Propriétés numériques et positivité des classes de cohomologie transcendantes

Résumé des travaux

Mihai PĂUN

Remerciements

C'est avec un réel plaisir que j'adresse ici mes remerciements à Olivier Debarre, Thomas Delzant, Jean-Pierre Demailly, Daniel Huybrechts, Thomas Peternell et Yum-Tong Siu. Je suis très honoré par leur présence dans mon jury d'habilitation, car l'essentiel (et quelque part, la forme) du mémoire suivant leur doit beaucoup.

Je voudrais également remercier mes collègues de l'IRMA, et tout particulierement Michèle Audin, Nicole Bopp, Louise Nyssen, Olivier Biquard, Vincent Blanloeil, Mihai Damian, Slava Kharlamov, et Marcus Julius Slupinski, dont la présence amicale rend la vie mathématique (et sociale) strasbourgeoise très animée.

Introduction

Dans le mémoire suivant, nous présentons nos travaux en vue d'obtenir l'habilitation à diriger les recherches. Nous traitons divers problèmes de géométrie kählérienne globale via la théorie des courants positifs fermés. Ces problèmes peuvent être regroupés en trois thèmes principaux.

1. Effectivité numérique au sens analytique, et groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à première classe de Chern nef

En géométrie algébrique, les diviseurs nefs ont un rôle important dans toutes les questions de semi-positivité. Bien que la terminologie "nef" soit relativement récente (introduite par S. Kleiman dans les années 1980), cette notion est déjà présente par exemple dans les travaux de O. Zariski qui datent des années 1960 (voir [57]).

Du côté analytique, J.-P. Demailly, Th. Peternell et M. Schneider ont introduit une version analytique de l'effectivité numérique.

Nous montrons que la propriété "nef" est invariante par mophismes surjectifs entre de variétés complexes compactes (seul le cas des morphismes à fibres equidimensionnelles etait connu auparavant, par les travaux de Demailly et al.) Notre résultat permet de définir de façon cohérente une notion d'effectivité numérique analytique sur les espaces singuliers, et généralise l'énoncé analogue dans le cas algébrique.

Le groupe fondamental des variétés kählériennes compactes dont la première classe de Chern vérifie des propriétés de positivité a intéressé beaucoup d'auteurs (voir le paragraphe 1.3 pour quelques résultats dans cette direction). Concernant les variétés kählériennes à première classe de Chern nef, nous avons montré dans [44] que leur groupe fondamental est presque-nilpotent.

2. Géométrie du cône de Kähler des variétés complexes compactes

La deuxième partie est articulée autour de la caractérisation numérique du cône de Kähler d'une variété kählérienne compacte. Il s'agit d'un travail récent [19], en collaboration avec J.-P. Demailly, qui généralise le critère d'amplitude classique de Nakai-Moishezon.

Dans le même esprit, il convient de citer les travaux de F. Campana et Th. Peternell, qui ont donné un énoncé de type Nakai–Moishezon pour les classes $\{\alpha\}$ dans le groupe de Neron–Severi réel. Une version de Nakai–Moishezon a été obtenue par Ph. Eyssidieux pour les classes dont l'image inverse sur un revêtement infini devient entière (pour ceci, il utilise des techniques de cohomologie L^2). Le théorème principal de [19] etait connu seulement dans le cas des surfaces, grâce aux travaux de A. Lamari et N. Buchdal.

L'outil fondamental est la méthode de concentration de la masse developpée dans [48]. Cette methode généralise la technique initiée par J.-P. Demailly en 1993 dans son approche de la conjecture de Fujita. La théorie de de courants positifs fermés joue un rôle important.

3. Courants associés aux courbes entières

Dernièrement, notre travail a porté sur les courbes entières Zariski denses tracées sur les variétés projectives. Un probleme important dans ce vaste domaine est la conjecture de Green-Griffiths: *toute courbe entière tracée sur une variété projective de type général est contenue dans une sous-variété algébrique propre.*

Une contribution récente très importante à ce sujet a été apportée par M. McQuillan. Parmi les technique nouvelles qu'il introduit, nous nous sommes intéressés à celle qui consiste à associer un courant positif fermé $T[\varphi]$ à une courbe entière Zariski dense $\varphi : \mathbb{C} \to X$. Intuitivement, le courant $T[\varphi]$ peut être vu comme une façon de "compactifier" la courbe entière φ. Dans l'analyse des courbes tangentes aux feuilletages holomorphes, le travail de McQuillan montre l'importance d'étudier les courants $T[\varphi]$ qui sont singuliers le long des sous-variétés de X.

Ainsi, nous avons cherché à developper dans [50] une théorie métrique pour les courants associés aux courbes entières. Nos résultats principaux établissent des propriétés numériques de la classe de cohomologie $\{T[\varphi]\}$, sous l'hypothèse de l'existence de divers types de singularités du courant $T[\varphi]$. Si $\varphi' : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{P}(T_X)$ désigne la dérivée projectivisée de φ, nous établissons également une correspondance entre les courants $T[\varphi]$ et $T[\varphi']$.

Première partie

Effectivité numérique au sens analytique

Nous commencons par esquisser la façon dont se dégage la notion d'effectivité numérique au sens analytique. Ensuite, nous présentons les résultats principaux des articles [44], [46] et [47] issus de la thèse.

1.1 Géométrie différentielle des fibrés amples

Considérons une variété complexe compacte X, de dimension égale à n. Pour $n = 1$, on peut toujours trouvé un plongement de X dans un espace projectif, par des travaux classiques.

Si $n \geq 2$, des tels plongements n'existent pas en général. Toutefois, un résultat positif dans cette direction a été établi par K. Kodaira (1954). Soit L un fibré en droites holomorphe sur X. On peut le munir d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$; localement, dans une trivialisation sur un ouvert U, on a $L_{|U} = U \times \mathbb{C}$, et la métrique h est décrite par son poids ϕ, $h(x, v) = |v|^2 \exp(-2\phi(x))$. La forme de courbure $\Theta_h(L)$ de (L, h) est donnée localement par $\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\phi$; c'est une 2-forme fermée de type $(1, 1)$ sur X, et sa classe de cohomologie vaut $c_1(L)$.

Une forme α de type $(1, 1)$ sur X s'écrit localement

$$\alpha = i \sum_{1 \leq j,k \leq n} \alpha_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k,$$

et une telle forme est dite *positive* si c'est la partie imaginaire d'une métrique hermitienne. Un fibré L est dit *ample* si l'application associée à la série linéaire $|kL|$ est un plongement, pour tout entier k assez grand. Le résultat de Kodaira est le suivant (voir [31]).

Théorème (Kodaira).*Soit X une variété complexe compacte, et L un fibré en droites holomorphe sur X. Alors L est ample si et seulement si il peut être muni d'une métrique lisse h dont la forme de courbure est strictement positive.*

Dans beaucoup de questions de semi-positivité en géométrie algébrique, la notion d'effectivité numérique joue un rôle très important.

Définition. *Soit X une variété projective, et soit L un fibré en droites holomorphes sur X. On dit que L est numériquement effectif (nef en abrégé) si l'inégalité $\int_C c_1(L) \geq 0$ est satisafite pour toute courbe algébrique $C \subset X$.*

Grâce aux travaux de S. Kleiman [28], [29], tout fibré nef est limite de $\mathbb{Q}$-fibrés amples.

Du côté analytique, Demailly, Peternell et Schneider ont donné dans [17] une reformulation de l'effectivité numérique.

