À l'heure de faire le point sur les années écoulées, ma reconnaissance va, entre autres, à toutes celles et tous ceux dont les enseignements, alors que j'étais encore étudiante, m'ont donné envie de continuer en mathématiques et ont orienté mes choix. Je pense en particulier à:
– MM. les Professeurs Jacques FARAUT et Jean–Pierre RAMIS qui m'avaient déjà fait l'honneur de participer à mon jury de doctorat et que je retrouve aujourd'hui avec plaisir dans mon jury d'habilitation,
– M. le Professeur Vazgain AVANISSIAN qui a dirigé mes premiers travaux de recherche, lorsque j'étais en thèse.

Je souhaite également remercier M. le Directeur de Recherche Christian KASSEL qui, voici un an environ, m'a vivement incitée à me lancer dans la préparation de l'habilitation.

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. le Professeur Reinhard SCHÄFKE, mon garant d'habilitation, qui n'a jamais ménagé ni son temps ni ses conseils aux différentes étapes jalonnant le parcours jusqu'à la soutenance.

Il m'est tout aussi agréable de remercier M. le Professeur Vilmos KOMORNIK pour sa participation à mon jury en tant que rapporteur interne. Je suis très honorée que MM. les Professeurs Rauno AULASKARI et Kunio YOSHINO aient accepté d'en être les rapporteurs externes et je tiens particulièrement à les remercier pour leur présence aujourd'hui.

Je dois beaucoup à Mme Myriam OUNAIES et M. Marc–Olivier GEBUHRER à qui j'ai pu exposer ces travaux alors qu'ils n'en étaient qu'à leurs premiers balbutiements.

Je ne saurais oublier Mme Claudine MITSCHI pour ses encouragements constants tout au long de cette année de préparation. Je sais gré à Mmes Claire DUPUIS et Élisabeth KHALILI ainsi qu'à M. Photis NOBELIS de leurs marques de soutien, en particulier pendant les semaines où je rédigeais cette synthèse.

Dans le cadre des enseignements aussi, j'ai toujours beaucoup apprécié de trouver des conditions stimulantes et amicales: je pense à Mme Iris MULLER et M. Bernard HEINKEL pour avoir travaillé avec eux de façon répétée, mais aussi à tous les collègues avec qui j'ai pu enseigner de façon plus sporadique et qui, je l'espère, me pardonneront de ne pas les nommer tous.

Les travaux effectués après ma thèse portent sur la croissance de fonctions entières dans $\mathbb{C}^N$ et de fonctions sous–harmoniques dans $\mathbb{R}^N$ ou dans la boule unité de $\mathbb{R}^N$. J'ai comparé différents modes de description de la croissance de ces fonctions: estimations par majorations, conditions intégrales. J'ai étudié les conséquences de tel ou tel type de croissance: résultats d'unicité, renseignements sur l'ensemble des zéros ou sur la mesure de Riesz associée, reconstruction de la fonction. Mes résultats se répartissent en quatre thèmes:

Dans les chapitres I, II et III, la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$ est notée $|\,.\,|$ avec $N \geq 2$ un entier fixé. Dans le chapitre IV, cette notation $|\,.\,|$ désigne le module d'un nombre complexe dans $\mathbb{C}$. Dans la bibliographie, les références [37] à [44] correspondent à celles de mes publications qui portent sur des sujets différents de ceux traités dans la thèse.

Définition. *Étant donné* $\alpha > 0$, *soit* $\mathcal{B}_\alpha$ *l'ensemble des fonctions* u *sous–harmoniques dans la boule unité* $B_N = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x| < 1\}$, *à valeurs dans* $[0, +\infty[$, *qui satisfont:*

$$\sup_{x \in B_N} (1 - |x|^2)^\alpha \, u(x) \; < +\infty. \tag{1}$$

Pour les fonctions de cet ensemble (introduit en [40]) je parle de "croissance de type Bloch" en référence au cas $N = 2$: l'espace des fonctions f holomorphes dans le disque unité D de $\mathbb{C}$ telles que (1) soit vérifiée avec $u = |f'|$ est traditionnellement appelé espace de Bloch de paramètre α.
Dans le cas $\alpha = 1$, cet espace a été introduit en 1929 par Landau en [24], mais son origine remonte à 1924 avec le théorème de Bloch en [10] sur la taille de l'image de D par une fonction holomorphe, résultat qui permit une nouvelle preuve du théorème de Picard (toute fonction entière dans $\mathbb{C}$ non constante évite au plus une valeur) initialement établi à l'aide de fonctions elliptiques.
Les espaces de Bloch ont fait l'objet de nombreux travaux. Ils interviennent entre autres en théorie des opérateurs (voir par exemple [1], [4], [9], [26]), dans l'étude des fonctions automorphes (voir par exemple [3], [6])... On renvoie à [2], [33, chapitre 10], [57, chapitre 5] et [55] pour un tour d'horizon plus exhaustif sur ces espaces (et à [36], [45] pour le cas des fonctions holomorphes dans la boule unité de $\mathbb{C}^N$).

L'espace de Bloch de paramètre α est invariant sous les transformations φ_a ($a \in D$) définies par $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ $\forall z \in D$. En [54] (ou [36] dans le cas $\alpha = 1$), il a été établi qu'une fonction f analytique dans D appartient à cet espace de Bloch si et seulement si:

$$\sup_{a \in D} \left(\frac{1}{\textit{Aire de } \Delta(a,R)} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_{\Delta(a,R)} |f'(z)| \, d\mathcal{A}(z) \; < +\infty \tag{2}$$

pour un certain $R \in]0,1[$, avec $\Delta(a,R) = \{z \in D \,:\, |\varphi_a(z)| < R\}$ et $d\mathcal{A}(z)$ l'élément d'aire sur D. En fait, $\Delta(a,R)$ est un disque euclidien de centre $\frac{1-R^2}{1-R^2|a|^2}\, a$ et de rayon $\frac{1-|a|^2}{1-R^2|a|^2}\, R$. Si (2) est vérifiée pour un certain $R \in]0,1[$, alors elle l'est pour tout $R \in]0,1[$.

En [54] il a aussi été montré que f appartient à l'espace de Bloch de paramètre $\frac{p+2}{q}$ (où $p > -2$ et $q > 0$) si et seulement si:

$$\sup_{a \in D} \int_D |f'(z)|^q \, (1 - |z|^2)^p \, \omega(|\varphi_a(z)|) \, d\mathcal{A}(z) \; < +\infty \tag{3}$$

avec ω la fonction définie par $\omega(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^s$ où $s > 1$ (voir [5] dans le cas $q = 2$, $p = 0$).

J'ai recherché si des caractérisations analogues existaient pour les fonctions sous–harmoniques de l'ensemble $\mathcal{B}_\alpha$, en travaillant avec les transformations Φ_a ci–dessous, qui sont des involutions de B_N, tout comme les φ_a étaient des involutions de D. Les démonstrations des résultats énoncés dans la suite sont détaillées dans mes articles [40] et [37].

Définition. *Pour tout $a \in B_N$, soit Φ_a la transformation définie sur B_N par:*

$$\Phi_a(x) = \frac{a - P_a(x) - \sqrt{1-|a|^2}\; Q_a(x)}{1 - \langle x, a\rangle} \qquad\qquad \forall x \in B_N,$$

où $\langle x, a\rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j\, a_j$ pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in I\!R^N$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in I\!R^N$, $P_a(x) = \frac{\langle x,a\rangle}{|a|^2}\, a$ et $Q_a(x) = x - P_a(x)$, avec $P_a(x) = 0$ si $a = 0$.

On pouvait s'attendre à une différence notable entre $\mathcal{B}_\alpha$ et les espaces de Bloch de fonctions analytiques, puisque l'ensemble $\mathcal{B}_\alpha$ n'est pas invariant sous les transformations Φ_a. En effet, si $u \in \mathcal{B}_\alpha$ est telle que $u \circ \Phi_a$ reste sous–harmonique dans B_N, alors $u \circ \Phi_a \in \mathcal{B}_\alpha$. Mais $u \circ \Phi_a$ ne reste pas forcément sous–harmonique, comme le montre le contrexemple $u(x) = 1 + \langle x, a\rangle$. Un autre élément laissait présager une différence significative par rapport au cas des fonctions analytiques dans D: le jacobien associé au changement de variable $\zeta = \varphi_a(z)$ dans D est

$$|\varphi_a'(z)|^2 = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}\right)^2 = \left(\frac{1-|\varphi_a(z)|^2}{1-|z|^2}\right)^2,$$

alors que pour le changement de variable $y = \Phi_a(x)$ dans B_N, il vaut en valeur absolue:

$$\left(\frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\langle x,a\rangle}\right)^{N+1} = \left(\frac{1-|\Phi_a(x)|^2}{1-|x|^2}\right)^{\frac{N+1}{2}}.$$

Lemme. *Soit $R \in]0,1[$, l'ensemble $E(a,R) = \{x \in B_N \,:\, |\Phi_a(x)| < R\}$ est ici un ellipsoïde:*

$$E(a,R) = \left\{ x \in B_N \;:\; \frac{|P_a(x) - c|^2}{R^2\rho^2} + \frac{|Q_a(x)|^2}{R^2\rho} < 1 \right\}$$

où $c = \frac{(1-R^2)a}{1-R^2|a|^2}$ et $\rho = \frac{1-|a|^2}{1-R^2|a|^2}$ (voir [35, p.29]).
Le volume de $E(a,R)$ vaut $V_N\, R^N \left(\frac{1-|a|^2}{1-R^2\,|a|^2}\right)^{\frac{N+1}{2}}$ avec $V_N = \frac{2\,\pi^{N/2}}{N\,.\,\Gamma(N/2)}$ le volume de B_N.
La boule $B(a, R_a) = \{x \in B_N : |x-a| < R_a\}$ où $R_a = R\,\frac{1-|a|^2}{1+R|a|}$ est contenue dans $E(a,R)$.
Pour tous $a \in B_N$ et $R \in [0,1[$, on a $E(a,R) \subset B(O, R_a')$ avec $R_a' = \frac{R+|a|}{1+R|a|}$ et, si $R > |a|$, $E(a,R) \supset B(O, R_a'')$ avec $R_a'' = \frac{R-|a|}{1-R|a|}$.

J'ai obtenu une condition suffisante d'appartenance à $\mathcal{B}_\alpha$:

Théorème. *Soient $\alpha > 0$ et $R \in]0,1[$. Si une fonction $u \geq 0$ sous–harmonique dans B_N vérifie*

$$L_{\alpha,R}(u) := \sup_{a \in B_N} \left(\frac{1}{\textit{Volume de } E(a,R)} \right)^{2\frac{N-\alpha}{N+1}} \int_{E(a,R)} u(x)\, dx \; < +\infty,$$

alors $u \in \mathcal{B}_\alpha$.

J'obtiens une autre condition suffisante où l'exposant $2\frac{N-\alpha}{N+1}$ est remplacé par $1 - \frac{\alpha}{N}$:

Théorème. *Soit $R \in]0,1[$ et $u \geq 0$ une fonction sous–harmonique dans B_N. Si $\alpha \geq N$ et*

$$K_{\alpha,R}(u) := \sup_{a \in B_N} \left(\frac{1}{\textit{Volume de } E(a,R)} \right)^{1-\frac{\alpha}{N}} \int_{E(a,R)} u(x)\, dx \; < +\infty,$$

alors $u \in \mathcal{B}_\alpha$.

Mais ces deux conditions suffisantes ne sont pas des conditions nécessaires, la fonction $u \in \mathcal{B}_\alpha$ définie par $u(x) = \frac{1}{(1-|x|^2)^\alpha}$ $\forall x \in B_N$ constitue un contrexemple.
J'obtiens par contre une condition nécessaire et suffisante en remplaçant les ellipsoïdes par des boules euclidiennes:

Théorème. *Étant donnés $\alpha > 0$ et $R \in]0,1[$, une fonction $u \geq 0$ sous–harmonique dans B_N appartient à $\mathcal{B}_\alpha$ si et seulement si*

$$M_{\alpha,R}(u) := \sup_{a \in B_N} \left(\frac{1}{\textit{Volume de } B(a,R_a)} \right)^{1-\frac{\alpha}{N}} \int_{B(a,R_a)} u(x)\, dx \; < +\infty.$$

J'ai aussi étudié le cas où $K_{\alpha,R}(u) < +\infty$ avec $\alpha < N$:

Théorème. *Soit $R \in]0,1[$ et $u \geq 0$ une fonction sous–harmonique dans B_N. Si $0 < \alpha < N$ et $K_{\alpha,R}(u) < +\infty$, alors $u \in \mathcal{B}_\gamma$ avec $\gamma = N + \frac{(\alpha-N)(N+1)}{2N}$.*

Là aussi la réciproque est fausse. De plus, comme $\gamma > \alpha$, on a seulement $\mathcal{B}_\gamma \supset \mathcal{B}_\alpha$.
Simultanément, l'étude des fonctions $R \mapsto L_{\alpha,R}(u)$, $R \mapsto K_{\alpha,R}(u)$ et $R \mapsto M_{\alpha,R}(u)$ a mis en évidence quelques résultats d'unicité:

Théorème. *Étant donné $\alpha > 0$, soit $u \geq 0$ une fonction sous–harmonique dans B_N et γ défini comme dans le théorème précédent.*
1) Supposons $u \in \mathcal{B}_\alpha$.
Si $M_{\alpha,R}(u) = o(R^\alpha)$ quand $R \to 0^+$ alors u est la fonction identiquement nulle dans B_N.
2) Supposons $K_{\alpha,R}(u) < +\infty$ $\forall R \in]0,1[$.
Si $K_{\alpha,R}(u) = o(R^\alpha)$ quand $R \to 0^+$, alors $u \equiv 0$ dans B_N.
Si $K_{\alpha,R}(u) = o\left((1-R)^{|N-\gamma|}\right)$ quand $R \to 1^-$, alors $u \equiv 0$ dans B_N.
3) Supposons $L_{\alpha,R}(u) < +\infty$ $\forall R \in]0,1[$.
Si $L_{\alpha,R}(u) = o\left((1-R)^N\right)$ quand $R \to 1^-$, alors $u \equiv 0$ dans B_N.
Si $L_{\alpha,R}(u) = o\left(R^{\frac{N}{N+1}(2\alpha+1-N)}\right)$ quand $R \to 0^+$, alors $u \equiv 0$ dans B_N.

Projets de recherche. *1) Dans le cas $K_{\alpha,R}(u) < +\infty$ avec $0 < \alpha < N$, peut–on améliorer le résultat $u \in \mathcal{B}_\gamma$? existe–t–il $\beta < \gamma$ tel que $u \in \mathcal{B}_\beta$?*
2) Lorsque $L_{\alpha,R_0}(u) < +\infty$ pour un certain $R_0 \in]0,1[$, dans quelles situations est–on assuré d'avoir $L_{\alpha,R}(u) < +\infty$ $\forall R \in]0,1[$? la même question se pose pour $K_{\alpha,R}(u)$.

