C^*–algèbres de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K–théorie

Nicolas Prudhon

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à Pierre Julg et à Thomas Delzant qui ont accepté de diriger mon travail. Ils n'ont pas compté leur temps pour m'écouter et me conseiller.

Je remercie également les rapporteurs Welleda Baldoni, Benjamin Enriquez et Georges Skandalis d'avoir accepté de lire attentivement le texte, et Alain Valette, membre de du jury, qui m'a offert de poursuivre mes recherches à Neuchâtel cette année. Les discussions avec eux m'ont permis d'améliorer sensiblement la rédaction de ce travail et d'enrichir ma réflexion sur la K-théorie des algèbres de groupes.

Merci également à l'équipe mathématique d'Orélans, pour son accueil lors de mes déplacements et pour l'intérêt que ses membres ont portés à mes résultats, notamment Jean–Philippe Anker, Claire Delaroche–Anantharaman et Jean Renault. Merci à Bachir Bekka pour m'avoir invité à Metz, et pour les discussions avec lui à Luminy.

De nombreuses personnes m'ont encouragé à poursuivre mon travail, qu'elles m'aient aidé sur le plan mathématique ou sur d'autres plans. Qu'elles en soient toutes remerciées. Je tiens en particulier à nommer Caroline, sans qui je n'aurais sans doute jamais commencé une thèse ; Grégory, Nadine et Sylvie qui m'ont reçu avec plaisir pendant mes haltes parisiennes ; Benjamin et David pour leur bonne humeur quotidienne ; et aussi Christian et Françoise mes parents, Céline et Hélène, et Florence et Nicolas.

Table des matières

Introduction **vii**

1 K–théorie bivariante et induction de Dirac **1**
1.1 C^*–modules et K–théorie de Kasparov 1
1.2 Induction de Dirac 6

2 Représentations unitaires de $\mathrm{Sp}(n,1)$ **et** K**–théorie** **13**
2.1 Notations et représentations de $\mathrm{Sp}(n,1)$ 13
2.2 K–théorie de la C^*–algèbre maximale de $\mathrm{Sp}(n,1)$ 16

3 Image de l'induction de Dirac pour $\mathrm{Sp}(n,1)$ **23**
3.1 Image de μ_r 24
3.2 Image de μ 26

4 Induction cohomologique et variétés de drapeaux **31**
4.1 Induction cohomologique 32
4.2 Construction géométrique 38
4.3 Lien avec la K-théorie 43

A Structure de la C^***–algèbre maximale de** $\mathrm{Sp}(n,1)$ **55**
A.1 Extensions des C^*–algèbres 55
A.2 Etude explicite de la topologie du dual unitaire 57

Bibliographie **71**

Introduction

Soit G un groupe localement compact dénombrable à l'infini, par exemple un groupe de Lie connexe ou un groupe discret dénombrable. L'algèbre de Banach $L^1(G)$ agit par convolution à droite sur les fonctions de carrés intégrables sur G par des opérateurs bornés. Cette représentation est associée à la représentation régulière gauche de G. L'adhérence de $L^1(G)$ dans $\mathcal{L}(L^2(G))$ est notée $C^*_r(G)$ et s'appelle la C^*–algèbre réduite de G. La conjecture de Baum–Connes prédit le calcul de la K–théorie analytique $K_*(C^*_r(G))$ de cette C^*–algèbre. Plus précisément, soit $\underline{E}G$ un modèle du classifiant des actions propres [11] de G. Baum, Connes et Higson [11] définissent alors un groupe $K^G_*(\underline{E}G)$, appelé K-homologie équivariante à support compact de $\underline{E}G$. Ils construisent aussi un morphisme de groupes, dit application d'assemblage

$$\mu_r \colon K^G_*(\underline{E}G) \longrightarrow K_*(C^*_r(G))\,,$$

et conjecturent que c'est un isomorphisme. Le groupe $K^G_*(\underline{E}G)$ est dans de nombreux cas assez bien compris, et est de nature géométrique. Ainsi la conjecture affirme non seulement que tous les éléments de K–théorie peuvent être construits de façon géométrique, mais que les relations entre ces éléments proviennent toutes de la géométrie. L'injectivité est reliée à des problèmes de topologie. Elle est montrée pour une classe assez large de groupes. Beaucoup moins de résultats sur la surjectivité en revanche sont connus, malgré des progrès récents importants, notamment ceux de Vincent Lafforgue. Elle est plutôt reliée à des problèmes d'analyse concernant les C^*–algèbres.

Pour les groupes discrets, Higson et Kasparov ont montré la conjecture pour les groupes munis d'une action par isométries, métriquement propre sur un espace affine euclidien de dimension infinie. V. Lafforgue [31] l'a démontrée (par exemple) pour ceux agissant de façon continue, isométrique, propre et co–compacte sur un espace symétrique de rang réel 1, ou un sous–groupe co–compact de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. P. Julg [22] a montré que tous les sous–groupes fermés de $\mathrm{Sp}(n,1)$ satisfont également à la conjecture. Néanmoins, on ne sait toujours pas si elle est vraie pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, par exemple. D'autre part, il n'existe pas à ce jour, à ma connaissance, de contre–exemple à la conjecture énoncée sous cette forme. Cependant, Gromov a construit des groupes qui ne satisfont pas à une généralisation de la conjecture de Baum–Connes, la conjecture à coefficients.

La conjecture de Baum–Connes a été vérifiée pour les groupes de Lie connexes réductifs linéaires par A. Wassermann [42]. La méthode repose sur la connaissance explicite du dual tempéré de ces groupes qui permet de décrire la structure de $C^*_r(G)$ et de calculer sa K–théorie. La conclusion résulte d'une identification des deux membres. Remarquons que dans ce cas, G possède un sous–groupe compact maximal K, unique à conjugaison près, et que G/K est un classifiant des actions propres de G. Supposons pour simplifier que l'action de K sur l'espace tangent à l'origine de G/K se relève en un morphisme $K \to \mathrm{Spin}(d)$, $d =$

$\dim G/K$. Alors $K_*^G(\underline{E}G) = R(K)$ est l'anneau des représentations de K (considéré comme $\mathbb{Z}$-module). Du côté analytique, la K–théorie de $C_r^*(G)$ est décrite en terme de représentations irréductibles de G. Par exemple, supposons que G possède des séries discrètes (les séries discrètes sont les représentations dont les coefficients sont de carré intégrable). A chaque série discrète est associé un projecteur de $C_r^*(G)$, qui fournit une copie de $\mathbb{Z}$ dans $K_0(C_r^*(G))$. Atiyah et Schmid [1] ont réalisé les séries discrètes sur des noyaux d'opérateurs de Dirac à coefficients dans des représentations irréductibles de K. Si π est une série discrète, il existe une unique représentation irréductible V de K, telle que π soit unitairement équivalente à la représentation de G sur le noyau d'un opérateur de Dirac D_V associé à V. L'application d'assemblage $\mu_r \colon R(K) \to K_0(C_r^*(G))$ associe à V un élément $\mathrm{Ind}_a D_V \in K_0(C_r^*(G))$ qui coïncide avec le générateur associé à π. Si G n'est pas compact, on n'obtient pas ainsi un système complet de générateurs de $K_0(C_r^*(G))$. La conjecture peut donc être vue comme une généralisation des travaux de Atiyah–Schmid, notamment lorsque le groupe G ne possède pas de série discrète. V. Lafforgue [31] a donné une nouvelle démonstration de la conjecture pour ces groupes en utilisant des méthodes qui ne font appel à aucun résultat de classification du dual tempéré, mais à une généralistation des techniques de Kasparov. Chabert, Echterhoff et Nest ont généralisé le résultat de Lafforgue à tous les groupes pour lesquels le groupe des composantes connexes est compact.

Notons $C^*(G)$ la C^*–algèbre enveloppante de $L^1(G)$. Par universalité, la représentation régulière se factorise en un morphisme $\lambda \colon C^*(G) \to C_r^*(G)$. Il est également possible de construire un morphisme d'assemblage $\mu \colon K_*^G(\underline{E}G) \to K_*(C^*(G))$, tel que si λ_* est l'application induite en K–théorie par λ, alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} & & K_*(C^*G) \\ & \mu \nearrow & \downarrow \lambda_* \\ K_*^G(\underline{E}G) & \underset{\mu_r}{\longrightarrow} & K_*(C_r^*G) \end{array}$$

En particulier, lorsque la conjecture de Baum–Connes est vraie pour un groupe G donné, μ est injective, λ_* est surjective, et

$$K_*(C^*(G)) = \mathrm{Im}\,\mu \oplus \mathrm{Ker}\,\lambda_* \,. \tag{1}$$

Les groupes (localement compacts) moyennables sont ceux pour lesquels λ est un isomorphisme. Par contre, il existe des groupes pour lesquels λ n'est pas un isomorphisme, alors que λ_* l'est. Cette classe contient les groupes libres et le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, par exemple. Les groupes de Lie simples connexes qui sont dans cette classe sont les groupes $\mathrm{SO}_e(n,1)$ et $\mathrm{SU}(n,1)$. Néanmoins, il existe des groupes pour lesquels λ_* n'est pas un isomorphisme. C'est par exemple le cas des groupes non–compacts qui possèdent la propriété (T) de Kahzdan. En effet, cette propriété signifie qu'il existe une décomposition de la forme $C^*(G) = \mathbb{C} \oplus A$, avec $\mathbb{C} \subset \mathrm{Ker}\,\lambda$. Ceci implique que le projecteur $(1,0)$ dans cette décomposition est dans le noyau de λ_*, et par conséquent λ_* n'est pas un isomorphisme. La difficulté liée à la propriété (T) réside donc dans le fait qu'il faut montrer que μ_r est un isomorphisme alors que μ ne l'est pas. Exceptés les groupes mentionnés dans les deux familles ci–dessus, les groupes de Lie simples connexes possèdent la propriété (T). La question est ainsi posée du calcul de leur K–théorie et du calcul de $\mathrm{Ker}\,\lambda_*$. F.Pierrot [33], [34] a réalisé ce travail pour les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $n = 3, 4, 5$, en se basant sur l'induction parabolique.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la K–théorie de la C^*–algèbre maximale des groupes $G = \mathrm{Sp}(n,1)$, $n \geq 2$. Comme il n'y a pas d'analogue à la conjecture de Baum–Connes permettant de prévoir la K–théorie de la C^*–algèbre maximale, on est amené à la calculer au moyen d'une description du dual unitaire de $\mathrm{Sp}(n,1)$. Celui–ci est connu, d'après les travaux de M.W Baldoni Silva [4]. Ces résultats nous permettent de décrire la K–théorie de $C^*(G)$ et le sous–groupe $\mathrm{Ker}\,\lambda_*$ en termes des représentations unitaires de G. Nous effectuons également un calcul explicite de l'image de l'application μ. Enfin, nous rappelons une construction géométrique de certaines représentations unitaires de G qui apparaissent importantes pour la K–théorie. Toutefois, nous ne sommes pas parvenus à caractériser les éléments de K–théorie qui leurs sont associés. Dans l'appendice, nous nous sommes intéressés à la structure des idéaux de $C^*(G)$. Les résultats obtenus peuvent permettre de retrouver la K–théorie de $C^*(G)$, mais n'y sont pas nécessaires. L'étude de la topologie du spectre de $C^*(G)$ qu'il faut réaliser pour étudier sa structure fait néanmoins apparaître des phénomènes étonnants qui ne sont pas « détectés » par la K–théorie.

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler les résultats de K–théorie qui nous serons utiles, notamment la K–théorie bivariante de Kasparov. Nous faisons le lien entre la K–homologie équivariante et les opérateurs différentiels elliptiques équivariants et leurs symboles. Nous rappelons aussi que ces opérateurs possèdent un indice dans $K_*(C^*(G))$ lorsque l'action isométrique du groupe sur la variété de base est **propre** et à quotient compact. Ensuite nous rappelons la définition de l'application d'assemblage dans le cas des groupes de Lie réductifs connexes. Soit G un tel groupe et K un sous–groupe compact maximal. Alors G/K est un classifiant des actions propres de G. Supposons que le morphisme de K sur $\mathrm{SO}(d)$, $d = \dim G/K$, donné par l'action adjointe de K sur la fibre à l'origine du fibré tangent à G/K, se relève en un morphisme de K sur $\mathrm{Spin}(d)$. Dans ce cas, on dit que G/K possède une structure *spin* G–invariante et la K–homologie G–équivariante de G/K n'est autre que l'anneau $R(K)$ des représentations de K, considéré comme $\mathbb{Z}$–module. Soit S la représentation spinorielle de $\mathrm{Spin}(d)$. Considérons alors l'opérateur de Dirac D_V à coefficients dans le fibré au dessus de G/K associé à la représentation $S \otimes V$ de K, où V est une représentation auxiliaire de K. Comme cet opérateur différientiel est G–équivariant elliptique d'ordre 1, il possède un indice $\mathrm{Ind}_a\, D_V \in K_*(C^*(G))$. Alors l'application d'assemblage μ est l'unique morphisme qui à V associe $\mathrm{Ind}_a\, D_V$. Comme nous l'avons rappelé, la conjecture de Baum–Connes pour ces groupes est vraie. Donc,

1. dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & & K_d(C^*G) \\ & \mu \nearrow & \downarrow \lambda_* \\ R(K) & \underset{\mu_r}{\longrightarrow} & K_d(C_r^*G) \end{array},$$

   le morphisme μ_r est un isomorphisme,

2. $K_{d+1}(C_r^*(G)) = 0$.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux groupes $G = \mathrm{Sp}(n,1)$, $n \geq 2$. M.W. Baldoni Silva a donné une classification du dual unitaire de G en terme d'induction parabolique. Soit $P = MAN$ un sous–groupe parabolique minimal de G. Alors $A \simeq \mathbb{R}$. Pour $\xi \in \hat{M}$, $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, notons $\pi_{\xi,\nu}$ les repésentations induites $\mathrm{Ind}_P^G \mathrm{Rest}_L^P \xi \otimes e^\nu$, normalisées pour être unitaires lorsque ν est imaginaire. A équivalence près, les représentations unitaires irréductibles de G sont :

- les séries discrètes,
- les limites (non–dégénérées) de séries discrètes ; lorsque $\pi_{\xi,0}$ est réductible, cette représentation est somme de deux représentations unitaires irréductibles qui sont des limites de séries discrètes,
- les séries principales, c'est–à–dire les représentations $\pi_{\xi,\nu}$, ν imaginaire et $\operatorname{Im}\nu > 0$ ou $\nu = 0$ si $\pi_{\xi,0}$ n'est pas irréductible,
- les séries complémentaires ; lorsque $\pi_{\xi,0}$ est irréductible il existe $\nu(\xi) > 0$, tel que $\pi_{\xi,\nu}$ soit unitarisable pour tout $0 < \nu < \nu(\xi)$,
- les bouts de séries complémentaires ; lorsque $\pi_{\xi,0}$ est irréductible, la représentation $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$ possède un unique quotient irréductible, et celui–ci est unitarisable,
- les « séries isolées » ; lorsque $\pi_{\xi,0}$ est irréductible, $\pi_{\xi,\nu(\xi)+1}$ possède un unique quotient irréductible qui, sous certaines conditions sur ξ, est unitarisable. Ce cas se produit pour un nombre infini de représentations irréductibles de M, lorsque $n > 2$, et uniquement pour la représentation triviale pour $n = 2$. La représentation triviale de G apparaît sous cette forme lorsque $\xi = 1_M$ est la représentation triviale de M.

Rappelons que de façon générale, pour une représentation irréductible unitaire d'un groupe de Lie semi–simple connexe linéaire, son prolongement à $C^*(G)$ est à valeurs dans les opérateurs compacts. Notons ev_π le morphisme $C^*(G) \to \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$ associé. Nous pouvons maintenant énoncer le premier résultat important de cette partie.

Théorème 0.1. *Le morphisme $p = \lambda \oplus (\oplus \mathrm{ev}_\pi)$, où π parcourt l'ensemble des « séries isolées »,*

$$C^*(G) \xrightarrow{p} C^*_r(G) \oplus (\oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)) ,$$

induit un isomorphisme en K–théorie.

Corollaire 0.2. *Le noyau de $\lambda_*\colon K_0(C^*(G)) \to K_0(C^*_r(G))$ est un $\mathbb{Z}$–module libre avec un ensemble de générateurs en correspondance bijective avec l'ensemble des « séries isolées ». En outre, $K_1(C^*(G)) = 0$.*

Pour montrer ce résultat, nous avons d'abord besoin d'étudier la topologie de Fell–Jacobson sur le dual unitaire de G. En nous basant sur des résultats de Fell, nous montrons que l'ensemble des « séries isolées », muni de la topologie induite, est discret dans le dual de G, et que pour $\xi \in \hat{M}$ donné, l'ensemble

$$\{\pi_{\xi,\nu}\, ;\ \text{où } \pi_{\xi,\nu} \text{ est une série principale ou une série complémentaire}\}$$

a pour frontière l'ensemble des sous–quotients de $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$ (avec la convention $\nu(\xi) = 0$ si $\pi_{\xi,0}$ est réductible). Nous montrons alors le théorème 0.1 en utilisant une filtration du dual qui repose sur le résultat de théorie semi–simple suivant : si π est l'unique quotient de $\pi_{\xi',\nu'}$ et est un sous–quotient de $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$, alors $\nu' < \nu(\xi)$. Ceci permet de se ramener au calcul de la K–théorie de C^*–algèbres liminaires dont le spectre est (homéomorphe à) une demi–droite et dont la structure est donc facile à déterminer.

Le troisième chapitre est consacré au calcul de l'image de μ. Nous avons d'une part, d'après la validité de la conjecture de Baum–Connes dans ce cas, une décomposition

$$K_0(C^*(G)) = \operatorname{Im}\mu \oplus \operatorname{Ker}\lambda_* , \qquad (2)$$

et d'autre part le théorème 0.1, donne un isomorphisme

$$K_0(C^*(G)) \overset{p_*}{\simeq} K_0(C^*_r(G)) \oplus \operatorname{Ker} \lambda_* \,. \tag{3}$$

Nous obtenons ainsi un homomorphisme

$$K_0(C^*_r(G)) \xrightarrow{(\oplus_{\mathcal{I}} \mathrm{ev}_{\pi *}) \circ \mu \circ \mu_r^{-1}} \oplus_{\pi \in \mathcal{I}} \mathbb{Z} \,.$$

Dans ce chapitre, nous explicitons le graphe de cette application, celle–ci étant non–nulle. En effet, soient 1_G la représentation triviale de G et V une composante irréductible de S sous l'action de K. Alors $\mathrm{ev}_{1_G *}(\mathrm{Ind}_a\, D_V) = \pm 1$. Ceci montre que

$$p_*(\mathrm{Im}\, \mu) \not\subset K_0(C^*_r(G)) \,.$$

Plus généralement, pour $V \in \hat{K}$ fixé, les « séries isolées » π telles que $\mathrm{ev}_{\pi *}(\mathrm{Ind}_a\, D_V) \neq 0$, ont toutes le même caractère infinitésimal, d'après le lemme de Parthasarathy. Soit $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \{X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_{n+1}, -x_1, \ldots, -x_{n+1})\} \subset \mathfrak{sl}(2n+2, \mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie complexifiée d'un tore maximal de K. Soient $\varepsilon_i(X) = x_i$. Les plus hauts poids des représentations irréductibles de K sont les $\mu = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \varepsilon_i$, avec $\mu_i \in \mathbb{N}$, $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0$ et $\mu_{n+1} \geq 0$. Les K–types minimaux des « séries isolées » sont de la forme $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \varepsilon_i$, $0 \leq k \leq n-2$ ($\mu_k \neq 0$). Si χ est un caractère infinitésimal intégral donné, et k comme ci–dessus, il existe au plus une « série isolée » $I_k(\chi)$ dont l'unique K–type minimal est de cette forme. De même si χ est régulier, $0 \leq l \leq n$, il existe une unique série discrète $\pi_l(\chi)$ de caractère infinitésimal χ dont le paramètre de Harish–Chandra $\lambda(l) = \sum \lambda_i \varepsilon_i$ vérifie $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l > \lambda_{n+1} > \lambda_{l+1} > \cdots > \lambda_n > 0$. Soit ρ_c la demi–somme des racines positives compactes et $\mu(l) = \lambda(l) - \rho_c$. Rappelons que $\mu(l)$ est l'image réciproque par l'application d'assemblage μ_r du générateur de $K_0(C^*_r(G))$ associé à $\pi_l(\chi)$. Le résultat est alors le suivant. Soient χ un caractère infinitésimal régulier, et $k \in [0, n-2]$ tels qu'il existe une « série isolée » $I_k(\chi)$. Alors

$$\mathrm{ev}_{I_k(\chi)_*}(\mathrm{Ind}_a\, D_{\mu(l)}) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si}\, k \leq l \\ 0 & \text{sinon} \,. \end{cases}$$

L'ambiguité sur le signe est levée par le choix entre S^+ et S^- dans la décomposition $S = S^+ \oplus S^-$ sous l'action de $\mathrm{Spin}(4n)$. Nous donnons un résultat analogue dans le cas où le caractère infinitésimal est singulier. Ce résultat apparaît sous une autre forme dans [5].

Par analogie avec les résultats de Atiyah-Schmid sur les séries discrètes que nous avons rappelés précédemment, il apparaît intéressant d'obtenir une réalisation géométrique des « séries isolées » . Une telle réalisation est connue dans la littérature sous le nom d'induction cohomologique. Nous la rappelons dans le quatrième chapitre.

Soit $G^{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe connexe et G une forme réelle. Soit Q un sous–groupe parabolique de $G^{\mathbb{C}}$. Nous appelons variété de drapeaux pour G une orbite D sous l'action de G dans $G^{\mathbb{C}}/Q$, qui est ouverte et admet une mesure G–invariante. Alors $Q \cap G = L$ est un sous–groupe réductif de G et $D = G/L$. En particulier, D est une variété complexe et l'action de G sur le complexe de Dolbeault (à coefficients dans une représentation de dimension finie V de L) est équivariante et continue pour la topologie C^∞. Il existe alors deux constructions, l'une géométrique, l'autre algébrique. La première consiste à considérer l'action de G sur les espaces de cohomologie C^∞ du complexe de Dolbeault $H^i(G/L, \mathcal{V})$ à valeurs dans V.

H–W. Wong [44] a montré que ces espaces, munis de la topologie quotient, étaient des espaces de Fréchet et que l'action de G sur ces espaces était continue. La seconde construction, qui est historiquement la plus ancienne, consiste à construire le $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$–module sous–jacent à la représentation obtenue dans la première construction, en remplaçant les sections du complexe de Dolbeault par des séries formelles à l'origine. C'est l'induction cohomologique. De nombreux résultats sont connus dans le cadre de l'induction cohomologique. Par exemple, Baldoni–Silva et Barbasch [5] ont donné une classification du dual unitaire en ces termes pour les groupes de Lie simples connexes de rang réel 1. Comme d'autre part Wong a montré que les $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$–modules sous–jacents aux représentations de G sur les espaces de cohomologie du complexe de Dolbeault étaient bien équivalents à ceux obtenus par induction cohomologique, nous pouvons reformuler le résultat de Baldoni et Barbasch de la façon suivante.

Théorème 0.3. *Soit π une « série isolée » , $\pi = I_k(\chi)$. Alors π est infinitésimalement équivalente à $H^s(G/L, \mathcal{L}_\lambda)$, où $L = \mathbb{T}^k \times Sp(n-k, 1)$, λ est une représentation unitaire de dimension 1 de L qui est déterminée par le K–type minimal de π et $s = dim_{\mathbb{C}} K/L \cap K$. Les espaces de cohomologie sont nuls dans les autres degrés.*

Cependant, les espaces $H^s(G/L, \mathcal{L}_\lambda)$ sont trop grands pour porter une structure d'espace hilbertien. Nous rappelons les résultats connus qui permettent dans certains cas de réaliser le programme consistant à trouver un sous–espace ayant une telle structure, et pour laquelle G agit par des opérateurs unitaires. La difficulté est que lorsque L n'est pas compact, la variété de drapeaux G/L ne possède pas de forme hermitienne G–invariante positive, mais une forme positive qui n'est pas G–invariante et une forme invariante non–dégénérée qui n'est pas positive.

Nous aimerions réaliser géométriquement les éléments de $K_0(C^*(G))$ associés aux « séries isolées », de façon analogue au cas des séries discrètes. La difficulté est que l'action de G sur la variété G/L n'est pas propre car L n'est pas compact. Il n'est donc pas possible de définir l'indice de l'opérateur de Dolbeault sur G/L en utilisant les méthodes de Kasparov. Nous ne sommes pas parvenus à définir cet indice, c'est–à–dire à établir un lien précis entre l'induction cohomologique et la K–théorie.

Revenons sur la démonstration de Wong qui fait le lien entre la cohomologie de Dolbeault et l'induction cohomologique. Wong utilise les deux fibrations

$$\begin{array}{ccc} & G/L \cap K & \\ \swarrow & & \searrow \\ G/L & & G/K \end{array}$$

et commence par montrer que le complexe de Dolbeault sur G/L a même cohomologie C^∞ que le complexe sur $G/L \cap K$ pour lequel l'opérateur est celui de De Rham le long des fibres et l'opérateur de Dolbeault transversalement (pour la fibration de base G/L). Soient $G = \mathrm{Sp}(n, 1)$, π une « série isolée ». Reprenons les notations du théorème 0.3. Comme $G/L \cap K$ est bien propre sous l'action de G, il est possible de calculer l'indice dans $K_0(C^*(G))$ de l'opérateur défini par Wong. Notons $d^\lambda_{\mathrm{Wong}}$ cet opérateur. Bien sûr, l'indice de cet opérateur est contenu dans l'image de l'application de Baum–Connes μ. Le calcul de cet indice est l'objet de la dernière section de ce chapitre. Nous montrons en particulier que

$$\mathrm{ev}_{\pi *}(\mathrm{Ind}_a \, d^\lambda_{\mathrm{Wong}}) \neq 0 \, ,$$

mais qu'il existe en général d'autres séries isolées qui vérifient pour λ fixé, cette propriété. Il nous semble que ce résultat est un premier pas vers la définition d'un indice en K–théorie pour ces opérateurs.

L'appendice est consacré à l'étude de la structure de la C^*–algèbre maximale de $G = \mathrm{Sp}(n,1)$. Les résultats de C. Delaroche sur les extentions permettent de ramener cette étude à celle de la topologie de Fell sur le spectre de $C^*(G)$. Les résultats sur cette topologie obtenus dans la première partie et grâce auxquels nous trouvons la K–théorie de $C^*(G)$ ne sont pas assez précis, et nous devons décrire explicitement la topologie en identifiant les sous–quotients de $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$. Il apparaît en particulier que certaines « séries isolées » ne sont pas des points ouverts, ce que pourrait suggérer la terminologie. Nous l'avons malgré tout conservée en ajoutant des guillemets dans l'ensemble du texte.

Chapitre 1

K–théorie bivariante et induction de Dirac

1.1 C^*–modules et K–théorie de Kasparov

Soit A une C^*–algèbre.

Définition 1.1. *Un C^*–module $\mathcal{E}$ sur A est la donnée d'un A–module à droite avec un produit scalaire à valeurs dans A*

$$\langle\ ;\ \rangle_A : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$$

A-linéaire à droite, et qui, pour tout $x, y \in \mathcal{E}$ satisfait à

$$\begin{array}{rcl} \langle x; y\rangle_A & = & \langle y; x\rangle_A^* \,, \\ \langle x; x\rangle_A & \geq & 0 \quad \text{avec égalité si et seulement si } x = 0\,; \end{array}$$

de plus $\mathcal{E}$ doit être complet pour la norme

$$\|x\|_{\mathcal{E}} = \|\langle x; x\rangle_A\|^{1/2}\,.$$

Si A est séparable, on supposera aussi que $\mathcal{E}$ est séparable.

Lorsque $A = \mathbb{C}$, nous retrouvons la définition d'un espace de Hilbert. Plus généralement, si $A = C_0(X)$ est une C^*–algèbre commutative, un C^*–module sur A est la donnée d'un champ continu d'espace de Hilbert sur X, au sens de [19].

Définition 1.2. *Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ des C^*–modules sur A. Un morphisme $T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est une application linéaire continue telle qu'il existe $T^* : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ vérifiant*

$$(\forall \xi \in \mathcal{E}_1, \eta \in \mathcal{E}_2) \qquad \langle T\xi; \eta\rangle = \langle \xi; T^*\eta\rangle \quad .$$

On vérifie alors que $(T\xi a) = (T\xi)a$, que T^* est unique et est un morphisme de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_1$ tel que $(T^*)^* = T$. On démontre également que l'ensemble $\mathcal{L}_A(\mathcal{E})$ des endomorphismes d'un C^*–module $\mathcal{E}$ sur A est une C^*–algèbre. Il n'est pas vrai en général qu'un sous–A–module hilbertien fermé admette un supplémentaire orthogonal. Notons cependant

Théorème 1.3. *Soit $T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ un morphisme surjectif. Alors TT^* est inversible dans $\mathcal{L}_A(\mathcal{E})$. En particulier, on a*

$$\mathcal{E}_1 = \mathrm{Ker}T \underset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}T^*\,.$$

Un morphisme $T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est dit de rang fini lorsqu'il existe des morphismes $S : \mathcal{E}_1 \to A^n$ et $R : A^n \to \mathcal{E}_2$ tels que $T = R \circ S$. Les endomorphismes de rang fini de $\mathcal{L}_A(\mathcal{E})$ forment un idéal bilatère autoadjoint. L'adhérence $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$ de cet idéal est appelé idéal des morphismes compacts. Si $A = \mathbb{C}$ on retrouve les opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.

Les modules projectifs de type fini sur une C^*–algèbre A avec élément unité sont exactement les C^*–modules $\mathcal{E}$ sur A tels que $1_{\mathcal{E}} \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$. Mais en général,

Théorème 1.4. (de stabilisation)*[26] Soit A une C^*–algèbre séparable. Soit $\mathcal{E}$ un C^*–module sur A. Soit $\mathcal{H}_A = \{(\xi_n),\ \sum \xi_n^* \xi_n$ converge$\}$. Alors*

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{H}_A \simeq \mathcal{H}_A\,.$$

Le C^*–module $\mathcal{H}_A$ est un cas particulier de produit tensoriel de C^*–modules dont nous rappelons maintenant la définition et quelques propriétés. Soient A et B deux C^*–algèbres et $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$) un C^*–module sur A (resp. B). Soit $\pi\colon A \to \mathcal{L}_B(\mathcal{E}_2)$. Le produit tensoriel des espaces vectoriels $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, quotienté par la relation d'équivalence

$$xa \otimes b = x \otimes \pi(a)b$$

est muni d'une structure de B-espace préhilbertien en posant

$$\langle x_1 \otimes y_1; x_2 \otimes y_2\rangle = \langle y_1; \pi(\langle x_1; x_2\rangle)y_2\rangle\,.$$

En séparant et complétant on obtient un C^*–module sur B, noté $\mathcal{E}_1 \otimes_\pi \mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1 \otimes_A \mathcal{E}_2$.

Lemme 1.5. *Supposons que A est séparable et soit $\pi\colon A \to B$ un morphisme surjectif. Alors on a un isomorphisme de B–module hilbertien $A \otimes_\pi B \simeq B$.*

Démonstration. Soit (u_λ) une unité approchée (dénombrable) de A. La suite $\pi(u_\lambda)$ est une unité approchée de B car si $a = \pi(b)$, on a $\|\pi(u_\lambda)b - b\| \leq \|u_\lambda a - a\|$. On a alors

$$\begin{aligned} \|u_\lambda \otimes b - u_{\lambda'} \otimes b\|^2 &= \|\langle u_\lambda \otimes b - u_{\lambda'} \otimes b; u_\lambda \otimes b - u_{\lambda'} \otimes b\rangle\| \\ &= \|\langle b; \pi(u_\lambda - u'_\lambda)^* \pi(u_\lambda - u'_\lambda)b\rangle\| \\ &= \|\pi(u_\lambda)b - \pi(u_{\lambda'})b\|^2\,. \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_\lambda \otimes b)$ est une suite de Cauchy. Les morphismes involutifs définis pour $a \in A$ et $b \in B$ par $a \otimes b \mapsto \pi(a)b$ et $b \mapsto \lim u_\lambda \otimes b$ sont alors inverses l'un de l'autre. $\square$

Toutes les C^*–algèbres considérées dans ce paragraphe sont supposées séparables.

Soit G un groupe localement compact. Une $G - C^*$–algèbre est la donnée d'une C^*–algèbre A et d'un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(A)$ tel que pour tout $a \in A$, l'application $g \mapsto g.a$ soit continue en norme.

Définition 1.6. *Soient A, B des $G - C^*$–algèbres. Un (A, B)–bimodule de Kasparov G–équivariant sur un C^*–module $\mathcal{E}$ sur B gradué, est un triplet $(U, \pi, \mathcal{F})$ (ou un couple $(\mathcal{E}, F)$) où U est une représentation unitaire de G sur $\mathcal{E}$ au sens où $\langle U(g)\xi; U(g)\eta\rangle_B = g.\langle \xi; \eta\rangle_B$, $\pi : A \to \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$ un morphisme involutif tel que $U(g)\pi(a)U(g^{-1}) = \pi(g.a)$ pour tout $g \in G$ et $a \in A$, et $F \in \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$ autoadjoint de degré 1. On demande également que pour tout $a \in A$ et $g \in G$, les morphismes*

$$[a, F]\,,\ a(F^2 - 1)\,,\ a(gFg^{-1} - F)$$

soient compacts.

Soit $B[0,1] = B \otimes \mathcal{C}([0,1])$. Un $(A, B[0,1])$–bimodule de Kasparov $(\mathcal{E}, F)$ peut être vu comme un champ continu $(\mathcal{E}_t, F_t)_{t\in[0,1]}$ de (A,B)–bimodules de Kasparov. Un tel bimodule est appelé une homotopie entre $(\mathcal{E}_0, F_0)$ et $(\mathcal{E}_1, F_1)$. Pour $t \in [0,1]$, le bimodule $(\mathcal{E}_t, F_t)$ est obtenu à partir de $(\mathcal{E}, F)$ en composant avec le morphisme d'évaluation $e_t : B[0,1] \to B$.

Proposition 1.7. *L'ensemble $KK^G(A,B)$ des classes d'homotopies de (A,B)–bimodules de Kasparov G–équivariant muni de l'opération de somme directe est un groupe abélien.*

Lorsque la situation n'est pas graduée, nous obtenons de la même façon un groupe noté $KK_1^G(A,B)$. On écrira $KK_0 = KK$, $KK_* = KK_0 \oplus KK_1$

Ce foncteur est contravariant en la première variable de façon évidente. Il est covariant en la seconde de la façon suivante. Si $(\mathcal{E}_1, F_1)$ est un (A, B_1)–bimodule de Kasparov, et $\pi : B_1 \to B_2$ un morphisme involutif, on associe à $(\mathcal{E}_1, F_1)$ un (A, B_2)–bimodule de Kasparov $\pi_*(\mathcal{E}_1, F_1)$ en posant

$$\pi_*(\mathcal{E}_1, F_1) = (\mathcal{E}_1 \otimes_{B_1} B_2, F_1 \otimes 1)\,.$$

Lorsque $G = \{e\}$, on notera plus simplement ce groupe $KK(A,B)$.

