PREMIÈRE PARTIE

SUR L'HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LEIBNIZ

INTRODUCTION

Placée dans le cadre de l'algèbre homologique, cette première partie de thèse est axée sur l'homologie de Leibniz. Introduite par J.-L. Loday, l'homologie de Leibniz est une théorie d'homologie non commutative pour les algèbres de Lie, qui s'étend à une classe plus large d'algèbres : les algèbres de Leibniz.

Nous nous proposons de savoir si certaines propriétés classiques sur l'homologie des algèbres de Lie peuvent s'étendre à l'homologie des algèbres de Leibniz. Cette première partie est composée de quatre chapitres :
- *les extensions centrales universelles d'algèbres de Leibniz*,
- *la suite spectrale d'une extension d'algèbres de Leibniz*,
- *l'homologie de Leibniz d'algèbres de Lie étendues par une algèbre commutative*,
- *la cohomologie de Leibniz de l'algèbre de Lie de la sphère* S^2.

Dans la plupart de ces chapitres, nous obtenons les généralisations auxquelles on s'attend et nous comparons nos résultats avec ceux du cas classique. En revanche, le maniement de la *suite spectrale* est beaucoup plus délicat, la différence avec le cas classique se voyant dans le calcul des termes E^2.

Les algèbres de Leibniz sont les analogues non nécessairement anti-symétriques d'algèbres de Lie usuelles. Plus précisément une algèbre de Leibniz est un espace vectoriel muni d'une opération notée $[-,-]$ satisfaisant à l'*identité de Leibniz* :

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y].$$

Il existe des notions de (co)représentations et des théories de (co)homologie pour les algèbres de Leibniz. Ces nouveaux objets ont des propriétés semblables aux notions correspondantes sur les algèbres de Lie. Au chapitre 0, nous rappelons les principales définitions et constructions sur les algèbres de Leibniz nécessaires aux chapitres suivants.

Dans le chapitre I, nous classifions les extensions centrales d'une algèbre de Leibniz parfaite au moyen de son deuxième groupe d'homologie. Inspiré des constructions de H. Garland – qui a traité le cas des algèbres de Lie –, nous donnons des critères pour qu'une extension centrale soit universelle. Nous en déduisons les critères pour qu'une algèbre de Leibniz admette une extension centrale universelle. Et nous montrons qu'alors le noyau de l'extension centrale universelle est canoniquement isomorphe au deuxième groupe d'homologie.

Ensuite, étant donnée une algèbre de Lie (donc aussi de Leibniz) parfaite, nous comparons ses deux extensions centrales universelles, l'une dans la catégorie des algèbres de Leibniz, l'autre dans celle des algèbres de Lie. Nous montrons que la seconde n'est autre que l'algèbre de Lie canoniquement associée à la première.

Dans le chapitre II, nous construisons une «version Leibniz» de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Dans les cas plus classiques (espaces topologiques, groupes, algèbres de Lie), on obtient une suite spectrale relativement simple. Dans le cas des algèbres de Leibniz, les algèbres enveloppantes n'ayant pas de structure d'algèbre de Hopf, les techniques classiques ne s'appliquent plus. Toutefois, nous attachons à toute extension d'algèbres de Leibniz une suite spectrale convergente, et nous obtenons un procédé récursif pour calculer les groupes d'homologie. Dans la pratique la difficulté se voit dans la preuve de la dégénérescence de la suite spectrale, alors que dans le cas des algèbres de Lie des argumentations de dimensions suffisent.