Par ailleurs, j'ai obtenu une autre condition nécessaire et suffisante d'appartenance à $\mathcal{B}_\alpha$:

Théorème. *Soit $\alpha > 0$, $R \in]0,1[$ et $u \geq 0$ une fonction sous–harmonique dans B_N. On a*

$$u \in \mathcal{B}_\alpha \Longleftrightarrow \sup_{a \in B_N} \int_{B(a,R_a)} u(x)\,(1-|x|^2)^{\alpha-N}\,dx \;< +\infty.$$

Cette caractérisation des ensembles $\mathcal{B}_\alpha$ m'a permis de les relier aux ensembles suivants:

Définition. *Étant donnés p un nombre réel et $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction mesurable, soit $\mathcal{SH}(p,\omega)$ l'ensemble des fonctions $u \geq 0$ sous–harmoniques dans B_N qui vérifient:*

$$\sup_{a \in B_N} \int_{B_N} u(x)\,(1-|x|^2)^p\,\omega(|\Phi_a(x)|)\,dx \;< +\infty.$$

Par exemple, la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{(1-|x|^2)^\alpha}$ $\forall x \in B_N$ appartient à $\mathcal{SH}(p,\omega)$ si $\alpha \leq p + \frac{N+1}{2}$ et si ω vérifie:

$$\int_0^1 \omega(r)\,r^{N-1}\,(1-r^2)^{-\frac{N+1}{2}}\,dr \;< +\infty. \tag{4}$$

Une telle condition est satisfaite par exemple avec $\omega(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^s$ où $s > \frac{N-1}{2}$.
J'ai cherché à déterminer s'il existe α tel que $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{SH}(p,\omega)$.

Théorème. *Soient $\alpha > 0$, $p \in I\!R$ et $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction satisfaisant* (4).
1) Si $\alpha \leq p + \frac{N+1}{2}$ alors $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{SH}(p,\omega)$.
2) Si $\alpha < p + \frac{N+1}{2}$ alors $\mathcal{SH}(p,\omega) \not\subset \mathcal{B}_\alpha$.
3) Si $\alpha > p + \frac{N+1}{2}$ alors $\mathcal{B}_\alpha \not\subset \mathcal{SH}(p,\omega)$ (ici la condition (4) *n'est pas requise).*

Sous la condition (4) on a ainsi $\max\{\alpha > 0 \,:\, \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{SH}(p,\omega)\} = p + \frac{N+1}{2}$. S'il existe α tel que $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{SH}(p,\omega)$, alors obligatoirement $\alpha = p + \frac{N+1}{2}$.

Projet de recherche. *Déterminer si l'inclusion $\mathcal{SH}(p,\omega) \subset \mathcal{B}_{p+\frac{N+1}{2}}$ a lieu ou pas.*

J'obtiens d'autres réponses partielles:

Théorème. *Soient $\alpha > 0$, $p \leq \alpha - N$ et $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction décroissante. Alors $\mathcal{SH}(p,\omega) \subset \mathcal{B}_\alpha$.*

D'après le résultat *3)* du théorème précédent, on sait déjà (dans le cas "ω décroissante") que, s'il existe α pour lequel $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{SH}(p,\omega)$, alors $\alpha \leq p + \frac{N+1}{2}$.

Projet de recherche. *Compléter la comparaison entre les ensembles $\mathcal{B}_\alpha$ et $\mathcal{SH}(p,\omega)$ et évaluer* $\inf\{\alpha > 0 \,:\, \mathcal{SH}(p,\omega) \subset \mathcal{B}_\alpha\}$.

Dans ce but, j'ai étudié plus particulièrement certains exemples de fonctions appartenant à ces ensembles: celles qui sont sommes d'une série lacunaire.

Définition. *Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions u définies sur B_N par un développement de la forme:*

$$u(x) = \sum_{k\geq 1} c_k \, |x|^{2^k} \qquad \forall x \in B_N \tag{5}$$

où la série de puissances $f(r) = \sum_{k\geq 1} c_k \, r^{2^k}$ a des coefficients $c_k \geq 0$ et un rayon de convergence ≥ 1.

Noter que toute fonction $u \in \mathcal{G}$ est sous–harmonique dans B_N car $\Delta u \geq 0$. En effet $\Delta u(x) = f''(r) + \frac{N-1}{r} f'(r)$, avec $r = |x|$.

Lemme. *Soit $u \in \mathcal{G}$, se développant selon (5). Soient $\alpha > 0$ et $p \in I\!\!R$.*
1) On a: $u \in \mathcal{B}_\alpha \iff \sup_{k\geq 1} c_k \, 2^{-k\alpha} < +\infty$.
2) Soient $s > -p-1$ et $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction mesurable telle que:

$$\exists C > 0 \qquad \omega(r) \geq C\,(1-r^2)^s \qquad \forall r \in [0,1[. \tag{6}$$

Si $u \in \mathcal{SH}(p,\omega)$ alors $\sum_{k\in I\!\!N} c_{k+1} \, 2^{-k(p+s+1)} < +\infty$.
3) Supposons que $p > -\frac{N+3}{4}$ et que $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ soit une fonction mesurable vérifiant:

$$\int_0^1 [\omega(r)]^2 \, r^{N-1} (1-r^2)^{-\frac{N+1}{2}} \, dr < +\infty. \tag{7}$$

Si $\sum_{k\in I\!\!N} c_{k+1}^2 \, 2^{-2k(p+\frac{N+3}{4})} < +\infty$, alors $u \in \mathcal{SH}(p,\omega)$.

La preuve de *1)* a utilisé un résultat de [47], celle de *2)* et *3)* un résultat de [28].

Proposition. *Soit $p > -\frac{N+3}{4}$ et $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction satisfaisant (7). Pour tout $\alpha < p + \frac{N+3}{4}$, on a $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{SH}(p,\omega)$ mais $\mathcal{G} \cap \mathcal{SH}(p,\omega) \not\subset \mathcal{B}_\alpha$.*

Par exemple, pour $\omega(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^s$ avec $\frac{N-1}{4} < s \leq \frac{N-1}{2}$ et $p > -\frac{N+3}{4}$, la condition (4) n'est pas vérifiée. On ne peut pas affirmer que $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{SH}(p,\omega)$ ni que $\mathcal{SH}(p,\omega) \not\subset \mathcal{B}_\alpha$ pour $\alpha < p + \frac{N+3}{4} \leq p + \frac{N+1}{2}$. Par contre, on sait que $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{SH}(p,\omega)$ et $\mathcal{G} \cap \mathcal{SH}(p,\omega) \not\subset \mathcal{B}_\alpha$.

Proposition. *Soient $p \in I\!\!R$, $s \in I\!\!R$ tels que $p+s+1 > 0$ et $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction mesurable vérifiant (6). Pour tout $\alpha \geq p+s+1$, on a $\mathcal{G} \cap \mathcal{SH}(p,\omega) \subset \mathcal{B}_\alpha$ mais $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha \not\subset \mathcal{SH}(p,\omega)$.*

Par exemple lorsque $0 \leq s < N-1$, même en supposant ω décroissante, on ne peut pas affirmer $\mathcal{SH}(p,\omega) \subset \mathcal{B}_\alpha$ pour $p+s+1 \leq \alpha < p+N$, par contre on a $\mathcal{G} \cap \mathcal{SH}(p,\omega) \subset \mathcal{B}_\alpha$.

Projet de recherche. *Pour pouvoir utiliser l'expression des éléments de* $\mathcal{B}_\alpha$ *et* $\mathcal{SH}(p,\omega)$ *donnée par leur décomposition de Riesz (voir (8) ci–dessous), je souhaite étudier plus particulièrement les fonctions* h *harmoniques dans* B_N*, sachant qu'elles se développent en séries de puissances selon*

$$h(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2j+\tau_N}{\tau_N} |x|^j \, Y_j\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

avec $\tau_N = \max(1, N-2)$ *et* Y_j *les harmoniques sphériques d'ordre* j *obtenus en intégrant sur une sphère un produit faisant intervenir* h *et* $P_{j,N}$ *(polynômes ultrasphériques aussi appelés, selon les cas, polynômes de Gegenbauer ou polynômes de Legendre, voir* [31, pp. 27 et 46]*).*

Étant donnée une fonction u sous–harmonique dans B_N (non identiquement $-\infty$), on sait en effet qu'il existe une unique mesure de Borel μ dans B_N possédant la propriété suivante: pour tout compact $K \subset B_N$, il existe une fonction h harmonique à l'intérieur de K telle que

$$u(x) = h(x) + \int_K k(x-\xi)\, d\mu(\xi) \qquad \forall x \in B_N \tag{8}$$

avec

$$k(\zeta) = \begin{cases} \log|\zeta| & \text{si } N=2 \\ -1/|\zeta|^{N-2} & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$$

(voir [21, p.104]). C'est cette mesure μ qui est appelée mesure de Riesz associée à u. Inversement, étant donnée une mesure de Borel ν sur un compact K, on sait que la fonction

$$x \mapsto \int_K k(x-\xi)\, d\nu(\xi)$$

est sous–harmonique dans $\mathbb{R}^N$ et harmonique à l'extérieur de K (cette fonction est appelée potentiel associé à ν).

Projet de recherche. *Construire de nouveaux exemples d'éléments de* $\mathcal{B}_\alpha$ *et* $\mathcal{SH}(p,\omega)$ *en partant de diverses mesures particulières (mesures à support sur un segment ou dans une boule ou un ellipsoïde contenu dans* B_N*...)*

Dans le cas $N = 2$, l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe appartenant à un espace de Bloch a été décrit en [2] et [18] entre autres.

Projet de recherche. *Étudier les mesures de Riesz des fonctions sous–harmoniques appartenant à* $\mathcal{B}_\alpha$*. Le chapitre II ci–dessous constitue un premier pas vers la description des mesures de Riesz des fonctions sous–harmoniques dans* B_N*.*

Les ensembles $\mathcal{B}_\alpha$ et $\mathcal{SH}(p,\omega)$ n'ont même pas une structure d'espace vectoriel (en effet, “u sous–harmonique” implique “λu sous–harmonique” seulement pour $\lambda \geq 0$) contrairement aux espaces de Bloch de fonctions analytiques dans le disque D qui sont munis d'une norme les transformant en espaces de Banach et permettant l'étude de divers opérateurs.

Projet de recherche. *Munir* $\mathcal{B}_\alpha$ *et* $\mathcal{SH}(p,\omega)$ *d'une distance définie à l'aide des mesures de Riesz.*

En effet, les mesures de Riesz (qui sont à valeurs positives) sont des cas particuliers de mesures signées, aussi appelées charges. Or, sur l'espace des charges il existe un produit scalaire (voir [31, p.77] et [25, pp. 77 et 82]) défini par:

$$(\mu, \nu) = -\iint k(x-y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \tag{9}$$

appelé énergie mutuelle des charges μ et ν (soumises à quelques hypothèses techniques que l'on ne détaillera pas ici). La norme déduite $||\mu||$ est appelée énergie de la charge μ. Il est à noter que l'espace des charges d'énergie finie n'est pas complet, alors que le sous–ensemble des mesures (positives) d'énergie finie l'est (voir [31, pp. 92–94]).
Par ailleurs, on peut remplacer dans (9) la fonction k par plusieurs autres noyaux au choix, ce qui fournit diverses notions de produit scalaire.

Projet de recherche. *Sachant que, pour différents choix de p, q et ω, la condition* (3) *a permis de caractériser d'autres espaces de fonctions analytiques dans D (espaces de Besov, Hardy, Bergman, Dirichlet: voir* [53]*), je compte étudier les fonctions sous–harmoniques dans B_N vérifiant des conditions de croissance analogues, puis munir les ensembles obtenus d'une structure d'espace métrique définie à l'aide des mesures de Riesz.*

Après avoir équipé d'une topologie ces différents ensembles de fonctions sous–harmoniques, il deviendra possible d'étudier des applications entre ces ensembles. Soient X, Y et Z de tels ensembles, par exemple $\mathcal{B}_\alpha$ ou $\mathcal{SH}(p, \omega)$.

Projet de recherche. *Le produit* (9) *permet–il de définir un analogue de la notion d'orthogonalité dans ces ensembles? un analogue de la notion de projection de X sur Y, lorsque $Y \subset X$?*

Projet de recherche. *Étant donnée $v \in Z$, sous quelles conditions l'application $u \mapsto u+v$ envoie–t–elle X dans Y? quand est–elle continue? compacte?*

Définition. *Étant données u une fonction sous–harmonique dans B_N (resp. dans $\mathbb{R}^N$) et μ sa mesure de Riesz, sa fonction de répartition ρ est définie par:*

$$\rho(s) = \int_{|\zeta| \leq s} d\mu(\zeta) \qquad \forall s \in [0,1[\qquad \textit{(resp. } \forall s \geq 0\textit{)} \ .$$

Cette fonction est croissante et continue à droite.

Exemple: pour $N = 2$ et $u = \ln|f|$ où f est une fonction holomorphe dans D (resp. $\mathbb{C}$), $\rho(s)$ représente le nombre de zéros de f contenus dans le disque $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq s\}$ et comptés avec leur multiplicité (ici, la mesure de Riesz de u est constituée de masses de Dirac).

Dans le cas $N \geq 2$, j'ai étudié la croissance de ρ lorsque u satisfait certaines majorations. J'ai également étudié des fonctions u sous–harmoniques sujettes à une hypothèse de type intégrale à poids:

$$\int_{B_N (\text{resp. } \mathbb{R}^N)} u^+(x)\, \omega(|x|)\, dx < +\infty$$

avec $u^+ = \max(u, 0)$ et ω une fonction vérifiant certaines conditions qui seront explicitées plus loin. L'étude des fonctions sous–harmoniques sujettes à une telle condition est motivée par la situation connue dans le cas de fonctions f holomorphes. Par exemple par ce résultat dû à [23]: *Si f est une fonction holomorphe dans D, telle que $f(0) \neq 0$, appartenant à un espace de Bergman, c'est–à–dire satisfaisant*

$$\exists p \in]0, +\infty[\qquad \int_{|z|<1} |f(z)|^p \ d\mathcal{A}(z) < +\infty,$$

alors les zéros $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de f vérifient:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - |z_k|) \left(\log \frac{1}{1 - |z_k|} \right)^{-\gamma} < +\infty \qquad \forall \gamma > 1 \tag{10}$$

Ou encore par ce résultat dû à [56]: *Si f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, telle que $f(0) \neq 0$, appartenant à un espace de Nevanlinna–Fock, c'est–à–dire satisfaisant*

$$\exists \alpha \in]0, +\infty[\qquad \int_{\mathbb{C}} \log^+ |f(z)|\, e^{-\alpha |z|^2} \, d\mathcal{A}(z) < +\infty,$$

alors les zéros $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de f vérifient:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\alpha |z_k|^2}}{|z_k|^2} < +\infty \tag{11}$$

Toutes les fonctions sous–harmoniques u considérées dans ce chapitre sont supposées harmoniques dans un voisinage de l'origine, avec $u(O) = 0$. Cette hypothèse sera notée $\mathcal{H}_O$. Les démonstrations des résultats exposés dans les deux paragraphes qui suivent sont détaillées dans mes articles [39] et [44], [43] respectivement.

