être un bord pour  $\mathbb{T}(S)$ . Ce bord est différent du bord défini par Thurston, (voir Masur [33]). Observons que ce corollaire, combiné avec le théorème 1.6.2 nous montre encore une fois que  $\mathbb{T}(S)$  est homéomorphe à une boule dans  $\mathbb{C}^{3g-3} = \mathbb{R}^{6g-6}$ .

### 1.7.1 L'expression locale de l'application de Teichmüller

$f_{K,q}$

Dans le paragraphe 1.6, on a vu qu'une différentielle quadratique  $q$  définit dans la structure conforme  $g$ , deux feuilletages orthogonaux. Au voisinage de chaque point régulier, on a introduit un paramètre dit naturel  $w = u + iv$  avec lequel les feuilles horizontales (resp. verticales) sont décrites par  $v = \text{const.}$  (resp.  $u = \text{const.}$ ) On démontre (voir Bers [8]) que l'application de Teichmüller

$f_{K,q} : (S, g) \longrightarrow (S, h_{q,K})$  est donnée localement au voisinage d'un point régulier par:

$$u_K = K^{1/2}u \quad \text{et} \quad v_K = K^{-1/2}v. \quad (1.7.1)$$

On obtient aussi une différentielle quadratique sur  $h_K$  notée  $q_K$  ayant le paramètre  $w_K = u_K + iv_K$  comme paramètre naturel. La différentielle quadratique  $q_K$  est dite *finale* (et  $q$  est dite *initiale*).

**Remarques:**

- 1.) Les points singuliers de  $q$  et de  $q_K$  se correspondent par l'application  $f_{K,q}$ .
- 2.) Teichmüller décrit aussi le comportement l'application  $f_{K,q}$  (formule analytique en utilisant les paramètres naturels  $w, w_K$  voir Bers [8]) au voisinage d'un point singulier.

## 1.8 Expression de $d$ en fonction de la longueur extrémale

On suppose que  $S$  est une surface de Riemann. Alors, une métrique conforme sur  $S$  est une métrique (éventuellement avec des singularités isolées) sur  $S$  qui s'écrit localement sous la forme  $\rho(z) |dz|^2$ , où  $\rho$  est une fonction positive, (noter que les singularités sont les points qui annulent  $\rho$ ). Pour plus d'informations sur ces métriques, on renvoie le lecteur à l'article de Troyanov [45]. Pour  $[\gamma] \in \mathbf{S}$ , désignons par  $l_\rho$  le minimum des longueurs des courbes simples fermées qui sont isotopes à  $\gamma$  et mesurées par rapport à la métrique  $\rho(z) |dz|^2$ . Soit  $A_\rho$  l'aire de  $S$  mesurée avec la métrique  $\rho(z) |dz|^2$ .

**Définition 1.8.1** La longueur extrémale de  $\gamma$  dans  $S$ ,  $\text{ext}_S(\gamma)$  est définie par

$$\text{ext}_S(\gamma) = \sup_{\rho} (l_\rho^2(\gamma)/A_\rho).$$

où le sup est pris sur toutes les métriques  $\rho$  conformes et d'aire totale finie.

**Remarque :** Cette définition de la longueur extrémale est appelée par Kerckhoff (voir [21]) “définition analytique”.

Tout cylindre  $C$  plongé dans  $S$  a une structure conforme induite par celle de  $S$ . Ce cylindre  $C$  est conformément équivalent à un unique cylindre plat à homothétie près. Si la hauteur de ce cylindre plat est notée  $h$  et le périmètre de sa base est noté  $l$ , alors,

$$\text{Mod}_S(C) = h/l.$$

**Proposition 1.8.2** *La longueur extrémale  $\text{ext}_S(\gamma)$  est égale à  $1/\text{Mod}_S(\gamma)$ , où  $\text{Mod}_S(\gamma)$  est la borne supérieure des modules de tous les cylindres plongés dans  $M$  ayant  $\gamma$  comme courbe centrale.*

**Remarque :** Cette deuxième caractérisation est nommée par Kerckhoff [21] “définition géométrique”. En pratique, la définition analytique est plus utile pour déterminer un minorant pour la longueur extrémale, et la définition géométrique est plus utile pour déterminer un majorant.

**Théorème 1.8.3** *Soit  $q(\gamma)$  une  $J$ - $S$ -différentielle appartenant à  $SQD_1(S)$ . (Donc le complémentaire du graphe critique est formé d'un seul cylindre ayant  $\gamma \in \mathbf{S}$  comme courbe centrale et la norme de  $q(\gamma)$  est égale à 1.) Alors, la borne supérieure de  $(l_p^2(\gamma))/A_p$  est atteinte par la métrique induite par  $q(\gamma)$ .*

Pour une démonstration de ce théorème, voir Strebel [42], ou Jenkins [20].

Kerckhoff [21], donne une autre expression de la métrique de Teichmüller en fonction de la longueur extrémale.

**Théorème 1.8.4** (Kerckhoff) *La distance de Teichmüller entre deux points  $g, h$  dans  $\mathbb{T}(S)$  est égale à*

$$d(g, h) = \frac{1}{2} \log \left( \sup_{\gamma \in \mathbf{S}} \frac{\text{ext}_h(\gamma)}{\text{ext}_g(\gamma)} \right),$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble  $\mathbf{S}$  des classes d'isotopie de courbes simples fermées et non isotopes à un point.

□

## 1.9 Pseudo-métrie et géodésique de Thurston

Pour introduire la pseudo-métrie de Thurston, on a besoin des notions de feuilletages mesurés et de laminations géodésiques mesurées que nous rappelons ici.

### 1.9.1 Feuilletages mesurés

Par définition, un feuilletage mesuré  $\mathcal{F}$  est un feuilletage (avec des singularités qui seront explicitées ci-dessous) muni d'une structure de distance invariante entre les feuilles. Ceci veut dire (en dehors des singularités) que l'on a des cartes  $\varphi_i : U_i \subset S \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ , où les  $\varphi_i^{-1}(y = \text{const.})$  sont les feuilles de  $\mathcal{F}$  restreintes à  $U_i$ , que les fonctions de transition:

$$\varphi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j).$$

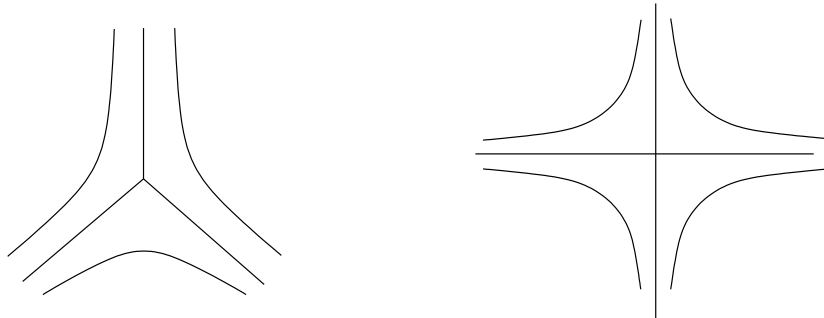
ont la forme  $\varphi_{ij} = (f_{ij}(x, y), c_{ij} \pm y)$  si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .

$|y_2 - y_1|$  est la distance entre les feuilles, autrement dit, on a une mesure  $\nu$  sur chaque arc transverse au feuilletage et vérifiant la propriété d'invariance suivante:

Soient  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow S$  deux arcs transversaux à  $\mathcal{F}$ , isotopes à travers des arcs transversaux dont les extrémités restent dans la même feuille; alors

$$\nu(\alpha) = \nu(\beta).$$

Les singularités permises sont de type "selles" généralisées (à trois séparatrices au moins).



$$P_s = 3$$

$$P_s = 4$$

Figure 1.2

On a une formule qui relie la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(S)$  avec le nombre  $P_s$  de séparatrice des points singuliers du feuilletage mesuré  $\mathcal{F}$ .

$$2\chi(S) = 4(1 - g) = \sum_{s \in \text{Sing}(\mathcal{F})} (2 - P_s).$$

Si  $(\mathcal{F}, \nu)$  est un feuilletage mesuré et  $\gamma$  une courbe simple fermée, on définit le nombre d'intersections de la classe d'isotopie de la courbe  $\gamma$  avec le feuilletage mesuré  $\mathcal{F}$  par la quantité:

$$\inf_{\gamma' \sim \gamma} \nu(\gamma')$$

où  $\gamma'$  est isotope à  $\gamma$ . La mesure de  $\gamma'$  est définie par:

$$\nu(\gamma') = \sup \left( \sum_i \nu(\alpha_i) \right),$$

où les  $\alpha_i$  sont un nombre fini d'arcs de  $\gamma'$  deux à deux disjoints et transversaux à  $\mathcal{F}$  et où la borne supérieure est prise sur toutes les sommes de ce type. Autrement dit,  $\nu(\gamma')$  est la variation totale de la coordonnée  $y$  le long de  $\gamma'$  dans un atlas qui définit le feuilletage mesuré  $(\mathcal{F}, \nu)$ . Par conséquent, en posant la mesure des arcs qui ne sont pas transverses à  $\mathcal{F}$  égale à zéro, on a :

$$i([\gamma], (\mathcal{F}, \nu)) = \inf_{\gamma' \in [\gamma]} \int_{\gamma'} d\nu,$$

où  $[\gamma]$  représente la classe d'isotopie de  $\gamma$ . Noter aussi que la classe d'isotopie de  $\gamma$  contient une courbe  $\gamma''$  "quasi-transverse" à  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire chaque composante connexe de  $\gamma'' \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  est ou bien une feuille ou bien une transversale à  $\mathcal{F}$ . De plus, au voisinage d'une singularité, un arc transversal n'est pas dans un secteur adjacent à un arc contenu dans une feuille et deux arcs transversaux sont dans deux secteurs différents. Alors :

$$\nu(\gamma'') = i([\gamma], (\mathcal{F}, \nu)) = \inf_{\gamma' \in [\gamma]} \int_{\gamma'} d\nu.$$

Par définition,  $(\mathcal{F}, \nu)$  et  $(\mathcal{F}', \nu')$  sont équivalents "au sens de Schwartz" si, pour toute courbe simple fermée  $\gamma$  on a :

$$i([\gamma], (\mathcal{F}, \nu)) = i([\gamma], (\mathcal{F}', \nu')). \quad (1.9.1)$$

On dira que  $(\mathcal{F}, \nu)$  et  $(\mathcal{F}', \nu')$  sont équivalents “au sens de Whitehead” si l’on peut passer de l’un à l’autre par des isotopies et des déformations élémentaires de type suivant appelées “opération de Whitehead”. Voir figure (1.3)

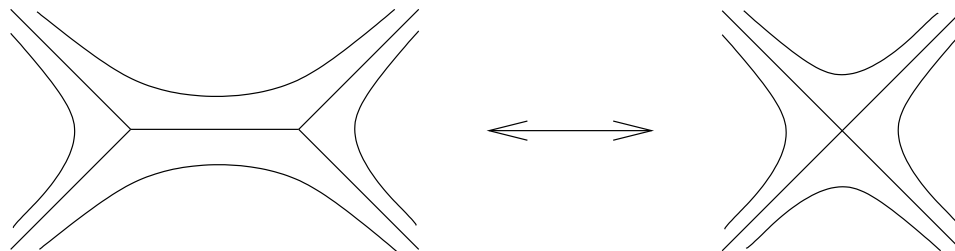


Figure 1.3

Les opérations doivent vérifier la propriété suivante:

Étant donné un arc  $\zeta$  transverse à  $(\mathcal{F}, \nu)$ , si on note  $\zeta'$  l'image de  $\zeta$  par les différentes opérations (isotopies et/ou opération de Whitehead). Alors,

$$\nu(\zeta) = \nu'(\zeta').$$

On a le résultat fondamental suivant démontré dans ([13], exposé 6):

**Théorème 1.9.1**  $(\mathcal{F}, \nu)$  et  $(\mathcal{F}', \nu')$  sont équivalents au sens de Schwarz si et seulement s'ils sont équivalents au sens de Whitehead.  $\square$

L'ensemble de ces classes d'équivalences est noté  $\mathbf{MF}(S)$ . Par la formule (1.9.1), on a une application

$$i_* : \mathbf{MF}(S) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbf{S}}.$$

Cette application est injective (voir [13] exposé 3); elle induit une topologie sur  $\mathbf{MF}(S)$ . Thurston a montré que  $\mathbf{MF}(S)$ , avec cette topologie est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{6g-6} \setminus \{0\}$ .

On peut avoir une idée intuitive du nombre  $6g - 6$  de la façon suivante:

Le nombre maximal de courbes disjointes non homotopes à un point et deux à deux non homotopes est  $3g - 3$ . Fixons un système  $C_1, \dots, C_{3g-3}$  de courbes vérifiant cette propriété. Génériquement, un feuilletage mesuré possède un nombre d'intersections non nul avec chacune des  $C_i$ , et peut être représenté



par un feuilletage mesuré qui leur est transverse, et tel qu'aucune de ces courbes ne passe par un point singulier. On peut alors associer à notre feuilletage  $6g - 6$  paramètres, les  $3g - 3$  premiers étant les mesures transverses des courbes  $C_i$ , et les  $3g - 3$  restants servant à déterminer le recollement de deux pantalons adjacents. Ceci peut être formalisé, ce qui est fait dans l'exposé 5 et 6 de [13], où l'on montre qu'il est possible de définir ainsi un homéomorphisme de  $\mathbf{MF}$  dans  $\mathbb{R}^{6g-6} \setminus \{0\}$ .

Remarquons au passage qu'un point délicat est d'inclure dans la discussion le cas des feuilletages mesurés pouvant avoir un nombre d'intersections nul avec certaines des courbes  $C_i$ .

On a une inclusion naturelle  $\tau : (\mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}) \hookrightarrow \mathbf{MF}$  définie comme suit:

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  et  $\gamma$  un représentant de  $[\gamma] \in \mathbf{S}$ . On peut toujours représenter  $S$  comme un cylindre  $[0, \lambda] \times S^1$  avec des identifications sur le bord, de telle façon que  $\{\lambda/2\} \times S^1$  corresponde à  $\gamma$ . Ceci induit un feuilletage mesuré sur  $S$  dont les feuilles lisses (les feuilles qui ne passent pas par les points singuliers) sont les courbes  $\{d\} \times S^1$  ( $0 < d < \lambda$ ), la mesure transverse étant la différence de niveau.

L'ensemble  $\mathbb{R}_+^*$  des réels strictement positifs agit sur  $\mathbf{MF}$  par multiplication de la mesure, et Thurston démontre que le projectifié  $\mathbf{PMF}$  est homéomorphe à une sphère de dimension  $6g - 7$  qui se trouve être un bord naturel à l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$ .