Le chapitre III est consacré au calcul de l'homologie des algèbres de Lie de la forme $A\otimes\mathfrak{g}$ où A est une algèbre associative et commutative, et où $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. A. Haddi a exprimé l'homologie classique de telles algèbres en fonction de l'homologie cyclique de A et des coinvariants des puissances symétriques $(\mathrm{S}^p(\mathfrak{g}))_{\mathfrak{g}}$. Nous en donnons une version non commutative : l'homologie de Leibniz joue le rôle de l'homologie classique des algèbres de Lie, et l'homologie de Hochschild celui de l'homologie cyclique. Nous construisons un morphisme de complexes reliant l'homologie de Leibniz de $A\otimes\mathfrak{g}$ à l'homologie de Hochschild de A. Ensuite, en utilisant la décomposition de l'homologie de Hochschild en partie négative et positive, et par passage aux coinvariants, nous en déduisons en bas degrés les modules d'homologie de Leibniz de $A\otimes\mathfrak{g}$.

Dans le sens de la dualité de Koszul développée par V. Ginzburg et M. Kapranov, les algèbres de Leibniz admettent une opérade qui est quadratique et de Koszul. On peut donc définir la notion d'*algèbre de Leibniz duale*. Sur la cohomologie d'une algèbre de Leibniz, il existe un produit qui lui confère une structure d'algèbre de Leibniz duale. Dans le chapitre IV, nous déterminons entièrement la (co)homologie de Leibniz de l'algèbre de Lie de la sphère S^2. Nous donnons les générateurs explicites et une présentation de l'espace de cohomologie en tant qu'algèbre de Leibniz duale.

Chacun de ces chapitres commence par une introduction où nous détaillons les principaux résultats.

0.— PRÉREQUIS SUR LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ

Ce chapitre consiste en un rappel des propriétés des algèbres de Leibniz que nous utiliserons tout le long de la première partie de cette thèse. L'on trouvera les démonstrations et les constructions dans les références citées à la fin de cette partie. Pour l'essentiel, nous donnons les définitions des algèbres de Leibniz et leurs (co)représentations, des théories de (co)homologie associées à ces nouveaux objets, ainsi que les premiers calculs.

Nous fixons une fois pour toutes un anneau commutatif avec unité $\mathbf{K}$; sauf mention expresse du contraire, tous les modules, les applications linéaires, les produits tensoriels *etc.*, seront relatifs à $\mathbf{K}$.

1. Algèbres de Leibniz.— Introduites par J.-L. Loday, les algèbres de Leibniz sont les analogues *non nécessairement anti-symétriques* d'algèbres de Lie usuelles.

1.1.— Une *algèbre de Leibniz* est la donnée d'un module $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ appelée *crochet* et satisfaisant à l'*identité de Leibniz*

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

pour tous éléments x, y, z de $\mathfrak{g}$.

Les algèbres de Lie sont des exemples d'algèbres de Leibniz assujetties à la condition d'anti-symétrie, $[x,x] = 0$, en présence de laquelle l'identité de Leibniz est équivalente à celle de Jacobi.

Une algèbre de Leibniz est dite *abélienne* si son crochet est identiquement nul.

1.2.— Soit V un module. L'*algèbre de Leibniz libre sur V* admet pour module sous-jacent l'algèbre tensorielle

$$\overline{\mathrm{T}}(V) := V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots ,$$

le crochet étant défini par récurrence par

$$[x,v] = x \otimes v \quad \text{et} \quad [x, y \otimes v] = [x,y] \otimes v - [x \otimes v, y]$$

pour tous éléments x, y de $\overline{\mathrm{T}}(V)$ et v de V (*cf.* [L-P1]).

1.3.— Un *idéal bilatère* d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un sous-module I de $\mathfrak{g}$ tel que l'on ait :

$$[x,y] \in I\ , \quad [y,x] \in I\ , \quad \forall\, x \in I\ , \quad \forall\, y \in \mathfrak{g}.$$

Pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, et pour tout idéal bilatère I de $\mathfrak{g}$, le module quotient $\mathfrak{g}/I$ hérite d'une structure d'algèbre de Leibniz induite par le crochet de $\mathfrak{g}$.