Proposition 1.8. *Soit B une C^*–algèbre, $K_i(B)$, $(i = 0,1)$ les groupes de K–théorie de B. Alors, on a un isomorphisme canonique*

$$KK_i(\mathbb{C}, B) \simeq K_i(B)\,.$$

Démonstration. Nous donnons seulement une idée de la démonstration lorsque $i = 0$. Si $x = [e_1] - [e_2] \in K_0(B)$, alors en utilisant le théorème de stabilisation de Kasparov, on peut considérer l'endomorphisme $(e_1 \oplus 0) \oplus (e_2 + 0)$ de $\mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_B = \mathcal{E}$. Posons $\mathcal{F} = 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$,posons

$$\pi(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(e_1 + 0) & 0 \\ 0 & \lambda(e_2 + 0) \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs $\pi(\lambda)(\mathcal{F}^2 - 1)$ sont compacts car $\pi(\lambda)(\mathcal{F}^2 - 1) = -\pi(\lambda)$. Ainsi on définit bien une application $K_0(B)$ dans $KK(\mathbb{C}, B)$ en associant $(\mathcal{E}, F)$ à x. □

En particulier,

Lemme 1.9. *Soit $(\mathcal{E}, F)$ un (A,B)–bimodule de Kasparov, $[F] \in KK(\mathbb{C}, A)$ sa classe et $\pi : A \to B$. La classe de $[F \otimes_\pi 1]$ est $\pi_*[F]$.*

Si $\pi\colon A \to B$ est un morphisme involutif G–équivariant, il définit, en considérant B comme C^*–module sur elle–même (où $\langle b_1; b_2\rangle = b_1^* b_2$), un bimodule de Kasparov (pair) avec l'action évidente de G et de A. Soit $[\pi] \in KK_0^G(A,B)$ sa classe.

Théorème 1.10. *(Kasparov, [26][28]).*

Soient A, B et C des $G - C^*$–algèbres. Il existe un produit biadditif

$$\begin{array}{ccc} KK_i^G(A,B) \times KK_j^G(B,C) & \longrightarrow & KK_{i+j}^G(A,C) \\ (x\ ,\ y) & \longmapsto & x \otimes_B y \end{array},$$

le produit de Kasparov, associatif et fonctoriel dans tous les sens possibles. En particulier,

– *si $\alpha : A \to B$ est un morphisme involutif G–équivariant et $y \in KK_j^G(B,C)$, alors*

$$[\alpha] \otimes_B y = \alpha^*(y) \in KK_j^G(A,C)\,,$$

– *si $\beta : B \to C$ est un morphisme involutif G–équivariant et $x \in KK_i^G(A,B)$, alors*

$$x \otimes_B [\beta] = \beta_*(x) \in KK_i^G(A,C)\,.$$

De plus, pour toute $G - C^*$–algèbre D, il existe un morphisme d'extension des scalaires

$$\tau_D \colon KK_i^G(A,B) \longrightarrow KK_i^G(A \otimes D, B \otimes D)\,,$$

et un homomorphisme de descente

$$j_G \colon KK_i^G(A,B) \longrightarrow KK_i(C^*(G,A), C^*(G,B))\,,$$

tous deux fonctoriels dans tous les sens possibles. Si $x \in KK_i^G(A,B)$ et $y \in KK_0^G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, alors

$$\tau_A(y) \otimes_A x = x \otimes_B \tau_B(y)\,.$$

Soit H un sous–groupe fermé de G. Par restriction de l'action de G à H, tout élément $x \in KK^G(A,B)$ détermine un élément $\operatorname{rest}_G^H x \in KK^H(A,B)$.

Définissons maintenant l'induction de H à G. Soient A, B des H–algèbres. Soit $C_0(G,A)^H$ l'algèbre des fonctions $f \colon G \to A$ vérifiant

$$f(gh) = h^{-1}.f(g)\,, \qquad \lim_{gH \to \infty} \|f(g)\| = 0\,.$$

Lemme 1.11. *Il existe une fonction $\delta \colon G \to \mathbb{R}^+$ continue telle que*

- $\int_H \delta(gh)dh = 1\,, \quad \forall g \in G\,,$
- *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de 1 dans G tel que pour tout $g_0 \in U$ et tout $g \in G$,*

$$\int_H |\delta(g_0 gh) - \delta(gh)| dh < \varepsilon\,.$$

Le morphisme d'induction

$$\operatorname{ind}_H^G \colon KK^H(A,B) \to KK^G(C_0(G,A)^H, C_0(G,B)^H)$$

est alors défini comme suit. Soient $(\mathcal{E}, \phi, T)$ un bimodule de Kasparov H–équivariant et $x \in KK^H(A,B)$ sa classe. Alors $\phi \colon A \to \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$ détermine un élément

$$\psi \colon C_0(G,A)^H \to \mathcal{L}_{C_0(G,B)^H}(C_0(G,\mathcal{E})^H)\,.$$

Pour $g \in G$, posons

$$S(g) = \int_H \delta(gh) h.T dh\,.$$

Alors $S \colon G \to \mathcal{L}_B(\mathcal{E})$ détermine un élément de $\mathcal{L}_{C_0(G,B)^H}(C_0(G,\mathcal{E})^H)$ et le triplet $(C_0(G,\mathcal{E})^H, \psi, S)$ est un $(C_0(G,A)^H, C_0(G,B)^H)$–bimodule de Kasparov. La classe de cet élément ne dépend pas de δ et est notée $\operatorname{ind}_H^G x$.

Théorème 1.12. *(Kasparov,[28])*

- *Si x, y sont des éléments de $KK^H(A,D)$ et $KK^H(D,B)$ respectivement, alors*

$$\operatorname{ind}_H^G (x \otimes y) = \operatorname{ind}_H^G x \otimes \operatorname{ind}_H^G y\,.$$

- *Si $x \in KK^G(A,B)$,*

$$\operatorname{ind}_H^G \operatorname{rest}_G^H x = \tau_{C_0(G/H)}(x)\,.$$

– *Soient $H_1 \subset H_0$ des sous–groupes fermés de G. Alors,*

$$\mathrm{ind}_{H_0}^{G}\, \mathrm{ind}_{H_1}^{H_0} x = \mathrm{ind}_{H_1}^{G} x\,.$$

– $\mathrm{ind}_H^G 1_A = 1_{C_0(G,A)^H}$ *($1_A \in KK^H(A,A)$).*

Beaucoup d'éléments importants en K–théorie proviennent d'opérateurs différentiels elliptiques. Rappelons maintenant comment on peut obtenir de tels éléments.

Théorème 1.13. *[2] Soient A et B des C^*–algèbres. On appelle (A,B)–bimodule de Kasparov non–borné la donnée d'un couple $(\mathcal{E},D)$ où $\mathcal{E}$ est un (A,B)–bimodule et D un opérateur régulier dans $\mathcal{E}$ de degré 1 vérifiant $D=D^*$, pour tout $a \in A$, $a(1+D^2)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, et l'ensemble des $a \in A$ tels que $[D,a]$ soit défini sur $Dom\, D$ et se prolonge en un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, est dense dans A. Posons $F = D(1+D^2)^{-1/2}$. Alors $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, et $(\mathcal{E},F)$ est un (A,B)–bimodule de Kasparov. De plus tous les éléments de $KK(A,B)$ sont obtenus de cette façon.*

Nous utiliserons essentiellement deux cas particuliers de ce résultat, dus à Kasparov [27].

Soit G un groupe localement compact unimodulaire, agissant de manière différentiable, propre, par isométrie sur une variété riemanniene complète connexe M, et tel que $G\backslash M$ soit compact. En particulier le groupe d'isotropie de tout point de M est compact. Soit E un fibré vectoriel (gradué) sur M muni d'une structure hermitienne G–invariante, et D un opérateur différentiel elliptique d'ordre 1 G–équivariant sur E. Notons $\sigma(D)$ le symbole de D. Alors,

- Le couple $(L^2(M,E),D)$ définit un élément de Kasparov non–borné équivariant avec $A = C_0(M)$ et $B=\mathbb{C}$. On note $[D]$ sa classe dans $KK^G(C_0(M),\mathbb{C})$.
- Soit $\pi\colon T^*M \to M$ la projection canonique. Le couple $(C_0(\pi^*E),\sigma(D))$ définit un élément de Kasparov non–borné pour $A=C_0(M)$ et $B=C_0(T^*M)$, dont la classe dans $KK^G(C_0(M),C_0(T^*M))$ est noté $[\sigma(D)]$.

Soit x l'élément de $KK_0^G(C_0(T^*M),\mathbb{C})$ défini comme suit. La variété T^*M possède une structure presque complexe naturelle. Notons $\overline{\partial}$ l'opérateur de Dolbeault associé. Soit $\overline{\partial}^*$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}$. Alors x désigne la classe de l'opérateur différentiel $\overline{\partial}+\overline{\partial}^*$ sur T^*M.

Proposition 1.14. *[27]* $[D] = [\sigma(D)] \otimes_{C_0(T^*M)} x$

La deuxième application est la définition de l'indice analytique et de l'indice topologique de D comme élément de $K_*(C^*(G))$.

Proposition 1.15. *L'espace $\mathcal{E}^c$ des sections lisses à supports compacts de E est muni d'une structure de $C_c^\infty(G)$-module préhilbertien en posant :*

$$\begin{array}{ll} \forall \xi \in \mathcal{E}^c\,, f \in C_c^\infty(G) & \xi.f(x) = \int_G g.\xi(x) f(g^{-1})dg \\ \forall \xi,\eta \in \mathcal{E}^c & \langle \xi;\eta\rangle(g) = \int_{G/K} \langle \xi(x); g.\eta(x)\rangle dx \end{array}$$

Remarquons que, comme l'action de G sur M est propre, la deuxième intégrale converge et définit une fonction à support compact sur G. Soit $\mathcal{E}$ la complétion de $\mathcal{E}^c$ pour la norme $\|\xi\| = \|\langle \xi,\xi\rangle\|_{C^*(G)}^{1/2}$. Alors $\mathcal{E}$ est un $C^*(G)$–module hilbertien. Le couple $(\mathcal{E},D)$ définit un élément de Kasparov non–borné pour $A=\mathbb{C}$ et $B = C^*(G)$. Sa classe dans $K_*(C^*(G))$ est notée $\mathrm{Ind}_a D$ et est appelée indice analytique de D.

Proposition 1.16. *Supposons que la graduation sur $E = E^+ \oplus E^-$ est non–triviale. Alors $D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ind}_a D \in K_0(C^*(G))$. Supposons de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall \xi \in Dom\, D\,,\ \langle D^-D^+\xi; D^-D^+\xi\rangle \geq \varepsilon \langle D^+\xi; D^+\xi\rangle\,,$$

alors il existe des projecteurs p^+ *(resp.* p^-*) dans* $\mathcal{E}^+$ *(resp.* $\mathcal{E}^-$*) tels que*

$$\mathrm{Ind}_a D = [p^+] - [p^-] .$$

On a $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & F^- \\ F^+ & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $F^+ = (1 + D^+D^-)^{-1/2}D^+$ et $(F^-)^* = F^+$. D'après le théorème de stabilisation de Kasparov on peut supposer que $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^- = \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$. On peut donc voir $F^+ \bmod \mathcal{K}(\mathcal{H}_B)$ comme un unitaire ν de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)/\mathcal{K}(\mathcal{H}_B)$. D'où $\mathrm{Ind}_a D = \partial[\nu]$, où ∂ est le morphisme de connexion de $K_1(\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)/\mathcal{K}(\mathcal{H}_B))$ dans $K_0(\mathcal{K}(\mathcal{H}_B))$. D'autre part l'inégalité dans la proposition implique que F^+ est surjectif, et on peut donc définir les projecteurs sur $(\mathrm{Im}D^-)^\perp$ et $(\mathrm{Im}D^+)^\perp$ notés p^+ et p^-. En faisant comme pour le calcul d'un opérateur de Fredholm dans un espace de Hilbert, on trouve alors le résultat désiré.

Soit $c\colon M \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, telle que

$$\int_G c(g^{-1}x)dg = 1 , \quad (\forall x \in M) .$$

Une telle fonction existe car l'espace $G\backslash M$ est compact et l'action de G est propre. Alors,

$$q(g, x) = \sqrt{c(x)c(g^{-1}x)} \in C^*(G, C_0(M))$$

est un idempotent. Soit $[\mathcal{L}_M]$ sa classe dans $K_0\,(C^*(G, C_0(M)))$. Comme l'espace des fonctions qui vérifient les mêmes propriétés que c est convexe, cet élément ne dépend pas de la fonction c choisie. Posons, pour $x \in KK_*^G(C_0(M), \mathbb{C})$,

$$\mu_M^G(x) = [\mathcal{L}_M] \otimes_{C^*(G, C_0(M))} j_G(x) .$$

Soit N une variété vérifiant les mêmes propriétés que M et $f\colon M \to N$ une application continue G–équivariante. Alors, par fonctorialité, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} KK_*^G(C_0(M), \mathbb{C}) & \xrightarrow{f^*} & KK_*^G(C_0(N), \mathbb{C}) \\ \mu_M^G \searrow & & \swarrow \mu_N^G \\ & K_*(C^*(G)) & \end{array} \qquad (1.1)$$

Si D est un opérateur différentiel, on écrira plutôt $\mathrm{Ind}_t D = \mu_M^G([D])$, et cet élément est appelé l'indice topologique de D.

d

Théorème 1.17. *[27] Soit* D *un opérateur différentiel elliptique d'ordre* 1 *sur* M*. Alors, dans* $K_*(C^*(G))$*,*

$$\mathrm{Ind}_a D = \mathrm{Ind}_t D .$$

Lorsque G et M sont compacts, ce théorème est une reformulation du théorème d'Atiyah–Singer.

1.2 Induction de Dirac

Soit G un groupe de Lie linéaire semi-simple connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Un tel groupe est unimodulaire. On a une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal K de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ est identifié à l'espace tangent en eK à G/K. La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{p}$ en fait un espace euclidien isomorphe à $\mathbb{R}^d$

où $d = \dim(G/K)$, et le produit scalaire sur $\mathfrak{p}$ est K-invariant. On a donc un morphisme $K \to \mathrm{SO}(\mathfrak{p})$. On supposera dans la suite pour alléger les notations, que ce morphisme se relève en un morphisme $K \to \mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$ (cette hypothèse est vérifiée pour les groupes que nous considérons ici).

Avant de poursuivre la description de l'induction de Dirac, rappelons un certain nombre de faits élémentaires concernant le groupe $\mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$. Les affirmations qui suivent peuvent être trouvées dans [32]. Considérons $\mathfrak{p}$ comme espace vectoriel réel de dimension d, muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle\ ;\ \rangle$ définie positive. L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cliff}\,\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{p}$ est alors le quotient de l'algèbre tensorielle (graduée) $\mathrm{T}(\mathfrak{p})$ sur $\mathfrak{p}$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$\langle x; x\rangle \cdot 1 + x \otimes x\,.$$

L'inculsion de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{T}(\mathfrak{p})$ induit une inclusion $\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Cliff}\,\mathfrak{p}$. Soit $(x_1, \ldots, x_d)$ une base orthonormale de $\mathfrak{p}$. On a les relations

$$x_i^2 = -1 \quad \text{et} \quad x_j x_k + x_k x_j = 0\,, \quad (j \neq k)\,.$$

De plus,

$$\big(x_{i_1}, \ldots x_{i_k}\,;\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq d\big)$$

est une base de $\mathrm{Cliff}\,\mathfrak{p}$. Ainsi l'algèbre $\mathrm{Cliff}\,\mathfrak{p}$ est munie d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation

$$\mathrm{Cliff}\,\mathfrak{p} = \mathrm{Cliff}^+\mathfrak{p} \oplus \mathrm{Cliff}^-\mathfrak{p}$$

où $\mathrm{Cliff}^+\mathfrak{p}$ (resp. $\mathrm{Cliff}^-\mathfrak{p}$) est engendré par les éléments tels que k est pair (resp. impair) de la base précédente. Le groupe $\mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$ est alors le groupe des éléments inversibles $x \in \mathrm{Cliff}\mathfrak{p}$ tels que

$$\begin{aligned}
&x \in \mathrm{Cliff}^+\mathfrak{p}\,,\\
&xvx^{-1} \in \mathfrak{p} \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad v \in \mathfrak{p}\,, \text{et}\\
&\bar{x}x = 1\,,
\end{aligned}$$

où $x \mapsto \bar{x}$ est l'antiautomorphisme de $\mathrm{Cliff}\,\mathfrak{p}$ (bien) défini par

$$v_1 \cdots v_k \mapsto (-1)^k v_k \cdots v_1\,,$$

pour tout $v_1, \ldots, v_k$ dans $\mathfrak{p}$. L'action de $\mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$ sur $\mathfrak{p}$ définie par

$$(x, v) \mapsto xvx^{-1}$$

préserve donc l'orientation, et définit le revêtement double

$$\mathrm{Spin}(\mathfrak{p}) \to \mathrm{SO}(\mathfrak{p})\,.$$

Lorsque d est pair, l'algèbre de Clifford complexifiée $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}$ est simple et est donc isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel complexe S,

$$\gamma\, :\, \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(S)\,,$$

et la représentation de $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}$ ainsi obtenue est à équivalence près l'unique représentation irréductible de $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}$. Lorsque d est impair, $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}$ possède deux classes de représentations irréductibles non-équivalentes. Soit S une telle représentation.

Revenons à d quelconque. L'espace $\mathfrak{p}$ agit de façon $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace complexe S et pour $X \in \mathfrak{p}$, $\gamma(X)^2 = -|X|^2 I$. La restriction de cette représentation à $\mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$ ne dépend pas du choix de S et s'appelle la représentation spinorielle de $\mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$. Cette représentation est somme de deux représentations irréductibles $S = S^+ \oplus S^-$ lorsque d est pair, irréductible sinon.

Soit (η, V) une représentation unitaire de K de dimension finie. L'espace $S \otimes V$ est alors muni d'un produit hermitien K–invariant. Soit $E_V = G \times_K (S \otimes V)$ le fibré hermitien associé sur G/K. La métrique hermitienne est G–invariante.

Proposition 1.18. *On a un isomorphisme de $C_c^\infty(G)$–module préhilbertien*

$$\mathcal{E}_V^c \simeq (S \otimes V \otimes C_c^\infty(G))^K . \tag{1.2}$$

Démonstration. Si $u \otimes v \otimes f \in (S \otimes V \otimes C_c^\infty(G))^K$ on lui associe la section ξ telle que $\xi(gK) = \big(g, f(g)(u \otimes v)\big) \in E_V$. Cette section est bien définie car $\xi(gK)$ ne dépend pas du choix de g. Il est classique que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. La structure de module préhilbertien sur l'algèbre de convolution $C_c^\infty(G)$ est définie pour $v, v_1, v_2 \in S \otimes V$ et $f_1, f_2 \in C_c^\infty(G)$ par

$$\begin{array}{l} \langle v_1 \otimes f_1; v_2 \otimes f_2\rangle = \langle v_1; v_2\rangle f_1^* f_2 \\ (v \otimes f_1).f_2 = v \otimes f_1 f_2 \end{array} .$$

C'est alors un calcul aisé de vérifier que ces structures sont compatibles avec l'isomorphisme précédent. □

Définissons maintenant l'opérateur de Dirac associé à V. C'est l'opérateur elliptique G-invariant D_V (noté aussi D_η) d'ordre 1 sur E_V obtenu en composant la connexion de Levi–Cevita

$$\nabla_\mu : \mathcal{E}_V^c \to \mathcal{E}_{V\otimes\mathfrak{p}}^c ,$$

(en identifiant le fibré cotangent avec le fibré tangent via la métrique riemannienne sur G/K) et la multiplication de Clifford γ, c'est-à-dire

$$D_V : \mathcal{E}_V^c \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E}_{V\otimes\mathfrak{p}}^c \xrightarrow{\gamma} \mathcal{E}_V^c .$$

A travers l' isomorphisme 1.2, cet opérateur est défini par la formule suivante

$$D_V(s \otimes v \otimes f) = \sum_i \gamma(x_i) s \otimes v \otimes \tilde{x}_i(f) .$$

où (x_i) est une base orthonormale de $\mathfrak{p}$ et $\tilde{x}_i$ le champ de vecteurs invariants à droite défini par x_i.

D'après le paragraphe précédent, on peut définir l'indice analytique de D_V comme élément de $K_i(C^*(G))$, avec $i = \dim G/K \pmod 2$. Par additivité, nous obtenons ainsi un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} \mu: & R(K) & \longrightarrow & K_i(C^*G) \\ & V & \longmapsto & \mathrm{Ind}_a D_V \end{array} .$$

Considérons maintenant le $C_r^*(G)$–module $\mathcal{E}_V^r$ obtenu en complétant $\mathcal{E}_V^c$ pour la norme de $C_r^*(G)$. L'opérateur de Dirac agit encore sur ce C^*–module et son indice peut encore être défini. Notons μ_r l'application obtenue comme précédemment à valeur dans $K_i(C_r^*G)$.

Soit $\lambda : C^*G \to C_r^*G$ la représentation régulière gauche de G et λ_* le morphisme induit en K-théorie. D'après les lemmes 1.5 et 1.9, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} & & K_i(C^*G) \\ & \mu \nearrow & \downarrow \lambda_* \\ R(K) & \underset{\mu_r}{\longrightarrow} & K_i(C_r^*G) \end{array}$$

Théorème 1.19. *(A. Wassermann 1987 [42], V. Lafforgue 2002 [31]) L'induction de Dirac μ_r est un isomorphisme. De plus, $K_{i+1}(C_r^*(G)) = 0$.*

Corollaire 1.20. *L'application μ est injective, λ_* est surjective, et*

$$\begin{aligned} K_i(C^*(G)) &= \operatorname{Im}\mu \oplus K_i(\operatorname{Ker}\lambda)\,, \\ K_{i+1}(C^*(G)) &= K_{i+1}(\operatorname{Ker}\lambda)\,. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant la construction de l'application d'assemblage, telle qu'elle est définie par Baum, Connes et Higson [11], et faisons le lien avec l'induction de Dirac.

Rappelons tout d'abord la définition d'un espace propre telle qu'elle est donnée pour un groupe G localement compact Haussdorf dénombrable à l'infini, par Baum Connes et Higson [11].

Définition 1.21. *Soit X un espace topologique métrisable, muni d'une action continue de G telle que $G\backslash X$ soit métrisable. Nous dirons que cette action est propre si pour tout point $x \in X$, il existe U un voisinage de x stable sous l'action de G, H un sous–groupe compact de G et $\rho\colon U \to G/H$ continue et G–équivariante.*

Un morphisme de G–espaces est une application $f\colon X \to Y$ continue et G–équivariante. Deux morphismes f_0 et f_1 sont dits homotopes s'il existe une homotopie $f_t\colon X \to Y$, $t \in [0,1]$ de f_0 à f_1 par des morphismes de G–espaces.

Définition 1.22. *Un G–espace propre Y est universel, ou un classifiant des actions propres de G, si pour tout G–espace propre X il existe un G–morphisme $X \to Y$ et si deux tels G–morphismes sont homotopes.*

Il existe toujours un classifiant des actions propres. Un classifiant est défini à homotopie près.

Proposition 1.23. *[11, proposition 1.8] Un G–espace propre Y est un classifiant des actions propres de G si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées.*

1. *Pour tout sous–groupe compact H de G, il existe $y \in Y$ tel que $Hy = y$.*
2. *Les deux projections $p_{0,1}\colon Y \times Y \to Y$ sur le premier et le second facteur sont homotopes.*

Conséquence Si G est un groupe de Lie linéaire semi–simple connexe, alors G/K, où K est un sous–groupe compact maximal de G, est un classifiant des actions propres de G. En effet, G/K est un espace symétrique à coubure non–positive, et donc il existe une unique géodésique joignant deux points distincts. Ceci donne un sens à une expression du type $p_t(y_0, y_1) = (1-t)y_0 + ty_1$, et p_t réalise l'homotopie cherchée entre p_0 et p_1.

Soit $\underline{E}G$ un classifiant des actions propres de G. On pose alors

$$RK_*^G(\underline{E}G) = \varinjlim_{\substack{X \subset \underline{E}G \\ G\backslash X \text{ compact}}} KK_*^G(C_0(X), \mathbb{C})\,.$$

L'application d'assemblage BC de Baum–Connes [11] est alors définie par

$$\mathrm{BC}\left\{\begin{array}{rcl} RK_*^G(\underline{E}G) & \longrightarrow & K_*(C_r^*(G)) \\ x \in KK_*^G(C_0(X),\mathbb{C}) & \longmapsto & \lambda_* \circ \mu_X^G(x)\ . \end{array}\right.$$

Ceci définit bien un morphisme de groupe car le diagramme 1.1 est commutatif.

Revenons au cas où G est un groupe de Lie semi–simple connexe linéaire, K un sous–groupe compact maximal, et supposons toujours que l'action de K sur $\mathrm{SO}(d)$, où $d = \dim G/K$ se relève en un morphisme $K \to \mathrm{Spin}(d)$. D'après ce qui précède l'application d'assemblage est

$$\mathrm{BC}\left\{\begin{array}{rcl} KK_*^G(C_0(G/K),\mathbb{C}) & \longrightarrow & K_*(C_r^*(G)) \\ {[d]} & \longmapsto & \lambda_*(\mathrm{ind}_a\, d)\ . \end{array}\right.$$

Pour montrer que $\mu_r = \mathrm{BC}$, il reste à verifier que $KK_i^G(C_0(G/K),\mathbb{C}) \simeq R(K)$. Pour cela notons α la classe dans $KK_i^G(C_0(G/K),\mathbb{C})$ la classe de l'opérateur de Dirac sans coefficient sur G/K (c'est–à–dire à coefficients dans la représentation triviale 1_K de K). Cet élément est appelé élément de Dirac. Construisons maintenant un élément $\beta \in KK_i^G(\mathbb{C}, C_0(G/K))$, dit élément dual–Dirac. Considérons le fibré hermitien (gradué) $E^* = G \times_K S^*$ sur G/K. Alors l'espace $C_0(G/K, E^*)$ des sections nulles à l'infini de E^* est un C^*–module sur $C_0(G/K)$. La multiplication de Clifford point par point détermine une action de l'espace des champs de vecteurs (sur G/K) sur $C_0(G/K, E^*)$. Pour $x \in G/K$, $x \neq eK$, soit $X'_x \in T_xG/K$ le vecteur unitaire tangent à l'unique géodésique joignant x à eK et pointant vers eK. Soit f une fonction positive continue sur G/K valant 0 en eK et 1 en dehors d'un voisinage compact de eK. Alors $X_x = f(x)X'_x$ détermine un champ de vecteurs sur G/K. Soit $F\colon C_0(G/K,E^*) \to C_0(G/K,E^*)$ la multiplication de Clifford par ce champ de vecteurs.

Proposition 1.24. *Le couple $(C_0(G/K,E^*),F)$ détermine un élément*

$$\beta \in KK_i^G(\mathbb{C}, C_0(G/K))\,.$$

Le seul point qui n'est pas évident est de vérifier que $g.F - F$ est compact. C'est une conséquence de l'inégalité de la médiane.

L'élément $\gamma \in KK^G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ de Kasparov est l'élément $\beta \otimes_{C_0(G/K)} \alpha$. Parmi les propriétés fondamentales des éléments α, β et γ, retenons les suivantes.

Théorème 1.25. *[27] Soit 1_K l'élément de $KK^K(\mathbb{C},\mathbb{C}) = R(K)$ donné par la représentation triviale de K. Alors,*

1. $\alpha \otimes \beta = \tau_{C_0(G/K)}(\gamma) \in KK^G(C_0(G/K), C_0(G/K))$,
2. $\mathrm{rest}_G^K\, \gamma = 1_K \in R(K)$.

Nous obtenons alors immédiatement

$$\alpha \otimes \beta = \tau_{C_0(G/K)}(\gamma) = \mathrm{ind}_K^G \circ \mathrm{rest}_G^K\, \gamma = \mathrm{ind}_K^G 1_K = 1_{C_0(G/K)}\,.$$

Nous pouvons maintenant conclure.

Proposition 1.26. *La restriction*

$$\mathrm{rest}_G^K\colon KK_*^G(C_0(G/K),\mathbb{C}) \longrightarrow KK_*^K(C_0(G/K),\mathbb{C})$$

est un isomophisme. De plus, $\mathrm{rest}_G^K\, \beta \otimes \cdot$ est un isomorphisme de $KK_*^K(C_0(G/K),\mathbb{C})$ sur $R(K) \oplus 0$.

Démonstration. La deuxième assertion est une conséquence directe du théorème 1.25. Pour la deuxième assertion, l'inverse est donné par

$$\begin{array}{rcl} KK_*^K(C_0(G/K),\mathbb{C}) & \longrightarrow & KK_*^G(C_0(G/K),\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & \tau_{C_0(G/K)}(\beta)\otimes \mathrm{ind}_K^G\, x\otimes\alpha\,. \end{array}$$

En effet, pour $x\in KK^G(C_0(G/K),\mathbb{C})$,

$$\begin{array}{rcl} \tau_{C_0(G/K)}(\beta)\otimes \mathrm{ind}_K^G\circ \mathrm{rest}_G^K x\otimes\alpha & = & \tau_{C_0(G/K)}(\beta\otimes x)\otimes\alpha \\ & = & \alpha\otimes\beta\otimes x=\gamma\cdot x\,, \end{array}$$

et d'autre part, $(1-\gamma)\cdot x=\tau_{C_0(G/K)}(1-\gamma)\otimes x=0$. Ceci montre que

$$\mathrm{rest}_G^K\colon KK_*^G(C_0(G/K),\mathbb{C})\to KK_*^K(C_0(G/K),\mathbb{C})$$

est injectif. D'autre part l'image de $[D_V]=\mathrm{ind}_K^G[V]\otimes\alpha$ dans $R(K)$ est $[V]$, ce qui montre que ce morphisme est aussi surjectif. $\square$

Chapitre 2

Représentations unitaires de $\mathrm{Sp}(n, 1)$ et K–théorie

2.1 Notations et représentations de $\mathrm{Sp}(n, 1)$

Soit $n \geq 2$. Le groupe $G = \mathrm{Sp}(n, 1)$ est le groupe des transformations linéaires de $\mathbb{H}^{n+1}$, vu comme $\mathbb{H}$-espace vectoriel à droite qui préservent la forme quadratique définie pour $v = (q_1, \dots, q_{n+1})$ et $w = (q'_1, \dots, q'_{n+1})$ par

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i q'_i - \bar{q}_{n+1} q'_{n+1} \,.$$

En identifiant $g \in \mathrm{Sp}(n, 1)$ à sa matrice dans la base canonique, on a

$$G = \mathrm{Sp}(n, 1) = \{g \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{H}); g^* J g = J\} \,,$$

où g^* désigne la matrice conjuguée transposée de g et J est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. De façon générale, on désignera dans cette partie un groupe de Lie par des majuscules d'imprimerie et par la même lettre en caractère gothique son algèbre de Lie. L'ensemble des points fixes de l'involution de Cartan (c'est à dire l'automorphisme involutif θ de G défini par $\theta(g) = (g^*)^{-1} = JgJ$) est un sous-groupe compact maximal K de G, isomorphe à $\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1)$. La décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. L'algèbre de Lie de K est

$$\mathfrak{k} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix} \right) \,;\, M \in M_n(\mathbb{H}) \,,\, M + M^* = 0 \,,\, q + \overline{q} = 0 \right\} \,,$$
$$\mathfrak{p} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{smallmatrix} \right) \,,\, X \in \mathbb{H}^n \right\} .$$

Soit $\mathfrak{t} = \mathfrak{so}(2) \times \cdots \times \mathfrak{so}(2) \subset \mathfrak{k}$ ($n + 1$ facteurs). Alors $\mathfrak{t}$ est une sous–algèbre de Cartan dans $\mathfrak{k}$ et dans $\mathfrak{g}$. Nous noterons Δ le système de racines du couple $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$, $\Delta_c = \Delta(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des racines compactes, et $\Delta_n = \Delta \setminus \Delta_c$ l'ensemble des racines non–compactes. Si Δ^+ est un système de racines positives pour Δ, notons $\rho(\Delta^+)$ (ou ρ si cela n'entraîne pas de confusion) la demi–somme des racines positives, $\rho(\Delta_c^+)$ (ou ρ_c) la demi–somme des racines compactes, $\rho(\Delta_n^+)$ (ou ρ_n) la demi–somme des racines non–compactes.

Le groupe G possède aussi une décomposition d'Iwasawa de la façon suivante. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}$, M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. Par exemple si $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\mathfrak{a} = \left\{ H_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{p} ,$$

(le bloc central est de taille $n-1$) on trouve que M est l'ensemble des matrices de la forme

$$M = \left\{ g = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} ; M \in \mathrm{Sp}(n-1) , |q| = 1 \right\} \subset K .$$

Soit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Notons Φ l'ensemble des racines du système $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et $\Phi_{\mathfrak{m}}$ celui de $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Si Φ^+ est un système de racines positives de Φ, notons $\Phi_{\mathfrak{m}}^+ = \Phi^+ \cap \Phi_{\mathfrak{m}}$ le système positif correspondant pour $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$. Soit $\mathfrak{n}$ la somme des espaces propres des racines positives du système de racines restreint $\Phi_{\mathfrak{a}}$ formé des restrictions à $\mathfrak{a}$ non nulles des racines positives de Φ. Avec ces notations, une décomposition d'Iwasawa est $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Notons que $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe P parabolique minimal de G.

De façon générale, si Q est un système de racines, on note W, ou W_Q en cas d'ambiguité, le groupe de Weyl de Q, ie le groupe engendré par les symétries orthogonales s_α d'hyperplan le supplémentaire orthogonale de $\mathbb{R}\alpha$ pour $\alpha \in Q$. Pour $1 \leq i \leq n+1$, soit ε_i la forme linéaire sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ définie par

$$\varepsilon_i(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_{n+1})) = t_i .$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \, ; \, 1 \leq i \leq j \leq n+1\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \, ; \, 1 \leq i \leq n+1\} , \\ \Phi &= \{\pm e_i \pm e_j \, ; \, 1 \leq i \leq j \leq n+1\} \cup \{\pm 2e_i \, ; \, 1 \leq i \leq n+1\} . \end{aligned}$$

où $e_i = \varepsilon_{i-1} \circ \mathrm{Ad}u^{-1}$ pour $3 \leq i \leq n+1$, $e_1 = \varepsilon_1 \circ \mathrm{Ad}u^{-1}$ et $e_2 = -\varepsilon_{n+1} \circ \mathrm{Ad}u^{-1}$ avec $u \in G_{\mathbb{C}}$ donné par $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & I & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$.

Nous avons alors $\mathfrak{a}^* = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$, ce qui permet d'identifier $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ avec $\mathbb{C}$. Remarquons que $(e_1 + e_2)(H_t) = -2t$. Choisissons les systèmes de racines positives suivants :

$$\begin{aligned} \Delta^+ &= \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \, ; \, 1 \leq i \leq j \leq n+1\} \cup \{2\varepsilon_i \, ; \, 1 \leq i \leq n+1\} , \\ \Phi^+ &= \{e_i \pm e_j \, ; \, 1 \leq i \leq j \leq n+1\} \cup \{2e_i \, ; \, 1 \leq i \leq n+1\} . \end{aligned}$$

Nous décrivons maintenant les représentations admissibles et unitaires de G. L'ensemble $\hat{H}$ des (classes de) représentations irréductibles d'un groupe de Lie compact connexe H est paramètré par leur plus haut poids relativement à un système de racines positives. Par abus, nous ne distinguerons souvent pas une représentation et son plus haut poids dans les notations.

Le plus haut poids d'une représentation irréductible ξ de M relativement au système $\Phi_{\mathfrak{m}}^+$ est donné par $\xi = b(e_1 - e_2) + \sum_{i=3}^{n+1} b_i e_i$, où $2b, b_i \in \mathbb{N}$ et $b_3 \geq \cdots \geq b_{n+1}$. Le plus haut poids d'une représentation irréductible μ de K par rapport à Δ_c^+ est $\mu = \sum \mu_i \varepsilon_i$ où $\mu_i \in \mathbb{N}$ et $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$.

Soit π une représentation (continue) de G. On a

$$\pi|_K = \sum_{\eta \in \hat{K}} n_\eta \eta .$$

On dit que π est admissible si $\pi|_K$ est unitaire et si pour tout $\eta \in \hat{K}$, $n_\eta < \infty$.

Soit $\xi \in \hat{M}, \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On forme la représentation induite de G :

$$\pi_{\xi,\nu} = \mathrm{Ind}_P^G\, \xi \otimes e^\nu \otimes 1\,.$$

Ces représentations sont les représentations principales. Elles sont normalisées pour être unitaires lorsque ν est imaginaire. Les représentations $\pi_{\xi,\nu}$ et $\pi_{\xi',\nu'}$, $\nu' \neq \nu$ sont équivalentes si et seulement si $\xi' = \xi$ et $\nu' = -\overline{\nu}$.