1) Fonctions sous–harmoniques dans B_N.

Théorème. *Soit u une fonction sous–harmonique dans B_N, vérifiant $\mathcal{H}_O$, telle que:*

$$\int_{B_N} u^+(x)\,[-\omega'(|x|^2)]\,dx < +\infty\,,$$

où ω est une fonction décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ avec $\lim_{t\to 1^-} \omega(t) = 0$. Alors la mesure de Riesz μ associée à u satisfait:

$$\int_{B_N} h(|\zeta|^{1-\alpha})\,\omega(|\zeta|^{2\alpha})\,d\mu(\zeta) < +\infty \qquad \forall \alpha \in]0,1[,$$

où h est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par: $h(s) = \log\frac{1}{s}$ $(\forall s > 0)$ si $N = 2$ ou $h(s) = \frac{1}{s^{N-2}} - 1$ $(\forall s > 0)$ si $N \geq 3$.

La démonstration utilise la formule de Jensen–Privalov (voir [34, p.44] et [21, p.29]):

$$\frac{1}{\sigma_N}\int_{S_N} u(rx)\,d\sigma_x = \tau_N \int_0^r \frac{\rho(t)}{t^{N-1}}\,dt \qquad \forall r \in]0,1[,$$

(avec ρ la fonction de répartition de u, $d\sigma$ l'élément d'aire sur la sphère unité S_N de $I\!R^N$, $\tau_N = \max(1, N-2)$ et $\sigma_N = \int_{S_N} d\sigma$), ainsi que le résultat (13) suivant:

Lemme. *Pour tout $r > 0$, soit h_r la fonction définie sur $I\!R^N$ par $h_r(\zeta) = h(|\zeta|) - h(r)$ $\forall \zeta \in I\!R^N \setminus \{O\}$. On a*

$$\int_{|\zeta|\leq s} h_r(\zeta)\,d\mu(\zeta) \leq \int_{|\zeta|\leq r} h_r(\zeta)\,d\mu(\zeta) \qquad \forall r \in]0,1[\qquad \forall s \in]0,1[\tag{12}$$

$$\tau_N \int_0^r \frac{\mu(t)}{t^{N-1}}\,dt = \int_{|\zeta|\leq r} h_r(\zeta)\,d\mu(\zeta) \qquad \forall r \in]0,1[. \tag{13}$$

La preuve de (13) utilise le fait que $h'(s) = -\frac{\tau_N}{s^{N-1}}$ $\forall s > 0$. Ce lemme est valable pour toute fonction sous–harmonique dans B_N, harmonique dans un voisinage de O. La formule de Jensen–Privalov est applicable car u vérifie $\mathcal{H}_O$.

J'ai ensuite étudié une situation où, de plus, on dispose de renseignements sur la rapidité de convergence de l'intégrale apparaissant dans la condition satisfaite par u^+:

Définition. *Étant donnés $\alpha \geq \beta > 0$ et $\omega : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction mesurable telle que*

$$\exists c > 0 \qquad c(1-t)^\alpha \leq \int_t^1 \omega(r)\,dr < +\infty \qquad \forall t \in [0,1[,$$

soit $SH_\omega(\alpha,\beta)$ l'ensemble des fonctions sous–harmoniques u dans B_N, vérifiant $\mathcal{H}_O$, telles que:

$$\exists C > 0 \qquad \int_{s\leq|x|<1} u^+(x)\,\omega(|x|)\,dx \leq C\,(1-s)^\beta \qquad \forall s \in [0,1[.$$

La relation $\beta \leq \alpha$ est impliquée par la croissance de la fonction $r \mapsto \int_{S_N} u^+(rx)\, d\sigma_x$.

Exemple où $\beta < \alpha$: pour $N = 2$, $\omega \equiv 1$, $\alpha = 1$, $\varepsilon > 0$ et u définie par:

$$u(x) = \max\left\{0, \log \frac{1}{1-|x|} - \varepsilon\right\} = u^+(x) \qquad \forall x \in B_N,$$

j'ai vérifié que cette fonction appartient à $SH_\omega(1, \beta)$ où β doit être choisi < 1 car

$$\exists r_\varepsilon \in]0,1[\qquad \int_{s \leq |x| < 1} u^+(x)\, \omega(|x|)\, dx \geq \frac{\pi}{2}(1-s) \log \frac{e}{1-s} \qquad \forall s \in [r_\varepsilon, 1[.$$

Remarque: à l'aide de la formule de Jensen-Privalov, j'obtiens que la fonction de répartition ρ d'une fonction de $SH_\omega(\alpha, \beta)$ vérifie:

$$\exists K > 0 \qquad (1-s)^{\alpha+1-\beta} \leq \frac{K}{\rho(s)} \qquad \forall s \in [0, 1[.$$

Théorème. *La mesure de Riesz μ associée à une fonction de $SH_\omega(\alpha, \beta)$ (avec α, β et ω comme dans la définition précédente) satisfait*

$$\int_{B_N} (1-|\zeta|)^{\alpha-\beta+1} \left(\log \frac{1}{1-|\zeta|}\right)^{-\gamma} d\mu(\zeta) < +\infty \qquad \forall \gamma > 1 \qquad \forall N \geq 2 \tag{14}$$

$$\int_{B_N} \left[\frac{1}{(1-|\zeta|)^{N-2}} - 1\right]^{-\gamma} d\mu(\zeta) < +\infty \qquad \forall \gamma > \frac{\alpha - \beta + 1}{N-2} \qquad \forall N \geq 3.$$

Pour la démonstration, je compare l'intégrale à une série numérique en utilisant la remarque ci–dessus et en décomposant μ de la façon suivante:

Proposition. *On suppose $\lim_{s \to 1^-} \rho(s) = +\infty$. Soit $s_n = \inf\{s \in]0,1[: \rho(s) \geq n\}$ $\forall n \in I\!N$.*
La suite $(s_n)_n$ tend vers 1 en croissant.
Si $s_n < s_{n+1}$ alors $\rho(s_n) < n+1$ et il y a une infinité de tels indices n.
Il existe une décomposition $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n + \ldots$ où les mesures positives μ_k satisfont:

$$\int_{B_N} d\mu_k(\zeta) = \int_{s_{k-1} \leq |\zeta| \leq s_k} d\mu_k(\zeta) = 1.$$

Lorsque $\lim_{s \to 1^-} \rho(s) = L < +\infty$, je procède d'une manière analogue en construisant $(s_n)_n$ de telle sorte que $\int_{s_n \leq |\zeta| < s_{n+1}} d\mu(\zeta) \leq \frac{L}{(n+1)^2}$ $\forall n \in I\!N$.

La proposition ci-dessus reste valable pour toute fonction sous–harmonique dans B_N et sert (ainsi que le lemme plus haut) à plusieurs reprises dans [39].

Remarque: contrairement à (10) dans le cas de fonctions holomorphes, il n'est pas possible de remplacer $\alpha - \beta + 1$ par 1 dans (14), comme le montre le contrexemple construit avec $N = 2$, $\omega \equiv 1$, $\alpha = 1$, $0 < \delta < 1$, $\varepsilon > 0$ et u définie par:

$$u(x) = \max\left\{0, \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-\delta} - \varepsilon\right\} = u^+(x) \qquad \forall x \in B_N.$$

J'obtiens que $u \in SH_\omega(1, 1-\delta)$ car

$$\exists r_0 \in]0,1[\qquad \int_{s\le|x|<1} u^+(x)\,dx \le \frac{4\pi}{1-\delta}\,(1-s)^{1-\delta} \qquad \forall s \in [r_0, 1[.$$

Par ailleurs $d\mu = \delta(\delta+1)\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{r}\,\left(\log\frac{1}{r}\right)^{-\delta-2} I(r)\,dr\,d\sigma$ avec I la fonction indicatrice de $[r_1, 1[$ où $r_1 \in]0,1[$ est défini par $\left(\log\frac{1}{r_1}\right)^{-\delta} = \varepsilon$. J'aboutis à:

$$\int_{|\zeta|<1} (1-|\zeta|)\left(\log\frac{1}{1-|\zeta|}\right)^{-\gamma} d\mu(\zeta) = +\infty \qquad \forall \gamma \in I\!R.$$

Projet de recherche. *Étant données μ la mesure de Riesz d'une fonction $u \in SH_\omega(\alpha,\beta)$ et $T : I\!R^N \to I\!R^N$ vérifiant $|T(\zeta)| = |\zeta|$ $\forall \zeta \in I\!R^N$, je souhaite déterminer sous quelles hypothèses la mesure image $T * \mu$ reste la mesure de Riesz d'une fonction de $SH_\omega(\alpha,\beta)$.*

L'étude [30] (sur les ensembles de zéros dans l'espace de Bergman) semble laisser présager que ces hypothèses fassent intervenir la croissance de la fonction:

$$s \mapsto \int_{|\zeta|\le s} (1-|\zeta|)\,d\mu(\zeta).$$

Par ailleurs, j'ai également étudié la croissance de la fonction de répartition lorsque u vérifie une estimation de la forme suivante:

Théorème. *Soit u une fonction sous–harmonique dans B_N, vérifiant $\mathcal{H}_O$, telle que:*

$$\exists A \ge 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists \gamma > 0 \qquad u(x) \le A + C\,[h(|x|)]^{-\gamma} \qquad \forall x \in B_N, \quad x \ne O. \tag{15}$$

Alors la fonction de répartition ρ associée à u a une croissance de la forme:

$$\rho(s) \le \left[\tfrac{\gamma+1}{\gamma h(s)}\right]^{\gamma+1} M(s) \quad \forall s \in]0,1[, \qquad \text{avec } M(s) = C\gamma\left[1 + \tfrac{A}{C(\gamma+1)}\left[\tfrac{C\gamma}{\rho(s)}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right]^{\gamma+1} \tag{16}$$

et la valeur 1 est contenue dans l'adhérence de l'ensemble des $s \in]0,1[$ tels que

$$\rho(s) < [h(s)]^{-(\gamma+1)} M(s). \tag{17}$$

Ainsi, $\limsup_{s\to 1^-} \rho(s)\,[h(s)]^{\gamma+1} \le C\gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{\gamma+1}$ et $\liminf_{s\to 1^-} \rho(s)\,[h(s)]^{\gamma+1} \le C\gamma$.

<u>Remarque:</u> comme u est harmonique dans un voisinage de O, il existe $0 < \eta < 1$ tel que $\rho(s) = 0$ $\forall s \in [0,\eta[$ et $\rho(s) > 0$ $\forall s \in]\eta, 1[$. Dans les inégalités (16) et (17), le membre de droite est interprété comme $+\infty$ quand $\rho(s) = 0$. Cette convention vaut pour tout le chapitre.

La preuve de (16) utilise (12) et la formule de Jensen–Privalov. J'établis ensuite que (17) équivaut à $h(s) < \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{A}{\rho(s)} + \left(\frac{C\gamma}{\rho(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}$. Puis, à l'aide de la proposition ci–dessus, je démontre qu'il existe une infinité d'indices n pour lesquels $h(s_n) < \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{A}{n} + \left(\frac{C\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}$ (dans le cas où $\lim_{s\to 1^-} \rho(s) < +\infty$, l'énoncé est trivial).

De même j'ai étudié la croissance de ρ lorsque u vérifie une estimation de la forme:

Théorème. *Soit u une fonction sous–harmonique dans B_N, vérifiant $\mathcal{H}_O$, telle que:*

$$\exists A \geq 0 \quad \exists C > 0 \qquad u(x) \leq A + C\, h(1-|x|) \qquad \forall x \in B_N. \tag{18}$$

Ayant noté ρ la fonction de répartition de u, on définit pour tout $s \in]0,1[$:

$$M_2(s) = C + \frac{A + C - C\log C}{\log[C+\rho(s)]} \qquad \textit{si } N=2$$

$$M_{N,m}(s) = \left[\sum_{j=1}^{N-2} \binom{m}{j} \left(\frac{C}{\rho(s)}\right)^{\frac{j-1}{N-1}} + \frac{A}{C}\left(\frac{C}{\rho(s)}\right)^{\frac{N-2}{N-1}}\right]^{N-1} \textit{si } N \geq 3,\ m \in I\!N,\ m \geq N-2.$$

Alors

$$\frac{\rho(s)}{\log[C+\rho(s)]} \leq \frac{1}{h(s)}\, M_2(s) \qquad \forall s \in]0,1[\qquad \textit{si } N=2$$

$$\rho(s) \leq C\left(\frac{1}{h(s)}\right)^{N-1} M_{N,N-1}(s) \qquad \forall s \in]0,1[\qquad \textit{si } N \geq 3.$$

Si $N=2$ et $A + C - C\log C > 0$, alors l'adhérence de $\left\{s \in]0,1[:\ \rho(s) + C < \frac{1}{h(s)}\, M_2(s)\right\}$ contient la valeur 1. Idem pour$\left\{s \in]0,1[: \rho(s) \leq C\left(\frac{1}{h(s)}\right)^{N-1} M_{N,N-2}(s)\right\}$si $N \geq 3$ et $A > 0$

D'où $\limsup_{s\to 1^-} \frac{\rho(s)}{\log\rho(s)}\, \log\frac{1}{s} \ \leq C$ et $\liminf_{s\to 1^-} \rho(s)\, \log\frac{1}{s}\ \leq C$ pour $N=2$, alors que pour $N \geq 3$: $\limsup_{s\to 1^-} \rho(s)\, [h(s)]^{N-1} \leq C(N-1)^{N-1}$ et $\liminf_{s\to 1^-} \rho(s)\, [h(s)]^{N-1} \leq C(N-2)^{N-1}$.

<u>Notation</u>: étant donnés $\gamma > 0$ et $C > 0$, soit SH_C^γ, resp. sh_C, l'ensemble des fonctions sous-harmoniques dans B_N satisfaisant $\mathcal{H}_O$ et vérifiant la majoration (15), resp (18), pour une quelconque constante $A \geq 0$.