Signalons que la correspondance qui associe à chaque différentielle quadratique  $q$  de norme  $\|q\| = 1$ , définie sur une surface de Riemann  $M$  fixé, son feuilletage horizontal (ou vertical) est un homéomorphisme de l'espace  $SQD_1(M)$  des différentielles quadratiques de norme égale à 1, dans le projectifié de l'espace des feuilletages mesurés  $\mathbf{PMF}$ , (voir Marden-Strebel [28]).

### 1.9.2 Laminations géodésiques mesurées

On suppose que  $S$  est muni d'une métrique hyperbolique  $h$ . Une *lamination géodésique*  $\mathcal{L}$  est un sous ensemble fermé de  $S$  qui est une réunion disjointe

de géodésiques (pour la métrique  $h$ ) simples sur  $S$ . Les géodésiques contenues dans  $\mathcal{L}$  sont appelées *feuilles* de la lamination  $\mathcal{L}$ .

**Exemple :** Une réunion finie et disjointe de géodésiques simples fermées est une lamination géodésique.

On munit  $\mathcal{L}$  d'une mesure transverse  $\mu$  invariante par translation le long des feuilles de  $\mathcal{L}$ . C'est-à-dire que la mesure déposée par  $\mu$  sur un arc  $\xi$  doit être égale à la mesure déposée sur un arc  $\xi'$  isotope à  $\xi$  et ayant leurs extrémités sur les mêmes feuilles de la lamination  $\mathcal{L}$ .

On note par  $\mathbf{ML}(S)$  l'ensemble des laminations géodésiques mesurées sur  $S$ .

**Remarque :** On notera une lamination géodésique  $\mathcal{L}$  muni d'une mesure transverse  $\mu$  par cette même lettre  $\mu$ .

**Définition 1.9.2** Une lamination géodésique  $\mu$  est dite maximale si les composantes de  $S \setminus \mu$  sont isométriques à un triangle idéal, (i.e. un triangle de  $\mathbb{H}^2$  dont les sommets sont sur le bord à l'infini).

Le nombre d'intersections d'une courbe simple fermée  $\gamma$  avec  $\mathcal{L}$  est donné par la quantité:

$$i(\gamma, \mathcal{L}) = i(\gamma, \mu) = \inf_{\gamma' \sim \gamma} \int_{\gamma'} d\mu.$$

Si la lamination est formée d'une seule géodésique fermée ce nombre d'intersections coïncide avec le nombre d'intersections géométrique, définie comme suit:

$$i : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

$i(\alpha, \beta)$  = le nombre minimum d'intersection d'un représentant de  $\alpha$  et d'un représentant de  $\beta$ .

### 1.9.3 Couplage de feuilletages mesurés

À toute paire  $(F_1, \nu_1)$ ,  $(F_2, \nu_2)$  de feuilletages mesurés *partiellement transverses* sur  $S$ . On associe une "mesure produit" notée  $\nu_1 \times \nu_2$ , (voir Papado-

poulos [39]). À partir de cette mesure produit on peut définir une fonction intersection  $I$ , comme suit:

**Définition 1.9.3** *La quantité  $I(F_1, F_2)$  est définie par la masse totale sur la surface de la “mesure produit”  $d\nu_1 \times d\nu_2$ , autrement dit*

$$I(F_1, F_2) = \int_S d\nu_1 \times d\nu_2.$$

**Définition 1.9.4** *Soient  $[F_1], [F_2]$  deux classes de feuilletages mesurés tels que leurs support est égal à toute la surface  $S$ , on définit leurs nombre d’intersections géométrique par la formule:*

$$i([F_1], [F_2]) = \inf \{I(F'_1, F'_2) \mid F'_1 \in [F_1], F'_2 \in [F_2]\}$$

Notons que la fonction  $i$  n’est autre que la fonction obtenue en prolongeant la fonction intersection géométrique des courbes simples fermées. Puisque  $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}$  est dense dans l’espace des feuilletages mesurés  $\mathbf{MF}$ .

On a ce théorème qui compare les deux fonctions  $i$  et  $I$ :

**Théorème 1.9.5** *Si le couple  $(F_1, F_2)$  ne forme pas un disque de Whitney, c’est-à-dire un disque dont le bord est une réunion d’un arc de  $F_1$  et d’un arc de  $F_2$ , alors on a*

$$I(F_1, F_2) = i([F_1], [F_2]).$$

### 1.9.4 Action du groupe modulaire

*Le groupe modulaire* est le groupe dont les éléments sont les classes d’isotopie d’homéomorphismes de la surface  $S$ . C’est aussi le groupe de tous les homéomorphismes de  $S$  quotienté par le sous-groupe invariant formé par les homéomorphismes isotopes à l’identité. Ce groupe est noté  $\Gamma$  ou  $\text{Mod}(S)$ . On sait que  $\Gamma$  n’est autre que le groupe des isométries de l’espace de Teichmüller muni de la métrique de ce dernier. Pour une démonstration, voir Royden [41], ou pour une démonstration plus récente, voir Ivanov [19].

Le groupe modulaire  $\Gamma$  agit sur les espaces  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{MF}(S)$  et  $\mathbb{T}(S)$  de la façon suivante:

- 1.) Pour tout élément  $\gamma$  de  $\mathbf{S}$  et  $f$  un représentant d'un élément de  $\Gamma$ , on définit  $f \cdot \gamma$  par:

$$f \cdot \gamma = f(\gamma).$$

- 2.) Pour tout élément  $F$  de  $\mathbf{MF}(S)$ , on définit  $f \cdot F$  par:

$$i(f \cdot F, \gamma) = i(F, f^{-1}(\gamma)), \quad \text{pour tout } \gamma \text{ dans } \mathbf{S}.$$

- 3.)  $\Gamma$  agit sur  $\mathbb{T}(S)$  par isométrie. Si un élément  $M$  de  $\mathbb{T}(S)$  est considéré comme une structure conforme,  $f \cdot M$  est défini comme suit:

Soit  $(U_i, z_i)$  un atlas définissant la structure de surface de Riemann  $M$ , alors la structure de surface de Riemann  $f \cdot M$  est définie par l'atlas  $(f(U_i), z_i \circ f^{-1})$ .

Si un élément de  $\mathbb{T}(S)$  est vu comme une structure hyperbolique  $h$ , alors  $f \cdot h$  n'est autre que la métrique hyperbolique  $f^*(h)$  obtenue en tirant en arrière par  $f$ .

L'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{T}(S)$  est proprement discontinue, voir Gardiner [16], Kraetz [23] ou McCarthy-Papadopoulos [34] pour une preuve. Noter que la démonstration faite par ces derniers est beaucoup plus simple.

On forme le quotient de  $\mathbb{T}(S)$  par l'action de  $\Gamma$ , on obtient l'espace des modules ou l'espace de Riemann,  $\mathcal{M}(S) = \mathbb{T}(S)/\Gamma$ .

Chaque  $\Gamma$ -orbite est un sous-ensemble fermé dans  $\mathbb{T}(S)$ , (car  $\Gamma$  agit de façon proprement discontinue). On peut définir une métrique  $d_\Gamma$  sur l'espace des modules, comme suit:

$$d_\Gamma(\bar{S}, \bar{S}') = \inf_{f \in \Gamma} d(S, f \cdot S'), \quad (1.9.2)$$

où  $d$  est la métrique de Teichmüller et  $\bar{S}$  (resp.  $\bar{S}'$ ) est l'image de  $S$  (resp.  $S'$ ) par la projection:

$$\pi : \mathbb{T}(S) \longrightarrow \mathcal{M}(S) = \mathbb{T}(S)/\Gamma.$$

### 1.9.5 Pseudo-métrie de Thurston

Dans [43], Thurston définit une pseudo-métrie (voir l'appendice de cette thèse pour la définition d'une pseudo-métrie) pour l'espace de Teichmüller qui donne une réponse à un problème de minimisation analogue à celui de Teichmüller dans lequel la constante de quasi-conformalité est remplacée par la constante de Lipschitz globale. Plus précisément: *Étant données deux structures hyperboliques  $g$  et  $h$  quelle est la plus petite valeur de la constante de Lipschitz globale  $\mathcal{L}(\varphi)$*

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sup_{x \neq y} \left( \frac{d_h(\varphi(x), \varphi(y))}{d_g(x, y)} \right),$$

pour un homéomorphisme  $\varphi : (S, g) \rightarrow (S, h)$  isotope à l'identité?

Thurston donne une construction géométrique de l'application entre deux structures hyperboliques qui est optimale en termes de laminations et de feuilletages mesurés.

Si on pose:

$$L(g, h) = \inf_{\varphi \sim \text{id}} \log \mathcal{L}(\varphi),$$

alors  $L$  est une pseudo-métrie sur  $\mathbb{T}(S)$  qui est non symétrique (voir l'exemple ci-dessous).

Dans ce même article, une autre quantité est analysée, cette dernière mesure en un certain sens (comme  $L(., .)$ ) la différence entre deux structures hyperboliques.

Si  $\gamma$  est une courbe, simple, fermée et non homotope à un point, alors elle est représentée par une unique géodésique pour chacune des deux structures hyperboliques. Posons:

$$\mathcal{K}(g, h) = \sup_{\gamma \in \mathfrak{S}} \log \left( \frac{l_h(\gamma)}{l_g(\gamma)} \right).$$

Puisque toute géodésique est envoyée par une application  $\mathcal{A}$ -Lipschitzienne en une courbe de longueur au plus  $\mathcal{A}$ -fois la longueur de la géodésique initiale, on a:

$$\mathcal{K}(g, h) \leq L(g, h).$$

Thurston montre qu'en fait ces deux quantités sont égales.

### 1.9.6 Non-symétrie de la pseudo-métrie de Thurston

Dans [43], Thurston donne un exemple explicite de deux structures hyperboliques  $g, h$  telles que  $L(g, h) \neq L(h, g)$ .

Les structures hyperboliques en question sont décrites de façon qualitative comme suit:

On prend deux structures hyperboliques sur la même surface topologique  $S$ , qui sont identiques “presque partout”, (la partie épaisse) c’est-à-dire sur toute la surface  $S$ , hormis une partie qui est formée d’un tube autour d’une géodésique simple fermée  $\alpha$ . Mesurée avec la première métrique  $g$ , sa longueur est notée par  $l_g(\alpha)$  qui est plus grande que sa longueur mesurée avec la métrique  $h$ ,  $l_h(\alpha)$ . Autrement dit, on a:

$$l_g(\alpha) > l_h(\alpha).$$

Par le “collar lemma”, la longueur hyperbolique  $A$  du tube contenant la géodésique  $\alpha$  est égale “approximativement” à  $A = \log(1/l_g(\alpha))$ . Ce même tube étant mesuré “approximativement” avec la métrique  $h$  sa longueur est égale à  $B = \log(1/l_h(\alpha))$  qui est plus grand que  $A$ . Avec ces données, l’application Lipschitzienne minimisante

$$f : (S, g) \longrightarrow (S, h),$$

aura une constante de Lipschitz “approximativement” égale à

$$K(f) = B/A.$$

Or, le quotient des longueurs de la géodésique  $\alpha$ , mesurée avec les métriques  $g, h$  est égal à

$$\exp(-B)/\exp(-A) = \exp(A)/\exp(B).$$

Comme on a  $\mathcal{K}(g, h) \leq L(g, h)$ , donc

$$\exp(A)/\exp(B) \leq B/A. \tag{1.9.3}$$

L'application Lipschitzienne minimisante  $f : (S, h) \rightarrow (S, g)$  admet une constante de Lipschitz globale égale à  $B/A$ . Ce qui implique que

$$\exp(B)/\exp(A) < B/A,$$

Contredisant l'inégalité (1.9.3) si  $B$  est assez grand par rapport à  $A$ .

## 1.10 Une paramétrisation de $\mathbb{T}(S)$ et les “Strech lines”

### 1.10.1 Une paramétrisation de $\mathbb{T}(S)$

Soit  $\mu$  une lamination géodésique maximale mesurée sur la surface hyperbolique  $(S, h)$ . Dans [43], Thurston associe à  $\mu$  un feuilletage mesuré  $F_\mu(h)$  transverse à  $\mu$ , que l'on appellera le *feuilletage horocyclique* associé à  $(\mu, h)$ . Il est défini de la manière suivante:

Chaque composante de  $S \setminus \mu$  étant un triangle idéal, on peut définir dans cette composante un feuilletage partiel (c'est-à-dire un feuilletage d'une sous-surface) dont les feuilles sont des segments d'horocycles, chacun d'eux ayant ses extrémités sur deux côtés du triangle idéal et faisant en ces points des angles droits avec ses côtés.

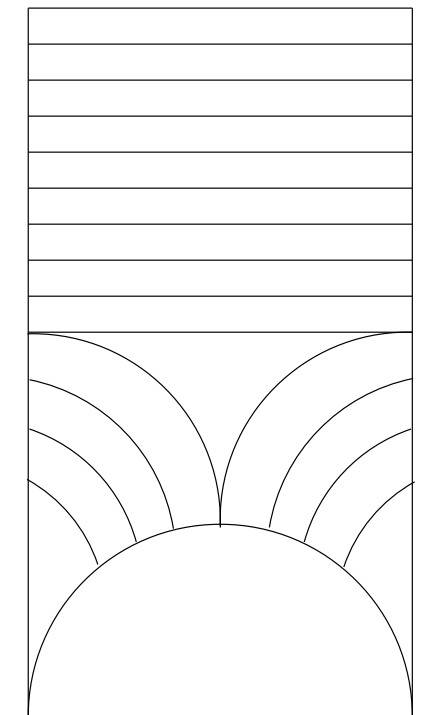
La région non feuilletée est un triangle dont chaque côté est l'un de ces segments d'horocycles qui se touchent tangentiellement, voir la figure 1.4. Ces propriétés déterminent de manière unique le feuilletage partiel du triangle idéal.

Les feuilletages ainsi définis dans les triangles idéaux qui composent  $S \setminus \mu$  (leur nombre peut être calculé à l'aide de la formule d'Euler-Poincaré et ce nombre est égal à  $-6\chi(S)$ ) se recollent entre eux et définissent un feuilletage partiel,  $F_\mu(h)$  de  $S$  qui admet une mesure transverse invariante, qui est déterminée de la façon suivante:

Sur la lamination  $\mu$ , cette mesure coïncide avec la longueur hyperbolique mesurée avec la métrique  $h$ .

Le feuilletage  $F_\mu(h)$  est un élément de  $\mathbf{MF}(S)$

Inversement, Thurston montre que pour tout feuilletage mesuré  $F$  sur  $S$  transverse à  $\mu$ , il existe à isotopie près une et une seule structure hyperbolique  $h'$  tel que le feuilletage  $F$  soit équivalent au feuilletage mesuré  $F_\mu(h')$ .