Définition 2.1. *Lorsque* $\mathrm{Re}\nu > 0$, *$\pi_{\xi,\nu}$ possède un unique quotient, noté $J_{\xi,\nu}$ et appelé* quotient de Langlands.

Proposition 2.2. *[3] Lorsque* $\mathrm{Re}\nu = 0$, *$\pi_{\xi,\nu}$ est irréductible pour* $\mathrm{Im}\nu > 0$. *Pour $\nu = 0$, la représentation $\pi_{\xi,\nu}$ est réductible si et seulement si $\xi = b(e_1+e_2) + \sum b_i e_i$ vérifie $b \in \mathbb{N}+1/2$ et $b+1/2 \neq b_j + n - j + 2$ pour tout $j = 3,\ldots,n+1$, et elle est alors somme directe de deux représentations irréductibles, appelées limites de séries discrètes.*

Le théorème de classification des représentations admissibles de Langlands pour $G =$ Sp$(n,1)$ s'énonce comme suit.

Théorème 2.3. *Les représentations admissibles irréductibles de G sont, à équivalence près :*

1. *les séries discrètes, c'est-à-dire les représentations de carré intégrable,*
2. *les limites de séries discrètes,*
3. *les séries principales unitaires ($\pi_{\xi,\nu}$, avec* $\mathrm{Re}\nu = 0$ *et* $\mathrm{Im}\nu > 0$ *ou $\nu = 0$ si $\pi_{\xi,0}$ est irréductible),*
4. *les quotients de Langlands.*

Les trois premières séries constituent le dual admissible tempéré de G. Ces représentations sont unitaires. Le dual admissible tempéré est le spectre de la C^*–algèbre réduite de G, que l'on appelle aussi dual réduit.

Comme les représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie semi-simple sont admissibles [19, théorème 15.5.6], il reste pour déterminer le dual unitaire de G, à savoir quels sont les quotients de Langlands unitarisables. Baldoni Silva a obtenu dans [3] le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Soit $\xi = (b; b_3, \ldots, b_{n+1}) \in \hat{M}$ et ν tel que* $\mathrm{Re}\,\nu > 0$. *Si $J_{\xi,\nu}$ est unitarisable, alors* $\mathrm{Im}\,\nu = 0$.

1. *Si $\pi_{\xi,0}$ est réductible, alors pour tout $\nu > 0$, $J_{\xi,\nu}$ n'est pas unitarisable. Dans ce cas, posons $\nu(\xi) = 0$. De plus, $\pi_{\xi,0}$ est réductible si et seulement si $b \in \mathbb{N}+1/2$ et $b+1/2 \neq b_j + n - j + 2$ pour tout $3 \leq j \leq n+1$.*
2. *Si $\pi_{\xi,0}$ est irréductible, alors il existe $\nu(\xi) > 0$ tel que pour tout $0 < \nu \leq \nu(\xi)$, $J_{\xi,\nu}$ est unitarisable. De plus si $\nu < \nu(\xi)$, $\pi_{\xi,\nu}$ est irréductible ; Appelons ces familles les séries complémentaires. Les quotients de Langlands $J_{\xi,\nu(\xi)}$ sont dits aux bouts des séries complémentaires.*
3. *Si $\pi_{\xi,0}$ est irréductible et $\xi = (b; b_3, \ldots, b_{n+1})$ vérifie $b = 0$ et $b_{n+1} = 1$, alors $J_{\xi,\nu(\xi)+1}$ est unitarisable. On appelle ces représentations les séries isolées.*
4. *Les seuls quotients de Langlands unitarisables sont ceux obtenus en 2) et 3).*

Une notion importante dans la compréhension du dual unitaire et de sa topologie est celle de caractère infinitésimal d'une représentation. Les résultats que nous rappelons ici sans démonstration peuvent être trouvés dans le livre de A. Knapp [29]. Soit G un groupe de Lie linéaire connexe semi–simple. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{h})$ l'algèbre de Lie enveloppante de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{Z}$ le centre de l'algèbre de Lie enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Un élément important de $\mathfrak{Z}$ est l' opérateur de Casimir Ω. Soient $X_1, \ldots, X_d$ est une base orthogonale de $\mathfrak{p}$, $Y_1, \ldots, Y_m$ une base orthogonale de $\mathfrak{k}$, relativement à la forme de Killing. Alors,

$$\Omega = -\sum_{j=1}^{m} Y_j^2 + \sum_{i=1}^{d} X_i^2 .$$

Cet élément ne dépend pas de la base choisie. En particulier, $\mathfrak{Z} \neq 0$.

Harish-Chandra a construit un homomorphisme $\gamma_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{Z} \to U(\mathfrak{h})^W$ où $W = W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ on note

$$\chi_\lambda : \mathfrak{Z} \to \mathbb{C}$$

l'homomorphisme défini par $\chi_\lambda(Z) = \lambda(\gamma_{\mathfrak{h}}(Z))$.

1. Tous les homomorphismes de $\mathfrak{Z}$ dans $\mathbb{C}$ sont obtenus de cette façon
2. $\chi_\lambda = \chi_\mu$ si et seulement si il existe $\sigma \in W$ tel que $\lambda = \sigma\mu$.
3. Si $\mathfrak{h}'$ est une autre sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{Ad}x : \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{h}'_{\mathbb{C}}$ pour $x \in G_{\mathbb{C}}$, alors $\gamma_{\mathfrak{h}'} = \mathrm{Ad}x.\gamma_{\mathfrak{h}}$.

Si $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ se relève en un caractère de $H = \exp \mathfrak{h}$, on dira que λ est intégral. Si $(\lambda, \alpha) \neq 0$ pour tout α racine de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ relativement à $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, on dira que λ est régulier, singulier sinon. On utilise le même adjectif pour χ si $\chi = \chi_\lambda$.

Une représentation π de G possède un caractère infinitésimal lorsqu'il existe λ tel que

$$\forall Z \in \mathfrak{Z}, \quad \pi(Z) = \chi_\lambda(Z) .$$

Le caractère infinitésimal de π est noté χ_π.

Revenons à $G = \mathrm{Sp}(n,1)$. Les représentations irréductibles admissibles et les représentations $\pi_{\xi,\nu}$ possèdent un caractère infinitésimal. Soit $\delta_{\mathfrak{m}}$ la demi-somme des racines positives de $\Phi_{\mathfrak{m}}$. Grâce par exemple à A.Knapp [29, proposition 8.22 (et l'exemple qui la précède)], le caractère infinitésimal de $\pi_{\xi,\nu}$ est donné par $\chi_{\Lambda_{\xi,\nu}}$ où $\Lambda_{\xi,\nu} = \xi + \delta_{\mathfrak{m}} + \nu$ est appelé paramètre de Langlands de $\pi_{\xi,\nu}$. On vérifie alors facilement que si $\Lambda_{\xi,\nu} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$, $\xi = b(e_1 - e_2) + \sum b_i e_i$ et $\nu = c(e_1 + e_2)$ alors

$$\begin{cases} a_1 = c + b + 1/2 , \\ a_2 = c - b - 1/2 , \\ a_i = b_i + n - i + 2 , \quad 3 \leq i \leq n+1 . \end{cases}$$

2.2 K–théorie de la C^*–algèbre maximale de $\mathrm{Sp}(n,1)$

Avant de calculer la K–théorie de la C^*–algèbre maximale des groupes $\mathrm{Sp}(n,1)$, nous avons besoin d'étudier la topologie de Fell sur le dual unitaire.

Soit G un groupe localement compact. On munit l'ensemble $\mathrm{Rep}(G)$ (donc $\hat{G}$) des représentations unitaires de G de la topologie de Fell qui peut être définie comme suit. Soit C une partie compacte de G, $\varepsilon > 0$, $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \mathrm{Rep}(G)$ et $\xi_1, \ldots \xi_n$ une famille orthonormale de

$\mathcal{H}_\pi$. On considère l'ensemble des représentations $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma) \in \mathrm{Rep}(G)$ telles qu'il existe $\eta_1, \dots, \eta_n$ une famille orthonormale de $\mathcal{H}_\sigma$ vérifiant

$$(\forall i, j = 1, \dots, n) \qquad \underset{g \in C}{Sup} \, |\langle \eta_i ; \sigma(g)\eta_j \rangle - \langle \xi_i ; \pi(g)\xi_j \rangle| < \varepsilon \,. \tag{2.1}$$

Ces ensembles $V(\pi, C, \varepsilon, \xi_i)$ forment une base fondamentale de voisinage de π.

Soit K un sous-groupe compact de G. Pour $\tau \in \hat{G}$ notons

$$\tau_{|K} = \oplus_{\rho \in \hat{K}} V_\rho^\tau \,.$$

où V_ρ^τ est l'espace des vecteurs sur lesquels τ agit comme ρ.

Lemme 2.5. *Supposons que pour tout $\tau \in \hat{G}$ et $\rho \in \hat{K}$, l'espace V_ρ^τ est de dimension finie. $\hat{G}_{K,\pi} = \{\sigma \in \hat{G} : \pi_{|K} \subset \sigma_{|K}\}$ est ouvert dans $\hat{G}$.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \hat{G}_{K,\pi}$ et montrons que $V(\sigma, K, \varepsilon, \eta_i) \subset \hat{G}_{K,\pi}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit et pour un choix convenable des η_i. Soit $\rho \in \pi_{|K}$ et $(\xi_i)_{i=1}^n$ une famille orthonormale dans V_ρ^σ. Soit $\varepsilon > 0$ et $\sigma' \in V(\sigma, K, \varepsilon, \xi_i)$. Il existe donc des vecteurs orthonormaux $\eta_1, \dots, \eta_n$ comme dans (2.1) avec $C = K$. Si $\tau \in \hat{G}$ on note P_ρ^τ la projection orthogonale sur V_ρ^τ. On a

$$P_\rho^\tau v = d_\rho \int_K \overline{tr\rho(k)} \tau(k) v \, dk \,.$$

Soit $\eta_i' = P_\rho^{\sigma'} \eta_i$ et montrons que (η_i') est libre. Pour $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}^2$ on a

$$\begin{aligned}
|\langle \eta_i ; \eta_j' \rangle \quad &- \quad \delta_{i,j}| \\
&= \quad |\langle \eta_i ; \eta_j' \rangle - \langle \xi_i ; \xi_j \rangle| \\
&= \quad |\langle \eta_i ; d_\rho \textstyle\int_K \overline{tr\rho(k)} \sigma'(k) \eta_j \rangle \, dk - \langle \xi_i ; d_\rho \int_K \overline{tr\rho(k)} \sigma(k) \xi_j \rangle \, dk| \\
&\leq \quad d_\rho \textstyle\int_K \overline{tr\rho(k)} \, |\langle \eta_i ; \sigma'(k) \eta_j \rangle - \langle \xi_i ; \sigma(k) \xi_j \rangle| \, dk \\
&\leq \quad \varepsilon \, d_\rho \textstyle\int_K |\overline{tr\rho(k)}| \, dk
\end{aligned}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la famille (η_i') est libre. Finalement, on a donc bien $V_\rho^\pi \subset V_\rho^\sigma \subset \sigma'_{|K}$. □

Supposons maintenant que G est un groupe de Lie (réel) semi-simple connexe linéaire. Le groupe G est liminaire et la topologie de Jacobson sur $\hat{G}$ coïncide avec la topologie de Fell, [19]. En particulier les points sont fermés pour cette topologie.

Revenons à $G = \mathrm{Sp}(n, 1)$. Commençons par rappeler le lemme suivant :

Lemme 2.6. *Si π_n converge vers π et est un sous-quotient de π_{ξ, ν_n}, avec ν_n réel, alors la suite ν_n converge.*

Démonstration. Si Ω désigne l'opérateur de Casimir, on sait que la fonction $\sigma \mapsto \sigma(\Omega)$ est continue sur $\hat{G}$ (d'après un lemme de Dixmier, voir [12] pour une démonstration). Or $\pi_n(\Omega) = \pi_{\xi, \nu_n}(\Omega)$. Notons $|\,|$ la norme sur $(\mathfrak{a} + i\mathfrak{b})^*$ obtenue par restriction de la forme de Killing, et δ la demi–somme du système de racines positives Φ^+. Pour ν fixé, on a

$$\begin{aligned}
\pi_{\xi,\nu}(\Omega) \quad &= \quad \chi_{\Lambda_{\xi,\nu}}(\Omega) I \\
&= \quad (|\Lambda_{\xi,\nu}|^2 - |\delta|^2) I \\
&= \quad (|\xi + \delta_{\mathfrak{m}}|^2 + |\nu|^2 - |\delta|^2) I \,.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité résulte par exemple de [29, lemme 12.28] Par conséquent, (ν_n) converge. □

Soit π une représentation admissible de G.

Proposition 2.7. *(Harish-Chandra) Pour toute $f \in C_c^\infty(G)$, l'opérateur*

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)d\,g$$

est à trace et la forme linéaire

$$f \mapsto \mathrm{Trace}(\pi(f))$$

définie une distribution sur $C_c^\infty(G)$. Elle est définie par une fonction θ_π définie sur un ouvert dense G' de G où elle est analytique.

Proposition 2.8. *([29], proposition 10.18) Si $\pi = \pi_{\xi,\nu}$, nous avons pour $x \in G$*

$$\theta_\pi(x) = \theta_{\xi,\nu}(x) = \begin{cases} D^{-1}(h)((e^\nu + e^{-\nu}) \otimes \mathrm{ch}\xi|_B)(h) & \mathrm{si}\, x = ghg^{-1}\,\mathrm{pour}\, h \in BA\,, \\ 0 & \mathrm{sinon}\,, \end{cases}$$

où D est une fonction ne dépendant ni de ν ni de ξ. En particulier, $\theta_{\xi,\nu}$ est continue en ν.

Proposition 2.9. *Soit (ν_n) convergeant vers ν. La suite (π_{ξ,ν_n}) converge vers $\sigma \in \hat{G}$ si et seulement si σ est un sous-quotient de $\pi_{\xi,\nu}(f)$.*

Démonstration. La proposition 2.8 montre que la distribution

$$f \longmapsto \mathrm{Trace}\,\pi(f)$$

sur $C_c^\infty(G)$ est définie pour $\pi = \pi_{\xi,\nu}$ par une fonction localement intégrable $\theta_{\xi,\nu}$ majorée en valeur absolue par une constante fois $|\theta_{\xi,0}|$ qui est localement intégrable. Le théorème de convergence dominée donne donc pour $f \in C_c^\infty(G)$

$$\lim_{\nu_n \to \nu} \mathrm{Trace}\,\pi_{\xi,\nu_n}(f) = \mathrm{Trace}\,\pi_{\xi,\nu}(f)$$

La conclusion résulte alors de [20, corollaire 2 du théorème 2.3 et lemme 3.4]. Ces résultats de Fell sont rappelés dans la proposition qui suit. □

Pour $\mu \in \hat{K}$, soit $p_\mu : k \mapsto \dim\mu\,\mathrm{Trace}\,\mu(k)$ le projecteur associé dans $C^\infty(K)$. Comme $C^\infty(K)$ agit par convolution sur $C_c^\infty(G)$ on peut définir une sous-algèbre involutive par

$$\mathfrak{A} = \sum_{\mu_1,\mu_2} p_{\mu_1}.C_c^\infty(G).p_{\mu_2}\,.$$

Cette sous-algèbre est dense dans $C_c^\infty(G)$.

Proposition 2.10.

1. *Soit $f \in \mathfrak{A}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\pi \in \hat{G}$, on ait $\mathrm{Rang}\pi(f) \leq n$.*
2. *Soient $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ des éléments de $\hat{G}$. Supposons que pour toute $f \in \mathfrak{A}$ on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Trace}\,\pi_n(f) = \sum_{i=1}^r \mathrm{Trace}\,\sigma_i(f)\,,$$

alors la suite (π_n) converge vers $\sigma \in \hat{G}$, si et seulement il existe i tel que $\sigma = \sigma_i$.

Remarque 2.11. *Compte-tenu du fait que les distributions θ_π, π irréductible admissible, sont indépendantes, il en résulte en particulier que tous les sous-quotients de $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$ sont unitarisables.*

Nous sommes maintenant en mesure de décrire la topologie de Fell sur $\hat{G}$. Soient

1. $\mathcal{B}$ l'ensemble des bouts de séries complémentaires,
2. $\mathcal{C}$ l'ensemble des séries complémentaires,
3. $\mathcal{D}$ l'ensemble des séries discrètes,
4. $\mathcal{I}$ l'ensemble des séries « isolées »,
5. $\mathcal{L}$ l'ensemble des limites de séries discrètes, et
6. $\mathcal{P}$ l'ensemble des séries principales unitaires.

Théorème 2.12. *1. $\mathcal{I}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ sont fermés et discrets dans $\hat{G}$.*

2. Soit $\xi \in \hat{M}$. L'adhérence de $\mathcal{PC}(\xi) = \{\pi_{\xi,\nu} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}\}$ est la réunion de $\mathcal{PC}(\xi)$ et des sous-quotients de $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$.

Démonstration. Soit $\pi \in \hat{G}$ et (π_n) convergeant vers π. Si μ est un K-type de π alors on peut supposer d'après le lemme 2.5 que μ est un K-type de π_n. Toutes les représentations unitaires irréductibles de G apparaissent comme sous-quotient d'une représentation principale $\pi_{\xi,\nu}$ où $\xi \in \hat{M}$ et $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, il existe donc une suite (non-unique) (ξ_n, ν_n) telle que π_n soit un sous-quotient de π_{ξ_n,ν_n} et cette représentation contient aussi μ comme K-type. Par réciprocité de Frobenius, on en déduit $\xi_n \subset \mu_{|M}$. Par conséquent il n'y a qu'un nombre fini de ξ_n possibles et la suite (ξ_n) s'écrit comme réunion finie de sous-suites constantes. Il suffit d'examiner ces sous-suites séparément. Supposons donc que $\xi_n = \xi$ est constante.

D'après le lemme 2.6, on déduit que ν_n converge. Supposons que $\pi \in \mathcal{I}$ (resp.$\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$). Alors le caractère infinitésimal de π est intégral. Pour n assez grand, et comme ν_n converge, on peut supposer que π_n possède le même caractère infinitésimal que π ou que celui-ci n'est pas intégral. Dans le premier cas, $\pi_n = \pi$ car les points sont fermés et qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations admissibles (donc unitaires) de caractère infinitésimal donné. Dans le deuxième cas, $\pi_n = \pi_{\xi,\nu_n}$, car les séries principales dont le caractère infinitésimal n'est pas intégral sont irréductibles. Ceci achève la démonstration. □

Pour étudier complétement la topologie de Fell, il reste à savoir quels sont les sous–quotients des séries principales généralisées $\pi_{\xi,\nu}$. Ce travail que nous rappelons dans l'appendice, a été effectué par M.W. Baldoni–Silva. En utilisant la connaissance des longueurs des séries complémentaires, nous sommes alors en mesure de montrer que les sous–quotients de $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$ peuvent être des éléments de $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, ou même de $\mathcal{C}$ ou de $\mathcal{I}$.

Cependant, pour déterminer la K–théorie de $C^*(G)$, nous aurons seulement besoin du résultat suivant de théorie semi–simple.

Proposition 2.13. *[29, proposition 8.21] Si $\pi = J_{\xi',\nu'}$ est un point adhérent à $(\pi_{\xi,\nu})$ avec $\xi' \neq \xi$, alors $\nu(\xi) > \nu'$.*

Nous sommes maintenant prêt à énoncer et à démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.14. *Le morphisme $p = \lambda \oplus (\oplus_{\pi\in\mathcal{I}} \mathrm{ev}_\pi)$*

$$C^*(G) \xrightarrow{p} C^*_r(G) \oplus \left(\underset{\pi\in\mathcal{I}}{\oplus} \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi) \right)$$

induit un isomorphisme en K-théorie.

Rappelons [19] que les idéaux fermés d'une C^*–algèbre A sont en bijection avec les ouverts du spectre de cette C^*–algèbre. Cette correspondance associe à un idéal fermé I de A l'ensemble des représentations irréductibles π de A telles que $\pi|_I \neq 0$. De même les quotients de A par un idéal fermé correspondent aux fermés du spectre de A. L'ouvert correspondant à $\operatorname{Ker} p$ est

$$(\operatorname{Ker} p)\widehat{} = \mathcal{C} \cup \mathcal{B}\,.$$

Remarquons que p est bien défini car l'ensemble $\mathcal{I}$ des « séries isolées » est fermé et discret dans $\hat{G}$, d'après le théorème 2.12.

En considérant la suite exacte à six termes associée en K–théorie à la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} p \to C^*(G) \xrightarrow{p} C^*_r(G) \oplus \left(\bigoplus_{\pi\in\mathcal{I}} \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)\right) \to 0\,,$$

nous voyons qu'il suffit de montrer que $K_*(\operatorname{Ker} p) = 0$.

Lemme 2.15. *L'ensemble*

$$\{\nu > 0; \exists \xi \in \hat{M},\ \pi_{\xi,\nu} \textit{réductible} \ \ \textit{et}\, J_{\xi,\nu} \in \mathcal{C} \cup \mathcal{B}\}$$

est fini. Soit $\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ *cet ensemble avec*

$$\nu_1 < \cdots < \nu_k\,,$$

et posons $\nu_0 = 0$.

Démonstration. Si $\pi_{\xi,\nu}$ est réductible alors $\Lambda_{\xi,\nu} = \sum a_i e_i$ est intégral, ce qui se produit si et seulement si $a_i \in \mathbb{Z}$. D'autre part,

$$\begin{cases} a_1 = c + b + 1/2 \\ a_2 = c - b - 1/2 \\ a_i = b_i + n - i + 2,\ i = 3, \dots, n+1\,. \end{cases}$$

Ceci implique $c \in 1/2\mathbb{N}$. D'autre part si $J_{\xi,\nu}$ est unitaire, $c \leq \delta_{\mathfrak{a}} = n + 1/2$, où $\delta_{\mathfrak{a}}$ est la demi–somme des racines positives de $\Phi_{\mathfrak{a}}$. □

Définition 2.16. *Pour* $l = 0, \dots, k$ *posons*

$$\hat{G}_l = \{\pi = J_{\xi,\nu} \in \mathcal{C} \cup \mathcal{B},\ \nu > \nu_l\}\,.$$

On a bien sûr $\hat{G}_0 = \mathcal{C} \cup \mathcal{B}$ et $\hat{G}_k = \varnothing$.

Proposition 2.17. *1.* $(\operatorname{Ker} p)\widehat{} = \hat{G}_0 \supset \cdots \supset \hat{G}_k = \varnothing$.

2. $\hat{G}_l$ *est ouvert dans* $\hat{G}_0$.

3. Pour $\xi \in \hat{M}$ *donné et* $l < k$*, posons*

$$\hat{G}_l(\xi) = \{\pi = J_{\xi,\nu} \in \mathcal{CB}(\xi)\,;\, \nu_l < \nu \leq \nu_{l+1}\}\,,$$

où $\mathcal{CB}(\xi) = \{J_{\xi,\nu}\,;\, 0 < \nu \leq \nu(\xi)\}$*. Alors* $\hat{G}_l \setminus \hat{G}_{l+1} = \sqcup \hat{G}_l(\xi)$ *et* $\hat{G}_l(\xi)$ *est ouvert et fermé dans* $\hat{G}_l \setminus \hat{G}_{l+1}$.

Démonstration. La première assertion est évidente. La deuxième assertion et le début de la troisième sont des conséquences immédiates de la proposition 2.13. Il reste à montrer que $\hat{G}_l(\xi)$ est fermé dans $\hat{G}_l \setminus \hat{G}_{l+1}$. Soit (π_n) une suite convergeant vers $\pi = J_{\xi,\nu} \in \hat{G}_l(\xi)$. Le même raisonnement que dans le théorème 2.12 montre que l'on peut supposer que $\pi_n = J_{\xi',\nu_n}$ et ν_n converge vers ν si $\xi' = \xi$, et vers $\nu(\xi')$ sinon. Mais toujours d'après la remarque 2.13, on doit avoir $\nu(\xi') \geq \nu_{l+1}$ donc si $\pi_n \in \hat{G}_l \setminus \hat{G}_{l+1}$ on doit avoir $\pi_n = \pi_{\xi,\nu_n} \in \hat{G}_l(\xi)$. □

Soit $C_l^*(G)$ l'idéal fermé de $\mathrm{Ker}\, p$ associé à l'ouvert $\hat{G}_l$. Nous obtenons une suite décroissante d'idéaux de $\mathrm{Ker}\, p$,

$$\mathrm{Ker}\, p = C_0^*(G) \supset \cdots \supset C_k^*(G) = 0\,.$$

Remarquons que $K_*(C_k^*(G)) = 0$. Si l'on parvient à montrer que, pour tout $l = 0, \ldots, k-1$ $K_*(C_l^*(G)/C_{l+1}^*(G)) = 0$, nous pourrons conclure, en utilisant la suite exacte à six termes en K–théorie, que l'inclusion $C_{l+1}^*(G) \subset C_l^*(G)$ induit un isomorphisme en K–théorie. Nous aurons donc

$$K_*(\mathrm{Ker} p) = K_*(C_0^*(G)) = \cdots = K_*(C_k^*(G)) = 0\,.$$

Pour $\xi \in \hat{M}$, soit $A_{l,\xi}$ l'idéal de $C_l^*(G)/C_{l+1}^*(G)$ associé à l'ouvert $\hat{G}_l(\xi)$. D'après la proposition précédente, $C_l^*(G)/C_{l+1}^*(G) = \oplus A_{l,\xi}$. Il suffit donc de montrer que $A_{l,\xi}$ est nul en K–théorie.

Considérons le noyau du morphisme d'évaluation

$$\mathrm{ev}_{J_{\xi,\nu_{l+1}}} : A_{l,\xi} \to \mathcal{K}(\mathcal{H})\,.$$

Le théorème suivant détermine ce noyau.

Théorème 2.18. *[19, théorème 10.9.6] Soient X un espace localement compact à base dénombrable de dimension finie tel que $H^3(X;\mathbb{Z}) = 0$ et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension dénombrable. Soit A la C^*-algèbre des sections continues nulles à l'infini du champ de C^*-algèbres élémentaires défini par le champ constant associé à $\mathcal{H}$. Alors toute C^*-algèbre de spectre X à trace continue, homogène de degré dénombrable (c'est–à–dire dont les représentations irréductibles agissent toutes sur un espace de Hilbert de dimension infinie dénombrable) est isomorphe à A.*

Proposition 2.19. $K_*(A_{l,\xi}) = 0$

Démonstration. D'après le théorème 2.18 appliqué à $\mathrm{Ker}\, \mathrm{ev}_{J_{\xi,\nu_{l+1}}}$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_0(]\nu_l, \nu_{l+1}[) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \longrightarrow A_{l,\xi} \xrightarrow{\mathrm{ev}_\pi} \mathcal{K}(\mathcal{H}) \longrightarrow 0\,,$$

où $\pi = J_{\xi,\nu_{l+1}}$. Comme la multiplicité de $J_{\xi,\nu_{l+1}}$ dans $\pi_{\xi,\nu_{l+1}}$ est égale à 1, le théorème [18, VI.3.8] (voir le théorème A.5) implique que $A_{l,\xi}$ est Morita–équivalente à l'algèbre A des fonctions $f \in C_0(]\nu_l, \nu_{l+1}], M_2(\mathbb{C}))$ telles que $f(\nu_{l+1}) = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. La suite exacte à six termes s'écrit alors

$$0 \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \longrightarrow K_1(A) \longrightarrow 0\,.$$

Il suffit donc de montrer que δ est un isomorphisme. Soit $f \in C_0(]\nu_l, \nu_{l+1}])$ croissante positive telle que $f(\nu_{l+1}) = 1$. Alors $\delta[1]$ est la classe dans $K_1(C_0(]\nu_l, \nu_{l+1}])$ de $t \mapsto \exp(2i\pi f(t))$. Donc $\delta[1] = 1$ Finalement, δ est bien un isomorphisme. □

Ceci achève la démonstration du théorème 2.14.

Chapitre 3

Image de l'induction de Dirac pour $\mathrm{Sp}(n,1)$

Dans ce chapitre nous décrivons l'image de

$$\mu\colon R(K) \longrightarrow K_0(C^*(G))\,.$$

Nous calculons d'abord l'image de μ_r dans $K_0(C_r^*(G))$ en fonction de générateurs donnés par les séries discrètes et des limites de séries discrètes. Comme nous l'avons rappelé, nous savons que μ_r est un isomorphisme. Ce travail nous sera cependant nécessaire pour donner l'image de μ en fonction des générateurs de $K_0(C^*(G))$ que nous avons obtenus précédemment.

Tout d'abord, remarquons que l'action de K sur $\mathrm{SO}(\mathfrak{p})$ est donnée pour $(m,q) \in \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1)$ et $v \in \mathfrak{p}$ par

$$(m,q).v = mv\overline{q}\,,$$

et cette action est bien définie car l'action à gauche de $\mathrm{Sp}(n)$ et à droite de $\mathrm{Sp}(1)$ sur $\mathfrak{p}$ commutent. Par conséquent le noyau du morphisme $K \to \mathrm{SO}(\mathfrak{p})$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et donc on a bien un relèvement $K \to \mathrm{Spin}(\mathfrak{p})$.

Nous choisissons maintenant une décomposition de $S = S^+ \oplus S^-$, qui sera fixée dans tout ce chapitre. Soit $(e_1, \dots, e_{2m})$ une base orthonormée d'un espace euclidien V de dimension paire. L'élément $\omega = i^m e_1 \cdot \ldots \cdot e_{2m} \in \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}} V$ vérifie $\omega^2 = 1$. Par conséquent, tout module E sur $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}} V$ admet une décomposition en somme directe $E = E^+ \oplus E^-$ associée aux valeurs propres 1 et -1 de ω. Il est facile de voir que cette décomposition ne dépend que de l'orientation de la base choisie. En particulier, on obtient une décomposition $S = S^+ \oplus S^-$, et ces représentations sont irréductibles sous l'action de $\mathrm{Spin}(2m)$.

Revenons maintenant au cas d'un groupe de Lie G semi–simple connexe linéaire. Supposons que G possède un sous–groupe de Cartan compact T. Soit $K \supset T$ un sous–groupe compact maximal, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan. Choisissons un système de racines positives Δ^+ pour le système $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ l'ensemble des racines non–compactes positives. Alors, il est possible de choisir (d'après [29, Chapitre VI, Exercice 5]) des vecteurs propres E_{α_i} et $E_{-\alpha_i}$ tels que

$$e_{2i-1} = E_{\alpha_i} + E_{-\alpha_i} \quad \text{et} \quad e_{2i} = i(E_{\alpha_i} - E_{-\alpha_i})$$

soient dans $\mathfrak{g}$ (et donc dans $\mathfrak{p}$). Alors, après normalisation si nécessaire, la famille $(e_1, \ldots, e_{2m})$ est une base orthonormale de $\mathfrak{p}$. Nous obtenons ainsi une décomposition de S qui ne dépend pas de l'ordre choisi sur les α_i, et est donc définie par la donnée de Δ^+.

Voyons maintenant l'effet d'un changement du système de racines positives. Soit $\tilde{\Delta}^+$ un autre système de racines positives. Alors il existe un unique élément w du groupe de Weyl tel que $w\tilde{\Delta}^+ = \Delta^+$. Notons $S = \tilde{S}^+ \oplus \tilde{S}^-$ la décomposition associée à $\tilde{\Delta}^+$. Alors,

$$\tilde{S}^{\pm} = \begin{cases} S^{\pm} & \text{si } \det w = 1\,, \\ S^{\mp} & \text{si } \det w = -1\,. \end{cases}$$

Cela se démontre facilement par récurrence sur $\mathrm{card}(\tilde{\Delta}^+ \cap \Delta^+)$.

Choix. Pour $G = \mathrm{Sp}(n,1)$, la décomposition de S que nous choisissons est associée au système Δ^+ défini à la page 14.

Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire irréductible de G et $\mathcal{H}_\pi^{(K)}$ l'espace des vecteurs K-finis (qui sont analytiques). On désignera encore par π l'action infinitésimal de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathfrak{z}$ sur $\mathcal{H}_\pi^{(K)}$.

Proposition 3.1. *Soit (μ, V) une représentation irréductible de K. On a un isomorphisme (d'espaces hermitiens)*

$$\mathcal{E}_V \otimes_\pi H \simeq (S \otimes V \otimes \mathcal{H}_\pi)^K = \mathrm{Hom}_K(S \otimes V, \mathcal{H}_\pi^{(K)})\,.$$

L'opérateur $D_V \otimes_\pi 1$ noté $\pi(D_V)$ est donnée par

$$\pi(D_V) = \sum \gamma(x_i) \otimes 1 \otimes \pi(x_i)\,.$$

Si π est une représentation unitaire de G, l'évaluation de l'indice $\mathrm{Ind}_a D_V$ en π est

$$\pi_*(\mathrm{Ind}_a D_V) = \dim \mathrm{Hom}_K(S^+ \otimes V\,,\, \mathcal{H}_\pi) - \dim \mathrm{Hom}_K(S^- \otimes V\,,\, \mathcal{H}_\pi) = m(\pi, \mu)\,.$$

Nous aurons également besoin du lemme suivant, dû à Parthasarathy.

Lemme 3.2. *Soit μ, V une représentation irréductible de K. Pour toute représentation $\pi \in \hat{G}$, on a*

$$\pi(D_V)^2 = -\pi(\Omega) + c_\mu\,,$$

où Ω est l'opérateur de Casimir et $c_\mu = |\mu + \rho_c|^2 - |\rho|^2$.

En particulier,

$$\pi_*(\mathrm{Ind}_a D_V) \neq 0 \Longrightarrow \chi_\pi = \chi_{\mu+\rho_c}\,.$$

3.1 Image de μ_r

Notons $\hat{M}_{\mathrm{red}}$ l'ensemble des représentations irréductibles ξ de M, telles que $\pi_{\xi,0}$ est réductible. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.

Théorème 3.3. *On a un isomorphisme*

$$C_r^*(G) \simeq \Big(\bigoplus_{\pi \in \mathcal{D}} \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)\Big) \oplus \Big(\oplus_{\xi \notin \hat{M}_{red}} A_\xi\Big) \oplus \Big(\oplus_{\xi \in \hat{M}_{red}} B_\xi\Big)\,,$$

où

$$\begin{aligned} A_\xi &= C_0(i\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) , \\ B_\xi &= \{f \in C_0(i\mathbb{R}^+, M_2(\mathbb{C})) \, ; \, f(0) = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)\} \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) . \end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons que la topologie sur $\hat{G}_r$ est la topologie induite par celle de $\hat{G}$. D'après le théorème 2.12, les composantes connexes de $\hat{G}_r$ sont des points isolés correspondant aux séries discrètes, des demi–droites correspondant aux $\xi \notin \hat{M}_{\rm red}$, et des demi–droites à deux bouts correspondant aux $\xi \in \hat{M}_{\rm red}$. Le résultat est alors une conséquence des théorèmes 2.18 et [18, théorème VI.3.8] (voir théorème A.5). $\square$

Lemme 3.4. *1. $K_0(B_\xi) = \mathbb{Z}$ et $K_1(B_\xi) = 0$.*
2. $K_0(C_r^*(G))$ est un $\mathbb{Z}$–module libre dont une famille de générateurs est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{D} \cup \hat{M}_{red}$.

Démonstration. La C^*–algèbre B_ξ est Morita–équivalente à l'algèbre

$$A = \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}^+ \, , \, M_2(\mathbb{C})) \, ; \, f(0) = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \right\} .$$

On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^+) \otimes M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{C}^2 \longrightarrow 0 .$$

D'où en K–théorie

$$0 \to K_0(A) \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \to K_1(A) \to 0 .$$

Décrivons δ. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^+$ positive décroissante valant 1 en 0. Alors la classe de $t \mapsto \begin{pmatrix} \exp(2i\pi f(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $K_1(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^+)} \otimes M_2(\mathbb{C}))$ est l'image par δ du projecteur $(1,0) \in \mathbb{C}^2$. On décrit de même l'image de $(0,1)$ pour déduire que $\delta(n_1, n_2) = n_1 + n_2$. $\square$

Soit $\xi \in \hat{M}_{\rm red}$. Soient $\pi^\pm$ les sous–représentations de $\pi_{\xi,0}$. Alors ${\rm ev}_{\pi^\pm} : B_\xi \to \mathcal{K}(\mathcal{H}_{\pi^\pm})$ induit un isomorphisme en K–théorie. Nous noterons $[\pi^\pm]$ l'image réciproque par cet isomorphisme du générateur de $K_0(\mathcal{K}(\mathcal{H}_{\pi^\pm}))$. De même, si $\pi \in \mathcal{D}$ est une série discrète on note $[\pi]$ l'image réciproque dans $K_0(C_r^*(G))$ du générateur de $K_0(\mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi))$ par ${\rm ev}_{\pi *}$.