Corollaire. *Étant donnés $\gamma > 0$, $C > 0$ et $0 < C' < 2C$, soient μ_1 et μ_2 les mesures de Riesz de deux fonctions de SH_C^γ. Alors $\mu_1 + \mu_2$ n'est pas forcément la mesure de Riesz d'une fonction de $SH_{C'}^\gamma$. Cet énoncé reste valable avec SH_C^γ et $SH_{C'}^\gamma$ remplacés par sh_C et $sh_{C'}$ respectivement.*

Pour deux fonctions u_1 et $u_2 \in SH_C^\gamma$ (de mesures de Riesz respectives μ_1 et μ_2) bien sûr $\mu_1 + \mu_2$ est la mesure de Riesz de $u_1 + u_2 \in SH_{2C}^\gamma$. C'est aussi la mesure de Riesz de $u_1 + u_2 + \hbar$ pour toute fonction $\hbar$ harmonique dans B_N. L'énoncé ci–dessus signifie que pour certains choix de u_1 et u_2, il n'existe aucune fonction $\hbar$ harmonique telle que $u_1 + u_2 + \hbar \in SH_{C'}^\gamma$. C'est le cas par exemple pour u_1 et u_2 définies comme suit, avec $\varepsilon > 0$ fixé:

$$u_1(x) = u_2(x) = \max\Big\{0, C[h(|x|)]^{-\gamma} - \varepsilon\Big\} \qquad \forall x \in B_N \qquad x \neq O.$$

Leur fonction de répartition est donnée par:

$$\rho_1(s) = \rho_2(s) = \max\Big\{0, C\gamma\Big[[h(s)]^{-\gamma-1} - (\varepsilon/C)^{1+\frac{1}{\gamma}}\Big]\Big\} \qquad \forall s \in]0,1[.$$

Si $\mu_1 + \mu_2$ était mesure de Riesz d'une fonction de $SH^\gamma_{C'}$, alors sa fonction de répartition vérifierait $\liminf\limits_{s\to 1^-}(\rho_1+\rho_2)(s)\,[h(s)]^{\gamma+1} \le C'\gamma < 2C\gamma$, or $\lim\limits_{s\to 1^-}(\rho_1+\rho_2)(s)\,[h(s)]^{\gamma+1} = 2C\gamma$.

Ainsi, il n'existe pas de fonction $\mathscr{h}$ harmonique dans B_N telle que $\mathscr{h}(O) = 0$ et que :

$$\exists K_1 \ge 0 \qquad \exists K_2 < 0 \qquad \mathscr{h}(x) \le K_1 + K_2\,[h(|x|)]^{-\gamma} \qquad \forall x \in B_N \qquad x \ne O.$$

2) Fonctions sous–harmoniques dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème. *Soit u une fonction sous–harmonique dans $\mathbb{R}^N$ vérifiant $\mathcal{H}_O$, μ sa mesure de Riesz et $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ décroissante telle que $\omega(s) = o(1/\log s)$ si $N = 2$ ou $\omega(s) = o(s^{1-\frac{N}{2}})$ si $N \ge 3$, quand $s \to +\infty$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^+(x)\,[-\omega'(|x|^2)]\,dx < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\omega(|\zeta|^2+1)}{|\zeta|^2}\,d\mu(\zeta) < +\infty.$$

La preuve utilise (13) (valable ici $\forall r > 0$) et la formule de Jensen–Privalov.

Exemple: avec $N = 2$ et $\omega : s \mapsto e^{-\beta s}$ (avec $\beta > 0$), on obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\beta|\zeta|^2}}{|\zeta|^2}\,d\mu(\zeta) < +\infty$, ce qui englobe (11).

Théorème. *Soit ω une fonction $\mathcal{C}^1$ décroissante sur $[0,+\infty[$ telle que $\omega(s) = o\big(1/(s\log s)\big)$ si $N = 2$ ou $\omega(s) = o(s^{1-N})$ si $N \ge 3$, quand $s \to +\infty$. Si une fonction u sous–harmonique dans $\mathbb{R}^N$ vérifie $\mathcal{H}_O$ et*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^+(x)\,[-\omega'(|x|)]\,dx < +\infty$$

alors sa mesure de Riesz μ satisfait:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega(|\zeta|+1)\,d\mu(\zeta) < +\infty$$

et

$$\int_{|\zeta|\ge 1} \omega(|\zeta|^\alpha+1)\,\log|\zeta|\,d\mu(\zeta) < +\infty \qquad \forall \alpha > 1 \qquad \textit{pour } N = 2$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega(|\zeta|^\alpha+1)\,|\zeta|^{(\alpha-1)(N-2)}\,d\mu(\zeta) < +\infty \qquad \forall \alpha \ge 1 \qquad \textit{pour } N \ge 3.$$

Par exemple, pour une fonction u vérifiant $\int_{\mathbb{R}^N} u^+(x)\,e^{-|x|}\,dx < +\infty$, ce théorème appliqué avec $\omega(s) = e^{-s}$ fournit: $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\zeta|}\,d\mu(\zeta) < +\infty$.
Ce résultat est plus intéressant que celui obtenu par le premier théorème, appliqué avec $\omega(s) = \int_s^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$, car alors $\frac{\omega(s^2+1)}{s^2} = o(e^{-s})$ quand $s \to +\infty$.
Par contre, pour une fonction u vérifiant $\int_{\mathbb{R}^N} u^+(x)\,e^{-|x|^2}\,dx < +\infty$, c'est le premier théorème qui est le plus avantageux (appliqué avec $\omega(s) = e^{-s}$).
Pour utiliser le second énoncé, il faudrait travailler avec $\omega(s) = \int_s^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, mais alors $\omega(s+1) \le \frac{1}{2}\,e^{-(s^2+1)}\,e^{-2s} = o\Big(\frac{e^{-(s^2+1)}}{s^2}\Big)$ quand $s \to +\infty$.

J'ai également comparé la croissance de u et celle de ρ pour des fonctions sous–harmoniques u dans $I\!R^N$ avec une croissance de la forme:

Théorème. *Soit u une fonction sous–harmonique dans $I\!R^N$ vérifiant $\mathcal{H}_O$ et telle que*

$$\exists A \geq 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists \gamma > 0 \qquad u(x) \leq A + C\,|x|^\gamma \qquad \forall x \in I\!R^N. \tag{19}$$

(a) *Sa fonction de répartition ρ vérifie $\rho(s) \leq Ce\gamma\, s^\gamma\, e^{\frac{A\gamma}{\rho(s)}}$ $\forall s > 0$ lorsque $N = 2$. Elle vérifie $\rho(s) \leq K\, s^{\gamma+N-2}\, M(s)$ $\forall s > 0$ quand $N \geq 3$, avec*

$$K = \left(\tfrac{\gamma+N-2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+N-2}{N-2}}, \qquad M(s) = \tfrac{C\gamma}{N-2}\left[1 + \tfrac{A\gamma}{\gamma+N-2}\left(\tfrac{N-2}{C\gamma}\right)^{\frac{N-2}{\gamma+N-2}}[\rho(s)]^{\frac{-\gamma}{\gamma+N-2}}\right]^{\frac{\gamma+N-2}{N-2}}.$$

(b) *Si $N = 2$ et $A > 2/\gamma$, l'ensemble $\{s > 0 \,:\, \rho(s) < C\gamma\, s^\gamma\, e^{\frac{A\gamma}{\rho(s)}}\}$ n'est pas borné. De même pour $\{s > 0 \,:\, \rho(s) < s^{\gamma+N-2}\, M(s)\}$ si $N \geq 3$.*

Ainsi $\limsup\limits_{s\to+\infty} \dfrac{\rho(s)}{s^{\gamma+N-2}} \leq Ce\gamma$ (si $N = 2$) ou $\leq \frac{CK\gamma}{N-2}$ (si $N \geq 3$) et $\liminf\limits_{s\to+\infty} \dfrac{\rho(s)}{s^{\gamma+N-2}} \leq C\gamma$ (si $N = 2$) ou $\leq \frac{C\gamma}{N-2}$ (si $N \geq 3$).

La preuve de (a) utilise la formule de Jensen–Privalov et un analogue dans $I\!R^N$ du lemme énoncé au paragraphe précédent.

Lorsque $\lim\limits_{s\to+\infty} \rho(s) = +\infty$ (sinon (b) est trivial), je décompose μ en mesures de masse 1 (analogue dans $I\!R^N$ de la proposition ci–dessus, ici $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$).

Dans le cas $N = 2$, je montre qu'il existe une infinité d'indices n tels que $n < C\gamma\,(s_n)^\gamma\, e^{\frac{A\gamma}{n}}$. Lorsque ρ est continue, l'hypothèse $A > 2/\gamma$ devient superflue.

Dans le cas $N \geq 3$, l'inégalité apparaissant en (b) équivaut à: $\frac{1}{s^{N-2}} < \frac{\gamma}{\gamma+N-2}\left(\frac{A}{\rho(s)} + \frac{D}{\rho(s)^\alpha}\right)$ avec $\alpha = \frac{N-2}{\gamma+N-2}$ et $D = \frac{\gamma+N-2}{\gamma}\left(\frac{C\gamma}{N-2}\right)^\alpha$. Je démontre qu'il existe une infinité d'indices n tels que $\frac{1}{s_n^{N-2}} < \frac{\gamma}{\gamma+N-2}\left(\frac{A}{n} + \frac{D}{n^\alpha}\right)$.

<u>Remarque:</u> soient $\gamma > 0$, $C > 0$, $0 < C' < 2C$ et Sh_C^γ l'ensemble des fonctions sous-harmoniques dans $I\!R^N$ satisfaisant $\mathcal{H}_O$ et la majoration (19) pour un quelconque $A \geq 0$. Si μ_1 et μ_2 sont les mesures de Riesz de deux fonctions de Sh_C^γ, il n'existe pas forcément de fonction dans $Sh_{C'}^\gamma$ dont la mesure de Riesz soit $\mu_1 + \mu_2$, comme le montre le contrexemple construit avec $\varepsilon > 0$ fixé et $u_1(x) = u_2(x) = \max\{0, C(|x|^\gamma - \varepsilon^\gamma)\}$ $\forall x \in I\!R^N$. Comme

$$\rho_1(s) = \rho_2(s) = \tfrac{C\gamma}{\tau_N}\left(s^{\gamma+N-2} - \varepsilon^{\gamma+N-2}\right) \qquad \forall s > \varepsilon,$$

on ne peut pas avoir $\liminf\limits_{s\to+\infty} \frac{\rho_1(s)+\rho_2(s)}{s^{\gamma+N-2}} \leq \frac{C'\gamma}{\tau_N} < \frac{2C\gamma}{\tau_N}$.

Projet de recherche. *Je souhaite continuer à comparer la croissance de u, μ et ρ pour des fonctions sous–harmoniques dans d'autres ouverts de $I\!R^N$.*

Projet de recherche. *Plusieurs théorèmes ci–dessus fournissent des conditions nécessaires pour qu'une mesure μ soit la mesure de Riesz d'une fonction sous–harmonique u vérifiant une certaine hypothèse intégrale. Je compte étudier la réciproque et rechercher des conditions suffisantes pour que μ soit mesure de Riesz d'une telle fonction u.*

Si une fonction u sous–harmonique dans $\mathbb{R}^N$ est d'ordre au plus un, alors elle est astreinte à une majoration de la forme:

$$\forall\gamma > 1 \qquad \exists A > 0 \qquad \exists C > 0 \qquad u(x) \leq A + C\,|x|^\gamma \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

mais sans aucune restriction minorant ses valeurs négatives. Dans le cas $N = 2$, divers résultats sont disponibles reliant

$$M(u,r) = \max_{|x|=r} u(x) \qquad \text{et} \qquad I(u,r) = \inf_{|x|=r} u(x) \qquad (r > 0)$$

(voir [14] et [20, chapitre 6]) mais la plupart d'entre eux n'ont pas d'analogue naturel dans le cas $N \geq 3$ parce que $r \mapsto I(u,r)$ peut alors être identiquement égale à $-\infty$. Dans ce cas $N \geq 3$, j'ai recherché des minorations de $u(x)$ et des encadrements de $u(y) - u(x)$ lorsque $|x| = |y|$, pour des fonctions u vérifiant de plus

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{M(u,r)}{\varphi(r)} \leq 1$$

où la fonction φ est décrite dans la définition ci–dessous. Les résultats qui suivent sont extraits de ma publication [38].

Définition. *Étant donnés $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 3)$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, positive et croissante sur $[0, +\infty[$, vérifiant:*

(i) $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \varphi(r) = +\infty,$

(ii) $\displaystyle\frac{r}{\psi(r)}$ *reste borné quand $r \to +\infty$, en notant* $\displaystyle\psi(r) = \frac{\varphi'(r)\,r^{N-1}}{N-2},$

(iii) il existe $\Lambda \geq 0$ tel que $\psi(2r) \leq \Lambda\,\psi(r)$ pour tout r suffisamment grand,

soit $\mathcal{S}_\varphi$ l'ensemble des fonctions u sous–harmoniques dans $\mathbb{R}^N$, harmoniques dans un voisinage de l'origine avec $u(O) = 0$, au plus d'ordre 1 et de classe convergente, telles que

(iv) $\displaystyle\liminf_{r\to+\infty} \frac{J(r)}{\varphi(r)} \leq 1$, *avec* $\displaystyle J(r) = (N-2)\int_0^r \frac{\rho(t)}{t^{N-1}}\,dt$

où ρ désigne la fonction de répartition de la mesure de Riesz associée à u.

Pour information:

$\frac{1}{3.2^{N-2}}\,M(u,r/2) \leq J(r) \leq M(u,r)$ ($\forall r > 0$ en dehors d'un voisinage de l'origine).

L'ordre de u est donné par $\lambda = \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log M(u,r)}{\log r} = \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log J(r)}{\log r}$.

On dit que u est de classe convergente si $\int_1^{+\infty} \frac{M(u,r)}{r^{\lambda+1}}\,dr < +\infty$ (voir [21, p.143]).

Exemple: pour $\varphi(r) = (\log r)^b$ $(\forall r \geq 2)$ avec $b \geq 1$, on a $\psi(r) = \frac{b}{N-2}\,(\log r)^{b-1} r^{N-2}$.

Cette fonction φ vérifie *(i)*, *(ii)* et *(iii)*.

Remarque : la condition “classe convergente” est requise seulement si $\lambda = 1$, pas si $\lambda < 1$ (voir [29] pour les fonctions de classe convergente).

Pour tout $r \geq 0$, on notera $\overline{B}(O,r) = \{x \in I\!R^N : |x| \leq r\}$ et $S(O,r) = \{x \in I\!R^N : |x| = r\}$.