**Figure 1.4**

On note  $\mathbf{MF}(\mu)$  le sous ensemble de  $\mathbf{MF}(S)$  des classes d'équivalences qui admettent un représentant transverse à  $\mu$ . Thurston, paramétrise l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  en utilisant  $\mathbf{MF}(\mu)$ . Plus précisément, on a le théorème (voir [43]) suivant:

**Théorème 1.10.1** (Thurston)

*Pour toute lamination géodésique maximale mesurée  $\mu$ , l'application:*

$$\varphi_\mu : \mathbb{T}(S) \longrightarrow \mathbf{MF}(\mu).$$

*de l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  dans l'espace des classes d'équivalences de feuilletages mesurés représentables par des feuilletages mesurés transverses à  $\mu$ , qui à une métrique hyperbolique  $h$  associée la classe de  $F_\mu(h)$ , est un homéomorphisme.*



□

**Remarque :** Ce théorème reste vrai si  $\mu$  est une lamination maximale quelconque c'est-à-dire si  $\mu$  n'admet pas nécessairement une mesure transverse de support égal à la surface  $S$  toute entière.

### 1.10.2 Géodésiques pour la pseudo-métrique de Thurston

Pour définir ces lignes géodésiques, rappelons que  $\mathbf{MF}(\mu)$  (l'ensemble des classes d'équivalences de feuilletages mesurés transverses à  $\mu$ ), possède une structure naturelle de cône. Autrement dit, si  $F$  est un élément de  $\mathbf{MF}(\mu)$ , alors pour tout  $t$  réel positif,  $t \cdot F$  est un élément de  $\mathbf{MF}(\mu)$ , où  $t \cdot F$  désigne le feuilletage  $F$  muni de sa mesure transverse multipliée par  $t$ . En effet, si  $F$  est transverse à  $\mu$ , et si  $t$  est un réel strictement positif, alors  $t \cdot F$  est aussi transverse à  $\mu$ .

On définit un rayon positif dans  $\mathbf{MF}(\mu)$ , comme la famille des classes de feuilletages mesurés de la forme  $(t \cdot F)_{t>0}$ , où  $F$  est un élément de  $\mathbf{MF}(\mu)$ . On munit ce rayon de l'orientation induite par les réels positifs. L'image de ce rayon par l'homéomorphisme de Thurston  $\varphi_\mu^{-1}$ , est appelé “Stretch line” issue de  $h = \varphi_\mu^{-1}(F)$  et c'est un rayon géodésique pour la pseudo-métrique de Thurston, moyennant une paramétrisation convenable, (voir remarque ci-dessous).

#### Remarques :

1.) Il est important de spécifier l'orientation du rayon géodésique. Si, on prend la “stretch line” qui passe par les deux structures hyperboliques  $g'$  et  $h'$  construites dans l'exemple de non symétrie (1.9.6) et on prend sa direction opposée, alors, ce dernier n'est plus géodésique, puisque  $\mathcal{K}(g, h) \neq \mathcal{K}(h, g)$ .

2.) L'application définie de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{T}(S)$  par:

$$t \longmapsto h_{e^t}$$

est un rayon géodésique pour la pseudo-métrique de Thurston issu du point  $h = h_1$ , puisque

$$\mathcal{K}(h_{e^t}, h_{e^{t'}}) = \log e^{|t-t'|} = |t - t'|.$$

Si on pose  $K = e^t$ , alors

$$(h_K)_{K \geq 1} = \varphi_\mu^{-1}(K \cdot F)_{K \geq 1}.$$

Comme pour la géodésique de Teichmüller, on dira que cette “Stretch line” est dans la direction du feuilletage mesuré  $F$ .

## Chapitre 2

# Comportement asymptotique de certains rayons géodésiques

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on compare le comportement asymptotique de rayons géodésiques dans l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  d'une surface fermée  $S$  de genre  $g \geq 2$ , pour deux pseudo-métriques différentes (la métrique de Teichmüller et la pseudo-métrique de Thurston) définies sur ce même espace. Plus précisément, soit  $r$  un rayon géodésique pour la métrique de Teichmüller et  $r'$  un rayon géodésique pour la pseudo-métrique de Thurston. Si la direction de ces deux rayons vérifie certaines conditions (voir paragraphe 2.3), alors ces deux rayons  $r$  et  $r'$  ne restent pas à une distance bornée l'un de l'autre. La distance étant mesurée une fois avec la pseudo-métrique Thurston et une seconde fois avec la métrique de Teichmüller. On dira que  $r$  et  $r'$  sont divergents.

### 2.2 Description de Masur des rayons géodésiques de Jenkins-Strebel

Avant de se lancer dans cette description, on définit cette classe particulière de différentielles quadratique dite de Jenkins-Strebel.

### 2.2.1 Les différentielles quadratiques de Jenkins et de Strebel

Jenkins et Strebel [20, 42] ont étudié une classe de différentielles quadratiques dont les feuilles non singulières des feuilletages horizontaux (ou verticaux) sont fermées; elles sont appelées les J-S différentielles. Une telle classe est dense dans l'espace vectoriel des différentielles quadratiques  $QD(S)$ , (voir Masur [31]).

On distingue aussi une classe de différentielles quadratiques dont la norme (ou l'aire de la métrique plate singulière associée) est égale à 1. Ce sous-ensemble de  $QD(S)$  est noté  $SQD_1(S)$ .

Dans son article [31], Masur donne une autre description d'un rayon géodésique dans la direction d'une (J-S)-différentielle quadratique  $q$ . On aura besoin d'un théorème d'existence dû à Strebel (voir [42]).

Un système  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  de courbes simples fermées, disjointes, non deux à deux librement homotopes et non homotopes à un point est appelé *système admissible*. Le nombre maximal de courbes dans un système admissible est  $3g - 3$ .

Un système d'anneaux  $R_1, \dots, R_p$  contient le système de courbes  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  si et seulement si pour tout  $i$  toute courbe simple fermée séparant les deux composantes de la frontière de  $R_i$  est librement homotope à  $\gamma_i$ .

En utilisant les définitions analytique et géométrique de la longueur extrême, on peut montrer (voir Gardiner [16] ou Ahlfors [3]) que le module d'un anneau  $R = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$  est égal à

$$\text{Mod}(R) = \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right). \quad (2.2.1)$$

**Théorème 2.2.1** (Strebel) *Soit  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  un système de courbes admissible défini sur la surface de Riemann  $S$ , et  $m_1, \dots, m_p$  des nombres strictement positifs. Alors, il existe une différentielle quadratique non nulle  $q$  sur  $S$  telle que toutes ses feuilles régulières sont fermées et*

1.) *Le système de  $p$  anneaux définis par  $q$  sur  $S$  contient le système de courbes*

$\gamma_1, \dots, \gamma_p$ .

2.)  $\text{Mod}(R_i) = M_i = Cm_i$  où  $C$  est une constante indépendante de l'indice  $i$ ,  
(cette constante apparait pour des raisons de normalisation, voir Marden-  
Masur [29].)

De plus,  $q$  est unique à multiplication par une constante positive près.

À partir d'un système admissible  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  sur un point  $h$  de l'espace de  
Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  et d'un réel  $K \geq 1$ , on construit une déformation  $h_K$  de la  
façon suivante:

D'après le théorème précédent, on sait qu'une J-S différentielle  $q(\gamma_1 \dots \gamma_p)$   
partitionne  $S$  en  $p$  domaines annulaires, où  $1 \leq p \leq 3g - 3$ . On peut supposer  
(voir Ahlfors [2] ou [3]) que ces derniers sont conformes aux  $R_i$  où

$$R_i = \{\xi_i \in \mathbb{C} \mid 0 < \rho_i < |\xi_i| < 1\}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

sont les anneaux déterminés par  $q$ . On peut supposer que les courbes  $\gamma_i$  cor-  
respondant à  $|\xi_i| = \sqrt{\rho_i}$  sont les courbes centrales des  $R_i$ .

Soient  $R_i^1$  et  $R_i^2$  définis par:

$$R_i^1 = \{\xi_i \in \mathbb{C} \mid \sqrt{\rho_i} < |\xi_i| < 1\} \quad \text{et} \quad R_i^2 = \{\xi_i \in \mathbb{C} \mid \rho_i < |\xi_i| < \sqrt{\rho_i}\}.$$

On reparamétrise  $R_i^2$  en posant  $\xi'_i = \rho_i / \xi_i$ . Avec ce nouveau paramètre on a :

$$R_i^2 = \{\xi'_i \in \mathbb{C} \mid \sqrt{\rho_i} < |\xi'_i| < 1\}.$$

Pour chaque  $K \geq 1$ , on coupe  $(S, h)$  le long des courbes  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  et on colle  
les anneaux:

$$B_{iK}^1 = \{\xi_i \in \mathbb{C} \mid \sqrt{\rho_i^K} < |\xi_i| < \sqrt{\rho_i}\},$$

à  $R_i^1$ , le long de chaque  $\gamma_i$ , pour former  $R_{iK}^1$ , et on colle

$$B_{iK}^2 = \{\xi'_i \in \mathbb{C} \mid \sqrt{\rho_i^K} < |\xi'_i| < \sqrt{\rho_i}\},$$

à  $R_i^2$ , le long de chaque  $\gamma_i$ , pour former  $R_{iK}^2$ .

On identifie  $\xi_i = \sqrt{\rho_i^K} e^{i\theta}$  et  $\xi'_i = \sqrt{\rho_i^K} e^{-i\theta}$  sans twist, pour former le  $K$ -modèle  $h_K$  de  $h$ . Noter que pour  $K = 1$ ,  $h_1$  n'est autre que  $h$ .

**Proposition 2.2.2** (Masur [31])

*Le  $K$ -modèle  $h_K$  de  $h$  est conformément équivalent à  $f_{K,q}(h)$  où  $f_{K,q}$  n'est autre que l'application de Teichmüller associée à la différentielle quadratique  $q$ .*

Autrement dit, le modèle des structures conformes le long d'un Jenkins-Strebel rayon géodésique est l'épaississement des anneaux définis par  $q$  sur  $h$  en collant les anneaux  $B_{iK}^1$  et  $B_{iK}^2$  définis plus haut.

Notons  $h$  une structure conforme marquée sur  $S$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  un système admissible et  $m_1, \dots, m_p$  des réels strictement positifs. D'après le théorème de Strebel 2.2.1, il existe une (J-S)-différentielle quadratique  $q = q(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in QD(S, h)$ . On forme le rayon géodésique issu de  $h$  dans la direction de la différentielle quadratique  $q$  et on note les structures conformes sur ce rayon par  $h_K$ . Soit  $\beta$  une courbe simple fermée, non homotope à un point et disjointe de  $\gamma_i$  pour tout  $i = 1, \dots, p$ .

Une telle courbe peut exister puisque on a supposé que  $p < 3g - 3$ .

On peut alors énoncer la proposition suivante:

**Proposition 2.2.3** *Le module de la courbe  $\beta$  le long du rayon géodésique  $(h_K)_{K \geq 1}$  est minoré par une constante indépendante du paramètre  $K$ .*

Rappelons que le module de la courbe  $\beta$  est le module du plus grand cylindre plongé dans  $S$  et ayant la courbe  $\beta$  comme courbe centrale.

On déduit immédiatement de cette proposition que:

La longueur extrémale de la courbe  $\beta$  est majorée par une constante indépendante du paramètre  $K$ .

En effet, d'après la proposition 2.2.3, il existe une constante  $c$ , telle que pour  $K \geq 1$  on a

$$\text{Mod}_{h_K}(\beta) \geq c.$$

Or,  $\text{ext}_{h_K}(\beta) = 1/\text{Mod}_{h_K}(\beta)$ , d'où le résultat.

**Démonstration de la proposition 2.2.3 :** La différentielle quadratique  $q$  partitionne  $(S, h)$  en  $p$  anneaux  $R_i$  où  $1 \leq i \leq p < 3g - 3$ . La classe d'homotopie de la courbe  $\beta$  est représentée par un ensemble d'arcs qui sont sur le bord des ces anneaux, donc on peut plonger ces arcs dans des petits anneaux loin des courbes centrales  $\gamma_i$ . Or, d'après la description de Masur du rayon  $(h_K)_{K \geq 1}$ , on construit un modèle conforme à  $(S, h_K)$  en coupant ces même anneaux le long des courbes  $\gamma_i$  et en collant les  $B_{iK}^j$  à  $R_i^j$  ( $i = 1 \dots p; j = 1, 2$ ) le long des courbes  $\gamma_{i,K}$  sans twist. Sur  $(S, h_K)$  les anneaux où sont plongés les arcs représentant la classe de  $\beta$  ne sont pas altérés lors de ces opérations de découpage et de collage. Donc, Le module de ces anneaux est indépendant du paramètre  $K$ . Puisque, le module de  $\beta$  est plus grand que le module de ces anneaux, on a notre résultat.  $\square$

On aura besoin du lemme suivant:

**Lemme 2.2.4** *La longueur  $l_{h_K}(\beta)$  de  $\beta$  mesurée avec la métrique hyperbolique  $h_K$ , est majorée par une constante indépendante du paramètre  $K$ .*

**Démonstration** Dans [30], Maskit donne l'inégalité entre les longueurs hyperbolique et extrémale d'une courbe simple fermée,

$$l_{h_K}(\beta) \leq \pi \cdot \text{ext}_{h_K}(\beta). \quad (2.2.2)$$

Or, d'après la proposition 2.2.3 la longueur extrémale de  $\beta$  est majorée par une constante indépendante de  $K$ . Cela implique que  $l_{h_K}(\beta)$  est majorée indépendamment de  $K$ .  $\square$

## 2.3 Divergence de rayons géodésiques

Dans ce paragraphe, on compare le comportement asymptotique d'un rayon géodésique pour la métrique de Teichmüller et pour la pseudo-métrique de Thurston. Le principal résultat de ce paragraphe est un résultat de divergence

de ces rayons dans la direction, définie par une Jenkins-Strebel différentielle quadratique et son feuilletage horizontal associé.

**Définition 2.3.1** *On dit que deux rayons  $r, r'$  de l'espace de Teichmüller (qui ne sont pas nécessairement issus d'un même point), sont divergents si:*

$$d(r(K), r'(K)) \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque } K \text{ tend vers } +\infty.$$

**Remarque :** Dans cette définition, on n'a pas spécifié la fonction  $d$ . On verra que  $d$  peut être la métrique de Teichmüller ou la pseudo-métrique de Thurston, le résultat reste vrai pour les deux.

On fixe une lamination géodésique maximale mesurée  $\mu$ , et on prend le feuilletage horizontal  $F = F(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  associé à la Jenkins-Strebel différentielle quadratique  $q = q(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  (voir paragraphe 2.2). Ce dernier a toutes ses feuilles non-singulières fermées. Modulo une isotopie, il est transverse à la lamination  $\mu$ , puisque aucune feuille de  $\mu$  n'est fermée. Par l'homéomorphisme de Thurston  $\varphi_\mu$ , il existe une et une seule structure hyperbolique  $h'$  et un feuilletage horocyclique  $F_\mu(h')$  dans la classe de  $F$ . On peut alors écrire:

$$\varphi_\mu(h') = F_\mu(h').$$

Si on trace le rayon  $(K.F_\mu(h'))_{K \geq 1}$  dans l'espace  $\mathbf{MF}(\mu)$  et on prend son image inverse par l'homéomorphisme  $\varphi_\mu$  on obtient donc la "stretch line"  $(h'_K)_{K \geq 1}$  issu de  $h'$ .