1.4.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et soit $([x,x])$ l'idéal bilatère engendré par les crochets $[x,x]$ où x parcourt $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Leibniz quotient $\mathfrak{g}/([x,x])$ est une algèbre de Lie, dite *canoniquement associée à* $\mathfrak{g}$; on la note $(\mathfrak{g})_{Lie}$ ou simplement $\mathfrak{g}_{Lie}$.

1.5.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. On note $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ le sous-module de $\mathfrak{g}$ engendré par les *commutateurs* $[x,y]$ où x,y parcourent $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est *parfaite* si on a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$. Il est clair que tout sous-module de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est un idéal bilatère.

2. Représentations d'algèbres de Leibniz.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz.

2.1.— Une *représentation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un module M muni d'actions de $\mathfrak{g}$, $[-,-] : M \times \mathfrak{g} \to M$ et $[-,-] : \mathfrak{g} \times M \to M$, assujetties aux axiomes suivants

$$(MLL) \qquad [m,[x,y]] = [[m,x],y] - [[m,y],x]$$
$$(LML) \qquad [x,[m,y]] = [[x,m],y] - [[x,y],m]$$
$$(LLM) \qquad [x,[y,m]] = [[x,y],m] - [[x,m],y]$$

pour tous éléments x,y de $\mathfrak{g}$ et m de M. On peut remplacer l'un des deux derniers axiomes par la relation

$$(ZD) \qquad [x,[m,y]] + [x,[y,m]] = 0\ .$$

La relation (ZD) (de l'anglais "*zero divisor*") exprime le fait que la quantité $[m,y]+[y,m]$ n'est pas nulle en général mais est annulée par l'action à gauche de $\mathfrak{g}$.

2.2.— En dualisant chacun des axiomes précédents, on obtient la notion de *coreprésentation* d'une algèbre de Leibniz :

$$(MLL)' \qquad [[x,y],m] = [x,[y,m]] - [y,[x,m]]$$
$$(LML)' \qquad [y,[m,x]] = [[y,m],x] - [m,[x,y]]$$
$$(LLM)' \qquad [[m,x],y] = [m,[x,y]] - [[y,m],x]$$

et la relation (ZD) se dualise en la relation

$$(ZD)' \qquad [y,[m,x]] + [[m,x],y] = 0\ .$$

2.3.— A toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ on associe une enveloppe universelle $\mathrm{UL}(\mathfrak{g})$; elle permet d'interpréter les (co)représentations de $\mathfrak{g}$ en termes de modules sur l'algèbre associative $\mathrm{UL}(\mathfrak{g})$. Il s'agit du quotient de l'algèbre tensorielle $\mathrm{T}(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)$ (où $\mathfrak{g}^l$ et $\mathfrak{g}^r$ sont des copies de $\mathfrak{g}$ dont les éléments sont notés respectivement l_x et r_x , $x \in \mathfrak{g}$) par l'idéal bilatère déterminé par les relations suivantes

$$r_{[x,y]} = r_x r_y - r_y r_x, \quad l_{[x,y]} = l_x r_y - r_y l_x, \quad (l_x + r_x) l_y = 0 \ , \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

2.4.— Toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ peut être vue comme une représentation sur elle-même par l'*action adjointe* (*i.e.*, les actions sont définies par le crochet) mais pas en général une coreprésentation. Aussi introduisons-nous la notion de *semi-représentation*, comme représentation (au sens classique) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{Lie}$:

Une *semi-représentation* d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un module M muni d'une action à droite $[-,-] : M \times \mathfrak{g} \to M$ vérifiant l'axiome (MLL).

Une (co)représentation (*resp.* semi-représentation) est dite *triviale* si les actions sont toutes identiquement nulles.