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{S}_\varphi$, avec φ et ψ comme dans la définition ci–dessus. Étant donnés $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$, il existe une suite $(R_n)_{n\in I\!N}$ de nombres positifs tendant vers $+\infty$ et une suite d'ensembles $(\Gamma_n)_{n\in I\!N}$ telles que*

$$u(x) \geq -\psi(R_n)\left[\varepsilon + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{R_n^{N-2}}\right)\right] \qquad \forall x \in \overline{B}(O, \tfrac{R_n}{2}) \setminus \Gamma_n$$

pour tout n suffisamment grand. Chaque ensemble Γ_n est une réunion au plus dénombrable de boules, avec Volume $(\Gamma_n) \leq W_N\,(\alpha)^{\frac{N}{N-2}}$ où W_N est une constante ne dépendant que de la dimension.

Dans cet énoncé, la condition *(iii)* n'est pas requise pour u.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, la suite $(R_n)_{n\in I\!N}$ est construite, en utilisant seulement *(i)* et *(iv)*, de façon à ce que $\rho(R_n) < (1+\varepsilon)\,\psi(R_n)\ \forall n \in I\!N$.
J'obtiens également un énoncé évaluant l'écart entre deux valeurs prises par u sur une même sphère:

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{S}_\varphi$, avec φ, ψ et Λ comme dans la définition ci–dessus. Étant donnés $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$, il existe une suite numérique $(r_n)_{n\in I\!N}$ tendant vers $+\infty$ et une suite d'ensembles $(\Sigma_n)_{n\in I\!N}$ telles que, pour tout $n \in I\!N$ on ait:*

$$M(u,r_n) - u(x) \leq \left[\varepsilon + \Lambda\left(\frac{1+\varepsilon}{\alpha} + \varepsilon\right)\right]\ \psi(r_n) \qquad \forall x \in S(O,r_n) \setminus \Sigma_n$$

et

$$u(y) - u(x) \geq -\left[\varepsilon + \Lambda\left(\frac{1+\varepsilon}{\alpha} + \varepsilon\right)\right]\ \psi(r_n) \qquad \forall x \in S(O,r_n) \qquad \forall y \in S(O,r_n) \setminus \Sigma_n.$$

Chaque ensemble Σ_n est contenu dans $S(O,r_n)$ et Aire $(\Sigma_n) \leq A_N(1+\varepsilon)\,\alpha^{\frac{N-1}{N-2}}$, avec A_N une constante ne dépendant que de la dimension.

La démonstration de ces résultats s'appuie sur une représentation de u à l'aide de sa mesure de Riesz μ et du noyau K_0 défini par $K_0(x,\xi) = |\xi|^{2-N} - |x-\xi|^{2-N}$:

$$u(x) = \int_{I\!R^N} K_0(x,\xi)\,d\mu(\xi) \qquad \forall x \in I\!R^N, \tag{20}$$

représentation valable pour toute fonction sous–harmonique dans $I\!R^N$, vérifiant $\mathcal{H}_O$, avec une croissance au plus d'ordre 1 et de classe convergente (voir [21, p.155–156]).
Pour $R > 0$ fixé quelconque, j'ai ensuite étudié séparément:

$$v_R(x) = \int_{|\xi|\leq R} K_0(x,\xi)\,d\mu(\xi) \qquad \text{et} \qquad w_R(x) = \int_{|\xi|>R} K_0(x,\xi)\,d\mu(\xi).$$

Pour tout $x \in I\!R^N$ tel que $|x| \leq \frac{R}{2}$, la valeur absolue de $w_R(x)$ est majorée par l'intégrale de Stieltjes:

$$2^{N-1}\,|x| \int_R^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{t^{N-1}}.$$

Trivialement $\displaystyle\int_{|\xi|\leq R} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi|^{N-2}} \geq \frac{\rho(R)}{R^{N-2}}$ et pour compléter la minoration de $v_R(x)$, j'utilise le:

Lemme de Cartan. *(Voir [21, p.131] ou [13] pour le cas $N = 2$). Soient ν une mesure dans $I\!R^N$ telle que $\nu(I\!R^N) = \nu_0 < +\infty$ et $0 < p < q < +\infty$. On note:*

$$I(x) = \int_{I\!R^N} \frac{1}{|x-\xi|^p}\, d\nu(\xi).$$

Soit $h > 0$, alors $I(x) < h$ en dehors d'une réunion (finie ou dénombrable) de boules fermées dont les rayons respectifs t_k satisfont: $\sum_{k\in I\!N} (t_k)^q \leq A\,(\nu_0/h)^{q/p}$, la constante A ne dépendant que de p et q.

Appliqué avec ν la restriction de μ à $\overline{B}(O,R)$, $\nu_0 = \rho(R)$, $p = N-2$ et $h = \rho(R)/\alpha$, ce lemme m'a fourni:

$$\int_{|\xi|\leq R} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\, d\mu(\xi) \leq \frac{1}{\alpha}\,\rho(R) \qquad\qquad \forall x \in I\!R^N \setminus \Gamma(\alpha, R)$$

où $\Gamma(\alpha,R)$ est une réunion au plus dénombrable de boules aux rayons notés t_k ($k \in I\!N$). L'estimation de $\sum_{k\in I\!N}(t_k)^N$ ou $\sum_{k\in I\!N}(t_k)^{N-1}$ permet d'évaluer le volume de $\Gamma(\alpha,R)$ ou l'aire de $\Sigma(\alpha,R) = \Gamma(\alpha,R)\cap S(O,R/2)$. J'aboutis à:

$$u(x) \geq -\rho(R)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{R^{N-2}}\right) - |w_R(x)| \qquad \forall x \in I\!R^N \setminus \Gamma(\alpha,R) \qquad \forall R > 0.$$

D'après *(ii)*, il existe $T > 0$ tel que $|w_R(x)| \leq \varepsilon\,\psi(R)$ $\forall x \in B(O,R/2)$ $\forall R \geq T$. Le premier théorème en découle avec $\Gamma_n = \Gamma(\alpha, R_n)$.
Je vérifie ensuite que $M(u,r) \leq \varepsilon\,\psi(r)$ pour tout r suffisamment grand. Puis, comme

$$\begin{cases} \psi(R_n) \leq \Lambda\,\psi(\frac{R_n}{2}) \\ M(u,\frac{R_n}{2}) \leq \varepsilon\,\psi(\frac{R_n}{2}) \\ -u(x) \leq \psi(R_n)\left(\varepsilon + \frac{1+\varepsilon}{\alpha}\right) \quad \forall x \in S(O,\frac{R_n}{2}) \setminus \Sigma(\alpha, R_n) \end{cases}$$

pour tout n au–delà d'un certain rang m, j'en déduis le second théorème avec $r_n = \frac{1}{2}\,R_{n+m}$ et $\Sigma_n = \Sigma(\alpha, R_{n+m})$ $\forall n \in I\!N$. La minoration of $u(y) - u(x)$ découle de: $u(x) \leq M(u, r_n)$ et $-u(y) \leq \Lambda\,\psi(r_n)\,\left(\varepsilon + \frac{1+\varepsilon}{\alpha}\right)$ $\forall x \in S(O,r_n)$ et $\forall y \in S(O,r_n)\setminus\Sigma_n$.

Remarque: localisation des termes de la suite $(R_n)_{n\in I\!N}$.
Une suite croissante $(Q_n)_{n\in I\!N^*}$ peut être construite telle que: $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$ avec

$$\frac{J(Q_n)}{\varphi(Q_n)} < 1 + \frac{\varepsilon}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{(1+\frac{\varepsilon}{n})\varphi(Q_n) - J(Q_n)}{\varphi(Q_{n+1})} \leq \frac{\varepsilon}{n(n+1)} \qquad \forall n \in I\!N^*.$$

Alors, pour tout $n \in I\!N^*$, il existe $P_n \in [Q_n, Q_{n+1}]$ tel que : $\rho(P_n) < \left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)\psi(P_n)$.

Remarque: *estimation de l'aire de* $\Sigma(\alpha, R)$.

Les rayons t_k des boules B_k qui constituent $\Gamma(\alpha, R)$ vérifient $t_k \leq 2(D_N\,\alpha)^{\frac{1}{N-2}}$ avec $D_N^{-1} = 1 - 2^{\frac{-1}{2N-3}}$. Cela permet d'obtenir plus précisément:

Proposition. *Étant donnés* $\alpha > 0$ *et* $R > 8(D_N\,\alpha)^{\frac{1}{N-2}}$, *on a :*

$$\textit{Aire de } \Sigma(\alpha, R) \leq A_N \left(\frac{R}{R - 4(D_N\,\alpha)^{\frac{1}{N-2}}} \right)^{N-1} \alpha^{\frac{N-1}{N-2}}.$$

En effet, si une boule B_k intersecte $S(O, R/2)$, alors $O \notin B_k$ puisque son centre c_k vérifie $|c_k| \geq \frac{R}{2} - 2(D_N\,\alpha)^{\frac{1}{N-2}} > t_k$. Le cône de sommet O sous–tendu par B_k a pour amplitude θ_k avec $\sin\theta_k = \frac{t_k}{|c_k|}$. L'aire de son intersection avec $S(O, R/2)$ vaut:

$$\sigma_{N-1} \left(\frac{R}{2} \right)^{N-1} \int_0^{\theta_k} (\sin\theta)^{N-2} d\theta$$

avec $\sigma_N = \frac{2\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ l'aire de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$. Or $\sin\theta_k \leq t_k \left[\frac{R}{2} - 2(D_N\,\alpha)^{\frac{1}{N-2}} \right]^{-1}$ conduit à

$$\textit{Aire de } B_k \cap S(O, R/2) \leq 2\,\sigma_{N-1} \left(\frac{R}{R - 4(D_N\,\alpha)^{\frac{1}{N-2}}} \right)^{N-1} (t_k)^{N-1}$$

d'où la proposition.

Cette proposition m'a servi à établir les deux théorèmes suivants où les estimations sont meilleures que dans les deux premiers, mais l'ensemble à exclure pour que ces estimations soient valables est moins bien contrôlé. Néanmoins, son volume relatif (ou son aire relative) continue à tendre vers 0.

Définition. *Étant donnés* φ, ψ *et* Λ *comme dans la définition précédente, soit* $\mathcal{S}'_\varphi \subset \mathcal{S}_\varphi$ *le sous–ensemble constitué par les fonctions* $u \in \mathcal{S}_\varphi$ *vérifiant*

(ii)' *il existe* $p \in \left]\frac{\lambda}{N-2+\lambda}, 1\right[$ *tel que* $\dfrac{r}{[\psi(r)]^p}$ *reste borné quand* $r \to +\infty$,

où λ *désigne l'ordre de* u.

Noter que *(ii)'* implique *(ii)*.

Exemple: avec $b \geq 1$ et $N \geq 4$, la fonction φ définie par $\varphi(r) = (\log r)^b$ $\forall r \geq 2$ vérifie *(ii')* car $\frac{r}{[\psi(r)]^p}$ reste borné si $1 > p \geq \frac{1}{N-2}$. Or $\frac{\lambda}{N-2+\lambda} < \frac{1}{N-2}$ $\forall \lambda \in [0, 1]$. On a ici $\mathcal{S}'_\varphi = \mathcal{S}_\varphi$.

Théorème. *Soit* $u \in \mathcal{S}'_\varphi$. *Étant donné* $\tau > 0$, *il existe une suite numérique* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers* $+\infty$ *et une suite d'ensembles* $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que, pour tout* n *suffisamment grand on ait:*

$$u(x) \geq -\,(1+\tau)\ [\psi(R_n)]^p \qquad \forall x \in \overline{B}(O, \tfrac{R_n}{2}) \setminus \Gamma_n$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\textit{Volume de } \Gamma_n}{\textit{Volume de } B(O, \frac{R_n}{2})} = 0.$$

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{S}'_\varphi$. Étant donné $\tau > 0$, il existe aussi une suite numérique $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et une suite d'ensembles $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait:*

$$M(u, r_n) - u(x) \leq [(\Lambda + \tau)\, \psi(r_n)]^p \qquad \forall x \in S(O, r_n) \setminus \Sigma_n$$

et

$$u(y) - u(x) \geq -[(\Lambda + \tau)\, \psi(r_n)]^p \qquad \forall x \in S(O, r_n) \qquad \forall y \in S(O, r_n) \setminus \Sigma_n,$$

où les ensembles $\Sigma_n \subset S(O, r_n)$ vérifient: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\textit{Aire de } \Sigma_n}{\textit{Aire de } S(O, r_n)} = 0.$

La preuve de ces théorèmes utilise à nouveau le lemme de Cartan: les ensembles $\Gamma(\alpha, R)$ et $\Sigma(\alpha, R)$ sont considérés ici avec $\alpha = [\rho(R)]^a$ où $a = 1 - p$, ainsi $0 < a < \frac{N-2}{N-2+\lambda}$.
Je démontre que *Aire de* $\Sigma(\alpha, R) = o(R^{N-1})$ et que *Volume de* $\Gamma(\alpha, R) = o(R^N)$ quand $R \to +\infty$ en utilisant le dernier théorème du chapitre II. Soit $\gamma > 0$ tel que $a < \frac{N-2}{N-2+\lambda+\gamma}$.
Il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que $u(x) \leq A + C\,|x|^{\lambda+\gamma}$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$.
Il existe donc $C' > 0$ tel que la fonction de répartition ρ de u ait une croissance de la forme: $\rho(r) \leq C'\, r^{N-2+\lambda+\gamma}$ $\forall r \geq 0$. Autrement dit: $[\rho(R)]^a \leq (C')^a\, R^{a(N-2+\lambda+\gamma)}$ $\forall R \geq 0$.
Ainsi $8(D_N\, \alpha)^{\frac{1}{N-2}} < R$ a lieu pour R assez grand et de plus:

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{R}{R - 4(D_N)^{\frac{1}{N-2}} [\rho(R)]^{\frac{a}{N-2}}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{R\to+\infty} \frac{[\rho(R)]^{a\frac{N-1}{N-2}}}{R^{N-1}} = \lim_{R\to+\infty} \frac{[\rho(R)]^{\frac{aN}{N-2}}}{R^N} = 0.$$

<u>*Exemple:*</u> pour $\varphi(r) = (\log r)^b$ $(\forall r \geq 2)$ avec $b \geq 1$, $N \geq 4$ et $p = \frac{1}{N-2}$, on obtient

$$M(u, r_n) - u(x) \leq \left[\frac{(\Lambda + \varepsilon)\, b}{N-2}\right]^{\frac{1}{N-2}} (\log r_n)^{\frac{b-1}{N-2}}\, r_n \qquad \forall x \in S(O, r_n) \setminus \Sigma_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Projet de recherche. *Je souhaite étudier ces questions de minorations de $u(x)$ et encadrements de $u(x) - u(y)$ pour des fonctions sous–harmoniques d'ordre supérieur à 1.*

Pour une fonction u sous–harmonique dans $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, harmonique au voisinage de O, d'ordre au plus $q + 1$ $(q \in \mathbb{N})$ et de classe convergente, la formule de représentation qui vient remplacer (20) est la suivante (voir [21, pp. 141–146]):

$$u(x) = P(x) + \int_{\mathbb{R}^N} K_q(x, \xi)\, d\mu(\xi) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

avec P un polynôme harmonique de degré $\leq q$, et

$$K_q(x, \xi) = \frac{-1}{|x - \xi|^{N-2}} + \sum_{m=0}^{q} D_m(x, \xi)$$

avec $x \mapsto D_m(x, \xi)$ le polynôme homogène (harmonique) de degré m dans le développement de Taylor de $|x - \xi|^{2-N}$ selon les puissances de x_1, x_2, ..., x_N (K_q et D_m possèdent aussi une expression à l'aide des polynômes ultrasphériques $P_{j,N}$, voir [34, p.67] et [31, p.29]).