Soit  $(h_K)_{K \geq 1}$  le rayon géodésique pour la métrique de Teichmüller issu du point (la structure conforme)  $h$  construit dans le paragraphe 2.2 dans la direction de la Jenkins Strebel-différentielle quadratique  $q(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ .

Il faut noter que les deux points  $h$  et  $h'$  dans l'espace de Teichmüller ne sont pas nécessairement confondus.

**Théorème 2.3.2** *Considérons les deux rayons géodésiques  $(h_K)_{K \geq 1}$  et  $(h'_K)_{K \geq 1}$  pour la métrique de Teichmüller et pour la pseudo-métriques de Thurston respectivement. Alors, ces deux rayons sont divergents pour les métriques  $d$  et  $\mathcal{K}$ .*



La démonstration du théorème 2.3.2 sera faite dans le paragraphe 2.3.2.

On a déjà vu d'après la proposition 2.3.3, que la longueur hyperbolique et extrémale de la classe d'isotopie de la courbe simple fermée  $\beta$  est majorée le long du rayon  $(h_K)_{K \geq 1}$  indépendamment du paramètre réel  $K$ . Il nous reste à voir le comportement des longueurs hyperbolique et extrémale de la même classe d'isotopie de  $\beta$  le long de la "stretch line"  $(h'_K)_{K \geq 1}$ , et c'est l'objet de la proposition suivante:

**Proposition 2.3.3** *La longueur hyperbolique de la classe d'isotopie de la courbe  $\beta$  tend vers l'infini le long de  $(h'_K)_{K \geq 1}$  lorsque le paramètre  $K$  tend vers l'infini.*

La démonstration de cette proposition sera faite dans le prochain paragraphe.

On a un lemme utile pour la démonstration du théorème 2.3.2 dans le cas où la métrique de comparaison entre les deux rayons  $(h_K)_{K \geq 1}$  et  $(h'_K)_{K \geq 1}$  est la métrique de Teichmüller.

**Lemme 2.3.4** *Pour  $K \geq 1$ , La longueur extrémale de  $\beta$  par rapport à la structure conforme  $h'_K$  tend vers l'infini lorsque  $K$  tend vers l'infini.*

**Démonstration du lemme 2.3.4 :** D'après l'inégalité de Maskit ([30]), comparant la longueur extrémale et hyperbolique, on a:

$$l_{h'_K}(\beta) \leq \pi \operatorname{ext}_{h'_K}(\beta).$$

Par la proposition 2.3.3, la longueur hyperbolique  $l_{h'_K}(\beta)$  tend vers l'infini lorsque  $K$  tend vers l'infini et l'inégalité (2.2.2) donne immédiatement le lemme.  $\square$

Dans [38], Papadopoulos démontre le lemme suivant:

**Lemme 2.3.5** *Soit  $k$  un segment géodésique contenu dans le support du feuilletage horocyclique d'un triangle idéal et transverse au feuilletage, et soit  $k'$  sa projection sur un côté de ce triangle le long du feuilletage horocyclique. On a alors:*

$$l_{h'_K}(k') = I(k, F_\mu(h'_K)) \leq l_{h'_K}(k). \quad (2.3.1)$$

**Remarque :** Pour la définition de  $I$  voir 1.3.4

### 2.3.1 Démonstration de la proposition 2.3.3:

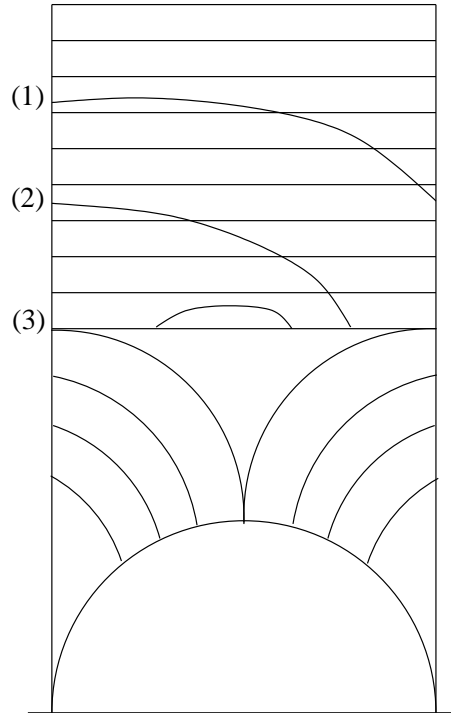
La démonstration de cette proposition s'inspire de la démonstration du lemme 4.9 dans [39]. Etant donnée la métrique hyperbolique  $h_K$ , on note  $\beta^*$  l'unique géodésique représentant la classe de  $\beta$ . La géodésique  $\beta^*$  dépend bien sûr de  $K$  mais on ne notera pas cette dépendance, elle est transverse à  $\mu$ , puisque  $\mu$  n'a pas de feuilles fermées.

Soit  $N_0$  le sous ensemble de la surface  $S$  égal au complémentaire de la lamination  $\mu$  dans le support du feuilletage  $F_\mu(h'_K)$ , autrement dit,  $N_0$  est l'union des régions feuilletées des triangles idéaux, (on exclus les bords de ces triangles). On considère une composante connexe de l'intersection de  $\beta^*$  avec  $N_0$  et on note  $k$  la fermeture de cette intersection. L'arc géodésique  $k$  peut être de trois types:

- **Type 1:**  $k$  a ses deux extrémités sur  $\mu$ ;
- **Type 2:**  $k$  a une et une seule extrémité sur  $\mu$ ;
- **Type 3:**  $k$  n'a pas d'extrémité sur  $\mu$ .

Ces trois types sont représentés respectivement par les courbes (1), (2) et (3) de la figure 1.5. Remarquons que le segment  $k$  a au plus un point de tangence

avec le feuilletage  $F_\mu(h_K)$ .



**Figure 1.5**

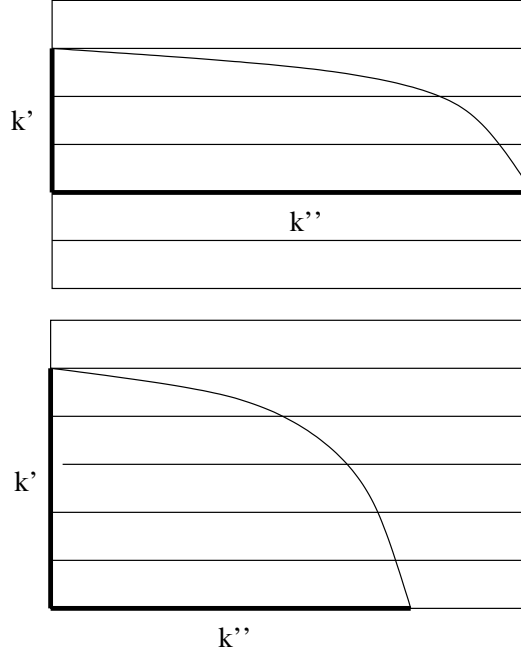
On modifie maintenant la géodésique  $\beta^*$  de la manière suivante:

Si  $k$  est type 1 ou 2, on remplace le segment  $k$  par deux segments  $k'$  et  $k''$ , où le segment  $k'$  est obtenu en projetant  $k$  le long des feuilles du feuilletage  $F_\mu(h'_K)$ . Ainsi le segment  $k'$  est inclus dans un côté du triangle idéal. Le segment  $k''$  est contenu dans une horocycle, voir figure 1.6.

Si le segment est de type 3, alors on le remplace par trois segments  $k'_1$ ,  $k'_2$  (qui sont orthogonaux aux horocycles,) et  $k''$  qui inclus dans une horocycle, voir figure 1.7.

La mesure transverse  $I(F_\mu(h'_K), k)$  du segment  $k$  dans les trois cas, est égale à

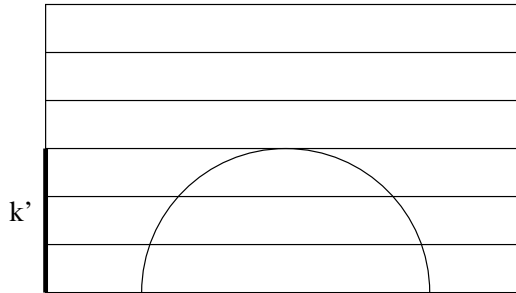
la longueur hyperbolique  $l_{h'_K}(k')$  du segment  $k'$  sur un côté du triangle idéal.



**Figure 1.6**

D'après le lemme 1.5.3 on a :

$$l_{h'_K}(k') = I(k, F_\mu(h'_K)) \leq l_{h'_K}(k) \quad (2.3.2).$$



**Figure 1.7**

On note  $\beta^{**}$  la courbe simple fermée obtenue à partir de la géodésique  $\beta^*$  après les modifications précédentes sur chaque composante connexe de l'intersection de  $\beta^*$  avec  $N_0$ . Par l'inégalité (2.3.1) on a:

$$I(\beta^{**}, F_\mu(h'_K)) \leq l_{h'_K}(\beta^*),$$

d'où

$$I(\beta, F_\mu(h'_K)) \leq l_{h'_K}(\beta^*).$$

Or, le long de la "stretch line" la mesure transverse du feuilletage  $F_\mu(h'_K)$  est multipliée par  $K$  fois la mesure transverse du feuilletage  $F_\mu(h)$  donc

$$I(\beta, F_\mu(h'_K)) = K \cdot I(\beta, F_\mu(h)).$$

Lorsque le paramètre  $K$  tend vers l'infini,  $I(\beta, F_\mu(h'_K))$  tend aussi vers l'infini, puisque  $I(\beta, F_\mu(h)) \neq 0$  et d'après l'inégalité (2.3.1) on peut conclure que  $l_{h'_K}(\beta)$  tend vers l'infini, d'où le résultat.  $\square$

### 2.3.2 Démonstration du Théorème 2.3.2:

On distingue deux cas:

**Pour la métrique de Teichmüller :** D'après la proposition 2.3.3, la longueur extrémale de  $\beta$  est majorée par une constante  $c_1$  indépendante du paramètre  $K$  le long du rayon  $(h_K)_{K \geq 1}$ , et d'après le lemme 2.3.4, la longueur extrémale de cette même courbe  $\beta$  tend vers l'infini le long de la "stretch line"  $(h'_K)_{K \geq 1}$  lorsque  $K$  tend vers l'infini, mais d'après le théorème 1.4.8 de Kerckhoff, on a:

$$d(h_K, h'_K) = \frac{1}{2} \log \left( \sup_{\gamma \in \mathbf{S}} \frac{\text{ext}_{h'_K}(\gamma)}{\text{ext}_{h_K}(\gamma)} \right),$$

donc

$$d(h_K, h'_K) \geq \frac{1}{2} \log \left( \frac{\text{ext}_{h'_K}(\beta)}{\text{ext}_{h_K}(\beta)} \right) \geq \frac{1}{2} \log \left( \frac{\text{ext}_{h'_K}(\beta)}{c_1} \right).$$

Donc la distance  $d(h_K, h'_K)$  tend vers l'infini, d'où le résultat.  $\square$

## 54 Comportement asymptotique de certains rayons géodésiques

---

**Pour la pseudo-métrie de Thurston:** D'après la proposition 2.3.3, la longueur hyperbolique de  $\beta$  tend vers l'infini lorsque  $K$  tend aussi vers l'infini le long de la "stretch line"  $(h'_K)_{K \geq 1}$  et d'après le lemme 2.2.4, la longueur hyperbolique de cette même courbe  $\beta$  est majorée par une constante  $c_2$  indépendante de  $K$  le long de  $(h_K)_{K \geq 1}$ . Or, on a:

$$\mathcal{K}(h_K, h'_K) = \log \left( \sup_{\gamma \in \mathcal{S}} \frac{l_{h'_K}(\gamma)}{l_{h_K}(\gamma)} \right),$$

donc

$$\mathcal{K}(h_K, h'_K) = \log \left( \sup_{\gamma \in \mathcal{S}} \frac{l_{h'_K}(\gamma)}{l_{h_K}(\gamma)} \right) \geq \log \left( \frac{l_{h'_K}(\beta)}{l_{h_K}(\beta)} \right),$$

d'où

$$\mathcal{K}(h_K, h'_K) \geq \log \left( \frac{l_{h'_K}(\beta)}{l_{h_K}(\beta)} \right) \geq \log \left( \frac{l_{h'_K}(\beta)}{c_2} \right).$$

Donc la distance  $\mathcal{K}(h_K, h'_K)$  tend vers l'infini lorsque  $K$  tend vers l'infini, d'où le résultat.  $\square$

## Chapitre 3

# Comparaison de métriques sur le tore pointé

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première, on compare la métrique de Teichmüller  $d$  et la pseudo-métrique de Thurston  $\mathcal{K}$  dans l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S_{1,1})$ , où  $S_{1,1}$  désigne un tore pointé. On montre que l'application:

$$id : (\mathbb{T}(S_{1,1}), d) \longrightarrow (\mathbb{T}(S_{1,1}), \mathcal{K})$$

n'est pas une quasi-isométrie (voir la définition A.2 de l'appendice pour cette notion). On rappelle que  $\mathbb{T}(S_{1,1})$  muni de la métrique de Teichmüller est isométrique au disque de Poincaré. La technique de la démonstration repose sur des estimations entre les longueurs extrémale et hyperbolique d'une classe d'homotopie de courbes simples fermées et non homotopes à un point ou à une pointe, dues à Maskit et sur un exemple dans le cas du tore pointé où ces inégalités prennent une forme "presque optimale", cet exemple est dû aussi à Maskit.

Dans la deuxième partie, on montre que  $d$  et  $\mathcal{K}$  sont reliées par une relation qui ressemble à la double inégalité figurant dans la définition A.2, sauf que la constante  $c = c(y)$  figurant dans cette même inégalité dépend seulement de la structure conforme marquée  $y$  et non de la structure conforme marquée

$x$ . Ce dernier résultat est démontré pour toute surface, de caractéristique d'Euler-Poincaré négative.

### 3.2 Théorème de Kerckhoff

Au départ Kerckhoff démontre ce théorème pour des surfaces fermées (voir théorème 1.8.4 du premier chapitre), mais ce résultat s'étend facilement à des surfaces avec des pointes et/ou ayant un bord  $\partial S$  non vide, (voir Minsky [36]). On rappelle quelques définitions.

Un arc n'est pas trivial s'il n'est pas isotope à extrémités restant sur la même composante du bord  $\partial S$  de  $S$ , à un segment de  $\partial S$ .

Une courbe n'est pas triviale si elle n'est pas isotope à un point ou à une pointe.