Théorème (Demailly et al.). *Soit X une variété projective, et (L, h) un fibré en droites sur X. Alors L est nef si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que*

$$\Theta_h(L) + i\partial\overline{\partial} f_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$$

où ω est une métrique sur X.

On peut donc redéfinir la notion d'effectivité numérique sur une variété complexe compacte par cette caractérisation (voir les articles [16], [17]).

1.2 Classes nef et courants positifs fermés

Soit X une variété complexe compacte ; on considère le groupe de $\partial\overline{\partial}$–cohomologie $H^{p,q}_{\partial\overline{\partial}}(X, \mathbb{C})$, des formes fermées de type (p, q), modulo l'image de l'opérateur $\partial\overline{\partial}$. Si X est kählérienne, ces groupes coïncident avec les groupes de Dolbeault. Compte tenu du théorème précédent, la notion d'effectivité numérique introduite par Demailly et al. dans [17] est la suivante.

Définition. *Soit X une variété complexe compacte, munie d'une métrique ω, et soit $\{\alpha\} \in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X, \mathbb{R})$ une classe réelle de type $(1, 1)$ sur X. On dit que la classe $\{\alpha\}$ est nef si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un représentant $\alpha_\varepsilon \in \{\alpha\}$ tel que $\alpha_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$ sur X.*

On connaît des exemples (voir [17]) qui montrent qu'une classe nef ne contient pas toujours des représentants semi-positifs, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Néanmoins, toute suite extraite de la famille $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une limite au sens faible (quitte à passer à une sous-suite), et cette limite sera un courant positif fermé. On rappelle très brièvement cette notion, car elle sera déterminante pour la suite.

L'espace des courants de type (p, p) est le dual de l'espace de Fréchet des formes $\mathcal{C}^\infty$ de type $(n-p, n-p)$. Un courant T est donc une forme différentielle à coefficients distributions. Localement sur un ouvert U, un courant de type (p, p) s'écrit sous la forme $T = i^{p^2} \sum T_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$, où T_{IJ} sont des distributions sur U. On dit que T est un courant positif si pour tout choix de coefficients complexes λ_I, la distribution $\sum \lambda_I \overline{\lambda}_J T_{IJ}$ est une mesure positive.

Exemple 1. Le courant d'intégration associé à une sous–variété analytique compacte p–dimensionelle Y de X est défini par la formule

$$\langle [Y], \beta \rangle := \int_{Y_{\mathrm{reg}}} \beta$$

où β est une forme différentielle de type (p, p), et Y_{reg} désigne l'ouvert de points réguliers de Y. Il est clair que le courant $[Y]$ est positif; le fait qu'il soit fermé est dû à Lelong (voir [34]).

Exemple 2. Supposons qu'on ait une famille bornée $\{\Omega_k\} \subset H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X, \mathbb{R})$, telle que les représentants Ω_k soient positifs. Le théorème de précompacité pour les courants positifs fermés montre qu'on peut extraire une limite faible des (Ω_k) au sens des courants. Alors, toute classe nef contient un courant positif fermé, mais en général ce courant est singulier.

On peut donc penser à un courant positif fermé T comme généralisation d'un cycle analytique. Ce qui remplace la notion de multiplicité est le nombre de Lelong $\nu(T,x) := \lim_{r\mapsto 0}\int_{|w|<r} T\wedge(i\partial\overline{\partial}\log|w|^2)^{n-p}$ (voir [12], [51]) où les $w=(w_1,...w_n)$ sont des coordonnées locales centrées en x. Ces nombres mesurent les singularités logarithmiques du courant T au point x.

On note $E_c(T)$ l'ensemble des points de $x\in X$ tels que $\nu(T,x)>c$. Les résultats suivants sont fondamentaux dans la théorie de courants (voir [51], [14]).

Théorème (Siu). *Soit T un courant positif fermé de type (p,p); alors pour tout $c>0$, l'ensemble de niveau $E_c(T)$ est analytique.*

On dit qu'une fonction ϕ a des singularités analytiques si elle est congrue localement à $\log(|f_1|^2+...+|f_k|^2)$ modulo des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$; les (f_j) sont des fonctions holomorphes.

Théorème (Demailly). *Soit $T=\alpha+i\partial\overline{\partial}\phi$ un courant fermé de type $(1,1)$ sur une variété X munie d'une métrique ω. On suppose qu'il existe une forme continue γ sur X telle que $T\geq\gamma$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe une fonction ϕ_ε dont les singularités sont logarithmiques, qui vérifie $T_\varepsilon:=\alpha+i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon\geq\gamma-\varepsilon\omega$ pour chaque $\varepsilon>0$; de plus, on a l'inclusion $\bigcup_{c>0}E_c(T_\varepsilon)\subset\bigcup_{c>0}E_c(T)$*

Autrement dit, quitte à perdre un peu de positivité, on peut toujours travailler avec des courants à pôles logarithmiques.

1.3 Propriétés générales des classes nef.

D'après Fujita ([23]), la propriété d'effectivité numérique est invariante par les morphismes surjectifs entre variétés projectives. Notre théorème généralise ce résultat dans le cas des variétés holomorphes compactes quelconques.

1.3.1 Théorème. ([46]) *Soit $f:Y\to X$ une application holomorphe surjective, X et Y étant des variétés complexes compactes, et soit $\{\alpha\}\in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X,\mathbb{R})$ une classe réelle de type $(1,1)$ sur X. Alors $\{\alpha\}$ est nef si et seulement si $f^*\{\alpha\}$ est nef.*

Soit X une variété de Moishezon. Une telle variété possède "assez de courbes" pour que la définition algébrique d'un fibré nef soit légitime. On peut se poser naturellement la question de l'equivalence des deux notions d'effectivité numérique, au sens algébrique et respectivement au sens métrique. La solution de ce problème est donnée par le corollaire suivant (voir [46]):

1.3.2 Corollaire. *Soit X une variété de Moishezon, $L\to X$ un fibré en droites. Alors L est nef au sens algébrique si et seulement si L est nef au sens métrique.*

Dans le même ordre d'idées, on peut généraliser un critère d'amplitude de Grauert.

1.3.2 Théorème ([46]). *Soit X une variété complexe compacte. Alors la classe de cohomologie $\{T\}$ d'un courant positif de type $(1,1)$ est nef si et seulement si pour toute composante irréductible $Z \subset \bigcup_{c>0} E_c(T)$ la restriction $\{T\}_{|Z}$ est nef.*

Cet énoncé joue un rôle important dans notre travail ultérieur, et nous allons donner quelques idées de la preuve. Choisissons une forme lisse α dans la classe de cohomologie de T; comme on travaille avec la $\partial\overline{\partial}$–cohomologie, il existe une fonction réelle ϕ sur X, telle que

$$T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi.$$

Le théorème de régularisation des courants donne pour chaque $\varepsilon > 0$ une fonction ϕ_ε sur X, réelle, lisse en dehors d'un ensemble analytique Z_ε contenu dans $\bigcup_{c>0} E_c(T)$, telle que

$$T_\varepsilon := \alpha + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega.$$

On utilise maintenant l'hypothèse afin d'éliminer les singularités de T_ε, avec une perte de positivité de taille ε. On suppose pour simplifier que Z_ε est un ensemble analytique irréductible. Comme $\{T\}_{|Z_\varepsilon}$ est nef par hypothèse, on obtient un voisinage V_ε de Z_ε dans X et $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(V_\varepsilon)$ tels que

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\rho_\varepsilon \geq -\varepsilon\,\omega$$

dans V_ε. Alors on peut choisir une constante $C_\varepsilon > 0$, telle que la fonction $\widetilde{\phi}_\varepsilon := \max_{\mathrm{reg}}(\rho_\varepsilon - C_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ soit de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$. Des résultats standard en théorie des fonctions plurisousharmoniques (voir [34]) montrent que

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\,\omega.$$

Si Z_ε a plusieurs composantes irreductibles, on utilise la récurrence pour déduire l'existence des fonctions ρ_ε.