Soit $\mu \in \hat{K}$ et notons ρ_c la demi–somme des racines compactes positives dans Δ^+. Soit $\chi = \chi_{\mu+\rho_c}$. Si χ est régulier, notons $\pi_i(\chi)$, $i = 0, \ldots, n$ les séries discrètes de caractère infinitésimal χ, en accord avec les notations du paragraphe A.2. Si χ est singulier, il existe deux limites de séries discrètes de caractère infinitésimal χ, notés $\pi^+(\chi)$ et $\pi^-(\chi)$, et le choix des symboles $+$ et $-$ est encore défini dans le paragraphe A.2.

Théorème 3.5. *Soit $\mu \in \hat{K}$ et $\chi = \chi_{\mu+\rho_c}$. Si χ est régulier, il existe un unique $i \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $\mu + \rho_c \in \tilde{C}_i$. Alors dans $K_0(C_r^*(G))$,*

$$Ind_a \, D_\mu = (-1)^{n-i} [\pi_i(\chi)] .$$

Si χ est singulier, soit $i = i(\chi)$ l'entier défini page 60. Alors dans $K_0(C_r^*(G))$,

$$Ind_a \, D_\mu = (-1)^{n-i+1} [\pi^+(\chi)] .$$

D'après le lemme de Parthasarathy, les représentations irréductibles tempérées π de G pour lesquelles $\pi(D_\mu)$ possède un noyau non–nul vérifient $\chi_\pi = \chi$. Si χ est régulier, il suffit donc d'évaluer D_μ sur les séries discrètes $\pi_j(\chi)$. D'après le théorème d'Atiyah–Schmid [1], il existe une unique série discrète π telle que

$$\pi_* \operatorname{Ind}_a D_\mu = \dim \operatorname{Hom}_K(S^+ \otimes V_\mu, \mathcal{H}_\pi) - \dim \operatorname{Hom}_K(S^- \otimes V_\mu, \mathcal{H}_\pi) \neq 0\,,$$

et cette représentation est la série discrète de paramètre de Harish–Chandra $\mu + \rho_c$. De plus, pour $\pi = \pi_{\mu+\rho_c}$, $\pi_* \operatorname{Ind}_a D_\mu = 1$ lorsque le système de racines choisi pour la décomposition de S est tel que $\mu + \rho_c$ soit dominant. La conclusion dans le cas régulier en résulte.

Toujours d'après le lemme de Parthasarathy, lorsque χ est singulier, il suffit d'évaluer sur la composante B_ξ de $C_r^*(G)$ telle que $\pi_{\xi,0}$ est somme des limites de séries discrètes $\pi^+(\chi)$ et $\pi^-(\chi)$. D'après la proposition 3.11 il reste donc à calculer le caractère d'une limite de séries discrètes. Rappelons que si λ est une forme sur $\mathfrak{t}$, telle que $\lambda \in \tilde{C}_j \cap \tilde{C}_{j+1}$, la limite de séries discrètes $\pi^+(\lambda)$ (resp. $\pi^-(\lambda)$) est construite grace au foncteur de translation de Zuckermann en choisissant le système de racines positives pour $\Delta(\mathfrak{t}_\mathbb{C}, \mathfrak{g}_\mathbb{C})$ correspondant à la chambre de Weyl $\tilde{C}_{j+1}$ (resp. $\tilde{C}_j$). Autrement dit :

$$\pi^+(\lambda) = \Psi_\lambda^{\lambda'}(\pi_{\lambda'})\;,$$

où λ' est intégral régulier relativement à C_{j+1} (resp. C_j), et $\pi_{\lambda'}$ est la série discrète de paramètre de Harish-Chandra λ', c'est-à-dire l'unique série discrète π telle que $\pi_*(\mathrm{Ind_a}(D^+_{\mu'}) \neq 0$ où $\mu' = \lambda' - \rho_c$. D'une part, on sait [29, théorème 12.7] que le caractère de la série discrète π' de paramètre λ' vérifie $\Delta_T \theta_{\pi'}|_{T'} = \sum_{w\in W_K} \det w\, e^{w\lambda'}$ En utilisant alors [29, proposition 10.44] sur l'effet du foncteur de Zuckermann sur les caractères, on obtient comme dans le cas des séries discrètes, $\Delta_T \theta_\pi|_{T'} = \sum_{w\in W_K} \det w\, e^{w\lambda}$. Rappelons que ces formules dépendent du choix du système positif tel que λ' soit dominant. Avec la correction nécessaire, d'après la proposition 3.11 nous obtenons donc

Proposition 3.6. *Soit $\lambda = \mu + \rho_c$ et j tel que $\lambda \in \tilde{C}_j \cap \tilde{C}_{j+1}$. Alors*

$$\pi_*\, \mathit{Ind}_a\, D_\mu = \begin{cases} (-1)^{n-j+1} & \text{si} \quad \pi = \pi^+(\chi) \\ (-1)^{n-j} & \text{si} \quad \pi = \pi^-(\chi) \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Terminons en remarquant que si χ est donné, et γ est le paramètre de Langlands tel que $\pi(\gamma)$ est somme de deux limites de séries discrètes de caractère infinitésimal χ, on a avec le theorème A.10 cas I, $\tau\gamma \in \tilde{C}_{i(\chi)-2} \cap \tilde{C}_{i(\chi)-1}$.

3.2 Image de μ

Soient $\mu \in \hat{K}$ et $\chi = \chi_{\mu+\rho_c}$. Soit $\tilde{\gamma}$ comme dans la définition A.18 et tel que $\chi_{\tilde{\gamma}} = \chi$. Posons pour $i = 2, \dots, n$, $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$. Soit $0 \leq p(\chi) \leq n-1$ le plus petit entier tel que

$$\langle \tilde{\gamma} - \delta; \alpha \rangle = 0 \quad \forall\, \alpha = \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_{n+1}\,.$$

Lemme 3.7. *Si χ est régulier, les séries isolées de caractère infinitésimal χ sont les quotients de Langlands $J_{i,i+1}(\chi)$ où $p(\chi) \leq i \leq n-2$, ou la représentation triviale.*

Si χ est singulier, il existe au plus une série isolée de caractère infinitésimal χ. Cela est le cas si et seulement si $i(\chi) \geq p(\chi)$. Notons $J(\chi)$ cette série isolée si elle existe.

Démonstration. Nous nous réferrons à certains résultats contenus dans l'appendice pour montrer ce lemme. Le cas régulier est contenu dans la proposition A.19. Dans le cas singulier, d'après le lemme A.20, si $\gamma = \sum a_i e_i$ est le paramètre de Langlands d'une série isolée de caractère infinitésimal χ, on doit avoir

$$a_{i(\chi)+1} = a_1 > a_2 > a_{i(\chi)+2} .$$

Dans les notations de la définition A.18, on a $p = i(\chi) - 1$ et $q = i(\chi)$. La conclusion résulte alors de la proposition A.19. □

Théorème 3.8. *Soit $\mu \in \hat{K}$ tel que $\chi = \chi_{\mu+\rho_c}$ Soit i comme dans le theorème 3.5.*

Si χ est régulier, on a dans $K_0(C^*G)$,

$$\mathrm{Ind}_a(D_\mu^+) = (-1)^{n-i} \left([\pi_i(\chi)] + \sum_{j=p(\chi)}^{\min(i,n-2)} [J_j(\chi)] \right) .$$

Si χ est singulier,

$$\mathrm{Ind}_a(D_\mu^+) = \begin{cases} (-1)^{n-i+1} \left([\pi^+(\chi)] + [J(\chi)] \right) & si \quad i \geq p(\chi) , \\ (-1)^{n-i+1} \left([\pi^+(\chi)] \right) & sinon. \end{cases}$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de ce théorème. Nous nous référerons dans cette preuve à des résultats de Baldoni–Silva [3],[4]. Ces résultats sont rappelés au début du deuxième appendice. Comme nous avons déja calculé l'image de l'induction de Dirac, il reste à évaluer sur les séries isolées. Par conséquent, pour $\mu \in \hat{K}$ et π une série isolée, on cherche à calculer :

$$m(\pi, \mu) = \dim \mathrm{Hom}_K(V_\mu \otimes S^+, H_\pi^{(K)}) - \dim \mathrm{Hom}_K(V_\mu \otimes S^-, H_\pi^{(K)}) .$$

Ceci determinera l'égalité

$$\mathrm{Ind}_a D_\mu^+ = \sum_\pi m(\pi, \mu)[\pi] .$$

Commençons par quelques généralités sur les caractères des représentations des groupes semi–simples. Soit G un groupe de Lie linéaire connexe semi–simple et K un sous–groupe compact maximal. Supposons que K possède un sous–groupe de Cartan T qui soit un sous–groupe de Cartan dans G. Soit Φ le système de racine de la paire $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$. Nous choisissons un système de racines positives Φ^+ et nous notons Φ_c^+ (resp.Φ_n^+) l'ensemble des racines positives compactes (resp. non–compactes). Si V est une représentation unitaire de K, on note $\mathrm{ch}(V)$ son caractère. Supposons pour le moment que π est admissible et écrivons

$$\pi|_K = \sum_{\rho \in \hat{K}} n_\rho V_\rho .$$

Lemme 3.9. *[29, lemme 12.8] La série $\sum n_\rho \mathrm{ch}(\rho)$ converge vers une distribution de K. On la note $\mathrm{ch}(\pi)$.*

Lemme 3.10. *Si $\mathrm{ch}(\pi)(\mathrm{ch}(S^+) - \mathrm{ch}(S^-)) = \sum a(\pi, \mu)\mathrm{ch}(\mu)$, alors*

$$m(\pi, \mu) = (-1)^q a(\pi, \mu) \text{ avec } q = 1/2\dim(G/K) = 2n .$$

En effet, les représentations S^+ et S^- sont autoadjointes lorsque q est pair, et adjointes l'une de l'autre lorsque q est impair.

Rappelons que θ_π désigne la fonction sur G' qui définit le caractère de π. On a alors $\mathrm{ch}(\pi) = \theta_\pi|_{G'\cap K}$. Notons $T' = G' \cap T$. On a

$$(\mathrm{ch}(S^+) - \mathrm{ch}(S^-))|_{T'} = \prod_{\beta\in\Phi_n^+} (e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}),$$

et d'après la formule de Weyl

$$\Delta_T^K \mathrm{ch}\mu = \sum_{w\in W_K} \varepsilon(w) e^{w(\mu+\rho_c)},$$

où $\Delta_T^K = \prod_{\beta\in\Phi_c^+}(e^{\beta/2} - e^{-\beta/2})$. D'où, en posant $\Delta_T = \prod_{\beta\in\Phi^+}(e^{\beta/2} - e^{-\beta/2})$,

$$\begin{aligned}\Delta_T\theta_\pi|_{T'} &= (\mathrm{ch}(S^+) - \mathrm{ch}(S^-))\Delta_T^K\theta_\pi|_{T'}\\ &= \textstyle\sum_\mu a(\pi,\mu)\Delta_T^K \mathrm{ch}(\mu)\\ &= \textstyle\sum_{\mu,w} \varepsilon(w) a(\pi,\mu) e^{w(\mu+\rho_c)}\end{aligned}$$

En particulier,

Proposition 3.11. *Pour calculer $m(\pi,\mu)$ il suffit de connaître le coefficient de $e^{\mu+\rho_c}$ dans $\Delta_T\theta_\pi|_{T'}$.*

Revenons maintenant au groupe $G = \mathrm{Sp}(n,1)$. La proposition suivante est un corollaire immédiat du théorème 2.8.

Proposition 3.12. *Si $\pi = \pi_{\xi,\nu}$ est une série principale, alors $\theta_\pi|_{T'} = 0$.*

On peut enfin étudier le cas où π est une série isolée.

Lemme 3.13. *[29, lemme 12.9] Notons ρ_n^i la demi-somme des racines non-compactes positives du système de racines positives C_i (défini page 58), pour $0 \le i \le n$.*

$$S = \bigoplus_{i=0}^{n} V_{\rho_n^i} \quad ; \quad S^+ = \bigoplus_{i\,\mathrm{pair}} V_{\rho_n^{n-i}} \quad ; \quad S^- = \bigoplus_{i\,\mathrm{impair}} V_{\rho_n^{n-i}} \quad .$$

On en déduit immédiatement,

Proposition 3.14. *Si $\pi = 1_G$ alors*

$$m(\pi,\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \rho_n^{n-i} \text{ et } i \text{ est pair,}\\ -1 & \text{si } \mu = \rho_n^{n-i} \text{ et } i \text{ est impair,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Notons $\chi = \chi_\pi$ le caractère infinitésimal de π. Il est intégral.

Rappelons que Baldoni–Silva a donné l'expression des caractères des séries principales en fonction des caractères irréductibles de G (voir les théorèmes A.7 et A.10 en appendice). Ceci permet d'écrire pour $\pi_{\xi,\nu}$ de caractère infinitésimal χ, une expression de la forme

$$\theta_{\pi_{\xi,\nu}} = \sum_{\pi\,:\,\chi_\pi=\chi} n_{\pi_{\xi,\nu},\pi}\theta_\pi\,. \tag{3.1}$$

où la somme est prise sur les représentations irréductibles admissibles. On veut en déduire une formule du type

$$\theta_\pi = \sum_{\pi_{\xi,\nu}\,:\,\chi_{\pi_{\xi,\nu}}=\chi} n'_{\pi_{\xi,\nu},\pi}\theta_{\pi_{\xi,\nu}} + \sum_{D\in\mathcal{D},\,\chi_D=\chi} n''_{D,\pi}\theta_D\,. \tag{3.2}$$

Ensuite il suffira d'appliquer la proposition 3.12 et le résultat correspondant pour les séries discrètes ou les limites de séries discrètes, pour obtenir $m(\pi,\mu)$.

Supposons d'abord que χ est régulier. Il est possible de déduire la formule 3.2 de la formule 3.1, car le graphe $G_n^{(r)}$ est sans boucle (voir la définition page 59). Le lemme suivant est un corollaire immédiat du théorème A.7.

Lemme 3.15. *Soit $k\in\{0,\dots,n-2\}$. En supprimant les points des k premières colonnes de $G_n^{(r)}$ et les arrêtes ayant pour origine un de ces points, on trouve le graphe $G_{n-k}^{(r)}$ correspondant au groupe $Sp(n-k,1)$.*

Soit i tel que $\pi = J_{i,i+1}(\chi)$ soit une « série isolée » et $D=\pi_k(\chi)$. Alors $n''_{D,\pi}$ est la différence du nombre de chemins de longueur paire menant de $(i,i+1)$ à $(k,2n+1-k)$ dans G_n et des mêmes chemins de longueur impaire. En particulier, $n_{i,i+1,k}=0$ si $i>k$. D'après le lemme précédent, ce nombre est aussi pour $i\le k$, la même différence pour les chemins menant de $(0,1)$ à $(k-i,2n+1-k+i)$ dans G_{n-i}, et le point $(0,1)$ correspond à la représentation triviale 1_G de G lorsque $\chi=0$. En appliquant la proposition 3.14 et le théorème 3.5, il vient :

Proposition 3.16. *Soit $D=\pi_k(\chi)$ et μ l'unique représentation de K telle que $m(D,\mu)\neq 0$. Alors, $\theta_\pi|_{T'}=\theta_D|_{T'}$.*

Traitons maintenant le cas singulier. Rappelons qu'il existe au plus une série isolée $\pi = J(\chi)$ de caractère infinitésimal χ et que si c'est le cas celle-ci correspond au point indexé par $i(\chi)-1$ dans la graphe $G_{n,i}^{(s)}$ défini page 62. Il n'y a qu'un seul chemin dans le graphe $G_{n,i}^{(s)}$, menant du point correspondant à la « série isolée » à $\pi^+(\chi)$ et ce chemin est de longueur $2n-2i+2$, donc est paire (voir par exemple la figure A.2,62). En menant le même raisonnement que dans le cas régulier, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 3.17. $\theta_\pi|_{T'}=\theta_{\pi^+(\chi)}|_{T'}$.

La conclusion dans le cas singulier résulte alors également du théorème 3.5.

Chapitre 4

Induction cohomologique et variétés de drapeaux

Introduction [43]

Soit $G^{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe connexe et G une forme réelle. Dans la suite, nous noterons $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie de $G^{\mathbb{C}}$. Nous ferons de même avec les autres groupes de Lie. Notons $\tau\colon X \mapsto \tau(X)$ la conjugaison correspondante. Si $\mathfrak{m}$ est un sous–espace de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{m} = \tau(\mathfrak{m})$, alors il existe un sous–espace $\mathfrak{m}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ tel que $(\mathfrak{m}_0)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}$. L'espace $\mathfrak{m}$ est alors dit être défini sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\mathfrak{m}$ est une sous–algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{m}_0$ est une sous–algèbre de $\mathfrak{g}_0$. Soit θ l'involution de Cartan, et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ la décomposition de Cartan. Notons encore θ l'extension à $G^{\mathbb{C}}$.

Définition 4.1. *Une variété de drapeaux complexe Z pour $G^{\mathbb{C}}$ est un espace homogène de la forme $G^{\mathbb{C}}/Q$ où Q est un sous–groupe parabolique de $G^{\mathbb{C}}$ c'est-à-dire que $\mathfrak{q}$ contient une sous–algèbre de Borel $\mathfrak{b}$.*

Soit Z une variété de drapeaux complexe pour $G^{\mathbb{C}}$. L'algèbre de Borel contient une sous–algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Notons $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines correspondant et Δ^+ le système positif tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Alors il existe un unique S contenu dans l'ensemble des racines simples, tel que, si $\Delta_S = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} S \cap \Delta^+$, l'algèbre parabolique

$$\mathfrak{q}_S = (\mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_S} \mathfrak{g}_\alpha) \oplus (\sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_S} \mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{l}_S \oplus \mathfrak{u}_S \,,$$

est conjuguée à $\mathfrak{q}$. En particulier, $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ avec $\mathfrak{u}$ nilpotente.

Il est possible de choisir un point base $z \in Z$ tel que l'algèbre de Lie $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_z$ de $\mathrm{Stab}_{G^{\mathbb{C}}}(z)$ contienne une sous–algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ définie sur $\mathbb{R}$. La conjugaison agit sur les racines de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ par $\tau(\alpha)\colon H \to \overline{\alpha(\tau(H))}$, pour $H \in \mathfrak{h}$. Il est également possible de choisir l'involution de Cartan θ tel que $\mathfrak{h}$ soit θ–stable. Alors $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0'$ avec $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{a}_0' \subset \mathfrak{p}_0$.

Théorème et Définition 4.2. *Soit $z \in Z$ comme ci-dessus et $D = G(z)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *$D \subset Z$ est une G–orbite ouverte.*
2. *$\Delta\mathfrak{u} \cap \tau(\Delta(\mathfrak{u})) = \varnothing$.*
3. *$\mathfrak{q} + \tau(\mathfrak{q}) = \mathfrak{g}$.*
4. *$\mathfrak{h}_0$ est maximalement compact dans $\mathfrak{g}_0$, c'est-à-dire $\mathfrak{t}_0$ est une sous–algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}_0$ et il existe un système positif Δ^+ tel que $\tau(\Delta^+) = -\Delta^+$ et $\Delta(\mathfrak{u}) \subset \Delta^+$.*

Soit $D = G(z) \subset Z$ une orbite ouverte sous l'action de G. En particulier D est une sous variété complexe de Z. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *D possède une forme volume G–invariante.*
2. *$\mathfrak{q} \cap \tau(\mathfrak{q})$ est réductive.*
3. *$\mathfrak{q} \cap \tau(\mathfrak{q}) = \mathfrak{l}$.*
4. *$\tau(\Delta(\mathfrak{u})) = -\Delta(\mathfrak{u})$.*
5. *Il existe $\lambda_0 \in i\mathfrak{t}_0^*$ tel que*

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) &= \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\,;\, \langle\lambda_0;\alpha\rangle = 0\}\,, \\ \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}) &= \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\,;\, \langle\lambda_0;\alpha\rangle > 0\}\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Une G–orbite ouverte $D \subset Z$ qui possède une forme volume G–invariante est appelée une variété de drapeaux pour G.

Soit D une variété de drapeaux pour G. Il est alors possible de choisir un point base z tel que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_z$ soit θ–stable. Alors, $L \cap K = K(z)$ est une sous-variété complexe compacte maximale de D, de dimension complexe

$$s \colon = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})\,.$$

Lemme 4.3. 1. *Soit (V,ρ) un $(L,\mathfrak{q})$–module de dimension finie. Alors (V,ρ) définit une représentation holomorphe de Q. On obtient ainsi un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} G \times_L V & \longrightarrow & G^{\mathbb{C}} \times_Q V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/L & \longrightarrow & G^{\mathbb{C}}/Q \end{array}$$

qui fait de $G \times_L V$ un fibré holomorphe sur G/L.
2. *Soit $U \subset D$ un ouvert. Notons $\mathcal{O}_V$ le faisceau des germes de sections holomorphes de $G \times_L V$. Soit $p\colon G \to G/L$ la projection. Pour $X = X_1 + iX_2 \in \mathfrak{g}$, notons $r(X)\colon = r(X_1) + ir(X_2)$ le champ de vecteurs complexes invariants à droite défini par X. Alors*

$$\mathcal{O}_V(U) = \left\{ \phi\colon p^{-1}(U) \to V\,;\; \begin{array}{l} \phi(gl) = \rho(l)^{-1}\phi(g) \\ \forall X \in \mathfrak{u}\,,\, r(X)\phi + \rho(X)\phi = 0 \end{array} \right\}.$$

En particulier, l'espace tangent antiholomorphe à G/L en z s'identifie à $\mathfrak{u}$.

4.1 Induction cohomologique

Définitions

Conservons les notations de l'introduction. Considérons le fibré holomorphe

$$\mathcal{E}_V = \wedge^* T^{0,1} G/L \otimes G \times_L V\,.$$

Soit $\overline{\partial}_V$ l'opérateur de Dolbeault des formes à valeurs dans ce fibré. L'espace des sections C^∞ de $\mathcal{E}_V$ s'identifie à

$$\Gamma^\infty(\mathcal{E}_V) \simeq (C^\infty(G) \otimes \wedge^* \mathfrak{u}^* \otimes V)^L \simeq \mathrm{Hom}_L(\wedge^* \mathfrak{u}\,;\, C^\infty(G) \otimes V)\,.$$

Pour $f \in \mathrm{Hom}_L(\wedge^*\mathfrak{u}\,;\, C^\infty(G) \otimes V)$, l'opérateur $\overline{\partial}_V$ est donné par

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_V f(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+1}) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i (r \otimes \rho)(X_i) f(X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_i \wedge \ldots \wedge X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{1 \le k < l \le p+1} (-1)^{k+l} f([X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_k \wedge \ldots \wedge \hat{X}_l \wedge \ldots \wedge X_{p+1})\,.\end{aligned}$$

Pour que les espaces de cohomologie

$$H^i(G/L; \overline{\partial}_V) = \frac{\ker(\overline{\partial}_V \colon \Gamma(\mathcal{E}_V^i) \to \Gamma(\mathcal{E}_V^{i+1}))}{\mathrm{Im}(\overline{\partial}_V \colon \Gamma(\mathcal{E}_V^{i-1}) \to \Gamma(\mathcal{E}_V^i))}$$

de ce complexe différentiel soient des représentations continues de G sur des espaces de Fréchet lorsque $\Gamma^\infty(\mathcal{E}_V)$ est muni de la topologie C^∞ et H^i de la topologie quotient, il faut que $\mathrm{Im}(\overline{\partial}_V)$ soit fermé.

Pour contourner ce problème, Zuckermann construit un $(\mathfrak{g}, K)$–module $\mathcal{R}^i(V)$ à partir du $(\mathfrak{l}, L \cap K)$–module V, qui devrait être l'espace des vecteurs K–finis des espaces de cohomologie H^i.

Soit $V^\sharp = V \otimes \wedge^{\max}\mathfrak{u}$. Alors $V^\sharp$ est un $(\mathfrak{l}, L \cap K)$–module que l'on prolonge en un $(\mathfrak{q}, L \cap K)$–module en faisant agir $\mathfrak{u}$ trivialement. Soit Γ le foncteur qui à un $(\mathfrak{g}, L \cap K)$–module W associe le $(\mathfrak{g}, K)$–module

$\Gamma(W) =$ somme des composantes $\mathfrak{k}$–isotopes de W de dimension finie qui définissent une représentation de K.

Définition 4.4. *Les $(\mathfrak{g}, K)$–modules $\mathcal{R}^i(V)$ sont les modules*

$$\Gamma^i(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}, L\cap K}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\,;\, V^\sharp))\,,$$

où Γ^i est le i–ème foncteur dérivé de Γ. Ce procédé est appelé induction cohomologique.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire dans cette définition que V soit de dimension finie. Ce n'est pas nécessaire non plus pour la définition de la cohomologie de Dolbeault, mais les questions de topologie qui apparaissent sont encore plus délicates.

Le complexe dans le lemme suivant est le complexe de Dolbeault, mais où les coefficients C^∞ sont remplacés par des séries formelles en l'identité. C'est le premier pas vers l'identification entre l'induction cohomologique et les vecteurs K–finis de la cohomologie de Dolbeault.

Lemme 4.5. *[45] Le complexe suivant a pour cohomologie $\mathcal{R}^i(V)$.*
espace : $\Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{l})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\,;\, \wedge^i\mathfrak{u}^* \otimes V^\sharp))$,
opérateur :

$$\begin{aligned}df(u)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+1}) = \quad &\textstyle\sum(-1)^k f(X_k \cdot u)(X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_k \wedge \ldots \wedge X_{p+1}) \\ &+ \textstyle\sum(-1)^k X_k f(u)(X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_k \wedge \ldots \wedge X_{p+1}) \\ &+ \textstyle\sum(-1)^{k+l} f(u)([X_k, X_l] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_k \wedge \ldots \wedge \hat{X}_l \wedge \ldots \wedge X_{p+1})\,.\end{aligned}$$

Cas de $\mathrm{Sp}(n, 1)$

Pour faire le lien entre les séries complémentaires et « isolées » de $\mathrm{Sp}(n, 1)$ et l'induction cohomologique, nous avons besoin de savoir comment retrouver le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible admissible à partir d'un K–type minimal.

Soit G un groupe de Lie linéaire connexe semi–simple. Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que $\mathrm{Rang}(G) = \mathrm{Rang}(K)$ et que le rang réel de G est égal à 1. Soit T un sous–groupe de Cartan de G inclus dans K. Soient Δ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$, $\Delta_c \subset \Delta$ celui de $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ et Δ_c^+ un système de racines positives pour Δ_c. Soit ρ_c la demi–somme des racines compactes de Δ_c^+. Supposons en outre que $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Soit π une représentation irréductible admissible de G et μ un K–type minimal de π, identifié à son plus haut poids dans $\mathfrak{t}^*$. Choisissons un système de racines positives Δ^+ tel que $\mu + 2\rho_c$ soit dominant. Soit ρ la demi–somme des racines positives de Δ^+.

Proposition 4.6. *[40, prop 4.1] $\mu + 2\rho_c - \rho$ est dominant ou bien il existe une racine simple non–compacte β telle que*

$$\frac{2\langle \mu + 2\rho_c - \rho; \beta \rangle}{\langle \beta; \beta \rangle} = -1\,. \tag{4.2}$$

Définition 4.7. *Avec les notations de la proposition précédente, posons*

$$\overline{\lambda}(\mu) = \begin{cases} \mu + 2\rho_c - \rho & \textit{si } \mu + 2\rho_c + \rho \textit{ est dominant}, \\ \mu + 2\rho_c - \rho + \frac{1}{2}\beta & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Alors $\overline{\lambda}(\mu)$ est dominant par rapport à ϕ^+. Soit $\mathfrak{b}^0$ la sous–algèbre parabolique θ–stable de $\mathfrak{g}$ déterminée par $\overline{\lambda}(\mu)$ comme dans les équations 4.1.

Théorème 4.8. *[40],[5]*
1. *$\overline{\lambda}(\mu)$ est régulier si et seulement si π est une série discrète. Dans ce cas, π est infinitésimalement équivalente à la série discrète de paramètre de Harish–Chandra $\overline{\lambda}(\mu)$.*

Si $\overline{\lambda}(\mu)$ est singulier, $\mathfrak{b}^o$ détermine un sous–groupe parabolique $P = MAN \subsetneq G$ et une représentation irréductible $\xi(\mu)$ de M de plus haut poids $\overline{\lambda}(\mu) - \rho(\mathfrak{m})$.

2. *Supposons que $\overline{\lambda}(\mu)$ est singulier. Pour tout $\nu \in (\mathfrak{a}_0^*)_{\mathbb{C}}$, la série principale (généralisée) $\pi_{\xi(\mu),\nu}$ contient le K–type μ avec une multiplicité égale à 1. Soit $\pi_{\xi(\mu),\nu}(\mu)$ l'unique sous–quotient qui contient μ comme K–type. Il existe ν tel que π a même caractère infinitésimal que $\pi_{\xi(\mu),\nu}$. Alors, pour un tel ν, π est infinitésimalement équivalente à $\pi_{\xi(\mu),\nu}(\mu)$. De plus, $\pi_{\xi(\mu),0}$ est réductible si et seulement si $\mu + 2\rho_c - \rho$ est dominant et*

$$\langle \mu + 2\rho_c - \rho, \alpha \rangle = 0\,,\ \alpha \textit{ simple} \Rightarrow \alpha \textit{ non–compacte}\,.$$

Les sous–représentations de $\pi_{\xi(\mu),0}$ sont alors des limites de séries discrètes et toutes les limites de séries discrètes apparaissent sous cette forme, exactement une fois.

Supposons que $\mathrm{Re}\,\nu > 0$. Alors,

$$\pi \simeq \pi_{\xi(\mu),\nu}(\mu) = J_{\xi(\mu),\nu}$$

est le quotient de Langlands de la série principale $\pi_{\xi(\mu),\nu}$.

Revenons maintenant au cas $G = \mathrm{Sp}(n,1)$ et reprenons les notations du chapitre 2 pour définir $\mathfrak{t}$, Δ, et Δ_c^+ .

Soit $\mu = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \varepsilon_j \in \hat{K}$ n'étant pas le K–type minimal d'une série discrète ou le K-type minimal d'une limite de série discrète. Choisissons Δ^+ tel que $\mu + 2\rho_c$ soit dominant. D'après ce qui précède, une des deux conditions suivantes (exactement) est réalisée :

- $\mu + 2\rho_c - \rho$ est dominant et il existe α une racine simple compacte telle que $\langle \mu + 2\rho_c - \rho, \alpha \rangle = 0$;
- il existe une racine simple non–compacte β comme dans l'équation (4.2).

Soit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{b}^0$ une sous–algèbre parabolique θ–stable de $\mathfrak{g}$. Posons

$$\mu_L = \mu - 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})\,.$$

Alors, μ_L est une représentation irréductible de $L \cap K$. De plus, $P \cap L$ est un sous–groupe parabolique minimal de L,

$$P \cap L = M \cap L \cdot A \cdot N \cap L$$

est une décomposition d'Iwasawa de $P \cap L$, et $\xi(\mu_L)$ est le plus haut poids d'une représentation irréductible du groupe compact (réductif) $M \cap L$. Pour éviter toute confusion, notons les séries principales de la façon suivante :

$$\pi^G_{\xi(\mu),\nu} = \mathrm{Ind}_P^G\, \xi(\mu) \otimes e^\nu \otimes 1\,, \quad \pi^L_{\xi(\mu_L),\nu} = \mathrm{Ind}^L_{P\cap L}\, \xi(\mu_L) \otimes e^\nu \otimes 1\,,$$

et de même avec les quotients de Langlands. En particulier, $J^L_{\xi(\mu_L),\nu}$ contient le $L \cap K$–type μ_L avec une multiplicité égale à 1.

Définition 4.9. *Le K–type μ est dit L–trivial (relativement à $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$) la restriction de μ_L à la partie semi–simple de $L \cap K$ est trivial.*

Le théorème suivant permet de construire les séries complémentaires de $\mathrm{Sp}(n,1)$ à partir de séries complémentaires de sous–groupes L pour lesquels le paramètre $\overline{\lambda}(\mu_L)$ est d'un type bien particulier. Rappelons (théorème 2.4) que si μ est le K–type minimal d'une limite de série discrète, alors pour tout ν tel que $\mathrm{Re}\nu > 0$, le quotient de Langlands $J_{\xi(\mu),\nu}$ n'est pas unitarisable.

Théorème 4.10. *[5] Soit μ un K–type qui n'est pas le K–type minimal d'une série discrète ou d'une limite de série discrète. Alors il existe une sous–algèbre parabolique θ–stable $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{b}^0$, construite explicitement, telle que*

1. *Les quotients de Langlands $J^G_{\xi(\mu),\nu}$ et $J^L_{\xi(\mu_L),\nu}$ sont tous deux unitarisables ou bien tous deux non unitarisables.*
2. *Si les quotients $J^G_{\xi(\mu),\nu}$ et $J^L_{\xi(\mu_L),\nu}$ sont unitarisables, alors*

$$\mathcal{R}^i(J^L_{\xi(\mu_L),\nu}) = \begin{cases} J^G_{\xi(\mu),\nu} & si\ i = s, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

En outre, si μ vérifie la condition suivante,

$$\begin{gathered}\text{Soit } \mathfrak{q} \text{ est une sous–algèbre parabolique } \theta\text{–stable telle que } \mathfrak{q} \supset \mathfrak{b}^0. \text{ Alors,}\\ \mathfrak{l}_0 \text{ possède un facteur simple isomorphe à } \mathfrak{sp}(m,1),\ m > 1 \Rightarrow \mu \text{ n'est pas } L\text{–trivial,}\end{gathered} \tag{4.3}$$

alors exactement un des deux cas suivants est réalisé.

– *La restriction de $\xi(\mu_L)$ à $\mathfrak{m}_0 \cap [\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0]$ est la représentation triviale, ou bien*

– *$[\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0] = \mathfrak{sp}(m,1)$, $m > 1$ et $\mu_L = a\varepsilon_{n+1}$ avec $a > 0$.*

Dans les 2 cas, il existe $\nu(\mu) > 0$ tel que $J_{\xi(\mu),\nu}$ est unitarisable si et seulement si $0 < \nu \leq \nu(\mu)$.

Les K–types qui ne satisfont pas à la condition **(4.3)** *précédente sont de la forme*

$$\mu = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \varepsilon_j\,, (\mu_k \neq 0)\,, \quad 0 \leq k \leq n-2\,. \tag{4.4}$$

Soit μ un tel K–type. Alors, la restriction de $\xi(\mu_L)$ à $\mathfrak{m}_0 \cap [\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0]$ est la représentation triviale (autrement dit, la restriction de μ_L à la partie semi–simple de $L \cap K$ est la représentation triviale). De plus, $L = \mathbb{T}^k \times \mathrm{Sp}(n-k,1)$ et le quotient $J^G_{\xi(\mu),\nu}$ est unitarisable si et seulement si $0 < \nu \leq n-k-1/2$ ou $\nu = n-k+1/2$.

Remarque 4.11. *Ce théorème permet essentiellement de se ramener au cas des séries sphériques, c'est–à–dire les séries principales avec un M–paramètre trivial, qui est connu d'après [25] ou [4]. Le seul cas qui n'est pas traité de cette façon est $\mu = a\varepsilon_{n+1}$. Dans ce cas il est nécessaire de se référer à [4], car le sous–groupe L est G lui-même, et $\mu = \mu_L$ n'est pas trivial.*

Les représentations isolées apparaissent toutes comme induites cohomologiques d'une représentation unitaire de dimension 1 (de poids μ_L) d'un sous–groupes L de la forme $\mathbb{T}^k \times$ Sp$(n-k,1)$.