Dans ce cas, il faut prendre la borne supérieure dans le théorème 1.8.4 sur l'ensemble  $\mathcal{C}$  au lieu de l'ensemble  $\mathbf{S}$ , où  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}(S), \partial S)$  désigne l'ensemble formé par les classes d'homotopies de courbes simples fermées, non triviales et les classes d'homotopies d'arcs non triviaux. Plus précisément

**Théorème 3.2.1** (Kerckhoff amélioré) *La distance de Teichmüller entre deux points  $g, h$  de  $\mathbb{T}(S)$  est donnée par:*

$$d(g, h) = \frac{1}{2} \log \left( \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{\text{ext}_g(\gamma)}{\text{ext}_h(\gamma)} \right), \quad (3.2.1)$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble  $\mathcal{C}$  défini plus haut et  $\text{ext}$  désigne la longueur extrémale.

□



### 3.3 Inégalités de Maskit

Dans [30], Maskit compare ces deux longueurs c'est-à-dire les longueurs extrémale et hyperbolique.

**Théorème 3.3.1** (Maskit) *Soit  $g$  un point dans l'espace de Teichmüller d'une surface  $S$  de caractéristique d'Euler-Poincaré négative, alors on a :*

$$l_g(\gamma) \leq \pi \operatorname{ext}_g(\gamma) \quad (3.3.1)$$

$$\operatorname{ext}_g(\gamma) \leq \frac{1}{2} l_g(\gamma) \exp\left(\frac{l_g(\gamma)}{2}\right) \quad (3.3.2)$$

□

Ces deux inégalités ne permettent pas de conclure ou non si l'application  $id : (\mathbb{T}(S), d) \longrightarrow (\mathbb{T}(S), \mathcal{K})$  est une quasi-isométrie. Par contre, dans le même article [30], Maskit construit un exemple de métriques sur un tore pointé (une surface de genre 1 avec une pointe "cusp") où l'inégalité (3.3.2) prend une forme avec laquelle on peut conclure.

### 3.4 Exemple de Maskit

Pour  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on considère le groupe  $G_\alpha$  engendré par  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  où  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  sont les matrices suivantes:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \csc \alpha & \cot \alpha \\ \cot \alpha & \csc \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} \sec \alpha & i \tan \alpha \\ -i \tan \alpha & \sec \alpha \end{pmatrix}$$

**Remarque :**  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  sont des isométries de type hyperbolique sur le disque de Poincaré  $\mathbb{D}^2$ .

On a en effet

$$\operatorname{tr}^2(A_\alpha) = 4 \cdot \csc^2(\alpha) = \frac{4}{\sin^2(\alpha)} \geq 4,$$

et

$$\operatorname{tr}^2(B_\alpha) = 4 \cdot \sec^2(\alpha) = \frac{4}{\cos^2(\alpha)} \geq 4.$$

**Lemme 3.4.1** *Le groupe  $G_\alpha = \langle A_\alpha, B_\alpha \rangle$  est un sous-groupe discret de  $\text{PSU}(1, 1)$  et  $S_\alpha := \mathbb{D}^2/G_\alpha$  est homéomorphe au tore pointé.*

Pour une démonstration dans un cadre plus général voir Beardon [5] théorème 8.2.6.

- On note par  $h_\alpha$  l'unique métrique hyperbolique sous-jacente à la structure conforme  $S_\alpha = \mathbb{D}^2/G_\alpha$ .
- On désigne par  $\text{ext}_{h_\alpha}(p(A_\alpha))$  (resp.  $l_{h_\alpha}(p(A_\alpha))$ ), la longueur extrémale (resp. la longueur hyperbolique mesurée avec la métrique  $h$ ) de la projection de l'axe de  $A_\alpha$  par  $p$ , où  $p$  est la projection canonique de  $\mathbb{D}^2$  dans  $\mathbb{D}^2/G_\alpha$ .
- Pour alléger les notations, on écrira  $\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)$  (resp.  $l_{h_\alpha}(A_\alpha)$ ) au lieu de  $\text{ext}_{h_\alpha}(p(A_\alpha))$  (resp.  $l_{h_\alpha}(p(A_\alpha))$ ).

**Lemme 3.4.2** *Soit  $\beta = p(A_\alpha)$  la projection de l'axe  $L_A$  de l'isométrie hyperbolique  $A_\alpha$  dans  $S_{1,1}$ . Alors,  $\beta$  est une courbe simple fermée dans  $S_{1,1}$*

**Démonstration** On remarque que

$$A_\alpha(1) = \frac{\csc \alpha \cdot 1 + \cot \alpha}{\cot \alpha \cdot 1 + \csc \alpha} = 1$$

et

$$A_\alpha(-1) = \frac{\csc \alpha \cdot -1 + \cot \alpha}{\cot \alpha \cdot -1 + \csc \alpha} = -1$$

Donc 1 et  $-1$  sont les points fixes de  $A_\alpha$  et  $L_A$  est le segment reliant 1 à  $-1$ . Les deux valeurs  $i$  et  $-i$  sont aussi telles que:

$$B_\alpha(i) = i \quad \text{et} \quad B_\alpha(-i) = -i.$$

On sait que les isométries hyperboliques  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  envoient un côté du domaine fondamental  $D_\alpha$  de  $G_\alpha = \langle A_\alpha, B_\alpha \rangle$ , sur le côté opposé. Le domaine  $D_\alpha$  est formé de quatre géodésiques ayant les couples de points  $(e^{i\alpha}, -e^{-i\alpha})$ ,  $(-e^{-i\alpha}, -e^{i\alpha})$ ,  $(-e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$  et  $(e^{-i\alpha}, e^{i\alpha})$  comme extrémités. Autrement dit,

$D_\alpha$  est un quadrilatère ayant les points  $e^{i\alpha}$ ,  $-e^{-i\alpha}$ ,  $-e^{i\alpha}$  et  $e^{-i\alpha}$  comme sommets.

Or, d'après le théorème 9.7.1 dans Beardon [5], pour tout élément  $C \in G_\alpha$ , on a

$$C(L_{A_\alpha}) = L_{A_\alpha} \quad \text{ou} \quad C(L_{A_\alpha}) \cap L_{A_\alpha} = \emptyset.$$

Ceci est équivalent à dire que la géodésique  $p(L_{A_\alpha}) = \beta$  est simple dans  $S_{1,1}$ . D'où le résultat.  $\square$

**Remarque :** La même référence nous assure aussi que la projection de l'axe de  $B_\alpha$  est aussi une géodésique simple fermée dans  $S_{1,1}$ .

Dans [30], Maskit montre que dans le cas précis du tore pointé  $S_\alpha = \mathbb{D}^2/G_\alpha$ , on a :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha$  entre 0 et  $\pi/2$  tel que:

$$\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha) \geq (1/2 - \varepsilon) \exp\left(\frac{l_{h_\alpha}(A_\alpha)}{2}\right) \quad (3.4.1)$$

On peut énoncer le principal résultat de ce chapitre.

**Théorème 3.4.3** *L'application*

$$id : (\mathbb{T}(S_{1,1}), d) \longrightarrow (\mathbb{T}(S_{1,1}), \mathcal{K})$$

*n'est pas une quasi-isométrie.*

Signalons au passage que Wolpert [47], voir aussi Abikoff [1], McCarthy-Papadopoulos [34] donne une importante inégalité qui relie la fonction "longueur hyperbolique des courbes" à la métrique de Teichmüller.

**Théorème 3.4.4** (Wolpert) *Supposons que  $m$  et  $n$  sont deux points de l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$  où  $S$  est une surface telle que  $\chi(S) < 0$  et  $\gamma \in \mathcal{C}(S)$ , alors on a :*

$$l_n(\gamma) \leq \exp(d(m, n)) \cdot l_m(\gamma), \quad (3.4.2)$$

où  $d(m, n)$  désigne la distance de Teichmüller entre  $m$  et  $n$ .  $\square$

D'après l'inégalité (3.4.2), on a :

$$\frac{l_n(\gamma)}{l_m(\gamma)} \leq \exp(d(m, n)),$$

ce qui implique que :

$$\mathcal{K}(m, n) = \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \log \left( \frac{l_n(\gamma)}{l_m(\gamma)} \right) \leq d(n, m). \quad (3.4.3)$$

Cette inégalité reste donc vraie pour l'espace de Teichmüller du tore pointé.

## 3.5 Démonstration du théorème 3.4.3

On aura besoin de la construction suivante pour la démonstration du théorème 3.4.3

### 3.5.1 Construction d'une structure hyperbolique

Pour construire cette structure hyperbolique, il serait utile de rappeler une construction faite par Thurston dans ([43], proposition 4.3, p.13). Soit  $\mu$  une lamination maximale quelconque et  $h$  une métrique hyperbolique. D'après l'homéomorphisme  $\varphi_\mu$  (voir théorème 1.10.1 du premier chapitre) on peut lui associer un feuilletage horocyclique  $F_\mu(h)$ . Dans chaque voisinage  $V$  d'un sommet idéal  $v$  (un sommet d'un triangle idéal) dans le complémentaire de  $\mu$  dans la surface  $S_{1,1}$ , le feuilletage  $F_\mu(h)$  est composé de morceaux d'horocycles. Dans ce voisinage  $V$ , on peut définir une fonction notée  $f_{h,v}$  qui à chaque point  $x$  de  $V$  associe la valeur  $f_{h,v}(x)$  qui est égale au logarithme de la longueur (mesurée avec la métrique  $h$ ) de l'horocycle qui passe par le point  $x$ . La fonction  $f_{h,v}$  est appelée par Thurston "Sharpness function".

**Remarques :**

- Par la formule d'Euler-Poincaré, le nombre total de sommets des triangles idéaux dans le complémentaire de  $\mu$  dans  $S_{1,1}$  est égal à  $-6\chi(S_{1,1})$ .

- L’homéomorphisme  $\varphi_\mu$  dans le théorème 1.10.1 du chapitre 1 a été énoncé pour les surfaces fermées de genre  $g \geq 2$ , mais Thurston le définit pour toute surface de caractéristique d’Euler-Poincaré négative. Donc, le théorème 1.10.1 reste vrai pour le tore pointé  $S_{1,1}$ .

**Proposition 3.5.1** *Il existe une structure hyperbolique  $g_\alpha$  sur le tore pointé  $S_{1,1}$  et une application  $K$ -Lipschitzienne ( $K > 1$ )*

$$f : (S_{1,1}, g_\alpha) \longrightarrow (S_{1,1}, h_\alpha),$$

telle que:

$$K = \text{Lip}(f) = \frac{l_{h_\alpha}(A_\alpha)}{l_{g_\alpha}(A_\alpha)}. \quad (3.5.1)$$

**Démonstration** On rappelle que  $\beta$  est la projection de l’axe de  $A_\alpha$  sur  $S_{1,1}$ , d’après le lemme 3.4.2, la géodésique  $\beta$  est simple fermée sur  $S_\alpha$  (tore pointé muni de la métrique  $h_\alpha$ ). On prolonge cette géodésique en une lamination maximale  $\mu$  (son complémentaire dans  $S$  est formé de triangles idéaux),  $\mu$  étant fixé une fois pour toute, (il y a plusieurs façons de prolonger  $\beta$  pour obtenir une lamination maximale). D’après l’homéomorphisme de Thurston  $\varphi_\mu$ , il existe une unique classe de feuilletage horocyclique  $F_h(\mu)$  transverse à  $\mu$  associé à la métrique  $h_\alpha$ . Si on se restreint à un voisinage  $V$  d’un sommet idéal  $v$  de  $\mu$ , alors en multipliant la mesure transverse de  $F_h(\mu)$  par  $1/K$ , on multiplie aussi la longueur des horocycles par un facteur  $\exp(-1/K)$ . Donc sur chaque voisinage  $V$  d’un sommet idéal  $v$ , on définit de nouvelles “sharpness functions”  $\exp(-1/K)f_{h,v}$ . Ces dernières paramétrisent les structures hyperboliques sur chaque voisinage  $V$ . Or, la lamination  $\mu$  est maximale, donc les structures hyperboliques définies sur chaque voisinage  $V$  se collent bien et définissent une seule structure hyperbolique  $g_\alpha$  sur toute la surface  $S_{1,1}$ , (voir [43] corollaire 4.5 p.15). On obtient ainsi une nouvelle métrique hyperbolique  $g_\alpha$  et un feuilletage mesuré horocyclique associé (par l’homéomorphisme  $\varphi_\mu$ ) à  $g_\alpha$  qu’on note  $F_{g_\alpha}(\mu)$ .

$\mu$  et  $g_\alpha$  étant fixés, on reprend la construction de l’application Lipschitzienne extrémale expliquée dans ([43] corollaire 4.5 p.15). D’où l’existence de  $f$  vérifiant les propriétés de la proposition.  $\square$

**Remarque :** En prolongeant  $\beta$  à  $\mu$ , celle-ci est une lamination avec une mesure transverse dont le support peut ne pas être toute la surface  $S_\alpha$ . Or ceci, n'est pas important, vu que Thurston donne sa théorie sans cette hypothèse.

Pour démontrer le théorème 3.4.3. On a besoin des lemmes suivants.

On a une relation entre la trace de la matrice  $A_\alpha$  et la longueur hyperbolique de la géodésique  $\beta$  qui est la projection de l'axe de  $A_\alpha$  par l'application

$$p : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2 / G_\alpha.$$

**Lemme 3.5.2** *Si la matrice  $A_\alpha$  est l'image de la classe d'homotopie  $\beta$  par l'isomorphisme de groupes entre le groupe fondamental  $\pi_1(S_\alpha)$  et le groupe de revêtement de la projection  $p$ , alors*

$$|\operatorname{tr}(A_\alpha)| = 2 \cosh(l_{h_\alpha}(\beta)/2). \quad (3.5.2)$$

Pour une démonstration de ce lemme, on renvoie à celle faite par Douady dans (exposé 7, lemme 1, p.135. [13]).

**Lemme 3.5.3** *Si  $\alpha$  tend vers zéro, alors  $l_{h_\alpha}(A_\alpha)$  et  $l_{g_\alpha}(A_\alpha)$  tendent vers l'infini.*

**Démonstration** D'après l'égalité (3.5.2), on a :

$$|\operatorname{tr}(A_\alpha)| = 2 \cosh\left(\frac{l_{h_\alpha}(A_\alpha)}{2}\right),$$

donc

$$\operatorname{argcosh}\left(\frac{1}{2} \cdot |\operatorname{tr}(A_\alpha)|\right) = \frac{l_{h_\alpha}(A_\alpha)}{2}.$$

On remplace  $\operatorname{tr}(A_\alpha)$  par  $\frac{2}{\sin \alpha}$  et on remarque aussi que

$$\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tr}(A_\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha} \geq 1,$$

donc on peut remplacer la fonction  $x \longmapsto \operatorname{argcosh}(x)$  par sa valeur, on rappelle que si  $x \geq 1$ , alors

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

On obtient

$$\log \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \sqrt{\left( \frac{1}{\sin \alpha} \right)^2 - 1} \right) = \frac{l_{h_\alpha}(A_\alpha)}{2},$$

ce qui implique

$$l_{h_\alpha}(A_\alpha) = 2 \log \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} \right).$$

D'où

$$l_{h_\alpha}(A_\alpha) = 2 \log \left( \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right).$$

Donc  $l_{h_\alpha}(A_\alpha)$  tend vers l'infini lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. Par construction de  $g_\alpha$  et de  $h_\alpha$  (voir la proposition 3.5.1 et la formule (3.5.1)), on a

$$\sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{l_{h_\alpha}(\gamma)}{l_{g_\alpha}(\gamma)} = \frac{l_{h_\alpha}(A_\alpha)}{l_{g_\alpha}(A_\alpha)} = K,$$

donc  $l_{g_\alpha}(A_\alpha) = K^{-1} l_{h_\alpha}(A_\alpha)$  tend aussi vers l'infini, lorsque  $\alpha$  tend vers zéro.