1.4 Variétés kähleriennes compactes à première classe de Chern nef

Mentionnons quelques résultats concernant le groupe fondamental des variétés compactes dont la première classe de Chern vérifie certains propriétés de positivité.

Si X est une variété projective telle que $c_1(X)$ est positive, alors X est simplement connexe d'après un théorème de Kobayashi, voir [30]. Le théorème de Cheeger-Gromoll [10] montre que si $c_1(X)$ est semi-positive, alors $\pi_1(X)$ est presque-abélien. En ce qui concerne l'étude des variétés kählériennes dont $c_1(X)$ est nef, les travaux de Demailly et al. dans [16] montrent que $\pi_1(X)$ est un groupe à croissance sous-exponentielle.

Nous avons obtenu un résultat plus précis, en nous appuyant sur la technique de [16] ainsi que sur les résultats de Cheeger-Colding concernant les espaces métriques à courbure de Ricci minorée (voir [9]).

1.4.1 Théorème ([44]). *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec $c_1(X)$ nef. Alors $\pi_1(X)$ admet un sous-groupe nilpotent d'indice fini.*

Dans l'étude du groupe fondamental des variétés kählériennes compactes l'application d'Albanese joue un rôle très important. Soit $q(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X)$ l'irrégularité de X et $\alpha_1, ..., \alpha_q$ une base de 1–formes holomorphes. Les α_j étant fermées, on peut considérer l'application

$$\widetilde{X} \to \mathbb{C}^q, \quad x \mapsto \Big(\int_{x_0}^{x} \alpha_1, .., \int_{x_0}^{x} \alpha_q \Big)$$

où $\widetilde{X}$ désigne le révêtement universel de X et x_0 un point quelconque. Si on note Λ l'orbite du point x_0 par $\pi_1(X)$, la théorie de Hodge implique que Λ est un réseau dans $\mathbb{C}^q$ et alors l'application ci-dessus définit par passage au quotient une application

$$\alpha_X : X \to \mathrm{Alb}(X) := \mathbb{C}^q/\Lambda$$

qui est par définition l'application d'Albanese de X.

Question. Le problème suivant proposé dans [16] reste encore ouvert.

Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec $c_1(X)$ nef. Alors le morphisme d'Albanese α_X est surjectif.

Cette conjecture a été confirmée par Q. Zhang pour les variétés projectives, en utilisant des méthodes de caractéristique p, voir [58].

Dans l'article [47], nous démontrons l'inégalité suivante:

1.4.2 Théorème ([47]). *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec $c_1(X)$ nef. Alors $h^1(X, \mathcal{O}_X) \leq n$.*

Soit β une 1-forme holomorphe sur (X, ω). Si la courbure de Ricci de ω est minorée par $-\lambda$, $(\lambda > 0)$, on montre dans [49] qu'en moyenne, la différence $|\beta|^2_{\omega,x} - |\beta|^2_{\omega,y}$ est majorée par une quantité qui dépend seulement de la norme globale $||\beta||_{L^2(X,\omega)}$, de λ, et du volume de (X, ω). Comme conséquence on obtient le théorème suivant:

1.4.3 Théorème ([49]). *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que chaque métrique ω_k appartient à une classe de cohomologie fixée $\{\omega_1\}$, la courbure de Ricci étant minorée par $-1/k$ et le diamètre $D_k := \mathrm{diam}(X, \omega_k)$ étant majoré par une constante qui ne dépend pas de k. Alors le morphisme d'Albanese de X est surjectif.*

Deuxième partie

Cônes positifs en géométrie kählerienne

Le paragraphe 2.1 de cette deuxième partie contient une description numérique du cône de Kähler d'une variété kählérienne compacte; c'est un résumé de l'article [19]. Quelques conséquences récentes des techniques que nous avons introduit dans [19] sont présentées dans 2.2.

2.1 Caractérisation numérique du cône de Kähler

Dans ce paragraphe, X désignera une variété kählérienne compacte (sauf mention explicite du contraire). Le cône de Kähler de X est le sous–ensemble

$$\mathcal{K} \subset H^{1,1}(X,\mathbb{R}) := H^{1,1}(X,\mathbb{C}) \cap H^2(X,\mathbb{R}),$$

formé des classes de cohomologie des métriques kählériennes sur X (les éléments de $\mathcal{K}$ sont parfois appelés des classes kählériennes). Le cône $\mathcal{K}$ est convexe et ouvert, et son adhérence dans $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ est exactement le cône des classes nefs. Le cône positif de X est le sous-ensemble

$$\mathcal{P} \subset H^{1,1}(X,\mathbb{R})$$

formé des classes de cohomologie $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ qui vérifient $\int_Y \alpha^p > 0$, pour tout entier p et toute sous–variété analytique compacte p–dimensionnelle $Y \subset X$.

En collaboration avec J.-P. Demailly, nous avons obtenu dans [19] une description numérique de l'ensemble $\mathcal{K}$.

2.1.1 Théorème ([19]) *Soit X une variété kählérienne compacte. Alors son cône de Kähler $\mathcal{K}$ est une composante connexe du cône positif $\mathcal{P}$.*

En substance, ce résultat montre que le cône de Kähler de X dépend seulement de la forme d'intersection sur l'anneau de cohomologie, de la structure de Hodge, et des classe d'homologie des cycles analytiques.

Notre technique de démonstration est trés différente de celles employes antérieurement, qui utilisent de manière esentielle l'existence de sections hyperplanes et la formule de Riemann-Roch. En revanche, nous utilisons la méthode de concentration de la masse. A la base de cette méthode, se trouve le théorème de S.-T. Yau (voir [56]) sur l'équation de Monge-Ampère.

Théorème (Yau). *Soient (X,ω) une variété kählérienne compacte et $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que $\int_X \omega^n = \int_X \exp(f)\omega^n$. Alors il existe une métrique kählerienne $\widetilde{\omega} \in \{\omega\}$, telle que $\widetilde{\omega}^n = \exp(f)\omega^n$.*

Le théorème suivant constitue le pas décisif dans la démonstration du théorème 2.1.1. Nous en avons obtenu une première version dans le preprint [48]; voici la version de l'article [19].

2.1.3 Théorème ([19]).*Soit* (X, ω) *une variété kählérienne compacte de dimension n, et considérons* $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ *une classe nef, tel que* $\int_X \alpha^n > 0$*. Alors* $\{\alpha\}$ *contient un courant kählérien, i.e. un courant* T*, tel que* $T \geq \varepsilon\omega$*, pour un certain* $\varepsilon > 0$*.*

Avant de discuter les idées centrales de la preuve de 2.1.3, rappelons le théorème suivant de Y.-T. Siu [54], qui donne une réponse positive à la conjecture de Grauert–Riemenschneider: *Soit* X *est une variété complexe compacte, et* (L, h) *un fibré en droites holomorphe sur* X*, dont la forme de courbure* $\Theta_h(L)$ *est semi-positive. Si on a* $\int_X \Theta_h(L)^n > 0$*, alors le fibré* L *est big (et en particulier,* X *est biméromorphe à une variété projective).* Le théorème précédent peut être vu comme une version transcendante du théorème de Y.-T. Siu; l'aspect déplaisant dans 2.1.3 est qu'on doit faire a priori l'hypothèse que X est une variété kählérienne.