Nous ne donnons pas la démonstration de ce théorème, mais nous rappelons comment est construite la sous–algèbre parabolique dans chaque cas et nous identifions les sous–groupes L correspondants.

Pour cela nous aurons besoin d'identifier l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(n,1)$ avec une sous–algèbre de $\mathfrak{sp}(n+1,\mathbb{C})$, ce que nous faisons de la manière suivante. Rappelons que $\mathrm{Sp}(n,1)$ est le groupe des matrices dans $M_{n+1}(\mathbb{H})$ qui laissent invariante la forme

$$q = \sum_{i=1}^{n} d\overline{q}_i \otimes dq_i - d\overline{q}_{n+1} \otimes dq_{n+1}\,.$$

Ecrivant $\mathbb{H} = \mathbb{C} + j\mathbb{C}$ et $q_i = z_i + jz_{i+n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned} q \;\; = \;\; & \textstyle\sum_{i=1}^{n}(d\overline{z}_i \otimes dz_i + d\overline{z}_{i+n+1} \otimes dz_{i+n+1}) - (d\overline{z}_{n+1} \otimes dz_{n+1} + d\overline{z}_{2n+2} \otimes dz_{2n+2}) \\ & +j(\textstyle\sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge dz_{i+n+1} - dz_{n+1} \wedge dz_{2n+2})\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathrm{Sp}(n,1)$ peut être vu comme un sous–groupe du groupe des matrices dans $M_{2n+2}(\mathbb{C})$ qui laissent invariante la forme symplectique

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge dz_{i+n+1} - dz_{n+1} \wedge dz_{2n+2}\,,$$

et ce groupe est lui–même conjugué à $\mathrm{Sp}(n+1,\mathbb{C})$ par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1_{2n+1} & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. En effectuant ces identifications, on trouve que $\mathfrak{sp}(n,1)$ est l'ensemble des matrices dans $M_{2n+2}(\mathbb{C})$ de la forme

$$\mathfrak{sp}(n,1) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & X_1 & -\overline{M}_2 & \overline{X}_2 \\ \overline{X}_1^{\mathrm{tr}} & z_1 & \overline{X}_2^{\mathrm{tr}} & \overline{z}_2 \\ M_2 & X_2 & \overline{M}_1 & -\overline{X}_1 \\ X_2^{\mathrm{tr}} & -z_2 & -\overline{X}_1^{\mathrm{tr}} & \overline{z_1} \end{pmatrix} ,\; \begin{array}{l} M_1, M_2 \ (n,n)\text{matrices} \\ M_1 + M_1^* = 0 \\ M_2\,\text{symétrique} \\ z_1 \text{ imaginaire} \end{array} \right\} \subset \mathfrak{sp}(n+1,\mathbb{C})\,.$$

Notons (E_{ij}) la base canonique de l'espace des matrices. Les sous–espaces propres des racines de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ sont

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \mathbb{C}(E_{i,j} - E_{j+n,i+n}) & \mathfrak{g}_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = \mathbb{C}(E_{i,j+n} + E_{j,i+n}) \\ \mathfrak{g}_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \mathbb{C}(E_{i+n,j} + E_{j+n,i}) & \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} = \mathbb{C}E_{i,i+n} \\ \mathfrak{g}_{-2\varepsilon_i} = \mathbb{C}E_{i+n,i} & \end{array}$$

Venons–en maintenant à la description des sous–algèbres paraboliques. Soit $\mu = \sum \mu_i\varepsilon_i$ comme dans la condition (4.3). Alors μ_{n-1}, μ_n et μ_{n+1} ne sont pas tous nuls. On vérifie facilement que

$$\mu + 2\rho_c = \sum_{j=1}^{n}(\mu_j + 2n - 2j + 2)\varepsilon_j + (\mu_{n+1} + 2)\varepsilon_{n+1}\,.$$

Soit j tel que
$$\mu_{j-1}+2n-2j+4>\mu_{n+1}+2\geq\mu_j+2n-2j+2\,.$$
Alors $\mu+2\rho_c$ est dominant par rapport à la chambre C_{j-1}. On définit alors t_0 et t_1 comme les plus grands entiers tels que
$$\mu_{j-t_0}=\cdots=\mu_j=\cdots=\mu_{j+t_1}=y\,.$$

Remarque Le sous–groupe parabolique déterminé par $\overline{\lambda}(\mu)$ n'est pas celui qui apparaît dans la première partie. Il est ici déterminé par le choix de la racine $\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_j$. Plus précisement, le sous–groupe parabolique P est construit comme celui défini page 14, mais en partant de
$$\mathfrak{a}=\left\{X=\begin{pmatrix}0_{j-1}&0&0&0\\0&0&0&t\\0&0&0_{n-j}&0\\0&t&0&0\end{pmatrix}\;;\;t\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathfrak{p}\,.$$

Posons
$$\gamma=\sum_{k=1}^{j-t_0-1}(n-k+1)\varepsilon_k+\sum_{k=j-t_0}^{j+t_1}(n-j+t_0+1)\varepsilon_k+\sum_{k=j+t_1+1}^{n}(n-k+1)\varepsilon_k+(n-j+t_0+1)\varepsilon_{n+1}\,,$$
et soit $\mathfrak{q}$ la sous–algèbre parbolique θ–stable déterminée par γ. Il vient alors, si $y>0$,
$$\mathfrak{l}\cap\mathfrak{g}_0=\left\{\left(\begin{array}{cc}\begin{matrix}D_1&0&0&0\\0&A&0&X\\0&0&D_2&0\\0&-\overline{X}^{\mathrm{tr}}&0&z\end{matrix}&0\\0&\begin{matrix}-D_1&0&0&0\\0&-A^{\mathrm{tr}}&0&-\overline{X}\\0&0&-D_2&0\\0&-X^{\mathrm{tr}}&0&-z\end{matrix}\end{array}\right)\;;\;\begin{array}{l}D_1,D_2\text{ diagonales imaginaires}\\D_1\text{ de taille }(j-t_0-1)\\D_2\text{ de taille }(n-j-t_1)\\A\text{ antihermitienne de taille}\\\quad(t_0+t_1+1)\times(t_0+t_1+1)\\z\text{ imaginaire}\end{array}\right\}.$$

Nous avons donc un isomorphisme d'algèbres de Lie
$$\begin{array}{ccccc}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{g}_0&\xrightarrow{\sim}&\mathfrak{u}(t_0+t_1+1,1)&\oplus&(i\mathbb{R})^{n-t_0-t_1-1}\\(D_1,A,,X,D_2,z)&\longmapsto&\left(\begin{pmatrix}A&X\\-\overline{X}^{\mathrm{tr}}&z\end{pmatrix}\right.&,&\left.(D_1,D_2)\right)\end{array}.$$

Par conséquent, $L\simeq\mathrm{U}(t_0+t_1+1,1)\times\mathbb{T}^{n-t_0-t_1-1}$.

Si $y=0$, on trouve
$$\mathfrak{l}=\left\{\begin{pmatrix}D&0&0&0\\0&A&0&C\\0&0&-D&0\\0&B&0&-A^{\mathrm{tr}}\end{pmatrix}\;;\;\begin{array}{l}D\text{ diagonale imaginaire de taille }k\\A,B,C\text{ carrées de taille }(t_0+t_1+1)\\B,C\text{ symétriques}\end{array}\right\}.$$

Donc,
$$\begin{aligned}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{g}_0&=\left\{M=\begin{pmatrix}D&0&0&0&0&0\\0&A&X&0&-\overline{B}&\overline{Y}\\0&\overline{X}^{\mathrm{tr}}&z_1&0&\overline{Y}^{\mathrm{tr}}&\overline{z}_2\\0&0&0&-D&0&0\\0&B&Y&0&-A^{\mathrm{tr}}&-\overline{X}\\0&\overline{Y}^{\mathrm{tr}}&-z_2&0&-X^{\mathrm{tr}}&-z_1\end{pmatrix}\;;\;\begin{array}{l}A,B,C\text{ carrées de taille}\\(t_0+t_1+1)\,,\,A+A^*=0\,,\\B,C\text{ symétriques,}\\z_1\text{ imaginaire}\end{array}\right\}\\&\simeq\mathfrak{sp}(t_0+t_1+1,1)\oplus(i\mathbb{R})^{n-t_0-t_1-1}\,.\end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme est donné par

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_0 & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{sp}(t_0+t_1+1,1) & \oplus & (i\mathbb{R})^{n-t_0-t_1-1} \\ (A,B,D,z_1,z_2) & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} A & X & -\overline{B} & \overline{Y} \\ \overline{X}^{\mathrm{tr}} & z_1 & \overline{Y}^{\mathrm{tr}} & \overline{z}_2 \\ B & Y & -A^{\mathrm{tr}} & -\overline{X} \\ \overline{Y}^{\mathrm{tr}} & -z_2 & -X^{\mathrm{tr}} & -z_1 \end{pmatrix} \right. & , & \left. D \right) \end{array} .$$

Nous trouvons donc $L \simeq \mathbb{T}^{n-t_0-t_1-1} \times \mathrm{Sp}(t_0+t_1+1,1)$.

Remarquons encore que si $j = n$ et $\mu_{L|_{[\mathfrak{l}_0,\mathfrak{l}_0]}} = 0$, nous devons avoir $t_0 = t_1 = 0$ et donc $[\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0] = \mathfrak{sp}(1,1)$. Ce cas correspond à une série sphérique. Si $j \neq n$, nous avons $\mu_L = \mu_{n+1}\varepsilon_{n+1}$ avec $\mu_{n+1} \neq 0$ et μ_L n'est pas le K–type minimal de la série sphérique.

Passons maintenant aux K–types qui interviennent dans la condition (4.4). Ici, on pose $\gamma = \sum_{j=1}^{k}(n-j+1)\varepsilon_j$ et soit $\mathfrak{q}$ déterminée par γ. Il vient

$$\mathfrak{l} = \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & C \\ 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & B & 0 & -A^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix} \; ; \; \begin{array}{l} D \text{ diagonale imaginaire de taille } k \\ B, C \text{ symétriques} \\ \quad \text{de taille } (n-k+1, n-k+1) \end{array} \right\} .$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_0 &= \left\{ M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & X & 0 & -\overline{B} & \overline{Y} \\ 0 & \overline{X}^{\mathrm{tr}} & z_1 & 0 & \overline{Y}^{\mathrm{tr}} & \overline{z}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & B & Y & 0 & -A^{\mathrm{tr}} & -\overline{X} \\ 0 & \overline{Y}^{\mathrm{tr}} & -z_2 & 0 & -X^{\mathrm{tr}} & -z_1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{array}{l} D \text{ diagonale imaginaire de taille } k \\ A, B \text{ carrées de taille} \\ (n-k)\,,\ A + A^* = 0\,, \\ B \text{ symétriques,} \\ z_1 \text{ imaginaire} \end{array} \right\} \\ &\simeq \mathfrak{sp}(n-k,1) \oplus (i\mathbb{R})^k . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$L \simeq \mathbb{T}^k \times \mathrm{Sp}(n-k,1) .$$

4.2 Construction géométrique

Résultats de Wong

H–W. Wong démontre dans [44] le théorème suivant, qui fait le lien entre l'induction cohomologique et le complexe de Dolbeault.

Théorème 4.12. **1.** *L'image de $\overline{\partial}_V$ est fermée.*

2. *$H^i(G/L; \overline{\partial}_{V^\sharp})$ est une représentation continue admissible de G sur un espace de Fréchet. Le $(\mathfrak{g}, K)$–module sous-jacent est isomorphe à $\mathcal{R}^i(V)$.*

D'autre part, Wong démontre également que $H^i(G/L; \overline{\partial}_{V^\sharp})$ possède la propriété universelle suivante :

Toute représentation continue admissible de G sur un espace de Fréchet dont le $(\mathfrak{g}, K)$–module sous-jacent est $\mathcal{R}^i(V)$ s'injecte continuement et de manière G-équivariante dans l'espace de Fréchet $H^i(G/L; \overline{\partial}_{V^\sharp})$.

Nous donnons ici les grandes lignes de la démonstration. Celle-ci repose sur l'étude de deux fibrations, qui apparaissent dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} & & L/L\cap K & & \\ & & \downarrow & & \\ K/L\cap K & \longrightarrow & G/L\cap K & \longrightarrow & G/K \\ & & \downarrow & & \\ & & G/L & & \end{array}$$

Tout d'abord Wong montre que le complexe de Dolbeault a même cohomologie C^∞ que le complexe suivant sur $G/L\cap K$.

espace des sections : $A^*(V) = \big(C^\infty(G) \otimes \wedge^*(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{u})^* \otimes V^\sharp\big)^{L\cap K}$
opérateur : D ou D^{Wong},

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{Wong}} f(X_1\wedge\ldots\wedge X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i(r\otimes\rho)(X_i)f(X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_i\wedge\ldots\wedge X_{p+1}) \\ &+ \sum_{k<l}(-1)^{k+l}f(p([X_k,X_l])\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_k\wedge\ldots\wedge\hat{X}_l\wedge\ldots\wedge X_{p+1}), \end{aligned}$$

où $p\colon\mathfrak{q}\to\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{u}$ est la projection relative à la décomposition $L\cap K$–équivariante $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}$.

Le même résultat est vrai au niveau algébrique pour le complexe qui permet de calculer $\mathcal{R}^i(V)$.

La démonstration est basée sur la suite spectrale issue de la filtration

$$A^i_r(V) = \Big(C^\infty(G)\otimes\oplus_{k\geq r}(\wedge^{i-k}(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p})^*\otimes\wedge^k\mathfrak{u}^*)\otimes V^\sharp\Big)^{L\cap K}.$$

Tout d'abord on vérifie que le complexe

$$\Big(E_1^{0,q} = \{f\in A_q^q; df\in A_{q+1}^{q+1}\}, D\Big)$$

a même cohomologie que le complexe de Dolbeault. En effet, si $f\in E_1^{0,q}$ et $Df=0$, alors

$$\sum(-1)^kX_kf(X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_k\wedge\ldots\wedge X_{p+1})+\sum(-1)^{k+l}f([X_k,X_l]\wedge X_1\wedge\ldots\hat{X}_k\ldots\hat{X}_l\ldots\wedge X_{p+1})=0,$$

ce qui montre que f est $\mathfrak{l}_0$–invariante, donc L–invariante par connexité, et est le pull–back d'une forme fermée.

L'étape suivante consiste à montrer que

$$\phi\colon E_0^{p,q} = A_q^{p+q}/A_{q+1}^{p+q} \longrightarrow \Big(C^\infty(G)\otimes(C^\infty(L)\otimes V^\sharp\otimes\wedge^q\mathfrak{u}^*\otimes\wedge^p(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p})^*)^{L\cap K}\Big)^L$$

définie par $\phi(f)(g)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q\otimes Y_1\wedge\ldots\wedge Y_p) = (g.f)(X_1\wedge\ldots\wedge X_q\wedge Y_1\wedge\ldots\wedge Y_p)$ est un isomorphisme de G–modules (topologique) où l'action de G sur f est à gauche. On s'intéresse donc au complexe

$$(C^\infty(L)\otimes V^\sharp\otimes\wedge^q\mathfrak{u}^*\otimes\wedge^p(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})^*)^{L\cap K} = (C^\infty(L)\otimes\wedge^p(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})^*)^{L\cap K}\otimes(V^\sharp\otimes\wedge^q\mathfrak{u}^*)$$

qui n'est autre que le complexe de De Rham. Une application du lemme de Poincaré pour l'espace contractile $L/L\cap K$, permet alors de montrer que $E_1^{p,q}$ est nul pour $p>0$. (Ce point est classique pour le cas algébrique et demande des arguments dans le cas géométrique.) Il n'est alors pas difficile de se convaincre que l'inclusion $E_1^{0,q} \to A^q$ induit un isomorphisme en cohomologie. Ceci termine l'étude de la fibration faisant intervennir G/L.

On utilise ensuite la seconde fibration, et la suite spectrale obtenue en remplaçant le rôle joué par $\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}$ dans la première fibration par $\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}$. L'argument qui remplace le lemme de Poincaré est le théorème de Bott–Borel–Weil généralisé. La condition suivante est alors cruciale. On supppose que

$$\forall q \geq 0\,,\ H^i(K/L\cap K, V^\sharp \otimes \wedge^q(\mathfrak{p}/\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})) = 0 \qquad \text{si } i \neq s\,. \tag{4.5}$$

Sous cette condition, on obtient que $H^i(A,D) = 0$ pour $i \neq s$ et que $H^s(A,D) \to \operatorname{Ker}(d_1 \colon E_1^{s,0} \to E_1^{s,1})$ est un isomorphisme. En particulier, ceci démontre la première partie du théorème sous la condition 4.5.

Pour la seconde assertion, considérons l'application

$$\Delta_G\colon\ \Big(C^\infty(G)\otimes V^\sharp\otimes\wedge^i(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{u})^*\Big)^{L\cap K}_{(K)} \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}); V^\sharp\otimes\wedge^i(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{u})^*)$$

définie pour $f = \sum f_k \otimes w_k$ tel que $\sum X.f_k\otimes w_k + f_k\otimes X.w_k = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{u}$ par $\Delta(f)(u) = \sum u.f_k(e)\otimes w_k$. Alors Wong démontre que Δ_G induit un isomorphisme en cohomologie. La principale difficulté est de montrer que $H^i(A;D)$ est admissible. Finalement la condition (4.5) est supprimée par un argument de produit tensoriel par une représentation de dimension finie.

En interprétant ce résultat de H–W. Wong et celui de M.W. Baldoni et D. Barbasch que nous avons rappelé dans le paragraphe précédent pour les groupes $\mathrm{Sp}(n,1)$, nous obtenons donc le corollaire suivant.

Corollaire 4.13. *Soit $\mu \in \hat{K}$ vérifiant* **4.4**. *Il existe une unique série isolée I^μ de* $\mathrm{Sp}(n,1)$ *telle que l'on ait un isomorphisme de $(\mathfrak{g},K)$–modules*

$$I^\mu_{(K)} \simeq H^s(G/L;\mathcal{L}_\chi)_{(K)}\,,$$

où $L = \mathbb{T}^k\times\mathrm{Sp}(n-k,1)$, $\chi = \mu_L + 2\rho(\mathfrak{u}) = \mu + 2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})$ et $\mathcal{L}_\chi$ est le fibré en doites holomorphe associé à χ. De plus μ est l'unique K–type minimal de I^μ.

Unitarité

Nous avons vu que toute représentation infinitésimalement équivalente à $H^i(G/L,\mathcal{L}_\chi)$ s'y injecte continuement. D'autre part, on sait que l'induction cohomologique se comporte assez bien avec l'unitarité, et produit souvent à partir de représentations unitaires de L des représentations unitaires de G. Nous avons rappelé que c'était le cas pour les groupes $\mathrm{Sp}(n,1)$. Notons que dans ce cas, l'unitarisabilité est obtenue grace à l'inégalité de Dirac, mais que cette méthode ne s'applique pas lorsque le rang réel de G est supérieur à 1. En général un résultat assez fort est le suivant. Soit λ le caractère infinitésimal de V. Si

$$\langle\lambda+\rho(\mathfrak{u}),\alpha\rangle > 0\,,\ \forall\alpha\in\Delta(\mathfrak{u})\,,$$

alors $\mathcal{R}^s(V)$ est infinitésimalement unitaire. Cependant les espaces $H^i(G/L,\mathcal{L}_\chi)$ sont souvent trop grands pour posséder eux–mêmes une structure unitaire. Il est donc important de comprendre lorsque l'on sait que $H^i(G/L,\mathcal{L}_\chi)$ est unitarisable, comment construire un sous–espace contenant tous les vecteurs K–finis et possédant une structure d'espace de Hilbert sur laquelle G agit continuement par des opérateurs unitaires.

Lorsque L est compact, et en particulier si G l'est, la variété G/L possède une forme hermitienne invariante définie positive, et $H^i(G/L, \mathcal{L}_\chi)$ porte une structure unitaire naturelle lorsqu'il est unitarisable. Or les représentations obtenues dans ce cas particulier sont des séries discrètes. Celles–ci sont étudiées par W. Schmid [36]. Dans le cas général on dispose cependant d'une forme invariante non–positive et d'une forme positive non–invariante.

Lemme 4.14. 1. *Soit $D = G/L$ une variété de drapeaux. Alors D possède une forme hermitienne G-invariante non–dégénérée, de signature (r,s), avec $r + s = \dim_{\mathbb{C}} G/L$ (et $s = \dim_{\mathbb{C}}(K/L \cap K)$). En particulier, cette forme est positive si et seulement si L est compact.*
2. *Soit H un sous–groupe compact de G. Alors G/H possède une forme hermitienne G-invariante non–dégénérée positive.*

Démonstration. Soit B la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$.
1. Pour $X, Y \in \mathfrak{u}$, posons $\langle X, Y\rangle_{\text{inv}} = B(X, \overline{Y})$. Comme B est non–dégénérée sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{l}$, elle est également non–dégénérée sur $\mathfrak{l}^\perp = \mathfrak{u} \oplus \overline{\mathfrak{u}}$. Donc $\langle\, ,\, \rangle_{\text{inv}}$ est non–dégénérée sur $\mathfrak{u}$. Ceci définit une forme $\mathfrak{l}$–invariante sur $T^{0,1}_{eL} G/L$. On définit donc bien une forme G–invariante sur G/L en posant, pour $X, Y inu$, $\langle\, l_g X,\, l_g Y\rangle_{\text{inv}} = \langle\, X,\, Y\rangle_{\text{inv}}$.
2. Rappelons que θ est l'involution de Cartan. Posons $\langle\, X,\, Y\rangle_{\text{pos}} = -B(X, \theta(\overline{Y}))$. Cette forme est définie positive et H–invariante car H est compact. Nous obtenons donc une forme G–invariante définie positive sur G/H. $\square$

Si (X_i) est une base orthonormale de $\mathfrak{u}$ pour $\langle\, ,\, \rangle_{\text{inv}}$, on obtient une forme L–invariante non–dégénérée sur $\wedge^k \mathfrak{u}$ en imposant aux vecteurs $X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ de former une base orthonormale de $\wedge^k \mathfrak{u}$. Cette forme ne dépend pas de la base orthonormale choisie. Si V est une représentation unitaire de L de dimension finie on obtient une forme hermitienne G–invariante sur le fibré $G \times_L V \otimes \wedge^* \mathfrak{u}$ encore noté $\langle\, ,\, \rangle_{\text{inv}}$.

Définition 4.15. *Soit $\overline{\partial}_V$ l'opérateur de Dolbeault des formes holomorphes à valeurs dans V. Son adjoint $\overline{\partial}_V^{*,\text{inv}}$ est l'unique opérateur G–invariant défini sur les formes à support compact par*

$$\int_{G/L} \langle \overline{\partial}_V^{*,\text{inv}} \omega_1, \omega_2\rangle_{\text{inv}}\, dx \;=\; \int_{G/L} \langle \omega_1, \overline{\partial}_V \omega_2\rangle_{\text{inv}}\, dx\,.$$

Il faut noter que le « laplacien » $\overline{\partial}_V \overline{\partial}_V^{*,\text{inv}} + \overline{\partial}_V^{*,\text{inv}} \overline{\partial}_V$ n'est pas en général un opérateur elliptique. La notion de forme harmonique qui convient doit donc être modifiée.

Définition 4.16. *Une forme ω à support compact est dite fortement harmonique si*

$$\overline{\partial}_V \omega = \overline{\partial}_V^{*,\text{inv}} \omega = 0\,.$$

L'espace des formes fortement harmoniques à support compact est noté $\mathcal{H}^i_c(G/L, V)$.

L'avantage des formes fortement harmoniques est qu'il existe une application bien définie

$$\mathcal{H}^i_c(G/L, V) \longrightarrow H^i(G/L, V)\,.$$

Pour construire un espace de Hilbert, il faut une forme positive sur G/L. La donnée d'une section C^∞ de $G/L \cap K \to G/L$ définie une telle forme sur G/L d'après le lemme 4.14,**2**. Notons qu'il n'existe pas de section G–invariante. La construction repose sur la proposition suivante.

Proposition 4.17. *Soit $\mathfrak{l}^{\perp}$ l'orthogonale de $\mathfrak{l}$ pour la forme de Killing. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} K \times \mathfrak{l}^{\perp} \cap \mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}_0 & \longrightarrow & G \\ (k, X, Y) & \longmapsto & k \exp X \exp Y \end{array},$$

est un difféomorphisme.

Cette proposition détermine une section $\phi\colon G/L \to G/L \cap K$ de la façon suivante.

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon G/L & \longrightarrow & G/L \cap K \\ gL & \longmapsto & k(g) \exp X(g)\, L \cap K\,. \end{array}$$

De plus la forme positive ainsi obtenue est K–invariante, car la forme de Killing l'est. Un vecteur tangent en gL s'écrit de façon général $l_{k(g)\,exp(X(g))}\xi$ pour $\xi \in \mathfrak{l}^{\perp}$. La forme positive est alors donnée par

$$\langle l_{k(g)\,exp(X(g))}\xi, l_{k(g)\,exp(X(g))}\eta\rangle_{\mathrm{pos}} = \langle \xi, \eta\rangle_{\mathrm{pos}} = -B(\xi, \theta(\overline{\eta}))\,.$$

Définition 4.18.

$$\langle \omega_1, \omega_2\rangle_{\mathrm{pos}} = \int_{G/L} \langle \omega_1(k(g)\, exp(X(g))), \omega_2(k(g)\, exp(X(g)))\rangle_{\mathrm{pos}}\, d\,gL\,,$$

où ω_1, ω_2 sont à support compact.

Nous pouvons maintenant définir un espace de Hilbert.

$$\begin{array}{rcl} L_2^{0,p}(G/L, \mathcal{L}_\chi) & = & \text{complété de l'espace des } (0,p)\text{–formes} \\ & & \text{à support compact relativement à } \langle , \rangle_{\mathrm{pos}} \end{array}$$

Lemme 4.19. *Si $\omega \in L_2^{0,p}(G/L, \mathcal{L}_\chi)$, alors $\langle \omega, \omega\rangle_{\mathrm{inv}} < \infty$.*

Démonstration. En effet, si $X, Y \in \mathfrak{u}$, on a

$$|\langle X, Y\rangle_{\mathrm{inv}}| = |B(X, \overline{Y})| = |\langle X, \theta(Y)\rangle_{\mathrm{pos}}| \le \|X\|_{\mathrm{pos}} \|\theta(Y)\|_{\mathrm{pos}} = \|X\|_{\mathrm{pos}} \|Y\|_{\mathrm{pos}}\,.$$

□

Proposition 4.20. *[35] L'action à gauche de G sur l'espace de Hilbert $L_2^{0,p}(G/L, \mathcal{L}_\chi)$ définit une représentation continue de G.*

Soit $\mathcal{H}_2^i(G/L; \mathcal{L}_\chi)$ l'espace des formes L^2 qui sont fortement harmoniques au sens des distributions. Comme les espaces de cohomologies $H^i(G/L, \mathcal{L}_\chi)$ peuvent être calculés à partir de formes distributions à la place de formes C^∞, il existe une application naturelle

$$q\colon \mathcal{H}_2^i(G/L; \mathcal{L}_\chi) \longrightarrow H^i(G/L, \mathcal{L}_\chi)\,.$$

Rappelons que le degré intéressant est s. Supposons que

1. $\mathcal{H}_2^s(G/L; \mathcal{L}_\chi) \neq 0$ et $q \neq 0$,
2. la forme invariante a pour radical l'image de $\overline{\partial}$ sur $\mathcal{H}_2^s(G/L; \mathcal{L}_\chi)$,
3. la forme invariante est positive sur $\mathcal{H}_2^s(G/L; \mathcal{L}_\chi)$.
4. Posons $\overline{\mathcal{H}}_2^i(G/L; \mathcal{L}_\chi) = \mathcal{H}_2^s(G/L; \mathcal{L}_\chi)/\mathrm{Rad}(\langle\, ;\, \rangle_{\mathrm{inv}})$. Lorsque les conditions précédentes sont réalisées $\overline{\mathcal{H}}_2^s(G/L; \mathcal{L}_\chi)$ est un espace préhilbertien pour $\langle\, ;\, \rangle_{\mathrm{inv}}$. On supppose en outre que c'est un espace de Hilbert.

Sous ces conditions, $\overline{\mathcal{H}}_2^s(G/L;\mathcal{L}_\chi)$ est un espace de Hilbert qui fournit la représentation unitaire de G cherchée.

L'étude de ces hypothèses est abordée de la façon suivante. Tout d'abord, il faut retrouver le paramètre de Langlands de $\overline{\mathcal{H}}_2^s(G/L;\mathcal{L}_\chi)$ (en supposant que les conditions soient vérifiées). Cela est possible par exemple lorsque

$$\langle \chi + 2\rho(\mathfrak{u}), \alpha\rangle > 0\,,\ \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})\,, \tag{4.6}$$

car le résultat analogue pour l'induction cohomologique est connue. Notons (P,ξ,ν) ces paramètres.

Théorème 4.21. *[6] Il existe une application*

$$\mathcal{S}\colon C^\infty(G/P,\xi\otimes\nu) \longrightarrow \Gamma^s(G/L,\mathcal{L}\chi)\,,$$

construite explicitement et vérifiant :

1. *$\mathcal{S}$ est un opérateur d'entrelacement continu.*
2. *L'image est $\mathcal{S}$ est contenue dans $\mathcal{H}_2^s(G/L;\mathcal{L}_\chi)$.*
3. *$q\circ\mathcal{S}\neq 0$.*

Supposons que (4.6) est vérifiée. Le résultat le plus général à ma connaissance concernant la forme invariante est le suivant.

Théorème 4.22. *[9] L'image de $\mathcal{S}$ en cohomologie contient l'espace des vecteurs K–finis de $H^s(G/L,\mathcal{L}_\chi)$.*

Si $\rho(\mathfrak{l})$ est non–singulier, si L est l'ensemble des points fixes d'une involution et si G et L ont même rang réel, les conditions (1)–(4) sont vérifiées.

4.3 Lien avec la K-théorie

Fibrations et opérateurs différentiels

Nous avons vu que diverses fibrations intervenaient dans la compréhension de la cohomologie des variétés de drapeaux. En vue de réinterpréter en termes K–théoriques les complexes intervenant dans ces fibrations, et en particulier les produits de Kasparov en K–théorie, nous aurons besoin du lemme général suivant.

Lemme 4.23. *Soit H_0 un groupe de Lie connexe linéaire, et $H_2\subset H_1$ des sous–groupes de Lie connexes. Nous avons ainsi une fibration*

$$\begin{array}{ccc} H_1/H_2 & \xrightarrow{i} & H_0/H_2 \\ & & \downarrow p \\ & & H_0/H_1 \end{array}$$

1. *Soit V une représentation unitaire de dimension finie de H_2 et $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_0$ les fibrés hermitiens associés respectivement sur H_1/H_2 et H_0/H_2. Soit d un opérateur différentiel H_1–équivariant sur $\mathcal{V}_1$. Il existe un unique opérateur $\tilde d$ H_0–équivariant sur $\mathcal{V}_0$ tel que*

$$\forall\sigma\in\Gamma^\infty(\mathcal{V}_0)\,,\qquad i^*\tilde d\sigma = d i^*\sigma\,.$$

De plus pour tout $x \in H_0/H_2$, $\xi \in T^*_x H_0/H_2$ non–nul et $v \in (\mathcal{V}_0)_x$,

$$i^*\sigma_\xi(\tilde{d})v = \sigma_{i^*\xi}(d)i^*v\,.$$

2. *Supposons de plus que l'on ait une section équivariante de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow TH_1/H_2 \longrightarrow TH_0/H_2 \longrightarrow p^*TH_0/H_1 \longrightarrow 0\,.$$

Ceci détermine une projection

$$p_*\colon T^*H_0/H_2 \longrightarrow p^*TH_0/H_1\,.$$

1. *Supposons que $\mathcal{E}$ est un fibré équivariant sur H_0/H_1 muni d'une connexion équivariante $\nabla^{\mathcal{E}}$ et $m_{\mathcal{E}}\colon \Gamma^\infty(T^*H_0/H_1 \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E})$ est un morphisme équivariant. Alors $D = m_{\mathcal{E}} \circ \nabla^{\mathcal{E}}$ est un opérateur différentiel H_0–équivariant sur $\mathcal{E}$. Soit $\nabla^{p^*\mathcal{E}}$ le pull–back de $\nabla^{\mathcal{E}}$. Alors*
$$\tilde{D} = m_{\mathcal{E}} \circ (p_* \otimes 1) \circ \nabla^{p^*\mathcal{E}}$$
est l'unique opérateur différentiel H_0–équivariant vérifiant
– $\forall \sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{E})$,
$$p^*D\sigma = \tilde{D}p^*\sigma\,, \tag{4.7}$$
– $\forall f \in C^\infty(H_0/H_2)$, $\sigma \in \Gamma^\infty(p^*\mathcal{E})$,
$$\tilde{D}(f\sigma) = m_{\mathcal{E}}(p_*df \otimes \sigma) + f\tilde{D}\sigma\,. \tag{4.8}$$
2. *Supposons que H_0/H_1 est muni d'une structure de variété complexe H_0–invariante. Soit D l'opérateur de Dolbeault des formes à valeurs dans un fibré holomorphe $\mathcal{E}$ sur H_0/H_1. Notons $p^{0,1}$ la projection canonique $T^*H_0/H_1 \to T^{0,1}H_0/H_1$.*
Alors il existe un unique opérateur différentiel $\tilde{D}$ sur $p^*(\wedge T^{0,1}H_0/H_1 \otimes \mathcal{E})$ tel que
– $\forall \sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{E})$,
$$p^*D\sigma = \tilde{D}p^*\sigma\,,$$
– $\forall f \in C^\infty(H_0/H_2)$, $\sigma \in \Gamma^\infty(p^*(\wedge T^{0,1}H_0/H_1 \otimes \mathcal{E}))$,
$$\tilde{D}(f\sigma) = p^{0,1}p_*df \wedge \sigma + f\tilde{D}\sigma\,. \tag{4.9}$$

Dans les deux cas les symboles vérifient

$$p_*^*\sigma_\xi(\tilde{D})v = \sigma_{p^*\xi}(D)p_*^*v\,,$$

où

$$\begin{array}{l} p_*^*\colon \pi_2^*p^*\mathcal{E} = p_*^*\pi_1^*\mathcal{E} \longrightarrow \pi_1^*\mathcal{E} \\ \pi_i\colon T^*H_0/H_i \longrightarrow H_0/H_i \quad (i=1,2) \end{array}$$

Démonstration. **1.** est évident. Pour **2.** les assertions 1. et 2. se démontrent de la même façon. Montrons 1. Tout d'abord il est clair que $\tilde{D}$ vérifie les équations (4.7,4.8). Il faut montrer que celles–ci définissent bien un opérateur différentiel. Soit $f \in C^\infty(H_0/H_2)$, $g \in C^\infty(H_0/H_1)$ partout non–nulle et $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{E})$. Il faut montrer que $\tilde{D}(fp^*gp^*(g^{-1}\sigma)) = \tilde{D}(fp^*\sigma)$. Or,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(fp^*gp^*(g^{-1}\sigma)) &= m_{\mathcal{E}}(p_*d(fp^*g) \otimes p^*(g^{-1}\sigma)) + fp^*gp^*D(g^{-1}\sigma) \\ &= m_{\mathcal{E}}(p_*(df)p^*g \otimes p^*g^{-1}p^*\sigma) + m_{\mathcal{E}}(fp_*dp^*g \otimes p^*g^{-1}p^*\sigma) \\ &\quad + fp^*g\, m_{\mathcal{E}}(p_*dp^*g^{-1} \otimes p^*\sigma) + fp^*gp^*g^{-1}\tilde{D}p^*\sigma \\ &= m_{\mathcal{E}}(p_*df \otimes p^*\sigma) + f\tilde{D}p^*\sigma + f\, m_{\mathcal{E}}(p_*d(p^*gg^{-1}) \otimes p^*\sigma) \\ &= \tilde{D}(fp^*\sigma)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\tilde{D}$ est bien défini.

Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si σ est une section de $p^*\mathcal{E}$, et σ_i une base (locale) de $\mathcal{E}$, il existe des fonctions f_i telles que $\sigma = \sum f_i p^* \sigma_i$, et donc $\tilde{D}$ est défini par les formules (4.7,4.8). On vérifie facilement que les formules (4.7,4.8) sont H_0–équivariantes.

Remarquons enfin que le symbole de D en $\xi \in T^*_x H_0/H_2$ est donné par $i\, m_{\mathcal{E}}(\xi) \in \mathrm{End}(\mathcal{E}_x)$ où $m_{\mathcal{E}}(\xi)v = m_{\mathcal{E}}(\xi \otimes v)$ pour $v \in \mathcal{E}_x$ et le symbole de $\tilde{D}$ par une formule analogue. □

Proposition 4.24. *Supposons que H_1 est compact. Alors les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées. Soit d (resp. D) un opérateur différentiel d'ordre 1 elliptique H_1–équivariant (resp. H_0–équivariant vérifiant les hypothèses du lemme) sur H_1/H_2 (resp. H_0/H_1). Alors,*

$$D^{H_0/H_2} = \tilde{d} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{D}$$

est un opérateur différentiel elliptique H_0–équivariant sur H_0/H_2.

De plus, dans $KK^{H_0}(C_0(H_0/H_2), \mathbb{C})$,

$$\left[D^{H_0/H_2}\right] = \mathrm{ind}_{H_1}^{H_2}[d] \otimes_{C_0(H_0/H_1)} [D].$$

Induction de Bott

Soient G est un groupe de Lie compact connexe, T un sous–groupe de Cartan et G/L une variété de drapeaux telles que $T \subset L$. Alors T est un sous–groupe de Cartan de L. Considérons la fibration

$$\begin{array}{ccc} L/T & \to & G/T \\ & & \downarrow p \\ & & G/L\,. \end{array}$$

Les trois variétés sont complexes. Il convient de choisir soigneusement ces structures. Commençons par G/L. Nous prenons la structure complexe déterminée par le choix de $\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{l} \oplus \overline{\mathfrak{u}}$. Ce choix est différent de celui effectué jusqu'à présent, et la raison de ce changement est nécessaire pour des raisons de compatibilité avec la formule de Weil, comme il apparaît ci-dessous. Choisissons ensuite un système de racines Δ^+ positif pour le système $\Delta(\mathfrak{t}, \mathfrak{g})$ contenant $\Delta(\mathfrak{u})$ et tel que $\Delta(\mathfrak{l})$ soit engendré par des racines simples. Ce choix détermine une structure complexe sur G/T et l'espace tangent antiholomorphe en l'origine est $\mathfrak{t}$–isomorphe à

$$\mathfrak{n}_G^- = \sum_{-\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha\,,$$

les $\mathfrak{g}_\alpha$ étant les espaces radiciels. Munissons L/T de la structure complexe induite. Cette structure complexe est aussi déterminée par le système de racines positives $\Delta^+(\mathfrak{l}) = \Delta^+ \cap \Delta(\mathfrak{l})$. En particulier l'espace tangent antiholomorphe à l'origine est

$$\mathfrak{n}_L^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l})} \mathfrak{g}_{-\alpha}\,.$$

Soit $\overline{\partial}^{G/L}$ l'opérateur de Dolbeault sur G/L. Notons $\overline{\partial}^{G/L,*}$ son adjoint relativement à la forme positive (invariante). Posons $D^{G/L} = \overline{\partial}^{G/L} + \overline{\partial}^{G/L,*}$. Définissons de la même façon les opérateurs $D^{G/T}$ et $D^{L/T}$ respectivement sur les espaces G/T et L/T. Soit $\theta_{G/T}$ (resp. $\theta_{G/L}$, $\theta_{L/T}$) l'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe la fonction constante égale à z sur G/T (resp.

G/L, L/T). Soit $[\theta_{G/T}] \in KK^G(\mathbb{C}, C(G/T))$ (resp. $[\theta_{G/L}]$, $[\theta_{L/T}]$) l'élément correspondant. Définissons l'induction de Bott de T à G par

$$^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G \left\{ \begin{array}{rcl} R(T) & \longrightarrow & R(G) = KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & [\theta_{G/T}] \otimes_{C(G/T)} \mathrm{ind}_T^G\, x \otimes_{C(G/T)} [D^{G/T}] \end{array} \right.$$

On définit de même les applications $^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_L^G$ et $^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^L$

Théorème 4.25. *[15, corollary 6.1][14, proposition 6.1]. Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ intégral, et notons $[\mathbb{C}_\lambda]$ l'élément de $R(T)$ correspondant. Soit ρ la demi–somme des racines de Δ^+. Si $\lambda + \rho$ est singulier, alors $^{n}\mathrm{IB}_T^G\ \lambda = 0$. Si $\lambda + \rho$ est régulier, alors il existe un unique élément $w \in W(G)$ tel que $w(\lambda + \rho) - \rho$ soit dominant, et*

$$^{n}\mathrm{IB}_T^G\, [\mathbb{C}_\lambda] = (\det w)[F_{w(\lambda+\rho)-\rho}] \in R(G)\,.$$

On déduit de ce théorème que si $[p_{F_\lambda}]$ désigne le projecteur de $K_0(C^*(G))$ associé à la représentation irréductible de plus haut poids λ,

$$\mathrm{Ind}_a D_\lambda^{G/T} = [p_{F_\lambda}]\,.$$

Démonstration. Rappelons que le dénominateur de Weyl est l'élément de $R(T)$

$$\Delta_T^G = e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})\,.$$

Commençons avec λ dominant. Nous avons

$$\mathrm{rest}_G^T \circ {}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G[e^\lambda] = \Big(\sum (-1)^p [\wedge^p \mathfrak{n}_G^{-,*}]\Big) \cdot \lambda\,.$$

D'autre part, $\prod(1 - e^\alpha) = \det(1 - \wedge \mathfrak{n}_G^{-,*}) = \sum (-1)^p \operatorname{Trace}(\wedge^p \mathfrak{n}_G^{-,*})$. On peut donc écrire

$$\mathrm{rest}_G^T \circ {}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G\ e^\lambda = (\Delta_T^G)^* \cdot e^{\lambda+\rho}\,.$$

Soit $x \in \hat{G}$ quelconque. Notons $\langle\, ,\, \rangle_G$ (resp. $\langle\, ,\, \rangle_T$) la forme biadditive sur $R(G)$ (resp. $R(T)$) définie pour $y, z \in \hat{G}$ (resp. $R(T)$) par $\langle y, z \rangle_G = \delta_{yz}$ (resp. $\langle y, z \rangle_T = \delta_{yz}$). Alors par réciprocité de Frobenius

$$\langle {}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G\ e^\lambda, x \rangle_G = \langle (\Delta_T^G)^* \cdot e^{\lambda+\rho}, \mathrm{rest}_G^T x \rangle_T\,.$$

En outre pour tout $w \in W(G)$, on a $w\Delta_T^G = (\det w)\Delta_T^G$. Comme les autres éléments de $R(T)$ intervenant dans le formule précédente sont invariants par l'action du groupe de Weyl, il vient

$$\langle {}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G\ e^\lambda, x \rangle_G = |W|^{-1} \langle (\Delta_T^G)^* \sum_w (\det w) e^{w(\lambda+\rho)}, \mathrm{rest}_G^T x \rangle_T\,.$$

En appliquant la formule de Weyl, nous obtenons donc

$$\langle {}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G\ e^\lambda, x \rangle_G = |W|^{-1} \langle (\Delta_T^G)^* \Delta_T^G \mathrm{rest}_G^T [V_\lambda], \mathrm{rest}_G^T x \rangle_T\,.$$

En appliquant alors la formule d'intégration de Weyl [29, théorème 4.45], il vient

$$\langle {}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G\ e^\lambda, x \rangle_G = \langle [V_\lambda], x \rangle_G\,.$$

Ceci termine la démonstration lorsque λ est dominant.

Soit λ quelconque. Le début de la démontration montre qu'il existe une représentation irréductible V de G telle que ${}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^G\, e^{\lambda} = \pm[V]$. Il faut trouver le plus haut poids de V, relativement à Δ^+. En développant $(1-e^{\alpha})^{-1}$ en série entière dans $R[[T]]$ à l'intérieur de la formule de Weyl, il est classique d'obtenir :

$$\mathrm{rest}_G^T[V_{\lambda'}] = \sum_{\mu}\left(\sum_{w}(\det w)\mathcal{P}\left(\lambda'+\rho-w(\mu+\rho)\right)\right)e^{\mu},$$

où $\mathcal{P}(\eta)$ est le nombre de façon d'écrire $\eta = \sum_{\alpha>0} n_\alpha \alpha$, avec $n_\alpha \geq 0$. Il est alors facile de voir que $w(\lambda+\rho)-\rho$ est un poids de V, et que ce poids est maximal, car λ est le plus haut poids de V relativement à $w^{-1}\Delta^+$. □

Proposition 4.26. $\left[D^{G/T}\right] = \mathrm{Ind}_L^G\left[D^{L/T}\right] \otimes \left[D^{G/L}\right]$ *dans* $KK^G(C(G/T),\mathbb{C})$.

Démonstration. D'après la prop 4.24, il faut montrer que $\left[D^{G/T}\right] = \left[\tilde{D}^{L/T}\otimes 1 + 1\otimes\tilde{D}^{G/L}\right]$. Montrons que les espaces hilbertiens sur lesquels agissent ces opérateurs sont isomorphes. L'opérateur $D^{G/T}$ agit sur les sections du fibré

$$G\times_T \wedge^*\mathfrak{n}_G^{-,*}.$$

D'autre part, l'opérateur $\tilde{D}_0^{L/T}\otimes 1 + 1\otimes\tilde{D}_0^{G/L}$ agit sur les sections du fibré

$$G\times_T \wedge^*\mathfrak{n}_L^{-,*}\otimes\wedge^*\mathfrak{u}.$$

Or, d'après le choix des structures complexes, nous avons un isomorphisme de T–modules

$$\mathfrak{n}_G^- = \mathfrak{n}_L^-\oplus\overline{\mathfrak{u}}.$$

Nous en déduisons que les opérateurs agissent sur des fibrés T–isomorphes. Il suffit donc de montrer que ces opérateurs ont mêmes symboles à l'origine. Or, ceci est une conséquence du lemme 4.23. En effet, le symbole de $D_\lambda^{G/T}$ est

$$\sigma_\xi\big(D_\lambda^{G/T}\big) = \mathrm{ext}(\xi^-) - \mathrm{int}(\xi^+),$$

où $\xi\in T_{eT}^*G/T \subset (T_{eT}^*G/T)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_G^-\oplus\mathfrak{n}_G^{-,*}$ s'écrit de manière unique $\xi = \xi^- + \xi^+$. Le symbole de $\tilde{D}^{L/T}\otimes 1 + 1\otimes\tilde{D}^{G/L}$ est obtenu de la manière suivante. Nous avons

$$T_{eT}^*G/T \subset (T_{eT}^*G/T)_{\mathbb{C}} = \left(\mathfrak{n}_L^-\oplus\mathfrak{n}_L^{-,*}\right)\oplus(\overline{\mathfrak{u}}\oplus\mathfrak{u}).$$

Donc, avec les notations évidentes, tout $\xi\in T_{eT}^*G/T$ s'écrit de manière unique sous la forme $\xi = \xi_L^- + \xi_L^+ + \xi_{\overline{\mathfrak{u}}} + \xi_{\mathfrak{u}}$. Le symbole de $\tilde{D}^{L/T}\otimes 1 + 1\otimes\tilde{D}^{G/L}$ est alors donné par

$$\begin{aligned}\sigma_\xi\big(\tilde{D}^{L/T}\otimes 1 + 1\otimes\tilde{D}^{G/L}\big) &= \big(\mathrm{ext}(\xi_L^-) - \mathrm{int}(\xi_L^+)\big)\otimes 1 + 1\otimes\big(\mathrm{ext}(\xi_{\overline{\mathfrak{u}}}) - \mathrm{int}(\xi_{\mathfrak{u}})\big)\\ &= \mathrm{ext}(\xi_L^- + \xi_{\overline{\mathfrak{u}}}) - \mathrm{int}(\xi_L^+ + \xi_{\mathfrak{u}})\\ &= \mathrm{ext}(\xi^-) - \mathrm{int}(\xi^+) = \sigma_\xi\big(D^{G/T}\big).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.27. *Soit λ le plus haut poids d'une représentation irréductible de L. Alors $\mathrm{Ind}_a D_\lambda^{G/L} \in K_0(C^*(G))$ est nul si et seulement si il existe $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$ tel que $\langle \lambda + \rho; \alpha \rangle = 0$. Si cet indice est non nul, il existe un unique $w \in W(G)/W(L)$ tel que $\tilde{\lambda} = w(\lambda + \rho) - \rho$ soit dominant par rapport à Δ^+, et dans $K_0(C^*(G))$,*

$$\mathrm{Ind}_a D_\lambda^{G/L} = (\det w)[p_{F_{\tilde{\lambda}}}] .$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a un diagramme commutatif [1]

$$\begin{array}{ccc} & R(T) & \\ \swarrow & & \searrow \\ R(L) & \longrightarrow & R(G) . \end{array}$$

La proposition résulte alors du théorème de Bott. □

Remarque 4.28. *Ce résultat est aussi une conséquence du théorème de Bott–Borel–Weil généralisé. Celui–ci s'obtient habituellement à partir du théorème 4.25 (version cohomologique), en considérant la suite spectrale issue de la fibration $L/T \to G/T \to G/L$, de façon analogue à celle utilisée par Wong. La méthode utilisée ici indique la marche à suivre dans le cas où G n'est pas compact.*

Indice de l'opérateur de Wong

Nous avons vu que la série isolée I_μ de K–type minimal $\mu = \sum_{i=1}^k \mu_k \varepsilon_k$, $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ était infinitésimalement équivalente à

$$I_\mu \simeq H^s(G/L, \mathcal{L}_\chi) ,$$

avec $L = \mathbb{T}^k \times \mathrm{Sp}(n-k, 1)$, $\chi = \mu_L + 2\rho(\mathfrak{u}) = \mu + 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$.

Comme L n'est pas compact, l'action de G sur G/L n'est pas propre et il n'est donc pas possible de définir l'indice analytique du complexe de Dolbeault. D'autre part on sait que les indices d'opérateurs différientiels sur des variétés propres sont dans l'image de l'induction de Dirac, ce qui indique que les variétés de drapeaux peuvent être intéressantes pour définir géométriquement des éléments de la K–théorie de la C^*–algèbre maximale de G qui ne soient pas dans l'image de l'induction de Dirac. Nous ne sommes pas parvenus à mener à bien ce programme. Cependant il apparaît naturel de calculer l'indice du complexe défini par Wong qui agit sur une variété propre et qui a même cohomologie C^∞ que le complexe de Dolbeault sur G/L, pour savoir pour quelle(s) série(s) isloée(s) intervien(nen)t.

Nous calculons dans cette partie l'indice en K–théorie du complexe de Wong (défini page 39) obtenu à partir du complexe de Dolbeault à valeurs dans un fibré holomorphe en droites $\mathcal{L}_\chi$ sur une variété de drapeaux G/L, en supposant que G et K ont même rang ; puis nous appliquons la formule obtenue aux représentations unitaires χ de L correspondants aux séries isolées de $\mathrm{Sp}(n, 1)$.

Considérons tout d'abord la fibration $L/L \cap K \to G/L \cap K \to G/L$. Notons $\overline{\partial}^{G/L}$ l'opérateur de Dolbeault.

Lemme 4.29. *Soit $d_{\mathrm{DR}}^{L/L\cap K}$ l'opérateur de De Rham sur $L/L \cap K$. L'opérateur D^{Wong} est donné par la formule*

$$D^{\mathrm{Wong}} = \tilde{d}_{\mathrm{DR}}^{L/L\cap K} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\overline{\partial}}^{G/L} .$$

[1] Voir par exemple l'argument donné pour le diagramme 4.11

Démonstration. Il faut vérifier que si $\alpha \in C^\infty(G/L\cap K)$ et $f \in \mathrm{Hom}_{L\cap K}(\wedge^*\mathfrak{u}; C^\infty(G))$,

$$D^{\mathrm{Wong}}\alpha f = (\tilde{d}_{DR} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\bar{\partial}})\alpha \wedge f + \alpha D^{\mathrm{Wong}} f\,.$$

Or,

$$\begin{aligned}
D^{\mathrm{Wong}}\alpha f(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+1}) &= \textstyle\sum(-1)^k X_k(\alpha f)(X_1 \wedge \dots\hat{X}_k \dots \wedge X_{p+1}) \\
&\quad + \textstyle\sum(-1)^{k+l}(\alpha f)(p([X_k, X_l]) \wedge X_1 \wedge \dots\hat{X}_k \dots\hat{X}_l \dots \wedge X_{p+1}) \\
&= \textstyle\sum(-1)^k (X_k.\alpha) f(X_1 \wedge \dots\hat{X}_k \dots \wedge X_{p+1}) \\
&\quad + \alpha\Big(\textstyle\sum(-1)^k f(X_1 \wedge \dots\hat{X}_k \dots \wedge X_{p+1}) \\
&\qquad + \textstyle\sum(-1)^{k+l} f(p([X_k, X_l]) \wedge X_1 \wedge \dots\hat{X}_k \dots\hat{X}_l \dots \wedge X_{p+1})\Big) \\
&= \Big((\tilde{d}_{DR} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\bar{\partial}})\alpha \wedge f\Big)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+1}) \\
&\quad + \alpha D^{\mathrm{Wong}} f(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+1})\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Pour calculer l'indice de cet opérateur, nous utilisons la fibration ci–dessous.

$$\begin{array}{ccc}
K/L\cap K & \to & G/L\cap K \\
 & & \downarrow p \\
 & & G/K
\end{array}$$

La variété G/L possède la structure complexe de variété de drapeaux et $K/L\cap K$ la structure induite, qui est aussi celle définie par $\Delta(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})$. Choisissons maintenant un système de racines positives Δ^+ tel que $\Delta^+ \supset \Delta(\mathfrak{u})$ et tel que $\Delta(\mathfrak{l})$ soit engendré par des racines simples. Ceci détermine une structure *spin* G–invariante sur G/K, et de même $\Delta^+(\mathfrak{l}) = \Delta^+ \cap \Delta(\mathfrak{l})$ une structure *spin* L–invariante sur $L/L\cap K$. Soit

$$\mathfrak{p}^\pm = \sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \mathfrak{g}_{\mp\alpha}\,.$$

Les espaces $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$ sont conjugués. Tout $X \in \mathfrak{p}_0$ s'écrit de manière unique sous de la forme $X = X^+ + X^-$.

Proposition 4.30. *L'espace* $\wedge\mathfrak{p}^+$*, muni de l'action de* $\mathfrak{p}_0$ *définie par*

$$\gamma(X)\omega = \sqrt{2}(\mathrm{ext}(X^+) - \mathrm{int}(X^-))\,\omega\,.$$

définit un $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{p}_0)$*–module, isomorphe à* $S^{G/K}$*. La décomposition* $S^{G/K} = S^+ \oplus S^-$ *donnée par le choix de* Δ^+ *s'écrit alors*

$$S^+ = \wedge^{\mathrm{pair}}\mathfrak{p}^+ \quad S^- = \wedge^{\mathrm{impair}}\mathfrak{p}^+\,.$$

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $X, Y \in \mathfrak{p}_0$, on

$$\gamma(X)\gamma(Y) + \gamma(Y)\gamma(X) = -2\langle X, Y\rangle\,.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\gamma(X)\gamma(Y) + \gamma(Y)\gamma(X) &= 2\,((\mathrm{ext}(X^+) - \mathrm{int}(X^-))(\mathrm{ext}(Y^+) - \mathrm{int}(Y^-))) \\
&\quad + 2\,(\,[\mathrm{ext}(Y^+) - \mathrm{int}(Y^-)]\,[\mathrm{ext}(X^+) - \mathrm{int}(X^+)]\,) \\
&= -2\,(\,[\mathrm{ext}(X^+)\mathrm{int}(Y^-) + \mathrm{int}(Y^-)\mathrm{ext}(X^-)] \\
&\qquad + [\mathrm{ext}(Y^+)\mathrm{int}(X^-) + \mathrm{int}(X^-)\mathrm{ext}(Y^+)]\,) \\
&= -2(\langle X^+, Y^-\rangle + \langle X^-, Y^+\rangle) \\
&= -2\langle X, Y\rangle\,.
\end{aligned}$$

La conclusion résulte alors de l'unicité de $S^{G/K}$ et de la comparaison des dimensions. La dernière assertion est claire. $\square$

Sur G/K, considérons l'opérateur de Dirac $D_\eta^{G/K}$ à valeurs dans $V_\eta \in \hat{K}$. Sur $K/L\cap K$, définissons l'opérateur $D^{K/L\cap K} = \partial_\lambda^{K/L\cap K} + \partial_\lambda^{*,\mathrm{pos}}$, où l'adjoint $\partial_\lambda^{*,\mathrm{pos}}$ de l'opérateur de Dolbeault $\partial_\lambda^{K/L\cap K}$ sur $K/L\cap K$ à coefficients dans W_λ est pris par rapport à la forme positive (invariante) sur $K/L\cap K$. Nous supprimerons l'indice dans les notations lorsque les représentations associées sont triviales. Considérons sur $G/L\cap K$, l'opérateur

$$D^{G/L\cap K} = \tilde{D}^{K/L\cap K} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{D}^{G/K}.$$

Alors la proposition 4.24 s'écrit

Proposition 4.31. *Dans $KK^G(C_0(G/L\cap K),\mathbb{C})$,*

$$\left[D^{G/L\cap K}\right] = \mathrm{ind}_K^G \left[D^{K/L\cap K}\right] \otimes_{C_0(G/K)} \left[D^{G/K}\right].$$

Théorème 4.32. *Soit $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ le plus haut poids d'une représentation de $L\cap K$. Alors $\mathrm{Ind}_a D_\lambda^{G/L\cap K} = 0$ si et seulement si il existe $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})$, tel que $\langle \lambda - 2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}) + \rho_c ; \alpha\rangle = 0$. Si cet indice est non nul, il existe un unique $w \in W(K)/W(L\cap K)$, tel que $w(\lambda - 2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}) + \rho_c) - \rho_c$ soit Δ_c^+-dominant et dans $K_0(C^*(G))$,*

$$\mathrm{Ind}_a\left(D_\lambda^{G/L\cap K}\right) = (-1)^s \mathrm{Ind}_a\left(D^{G/K}_{w(\lambda-2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})+\rho_c)-\rho_c}\right).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$p_*\left[D_\lambda^{G/L\cap K}\right] = (-1)^s \left[D^{G/K}_{w(\lambda-2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})+\rho_c)-\rho_c}\right].$$

Soit $\theta_{K/L\cap K} \colon \mathbb{C} \to C(K/L\cap K)$ le morphisme qui à $z \in \mathbb{C}$, associe la fonction constante égale à z sur $K/L\cap K$. Définissons l'induction de Bott $\mathrm{IB}_{L\cap K}^K$ par

$$\mathrm{IB}_{L\cap K}^K \left\{ \begin{array}{rcl} R(L\cap K) & \longrightarrow & R(K) = KK^K(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & [\theta_{K/L\cap K}] \otimes \mathrm{ind}_{L\cap K}^K x \otimes [D^{K/L\cap K}] \end{array}\right. \tag{4.10}$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R(L\cap K) & \xrightarrow{\mathrm{ind}_{L\cap K}^G(\,\cdot\,)\otimes D^{G/L\cap K}} & KK^G(C_0(G/L\cap K),\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle \mathrm{IB}_{L\cap K}^K}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_*} \\ R(K) & \xrightarrow[\mathrm{ind}_K^G(\,\cdot\,)\otimes D^{G/K}]{\sim} & KK^G(C_0(G/K),\mathbb{C}) \end{array} \tag{4.11}$$

En effet, pour tout $x \in R(L\cap K)$ nous avons,

$$\begin{array}{rll} p_*\big(\mathrm{ind}_{L\cap K}^G x \otimes D^{G/L\cap K}\big) & & \\ = & [p] \otimes \mathrm{ind}_K^G \left(\mathrm{ind}_{L\cap K}^K x \otimes D^{K/L\cap K}\right) \otimes D^{G/K} & \text{d'après la proposition 4.31}, \\ = & \mathrm{ind}_K^G \left(\left[\theta_{K/L\cap K}\right] \otimes \mathrm{ind}_{L\cap K}^K x \otimes D^{K/L\cap K}\right) \otimes D^{G/K} & \text{car } [p] = \mathrm{ind}_K^G \left[\theta_{K/L\cap K}\right], \\ = & \mathrm{ind}_K^G \left(\mathrm{IB}_{L\cap K}^K x\right) \otimes D^{G/K}. & \end{array}$$

Il reste donc, d'après la commutativité du diagramme 1.1, à identifier l'induction de Bott. Cela est fait dans le paragraphe précédent, avec une autre normalisation. Notons K/T^{op} la variété K/T munie de la structure complexe obtenue à partir de $-\Delta_c^+$, comme au paragraphe précédent. Alors pour tout $i > 0$, la dualité de Serre s'écrit

$$H^i(K/T^{\mathrm{op}};\mathbb{C}_\lambda)^* \simeq H^{m-i}(K/T^{\mathrm{op}};\mathbb{C}_{-\lambda}\otimes \wedge^{\max}\mathfrak{n}_K^-)\,.$$

D'autre part,

$$H^{m-i}(K/T^{\mathrm{op}};\mathbb{C}_{-\lambda}\otimes \wedge^{\max}\mathfrak{n}_K^-) = H^{m-i}(K/T;\mathbb{C}_\lambda\otimes \wedge^{\max}\mathfrak{n}_K^+)^*\,,$$

car K/T est compact. D'autre part, nous avons par exemple ${}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^K[\mathbb{C}_\lambda] = \sum(-1)^i H^i(\mathbb{C}_\lambda)$. Il vient alors,

$$\mathrm{IB}_T^K\,[\mathbb{C}_\lambda\otimes \wedge^{\max}\mathfrak{n}_K^+] \simeq {}^{\mathrm{n}}\mathrm{IB}_T^K\,[\mathbb{C}_\lambda]\,.$$

Ceci fait le lien avec les notations du paragraphe précédent, et permet de se référer au théorème 4.25. La fin de la démonstration est alors une simple application de ce théorème, compte-tenu du fait que $\wedge_{\max}\mathfrak{n}_K^+ = \mathbb{C}_{2\rho_c}$. □

Soit $w \in W(K)$. Définissons une action $\mathcal{S}$ de $W(K)$ sur $\hat{T}$, en posant

$$\mathcal{S}_w(\lambda) = w(\lambda+\rho_c) - \rho_c\,.$$

Prolongeons par additivité cette action à $R(T)$. Soit $I(K)$ l'idéal de $R(T)$ engendré par les éléments de la forme $\lambda - \mathcal{S}_w(\lambda)$. Avec ces conventions, lorsque $L = T$, le théorème précédent et le fait que μ_r soit un isomorphisme permettent d'obtenir le résultat suivant.

Corollaire 4.33. *L'application $\mu_r \circ \mathrm{IB}_T^K$ se factorise à travers $I(K)$ en un isomorphisme de groupes abéliens*

$$R(T)/I(K) \xrightarrow{\sim} K_0(C_r^*(G))\,.$$

Proposition 4.34. *Supposons que $L = T \times L^{ss}$ est le porduit d'un tore et d'un groupe semi-simple. Soit χ une représentation unitaire de L de dimension 1. Dans $K_0(C^*(G))$,*

$$\mathrm{Ind}_a D_\chi^{\mathrm{Wong}} = (-1)^s\left(\sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\mathrm{Ind}_a\, D^{G/K}_{\chi+\alpha-2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})}\right)\,,$$

où α vérifie

$$\begin{array}{l} W_\alpha \subset S^{L/L\cap K} \\ \chi+\alpha-2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})+\rho_c \text{ est } \Delta_c^+\text{–régulier}\end{array}$$

Démonstration. Il suffit d'évaluer l'indice sur les représentations irréductibles unitaires de G. Soit π une telle représentation. Comme l'opérateur de Wong agit sur les sections du fibré $G\times_{L\cap K}\wedge^*(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{u})^*\otimes\mathbb{C}_\chi$, il vient

$$\begin{aligned}\pi_*\left(\mathrm{Ind}_a(D_\chi^{\mathrm{Wong}})\right) = \;& \dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(\wedge^+(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{u})\,;\,\mathcal{H}_\pi^{(K)}\otimes\mathbb{C}_\chi\right)\\ & -\dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(\wedge^-(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{u})\,;\,\mathcal{H}_\pi^{(K)}\otimes\mathbb{C}_\chi\right)\,.\end{aligned}$$

En écrivant, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+\oplus\mathfrak{p}^-$, nous obtenons

$$\wedge\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p} = S^{L/L\cap K}\otimes S^{L/L\cap K,*}\,.$$

Donc, en remarquant que les modules $S_+^{L/L\cap K}$ et $S_-^{L/L\cap K}$ sont autoadjoints car $\dim L/L\cap K$ est un multiple de 4,

$$\begin{aligned}\pi_*\left(\mathrm{Ind}_a(D_\chi^{\mathrm{Wong}})\right) &= \Big(\dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(\mathbb{C}_\chi\otimes S_+^{L/L\cap K}\otimes\wedge^{\mathrm{pair}}(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\\ &\qquad - \dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(\mathbb{C}_\chi\otimes S_+^{L/L\cap K}\otimes\wedge^{\mathrm{impair}}(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\Big)\\ &\quad - \Big(\dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(\mathbb{C}_\chi\otimes S_-^{L/L\cap K}\otimes\wedge^{\mathrm{pair}}(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\\ &\qquad - \dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(\mathbb{C}_\chi\otimes S_-^{L/L\cap K}\otimes\wedge^{\mathrm{impair}}(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\Big)\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons un isomorphisme de $L\cap K$–modules

$$\begin{aligned}\wedge^*(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})^*\otimes\wedge^*\mathfrak{p}^+ &\simeq \wedge^*(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})^*\otimes\wedge^*(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}^+)\otimes\wedge^*(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})^*\\ &\simeq \wedge^*\mathfrak{u}^*\otimes\wedge^*(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}^+)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Soit $W_\alpha\in\widehat{L\cap K}$ est une représentation irréductible telle que $W_\alpha|_T$ soit triviale. Alors W_α peut être vue comme une représentation irréductible de la partie semi–simple $L^{\mathrm{ss}}\cap K$. Comme $\mathbb{C}_\chi$ est une représentation de dimension 1 de $L\cap K$ triviale sur la partie semi–simple, la représentation $W_\alpha\otimes\mathbb{C}_\chi$ est irréductible car elle l'est sur la partie semi–simple. Son plus haut poids est $\alpha+\chi$, autrement dit,

$$W_{\alpha+\chi}=W_\alpha\otimes\mathbb{C}_\chi\,.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\pi_*\mathrm{Ind}_a D_\chi^{\mathrm{Wong}} &= \textstyle\sum_{W_\alpha\subset S_+^{L/L\cap K}}\big(\dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(W_{\chi+\alpha}\otimes\wedge^{\mathrm{pair}}(\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}}\cap\mathfrak{k})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\\ &\qquad - \dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(W_{\chi+\alpha}\otimes\wedge^{\mathrm{impair}}(\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}}\cap\mathfrak{k})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\big)\\ &\quad - \textstyle\sum_{W_\alpha\subset S_-^{L/L\cap K}}\big(\dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(W_{\chi+\alpha}\otimes\wedge^{\mathrm{pair}}(\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}}\cap\mathfrak{k})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\\ &\qquad - \dim \mathrm{Hom}_{L\cap K}\left(W_{\chi+\alpha}\otimes\wedge^{\mathrm{impair}}(\mathfrak{p}^+\oplus\overline{\mathfrak{u}}\cap\mathfrak{k})\,;\,\mathcal{H}_\pi\right)\big)\\ &= \textstyle\sum_{W_\alpha\subset S^{L/L\cap K}}(-1)^{|\alpha|}\,\pi_*\mathrm{Ind}_a\,D_{\chi+\alpha}^{G/L\cap K}\,.\end{aligned}$$

La conclusion résulte alors du théorème précédent. □

Appliquons la formule précédente à $G=\mathrm{Sp}(n,1)$, $L=\mathbb{T}^k\times\mathrm{Sp}(n-k,1)$, $\mu=\sum_{j=1}^k\mu_j\varepsilon_j$, et $\lambda=\mu_L+2\rho(\mathfrak{u})-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})=\mu+2\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})$. Nous avons donc :

$$\mathrm{Ind}_a\,D_\lambda^{\mathrm{Wong}}=(-1)^s\sum_\alpha(-1)^\alpha\mathrm{Ind}_a\,D^{G/K}_{\mu+\alpha-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})}\,,\tag{4.13}$$

où α parcourt l'ensemble des représentations irréductibles de $S^{L/L\cap K}$ telles que $\mu+\alpha-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})+\rho_c$ soit Δ_c^+–régulier.

Le lemme suivant est une reformulation du lemme 3.13 pour le groupe L.