D'où le résultat.  $\square$

On notera par  $g_\alpha$  (resp.  $h_\alpha$ ) la structure conforme définie par la métrique hyperbolique  $g_\alpha$ , construite dans la proposition 3.5.1 (resp.  $h_\alpha$ ). On remarquera que  $h_\alpha$  n'est autre que  $S_\alpha$ .

**Lemme 3.5.4** *La fonction définie de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  par:*

$$\alpha \mapsto \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)},$$

*n'est pas majorée.*

**Démonstration** Supposons que notre fonction soit majorée. Alors, il existe  $M_0 > 0$ , tel que pour tout  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ , on ait:

$$\frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq M_0.$$

Or, d'après les inégalités (3.3.2) et (3.4.1) de Maskit, on a

$$\frac{(1/2 - \varepsilon) \exp(l_{h_\alpha}(A_\alpha)/2)}{1/2 \cdot l_{g_\alpha}(A_\alpha) \exp(l_{g_\alpha}(A_\alpha)/2)} \leq \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq M_0.$$

$g_\alpha$  et  $h_\alpha$  sont construites telles que:

$$l_{h_\alpha}(A_\alpha) = Kl_{g_\alpha}(A_\alpha).$$

En remplaçant cette relation dans la dernière inégalité, on obtient:

$$\frac{(1 - 2\varepsilon) \exp(K \cdot l_{g_\alpha}(A_\alpha)/2)}{l_{g_\alpha}(A_\alpha) \cdot \exp(l_{g_\alpha}(A_\alpha)/2)} \leq \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq M_0.$$

En simplifiant, on obtient

$$\frac{(1 - 2\varepsilon) \exp((K - 1) \cdot l_{g_\alpha}(A_\alpha)/2)}{l_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq M_0.$$

Or, d'après le lemme 3.4.3, si  $\alpha$  est assez petit, alors  $l_{g_\alpha}(A_\alpha)$  est très grand d'où l'existence d'un nombre  $\xi > 1$  tel que:

$$\exp((K - 1) \cdot l_{g_\alpha}(A_\alpha)/2) \geq ((K - 1) \cdot l_{g_\alpha}(A_\alpha))^\xi$$

donc

$$\frac{(1 - 2\varepsilon) ((K - 1) \cdot l_{g_\alpha}(A_\alpha))^\xi}{l_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq M_0$$

En simplifiant, on obtient:

$$(1 - 2\varepsilon)(K - 1)^\xi \cdot (l_{g_\alpha}(A_\alpha))^{\xi-1} \leq \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq M_0$$

En faisant tendre  $\alpha$  vers zéro, ceci contredit le lemme 3.4.3 qui stipule que  $l_{g_\alpha}(A_\alpha)$  tend vers l'infini lorsque  $\alpha$  tend vers zéro.  $\square$

### 3.5.2 Démonstration du théorème 3.4.3

Nous savons que  $\mathcal{K}(g, h) \leq d(g, h)$ , donc les deux métriques  $\mathcal{K}$  et  $d$  sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe des constantes  $k \geq 1$  et  $c \geq 0$  telles que:

$$d(g, h) \leq k \cdot \mathcal{K}(g, h) + c$$

pour tous  $g, h \in \mathbb{T}(S_{1,1})$ .

En particulier,

$$\frac{1}{2} \log \left( \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(\gamma)}{\text{ext}_{g_\alpha}(\gamma)} \right) \leq k \log \left( \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{l_{h_\alpha}(\gamma)}{l_{g_\alpha}(\gamma)} \right) + c,$$



c'est à dire

$$\sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(\gamma)}{\text{ext}_{g_\alpha}(\gamma)} \leq \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \left( \frac{l_{h_\alpha}(\gamma)}{l_{g_\alpha}(\gamma)} \right)^{2k} e^c.$$

Or la projection de l'axe de  $A_\alpha$  est une géodésique fermée simple  $\beta$  sur  $S_{1,1}$  qui n'est homotope ni à un point ni à la pointe, puisque  $A_\alpha$  est une isométrie de type hyperbolique (voir lemme 3.4.2). Par conséquent  $\beta = p(A_\alpha) \in \mathcal{C}$  et donc

$$\frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)} \leq \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(\gamma)}{\text{ext}_{g_\alpha}(\gamma)} \leq \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \left( \frac{l_{h_\alpha}(\gamma)}{l_{g_\alpha}(\gamma)} \right)^{2k} e^c = K^{2k} e^c, \quad (3.5.3)$$

puisque les métriques  $g_\alpha$  et  $h_\alpha$  sont construites de façon que

$$\sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{l_{h_\alpha}(\gamma)}{l_{g_\alpha}(\gamma)} = \frac{l_{h_\alpha}(A_\alpha)}{l_{g_\alpha}(A_\alpha)} = K$$

pour tout  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

L'inégalité (3.5.3) implique que la fonction  $]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  définie par:

$$\alpha \mapsto \frac{\text{ext}_{h_\alpha}(A_\alpha)}{\text{ext}_{g_\alpha}(A_\alpha)},$$

est majorée, ce qui contredit le lemme 3.5.4.

□

### 3.6 Relation entre les deux pseudo-métriques $d$ et $\mathcal{K}$

Dans ce paragraphe, nous montrons que nos deux pseudo-métriques  $d$  et  $\mathcal{K}$  sont reliées par une relation qui ressemble à celle de la définition A.2 de l'appendice dans laquelle  $c$  n'est plus une constante mais dépend du second argument.

Ce résultat est vrai pour toute surface  $S$  de caractéristique d'Euler-Poincaré négative et non seulement le tore pointé.

Considérons la fonction définie de  $\mathbf{MF}(S)$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  par:

$$F \mapsto \frac{\text{ext}_g(F)}{l_g^2(F)},$$

où  $l_g(F)$  désigne la longueur du feuilletage mesuré  $F$ . Cette fonction est une extension de la fonction classique “longueur des courbes” et elle est définie comme suit:

**Définition 3.6.1**  $l_g(F)$  est égale à la borne inférieure sur  $F'$  dans la classe du feuilletage  $F$ , des masses totales sur la surface  $S$  de la mesure produit  $dF' \times dl$ , où  $dF'$  désigne la mesure transverse au feuilletage  $F'$  et  $dl$  est l'élément de longueur de la métrique  $g$  le long des feuilles de  $F'$ .

Pour calculer ce nombre, on peut prendre une suite  $(x_i \cdot \gamma_i)$  convergeant vers  $F$  dans  $\mathbf{MF}(S)$ . On rappelle que  $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}$  est dense dans  $\mathbf{MF}(S)$ . Alors, la quantité  $l_g(F)$  est égale à la limite de la suite numérique  $x_i \cdot l_g(\gamma_i)$ , lorsque  $i$  tend vers l'infini. Ceci vient du fait que le fonction longueur:

$$l_{(\cdot)}(\cdot) : \mathbb{T}(S) \times \mathbf{MF}(S) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

est continue, (voir Kerckhoff [22] pour une démonstration).

**Lemme 3.6.2** Pour tout  $F \in \mathbf{MF}(S)$ , on a:

$$\frac{\text{ext}_g(F)}{l_g^2(F)} \geq \frac{1}{2\pi\chi(S)}$$

**Démonstration** Par la définition analytique de la longueur extrémale

$$\frac{\text{ext}_g(F)}{l_g^2(F)} = \left( \sup_{\rho} \frac{l_{\rho}^2(F)}{\text{Aire}(\rho)} \right) \times l_g^{-2}(F),$$

où le sup est pris sur toutes les métriques conformes  $\rho$ . Comme  $g$  est l'unique métrique hyperbolique dans sa classe conforme et que l'aire de toute métrique hyperbolique est égale à  $2\pi |\chi(S)|$ , alors

$$\frac{\text{ext}_g(F)}{l_g^2(F)} \geq \frac{l_g^2(F)}{\text{Aire}(g)} l_g^{-2}(F) = \frac{1}{\text{Aire}(g)} = \frac{1}{2\pi |\chi(S)|}.$$

D'où le lemme. □

Soit  $h$  une autre structure hyperbolique sur  $S$ , alors

**Proposition 3.6.3** Il existe deux constantes  $C_1(h)$  et  $C_2(h)$  dépendant seulement de la structure conforme  $h$ , telles que pour tout  $F \in \mathbf{MF}(S)$ , on a:

$$C_1(h) \leq \frac{\text{ext}_h(F)}{l_h^2(F)} \leq C_2(h).$$

**Démonstration** Comme fonctions définies de  $\mathbf{MF}(S)$  dans  $\mathbb{R}_+^*$   $\text{ext}_h(\cdot)$  et  $l_h^2(\cdot)$  sont continues et prennent des valeurs strictement positives. Pour tout élément  $F$  dans  $\mathbf{MF}(S) - \{0\}$  et pour tout  $r > 0$ . On a

$$\text{ext}_h(r \cdot F) = r^2 \cdot \text{ext}_h(F),$$

$$(l_h(r \cdot F))^2 = (r \cdot l_h(F))^2 = r^2 \cdot (l_h(F))^2.$$

Donc la fonction définie de  $\mathbf{MF}(S)$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$F \mapsto \frac{\text{ext}_h(F)}{l_h^2(F)},$$

est continue et prend des valeurs strictement positives sur un espace compact  $\mathbf{PMF}(S)$ . Donc elle atteint un maximum et un minimum qu'on note par  $C_1(h)$  et  $C_2(h)$ . D'où la proposition.  $\square$

**Proposition 3.6.4** Soient  $g, h$  deux points quelconques de l'espace de Teichmüller  $\mathbb{T}(S)$ . Alors:

$$d(g, h) \leq \mathcal{K}(g, h) + c(h)$$

**Démonstration** D'après ce qui précède, on a: pour tout  $\gamma$  dans  $\mathbf{S}$

$$\frac{1}{\text{ext}_g(\gamma)} \leq \frac{2\pi |\chi(S)|}{l_g^2(\gamma)},$$

$$\text{ext}_h(\gamma) \leq C_2(h) \cdot (l_h(\gamma))^2.$$

En utilisant ces deux inégalités on a:

$$\begin{aligned} d(g, h) &= \frac{1}{2} \cdot \log \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{\text{ext}_h(\gamma)}{\text{ext}_g(\gamma)} \leq \frac{1}{2} \cdot \log \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{2\pi |\chi(S)| C_2(h) l_h^2(\gamma)}{l_g^2(\gamma)} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \log \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{l_h^2(\gamma)}{l_g^2(\gamma)} + \frac{1}{2} \cdot \log (2\pi |\chi(S)| C_2(h)) \\ &= \log \sup_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{l_h(\gamma)}{l_g(\gamma)} + \frac{1}{2} \cdot \log (2\pi C_2(h) |\chi(S)|) \\ &= \mathcal{K}(g, h) + c(h) \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$



# Chapitre 4

## Le cas du tore plat

### 4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre au problème posé et résolu par Thurston dans [43] où il définit une pseudo-métrique non symétrique sur l'espace de Teichmüller d'une surface de caractéristique d'Euler-Poincaré négative par :

$$\mathcal{K}(g, h) = \sup_{\alpha \in \mathbf{S}} \log \left( \frac{l_h(\alpha)}{l_g(\alpha)} \right), \quad (4.1)$$

(où  $\mathbf{S}$  est l'ensemble des classes d'isotopie de courbes fermées simples non homotopes à un point sur la surface) et il montre que cette quantité est égale à :

$$L(g, h) = \inf_{\varphi \sim \text{id}} \log (\mathcal{L}(\varphi)), \quad (4.2)$$

où  $\varphi$  est un homéomorphisme de la surface et

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sup_{x \neq y} \left( \frac{d_h(\varphi(x), \varphi(y))}{d_g(x, y)} \right)$$

est sa constante de Lipschitz.

Notre but dans ce chapitre est d'étudier le même problème dans le cas des métriques plates (c'est-à-dire de courbure nulle) sur le tore.

On montre que  $\mathcal{K}$  est égale à la pseudo-métrique de Lipschitz  $L$  en construisant explicitement une application  $f$  Lipschitzienne telle que sa constante

de Lipschitz  $\mathcal{L}(f)$  soit égale à  $\exp(\mathcal{K}(\cdot, \cdot))$ . On montre que  $\mathcal{K}$  est aussi égale à la pseudo-métrique  $\delta$  définie dans l'appendice, (voir proposition A.4). Il en résulte que  $\mathcal{K}$  est une pseudo-métrique non séparante (contrairement au cas où  $\mathcal{K}$  est définie sur des structures hyperboliques marquées) et non symétrique; et que son symétrisé  $S\mathcal{K}$  est égal à la métrique de Teichmüller  $d$ , (ou à la métrique de Poincaré  $h$ ). On montre aussi qu'il n'existe pas d'homéomorphisme

$$f : (\mathbb{T}(T^2), d) \longrightarrow (\mathbb{T}(T^2), \mathcal{K})$$

qui soit une quasi-isométrie. La démonstration repose sur le résultat démontré dans l'appendice (voir proposition A.7). Ce dernier résultat est plus fort que le résultat démontré dans le chapitre 3 dans le cas des métriques hyperboliques définies sur le tore pointé, puisque on a montré dans ce cas que l'identité (et non pas un homéomorphisme quelconque) n'est pas une quasi-isométrie.

## 4.2 L'espace de Teichmüller du tore plat

Rappelons que dans chaque classe conforme sur une surface fermée de genre  $\geq 2$ , il existe une unique métrique hyperbolique (voir chapitre 1). Pour une surface de genre 1, on a le résultat suivant (voir par exemple Wallach-Warner [46]):

**Théorème 4.2.1** *Dans chaque classe conforme de métriques sur le tore  $T^2$ , il existe une métrique plate. Cette métrique est unique à homothétie près.*

□

**Définition** On note  $\mathbb{P}(T^2)$  le projectif de l'ensemble des métriques plates sur  $T^2$ , autrement dit:

$$\mathbb{P}(T^2) : = \{\text{Métrique plate sur } T^2\} / \mathbb{R}_+^*,$$

alors l'espace de Teichmüller du tore plat est défini comme suit:

$$\mathbb{T}(T^2) : = \mathbb{P}(T^2) / \text{Diff}_0(T^2),$$

où  $\text{Diff}_0(T^2)$  désigne le sous groupe des difféomorphismes de  $T^2$  isotopes à l'identité.