Projet de recherche. *Étant donnée une suite* $(u_n)_{n\in I\!N}$ *de fonctions sous–harmoniques vérifiant:* $u_n(x) \leq A_k\ \forall n \in I\!N\ \forall x \in E_k\ \forall k \in I\!N$, *où* $(A_k)_{k\in I\!N}$ *est une suite de nombres positifs et* $(E_k)_{k\in I\!N}$ *une suite exhaustive de compacts de* $I\!R^N$, *j'étudie actuellement sur quels ensembles il est possible d'avoir convergence ponctuelle pour une sous–suite extraite* $(u_{n_p})_{p\in I\!N}$ *et comment obtenir une sous–suite convergente au sens d'une distance définie à l'aide des mesures de Riesz des* u_n *(en lien avec un projet de recherche du chapitre I).*

Dans un premier temps, je compte travailler avec des fonctions u_n d'ordre au plus un, puis avec des fonctions d'ordre supérieur. J'applique aux mesures de Riesz associées à ces fonctions u_n le résultat suivant, dû à [16] (voir aussi [21, pp 205–209]): si $(\mu_n)_{n\in I\!N}$ est une suite de mesures sur un compact $E \subset I\!R^N$ telle que

$$\exists A > 0 \qquad \mu_n(E) \leq A \qquad \forall n \in I\!N,$$

alors il existe une sous–suite $(\mu_{n_p})_{p\in I\!N}$ qui converge vers une mesure μ au sens suivant:

$$\lim_{p\to+\infty} \int_E f\, d\mu_{n_p} = \int_E f\, d\mu$$

pour toute fonction f continue sur E. La notion de convergence (9) est reliée à cette notion de convergence faible (voir [31, pp. 81 et 92]).

Dans ce chapitre, N est un entier fixé ≥ 1. L'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^N$ est noté $\mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ et équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}^N$.

Définition. *Étant donné un compact non vide $K \subset \mathbb{C}^N$, l'espace $Exp(\mathbb{C}^N, K)$ est constitué par les fonctions $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ possédant une croissance de la forme:*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists C_{\varepsilon,f} > 0 \qquad |f(z)| \leq C_{\varepsilon,f}\ e^{H_K(z)+\varepsilon||z||} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^N \tag{21}$$

avec $H_K(z) = \max\limits_{\zeta \in K} \Re e\, \langle z, \zeta \rangle$ où $\langle z, \zeta \rangle = \sum_{1 \leq j \leq N} z_j \zeta_j$ et $||\,.\,||$ désigne une norme sur $\mathbb{C}^N$.

L'espace $\mathcal{H}'_N(K)$ est constitué par les fonctionnelles analytiques T portables par K, c'est–à–dire les formes linéaires continues $T : \mathcal{H}(\mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall V \text{ voisinage de } K \qquad \exists C_V > 0 \qquad |\langle T, h \rangle| \leq C_V \sup_V |h| \qquad \forall h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N).$$

La transformation de Fourier–Borel $\mathcal{FB}_N : \mathcal{H}'_N(K) \to Exp(\mathbb{C}^N, K)$ est définie par

$$\mathcal{FB}_N(T)(z) = \langle T_\zeta, e^{\langle z, \zeta \rangle} \rangle \qquad \forall z \in \mathbb{C}^N \qquad \forall T \in \mathcal{H}'_N(K).$$

L'application $\mathcal{FB}_N$ est injective. Lorsque K est convexe, $\mathcal{FB}_N$ établit une bijection entre les deux espaces $\mathcal{H}'_N(K)$ et $Exp(\mathbb{C}^N, K)$ (résultat dû à [32] pour $N = 1$, à [27] et [15] pour N quelconque). On renvoie à [7], [22, p.97] et [51] pour plus de détails sur les fonctionnelles analytiques et leurs transformations.

J'ai étudié deux problèmes différents concernant les fonctions de $Exp(\mathbb{C}^N, K)$:
1) Accélération de la convergence de leur série de Taylor.
2) Théorème d'unicité et formule de représentation, sous une condition portant sur leur partie réelle.

1) Accélération de convergence.

Étant donnée une fonction $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ se développant au voisinage de O selon:

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^N} a_\nu\, z^\nu \qquad \forall z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N \tag{22}$$

où $a_\nu \in \mathbb{C}$ et $z^\nu = z_1^{\nu_1} \ldots z_N^{\nu_N}$ $\forall \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N) \in \mathbb{N}^N$, il s'agit de choisir un compact L et une fonction $g \in Exp(\mathbb{C}^N, L)$ avec un développement de Taylor noté

$$g(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^N} b_\nu\, z^\nu \qquad (b_\nu \in \mathbb{C}\,,\ z \in \mathbb{C}^N) \tag{23}$$

de telle sorte que la série (24) ci–dessous converge plus rapidement que la série (22):

$$f(z)\,g(z) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^N} c_\nu\, z^\nu \qquad\qquad (z \in \mathbb{C}^N) \tag{24}$$

en notant $c_\nu = \displaystyle\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{N}^N,\,\mu\in\mathbb{N}^N\\ \lambda+\mu=\nu}} a_\lambda\, b_\mu$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^N$.

Le cas où $N = 1$ et g est définie, pour un certain $b \in \mathbb{C}$, par $g(z) = e^{bz}$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ a été étudié en [17]. Les résultats ci–dessous ont fait l'objet de ma publication [42].
Pour évaluer la vitesse de convergence des séries (22) et (24), j'ai considéré différentes notions de reste d'ordre n $(n \in \mathbb{N})$:

$$A_n(z) = \sum_{\nu\in E_n} a_\nu\, z^\nu \qquad \text{et} \qquad C_n(z) = \sum_{\nu\in E_n} c_\nu\, z^\nu$$

avec $E_n = \displaystyle\bigcup_{h=1}^{N} \{\nu \in \mathbb{N}^N \,:\, \nu_h \geq n\}$, ainsi que

$$F_n(z) = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^N\\ |\nu|\geq n}} a_\nu\, z^\nu \qquad \text{et} \qquad H_n(z) = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^N\\ |\nu|\geq n}} c_\nu\, z^\nu$$

où $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_N$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^N$.

La condition d'accélération se présente comme une condition géométrique portant sur K et L seulement. Elle fait intervenir les nombres suivants:

$$\rho = \max_{\zeta\in K} ||\zeta||_e, \quad \sigma = \max_{\zeta\in K+L} ||\zeta||_e, \quad R_j = \max_{\zeta\in K} |\zeta_j| \quad \text{et} \quad S_j = \max_{\zeta\in K+L} |\zeta_j| \quad \forall j \in \{1,2,...,N\}$$

avec $||\,.\,||_e$ la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^N$ et $K + L = \{z + \zeta \,:\, z \in K\,,\, \zeta \in L\}$.

Parmi les boules $B(r) = \{\zeta \in \mathbb{C}^N \,:\, ||\zeta||_e \leq r\}$ $(r \geq 0)$, la plus petite qui contienne K, resp. $K + L$, est notée $B_K = B(\rho)$, resp. $B_{K+L} = B(\sigma)$.
Parmi les polydisques $P(r_1, \ldots, r_N) = \{\zeta \in \mathbb{C}^N \,:\, |\zeta_1| \leq r_1, \ldots, |\zeta_N| \leq r_N\}$ $(r_j \geq 0$ $\forall j = 1, 2, \ldots, N)$, l'intersection de tous ceux qui contiennent K, resp. $K + L$, est notée $P_K = P(R_1, \ldots, R_N)$, resp. $P_{K+L} = P(S_1, \ldots, S_N)$.

Théorème. *Étant donnés K et L deux compacts convexes de $\mathbb{C}^N$, soient $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ et $g \in Exp(\mathbb{C}^N, L)$ se développant respectivement selon (22) et (23). Si $B_{K+L} \subset Int\, B_K$ (autrement dit $\sigma < \rho$), alors (24) converge plus rapidement que (22) au sens suivant: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^N$ on ait*

$$|F_n(z)| \leq \delta_\varepsilon \,.\, \psi_n\big(e(\rho+\varepsilon)||z||_e\big) \qquad \text{et} \qquad |H_n(z)| \leq \delta_\varepsilon \,.\, \left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\rho+\varepsilon}\right)^n \psi_n\big(e(\rho+\varepsilon)||z||_e\big)$$

où $\psi_n(t) = \displaystyle\sum_{k\geq n} \binom{k+N-1}{k} \left(\frac{t}{k}\right)^k$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

Pour avoir $\frac{\sigma+\varepsilon}{\rho+\varepsilon}$ le plus petit possible, le choix optimal est ainsi $L = \{-\omega\}$ avec $\omega \in \mathbb{C}^N$ le centre de la boule euclidienne de plus petit rayon qui contienne K.
La preuve utilise (21) avec $||\,.\,|| = ||\,.\,||_e$, en posant $\delta_\varepsilon = \max(C_{\varepsilon,f}\,;\,C_{\varepsilon,fg})$ puis procède par majorations de $|a_\nu|$ et $|c_\nu|$.

Théorème. *Soient K, L, f et g comme précédemment. Si $P_{K+L} \subset Int\, P_K$ (autrement dit $S_j < R_j$ $\forall j = 1, 2, \ldots, N$), alors (24) converge plus rapidement que (22) au sens suivant: il existe $\tau \in [0, 1[$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}^N$ on ait*

$$|A_n(z)| \leq M_n(z) \quad et \quad |C_n(z)| \leq \tau^n\, M_n(z) \quad où \quad M_n(z) = D_z \sum_{k \geq n} \left(\frac{\lambda_z}{k}\right)^k$$

avec des constantes $\lambda_z > 0$ et $D_z > 0$ dépendant de K, L, z, ... mais pas de n; de plus τ et λ_z ne dépendent pas de f ni de g.

La démonstration utilise (21) avec $||z|| = \sum_{1 \leq j \leq N} |z_j|$. Soient $\varepsilon > 0$ fixé quelconque et $\tau = \max\limits_{1 \leq h \leq N} \frac{S_h+\varepsilon}{R_h+\varepsilon} < 1$. Après avoir établi

$$|A_n(z)| \leq C_{\varepsilon,f} \sum_{h=1}^{N} \varphi_n\big(e(R_h+\varepsilon)|z_h|\big) \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq h}} \varphi\big(e(R_j+\varepsilon)|z_j|\big)$$

$$|C_n(z)| \leq C_{\varepsilon,fg} \sum_{h=1}^{N} \varphi_n\big(e(S_h+\varepsilon)|z_h|\big) \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq h}} \varphi\big(e(S_j+\varepsilon)|z_j|\big)$$

où $\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{t}{n}\right)^n$ (avec $n^n = 1$ si $n = 0$) et $\varphi_n(t) = \sum_{k \geq n} \left(\frac{t}{k}\right)^k$, le théorème en découle avec $\lambda_z = \max\limits_{1 \leq h \leq N} e(R_h+\varepsilon)|z_h|$, car $\varphi_n\big(e(S_h+\varepsilon)|z_h|\big) \leq \tau^n \varphi_n\big(e(R_h+\varepsilon)|z_h|\big)$.
Pour avoir τ le plus petit possible, le meilleur choix pour L s'avère donc être le compact réduit au point $(-\kappa_1, -\kappa_2, \ldots, -\kappa_N) \in \mathbb{C}^N$, avec κ_j le centre du disque de plus petit rayon contenant K_j, la j–ième projection de K ($j = 1, 2, \ldots, N$).

Projet de recherche. *Obtenir une condition d'accélération de convergence portant directement sur les fonctions d'appui H_K et H_{K+L}.*

Par ailleurs, K et L étant convexes, f et g apparaissent comme les transformées de Fourier–Borel de deux fonctionnelles analytiques T et S portables par K et L respectivement. Ainsi fg s'interprète comme la transformée de Fourier–Borel du produit de convolution $T \star S$.

Projet de recherche. *Considérer une fonction $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ somme d'une série de Dirichlet de la forme $h(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, e^{\lambda_k \langle z,\zeta\rangle}$ ($z \in \mathbb{C}^N$ fixé) et comparer la vitesse de convergence de $\langle T, h_n\rangle$ et $\langle T \star S, h_n\rangle$ quand $n \to +\infty$, avec $h_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, e^{\lambda_k \langle z,\zeta\rangle}$.*

Pour cela, je compte me servir des récents résultats [12] sur les fonctions F entières dans $\mathbb{C}$ sommes de séries de Dirichlet généralisées $F(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, e^{\lambda_k\, v}$ $\forall v \in \mathbb{C}$. Cet article [12] apporte des informations sur la croissance de F en relation avec les coefficients $a_k \in \mathbb{C}$ et $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

2) Théorème d'unicité et formule de représentation.

Dans le cas $N = 1$, un théorème d'unicité bien connu est celui de Carlson: *Une fonction f entière dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$\exists C > 0 \qquad \exists \tau \in [0, \pi[\qquad |f(z)| \le C\, e^{\tau |z|} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{25}$$

est identiquement nulle dans $\mathbb{C}$ dès que $f(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Un analogue en plusieurs variables est disponible pour les fonctions $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ avec K un compact convexe contenu dans U^N où $U = \{v \in \mathbb{C} : |\Im m\, v| < \pi\}$ (voir [7], [19], [49]): si $f(\nu) = 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}^N$ alors $f \equiv 0$ dans $\mathbb{C}^N$.