2.5.— Soit $\mathfrak{h}$ (*resp.* M) un idéal à droite (*resp.* une semi-représentation) d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$. Pour tout naturel n, le module $\mathrm{T}^n(\mathfrak{h}, M) := M \otimes \mathfrak{h}^{\otimes n}$ admet une structure de semi-représentation de $\mathfrak{g}$ donnée par l'*action adjointe diagonale*

$$[x_0 \otimes \cdots \otimes x_n, x] := \sum_{0 \le i \le n} x_0 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i, x] \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n$$

pour tous éléments x_0 de M, $x_1, \cdots, x_n$ de $\mathfrak{h}$ et x de $\mathfrak{g}$. Lorsque M est la semi-représentation triviale $\mathbf{K}$, on note simplement $\mathrm{T}^n(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^{\otimes n} \cong \mathrm{T}^n(\mathfrak{h}, \mathbf{K})$.

3. Cohomologie d'algèbres de Leibniz.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et soit M (*resp.* N) une coreprésentation (*resp.* représentation) de $\mathfrak{g}$. Adoptons les notations

$$(x_1, \cdots, x_n) := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\otimes n}$$
$$(m, x_1, \cdots, x_n) := m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}, M) = M \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}$$

pour tous éléments n de $\mathbf{N}$, m de M et $x_1, \cdots, x_n$ de $\mathfrak{g}$.

3.1.— *L'homologie de l'algèbre de Leibniz* $\mathfrak{g}$ *à coefficients dans la coreprésentation* M est l'homologie du complexe de chaînes $(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g}, M),\ d_*^M)$ où la différentielle $d_n = d_n^M : \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}, M) \to \mathrm{T}^{n-1}(\mathfrak{g}, M)$ opère par la formule

$$d_n(m, x_1, \cdots, x_n) := ([m, x_1], x_2, \cdots, x_n) \ + \ \sum_{i=2}^{n} (-1)^i ([x_i, m], x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_n)$$
$$+ \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{j+1} (m, x_1, \cdots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_n),$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $d_0 \equiv 0$, le symbole $\hat{}$ placé sur un caractère signifiant son omission. On la note $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, M)$ et simplement $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}) := \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$, K étant muni de la structure triviale de coreprésentation de $\mathfrak{g}$.

3.2.— *La cohomologie de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ à valeurs dans la représentation N* est l'homologie du complexe de cochaînes $(\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes *}, N),\ d_N^*)$ où la différentielle $d^n = d_N^n : \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes n}, N) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes n+1}, N)$ opère par la formule

$$d^n(f)(x_1, \cdots, x_{n+1}) := [x_1, f(x_2, \cdots, x_{n+1})] \ + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_{n+1}), x_i]$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{j+1} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_{n+1}),$$

pour tout entier $n \geq 1$ et $d^0(f)(x) := [x, f]$ pour tous éléments f de $\mathrm{Hom}(\mathrm{K}, N) \cong N$ et x de $\mathfrak{g}$. On la note $\mathrm{HL}^*(\mathfrak{g}, N)$ et simplement $\mathrm{HL}^*(\mathfrak{g}) := \mathrm{HL}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$, K étant muni de la structure triviale de représentation de $\mathfrak{g}$.

3.3.— Lorsque les K-modules $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{Lie}$ sont libres, on a l'interprétation en termes de *foncteurs dérivés* (*cf.* [L-P1])

$$\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Tor}_*^{\mathrm{UL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie}), M) \quad \text{et} \quad \mathrm{HL}^*(\mathfrak{g}, N) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathrm{UL}(\mathfrak{g})}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie}), N)$$

où $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie})$ désigne l'enveloppe universelle (au sens classique) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{Lie}$.