Si $Y \subset X$ est une sous variété analytique fermée de codimension p, alors sous l'hypothèse de 1.3.3, la méthode de concentration de la masse permet de construire un courant Θ dans la classe $\{\alpha\}^p$, qui domine un multiple du courant d'intégration sur Y (autrement dit, on montre l'existence d'un courant positif dont on peut imposer des pôles logarithmiques sur Y).

Supposons pour simplifier que la variété X soit projective; alors les arguments de la démonstration du 2.1.3 dans le preprint [48] sont les suivantes. Soit $L \mapsto X$ un fibré très ample, muni d'une métrique h, et soit $H = (\sigma = 0)$ une section hyperplane. Pour chaque $\varepsilon > 0$, considérons la fonction

$$f_{\varepsilon,H} := \log(\varepsilon^2 + |\sigma|_h^2).$$

Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $i\partial\overline{\partial} f_{\varepsilon,H} \geq -C/2\omega$ sur X.

On définit la $(1,1)$–forme $\omega_\varepsilon := \omega + i/C\partial\overline{\partial} f_{\varepsilon,H}$; la masse de ω_ε est bornée uniformément par rapport à ε, et un peut montrer que toute limite faible de $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est un courant positif fermé T qui domine un multiple du courant d'intégration sur l'ensemble analytique H. Ce courant se trouve dans la classe $\{\omega\}$.

Soit $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ une classe nef, telle que $\int_X \alpha^n > 0$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, la classe $\{\alpha + \varepsilon\omega\}$ est kählerienne, et le théorème de Yau montre qu'il existe $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que

$$(\alpha + \varepsilon\omega + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon)^n = C_\varepsilon \omega_\varepsilon^n \tag{1}$$

et telle que $\alpha + \varepsilon\omega + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon > 0$. Dans (1), C_ε est la constante de normalisation du volume. L'hypothèse $\int_X \alpha^n > 0$ montre l'existence d'un nombre $\delta > 0$, tel que $C_\varepsilon > \delta$, pour tout $\varepsilon > 0$. Lorsque ε tend vers zéro, une partie de la masse du membre de droite de l'équation (1) va se concentrer sur H. Une analyse "ad–hoc" de la famille d'équations (1) montre que toute limite faible extraite de la famille $(\alpha + \varepsilon\omega + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon)$ est un courant positif fermé Θ dans la classe de cohomologie $\{\alpha\}$, tel que $\Theta \geq \delta_0[H]$ pour un certain $\delta_0 > 0$. Mais le courant d'intégration $[H]$ est cohomologue à une classe kählerienne, d'où le résultat 2.1.3.

Si X est seulement supposée kählérienne, les changements qu'on doit effectuer sont les suivants (voir [19]). Soit $Y \subset X$ est une sous variété analytique fermée de codimension p, qui n'est pas necessairement une intersection complete. On peut lui associer une famille de fonctions $f_{\varepsilon,Y} \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telles que:

(1) Localement en chaque point $x_0 \in X$, on a $f_{\varepsilon,Y}(w) = \log(\varepsilon^2 + \sum_j |g_j(w)|^2)$, modulo de termes uniformément bornés par rapport à ε en norme $\mathcal{C}^0$. Les fonctions (g_j) sont les équations de Y au point x_0.

(2) Il existe une constante C telle que $i\partial\overline{\partial} f_{\varepsilon,Y} \geq -C/2\omega$ sur X, pour tout $\varepsilon > 0$.

Pour les détails de cette construction, on se refère à [13], [19]. Ensuite on emploie les mêmes arguments qu'auparavant, afin de trouver un courant Θ dans la classe de cohomologie $\{\alpha\}^p$, tel que $\Theta \geq \delta_0[Y]$.

Pour finir, on a recours à l'astuce suivante: considérons la diagonale Δ dans la variété produit $X \times X$. Si π_1 et π_2 désignent les deux projections de $X \times X$ vers X, par le procédé précédent on obtient un courant $\Theta \in \{\pi_1^*\alpha + \pi_2^*\alpha\}^n$, qui domine un multiple positif de $[\Delta]$. Ensuite, une vérification rapide montre que $T := \pi_{1*}(\Theta \wedge \pi_2^*\omega)$ est un courant kählérien, dans la classe $\{\alpha\}$.

Expliquons maintenant de quelle façon l'énoncé 2.1.3 intervient dans la preuve du critère 2.1.1. Tout d'abord, on a l'inclusion évidente $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$, et par ailleurs le cône de Kähler $\mathcal{K}$ est un ensemble ouvert. Il reste à vérifier que $\mathcal{K}$ est également fermé dans $\mathcal{P}$, et pour ceci considérons $\{\alpha\} \in \overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{P}$. Une telle classe de cohomologie est automatiquement nef, et vérifie $\int_X \alpha^n > 0$. Grâce au théorème 2.1.3, on obtient un courant $T \in \{\alpha\}$, tel que $T \geq \delta\omega$, pour un certain réel $\delta > 0$. Le courant T est a priori est très singulier, car il est obtenu comme limite faible. Toutefois, le théorème de régularisation des courants dans 1.2 montre qu'on peut supposer les singularités de T analytiques, concentrées le long de l'ensemble $Z \subset X$. Enfin, un raisonnement par récurrence, et la proposition 1.3.2 achèvent la preuve.

Voici un exemple de variété pour laquelle le cône $\mathcal{P}$ n'est pas connexe. Considérons un tore complexe générique $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$; il est bien connu que X n'admet pas de sous-variétés propres de dimension positive. Le cône $\mathcal{P}$ sera donc décrit par une seule relation $\int_X \alpha^n > 0$. Pour X générique, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des formes hermitiennes sur $\mathbb{C}^n$, dont le déterminant est positif. Les composantes de $\mathcal{P}$ sont les formes de signature (p, q), avec $p + q = n$ et q pair.

Néanmoins, si la variété X est projective, l'ensemble $\mathcal{P}$ est toujours connexe. Mis à part les travaux [8], [22] et le cas des surfaces [7], [36] déjà mentionnés dans l'introduction, ce théorème est entièrement nouveau.

2.1.2 Théorème ([19]). *Soit X une variété projective. Alors $\{\alpha\} \in \mathcal{K}$ si et seulement si on a $\int_Y \alpha^p > 0$, pour tout entier p et toute sous–variété algébrique p–dimensionnelle $Y \subset X$.*

En conclusion, nous obtenons une généralisation du critère d'amplitude classique de Nakai–Moishezon. Ce critère décrit numériquement l'intersection $\mathcal{K} \cap H^2(X, \mathbb{Z})$:

Théorème (Nakai–Moishezon). *Soit X une variété projective, et L un fibré en droites holomorphe sur X. Alors $c_1(L)$ contient un représentant strictement positif si et seulement si on a $\int_Y c_1(L)^p > 0$, pour tout entier p et pour toute sous-variété $Y \subset X$ de dimension p.*

Le théorème 2.1.1 admet le corollaire suivant, qui caractérise la cône nef "à la Kleiman".