On définit la métrique  $d$  de Teichmüller sur  $\mathbb{T}(T^2)$  de la même manière que dans le cas des surfaces de genre supérieur (voir chapitre 1 §6).

On peut définir une application  $j : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{T}(T^2)$  de la façon suivante : à tout élément  $w \in \mathbb{H}^2$ , on associe la surface plate  $S_w$  définie par :

$$S_w = \mathbb{C} / (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}w),$$

où  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}w$  désigne le groupe engendré par les deux translations du plan  $\mathbb{C}$  suivantes :

$$\xi \mapsto \xi + 1 \quad \text{et} \quad \xi \mapsto \xi + w.$$

La surface  $S_w$  définit un point dans l'espace de Teichmüller que nous notons  $j(w) = [S_w] \in \mathbb{T}(T^2)$ .

On a alors ce résultat (voir [25, th.6.4, p. 219]) :

**Théorème 4.2.2** *L'application  $j : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{T}(T^2)$  que nous venons de décrire est une isométrie entre l'espace  $\mathbb{T}(T^2)$  muni de la métrique de Teichmüller  $d$  et le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}^2$ , muni de la métrique de Poincaré  $h$ . C'est-à-dire que  $j$  est une bijection et que pour tout  $w, z \in \mathbb{H}^2$ , on a :*

$$d(j(w), j(z)) = h(w, z).$$

□

Dans la suite, on identifiera le point  $w \in \mathbb{H}^2$  et l'élément  $j(w) = [S_w] \in \mathbb{T}(T^2)$ .

**Remarque sur le marquage** Un *marquage* d'une surface  $S$  de genre 1 peut être défini comme le choix d'un isomorphisme  $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \pi_1(S)$ .

Dans un tore marqué  $S$ , chaque élément de  $\mathbb{Z}^2$  correspond donc à une classe d'isotopie de courbe sur  $S$ . On notera dans la suite  $\epsilon$  la classe d'isotopie correspondant au générateur  $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ .

Observons que la surface  $S_w = \mathbb{C} / (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}w)$  est canoniquement marquée; dans cette surface, la classe d'isotopie  $\epsilon$  est l'image de l'intervalle  $[0, 1] \subset \mathbb{C}$  par la projection canonique  $\mathbb{C} \rightarrow S_w$ .

### 4.3 La pseudo-métrie $\mathcal{K}$ de Thurston

La pseudo-métrie  $\mathcal{K}$  définie en (4.1) n'est pas invariante lorsqu'on multiplie une métrie par une constante positive. Dans le cas du tore où l'espace de Teichmüller est construit à partir des métriques plates, cela pose un problème et nous devons redéfinir  $\mathcal{K}$  de façon que cette quantité soit invariante sous l'action de  $\mathbb{R}_+^*$ .

A toute paire  $g, h$  de métriques sur  $T^2$ , on associe donc le réel

$$\mathcal{K}(g, h) = \sup_{\alpha \in \mathbf{S}(T^2)} \log \left( \frac{l_h(\alpha)/l_h(\epsilon)}{l_g(\alpha)/l_g(\epsilon)} \right),$$

où  $\mathbf{S}(T^2)$  désigne l'ensemble des classes d'isotopies de lacets non triviaux dans  $T^2$  et  $\epsilon \in \mathbf{S}(T^2)$  est la classe d'isotopie définie plus haut.

Il est clair que cette quantité est invariante sous l'action de  $\mathbb{R}_+^*$  et sous l'action du groupe  $\text{Diff}_0(T^2)$ , en particulier  $\mathcal{K}$  définit une fonction

$$\mathcal{K} : \mathbb{T}(T^2) \times \mathbb{T}(T^2) \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est une pseudo-métrie.

Notre prochain résultat dit que, via l'identification  $j : \mathbb{T}(T^2) \cong \mathbb{H}^2$ , la quantité  $\mathcal{K}$  coïncide avec la pseudo-métrie  $\delta$  étudiée dans l'appendice :

**Théorème 4.3.1** *Pour tout  $w, z \in \mathbb{H}^2$ , on a :*

$$\mathcal{K}(w, z) = \delta(w, z) = \log(M(w, z))$$

**Démonstration** Le marquage de la surface  $S_w$  nous permet d'identifier  $\mathbb{Z}^2$  avec  $\mathbf{S}(T^2)$ ; la classe d'isotopie du lacet correspondant à  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  est donnée par l'image dans  $S_w = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}w)$  d'un chemin (quelconque, car  $\mathbb{C}$  est contractile) reliant  $0 \in \mathbb{C}$  à  $m + nw$ . Il est donc clair que la longueur minimale d'un tel chemin est égale à  $|m + nw|$  :

$$l_{\rho_w}(m, n) = |m + nw|.$$



Où l'on note  $\rho_w$  la projection de la métrie euclidienne de  $\mathbb{C}$  sur  $S_w = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}w)$ .

On a de même  $l_{\rho_z}(m, n) = |m + nz|$ , et en particulier  $l_{\rho_w}(\epsilon) = l_{\rho_z}(\epsilon) = l_{\rho}(1, 0) = 1$ .

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(w, z) &= \log \sup_{\gamma \in \mathcal{S}} \left( \frac{l_{\rho_z}(\gamma)/l_{\rho_z}(\epsilon)}{l_{\rho_w}(\gamma)/l_{\rho_w}(\epsilon)} \right) \\
 &= \log \sup_{n, m \in \mathbb{Z}} \left( \frac{|n + m \cdot z|}{|n + m \cdot w|} \right) \\
 &= \log \sup_{n, m \in \mathbb{Z}} \left( \frac{|(n/m) + z|}{|(n/m) + w|} \right) \\
 &= \log \sup_{q \in \mathbb{Q}} \left( \frac{|q + z|}{|q + w|} \right) = \log(M(w, z)) \\
 &= \delta(w, z).
 \end{aligned}$$

□

On a ce corollaire qui découle immédiatement du théorème (4.3.1), et des résultats de l'appendice :

#### Corollaire 4.3.2

- 1.)  $\mathcal{K}$  n'est ni symétrique, ni séparante;
- 2.) Le symétrisé  $SK$  de  $\mathcal{K}$  est égal à la métrie de Teichmüller  $d$ ;
- 3.)  $\mathcal{K}$  n'est pas quasi-isométrique à  $d$ .

□

## 4.4 La pseudo-métrie $L$

On définit la *pseudo-métrie de Lipschitz normalisée* entre deux surfaces riemanniennes marquées  $(S, g)$  et  $(S', h)$  de genre 1 par

$$L(g, h) := \inf_{\varphi} (\log \mathcal{L}(\varphi)),$$

où  $\varphi : S \rightarrow S'$  est un homéomorphisme préservant le marquage et

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sup_{x \neq y} \left( \frac{d_h(\varphi(x), \varphi(y))/l_h(\epsilon)}{d_g(x, y)/l_g(\epsilon)} \right).$$

Observons que  $L(g, h)$  est une quantité invariante sous l'action de  $\mathbb{R}_+^*$  et de  $\text{Diff}_0(T^2)$

$$L(\lambda\phi^*g, \mu\psi^*h) = L(g, h)$$

pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\phi \in \text{Diff}_0(S)$  et  $\psi \in \text{Diff}_0(S)$ . En particulier,  $L$  définit une fonction sur l'espace de Teichmüller du tore

$$L : \mathbb{T}(T^2) \times \mathbb{T}(T^2) \rightarrow \mathbb{R},$$

et il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une pseudo-métrie.

**Théorème 4.4.1** *En identifiant  $\mathbb{T}(T^2)$  et  $\mathbb{H}^2$  via l'isométrie  $j$ , on a*

$$L(w, z) = \mathcal{K}(w, z)$$

pour tous  $z, w \in \mathbb{T}(T^2)$ .

On aura besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.4.2** *Soit  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par*

$$\psi(\zeta) = \bar{p}^2\zeta + q^2\bar{\zeta}$$

(où  $p, q \in \mathbb{C}$ ), alors la constante de Lipschitz de  $\psi$  est donnée par

$$\text{Lip}(\psi) = |p|^2 + |q|^2.$$

**Démonstration** Pour tous  $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$ , on a

$$|\psi(\zeta) - \psi(\eta)| = |\bar{p}^2(\zeta - \eta) + q^2(\zeta - \eta)| \leq (|p|^2 + |q|^2)|\zeta - \eta|,$$

donc  $\text{Lip}(\psi) \leq |p|^2 + |q|^2$ .

Inversément, soient  $\zeta = pq$  et  $\eta = 0$ . Alors  $\psi(\eta) = 0$  et

$$\psi(\zeta) = \bar{p}^2 pq + q^2 \bar{p}q = \bar{p}q(|p|^2 + |q|^2),$$

par conséquent

$$\left| \frac{\psi(\zeta) - \psi(\eta)}{\zeta - \eta} \right| = \frac{|\bar{p}q(|p|^2 + |q|^2)|}{|pq|} = |p|^2 + |q|^2,$$

Ce qui montre que  $\text{Lip}(\psi) \geq |p|^2 + |q|^2$ .  $\square$

**Preuve du théorème** Observons d'abord que pour tout homéomorphisme  $\varphi : (S, g) \rightarrow (S', h)$ , et toute courbe  $c : I \rightarrow S$ , on a

$$\text{long}_h(\varphi \circ c) \leq \text{Lip}(\varphi) \cdot \text{long}_g(c)$$

où

$$\text{Lip}(\varphi) = \sup_{x \neq y} \left( \frac{d_h(\varphi(x), \varphi(y))}{d_g(x, y)} \right)$$

est la constante de Lipschitz de  $\varphi$ . Par conséquent, si  $\varphi : (S_w, \rho_w) \rightarrow (S_z, \rho_z)$  est un homéomorphisme préservant le marquage, alors

$$\mathcal{K}(\rho_w, \rho_z) \leq L(\rho_w, \rho_z)$$

(car  $l_{\rho_w}(\epsilon) = l_{\rho_z}(\epsilon) = 1$  et donc  $\text{Lip}(\varphi) = \mathcal{L}(\varphi)$  dans ce cas).

Pour démontrer l'inégalité inverse, on considère la fonction définie par

$$\tilde{f}(\zeta) := \left( \frac{z - \bar{w}}{w - \bar{w}} \right) \cdot \zeta - \left( \frac{z - w}{w - \bar{w}} \right) \cdot \bar{\zeta}.$$

Cette fonction est l'unique application affine réelle  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant

$$\tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{f}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{f}(w) = z,$$

elle définit un difféomorphisme  $f : (S_w, \rho_w) \rightarrow (S_z, \rho_z)$ .

En utilisant le lemme précédent avec

$$\bar{p}^2 = \left( \frac{z - \bar{w}}{w - \bar{w}} \right) \quad \text{et} \quad q^2 = \left( \frac{z - w}{w - \bar{w}} \right),$$

on voit que la constante de Lipschitz de  $f$  est donnée par

$$\text{Lip}(f) = \left| \frac{z - \bar{w}}{w - \bar{w}} \right| + \left| \frac{z - w}{w - \bar{w}} \right|.$$

On a donc, en utilisant le lemme A.5 et le théorème 4.3.1,

$$L(\rho_w, \rho_z) \leq \log \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|w - \bar{w}|} \right) = \delta(w, z) = \mathcal{K}(\rho_w, \rho_z).$$

□

## Annexe A

# Appendice : Espaces pseudo-métriques

On convient d'appeler *pseudo-métrique* sur un ensemble  $X$  une fonction  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tous  $x, y, z \in X$ , on a

- 1.)  $\eta(x, x) = 0$ ;
- 2.)  $\eta(x, y) \geq 0$ ;
- 3.)  $\eta(x, y) + \eta(y, z) \leq \eta(x, z)$ .

Une pseudo-métrique est une métrique dès lors qu'elle est *séparante*, i.e.

$$\eta(x, y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y,$$

et *symétrique*, i.e.

$$\eta(x, y) = \eta(y, x).$$

Le *symétrisé* d'une pseudo-métrique  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par

$$S\eta(x, y) := \frac{1}{2} (\eta(x, y) + \eta(y, x)).$$

C'est une pseudo-métrique; et c'est une métrique si  $\eta$  est séparante.

Voyons quelques définitions importantes :

**Définitions A.1** Si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle et  $\gamma : I \rightarrow X$  une isométrie vers l'espace pseudo-métrique  $(X, \eta)$ , i.e. si  $\eta(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$  pour tout  $t_1, t_2 \in I$ , alors on dit que

- $\gamma$  est un *segment géodésique* si  $I = [a, b]$ ;
- $\gamma$  est un *rayon géodésique minimisant* si  $I = [a, \infty)$ ;
- $\gamma$  est une *droite* (ou une *géodésique complète minimisante*) si  $I = \mathbb{R}$ .

**Définition A.2** Une application  $f : X_1 \rightarrow X_2$  entre deux espaces pseudo-métriques  $(X_1, \eta_1)$  et  $(X_2, \eta_2)$  est une *quasi-isométrie* s'il existe deux constantes  $c \geq 0$  et  $k \geq 1$  telles que pour tous  $x, y \in X_1$  on a

$$\frac{1}{k}\eta_2(f(x), f(y)) - c \leq \eta_1(x, y) \leq k\eta_2(f(x), f(y)) + c$$

et pour tout  $z \in X_2$ , il existe  $x \in X_1$  tel que

$$\eta_2(z, f(x)) \leq c.$$

Deux espaces pseudo-métriques sont dit *quasi-isométrique* lorsqu'il existe une quasi-isométrie entre eux.

On renvoie le lecteur pour plus d'informations et d'autres développements sur ces définitions aux livres de Ghys (E.), DeLaHarpe (P.) [15] p.80, Coorneart-Delzant-Papadopoulos [12] ou Gromov [18].