3.4.— On définit les théories de (co)homologie à coefficients (valeurs) dans une semi-représentation par les mêmes formules (3.1 et 3.2) mais en «droitisant» les actions à gauche. Par exemple, pour tous éléments x_0 de M et $x_1, \cdots, x_n$ de $\mathfrak{g}$, on a

$$d_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) := \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+1} (x_0, \cdots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_n) \ .$$

3.5.— Un calcul immédiat nous donne les premiers exemples :

$$\mathrm{HL}_0(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{K} \cong \mathrm{HL}^0(\mathfrak{g}) \ , \quad \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}} := \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$
$$\mathrm{HL}_0(\mathfrak{g}, M) \cong M_{\mathfrak{g}} := M/[M, \mathfrak{g}] \ , \quad \mathrm{HL}^0(\mathfrak{g}, N) \cong N^{\mathfrak{g}} := \{f \in N : [x, f] = 0, \ \forall\, x \in \mathfrak{g}\} \ .$$

Le module $\mathrm{HL}^1(\mathfrak{g}, N)$ s'identifie au module des *dérivations extérieures i.e.*, le quotient du module des dérivations de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans N par le sous-module des dérivations intérieures. Une *dérivation* (*resp. dérivation intérieure*) est une application linéaire $\delta : \mathfrak{g} \to N$ telle que $\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$ (*resp.* de la forme $ad_f : x \mapsto [x, f], f \in N$).

Le module $\mathrm{HL}^2(\mathfrak{g}, N)$ classifie les classes d'isomorphisme d'extensions abéliennes de $\mathfrak{g}$ par N. Un *extension abélienne de $\mathfrak{g}$ par N* est la donnée d'une suite exacte d'algèbres de Leibniz (N étant muni du crochet identiquement nul)

$$(\mathfrak{l}) \qquad 0 \to \ N \to \mathfrak{l} \to \mathfrak{g} \to 0 \ .$$

Dans le Chapitre I suivant, nous montrons que le module $\mathrm{HL}_2(\mathfrak{g})$ classifie les *extensions centrales universelles* d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ parfaite.

Si la coreprésentation M est triviale alors on a l'isomorphisme

$$\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, M) \cong M \otimes \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}).$$

Si l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est abélienne alors on a les isomorphismes

$$\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{T}^*(\mathfrak{g})\ , \quad \mathrm{HL}^*(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes *}, \mathrm{K})\ .$$

3.6.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz vue comme semi-représentation sur elle-même. Via l'isomorphisme de modules $\mathrm{T}^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathrm{K})$, la différentielle $d_n^{\mathfrak{g}}$ se transforme en la différentielle $-d_{n+1}^{\mathbf{K}}$; d'où l'isomorphisme en homologie

$$\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{HL}_{*+1}(\mathfrak{g}).$$

3.7.— Soit $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Leibniz et soit M une semi-représentation de $\mathfrak{g}$. La projection canonique $can_* : \mathrm{T}^*(\mathfrak{g}, M) \to \Lambda^*(\mathfrak{g}_{Lie}, M)$ est un morphisme de complexes qui induit en homologie des morphismes $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{H}_*(\mathfrak{g}_{Lie}, M)$, bijectifs en degré 0 et 1, et surjectif en degré 2 (où H_* désigne l'homologie classique des algèbres de Lie (*cf.* [Ch-E])).

Remarque.— A l'instar des semi-représentations, les propriétés 3.6 et 3.7 s'utilisent surtout lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie (*cf.* [Nt]).

3.8.— On suppose ici que K est corps. Pour toutes algèbres de Leibniz $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}''$, on a la *formule du type Künneth* pour l'homologie de Leibniz (*cf.* [Lo3])

$$\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'') \cong \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}') \star \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}'')$$

où $\star$ désigne le *produit libre* des modules gradués *i.e.*, l'analogue non-commutatif du produit tensoriel . En d'autres termes, le module $\mathrm{HL}_n(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'')$ est la somme directe des 2^n composantes

$$X_{i_1} \otimes Y_{i_2} \otimes X_{i_3} \otimes Y_{i_4} \otimes \cdots, \quad \forall\, i_j \geq 1\ , \quad i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \cdots = n$$

telles que, soit $X_* = \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}')$ et $Y_* = \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}'')$, soit $X_* = \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}'')$ et $Y_* = \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}')$.