2.1.5 Théorème ([19]). *Soit X une variété kählérienne compacte. Une classe de cohomologie $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est nef si et seulement si elle vérifie $\int_Y \alpha \wedge \omega^{p-1} \geq 0$, pour toute sous–variété analytique p–dimensionelle $Y \subset X$ et pour toute métrique kählérienne ω sur X.*

On peut appliquer le théorème 2.1.1 à la théorie des déformations. Considérons $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ une famille holomorphe de variétés kählériennes compactes. La question est de comprendre la variation du cône de Kähler $\mathcal{K}_t$ de $\mathcal{X}_t$; pour ceci, rappelons que la décomposition de Hodge

$$H^2(X_t, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X_t, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X_t, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X_t, \mathbb{C})$$

induit une décomposition au niveau de la connexion de Gauss–Manin sur H^2

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla^{2,0} & * & * \\ * & \nabla^{1,1} & * \\ * & * & \nabla^{0,2} \end{pmatrix}.$$

Le théorème suivant montre que pour une fibre très générale, le cône $\mathcal{K}_t$ est indépendant de t.

2.1.6 Théorème ([19]). *Soit $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ une déformation de variétés kählériennes compactes sur une base irréductible Δ. Le cône de Kähler de $\mathcal{X}_t$ est invariant par le transport paralléle associé à la partie $(1,1)$ de la connexion de Gauss–Manin, pour t très général sur la base Δ.*

Question Dans ce contexte, le probleme suivant est proposé dans [19], en rappport au théorème de stabilité de Kodaira-Spencer [32].

Soit $\mathcal{X} \to S$ une déformation de variétés complexes compactes sur une base irréductible S. On suppose que l'une des fibres X_{t_0} est kählérienne. Alors il existe une réunion dénombrable d'ensembles analytiques $S' \subsetneq S$ tel que X_t est une variété kählérienne, pour $t \in S \setminus S'$.

D'autres applications du théorème 2.1.1 ont été trouvés par D. Huybrechts et S. Boucksom. Ainsi, D. Huybrechts montre dans [26] que le cône de Kähler d'une variété hyperkählérienne très générale est une composante connexe du cône positif défini par la forme quadratique de Beauville–Bogomolov. S. Boucksom a donné dans [2] une nouvelle preuve du théorème suivant, dû à Moishezon ([42]) : toute variété kählerienne et de Moishezon est projective.

2.2 Volume des classes pseudo–effectives

Dans une série d'articles ([21], [23]), motivés d'une part par la recherche d'un analogue en dimension supérieure de la décomposition de Zariski, de l'autre par une compréhension algébrique de l'inégalité d'auto–intersection de J.-P. Demailly (voir [15]), il s'est dégagé la notion de *volume* d'un fibré en droites L sur X. Ainsi, on définit

$$v(L) := \lim \sup_{k\mapsto\infty} \frac{1}{k^n} h^0(X, L^k).$$

Un résultat de T. Fujita ([21], voir également [18]) montre que le volume d'un fibré en droites peut être calculé comme suit: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une modification $\mu_\varepsilon : X_\varepsilon \mapsto X$ et une décomposition $\mu_\varepsilon^\star L = D_\varepsilon + E_\varepsilon$, telle que D_ε soit ample, E_ε soit effectif, et $v(L) \geq D_\varepsilon^n \geq v(L) - \varepsilon$. On a une interprétation géometrique du volume, obtenue par Demailly, Ein et Lazarsfeld dans [18]. Pour chaque $k \gg 0$, on note B_k l'ensemble base de la série linéaire $|kL|$. Le nombre d'intersection libre de $|kL|$ est défini par $(kL)^{[n]} := |D_1 \cap ... \cap D_n \cap X \setminus B_k|$, où (D_j) sont des diviseurs généraux dans $|kL|$. Alors il est montré dans [23] que $v(L) = \lim \sup_{k\mapsto\infty} \frac{(kL)^{[n]}}{k^n}$.

Une autre interprétation (analytique) a été trouvée par S. Boucksom dans [1]. Il montre que

$$v(L) = \sup_{T\geq 0, T\in c_1(L)} \int_X T_{ac}^n,$$

où T_{ac} est la partie absolument continue de la décomposition de Lebesgue du courant T. Ensuite, il définit le volume d'une classe $\{\alpha\}$ par l'égalité précédente, et il montre qu'on a un résultat parfaitement analogue a celui de Fujita, quitte à remplacer le diviseur ample D_ε par une métrique kählérienne ω_ε.

Dans [2], S. Boucksom montre que la méthode de démonstration du théorème 2.1.1 est assez flexible pour l'appliquer de façon uniforme aux modifications X_ε, et il déduit le résultat suivant: *une classe pseudo–effective* $\{\alpha\}$ *contient un courant kählérien si et seulement si son volume est positif.*

En s'appuyant sur des idées de la preuve de 2.1.1, J.-P. Demailly et Th. Peternell aboutissent dans [20] à la caractérisation suivante des fibrés pseudo–effectifs. On note $\mathcal{E} \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des classes de courants positifs fermés de type $(1, 1)$.

Théorème (Demailly-Peternell) *Soit X une variété projective, et L un fibré en droites sur X. Alors $c_1(L) \in \mathcal{E}$ si et seulement si $L \cdot C \geq 0$, pour toute courbe C qui fait partie d'une famille couvrante.*

Question. Dans le projet [3], nous avons en vue une version transcendante de ce résultat, et pour ceci, il suffirait de montrer l'inégalité suivante.

Soit X une variété kählérienne compacte, et soient ω_1, ω_2 deux métriques kählériennes sur X. Alors

$$v(\omega_1 - \omega_2) \geq \int_X \omega_1^n - n \int_X \omega_1^{n-1} \wedge \omega_2. \tag{2}$$

Si les deux classes ω_1, ω_2 sont entières, alors l'estimation du volume de leur différence (2) est connue (voir [18]). Dans la cas d'une variété projective X, nous démontrons dans [3] l'énoncé suivant.

2.2.1 Théorème ([3]). *Soit X une variété projective de dimension n. Il existe une constante $C(n) = \mathcal{O}(n^3)$, telle que si ω est une métrique kählérienne sur X et A est un diviseur ample, on ait*

$$v(\omega - A) \geq \int_X \omega^n - C(n) \int_X \omega^{n-1} \wedge c_1(A).$$

Cette inégalité s'obtient toujours par la concentration de la masse, en utilisant une famille d'équations de Monge-Ampère adaptée. Peut-être, la constante optimale $C(n) = n$ (qui semble nécessaire pour le résultat qu'on a en vue) pourrait s'obtenir par les méthodes spectrales utilisées par L. Laeng (voir [33]).

Question. Pour beaucoup de problèmes en géométrie complexe, il serait très utile de disposer d'une version transcendante des inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly.

Soit X une variété complexe compacte, et soit α une forme différentielle réelle fermée de type $(1,1)$ sur X. On note $X(\alpha, \leq 1)$ le sous–ensemble des $x \in X$ tel que α_x a au plus une valeur propre négative. Alors $v(\alpha) \geq \int_{X(\alpha,\leq 1)} \alpha^n$.

Une fois de plus, si $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$, la réponse à cette question découle des inégalités de Morse holomorphes (voir [2]).

La question précédente est également résolue dans [3] pour les variétés hyperkähleriennes. Considérons une variété hyperkählerienne X, et une forme différentielle fermée α de type $(1,1)$ sur X, qui vérifie la condition intégrale de l'énoncé précédent. Alors il existe une suite $(\alpha_k) \subset H^2(X, \mathbb{Q})$ telle que $||\alpha - \alpha_k|| \leq 1/k$. Des résultats standard dans la théorie des variétés hyperkähleriennes (voir le travail de D. Huybrechts [25] et les références dans cet article) montrent qu'il existe une famille $\mathcal{X} \mapsto S$ telle que $\mathcal{X}_0 = X$, et pour une suite (s_k) convergent vers zéro, la classe $\{\alpha_k\}$ est de type $(1,1)$ sur la fibre $\mathcal{X}_{s_k}$. Le résultat est alors une conséquence de la propriété de semi–continuité du volume, combinée avec les inégalités de Morse holomorphes sur les fibres voisines.