Lemme 4.35. *Soient*

$$\tilde{C}_i(\mathfrak{l})=\{\eta=\sum_{j=1}^{n+1}\eta_j\varepsilon_j\,;\,\eta_{k+1}\geq\cdots\geq\eta_i\geq\eta_{n+1}\geq\eta_{i+1}\geq\cdots\geq\eta_n\}\,,$$

et $C_i(\mathfrak{l})$ le système de racines positives pour $\Delta(\mathfrak{l})$ associé à cette chambre de Weyl fermée, et $\rho_n^i(\mathfrak{l})$ la demi–somme des racines non–compactes positives pour $\mathfrak{l}$. Alors,

$$S^{L/L\cap K}=\sum_{i=k}^n W_{\rho_n^i(\mathfrak{l})}\quad S_+^{L/L\cap K}=\sum_{i\ \mathit{pair}}W_{\rho_n^{n-i}(\mathfrak{l})}\quad S_-^{L/L\cap K}=\sum_{i\ \mathit{impair}}W_{\rho_n^{n-i}(\mathfrak{l})}\,.$$

Lemme 4.36. *Soit I^μ l'unique série isolée de K-type minimal μ. Posons $I^\mu = J_{\xi_\mu,\nu}$. Alors,*

1. $\chi_{\Lambda_{\xi_\mu,\nu}} = \chi_{\mu+\rho_n^k(\mathfrak{l})-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})+\rho_c}$. *Soit χ ce caractère infinitésimal. Alors χ est Δ_c^+–régulier.*
2. (a) *χ est régulier (par rapport à Δ) si et seulement si $\mu_k > 1$. Si χ est régulier, alors pour tout $i = 1,\ldots,n$, $\chi_{\mu+\rho_n^i(\mathfrak{l})-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})+\rho_c} = \chi$,*

   (b) *Supposons que $\mu_k = 1$ (χ est singulier). Alors, pour tout $i > k$, $\mu+\rho_n^i(\mathfrak{l})-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})+\rho_c$ est singulier par rapport à Δ_c^+.*

Démonstration. On vérifie facilement que

$$\begin{array}{rcl} \rho_c &=& \sum_{j=1}^n (n-j+1)\varepsilon_j + \varepsilon_{n+1} \\ \rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p}) &=& \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \\ \rho_n^i(\mathfrak{l}) &=& \sum_{j=k+1}^i \varepsilon_j + (n-i)\varepsilon_{n+1}\,. \end{array} \tag{4.14}$$

D'où,

$$\mu+\rho_n^i(\mathfrak{l})-\rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p})+\rho_c = \sum_{j=1}^k(\mu_j+n-j)\varepsilon_j + \sum_{j=k+1}^i (n-j+2)\varepsilon_j + \sum_{j=i+1}^n (n-j+1)\varepsilon_j + (n-i+1)\varepsilon_{n+1}\,.$$

Calculons maintenant $\overline{\lambda}(\mu)$. On a

$$\mu + 2\rho_c = \sum_{j=1}^k (\mu_j + 2n - 2j + 2)\varepsilon_j + \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+2)\varepsilon_j + 2\varepsilon_{n+1}\,.$$

Nous voyons que $\mu+2\rho_c$ est dominant par rapport à Δ^+ et pour $\beta = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$, $\frac{2\langle\mu+2\rho_c-\rho,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle} = -1$. Il vient alors

$$\overline{\lambda}(\mu) = \sum_{j=1}^k (\mu_j + n - j)\varepsilon_j + \sum_{j=k+1}^{n-1} (n-j)\varepsilon_j + 1/2(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})\,.$$

Le sous–groupe parabolique $P' = M'A'N'$ déterminé par $\overline{\lambda}(\mu)$ l'est par le choix de β. Nous trouvons $\mathfrak{a}_0' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$, le bloc supérieur gauche étant carré de taille $n-1$. Alors M' est le centralisateur de $\mathfrak{a}_0'$ dans K. Avec les notations similaires à celles de la première partie, nous voyons que $\overline{\lambda}(\mu)$ correspond à la représentation de plus haut poids $\xi_\mu = \sum_{j=3}^{k+2} \mu_{j-2} e_j'$. Le paramètre de Langlands est (avec $\nu = (n-k+1/2)(e_1' + e_2')$)

$$\Lambda_{\xi,\nu} = (n-k+1)e_1' + (n-k)e_2' + \sum_{j=3}^{k+2} (\mu_{j-2} + n - j + 2)e_j' + \sum_{j=k+3}^{n+1} (n-j+2)e_{n+1}'\,,$$

et cette forme linéaire est dans la chambre $P_{k,k+1}'$. Soit τ l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui envoie $\mathfrak{b}' \oplus \mathfrak{a}'$ sur $\mathfrak{t}$ et $P_{k,k+1}'$ sur C_k. Il vient

$$\tau(\Lambda_{\xi_\mu,\nu}) = \mu + \rho_n^k(\mathfrak{l}) - \rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p}) + \rho_c\,.$$

Ceci démontre la première assertion et le début de la deuxième est alors claire. En outre, si χ est singulier, on voit que $\mu + \rho_n^i(\mathfrak{l}) - \rho(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p}) + \rho_c$ est orthogonale à la racine compacte $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$, pour tout $i > k$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Théorème 4.37. *Si* $\mu_k > 1$, *alors*

$$\mathrm{Ind}_a\, D_\lambda^{\mathrm{Wong}} = \sum_{i=k}^{n} [\pi_i(\chi)] + \sum_{i=p(\chi)}^{k} (n-k-1)[J_i(\chi)] + \sum_{i=k+1}^{n-2} (n-i-2)[J_i(\chi)]\,.$$

Si $\mu_k = 1$, *alors*

$$\mathrm{Ind}_a\, D_\lambda^{\mathrm{Wong}} = [\pi(\chi)] + [J(\chi)]\,.$$

Démonstration. Tout d'abord, montrons que $(-1)^s = 1$. En effet,

$$\begin{aligned} s &= 1/2(\dim \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) - \dim \mathbb{T}^k \times \mathrm{Sp}(n-k) \times \mathrm{Sp}(1)) \\ &= 1/2(2n^2 - n - k - 2(n-k)^2 + n - k = k(2n-k+1) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)\,. \end{aligned}$$

En se reportant au théorème 3.8, ainsi qu'au lemme 4.36, la conclusion résulte de l'équation (4.13). □

Annexe A

Structure de la C^*–algèbre maximale de $\mathrm{Sp}(n,1)$

A.1 Extensions des C^*–algèbres

Dans cette partie, nous rappelons certains résultats de C. Delaroche sur les extensions des C^*-algèbres. L'application en vue est la détermination explicite de la structure de certains idéaux fermés de $C^*(G)$. Le théorème de structure obtenu pour ces idéaux fait l'objet du dernier paragraphe. Cette méthode a déjà été utilisée par C. Delaroche [18, VIII.6] pour déterminer, après JM. Fell, la structure de $C^*(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ puis par R. Boyer et R. Martin [16] pour déterminer la structure de la C^*-algèbre maximale du groupe de De Sitter, $\mathrm{SO}_e(4,1) \simeq \mathrm{Sp}(1,1)$.

La connaissance de l'ensemble $\{\sigma_i\}$ dans la formule

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Trace}\, \pi_n(x) = \sum \mathrm{Trace}\, \sigma_i(x)$$

nous a permis de déterminer complètement la topologie de Fell sur $\hat{G}$. Bien-sûr, cela est insuffisant pour déterminer la structure de $C^*(G)$; il faut un invariant plus fin. Cependant réécrivons la formule précédente sous la forme

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Trace}\, \pi_n(x) = \sum \mathrm{Trace}\, n_i\sigma_i(x)\,,$$

où les représentations σ_i sont maintenant supposées non-équivalentes. Nous allons voir que la connaissance de l'ensemble $\{(\sigma_i, n_i)\}$ est un invariant satisfaisant et permet de déterminer explicitement $C^*(G)$.

Le cadre naturel pour énoncer précisément un tel résultat est celui de la théorie des extensions.

Soient A et C des C^*-algèbres. Une extension de A par C est la donnée d'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0\,.$$

Soit X un espace localement compact et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension dénombrable. Soit

$$A = \mathcal{C}_0(X, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

la C^*-algèbre des fonctions sur X à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Proposition A.1. *Le groupe* $\mathrm{Aut}(A)$ *des automorphismes de* A *est en bijection avec l'ensemble des couples* (h,v)*. Si* h *est un homéomorphisme de* X *sur lui-même, et* $v \in \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(\mathcal{H}))$ *où* $\mathcal{PU}(\mathcal{H})$ *est le quotient du groupe unitaire par son centre, muni de la topologie forte, alors pour tout* $a \in A$*, la fonction*

$$x \longmapsto v(x)a(h(x))$$

définit un élément $\alpha_{h,v}(a) \in A$*. De plus, l'application qui à tout* (h,v) *fait correspondre l'automorphisme* $\alpha_{h,v}$ *de* A *définit une bijection de* $\mathrm{Aut}(X) \times \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(\mathcal{H}))$ *sur* $\mathrm{Aut}(A)$*.*

Deux extensions B et B' de A par C sont dites semi-équivalentes s'il existe $v \in \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(\mathcal{H}))$ et β un isomorphisme de B sur B' rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dd, "\alpha_v"] & B \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta"] & & \\ & & & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B' \arrow[ur] & & \end{tikzcd} .$$

Définition A.2. *Soit* X, Y *deux espaces topologiques. Une extension* (Z, ψ_X, ψ_Y) *de* X *par* Y *est la donnée d'un espace topologique* Z*, d'un homéomorphisme* ψ_X *de* X *sur un ouvert de* Z*, et d'un homéomorphisme de* Y *sur le fermé* $Z \setminus \psi_X(X)$*.*

Deux extensions (Z, ψ_X, ψ_Y) *et* (Z', ψ'_X, ψ'_Y) *de* X *par* Y *sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme* $g : Z \to Z'$ *tel que* $\psi'_X = g \circ \psi_X$ *et* $\psi'_Y = g \circ \psi_Y$*.*

Supposons que Y est discret, fini, et que X est localement compact. L'ensemble $\mathcal{P}(Y)$ des parties de Y est muni de la topologie discrète.

Proposition A.3. *Soit* X_1 *une compactification de* X *et* $f : X_1 \setminus X \to \mathcal{P}(Y)$ *une application continue. Alors l'ensemble* Ω *des parties* $\mathcal{O}$ *de* $X \amalg Y$ *telles que*

$$(\mathcal{O} \cap X) \cup \{x \in X_1 \,;\, f(x) \cap (\mathcal{O} \cap Y) \neq \varnothing\}$$

est ouvert dans X_1 *est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur* $X \amalg Y$ *qui en fait une extension localement quasi-compacte* Z_f *de* X *par* Y*. De plus, les points de* X *sont fermés et séparés dans* Z_f *et, si* $x \in X_1 \setminus X$*, la trace* θ_x *sur* X *du filtre des voisinages de* x *dans* X_1 *converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence et* $f(x)$ *est l'ensemble des limites de* θ_x*.*

Dans les applications, $X_1 \setminus X$ sera fini. Dans ce cas, la démonstration de la proposition ne pose pas de problème. Nous allons maintenant classsifier les extensions de A par $C = \mathcal{C}_0\big(Y, \mathcal{K}(\mathcal{H})\big) = \oplus_Y \mathcal{K}(\mathcal{H})$ telles que $\hat{B} = Z_f$ pour certains f.

Définition A.4. *Soit* D *une* C^**-algèbre, et* T *un ensemble de représentations de* D*. Soit* θ *un filtre sur* T*. Un élément* $x \in D$ *est encadré suivant* θ *s'il existe* $V \in \theta$*, tel que*

$$\operatorname*{Sup}_{\pi \in V} \mathrm{Rang}(\pi(x)) < \infty\,.$$

Remarquons que si $D = C^*(G)$ où G est un groupe de Lie semi-simple connexe linéaire, l'idéal des éléments de D qui sont encadrés suivant $\hat{D} = \hat{G}$ est dense, d'après la proposition 2.10. Une telle C^*-algèbre est dite uniformément liminaire.

Théorème A.5. *[18, théorème VI.3.8]*

1) Supposons que $X_1 \setminus X = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ *est fini. Pour* $i = 1, \ldots, n$, *donnons-nous une famille* $(\pi_{ij})_{1 \leq j \leq q_i}$, $(q_i \in \mathbb{N}^*)$, *d'éléments de* Y *tels que si* $j \neq j'$, *alors* $\pi_{ij} \neq \pi_{ij'}$. *Notons*

$$f : X_1 \setminus X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

l'application définie par

$$\begin{cases} f(x_i) = \varnothing & \text{si} \quad i \geq n+1 \\ f(x_i) = \{\pi_{ij} \,;\, 1 \leq j \leq q_i\} & \text{si} \quad i \leq n \end{cases} .$$

Alors f *détermine une extension* Z_f *de* X *par* Y.

2) Pour $i = 1, \ldots, m$, *notons* θ^i *la trace sur* X *du filtre des voisinages de* x_i *dans* X_1. *Alors, pour* $i = 1, \ldots, n$, θ^i *se divise en un nombre fini de bouts,* $\theta^i_1, \ldots, \theta^i_{s_i}$.

Soit B *une extension de* A *par* C *telle que* $\hat{B} = Z_f$. *Alors* B *est uniformément liminaire et il existe des fonctions* $k^i_1, \ldots k^i_{s_i}$ *de* $\{1, \ldots, q_i\}$ *dans* $\mathbb{N}^*$ *telles que pour tout* $b \in B$ *encadré suivant* θ^i_r $(1 \leq r \leq s_i)$, *on ait*

$$\lim_{\pi \in \theta^i_r} \mathrm{Trace}\pi(b) = \sum_{j=1}^{q_i} k^i_r(j) \mathrm{Trace}\pi_{ij}(b) .$$

3) Soit θ *la trace sur* X *du filtre des voisinage de l'ouvert* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *dans* X_1. *Supposons de plus que pour tout voisinage* W *de* x_i $(i = 1, \ldots, n)$ *dans* X *et tout champ de projecteurs compacts de rang constant il existe* $W' \subset W$ *tel que ce champ soit trivial sur* W' *; supposons également qu'il existe* $V \in \theta$ *tel que* θ *possède une base formée de rétractes de* V.

Alors l'application

$$B \longmapsto (k^i_r)_{(i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,q_i)} ,$$

définit une bijection entre l'ensemble des classes de semi-équivalence des extensions B *de* A *par* C *telles que* $\hat{B} = Z_f$ *et l'ensemble des suites* (k^i_r). *Plus précisément, si* (k^i_r) *est donnée, posons* $h^i_r(0) = 0$ *et* $h^i_r(j) = \sum_{p=1}^{j} k^i_r(p)$. *Identifions* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}' \otimes \ell^2(\mathbb{N}^*)$ *et soit* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}*}$ *la base canonique de* $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. *Notons* Pe_i *la projection orthogonale sur* $\mathbb{C}e_i$. *Alors* B *est isomorphe à la* C^**-algèbre des couples* $(m, c) \in \mathcal{C}^b(X, \mathcal{K}(\mathcal{H})) \times C$ *tels que*

$$\begin{array}{ll} \lim_{\pi \in \theta^i_r} \pi(m) = \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{p=h^i_r(j-1)+1} \pi_{ij}(c) \otimes Pe_p & i = 1, \ldots, n \\ \lim_{\pi \in \theta^i} \pi(m) = 0 & i = n+1, \ldots, m \end{array} .$$

A.2 Etude explicite de la topologie du dual unitaire

Suite de composition pour $\mathrm{Sp}(n, 1)$

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de M.W. Baldoni Silva [3] qui permettent de trouver les sous–quotients des séries principales généralisées $\pi_{\xi,\nu}$, avec $\xi \in \hat{M}$, et où $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ vérifie $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ ou $\mathrm{Re}\,\nu = 0$ et $\mathrm{Im}\,\nu \geq 0$.

Lemme A.6. *Si* $\Lambda_{\xi,\nu}$ *n'est pas intégral, alors* $\pi_{\xi,\nu}$ *est irréductible.*

Nous nous intéressons donc uniquement aux représentations induites dont le caractère infinitésimal est intégral. Remarquons que si $\gamma = \sum a_i e_i \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$ est intégral, alors $a_i \in \mathbb{Z}$.

Le cas régulier

Soit χ un caractère infinitésimal intégral régulier. Nous avons besoin de paramétrer les représentations irréductibles de caractère infinitésimal χ. Pour $j = 0, \ldots, n$, soit C_j le système de racines positives dans Δ définie par la chambre de Weyl fermée

$$\tilde{C}_j = \left\{ \sum a_i \epsilon_i \, ; \, a_1 \geq \cdots \geq a_j \geq a_{n+1} \geq a_{j+1} \cdots \geq a_n \geq 0 \right\} .$$

Notons que Δ^+ correspond à la chambre C_n. Pour $j = 0, \ldots, n$, il existe un unique $\lambda_j \in \tilde{C}_j$ tel que $\chi_{\lambda_j} = \chi$. Les séries discrètes de caractère infinitésimal χ sont celles dont le paramètre de Harish–Chandra sont les λ_j. Notons $\pi_j(\chi)$ (ou π_{λ_j}) la série discrète dont le paramètre de Harish chandra est λ_j.

A équivalence près les séries principales (généralisées) de caractère infinitésimal χ ont un paramètre de Langlands $\gamma = \Lambda_{\xi,\nu} = \sum a_i e_i$ vérifiant

$$\begin{array}{ll} 1 - & \chi_\gamma = \chi \,, \\ 2 - & \mathrm{Re}\,(a_1 + a_2) > 0 \text{ ou } \mathrm{Re}\,(a_1 + a_2) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}\,(a_1 + a_2) \geq 0 \,. \end{array} \tag{A.1}$$

Pour $0 \leq i < j \leq n+1$, soit P_{ij} le système de racines positives dans Φ correspondant à la chambre de Weyl

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,j} = \{ \textstyle\sum a_i e_i \, ; \, a_3 \geq \cdots \quad & \geq a_{i+2} \geq a_1 \geq a_{i+3} \geq \cdots \\ & \geq a_{j+1} \geq a_2 \geq a_{j+2} \geq \cdots \geq a_{n+1} \geq 0 \} \,, \end{aligned}$$

et pour $0 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq n-i$, soit P_{ij} le système correspondant à la chambre

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,j} = \{ \textstyle\sum a_i e_i \, ; \, a_3 \geq \cdots \quad & \geq a_{i+2} \geq a_1 \geq a_{i+3} \geq \cdots \\ & \geq a_{2n+2-j} \geq -a_2 \geq a_{2n+3-j} \geq \cdots \geq a_{n+1} \geq 0 \} \,. \end{aligned}$$

Les systèmes de racines positives P_{ij} sont ceux tels que si γ vérifie les équations A.1, il existe i et j uniques tels que $\gamma \in \tilde{P}_{ij}$. Notons $\pi_{ij}(\chi)$ (ou $\pi(\gamma)$) l'unique série principale de caractère infinitésimal χ tel que son paramètre de Langlands $\gamma \in \tilde{P}_{ij}$. Soit $J_{ij}(\chi)$ le quotient de Langlands de $\pi_{ij}(\chi)$.

D'après le théorème de classification de Langlands, les représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{Sp}(n,1)$ de caractère infinitésimal χ sont les quotients de Langlands $J_{ij}(\chi)$ et les séries discrètes $\pi_j(\chi)$. Le caractère de $\pi_{ij}(\chi)$ s'écrit donc comme somme de caractères irréductibles $\theta(J_{k,l}(\chi))$ et $\theta(\pi_k(\chi))$. Autrement dit on a une formule du type

$$\theta(\pi_{ij}(\chi)) = \sum n_{ij}(k,l,\chi)\theta(J_{kl}(\chi)) + \sum n_{ij}(k,\chi)\theta(\pi_k(\chi)) \,.$$

Théorème A.7. *Les nombres $n_{ij}(k,l,\chi)$ et $n_{ijk}(\chi)$ ne dépendent pas du caractère infinitésimal χ intégral régulier choisi. On peut donc supprimer χ de la notation. Avec cette convention, les nombres $n_{ij}(k,l)$ et $n_{ij}(k)$ sont déterminés de la façon suivante.*

– *Si $i + j = 2n$ et $n+1 \leq j \leq 2n$,*

$$\theta(\pi_{i,j}) = \theta(J_{i,j}) + \theta(\pi_i) + \theta(\pi_{i+1}) \,,$$

– *si $i + j = 2n - 1$ et $n+1 \leq j \leq 2n-1$,*

$$\theta(\pi_{i,j}) = \theta(J_{i,j}) + \theta(J_{i+1,j}) + \theta(J_{i,j+1}) + \theta(\pi_{i+1}) \,,$$

- *si* $i = n-2$ *et* $j = n-1$,
$$\theta(\pi_{i,j}) = \theta(J_{i,j}) + \theta(J_{i,j+1}) + \theta(\pi_{i+2}),$$
- *si* $i = n-1$ *et* $j = n$,
$$\theta(\pi_{i,j}) = \theta(J_{i,j}) + \theta(J_{i,j+1}),$$
- *si* $j - i = 2$ *et* $1 \leq j < n-1$,
$$\theta(\pi_{i,j}) = \theta(J_{i,j}) + \theta(J_{i+1,j}) + \theta(J_{i,j+1}) + \theta(J_{i+1,j+1}) + \theta(J_{i+2,j+1}),$$
- *si* $i = n-2$ *et* $j = n$,
$$\theta(\pi_{i,j}) = \theta(J_{i,j}) + \theta(J_{i+1,j}) + \theta(J_{i,j+1}) + \theta(J_{i+1,j+1}) + \theta(\pi_{i+2}),$$
- *sinon*
$$\theta(\pi_{i,j}) = \theta(J_{i,j}) + \theta(J_{i+1,j}) + \theta(J_{i,j+1}) + \theta(J_{i+1,j+1}).$$

Définition des graphes $G_n^{(\mathrm{r})}$. Associons à l'entier $r \in \{0, \dots, n\}$, le couple $(r, 2n+1-r)$ Renommons $n_{ij}(k, 2n+1-k))$ les entiers $n_{ij}(k)$. Considérons le graphe orienté $G_n^{(\mathrm{r})}$ défini comme suit. Les sommets sont les points de l'ensemble
$$\{(i,j)\,;\, 0 \leq i < j \leq n\,, \text{ou bien}\, 0 \leq i \leq n-1\,,\, n+1 \leq j \leq 2n-i+1\}.$$
Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de caractère infinitésimal χ. Il existe une arrête de (i,j) vers (k,l) si $n_{ij}(kl) \neq 0$ et $(i,j) \neq (k,l)$. Ce graphe est sans boucle.

Exemple A.8. *Soit* $n = 5$. *Le graphe* $G_5^{(\mathrm{r})}$ *est représenté sur la figure A.1.*

Le cas singulier

Soient χ un caractère infinitésimal intégral singulier et $\gamma = \sum_{j=1}^{n+1} a_j e_j$ tel que $\chi_\gamma = \chi$. On a alors $a_j \in \mathbb{Z}$ et
$$a_1 > a_2\,, \quad a_1 \geq -a_2\,, \quad a_3 > \cdots > a_{n+1} > 0\,. \tag{A.2}$$
Ces conditions impliquent γ est contenu dans au plus deux murs.

Théorème A.9. *Si* γ *est contenu dans deux murs, alors* $\pi(\gamma)$ *est irréductible.*

Supposons donc que γ est contenu dans exactement un mur. Soit $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\chi = \chi_\lambda$. Alors il existe un unique $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que λ soit contenu dans le mur séparant $\tilde{C}_i$ et $\tilde{C}_{i+1}$. Soit ρ^j la demi–somme des racines positives du système C_j, pour $j = 0, \dots, n$. Alors $\lambda + \rho^i$ et $\lambda + \rho^{i+1}$ sont réguliers par rapports à C_i et C_{i+1} respectivement. Notons $\Psi_\lambda^{\lambda'}$ le foncteur de translation de Zuckerman, avec les notations de [29, Chapitre X, section 9]. Alors on peut associer à λ deux limites de séries discrètes, déterminées par le choix entre C_i et C_{i+1}. Plus précisement, les limites de séries discrètes π_λ^- et π_λ^+ sont définies par

- $\pi_\lambda^+ = \Psi_\lambda^{\lambda+\rho^{i+1}}(\pi_{\lambda+\rho^{i+1}})$
- $\pi_\lambda^- = \Psi_\lambda^{\lambda+\rho^{i}}(\pi_{\lambda+\rho^{i}})$.

Toutes les limites (non–dégénérées) de séries discrètes sont obtenues de cette façon. Lorsque $\pi_{\xi,0}$ est réductible, elle est somme de deux limites de séries discrètes. Le théorème suivant permet notamment de retrouver leurs paramètres.

On considère les cas suivants :

1. $a_2 = -a_1$,
2. $a_2 = 0$,
3. $a_1 = a_p$ pour $p \in \{3,\ldots,n+1\}$ et $a_2 > 0$,
4. $a_1 = a_p$ pour $p \in \{3,\ldots,n+1\}$ et $a_2 < 0$,
5. $a_2 = a_p$ pour $p \in \{3,\ldots,n+1\}$,
6. $a_2 = -a_p$ pour $p \in \{3,\ldots,n+1\}$.

Selon que γ est dans le cas 1),...,6), notons b l'entier $a_1, a_1, a_2, -a_2, a_1, a_1$, respectivement. Soit q l'entier défini comme suit : Si $b > a_3$, $q = 1$, si $b < a_{n+1}$, $q = n$, sinon q est l'entier tel que $a_{q+1} > b > a_{q+2}$.

Dans ce qui suit, τ désigne le dual de la restriction à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ d'un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ appliquant $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$.

Théorème A.10. *Si γ est*

– *dans le cas 1)*

$$\theta(\pi(\gamma)) = \theta(\pi^+(\tau\gamma)) + \theta(\pi^-(\tau\gamma)) \quad \text{avec}\, \tau(P_{q-1,2n-q+1}) = C_{q-1}$$

– *dans le cas 2) et $q = n$, $\pi(\gamma)$ est irréductible*

– *dans le cas 5) et $p = n+1$ et $q = n-1$*

$$\theta(\pi(\gamma)) = \theta(J(\gamma)) + \theta(\pi^+(\tau\gamma)) \quad \text{avec}\, \tau(P_{n-2,n}) = C_n$$

– *dans le cas 5) et $p \leq n$ et $q = p-2$*

$$\theta(\pi(\gamma)) = \theta(J(\gamma)) + \theta(J(w\gamma)) \quad \text{avec}\, w = s_{e_1-e_p}s_{e_2-e_{p+1}}$$

– *dans le cas 6) et $q = p-2$*

$$\theta(\pi(\gamma)) = \theta(J(\gamma)) + \theta(\pi^-(\tau\gamma)) \quad \text{avec}\, \tau(P_{p-3,2n+2-p}) = C_{p-2}$$

– *dans le cas 4) et $q = p-1$*

$$\theta(\pi(\gamma)) = \theta(J(\gamma)) + \theta(\pi^+(\tau\gamma)) \quad \text{avec}\, \tau(P_{p+2,2n+2-p}) = C_{p-2}$$

– *dans les autres cas*

$$\theta(\pi(\gamma)) = \theta(J(\gamma)) + \theta(J(w\gamma))$$

où

$$w = \begin{cases} s_{e_1-e_{q+2}} & \text{dans les cas 2), 5), 6)} \\ s_{e_2-e_{q+2}} & \text{dans le cas 3)}, q \leq n-1 \\ s_{2e_2} & \text{dans le cas 3)}, q = n \\ s_{e_{q+1}+e_2} & \text{dans le cas 4)} \end{cases}$$

Définitions des graphes $G^{(s)}_{n,i}$ et de $i(\chi)$. Soit $\gamma = \sum a_j e_j$ singulier contenu dans exactement un mur exactement. Posons $a = a_1$ si $a_1 = a_{i+1}$ pour $2 \leq i \leq n$ et $a = |a_2|$ si $a_2 = \pm a_i$ pour $3 \leq i \leq n+1$ ou $a_2 = 0$. Si $a_2 = 0$, posons $i = n+2$.Si $a_1 = -a_2$, il existe $3 \leq i \leq n+1$ tel que $a_i > a_1 = -a_2 > a_{i+1}$. dans ce cas posons $a = a_1$. Les représentations principales $\pi(\gamma')$ où $\gamma' = \sum a'_j e_j$ telles que $\chi_{\gamma'} = \chi_\gamma$ sont exactement celles vérifiant $\{a'_j\} = \{a_j\}$ et $a'_1 \geq a \geq \pm a'_2$ si $a \neq 0$ où exactement une des deux inégalités est une égalité et $a'_2 = 0$ sinon. Remarquons que l'entier i ne dépend que de $\chi = \chi_\gamma$. Notons cet entier $i(\chi)$.

On définit alors le graphe suivant. L'ensemble des sommets est l'ensemble des représentations irréductibles admissibles de même caractère infinitésimal que $\pi(\gamma)$ et on place une arrête de π vers π' si $\pi \neq \pi'$, π est un quotient de Langlands de la forme $J(\gamma')$ et π' est un sous-quotient de $\pi(\gamma')$. Il est facile de voir que l'on obtient $n+1$ graphes distincts lorsque l'on fait varier le caractère infinitésimal intégral singulier, et que ce graphe ne dépend que de $i(\chi)$. Les graphes ainsi obtenus seront notés $G_{n,i}^{(\mathrm{s})}$ respectivement. Notons que si γ est dans cas 1. ($a_2 = -a_1$), et q comme dans le théorème A.10, on a $i(\chi) = q+1$, et donc $\tau\gamma \in \tilde{C}_{i(\chi)-2} \cap \tilde{C}_{i(\chi)-1}$.

Exemple A.11. *Soit $n = 5$. Les graphes $G_{5,i}^{(\mathrm{s})}$ sont représentés sur la figure A.2.*

Longueurs des séries complémentaires

Nous rappelons dans ce paragraphe comment on calcule pour ξ donné, $\nu(\xi)$. Ce travail a été effectué par M.W. Baldoni–Silva [4]. Soit $\xi \in \hat{M}$ tel que $\nu(\xi) > 0$, et posons $\nu(\xi) = c(\xi)(e_1+e_2)$.

Définition A.12. *Soit $\xi = (b; b_3, \cdots, b_{n+1}) \in \hat{M}$.*

1. *L'entier $i \in \{2, \ldots, n+1\}$ est défini comme suit.*
   - *Si $a_{n+1} \geq b + 1/2$ alors $i = n+1$,*
   - *si $b + 1/2 > a_3$, alors $i = 2$,*
   - *sinon, i est l'unique entier tel que :*

$$a_i \geq b + 1/2 > a_{i+1}\,.$$

2. *Lorsque $b = 0$ ou $b = 1/2$ (donc $i = n+1$), définissons $k \in \{2, \ldots, n+1\}$ comme suit :*
   - *Si $b_3 = 0$ alors $k = 2$,*
   - *si $b_{n+1} \geq 1$, alors $k = n+1$,*
   - *sinon, k est le plus grand entier tel que*

$$b_k \neq 0 \quad (\text{donc} \quad b_{k+1} = \cdots = b_{n+1} = 0)\,.$$

Définitions A.13. *Soit $\xi = (b; b_3, \ldots, b_{n+1}) \in \hat{M}$.*

1. *Supposons que $b \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = b_{i+1}$ avec $1 \leq i \leq n$.*
   (a) *Si $b_i = b_{i+1} = 0$, alors t est le plus grand entier, $1 \leq t \leq i-2$ tel que $b_{i-t+1} = 0$;*
   (b) *si $b_i = b_{i+1} \geq 1$, alors t est le plus grand entier, $1 \leq t \leq \mathrm{Min}(n-i+1, i-2)$ tel que*

$$b_{i-t+1} = \cdots = b_i = b_{i+1} = \cdots = b_{i+t}\,.$$

2. *Supposons que $b \in \mathbb{N}^* + 1/2$, $b + 1/2 = a_{l+1}$ pour $3 \leq l \leq n-1$ et $b_l = b_{l+1} = b_{l+2}$.*
   (a) *Si $b_l = 0$, alors t' est le plus grand entier, $1 \leq t' \leq l-1$ tel que $b_{l-t'+2} = 0$;*
   (b) *si $b_l \geq 1$, alors t' est le plus grand entier, $1 \leq t \leq \mathrm{Min}(l-1, n-l+1)$ tel que*

$$b_{l-t'+2} = \cdots = b_l = b_{l+1} = b_{l+2} = \cdots = b_{l+t'}\,.$$

Théorème A.14. *Les séries complémentaires.*

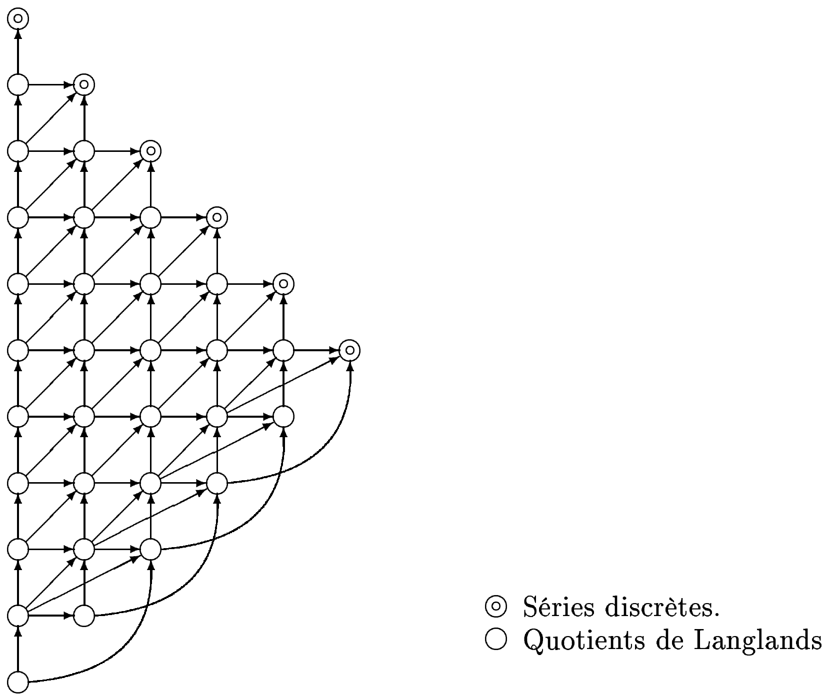

FIG. A.1 – Caractère infinitésimal régulier, $G_5^{(\mathrm{r})}$

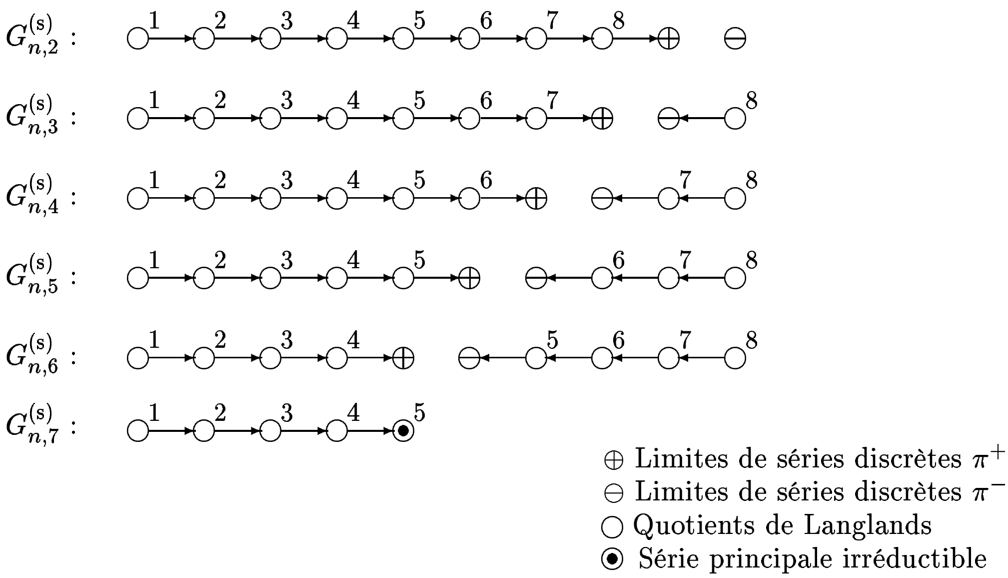

FIG. A.2 – Caractère infinitésimal singulier, $n = 5$.

conditions sur b	*conditions supplémentaires*	*série complementaire*
$b=0$	$k=n+1$ $k\leq n$	$0<c<3/2$ $0<c<n-k+3/2$
$b=1/2$	$2\leq k\leq n$	$0<c<n-k+1$
$b\in\mathbb{N}^*$	*si* $i=2$ *ou si* $i=n+1$ *ou si* $3\leq i\leq n$ *et* $b_i>b_{i+1}$ *si* $3\leq i\leq n$ *et* $b_i=b_{i+1}$	$0<c<1/2$ $0<c<t+1/2$
$b\in\mathbb{N}^*+1/2$ *et* $b+1/2=a_{l+1}$ *pour* $2\leq l\leq n$	*si* $l=2$ *ou si* $l=n$ *et* $b>1/2$ *ou si* $3\leq l\leq n-1$ *et* $(b_l>b_{l+1}\,\text{ou}\,b_{l+1}>b_{l+2})$ *si* $b_l=b_{l+1}=b_{l+2}$	$0<c<1$ $0<c<t'$

Etude des idéaux de $C^*(G)$

Dans cette partie, nous décrivons explicitement certaines parties ouvertes et fermées ne contenant qu'un nombre fini de séries continues (principales et complémentaires) de $\hat{G}$ dont la réunion disjointe est $\hat{G}$. Nous décrivons également leur topologie. Cela suffit à décrire la structure des idéaux fermés associés à ces ouverts, comme nous l'avons rappeler dans l'appendice A.1.

Soit D^+ l'ensemble des caractères inifinitésimaux χ intégraux contenu dans au plus un mur, et tels que $i(\chi)\neq n+2$ si χ est singulier. Soit χ in D^+. On définit des parties $\hat{G}'(\chi)$ et $\hat{G}(\chi)$ comme suit :

1. $\hat{G}'(\chi)=\{\pi\in\mathcal{I}\cup\mathcal{D}\cup\mathcal{L}\,,\chi_\pi=\chi\}$
2. $\hat{G}(\chi)$ est la plus petite partie ouverte et fermée de $\hat{G}$ contenant $\hat{G}'(\chi)$.

Proposition A.15. *$\hat{G}$ est la réunion disjointe des $\hat{G}(\chi)$ pour χ parcourant D^+.*

Corollaire A.16. *Soit $I(\chi)$ l'idéal fermé de $C^*(G)$ correspondant à $\hat{G}(\chi)$. On a*

$$C^*(G)=\oplus_{\chi\in D^+}I(\chi)\,.$$

Nous avons d'abord besoin d'un lemme, qui est intéressant dans la mesure où il montre que la topologie sur $\mathcal{P}\cup\mathcal{C}$ n'est pas tout a fait la topologie induite sur l'espace des paramètres $\hat{M}\times\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. En effet, il peut arriver que $\pi_{\xi,\nu}$ avec $0<\nu<\nu(\xi)$ soit un point adhérent à $\mathcal{PC}(\xi')$ avec $\xi\neq\xi'$. Un tel phénomène se produit dans les cas suivants.