I.— EXTENSIONS CENTRALES UNIVERSELLES D'ALGÈBRES DE LEIBNIZ

Introduction.— Nous nous proposons d'établir le résultat suivant, énoncé sans démonstration dans l'article de Loday-Pirashvili (*cf.* [L-P1, Proposition 4.2]) :

Théorème A. — *Soit* $\mathfrak{l}$ *une* K*-algèbre de Leibniz, libre en tant que* K*-module.*

– Une extension centrale $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{l}$ *est universelle si, et seulement si, l'algèbre de Leibniz* $\mathfrak{u}$ *est parfaite et toute extension centrale* $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}$ *est inessentielle.*

– L'algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$ *possède une extension centrale universelle si, et seulement si, elle est parfaite. De plus, le noyau de l'extension centrale universelle est canoniquement isomorphe au module d'homologie* $\mathrm{HL}_2(\mathfrak{l})$*.*

Nous nous inspirons des constructions de Garland (*cf.* [G]) qui a traité le sujet dans le cadre des algèbres de Lie. Puis, étant donnée une algèbre de Lie (donc aussi de Leibniz) parfaite, nous comparons ses extensions centrales universelles dans les deux catégories et nous obtenons :

Théorème B. — *Soit* $\mathfrak{l}$ *une* K*-algèbre de Lie parfaite et libre en tant que* K*-module, et soit* $\mathfrak{u}$ *son extension centrale universelle dans la catégorie des algèbres de Leibniz.*

– L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_{Lie}$ *est l'extension centrale universelle de* $\mathfrak{l}$ *dans la catégorie des algèbres de Lie.*

– L'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ *est l'extension centrale universelle de* $\mathfrak{u}_{Lie}$ *dans la catégorie des algèbres de Leibniz.*

– On a des isomorphismes de K*-modules*

$$\ker(\mathfrak{u} \to \mathfrak{u}_{Lie}) \cong \mathrm{HL}_2(\mathfrak{u}_{Lie}) \cong \ker(can_2 : \mathrm{HL}_2(\mathfrak{l}) \to \mathrm{H}_2(\mathfrak{l})) \ .$$

1. Extensions d'algèbres de Leibniz.— Une suite exacte d'algèbres de Leibniz

$$(\mathfrak{g}) \qquad\qquad 0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \mathfrak{l} \to 0$$

est appelée *extension de* $\mathfrak{l}$ *par* $\mathfrak{h}$. Le morphisme i est un isomorphisme d'algèbres de Leibniz de $\mathfrak{h}$ sur le *noyau* $\ker(p)$ de l'extension. On se permettra alors de noter simplement $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ l'extension $(\mathfrak{g})$, et par abus de langage, on dira que l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est une extension de $\mathfrak{l}$.

Une extension d'algèbres de Leibniz $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ est dite *scindée* (*resp. inessentielle*) sur K s'il existe une application linéaire (*resp.* un morphisme d'algèbres de Leibniz) $s : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$ telle que $ps = id_{\mathfrak{l}}$; l'application s est appelée *une section* de p.

On appelle *extension centrale* d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$, toute extension $p : \mathfrak{c} \to \mathfrak{l}$ dont le noyau $\ker(p)$ est central dans $\mathfrak{c}$ *i.e.*, $[\mathfrak{c}, \ker(p)] = [\ker(p), \mathfrak{c}] = 0$.

Une extension centrale $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{l}$ d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$ est dite *universelle* si, pour toute extension centrale $p : \mathfrak{c} \to \mathfrak{l}$, il existe un unique morphisme d'algèbres de Leibniz $\phi : \mathfrak{u} \to \mathfrak{c}$ tel que $p\phi = \alpha$. Il est alors clair qu'une extension centrale universelle, lorsqu'elle existe, est unique à isomorphisme près.