## A.1 Un exemple de pseudo-métrique

Voyons maintenant un exemple d'espace pseudo-métrique: considérons la fonction de deux variables sur le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  définie par

$$M(w, z) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{z - x}{w - x} \right|.$$

**Proposition A.3** *La fonction*

$$\delta(w, z) := \log M(w, z)$$

*est une pseudo-métrie sur le demi-plan  $\mathbb{H}^2$ . Cette pseudo-métrie n'est ni séparante, ni symétrique.*

**Preuve** Observons d'abord que pour tous  $w, z \in \mathbb{H}^2$ , on a

$$M(w, z) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{z - x}{w - x} \right| = 1,$$

par conséquent  $\delta(w, z) \geq 0$ . Il est d'autre part clair que  $\delta(w, w) = 0$ . Quant à l'inégalité du triangle, elle se vérifie facilement, on a en effet pour tous  $w, u, z \in \mathbb{H}^2$

$$M(w, z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{z - x}{w - x} \right| \leq \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{z - x}{u - x} \right| \right) \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{u - x}{w - x} \right| \right) = M(w, u)M(u, z);$$

par conséquent

$$\delta(w, z) \leq \delta(w, u) + \delta(u, z).$$

Pour voir que  $\delta$  n'est ni séparante, ni symétrique, on considère les points  $w = si$  et  $z = ti$  (où  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ): on a alors

$$M^2(si, ti) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \frac{t^2 + x^2}{s^2 + x^2} \right) = \begin{cases} (\frac{t}{s})^2 & \text{si } s \leq t \\ 1 & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

On a donc

$$\delta(si, ti) = \frac{1}{2} \log (M^2(si, ti)) = \begin{cases} \log(\frac{s}{t}) & \text{si } s \leq t \\ 0 & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

□

**Remarque** Le raisonnement précédent montre aussi que  $\delta$  n'est pas invariante sous l'action de  $PSL_2(\mathbb{R})$ . En effet, il existe toujours une homographie préservant le demi-plan  $\mathbb{H}^2$  et échangeant les points  $si$  et  $ti$ .

La pseudo-métrie que nous venons de définir est intéressante notamment pour la raison suivante :

**Proposition A.4:** *Le symétrisé de la pseudo-métrique  $\delta$  coïncide avec la métrique de Poincaré sur  $\mathbb{H}^2$  :*

$$S\delta(w, z) = h(w, z) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{|w - \bar{z}| + |w - z|}{|w - \bar{z}| - |w - z|} \right).$$

La preuve utilisera deux lemmes. Le premier est une formule explicite calculant  $\delta(w, z)$ .

**Lemme A.5** *Pour tous  $w, z \in \mathbb{H}^2$ , on a*

$$\delta(w, z) = \log \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|w - \bar{w}|} \right).$$

**Preuve** Lorsque  $x$  parcourt les réels,  $u(x) : = \frac{z-x}{w-x}$  parcourt un cercle. Cherchons son centre et son rayon.

On a  $u = \frac{z-x}{w-x}$  si et seulement si

$$x = \frac{wu - z}{u - 1},$$

la condition  $x \in \mathbb{R}$  s'écrit  $x = \bar{x}$  :

$$\frac{wu - z}{u - 1} = \overline{\left( \frac{wu - z}{u - 1} \right)},$$

c'est à dire

$$(w - \bar{w})|u|^2 - (w - \bar{z})u + (\bar{w} - z)\bar{u} + (z - \bar{z}) = 0.$$

On peut récrire cette équation

$$|u|^2 - \left( \frac{w - \bar{z}}{w - \bar{w}} \right) u - \left( \frac{\bar{w} - z}{\bar{w} - w} \right) \bar{u} + \left( \frac{z - \bar{z}}{w - \bar{w}} \right) = 0,$$

où encore, après quelques calculs,

$$\left[ u - \left( \frac{w - \bar{z}}{w - \bar{w}} \right) \right] \cdot \overline{\left[ u - \left( \frac{w - \bar{z}}{w - \bar{w}} \right) \right]} = \left| \frac{w - z}{w - \bar{w}} \right|^2.$$



Il s'agit de l'équation du cercle euclidien dont le centre et le rayon sont donnés par

$$c = \left( \frac{w - \bar{z}}{w - \bar{w}} \right) \quad \text{et} \quad R = \left| \frac{w - z}{w - \bar{w}} \right|.$$

La quantité à calculer  $M(w, z) = \sup_x |u(x)|$  est le point de ce cercle le plus éloigné (au sens euclidien) de 0, on a donc

$$M(w, z) = \sup_x |u(x)| = |c| + R = \frac{|w - \bar{z}|}{|w - \bar{w}|} + \frac{|w - z|}{|w - \bar{w}|},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \delta(w, z) &= \log \left( \frac{|w - \bar{z}| + |w - z|}{|w - \bar{w}|} \right) \\ &= \log \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|w - \bar{w}|} \right). \end{aligned}$$

□

Le second lemme est une formule élémentaire :

**Lemme A.6** *Pour tous  $w, z \in \mathbb{H}^2$ , on a*

$$|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2 = |w - \bar{w}| |z - \bar{z}|.$$

**Preuve** Pour  $w, z \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} |z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2 &= (z - \bar{w})(\bar{z} - w) - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= -zw - \bar{z}\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= -(z - \bar{z})(w - \bar{w}). \end{aligned}$$

Si  $w, z \in \mathbb{H}^2$ , alors  $(z - \bar{z})$  et  $(w - \bar{w})$  sont de la forme  $si$  et  $ti$  avec  $s, t > 0$ , donc  $(z - \bar{z})(w - \bar{w}) = st i^2 = -st < 0$  et ainsi

$$-(z - \bar{z})(w - \bar{w}) = |w - \bar{w}| |z - \bar{z}|.$$

□

**Démonstration de la proposition A.4**

Le lemme A.6 entraîne que

$$\begin{aligned}
\left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|w - \bar{w}|} \right) \left( \frac{|w - \bar{z}| + |w - z|}{|z - \bar{z}|} \right) &= \frac{(|z - \bar{w}| + |z - w|)(|w - \bar{z}| + |w - z|)}{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2} \\
&= \frac{(|z - \bar{w}| + |z - w|)(|w - \bar{z}| + |w - z|)}{(|z - \bar{w}| - |z - w|)(|z - \bar{w}| + |z - w|)} \\
&= \frac{|w - \bar{z}| + |w - z|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.
\end{aligned}$$

On a donc, par le lemme A.5,

$$\begin{aligned}
S\delta(w, z) &= \frac{1}{2}(\delta(w, z) + \delta(z, w)) \\
&= \frac{1}{2} \log \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|w - \bar{w}|} \right) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{|w - \bar{z}| + |w - z|}{|z - \bar{z}|} \right). \\
&= \frac{1}{2} \log \left( \frac{|w - \bar{z}| + |w - z|}{|w - \bar{z}| - |w - z|} \right) \\
&= h(w, z)
\end{aligned}$$

□

Nous terminons cet appendice par une dernière observation :

**Proposition A.7** *Il n'existe pas de quasi-isométrie entre les espaces pseudo-métriques  $(\mathbb{H}^2, \delta)$  et  $(\mathbb{H}^2, h)$ .*

La preuve utilisera le lemme curieux suivant :

**Lemme A.8** *Pour tous  $w, z \in \mathbb{H}^2$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $z', w' \in \mathbb{H}^2$  tels que*

$$\delta(w', w) + \delta(w', z') + \delta(z', z) \leq \varepsilon.$$

(Ce lemme est possible car la pseudo-métrie  $\delta$  n'est pas symétrique, sinon il y aurait contradiction avec l'inégalité du triangle.)

**Preuve du lemme A.8** Notons  $w_s = w + is$  et  $z_s = z + is$ . Pour  $s \geq 0$ , on a  $\delta(z_s, z) = \delta(w_s, w) = 0$ . D'autre part,  $(|z_s - \bar{w}_s| + |z_s - w_s|) = (|z - \bar{w}| + |z - w|)$  est constante alors que  $|w_s - \bar{w}_s| \geq 2s$ . Par conséquent

$$\delta(w_s, z_s) = \log \left( \frac{|z_s - \bar{w}_s| + |z_s - w_s|}{|w_s - \bar{w}_s|} \right) \rightarrow 0$$

lorsque  $s \rightarrow +\infty$ . Il suffit donc de prendre  $w' = w_s$  et  $z' = z_s$  avec  $s$  assez grand.  $\square$

### Preuve de la proposition A.7

Supposons par l'absurde qu'il existe une quasi-isométrie  $f : (\mathbb{H}^2, h) \rightarrow (\mathbb{H}^2, \delta)$ . Il existe alors  $k \geq 1$  et  $c \geq 0$  tels que

$$\frac{1}{k}\delta(f(w), f(z)) - c \leq h(w, z) \leq k\delta(f(w), f(z)) + c$$

pour tous  $w, z \in \mathbb{H}^2$ .

Choisissons  $w, z \in \mathbb{H}^2$  tels que  $h(w, z) > 4c$  et  $\varepsilon \leq c/k$ . Il existe alors par le lemme A.8 des points  $z'$  et  $w' \in \mathbb{H}^2$  tels que  $\delta(w', w) + \delta(w', z') + \delta(z', z) \leq \varepsilon$ , on a donc

$$\begin{aligned} h(w, z) &\leq h(w, w') + h(w', z') + h(z', z) \\ &\leq h(w', w) + h(w', z') + h(z', z) \\ &\leq k(\delta(w', w) + \delta(w', z') + \delta(z', z)) + 3c \\ &\leq k\varepsilon + 3c \leq 4c < h(w, z). \end{aligned}$$

Cette contradiction montre qu'une telle quasi-isométrie ne peut exister.  $\square$



## Bibliographie

- [1] ABIKOFF W. *The Real-Analytic Theory of Teichmüller space*. Lectures notes in mathematics, **820**, Springer-Verlag, (1980).
- [2] AHLFORS L. V. *Conformal invariants*. Topics in Geometric Theory, MacGraw-Hill Book company (1973).
- [3] AHLFORS L. V. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Company, (1964).
- [4] AHLFORS L. V. *Lectures on quasiconformal mappings*. Van Nostrand Mathematical Studies. **10**. (1964)
- [5] BEARDON A. F. *The geometry of discete groups*. Springer-Verlag, (1983).
- [6] BENEDETTI R., PETRONIO. C. *Lectures on hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, (1991).
- [7] BERGER M. *On Riemannian Structures of Prescribed Gaussian Curvature for Compact 2-Manifolds*. J. Diff. Geom **5** (1971) 325–332.
- [8] BERS L. *Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem*. Analytic functions, Princeton University Press, (1960).
- [9] BERS L. *Riemann surfaces*. Mimographed Notes, New York University, Courant institute of Mathematical Sciences, (1958).
- [10] BERS L. *An extremal problem for quasiconformal mapping and a theorem by Thurston*. Acta Math. **141**, (1978), p.73-98.

- 
- [11] CHERN S. *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*. Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955). p.771–782
- [12] COORNEART M. DELZANT T. PAPADOPOULOS A. *Géométrie et théorie des groupes hyperboliques*. Lectures notes in mathematics 1441, Springer-Verlag. (1990)
- [13] FATHI A. LAUDENBACH F. POÉNARU V. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque 66-67, (1979).
- [14] FORSTER O. *Lectures on Riemann surfaces*. Graduate Texts in Mathematics, **81**. (1991)
- [15] GHYS E. DELAHARPE P. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Birkhäuser, (1990).
- [16] GARDINER F. *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*. A Wiley-Interscience Publication. (1987).
- [17] GARDINER F. MASUR H. *Extremal length geometry of Teichmüller space*. Complex. Variables, 1991, Vol 16, p.209-237.
- [18] GROMOV M. *Hyperbolic groups*. In essays in Group theory, edited by Gersten (S.M.) M.S.R.I Publications 8, Springer-Verlag, (1987), p.75-263.
- [19] IVANOV N. V. *Isometries of Teichmüller spaces from the point of view of Mostow rigidity*. Amer. Math. Soc. Transl.(2) **202**, (2001).
- [20] JENKINS J. A. *On the existence of certain extremal metrics*. Ann. of Math. **66** n° .3, P.440-453. (1957).
- [21] KERCKHOFF S. *The asymptotic geometry of Teichmüller space*. Topology **19**, (1980), p.23-41.
- [22] KERCKHOFF S. *Earthquakes are Analytic*. Comment. Math. Helvetici **60** (1985), p.17-30.

- 
- [23] KRAVETZ S. *On the geometry of Teichmüller space.*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **278**, (1959) p.1-35.
- [24] KRZYSZTOF M. *The Riemann Legacy.* Kluwer Academic Publishers. (1997)
- [25] LEHTO O. *Univalent functions and Teichmüller space.* Springer-Verlag (1987)
- [26] LEVITT G. *Feuilletages des surfaces.* Thèse de doctorat D'état, université Paris üppercasevii, (1983)
- [27] LICHTENSTEIN L. Bull. Internat. Acad. Sci. Cracovie. Cl. Sci. Math. Nat. Sér. A. (1916), 192–217
- [28] MARDEN A., STREBEL S. *The height theorem for quadratic differentials on Riemann surfaces.* Acta Mathematica **153**. (1984), p.153-211.
- [29] MARDEN A. MASUR H. *A foliation of Teichmüller space by twist invariant disks.* Math. Scan. **36**, (1975), p.211-228.
- [30] MASKIT A. *Comparison of hyperbolic and extremal lengths.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **10** (1985), p.381-386.
- [31] MASUR H. *On a class of geodesics in Teichmüller space.* Annals of Mathematics **102**. 1975, p.205-221.
- [32] MASUR H. *The Jenkins-Strebel differentials with one cylinder are dense.* Comment. Math. Helvetici. N° **54** (1979), p.197-184
- [33] MASUR H. *Two boundaries of Teichmüller space.* Duke. Math. Jou. **49** (1982), p.183-190.
- [34] MCCARTHY J. PAPADOPOULOS A. *Fundamental domains in Teichmüller space.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **21**. (1996) , p.151-166.
- [35] MESMOUDI M. Thèse de Doctorat, I.R.M.A (1994)

- [36] MINSKY Y. *Extremal length estimates and product regions in Teichmüller space*. Duke math. J. 83, n° 2 (1996), p.249-286.
- [37] MUMFORD D. *A remark on Mahler's compactness theorem*. Proc. Amer. Math. Soc. **28**. (1971), p.289-294.
- [38] PAPADOPOULOS A. *Sur le bord de Thurston de l'espace de Teichmüller d'une surface non compacte*. Mathematische Annalen **282** (1988) p.353-359.
- [39] PAPADOPOULOS A. *On Thurston's boundary of Teichmüller space and the extension of earthquakes*. Topology Appl. **41** (1991) p.147-177.
- [40] RATCLIFFE J. G. *Foundation of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag. **149**. (1994)
- [41] ROYDEN H. L. *Automorphisms and isometries of Teichmüller space*. In: Advances in the Theory of Riemann surfaces, edited by Ahlfors et al., Ann. of Math. Studies. 66, Princeton University Press, Princeton, (1971).
- [42] STREBEL K. *Quadratic Differentials*. Springer-Verlag, Berlin, (1984).
- [43] THURSTON W. P. *Minimal Stretch maps between hyperbolic surfaces*. Preprint (1985).
- [44] THURSTON W. P. *The geometry and topology of 3-manifolds*. Princeton Academic Press (1979).
- [45] TROYANOV M. *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*. Enseign. Math, (2) **32** (1986), p.79-94.
- [46] WALLACH N, AND WARNER F. W. *Curvature forms for 2-manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970) 712–713.
- [47] WOLPERT S. *The length spectra as moduli for compact hyperbolic surfaces*. Ann. of Math. **109** (1979) 323-351.