Je me suis intéressée aux fonctions $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ vérifiant

$$\Re e\, f(\nu) = \Re e\, f(\nu + \alpha) = 0 \qquad \forall \nu \in \mathbb{N}^N \tag{26}$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}^N$ tel que $\Im m\, \alpha_j \neq 0 \ \forall j \in \{1, 2, ..., N\}$, ce qui est motivé par le résultat suivant dans le cas $N = 1$ (voir [11]): *Une fonction f entière dans $\mathbb{C}$, vérifiant* (25), *telle que $\Re e\, f$ s'annule sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Z} + i$ est constante: $f \equiv ib$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$.* Ceci n'est pas à proprement parler un théorème d'unicité pour f (puisque la conclusion n'est pas "$f \equiv 0$ dans $\mathbb{C}$") mais plutôt pour la fonction $\frac{1}{2}(f + \overline{f})$ en définissant la fonction entière $\overline{f}$ par: $\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})} \ \forall z \in \mathbb{C}$.
L'étude des fonctions vérifiant (26) est aussi motivée par cet autre énoncé dans le cas $N = 2$ (voir [46]): *Soit $f \in Exp(\mathbb{C}^2, K)$ où $K = \{v \in \mathbb{C} : |v| \le \tau\}^2$ et $0 \le \tau < \pi$, telle que*

(a) *la restriction de f à $\mathbb{R}^2$ appartienne à $L^2(\mathbb{R}^2)$*

(b) $\displaystyle\sum_{(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{Z}^2} |f(\nu_1, \nu_2)| < +\infty.$

Si $\Re e\, f$ s'annule sur $\mathbb{Z}^2$ et $(\mathbb{Z} + i)^2$, alors $f \equiv 0$ dans $\mathbb{C}^2$.

Les résultats exposés dans la suite sont détaillés dans mon article [41].

Avec $d = N$ ou $N - 1$, on notera $\overline{z} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_d})$ pour tout $z = (z_1, z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, ainsi que $\overline{E} = \{z \in \mathbb{C}^d \ : \ \overline{z} \in E\}$ pour tout $E \subset \mathbb{C}^d$, l'enveloppe convexe de E sera notée $Conv(E)$. Pour toute $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$, on définira $\overline{h} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ par $\overline{h}(z) = \overline{h(\overline{z})} \ \forall z \in \mathbb{C}^d$.

Étant donnée $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$, les fonctions f_0 et f_α définies par:

$$f_0(z) = \tfrac{1}{2}\,[f(z) + \overline{f(\overline{z})}] \qquad \text{et} \qquad f_\alpha(z) = \tfrac{1}{2}\,[f(z + \alpha) + \overline{f(\overline{z} + \alpha)}] \qquad \forall z \in \mathbb{C}^N$$

appartiennent à $Exp(\mathbb{C}^N, Conv(K \cup \overline{K}))$. Sur $\mathbb{R}^N$, elles coïncident respectivement avec les fonctions $x \mapsto \Re e\, f(x)$ et $x \mapsto \Re e\, f(x + \alpha)$. Lorsque $K \subset U^N$, alors $Conv(K \cup \overline{K}) \subset U^N$ et (26) équivaut à: $f_0 \equiv f_\alpha \equiv 0$ dans $\mathbb{C}^N$, ou encore à:

$$\forall z \in \mathbb{C}^N \qquad \begin{cases} f(z) + \overline{f}(z) = 0 \\ f(z + 2i\gamma) = f(z) \end{cases} \tag{27}$$

avec $\gamma \in (\mathbb{R}^*)^N$ défini par $\gamma_j = \Im m\, \alpha_j \ \forall j \in \{1, 2, ..., N\}$.

J'obtiens la représentation suivante:

Théorème. *Étant donné* $\alpha \in \mathbb{C}^N$ $(N \geq 2)$ *tel que* $\gamma = (\Im m\, \alpha_1, ..., \Im m\, \alpha_N) \in (\mathbb{R}^*)^N$, *soit*

$$M = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \cdots & \gamma_N \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \gamma_N \end{pmatrix}$$

Étant donné K *un compact convexe (non–vide) contenu dans* U^N, *soit* $I_{K,\gamma}$ *l'ensemble des* $k \in \mathbb{Z}$ *tels que* $\{\zeta \in \mathbb{C}^N : \langle \gamma, \zeta \rangle = k\pi\}$ *intersecte* K. *Les fonctions* $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ *vérifiant* (26) *sont les*

$$f(z) = \sum_{k \in I_{K,\gamma}} A_k\Big(\frac{z_2}{\gamma_2} - \frac{z_1}{\gamma_1}, \ldots, \frac{z_N}{\gamma_N} - \frac{z_1}{\gamma_1}\Big)\, e^{k\pi z_1/\gamma_1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^N \tag{28}$$

où les fonctions $A_k \in Exp(\mathbb{C}^{N-1}, L_k)$ *vérifient* $A_k = -\overline{A_k}$ *et les compacts* $L_k \subset \mathbb{C}^{N-1}$ *satisfont* $\{k\pi\} \times L_k \subset MK = \{M\zeta \,:\, \zeta \in K\}$. *Si* $I_{K,\gamma} = \emptyset$, *alors* $f \equiv 0$ *dans* $\mathbb{C}^N$.

Il s'agissait de résoudre le système (27) non pas dans $\mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$, mais dans $Exp(\mathbb{C}^N, K)$. C'est justement pour prendre en compte le type de croissance des fonctions impliquées que l'outil "fonctionnelles analytiques" était particulièrement bien adapté.
En notant $T = \mathcal{FB}_N^{-1}(f)$, le système (27) équivaut à résoudre dans $\mathcal{H}'_N(K)$:

$$\begin{cases} T + \overline{T} = 0 \\ (e^{2i\langle\gamma,\zeta\rangle} - 1)T_\zeta = 0 \end{cases} \tag{29}$$

où la fonctionnelle analytique $\overline{T} \in \mathcal{H}'_N(\overline{K})$ est définie par $\langle \overline{T}, h\rangle = \overline{\langle T, \overline{h}\rangle}$ $\forall h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$. Les fonctionnelles analytiques $T^M \in \mathcal{H}'_N(MK)$ et $\theta T \in \mathcal{H}'_N(K)$ où $\theta \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ sont définies par: $\langle T^M, h\rangle = \langle T_\zeta, h(M\zeta)\rangle$ et $\langle \theta T, h\rangle = \langle T, \theta h\rangle$ pour toute $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$.
Comme $e^{2i\langle\gamma,\zeta\rangle} - 1 = \varphi(M\zeta)$, avec $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ définie par $\varphi(z) = e^{2iz_1} - 1$ $\forall z \in \mathbb{C}^N$, et que $(\varphi(M\zeta)T_\zeta)^M = \varphi\, T^M$, le système (29) équivaut à résoudre: $\varphi S = 0$ avec $S + \overline{S} = 0$, dans $\mathcal{H}'_N(MK)$.

Définition. *Pour tout* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ *on notera* $z_{(1)} = (z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^{N-1}$, *en d'autres termes* $z = (z_1, z_{(1)})$. *Étant données deux fonctionnelles analytiques* $X \in \mathcal{H}'_1(P)$ *et* $Y \in \mathcal{H}'_{N-1}(L)$, *où* P *et* L *sont deux compacts (non vides) de* $\mathbb{C}$ *et* $\mathbb{C}^{N-1}$ *respectivement, soit* $X \times Y \in \mathcal{H}'_N(P \times L)$. *la fonctionnelle analytique définie par:*

$$\langle X \times Y, h\rangle = \langle (X \times Y)_\zeta, h(\zeta)\rangle = \langle X_{\zeta_1}, \langle Y_{\zeta_{(1)}}, h(\zeta_1, \zeta_{(1)})\rangle\rangle \qquad \textit{pour toute } h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N).$$

On a $\mathcal{FB}_N(X \times Y)(z) = \mathcal{FB}_1(X)(z_1)\, \mathcal{FB}_{N-1}(Y)(z_{(1)})$ pour tout $z \in \mathbb{C}^N$. Par ailleurs, si r points distincts a_1, a_2, $\ldots$, a_r de P et r fonctionnelles Y_1, Y_2, $\ldots$, $Y_r \in \mathcal{H}'_{N-1}(L)$ vérifient $\sum_{k=1}^r \delta_{a_k} \times Y_k = 0$ dans $\mathcal{H}'_N(P \times L)$ (où δ_{a_k} désigne la masse de Dirac au point a_k), alors $Y_k \equiv 0$ in $\mathcal{H}'_{N-1}(L)$ $\forall k \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Lemme. *Soient* $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ *et* $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^N)$ *définie par* $\tilde{\psi}(\zeta) = \psi(\zeta_1)\ \forall \zeta \in \mathbb{C}^N$. *Étant donné* H *un compact convexe de* $\mathbb{C}^N$, *soient* $a_1, a_2, \dots, a_r$ *les zéros de* ψ *contenus dans* H_1 *et* $m_1, m_2, \dots, m_r$ *leurs multiplicités respectives. On notera* $\delta_{a_k}^{(j)}$ *la* j*–ième dérivée de la masse de Dirac au point* a_k*:*

$$\langle \delta_{a_k}^{(j)}, h \rangle = (-1)^j \langle \delta_{a_k}, h^{(j)} \rangle = (-1)^j\, h^{(j)}(a_k) \qquad \forall h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Les fonctionnelles analytiques $X \in \mathcal{H}'_N(H)$ *vérifiant* $\tilde{\psi} X = 0$ *sont:*

$$X = \sum_{1\le k\le r}\ \sum_{0\le j<m_k} \delta_{a_k}^{(j)} \times B_{kj} \qquad \text{où} \quad B_{kj} \in \mathcal{H'}_{N-1}(L_k),$$

avec $L_k \subset \mathbb{C}^{N-1}$ *des compacts tels que* $\{a_k\} \times L_k \subset H$.

Appliqué avec $H = MK$, $\psi(v) = e^{2iv} - 1\ \forall v \in \mathbb{C}$, $a_k = k\pi$ et $m_k = 1$ où $k \in I_{K,\gamma}$, ce lemme permet de résoudre $\varphi S = 0$, $S + \overline{S} = 0$. Les solutions sont:

$$S = \sum_{k\in I_{K,\gamma}} \delta_{k\pi} \times B_k \quad \text{avec} \quad B_k = B_{k0} \in \mathcal{H'}_{N-1}(L_k) \quad \text{telles que} \quad B_k + \overline{B_k} = 0.$$

Comme $\mathcal{FB}_N(S^{M^{-1}})(z) = \mathcal{FB}_N(S)(Z) = \sum_{k\in I_{K,\gamma}} \mathcal{FB}_1(\delta_{k\pi})(Z_1)\,\mathcal{FB}_{N-1}(B_k)(Z_{(1)})$ pour $Z = {}^tM^{-1}z$, le théorème en découle avec $A_k = \mathcal{FB}_{N-1}(B_k)$, en notant que $T = S^{M^{-1}}$ où

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} & -\gamma_1^{-1} & \cdots & \cdots & -\gamma_1^{-1} \\ 0 & \gamma_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \gamma_N^{-1} \end{pmatrix}$$

Ce théorème reste valable pour $N = 1$ (les A_k sont alors des constantes).

Exemple: pour $N = 1$, $\alpha = i$, $\gamma = 1$, $K = \{v \in \mathbb{C} : |v| \le \tau\}$ et $\tau \in [0, \pi[$, on a $I_{K,\gamma} = \{0\}$. L'énoncé précédent englobe ainsi le résultat de [11]: en effet toute fonction f vérifiant (25) appartient à $Exp(\mathbb{C}, K)$.

Théorème. *Ayant défini* α, γ, K, M *et* $I_{K,\gamma}$ *comme précédemment, soit* $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ *vérifiant* (26) *et telle que, pour tout* $\nu \in \{0\} \times \mathbb{N}^{N-1}$, *la fonction* $\mathbb{R} \ni t \mapsto |f(\nu + t\gamma)|$ *ne tende pas vers* $+\infty$, *ni lorsque* $t \to +\infty$ *ni lorsque* $t \to -\infty$.
- *Si* $0 \notin I_{K,\gamma}$, *alors* f *est identiquement nulle dans* $\mathbb{C}^N$.
- *Si* $0 \in I_{K,\gamma}$, *alors* $f(z) = A\big(\frac{z_2}{\gamma_2} - \frac{z_1}{\gamma_1}, \dots, \frac{z_N}{\gamma_N} - \frac{z_1}{\gamma_1}\big)\ \forall z \in \mathbb{C}^N$ *avec* $A \in Exp(\mathbb{C}^{N-1}, L)$ *telle que* $A = -\overline{A}$ *et* $L \subset \mathbb{C}^{N-1}$ *un compact tel que* $\{0\} \times L \subset MK$. *Si de plus l'adhérence de* $\{f(\nu + t\gamma) : t \in \mathbb{C}\}$ *contient* 0 *(pour tout* $\nu \in \{0\} \times \mathbb{N}^{N-1}$*), alors* $f \equiv 0$ *dans* $\mathbb{C}^N$.

Partant de la représentation (28), il s'agit de montrer que $A_k \equiv 0$ dans $\mathbb{C}^{N-1}$ pour tout $k \in I_{K,\gamma} \setminus \{0\}$. Il suffit pour cela d'établir $A_k(\nu') = 0$ pour tout $\nu' = \big(\frac{\nu_2}{\gamma_2}, \dots, \frac{\nu_N}{\gamma_N}\big)$, où $(\nu_2, \dots, \nu_N) \in \mathbb{N}^{N-1}$. La preuve pour $0 \notin I_{K,\gamma}$ serait analogue à celle dans le cas $0 \in I_{K,\gamma}$.

Soit $\nu = (0, \nu_2, \ldots, \nu_N) \in \{0\} \times I\!N^{N-1}$. En notant $I_{K,\gamma} = \{k_0, ..., k_1\}$ avec $k_0 \leq 0 \leq k_1$ ($I_{K,\gamma}$ est un "intervalle" de $Z\!\!Z$ puisque K est convexe), la représentation (28) fournit:

$$f(\nu + t\gamma) = \sum_{k_0 \leq k \leq k_1} A_k(\nu')\, e^{k\pi t} = e^{k_1 \pi t} \left[A_{k_1}(\nu') + \sum_{k_0 \leq k < k_1} A_k(\nu')\, e^{(k-k_1)\pi t} \right] \qquad \forall t \in I\!R.$$

Si $k_1 > 0$ alors $A_{k_1}(\nu') = 0$, sinon $|f(\nu + t\gamma)|$ tendrait vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$.
Si $k_0 < 0$ alors $A_{k_0}(\nu') = 0$, sinon une contradiction analogue surgirait quand $t \to -\infty$.
J'obtiens de même $A_{k_1 - 1}(\nu') = \ldots = A_1(\nu') = 0$ et $A_{k_0+1}(\nu') = \ldots = A_{-1}(\nu') = 0$.
L'ensemble $\{f(\nu + t\gamma) \,:\, t \in C\!\!\!\!I\}$ se réduit finalement au singleton $\{A_0(\nu')\}$ d'où le théorème.
Noter que cet énoncé reste valable pour $N = 1$, l'hypothèse étant alors formulée: "la fonction $I\!R \ni t \mapsto |f(t\gamma)|$ ne tend pas vers $+\infty$, ni quand $t \to +\infty$ ni quand $t \to -\infty$".