Lemme A.17. *Si $\pi_{\xi,\nu}$ est adhérent à $\mathcal{PC}(\xi')$ (avec $\xi'\neq\xi$) alors*

$$\begin{array}{ll}\Lambda_{\xi,\nu}=1e_1+0e_2+\sum_{i=3}^n a_ie_i+2e_{n+1} & (a_n\geq 3)\,,\\ \Lambda_{\xi',\nu_{\xi'}}=2e_1+0e_2+\sigma_{i=3}^n a'_ie_i+1e_{n+1} & (a'_n\geq 3)\,,\end{array}\tag{A.3}$$

ou autrement dit

$$\begin{array}{ll}\xi=(0;b_3,\dots,b_n,1) & \nu=1/2\,,\\ \xi'=(1/2;b'_3,\dots,b_n\neq 0,0) & \nu(\xi')=1\,.\end{array}\tag{A.4}$$

De plus, ξ' est unique et est entièrement déterminé par ξ.

Démonstration. Soit (ξ,ν) tel que $\pi_{\xi,\nu}$ soit unitaire, irréductible et $0<\nu<\nu\xi$. Supposons que $\pi_{\xi,\nu}$ est adhérent à $\mathcal{PC}(\xi')$ où $\xi'\neq\xi$. On a alors $\chi_{\Lambda_{\xi,\nu}}=\chi_{\Lambda_{\xi',\nu(\xi')}}$. Posons $\gamma=\Lambda_{\xi,\nu}$ et $\gamma'=\Lambda_{\xi',\nu(\xi')}$

Tout d'abord, γ est nécessairement intégral singulier, contenu dans exactement un mur. En effet, il est intégral car les bouts de complémentaires possèdent un paramètre de Langlands intégral, et singulier car les représentations de caractères infinitésimal régulier sont réductibles. Il est contenu dans un seul mur car les séries principales qui sont sous-quotients de $\pi_{\xi',\nu(\xi')}$ possèdent un paramètre de Langlands de la forme $w\gamma'$ et γ' est dans au plus un mur, sinon $\pi_{\xi',\nu(\xi')}$ serait irréductible. Donc $\gamma=w\gamma'$ est contenu dans un mur exactement.

Après un examen du théorème A.10 , on trouve donc les conditions suivantes sur $\gamma=\sum a_ie_i$ et $\gamma'=\sum a_i'e_i$:

$$\begin{aligned} &a_2=0 \quad a_{n+1}>a_1>0\\ &a_2'=0 \quad a_n'>a_1'>a_{n+1}'>0\,. \end{aligned}$$

Ecrivons $\xi'=b'(e_1-e_2)+\sum b_i'e_i$ et $\nu(\xi')=c'(e_1+e_2)$. Les conditions précédentes donnent donc

$$b_n'+2>2c'=2b'+1>b_{n+1}'+1>0\,.$$

On en tire $b'>0$ et $b_n'>b_{n+1}'\geq 0$.

D'autre part, si $b'+1/2\neq a_j'$ $(\forall j=3,\dots,n+1)$ et $b'\in\mathbb{N}+1/2$, il n'y a pas de complémentaire. On peut donc exclure ce cas. Il reste donc deux cas possibles :

1. $b'\in\mathbb{N}^*$,
2. $b'\in\mathbb{N}+1/2$ et $b'+1/2=a_{n+1}$.

Premier cas : On a $c'=b'+1/2>1$. Comme

$$a_n'>2(b'+1/2)>a_{n+1}>0\,, \tag{A.5}$$

on a l'un des deux cas suivants : soit

$$a_n'>b'+1/2>a_{n+1}'>0 \quad \text{et} \quad b_n'>b_{n+1}'\,,$$

soit

$$a_{n+1}'>b'+1/2>0\,.$$

Dans les deux cas, la série complémentaire s'étend jusqu'à $c'=1/2$. Mais alors $2(b'+1/2)=2c'=1$, ce qui contredit l'équation A.5.

Deuxième cas : Si $b'>1/2$, la série complémentaire s'étend jusqu'à $c'=1$. Mais ceci contredit $c'=b'+1/2=a_{n+1}'>1$. Il reste à examiner le cas $b'=1/2$. Il vient alors $c'=b'+1/2=a_{n+1}'=1$, et comme $a_{n+1}'=b_{n+1}'+n+2-(n+1)$, on a aussi $b_{n+1}'=0$. Comme $b_n'>b_{n+1}'$, la série complémentaire s'étend jusqu'à $c'=1$.

Il reste à montrer la dernière assertion. D'après le théorème A.10 et ce qui précède, on a $\gamma=s_{e_{n+1}-e_2}\gamma'$ et ceci détermine γ', donc ξ'. □

Démonstration. (proposition) Soit $\pi\in\hat{G}$. Si $\pi\in\mathcal{D}\cup\mathcal{L}\cup\mathcal{I}$, il existe $\chi\in D^+$ tel que $\chi_\pi=\chi$, car si χ est singulier avec $i(\chi)=n+2$, il n'existe aucune $\pi\in\mathcal{I}\cup\mathcal{D}\cup\mathcal{L}$ telle que $\chi_\pi=\chi$ d'après le lemme A.20.

On peut donc supposer que $\pi\in\mathcal{P}\cup\mathcal{C}\cup\mathcal{B}$. Il existe un unique ξ tel que $\pi\in\mathcal{PC}(\xi)\cup\{J_{\xi,\nu(\xi)}\}$. D'après le théorème 2.12, s'il existe χ tel que $\pi\in\hat{G}(\chi)$, alors $\mathcal{PC}(\xi)\cup\{J_{\xi,\nu(\xi)}\}\subset\hat{G}(\chi)$. Par conséquent on peut supposer que $\pi\in\mathcal{B}$. Donc $\pi=J_{\xi,\nu(\xi)}$. D'après le théorème 2.12, s'il existe

χ, tel que $\pi \in \hat{G}(\chi)$, alors pour tous les sous-quotients π' de $\pi_{\xi,\nu}$ vérifient $\pi' \in \hat{G}(\chi)$. Trois cas peuvent se produire pour π'.

1. $\pi' \in \mathcal{D} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{I}$, et alors χ existe et est determiné de manière unique d'après le début de la démonstration.

2. $\pi' = \pi_{\xi',\nu'} \in \mathcal{C}$. D'après le lemme A.17, on a nécessairement $\nu' = 1/2$, $\nu(\xi') = 3/2$ et s'il existe χ tel que $\pi' \in \hat{G}(\chi)$ alors $\pi_{\xi',3/2} \in \hat{G}(\chi)$. On est alors dans le cas suivant.

3. $\pi' \in \mathcal{B}$. Alors $\pi' = \pi_{\xi',\nu(\xi')}$, d'après la remarque 2.13, $\nu(\xi') < \nu(\xi)$. En procédant par récurrence, on peut donc supposer que $\nu(\xi) = 1$.

La conclusion résulte alors de ce que le cas 2. se produit lorsque $i(\chi) = n + 2$, où χ est le caractère infinitésimal de π et que $\pi_{\xi',3/2}$ possède un caractère infinitésimal χ' vérifiant $i(\chi') = n$. □

Nous allons maintenant décrire les ensembles $\hat{G}(\chi)$. Rappelons que δ la demi–somme des racines positives de Φ^+, et posons $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, pour $i = 2, \dots, n$.

Définition A.18. *Soit* $\gamma = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \in D^+$ *(intégral contenu dans au plus un mur, tel que* $a_1 \neq -a_2$*).*

1. *Si* γ *est régulier, il existe des entiers* p *et* q *uniques tel que* $\gamma \in P_{p,q}$.
   La forme $\tilde{\gamma}$ *est l'unique forme telle que* $\chi_\gamma = \chi_{\tilde{\gamma}}$ *et* $\tilde{\gamma} \in P_{0,1}$.

2. *Si* $a_2 = 0$*, l'entier* p *est défini par*

$$a_3 > \cdots > a_{p+1} > a_1 > a_{p+2} > \cdots > a_{n+1} > 0\,,$$

   et $\tilde{\gamma}$ *est l'unique forme telle que* $\chi_\gamma = \chi_{\tilde{\gamma}}$ *et* $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_3$

3. *Si* $a_1 = a_i$ *pour* $i = 3, \dots, n+1$*, on pose* $p = i - 2$ *et* q *est l'unique entier tel que*

$$\begin{array}{ll} a_{q+1} > a_2 > a_{q+2} & \text{si}\, a_2 > 0\,, \\ a_{2n+2-q} > -a_2 > a_{2n+3-q} & \text{si}\, a_2 < 0\,. \end{array}$$

   Soit $\tilde{\gamma}$ *l'unique forme telle que* $\chi_\gamma = \chi_{\tilde{\gamma}}$ *et* $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_3$ *si* $a_1 \neq a_3$ *et* $\tilde{\gamma} = s_{2e_2}\gamma'$ *où* $\gamma' = \sum a'_i e_i$ *est l'unique forme telle que* $\chi(\gamma') = \chi(\gamma)$ *et* $a'_1 = -a'_2$ *sinon.*

4. *Si* $|a_2| = a_i$ *pour* $i = 3, \dots, n+1$*, on pose*

$$q = \begin{cases} i - 2 & \text{si}\, a_2 > 0\,, \\ 2n + 3 - i & \text{si}\, a_2 < 0 \end{cases}$$

   et p *est l'unique entier tel que* $a_{p+1} > a_1 > a_{p+2}$.
   Soit $\tilde{\gamma}$ *l'unique forme telle que* $\chi_\gamma = \chi_{\tilde{\gamma}}$ *et* $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_3$.

Proposition A.19. *Soit* γ *comme précédemment.*

a) Le quotient de Langlands $J(\gamma) \in \mathcal{B}$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée.*

1. γ *est régulier,* $(a_2 < 0 \,\text{ou}\, a_2 > 0 \,\text{et}\, q = p + 1 = n)$ *et*

$$\langle \tilde{\gamma} - \delta; \alpha \rangle = 0\,,\ \forall\, \alpha = \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{2n+1-q}\,. \tag{A.6}$$

2. γ *est singulier,*

– *$a_2 < 0$ et*

$$\langle\tilde{\gamma} - \delta;\alpha\rangle = 0 \quad \forall\,\alpha = \begin{cases} \alpha_3,\ldots,\alpha_{2n+1-q}, e_1 - e_3 & \text{si } p = 1 \text{ et } a_1 > a_3 \\ \alpha_{p+1},\ldots,\alpha_{2n+1-q} & \text{sinon .} \end{cases} \tag{A.7}$$

– *($a_2 > 0$ et ($a_2 = a_{q+2}$ ou $a_1 = a_{n+1}$)) ou ($a_2 = 0$ et $p < n$)*

$$\langle\tilde{\gamma} - \delta;\alpha\rangle = 0 \quad \forall\,\alpha = \begin{cases} \alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}, e_1 - e_3 & \text{si } p = 1 \text{ et } a_1 > a_3\ , \\ \alpha_{p+1},\ldots,\alpha_{n+1} & \text{sinon .} \end{cases} \tag{A.8}$$

b) Le quotient de Langlands $J(\gamma) \in \mathcal{I}$ si et seulement si $\gamma = \delta$ (ie $J(\gamma) = 1_G$ est la représentation triviale) ou $a_2 > 0$, $0 < p < n-1$, $p+1 = q$ et

$$\langle\tilde{\gamma} - \delta;\alpha\rangle = 0\,,\ \forall\,\alpha = \alpha_{p+1},\ldots,\alpha_{n+1} \tag{A.9}$$

Pour démontrer ceci nous avons d'abord besoin d'un lemme qui est une simple application du théorème A.14.

Lemme A.20. *a) Soit $J_{\xi,\nu(\xi)}$ un quotient de Langlands au bout d'une complémentaire.*

1. *Si $b = 0$ et $k = n+1$, alors $a_{n+1} \geq a_1 > a_2 > 0$.*
2. *Si $b = 0$ et $2 \leq k \leq n$, alors $a_k > a_1 > a_{k+1} = a_2 > 0$.*
3. *Si $b = 1/2$ et $k = n$, alors $a_n > a_1 > a_{n+1} > 0$ et $a_2 = 0$.*
4. *Si $b = 1/2$ et $2 \leq k \leq n-1$, alors $a_k > a_1 > a_{k+1} > a_{k+2} = a_2 > 0$.*
5. *Si $b \in \mathbb{N}^*$ et ($3 \leq i \leq n$ et $b_i > b_{i+1}$ ou $i = n+1$ ou $i = 2$), alors*
$$a_i \geq a_1 > -a_2 \geq a_{i+1} \text{ et } a_2 < 0\,.$$
6. *Si $b \in \mathbb{N}^*$ et $3 \leq i \leq n$ et $b_i = b_{i+1}$ et ($b_i \neq 0$ ou $i + t < n+1$), alors*
$$a_{i-t} \geq a_1 > a_{i-t+1} > \cdots > a_{i+t} > -a_2 \geq a_{i+t+1} > 0\,.$$
7. *Si $b \in \mathbb{N}^*$ et $3 \leq i \leq n$ et $b_i = b_{i+1}$ et $i + t = n+1$, alors*
$$a_{i-t} > a_1 > a_{i-t+1} > 0 \text{ et } a_2 = 0\,.$$
8. *Si $b \in \mathbb{N}^*$ et $3 \leq i \leq n$ et $b_i = b_{i+1}$ et $i + t > n+1$, alors*
$$a_{i-t} \geq a_1 > a_{i+t+1} > \cdots > a_{2n+3-i-t} = a_2 > 0\,.$$
9. *Si $b \in \mathbb{N}^* + 1/2$ et $b + 1/2 = a_l$ pour $3 \leq l \leq n+1$ et ($b_l > b_{l+1}$ ou $b_{l-1} > b_l$ si $4_leql \leq n$), alors $a_{l-1} \geq a_1 > a_l > -a_2 \geq a_{l+1}$.*
10. *Si $b \in \mathbb{N}^* + 1/2$ et $b + 1/2 = a_{l+1}$ pour $3 \leq l \leq n-1$ et $b_l = b_{l+1} = b_{l+2}$ et ($b_l \neq 0$ ou $l + t' < n+1$), alors*
$$a_{l-t'+1} \geq a_1 > a_{l-t'+2} > \cdots > a_{l+t'} \geq a_{l+t'+1} > 0\,.$$
11. *Si $b \in \mathbb{N}^* + 1/2$ et $b + 1/2 = a_{l+1}$ pour $3 \leq l \leq n-1$ et $b_l = b_{l+1} = b_{l+2}$ et $l + t' = n+1$, alors $a_{l-t'+1} > a_1 > a_{l-t'+2}$ et $a_2 = 0$.*

12. Si $b \in \mathbb{N}^* + 1/2$ *et* $b + 1/2 = a_{l+1}$ *pour* $3 \leq l \leq n-1$ *et* $b_l = b_{l+1} = b_{l+2}$ *et* $l + t' > n+1$, *alors*

$$a_{l-t'+1} > a_1 > a_{l-t'+2} > \cdots > a_{2n+3-t'-l} = -a_2 > 0 \, .$$

b) Soit $J_{\xi,\nu(\xi)+1}$ *une série isolée. Alors*

$$a_k \geq a_1 > a_2 > a_{k+1} > 0 \, , \text{pour } 2 \leq k \leq n \, .$$

L'intérêt de ce lemme est le suivant. Si χ est un caractère infinitésimal, et $\gamma = \sum a_k e_k$ est tel que $\chi_\gamma = \chi$, il existe au plus un des cas du lemme pour lequel γ vérifie les inégalités obtenues sur les a_k. Par exemple, si γ est régulier et vérifie $a_1 > a_3 > a_2 > 0$, $J(\gamma)$ n'est pas unitarisable.

Démonstration. (proposition A.19) Tout d'abord, notons que toutes les implications dans le sens direct sont faciles. Durant la démonstration, si γ et $\tilde{\gamma}$ sont donnés, on notera respectivement a_i, ξ, ν, b, b_i et $\tilde{a}_i, \tilde{\xi}, \tilde{\nu}, \tilde{b}, \tilde{b}_i$, etc. les paramètres qui leur correspondent.

Soit γ régulier avec $a_2 < 0$, et p, q tels que

$$\langle \tilde{\gamma} - \delta; \alpha \rangle = 0 \, , \; \forall \, \alpha = \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{2n+1-q} \, .$$

Supposons que $p + q < 2n$. On a alors $b_{p+3} = \cdots = b_{2n+2-q}$. Soit b' cet entier. Si $b' = 0$, on a $q = n+1$, donc $a_{n+1} = 1$, ce qui impose $a_2 = 0$. Donc $b' \neq 0$. D'autre part, $b = 1/2(a_1 - a_2 - 1) = 1/2(a_{p+3} + 1 + (a_{2n+2-q} - 1) - 1) = b' - 1/2 + (q-p)/2$. On distingue deux cas selon que $p + q$ est pair ou impair.

Si $q - p$ est pair, on a $b \in \mathbb{N}^*$. Guidé par le lemme précédent on définit i et t par

$$\begin{cases} p + 3 = i - t + 1 \\ 2n + 2 - q = i + t \, . \end{cases}$$

On déduit $t = n - (p+q)/2$ et i vérifie $b = a_{i+1}$. Donc $c(\xi) = t + 1/2 = n - (p+q)/2 + 1/2$ et $c = 1/2(a_1 + a_2) = 1/2(b + n - (p+3) + 2 + b + n - (2n + 2 - q) + 2) = b - (p+q)/2 - 1/2 = n - q + 1 - (p+q)/2 - 1/2 = c(\xi)$. Donc si $p+q$ est pair, $J(\gamma)$ est au bout de la complémentaire.

Si $q - p$ est impair, on a $b \in \mathbb{N} + 1/2$. Si $b = 1/2$, alors $p + q = 2n - 1$ donc $a_1 > a_{p+3} > -a_2 = a_1 - 2$. D'où $a_1 - 3/2 = 1/2(2a_1 - 2 - 1) = b = 1/2$, ce qui impose $a_2 = 0$. Donc $b \neq 1/2$. On peut donc supposer que $b > 1/2$. La démonstration se déroule alors comme dans le cas $p + q$ pair, mais en utilisant cette fois, l et t' au lieu de i et t.

Traitons maintenant le cas $p+q = 2n$. On a alors $a_{p+2} > a_1 > -a_2 > a_{p+3}$ avec $a_1 + a_2 = 1$. Donc $c = 1/2(a_1 + a_2) = 1/2$. De plus $b = 1/2(a_1 - a_2 - 1) = a_1 - 1 = -a_2$, soit $i = p+2$ et $b_i > b_{i+1}$ si $3 \leq i \leq n$. Par conséquent, $c(\xi) = 1/2$. D'où la conclusion. Ceci termine la démonstration lorsque γ est régulier et $a_2 < 0$.

Si $a_2 > 0$ et $a_3 > \cdots > a_{n+1} > a_1 = 2 > a_2 = 1 > 0$. On a donc $b = 0$, $k = n+1$ car $a_{n+1} > 1$, $c = 3/2 = c(\xi)$. Donc $J(\gamma)$ est unitaire.

Traitons maintenant le cas où γ est singulier. Commençons par le cas où $a_2 < 0$. On distinguera trois cas principaux : $p + q = 2n$, $p + q = 2n - 1$ et $p + q < 2n$. Dans chacun de ces cas, il faudra encore distinguer selon que $a_1 = a_i$ et $-a_2 = a_i$ pour un certain i.

Si $p + q = 2n$, et $a_1 = a_{p+2}$, $p \geq 1$, la condition d'orthogonalité sur $\tilde{\gamma}$ est équivalente à $a_1 + a_2 = 1$. Donc $c = 1/2(a_1 + a_2) = 1/2$. D'autre part $b = 1/2(a_1 - a_2 - 1) = -a_2$ et $i = p+2$ (i comme dans la définition A.12) et donc si $p > 1$, $b_i > b_{i+1}$ toujours d'après la condition d'orthogonalité. D'après le théorème A.14, on a donc $c(\xi) = 1/2 = c$, donc $J(\gamma)$ est au bout de la complémentaire associé à ξ. De même, si $-a_2 = a_{p+2}$, $p \geq 1$, alors $a_1 + a_2 = 1$, d'où $c = 1/2$. On a encore $b = -a_2$ d'où $i = p+1$ et $b_i > b_{i+1}$ si $p > 1$ et la conclusion.

Si $p + q = 2n - 1$, et $a_1 = a_{p+2} > a_{p+3} > -a_2$, la condition d'orthogonalité sur $\tilde{\gamma}$ est équivalente à $a_1 + a_2 = 2$. D'où $c = 1/2$ et $b = 1/2(a_1 - a_2 - 1) = -a_2 + 1/2$. Donc $b + 1/2 = a_{p+3}$. Posons $l = p + 3$. On a alors $b_l > b_{l+1}$ si $l \leq n$. Le théorème A.14 permet donc de conclure $c(\xi) = 1 = c$, donc $J(\gamma)$ est unitarisable. Lorsque $a_{p+2} > a_1 > a_{p+3} > -a_2$, la condition d'orthogonalité donne encore $a_1 + a_2 = 2$, d'où $c = 1$ et $b = -a_2 + 1/2$. Ceci implique $b + 1/2 = a_{p+2}$, et $b_{l-1} > b_l$ si $l \geq 3$. Donc $c(\xi) = 1 = c$. On a donc la conclusion dans ce cas également.

Considérons maintenant le cas $p + q < 2n - 1$, et supposons tout d'abord que $a_{p+2} = a_1 > a_{p+3}$ et $a_{2n+2-q} > -a_2 > a_{2n+3-q}$. Dans ce cas, on démontre que $J(\gamma)$ est unitarisable exactement comme dans le cas régulier avec $a_2 < 0$. On s'intéresse donc au cas $-a_2 = a_{2n+3-q}$ et $a_{p+1} > a_1 > a_{p+2}$. La condition d'orthogonalité équivaut à $a_1 + a_2 = 2n + 2 - (p+q)$, soit $c = n + 1 - (p+q)/2$. D'autre part cette même condition implique $b_{p+2} = \ldots = b_{2n+2-q} > 0$. Appelons b' ce nombre. On a alors

$$\begin{aligned} a_1 &= b' + n - (p+2) + 2 + 1 = b' + n - p + 1 \\ -a - 2 &= b' + n - (2n + 2 - q) + 2 - 1 = b' - n + q - 1\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $b = 1/2(a_1 - a_2 - 1) = b' - 1/2 + (q-p)/2$. Par le lemme précédent, définissons lorsque $q - p$ est impair, les entiers i et t par

$$\begin{aligned} p + 2 &= i - t + 2 \\ 2n + 2 - q &= i + t \end{aligned}$$

On a alors $t = n - (p+q)/2 + 1/2$. D'où $c(\xi) = t + 1/2 = n - (p+q)/2 + 1 = c$. Donc $J(\gamma)$ est au bout de la complémentaire. Reste le cas où $q - p$ est pair. Celui-ci se traite de la même manière mais en définissant l et t' par

$$\begin{aligned} p + 2 &= l - t' + 2 \\ 2n + 2 - q &= l + t' \end{aligned}$$

et le calcul est similaire au précédent. Ceci termine la démonstration lorsque γ est singulier et $a_2 < 0$.

Le dernier cas à traiter pour terminer la démonstration de la proposition A.19-a est : γ singulier, $a_2 \geq 0$, et $a_1 = a_{n+1}$ ou $a_2 = a_{q+2}$. La condition d'orthogonalité sur $\tilde{\gamma}$ est équivalente à $a_1 = n - p + 1$. On a aussi $b = 1/2(n - p - a_2)$. Commençons par le cas $a_2 > 0$ et $a_1 \neq a_{n+1}$. On a alors $p \leq q < n$.

Si $p = q$, on a $a_k > a_1 > a_{k+1} = a_2$, et $b = 0$ avec $k = p + 1$, et $c(\xi) = n - k + 3/2 = (a_1 + a_2)/2 = c$. D'où la conclusion lorsque $p = q$. Si $p = q - 1$, $a_k > a_1 > a_{k+1} > a_{k+2} = a_2$ avec $k = p + 1$ et $b = 1/2$. On a donc $c(\xi) = n - k + 1 = 1/2(a_1 + a_2) = c$.

Considérons maintenant le cas $p < q - 1$. On a alors $b_{p+2} = \cdots = b_{n+1} = 0$. Si $b \in \mathbb{N}^*$, définissons i et t par

$$\begin{aligned} p + 2 &= i - t + 1 \\ q + 2 &= 2n + 3 - (i + t)\,. \end{aligned}$$

On a alors $c = 1/2(a_1 + a_2) = 1/2(n - i + t + 2 + n - (2n + 3 - t - i) + 2) = t + 1/2 = c(\xi)$ D'où la conclusion. Si $b \in \mathbb{N}^* + 1/2$, on procède de la même façon mais en définissant l et t'. Ceci termine la démonstration pour $a_2 = a_{q+2} > 0$. Supposons que $a_{n+1} = a_1$. On a alors $a_1 = 2$ et $a_1 = 1$ d'après la condition d'orthogonalité. D'où $c = 3/2 = c(\xi)$.

Si $a_2 = 0$ et $a_n > a_1 > a_{n+1}$, on obtient facilement $c = 1$ et $b = 1/2$, donc $c(\xi) = 1 = c$. Lorsque $a_{p+1} > a_1 > a_{p+2}$ pour $p < n-1$, on distingue les cas où $b = 1/2(n-p)$ est pair ou impair. Dans le cas pair, on définit i et t, et dans le cas impair l et t'. On obtient facilement la conclusion dans les deux cas. Ceci achève la démonstration de la proposition A.19-a.

Si $J(\gamma)$ est une série isolée, la condition d'orthogonalité est évidemment vérifiée. Pour la réciproque, on obtient immédiatement $b = 0$ $c = n - k + 5/2 = c(\xi) + 1$. Ceci achève la démonstration de la proposition. A.19. □

Soit $\chi \in D^+$ régulier. Il existe $\gamma(\chi) \in P_{01}$ tel que $\chi = \chi_{\gamma(\chi)}$, de même pour p et q donnés il existe un unique $\gamma_{pq}(\chi) \in P_{pq}$ tel que $\chi = \chi_{\gamma_{pq}(\chi)}$, et $\tilde{\gamma}_{pq}(\chi) = \gamma(\chi)$. Le choix d'un homéomorphisme de $i\mathbb{R}^+ \cup [0, \nu(\xi)]$sur $\mathbb{R}^+$ détermine une bijection

$$\hat{G}(\chi) = \mathbb{R}^+ \times \{(p,q); \gamma_{pq}(\chi) \text{ satisfait } (A.6)\} \coprod \{(p,p+1); \gamma_{p,p+1} \text{ satisfait } (A.9)\},$$

où "satisfait" est relatif à l'équation en question et aux conditions précédant celle-ci.

Soit $\chi \in D^+$ singulier. Supposons que $i(\chi) \neq n$. Soit $p(\chi)$ le plus petit entier assigné à un point de $G^{(s)}_{n,i(\chi)}$ correspondant à une représentation unitaire. Si $p(\chi) \leq i(\chi) - 1$ et $i(\chi) > 2$, l'ouvert $\hat{G}(\chi)$ possède une unique série isolée qui correspond au point $i(\chi) - 1$, sinon il n'en possède aucune et $p(\chi) \geq n$. Soit $q(\chi)$ le plus grand entier assigné à un point de $G^{(s)}_{n,i(\chi)}$ correspondant à une représentation isolée. Les entiers $p(\chi)$ et $q(\chi)$ sont déterminés par χ d'après la proposition A.19 Si $p(\chi) < i(\chi)$, on a une bijection

$$\hat{G}(\chi) = \mathbb{R}^+ \times \{p; p(\chi) \leq p \leq i(\chi) - 2\,,\, n \geq p \geq q(\chi)\} \coprod \{i(\chi) - 1\} \coprod \mathbb{R}^*_+ \coprod \{-1, 1\};$$

et si $p(\chi) \geq n$,

$$\hat{G}(\chi) = \mathbb{R}^+ \times \{p;\, p(\chi) \geq p \geq q(\chi)\} \coprod \mathbb{R}^*_+ \coprod \{-1, 1\}.$$

Les deux derniers termes correspondent à la série principale unitaire ayant deux limites de séries discrètes à son bout.

Si $i(\chi) = n$,$\hat{G}(\chi)$ ne possède pas de série isolée. En revanche, si $p(\chi) < n$, la représentation associée au point n dans $G^{(s)}_{nn}$ peut être un point adhérent à une série continue, dont le bout possède un caractère infinitésimal χ' telle que $i(\chi') = n + 2$. Soit $\tilde{\gamma}$ (resp $\tilde{\gamma}'$) la forme associée à χ (resp. χ') par la définition A.18. On a alors $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} - 2e_2$. On en déduit facilement que $p(\chi') = p(\chi)$. On obtient ainsi une bijection

$$\begin{aligned} \hat{G}(\chi) \quad = \quad & \mathbb{R}^+ \times \{(p,n);\, p(\chi) \geq p \geq q(\chi)\} \\ & \coprod \mathbb{R}^+ \times \{(p, n+2);\, p(\chi) \geq p \geq n-1\} \coprod \mathbb{R}^*_+ \coprod \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] M. Atiyah, W. Schmid. *A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups.* Invent. Math. 42 (1977), 1–62.

[2] S. Baaj, P. Julg. *Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*–modules hilbertiens.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), no. 21, 875–878.

[3] M.W. Baldoni Silva. H. Kraljević. *Composition factors of the principal series representations of the group* $\mathrm{Sp}(n,1)$. Trans. Amer. Math. Soc. 262 (1980), no. 2, 447–471.

[4] M.W. Baldoni Silva. *The unitary dual of* $\mathrm{Sp}(n,1)$, $n \geq 2$. Duke Math. J. 48 (1981), no. 3, 549–583.

[5] M.W. Baldoni Silva, D. Barbasch. *The unitary spectrum for real rank one groups.* Invent. Math. 72 (1983), no. 1, 27–55.

[6] L. Barchini. *Szegö mappings, harmonic forms, and Dolbeault cohomology.* J. Funct. Anal. 118 (1993), no. 2, 351–406.

[7] L. Barchini. *Unitary representations attached to elliptic orbits. A geometric approach.* in « Representation theory of Lie groups. » (Park City, UT, 1998), 149–176, IAS/Park City Math. Ser., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[8] L. Barchini, A. Knapp, R. Zierau. *Intertwining operators into Dolbeault cohomology representations.* J. Funct. Anal. 107 (1992), no. 2, 302–341.

[9] L. Barchini,R. Zierau. *Square integrable harmonic forms and representation theory.* Duke Math. J. 92 (1998), no. 3, 645–664.

[10] P. Baum, A. Connes. *Geometric K–theory for Lie groups and foliations.* Enseign. Math. (2) 46 (2000), no. 1-2, 3–42.

[11] P. Baum, A. Connes, N. Higson. *Classifying space for proper actions and K–theory of group C^*–algebras.* in « C^*–algebras : 1943–1993. »(San Antonio, TX, 1993). Contemp. Math., 167. 240–291.

[12] M. Bekka, E. Kaniuth. *Irreducible representations of locally compact groups that cannot be Hausdorff separated from the identity representation.* J. Reine Angew. Math. 385 (1988), 203–220.

[13] A. Borel, N. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups.* Seconde édition. Mathematical Surveys and Monographs, 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[14] R. Bott. *Homogeneous vector bundles.* Annals of Math. 66 (1957), no 2, 203–248.

[15] R. Bott. *Homogeneous differential equations.* in « Differential and combinatorial geometry. A symposium in honor of Marston Morse. » éd. S. Cairns. Princeton Math Series. Princeton, NJ, 1965. 167–186.

[16] R. Boyer, R. Martin. *The group C^*–algebra of the de Sitter group.* Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), no. 1, 177–184.

[17] A. Connes, G. Skandalis. *The longitudinal index theorem for foliations.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 20 (1984), no. 6, 1139–1183.

[18] C. Delaroche. *Extensions des C^*–algèbres.* Bull. Soc. Math. France Mém., No. 29. Supplément au Bull. Soc. Math. France, Tome 100. Société Mathématique de France, Paris, 1972. 142 pp.

[19] J. Dixmier. *Les C^*–algèbres et leurs représentations.* Deuxième édition. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX. Gauthier-Villars Éditeur, Paris 1969

[20] J.M.G. Fell. *The dual spaces of C^*–algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960). 365–403.

[21] P. Julg. *Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes.* Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98. Astérisque No. 252, (1998), Exp. No. 841, 4, 151–183.

[22] P. Julg. *La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour le groupe* $\mathrm{Sp}(n,1)$. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (2002), no. 7, 533–538.

[23] P. Julg, G. Kasparov. *Operator K-theory for the group* $\mathrm{SU}(n,1)$. J. Reine Angew. Math. 463 (1995), 99–152.

[24] P. Julg, A. Valette. *K-theoretic amenability for* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$*, and the action on the associated tree.* J. Funct. Anal. 58 (1984), no. 2, 194–215.

[25] K. Johnson, N. Wallach. *Composition series and intertwining operators for the spherical principal series.* Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 137–173.

[26] G. Kasparov. *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture.* Invent. Math. 91 (1988), no. 1, 147–201.

[27] G. Kasparov. *Index of invariant elliptic operators, K–theory and representations of Lie groups.* (Russe) Dokl. Akad. Nauk SSSR 268 (1983), no. 3, 533–537. Traduction anglaise : Soviet Math. Dokl. 27 (1983), no. 1, 105–109.

[28] G. Kasparov. *K-theory, group C^*–algebras, and higher signatures (conspectus).* in « Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993) » , 101–146, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 226, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[29] A. Knapp. *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples.* Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.

[30] A. Knapp, D. Vogan. *Cohomological induction and unitary representations.* Princeton Mathematical Series, 45. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[31] V. Lafforgue. *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes.* Invent. Math. 149 (2002), no. 1, 1–95.

[32] H.B Lawson, M–L. Michelsohn. *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[33] F. Pierrot. *La K-théorie de la C^*–algèbre pleine de* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. J. Funct. Anal. 193 (2002), no. 2, 261–277.

[34] F. Pierrot. *Induction parabolique et K-théorie de C^*–algèbres maximales.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332 (2001), no. 9, 805–808.

[35] J. Rawnsley, W. Schmid, J.A. Wolf. *Singular unitary representations and indefinite harmonic theory.* J. Funct. Anal. 51 (1983), no. 1, 1–114.

[36] W. Schmid. *Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups.* in « Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups. » Edité par P. Sally, D. Vogan. Mathematical Surveys and Monographs, 31. American Mathematical Society, Providence, RI (1989). 223–286.

[37] G. Skandalis. *Some remarks on Kasparov theory.* J. Funct. Anal. 56 (1984), no. 3, 337–347.

[38] G. Skandalis. *Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes. Contribution de Vincent Lafforgue.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. Astérisque No. 276, (2002), 105–135.

[39] A. Valette. *Introduction to the Baum-Connes conjecture.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[40] D. Vogan. *The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. I.* Ann. of Math. (2) 109 (1979), no. 1, 1–60.

[41] N. Wallach. *On the unitarizability of derived functor modules.* Invent. Math. 78 (1984), no. 1, 131–141.

[42] A. Wassermann. *Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 304 (1987), no. 18, 559–562.

[43] J.A. Wolf. *The action of a real semisimple group on a complex flag manifold. I. Orbit structure and holomorphic arc components.* Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 1121–1237.

[44] H–W. Wong. *Dolbeault cohomological realization of Zuckerman modules associated with finite rank representations.* J. Funct. Anal. 129 (1995), no. 2, 428–454.

[45] H–W. Wong. *Cohomological induction in various categories and the maximal globalization conjecture.* Duke Math. J. 96 (1999), no. 1, 1–27.

[46] R. Zierau. *Representations in Dolbeault cohomology.* in « Representation theory of Lie groups. » (Park City, UT, 1998), 91–146, IAS/Park City Math. Ser., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.