Troisième partie
Courants associés aux courbes entières

Dans cette partie, notre travail porte sur le comportement asymptotique des courbes entières Zariski dense. Les parties 3.2 et 3.2 constituent un résumé du travail [50].

3.1 Préliminaires

Commençons par fixer une métrique kählérienne ω sur X, et soit $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense. L'indicatrice de croissance de φ par rapport à ω est classiquement définie par

$$T(\varphi, r) := \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\Delta(t)} \varphi^* \omega$$

où $\Delta(t) \subset \mathbb{C}$ est le disque de rayon t. Si ω est la forme de courbure d'un diviseur hyperplan H, la théorie de Nevanlinna offre un équivalent asymptotique pour la quantité $T(\varphi, r)$, lorsque $r \mapsto \infty$.

Soit $H = (\sigma = 0)$ la section canonique de $\mathcal{O}(H)$, et $(z_j) \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des points ou $\sigma \circ \varphi = 0$; on note (ν_j) leurs multiplicités. Alors on a (voir [24], [55])

$$T(\varphi, r) = \sum_j \nu_j \log \frac{r}{|z_j|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{||\sigma \circ \varphi(re^{i\theta})||} d\theta + \mathcal{O}(1).$$

Autrement dit, le terme principal de $T(\varphi, r)$ compte les intersections de l'image de φ avec H.

M. McQuillan associe à φ un courant positif fermé de la façon suivante: pour tout réel positif r, considérons le courant de type $(n-1, n-1)$ défini par

$$(T_r[\varphi], \alpha) := \frac{\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\Delta(t)} \varphi^* \alpha}{T(\varphi, r)},$$

où α est une forme de type $(1,1)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Maintenant si (r_k) est une suite qui tend vers l'infini, la famille de courants $T_{r_k}[\varphi]$ est de masse uniformément bornée, donc par précompacité, admet une limite faible, notée $T[\varphi]$. C'est un courant positif, et de plus, quitte à bien choisir la suite (r_k), il sera fermé (cette affirmation est une conséquence des résultats classiques d'Ahlfors et Nevanlinna). Avant de présenter une propriété numérique de $T[\varphi]$, voici des exemples, dus a M. Brunella (voir [4]).

(1) Si $\varphi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est définie par $\varphi(z) = (z, e^z)$, alors $T[\varphi] = [\infty \times \mathbb{P}^1]$.

(2) Si $\varphi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est définie par $\varphi(z) = (e^z, e^{iz})$, alors $T[\varphi] = [\infty \times \mathbb{P}^1] + [0 \times \mathbb{P}^1] + [\mathbb{P}^1 \times \infty] + [\mathbb{P}^1 \times 0]$ (à une constante positive près).

Le résultat suivant est une version du premier théorème fondamental dans la théorie de Nevanlinna. Comme dans le chapitre précédent, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble de classes de cohomologie de courants positifs fermés de type $(1,1)$.

3.1.1 Proposition ([50]) *Soit X une variété kählérienne compacte, et soit $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense. Si $\alpha \in \mathcal{E}$, alors $(T[\varphi], \alpha) \geq 0$.*

Le cas où α est la classe de Chern d'un fibré effectif est dû à M. McQuillan, voir [37].

Dans le paragraphe suivant, nous indiquons quelques conditions qui assurent la positivité stricte dans l'inégalité 3.1.1.

3.2 Multiplicités et nombres de Lelong généralisés de $T[\varphi]$

Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble analytique, et $T[\varphi]$ le courant associé à la courbe $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$. On dispose de deux invariants pour mesurer la singularité de $T[\varphi]$ le long de Y. D'une part on a le nombre de Lelong générique $\nu(T[\varphi], y)$, et d'autre part on a la multiplicité de McQuillan, définie par

$$\mathrm{mult}(T[\varphi], Y) := \lim_{k \mapsto \infty} \frac{1}{T(\varphi, r_k)} \Big(\sum \nu_j \log \frac{r_k}{|z_j|} + \int_0^{2\pi} \big(\log \varepsilon - \psi_Y(\varphi(r_k e^{i\theta}))\big)_+ \frac{d\theta}{2\pi} \Big)$$

où ψ_Y est une fonction qui a des pôles logarithmiques d'ordre 1 sur Y, telle que sa forme hessienne soit bornée inférieurement.

Exemple. Si l'ensemble Y est réduit a un point $Y = y_0$, soit $\mu : \widehat{X} \mapsto X$ l'éclatement de X en y_0, et soit E le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Alors on voit aisément que $\mathrm{mult}(T[\varphi], y_0)$ est égale à $(T[\widehat{\varphi}], c_1(E))$, où $\widehat{\varphi} : \mathbb{C} \mapsto \widehat{X}$ est la transformée stricte de la courbe φ.

Le résultat suivant établit un rapport entre la multiplicité du courant $T[\varphi]$ et ses propriétés d'intersection.

3.2.1 Théorème ([50]). *Soit X une variété kählérienne compacte, et $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense. Considérons un sous–ensemble analytique $Y \subset X$, de codimension égale à p, tel que $\mathrm{mult}(T[\varphi], Y) > 0$. Si α est une $(1,1)$–classe nef, telle que $\nu(\alpha) + p > n$, alors $(T[\varphi], \alpha) > 0$.*

Dans l'énoncé précédent, $\nu(\alpha)$ désigne la dimension numérique de α, c'est-à-dire le nombre entier maximal k tel que $\int_X \alpha^k \wedge \omega^{n-k} > 0$.

Exemple. La courbe $z \mapsto (z, e^z, e^{iz})$ tracée sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ montre que le théorème 3.2.1 est optimal, dans le sens qu'on ne peut pas espérer obtenir un énoncé de positivité numérique stricte sans l'hypothèse concernant $\nu(\alpha)$.

Brièvement, la démonstration suit les étapes suivantes: tout d'abord, si $\{\alpha\}$ est une classe nef, on montre l'existence d'une famille de courants $T_\delta \in \{\alpha + \delta\omega\}$

dont les singularités sont analytiques, tels que $\nu_Y(T_\delta) \geq C\delta^{\frac{n-\nu(\alpha)}{p}}$. On utilise ensuite le fait que la courbe φ est Zariski dense, donc son image est en position générale par rapport à tout ensemble analytique fermé de X. En particulier, ceci s'applique pour les ensembles de niveau $E_c(T_\delta)$, pour tout $c > 0$. Ainsi, on peut employer les représentants singuliers T_δ pour calculer l'intersection du courant $T[\varphi]$ avec la classe $\{\alpha + \delta\omega\}$ (on tient compte du fait que $T[\varphi]$ est limite faible de courants d'intégration sur des disques) et on déduit que $(T[\varphi], \alpha + \delta\omega) \geq C\delta^{\frac{n-\nu(\alpha)}{p}} \operatorname{mult}(T[\varphi], Y)$. L'hypothèse $p + \nu(\alpha) > n$ fait que $\delta \ll \delta^{\frac{n-\nu(\alpha)}{p}}$ lorsque δ tend vers zéro, et ceci montre le théorème.

Dans un contexte algébrique (et pour des ensembles Y de dimension zéro), on signale que l'approche présentée ci–dessus a déjà été utilisée par McQuillan dans [39].

Si l'ensemble Y est réduit à un point, nous obtenons un énoncé plus complet.