Exemple: pour $N = 2$, $\alpha = (i, i)$, $\gamma = (1, 1)$ et $K = \{v \in C\!\!\!\!I : |v| \leq \tau\}^2$ avec $\tau \in [0, \pi[$, l'énoncé précédent inclut le théorème d'unicité de [46] et permet d'alléger ses hypothèses: la condition *(a)* peut être supprimée tandis que, dans la condition *(b)*, on utilise seulement $\lim\limits_{|\nu_1| \to +\infty} |f(\nu_1, \nu_2 + \nu_1)| = 0 \ \forall \nu_2 \in I\!N$ (en remarquant que $f(\nu + t\gamma) = f(t, \nu_2 + t) \ \forall t \in C\!\!\!\!I$).

Au cours de la première démonstration, il y avait déjà eu un exemple de multiplication d'une fonctionnelle analytique par une fonction φ, en l'occurrence une fonction entière $\varphi(\zeta) = e^{2i\zeta_1} - 1$, mais cette notion existe dans un cadre plus général. J'ai utilisé ici le fait que toute fonctionnelle analytique portable par un compact K peut être prolongée en une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(V)$ l'espace des fonctions holomorphes dans V (un voisinage ouvert de K) en munissant $\mathcal{H}(V)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V. Ce prolongement est unique si V est un domaine de Runge. Or justement, tout compact convexe possède un système de voisinages qui sont des domaines de Runge (voir [27], [7]).

Définition. *Étant données $T \in \mathcal{H}'_N(K)$ et $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ où K est un compact convexe de $C\!\!\!\!I^N$ et V un domaine de Runge voisinage de K, le produit φT est la forme linéaire $\varphi T : \mathcal{H}(C\!\!\!\!I^N) \to C\!\!\!\!I$ définie par: $\langle \varphi T, h \rangle = \langle T, \varphi h \rangle$ pour toute $h \in \mathcal{H}(C\!\!\!\!I^N)$. Ici T est identifiée dans le membre de droite avec son (unique) prolongement à $\mathcal{H}(V)$.*

On vérifie aisément que $\varphi T \in \mathcal{H}'_N(K)$.

Définition. *Étant donnée une fonction φ (non identiquement nulle) holomorphe dans un voisinage d'un compact convexe K, soit $\varphi(D) : Exp(C\!\!\!\!I^N, K) \to Exp(C\!\!\!\!I^N, K)$ l'opérateur défini par $\varphi(D) f = \mathcal{FB}_N(\varphi T) \ \forall f \in Exp(C\!\!\!\!I^N, K)$, avec $T = \mathcal{FB}_N^{-1}(f)$.*

La notation $\varphi(D)$ se justifie par le fait que, dans le cas $N = 1$ et $\varphi(\zeta) = \zeta$, on retrouve la dérivation usuelle $\varphi(D) f = f'$.
J'ai ensuite établi que les deux théorèmes précédents restent valables lorsque f vérifie, au lieu de (26), la condition suivante

$$[\varphi(D) f_0](\nu) = [\psi(D) f_\alpha](\nu) = 0 \qquad \forall \nu \in I\!N^N \tag{30}$$

où φ et ψ sont deux fonctions holomorphes dans un voisinage de $Conv(K \cup \overline{K})$, ne s'annulant en aucun point de $Conv(K \cup \overline{K})$. Par exemple, si φ et ψ se développent selon $\varphi(\zeta) = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^N} a_\mu\, e^{\langle\mu,\zeta\rangle}$ et $\psi(\zeta) = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^N} b_\mu\, e^{\langle\mu,\zeta\rangle}$ (avec $a_\mu \in \mathbb{C}$ et $b_\mu \in \mathbb{C}$), alors (30) prend la forme de relations de récurrence vérifiées par les nombres $r_\nu = \Re e\, f(\nu)$ et $s_\nu = \Re e\, f(\nu+\alpha)$:

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^N} a_\mu\, r_{\nu+\mu} = \sum_{\mu\in\mathbb{N}^N} b_\mu\, s_{\nu+\mu} = 0 \qquad\qquad \forall\nu\in\mathbb{N}^N.$$

En [41] j'étudie plusieurs exemples d'équations $\varphi(D)f = b$ avec b une fonction entière de type exponentiel, ce qui me permet de traiter le cas où r_ν et s_ν vérifient une condition plus générale que (26):

Théorème. *Avec α, γ, K, M et $I_{K,\gamma}$ définis comme précédemment, on suppose ici de plus $\overline{K} = K$ et $K = M^{-1}(K'\times K'')$ avec K' et K'' des compacts de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^{N-1}$ respectivement. Soient a et $b \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ telles que $\overline{a} = a$ et $\overline{b} = b$.*
Les fonctions $f \in Exp(\mathbb{C}^N, K)$ telles que $\Re e\, f(\nu) = a(\nu)$ et $\Re e\, f(\nu+\alpha) = b(\nu)$ $\forall\nu\in\mathbb{N}^N$ sont les fonctions obtenues en (28) auxquelles est ajoutée la fonction:

$$z \mapsto 2\left\langle B_\zeta\,,\ e^{\langle z,\zeta\rangle}\,\frac{1 - Q_{z_1/\gamma_1}(\langle\gamma,\zeta\rangle)\, e^{-\langle\gamma,\zeta\rangle z_1/\gamma_1}}{e^{\langle\alpha,\zeta\rangle} - e^{\langle\overline{\alpha},\zeta\rangle}}\right\rangle +$$

$$+2\left\langle A_\zeta\,,\ e^{\langle z,\zeta\rangle}\,\frac{1 - Q_{z_1/\gamma_1}(\langle\gamma,\zeta\rangle)\, e^{-\langle\gamma,\zeta\rangle z_1/\gamma_1}}{1 - e^{2i\langle\gamma,\zeta\rangle}}\right\rangle \ +\ \langle A_\zeta, e^{\langle z,\zeta\rangle}\, Q_{z_1/\gamma_1}(\langle\gamma,\zeta\rangle)\, e^{-\langle\gamma,\zeta\rangle z_1/\gamma_1}\rangle$$

avec $A = \mathcal{F}\mathcal{B}_N^{-1}(a)$, $B = \mathcal{F}\mathcal{B}_N^{-1}(b)$ et $Q_u(v)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $v \mapsto e^{uv}$ (u, $v \in \mathbb{C}$), interpolée aux points $v = k\pi$, où $k \in I_{K,\gamma}$.

Projet de recherche. *Je souhaite étudier la situation où $\Re e\, f$ s'annule sur $\mathbb{N}^N$ et $\Phi(\mathbb{N}^N)$ avec $\Phi : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ une transformation autre que la translation traitée en (26).*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.B. ALEKSANDROV, J.M. ANDERSON et A. NICOLAU: *Inner functions, Bloch spaces and symmetric measures*, Proc. London Math. Soc. (3) 79 (1999), no. 2, 318–352.

[2] J.M. ANDERSON, J. CLUNIE, C. POMMERENKE: *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math. 270 (1974), 12–37.

[3] R. AULASKARI et H. CHEN: *On Bloch and automorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. 217 (1998), no. 1, 15–31.

[4] R. AULASKARI, P. LAPPAN, J. XIAO et R. ZHAO: *On α-Bloch spaces and multipliers of Dirichlet spaces*, J. Math. Anal. Appl. 209 (1997), no. 1, 103–121.

[5] R. AULASKARI et P. LAPPAN: *Criteria for an analytic function to be Bloch and a harmonic or meromorphic function to be normal*, Complex analysis and its applications (Hong Kong, 1993), 136–146, Pitman Res.Notes Math.Ser.305, Longman Sci.Tech., Harlow, 1994.

[6] R. AULASKARI et P. LAPPAN: *Additive automorphic functions and Bloch functions*, Canad. J. Math. 46 (1994), no. 3, 474–484.

[7] V. AVANISSIAN et R. GAY: *Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France, 103 (1975), 341–384.

[8] V. AVANISSIAN: *Quelques applications de la mthode des boules d'exclusion dans C^p*, Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 8 (1973), no. 4, 306–320, 346.

[9] S. AXLER: *The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators*, Duke Math. J. 53 (1986), no. 2, 315–332.

[10] A. BLOCH: *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation*, C. R. 178, 2051-2053 (1924).

[11] R. BOAS Jr: *An uniqueness theorem for harmonic functions*, J. Approx. Theory, 5 (1972), 425-427.

[12] A. BOIVIN et C. ZHU: *The growth of an entire function and its Dirichlet coefficients and exponents*, Complex Var. Theory Appl. 48 (2003), no. 5, 397–415.

[13] H. CARTAN: *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 45 (1928) 255–346.

[14] I.E. CHYZHYKOV: *An addition to the $\cos\pi\rho$-theorem for subharmonic and entire functions of zero lower order*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 2, 517–528.

[15] L. EHRENPREIS: *A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications*, Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, 161–174, Jérusalem 1961.

[16] O. FROSTMAN: *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddelanden Mat. Sem. Univ. Lund 3, 1–118 (1935)

[17] B. GABUTTI et J.N. LYNESS: *An acceleration method for the power series of entire functions of order* 1, Math. Comp. 39 (1982), no. 160, 587–597

[18] D. GIRELA, M. NOWAK et P. WANIURSKI: *On the zeros of Bloch functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 129 (2000), no. 1, 117–128.

[19] F. GRAMAIN: *Fonctions entières arithmétiques*, Séminaire P. Lelong, H. Skoda (Analyse) 17ème année, 1976/77, pp. 96–125, Lecture Notes in Mathematics, 694.

[20] W.K. HAYMAN: *Subharmonic functions,Vol.II*, London Mathematical Society Monographs, 20. Academic Press, Inc., London, 1989.

[21] W.K. HAYMAN and P.B. KENNEDY: *Subharmonic functions, Vol.I*, London Mathematical Society Monographs, No. 9. Academic Press, London–New York, 1976.

[22] L. HÖRMANDER: *An introduction to complex analysis in several variables*, Princeton, D. van Nostrand Company, 1966.

[23] C. HOROWITZ: *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. 41 (1974), 693–710.

[24] E. LANDAU: *Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten*, Math. Zeitschrift 30, 608-634 (1929); Coll. Works 9, 75–101.

[25] N.S. LANDKOF: *Foundations of modern potential theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 180. Berlin–Heidelberg–New York, Springer–Verlag. (1972).

[26] B. MacCLUER et K. SAXE: *Spectra of composition operators on the Bloch and Bergman spaces*, Israel J. Math. 128 (2002), 325–354.

[27] A. MARTINEAU: *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier–Borel*, J. Anal. Math. de Jérusalem 11 (1963), 1–164.

[28] M. MATELJEVIC et M. PAVLOVIC: *L^p-behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), no. 2, 309–316.

[29] Y. MIZUTA: *On the behaviour at infinity of superharmonic functions*, J. London Math. Soc. (2) 27 (1983), 97–105.

[30] M. NOWAK et P. WANIURSKI: *Random zero sets for Bergman spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 134 (2003), no. 2, 337–345.

[31] N. du PLESSIS: *An introduction to potential theory*, University Mathematical Monographs, No. 7. Hafner Publishing Co., Darien, Conn.; Oliver and Boyd, Edinburgh, 1970.

[32] G. PÓLYÀ: *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, Math. Z. 19 (1929), 549–640.

[33] R. REMMERT: *Classical topics in complex function theory*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1997.

[34] L.I. RONKIN: *Functions of completely regular growth*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), 81. Kluwer Academic Publishers' Group, Dordrecht, 1992.

[35] W. RUDIN: *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Fundamental Principles of Mathematical Science, 241. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[36] K. STROETHOFF: *Besov-type characterisations for the Bloch space*, Bull. Austral. Math. Soc. 39 (1989), no. 3, 405–420.

[37] R. SUPPER: *Subharmonic functions with a Bloch type growth*, Integral Transforms and Special Functions (Taylor and Francis Academic Publishers), 2005, Volume 16, number 7, pp. 587–596.

[38] R. SUPPER: *Subharmonic functions of order less than one*, Potential Analysis (Kluwer Academic Publishers), 2005, Volume 23, number 2, pp. 165–179.

[39] R. SUPPER: *Subharmonic functions in the unit ball*, à paraître dans: Positivity (International Journal on Theory and Applications of Positivity in Analysis, Kluwer Academic Publishers).

[40] R. SUPPER: *Bloch and gap subharmonic functions*, Real Analysis Exchange, Volume 28, number 2, August 2003, pp. 395–414 (Michigan State University Press).

[41] R. SUPPER: *Entire functions of exponential type and uniqueness conditions on their real part*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 33, number 3, Fall 2003, pp. 1147– 1174.

[42] R. SUPPER: *Accelerating the convergence of Taylor's expansions of entire functions with exponential type*, International Journal of Computational Analysis and Applications, Volume 1, no.3, 2002, pp. 225-235.

[43] R. SUPPER: *Zeros of entire functions of finite order*, Journal of Inequalities and Applications, 2002, Vol. 7 (1), pp.49-60 (Gordon and Breach Science Publishers, Taylor and Francis Group).

[44] R. SUPPER: *Subharmonic functions and their Riesz measure*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2, no.2, Paper No.16, 14 p. (2001).
http://jipam.vu.edu.au

[45] R.M. TIMONEY: *Bloch functions in several complex variables. I*, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), no. 4, 241–267.

[46] A.M. TREMBINSKA: *A uniqueness theorem for entire functions of two complex variables*, J. Math. Anal. Appl. 158, no. 2 (1991), 456–465.

[47] S. YAMASHITA: *Gap series and α-Bloch functions*, Yokohama Math. J. 28 (1980), no. 1-2, 31–36.

[48] K. YOSHINO: *Difference equation in the space of holomorphic functions of exponential type and Ramanujan summation*, Algebraic analysis methods in microlocal analysis (Kyoto, 1996). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 983 (1997), 188–199.

[49] K. YOSHINO: *On Carlson's theorem for holomorphic functions*, Algebraic analysis, Vol. II, 943–950, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[50] K. YOSHINO: *Liouville type theorems for entire functions of exponential type*, Complex Variables: Th. and Appl. 5 (1985), no. 1, 21–51.

[51] K. YOSHINO: *Some examples of analytic functionals and their transformations*, Tokyo J. Math. 5 (1982), no. 2, 479–490.

[52] D. ZEILBERGER: *Uniqueness theorems for harmonic functions of exponential type*, Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 335–340.

[53] R.H. ZHAO: *On a general family of function spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. No. 105 (1996).

[54] R.H. ZHAO: *On α-Bloch functions and VMOA*, Acta Math. Sci. 16 (1996), no. 3, 349–360.

[55] K.H. ZHU: *Bloch type spaces of analytic functions*, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), no. 3, 1143–1177.

[56] K.H. ZHU: *Zeros of functions in Fock spaces*, Complex Variables Theory Appl. 21 (1993), no. 1-2, 87–98.

[57] K.H. ZHU: *Operator theory in function spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 139. Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.