3.2.2 Théorème ([50]). *Soit X une variété kählérienne compacte, et $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense. S'il existe $x_0 \in X$ tel que $\operatorname{mult}(T[\varphi], x_0) > 0$, alors $(T[\varphi], \alpha) > 0$ pour toute classe $\{\alpha\} \in \mathcal{E}$, de dimension numérique positive.*

On rappelle (voir [2]) qu'une classe pseudo–effective de dimension numérique nulle est équivalente à un $\mathbb{R}$–diviseur dont la dimension de Kodaira est zéro.

Remarque. Supposons qu'une variété projective non-uniréglée X soit munie d'un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$, et soit $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense tangente à $\mathcal{F}$. Par un théorème de Miyaoka [40], le fibré cotangent du feuilletage est pseudo–effectif. Le théorème 3.2.2, combiné avec l'inégalité tautologique démontrée par McQuillan dans [39], montrent que dans l'analyse des courbes entières tangentes aux feuilletages holomorphes, on peut toujours supposer que $\operatorname{mult}(T[\varphi], x) = 0$, pour tout point $x \in X$.

L'exemple (1) du paragraphe 3.1 montre que l'énoncé 3.2.2 devient faux si on remplace dans l'hypothèse la multiplicité par le nombre de Lelong. Dans cet exemple, la différence entre les composantes de la courbe fait qu'elle "ressemble" de plus en plus à la courbe algébrique $[\infty \times \mathbb{P}^1]$. Nous obtenons un critère de positivité de la classe du courant $T[\varphi]$ moyennant une hypothèse qui interdit un tel comportement.

3.2.3 Théorème ([50]). *Soit X une variété kählérienne compacte, et $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense. Si $\nu(T[\varphi], x_0) > 0$, et si $\chi_Y T[\varphi] = 0$ pour tout ensemble analytique propre $Y \subset X$, alors $(T[\varphi], \alpha) > 0$ pour toute classe nef $\{\alpha\}$, non-nulle.*

Considérons à présent un idéal cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$. On introduit la notion de nombre de Lelong généralisé du courant $T[\varphi]$ par rapport à $\mathcal{I}$.

Définition. *On appelle nombre de Lelong généralisé du courant $T[\varphi]$ par rapport à l'ideal $\mathcal{I}$ la limite*

$$\nu(T[\varphi],\mathcal{I}) := \lim_{\varepsilon\mapsto 0}\big(\chi_{e^{\psi_{\mathcal{I}}}<\varepsilon}T[\varphi], i\partial\overline{\partial}\log(\varepsilon^2+e^{2\psi_{\mathcal{I}}})\big).$$

Dans cette définition, $\psi_{\mathcal{I}}$ désigne une fonction congrue localement à $\frac{1}{2}\log(|f_1|^2 + ... + |f_k|^2)$ modulo des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$; les (f_j) sont les générateurs locaux de $\mathcal{I}$.

Pour un courant T quelconque, cette notion a été introduite et étudiée par J.-P. Demailly dans [12], sous l'hypothèse de semi–exhaustivité du support de T par rapport à l'ensemble de zéros de $\mathcal{I}$. Dans le cas particulier du courant associé à une courbe entière, c'est la densité de Zariski de φ qui remplace cette hypothèse.

Dans l'article [50], nous montrons que la quantité $\nu(T[\varphi],\mathcal{I})$ est bien définie, (c'est-à-dire, elle ne dépend pas de la fonction $\psi_{\mathcal{I}}$ choisie). Dans le cas où l'idéal $\mathcal{I}$ est associé à une sous-variété lisse $Y \subset X$, on calcule explicitement le nombre $\nu(T[\varphi],\mathcal{I})$.

Question. Au sujet de ces nombres, on voudrait proposer le problème suivant.

Soit X une variété kählérienne compacte, et soit $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense. On suppose qu'il existe $x_0 \in X$ et $\delta_0 > 0$ tels que

(1) $\nu(T[\varphi],\mathcal{I}) \geq \delta_0$ pour tout faisceau cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{x_0}$.

(2) $\chi_Y T[\varphi] = 0$ pour tout ensemble analytique $Y \subset X$ de codimension au moins égale à 2.

Alors la classe $\{T[\varphi]\}$ contient un répresentant strictement positif.

3.3 Décomposition de Siu du courant $T[\varphi]$

Considérons une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$, ainsi que sa dérivée projectivisée $\varphi' : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{P}(T_X)$. Quitte à bien choisir la suite (r_k) dans la définition de $T[\varphi]$, la limite faible de la suite de courants $T_{r_k}[\varphi']$ est fermée ; de plus, on a $\pi_*(T[\varphi']) = T[\varphi]$, où $\pi : \mathbb{P}(T_X) \mapsto X$ est la projection canonique. Considérons la décomposition de Siu pour les deux courants: $T[\varphi] = \sum \lambda_j[C_j] + R_\varphi$ et $T[\varphi'] = \sum \lambda_j'[\widetilde{C}_j] + R_{\varphi'}$. Par abus de langage, on dit que la famille de courbes (C_j) est le support de la "partie algébrique" du courant $T[\varphi]$. Le théorème suivant clarifie le rapport entre les parties algébriques de φ et φ', respectivement.

3.3.1 Théorème ([50]) *Les courbes $\widetilde{C}_j$ dans la partie algébrique de $T[\varphi']$ sont soit des relevés canoniques des courbes dans la partie algébrique de $T[\varphi]$, avec les mêmes multiplicités, soit contenues dans les fibres de la projection $\pi : \mathbb{P}(T_X) \mapsto X$.*

Il serait très intéressant d'avoir un résultat analogue pour les parties résiduelles R_φ et $R_{\varphi'}$ respectivement.

Question. Concernant la partie algébrique de $T[\varphi]$, on voudrait proposer la question suivante.

Si la courbe C est dans le support de la partie algébrique de $T[\varphi]$, alors le genre géométrique de C est strictement inférieur à 2.

Dans le preprint [50], on résoud quelques cas particuliers de ce problème.

3.3.2 Théorème ([50]) *Soit X une variété kählérienne compacte, et soit $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière. Considérons une courbe algébrique C, ainsi que sa relevée canonique $C_{[1]}$. On suppose que φ c'est une courbe de Brody ($\max_{z\in\mathbb{C}} |\varphi'(z)| \leq 1$), et qu'il existe $\delta > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $r \geq r_\varepsilon$ on ait*

$$(*_\delta) \qquad \frac{1}{T(\varphi, r)} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\Delta(t)} \chi_{\mathcal{V}_\varepsilon(C_{[1]})} \circ \varphi_{[1]}(z) |\varphi'(z)|^{2+\delta} i dz d\overline{z} \geq \lambda > 0.$$

Alors le genre géométrique de C est strictement inférieur à 2.

Notons que C est dans le support de la partie algébrique de $T[\varphi]$ si la relation $(*_\delta)$ est satisfaite avec $\delta = 0$. Pour $\delta > 0$, on n'a pas une interprétation aussi simple, cependant $(*_\delta)$ signifie que $C \subset \overline{\varphi(\mathbb{C})}$, et que lorsque φ approche C, sa dérivée est minorée.

Question. Pour finir, voici une version plus générale de la question précédente.

Soit X une variété kählerienne compacte, et soit $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$ une courbe entière Zariski dense. Si $Y \subset X$ est un sous–ensemble analytique, tel que $\chi_Y T[\varphi] \neq 0$, alors il existe une courbe entière non-constante $\varphi_Y : \mathbb{C} \mapsto Y$

Références

[1] Boucksom, S. — *On the volume of a line bundle* math. AG/0201031 (2002).

[2] Boucksom, S. — *Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds* math. AG/0204336 (2002)

[3] Boucksom, S., Demailly, J.-P., Paun, M., Peternell, T. — *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, preprint 2003.

[4] Brunella, M. — *Courbes entières et feuilletages holomorphes*, Ens. Math. **45** (1999), 195–216 .

[5] Bonavero, L. — *Inégalités de morse holomorphes singulières*, J. Geom. Anal. **8** (1998), 409–425.

[6] Buchdahl, N. — *On compact Kähler surfaces*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999) 287–302.

[7] Buchdahl, N. — *A Nakai-Moishezon criterion for non-Kähler surfaces*, Ann. Inst. Fourier **50** (2000) 1533–1538.

[8] Campana, F., Peternell, T. — *Algebraicity of the ample cone of projective varieties* J. Reine Angew. Math. **407** (1990).

[9] Cheeger, J., Colding, T.– *Lower bounds on Ricci curvature and almost rigidity of warped products* , Ann. Math. **144** (1996), 189-237.

[10 Cheeger, J., Gromoll, D. — *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **6** (1971), 119–128.

[11] Demailly, J.-P. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier **35** (1985).

[12] Demailly, J.-P. — *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'integralité et d'analyticité*, Acta Math. **159** (1987).

[13] Demailly, J.-P. — *Cohomology of q-convex Spaces in Top Degrees*, Math. Z. **204** (1990), 283–295.

[14] Demailly, J.-P. — *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Algebraic Geometry, **1** (1992), 361–409.

[15] Demailly, J.-P. — *A numerical criterion for very ample line bundles*, J. Diff. Geom. **37** (1993), 323–374.

[16] Demailly, J.-P., Peternell, Th., Schneider, M. — *Kähler manifolds with nef Ricci class*, Comp. Math. **89** (1993), 323–374.

[17] Demailly, J.-P., Peternell, Th., Schneider, M. — *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Algebraic Geometry **3** (1994) 295–345.

[18] Demailly, J.-P., Ein, L., Lazarsfeld, R. — *A subadditivity property of multiplier ideals*, math.AG/0002035, Michigan Math. J., special volume in honor of William Fulton, **48** (2000), 137–156.

[19] Demailly, J.-P., Paun, M. — *Numerical characterization of the Kähler cone of a compact kähler manifold*, to appear in Annals of Math. (2003).

[20] Demailly, J.-P., Peternell, Th. — *On the geometry of positive cones of projective and Kähler manifolds*, preprint (2002).

[21] Ein, L., Lazarsfeld, R., Nakamaye, M. — *Zero-estimates, intersection theory, and a theorem of Demailly*, Higher dimensional complex variables (Trento 1994)

[22] Eyssidieux, P. — *Théorèmes de Nakai-Moishezon pour certaines classes de type* $(1,1)$ *et applications*, Prépublication Université de Toulouse III, 2000.

[23] Fujita, T. — *Approximating Zariski decomposition of big line bundles* Kodai Math. J. **17** (1994).

[24] Hayman, K. — *Meromorphic functions*, Oxford Math. Monographs.

[25] Huybrechts, D. — *Compact Hyperkähler Manifolds: Basic Results*, Invent. math. **135** (1999), 63–113.

[26] Huybrechts, D. — *The Projectivity Criterion for Hyperkähler manifolds as a Consequence of the Demailly-Paun Theorem*, personal communication, manuscript Köln University, May 2001, 3 p.

[27] Ji, S., Shiffman, B. — *Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents*, J. Geom. Anal. **3**, (1993) 37–61.

[28] Kleiman, S. — *A note on the Nakai-Moishezon test for ampleness of a divisor*, Amer. J. Math. **87** (1965).

[29] Kleiman, S. — *Toward a numerical theory of ampleness*, Ann. Math. **84** (1966), 293–344.

[30] Kobayashi, S. – *On compact Kähler manifolds with positive Ricci tensor*, Ann. of Math. **74** (1961), 570-574.

[31] Kodaira, K. — *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. of Math. **60** (1954).

[32] Kodaira, K., Spencer, D.C. *On deformations of complex analytic structures. III. Stability theorems for complex structures*, Ann. of Math. **71** (1960) 43–76.

[33] Laeng, L. –*Estimations spectrales asymptotiques en gomtrie hermitienne*, Thèse de l'Université Grenoble 1, octobre 2002.

[34] Lelong, P. –*Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France **85**, (1957).

[35] Lamari, A. — *Courants kählériens et surfaces compactes*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999) 263–285.

[36] Lamari, A. — *Le cone Kählérien d'une surface*, J. Math. Pures Appl. **78** (1999) 249–263

[37] McQuillan, M. — *Diophantine approximations and foliations*, Publ. IHES **87** (1998), 121–174.

[38] McQuillan, M. — *Bloch hyperbolicity*, preprint IHES (2001).

[39] McQuillan, M. — *Proof of the stupid lemma*, personal communication (2003)

[40] Miyaoka, Y. — *Deformations of morphisms along a foliation*, Proc. Symp. Pure Math. **46** S. Bloch ed., A.M.S. (1987).

[41] Moishezon, B. G. — *A criterion for projectivity of complete algebraic varieties*, AMS Translations (2) **63** (1967), 1-50.

[42] Moishezon, B. G. — *On n–dimensional compact varieties with n algabraically independent meromorphic functions*, AMS Translations (2) **63** (1967), 51-177.

[43] Nakai, Y. — *A criterion of an ample sheaf on a projective scheme*, Amer. J. Math. **85** (1963).

[44] Paun, M. — *Sur le groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef* dans CRAS, n° t.**324**, Série 1, 1997.

[45] Paun, M. — *Fibré en droites numériquement effectifs et variétés Kählériennes compactes à courbure de Ricci nef*, Thèse, Université de Grenoble 1 (1998), 80 p.

[46] Paun, M. — *Sur l'effectivité numérique des images inverses de fibrés en droites*, Math. Ann. **310** (1998), 411–421.

[47] Paun, M. — *Sur les variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective*, Bull. Sci. Math., **122**, 1998.

[48] Paun, M. — *Semipositive (1,1)–cohomology classes on projective manifolds*, Preprint de l'I.R.M.A., 1999.

[49] Paun, M. — *On the Albanese map of Compact Kähler manifolds with almost-positive Ricci curvature*", Comm. Anal. Geom. **9**, 2001.

[50] Paun, M. — *Currents associated to entire curves on compact Kähler manifolds*, preprint IRMA. 2003

[51] Siu, Y.-T. — *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974).

[52] Siu, Y.-T. — *Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood* Invent. Math. **38** (1976), no. 1, 89–100.

[53] Siu, Y.-T. — *Some recent results in complex manifold theory for the semi-positive case*, survey article in the Proceedings of the international congress held in Bonn, 1984.

[54] Siu, Y.–T. — *A vanishing theorem for semi-positive line bundles over non-Kähler manifolds*, J. Diff. Geom. (1984).

[55] Siu, Y.–T. — *Hyperbolicity in Complex Geometry*, preprint 2003.

[56] Yau, S.-T. — *On the Ricci curvature of a complex Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978).

[57] Zariski, O. — *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algabraic surface*, Ann. of Math. **76** (1962), 560-615.

Mihai Paun
Université Louis Pasteur, Département de Mathématiques
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
E-mail: paun@math.u-strasbg.fr

(August 14, 2003; printed on April 23, 2004)