2. Critères d'universalité.— Nous allons nous intéresser aux propriétés qui caractérisent l'universalité d'une extension centrale.

Proposition 1. — *Si une extension centrale $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{l}$ est universelle alors l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ est parfaite.*

Démonstration. — Supposons que l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ ne soit pas parfaite; il existe donc une application $\mathbf{K}$-linéaire surjective $f : \mathfrak{u}/[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \to \mathbf{K}$.

Munissons la somme directe $\mathfrak{u} \oplus \mathbf{K}$ de la structure d'algèbre de Leibniz donnée par le crochet $[(x, \lambda), (x', \lambda')] := ([x, x'], 0)$ où $x, x' \in \mathfrak{u}, \lambda, \lambda' \in \mathbf{K}$. Il est clair que l'application $\tilde{\alpha} : \mathfrak{u} \oplus \mathbf{K} \to \mathfrak{l}$, $(x, \lambda) \mapsto \alpha(x)$, est un morphisme surjectif d'algèbres de Leibniz dont le noyau, qui n'est autre que la somme directe $\ker(\alpha) \oplus \mathbf{K}$, est central dans $\mathfrak{u} \oplus \mathbf{K}$. Nous sommes donc en présence d'une extension centrale $\tilde{\alpha} : \mathfrak{u} \oplus \mathbf{K} \to \mathfrak{l}$.

On vérifie que les applications $\phi_1, \phi_2 : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u} \oplus \mathbf{K}$, données par $\phi_1(x) := (x, 0)$ et $\phi_2(x) := (x, f(\bar{x}))$, sont deux morphismes distincts d'algèbres de Leibniz tels que $\tilde{\alpha}\phi_i = \alpha$, (i = 1, 2) ; ce qui contredit l'universalité de l'extension $\mathfrak{u}$.

Ainsi, nous avons montré que l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ est parfaite. ■

Proposition 2. — *Si une extension centrale $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{l}$ est universelle alors toute extension centrale de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ est inessentielle.*

Démonstration. — Elle se fait en deux étapes.

i) Soit $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}$ une extension centrale de $\mathfrak{u}$ telle que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Il est clair que l'application $\beta := \alpha p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ est un morphisme surjectif d'algèbres.

Montrons que son noyau est central dans $\mathfrak{g}$. Pour cela, remarquons d'abord que $z \in \ker(\beta)$ est équivalent à $p(z) \in \ker(\alpha)$. Comme $\ker(\alpha)$ est central dans $\mathfrak{u}$, si x ou y est dans $\ker(\beta)$ alors $[x, y]$ est dans $\ker(p)$. Le noyau $\ker(p)$ étant central dans $\mathfrak{g}$, on en déduit que $[[x, y], z]] = 0$ (resp. $[x, [y, z]] = 0$) si x ou y (resp. y ou z) est dans $\ker(\beta)$. Par conséquent, par l'identité de Leibniz, nous obtenons

$$[x, [y_1, y_2]] = [[x, y_1], y_2] - [[x, y_2], y_1] = 0, \;\; [[y_1, y_2], x] = [y_1, [y_2, x]] + [[y_1, x], y_2] = 0$$

pour tous $x \in \ker(\beta)$, $y_1, y_2 \in \mathfrak{g}$. Donc $\ker(\beta)$ est central dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

L'universalité de l'extension $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{l}$ assure alors l'existence d'un morphisme d'algèbres $s : \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$ tel que $\beta s = \alpha$ *i.e.*, $\alpha p s = \alpha$. Par conséquent, le morphisme $\psi := ps - \mathrm{id}_{\mathfrak{u}}$ est à valeurs dans $\ker(\alpha)$. Comme $\ker(\alpha)$ est central dans $\mathfrak{u}$, il vient

$$\psi([x,y]) = [ps(x), ps(y)] - [x,y] = [\psi(x), ps(y)] + [x, \psi(y)] = 0.$$

On en déduit que le morphisme ψ s'annule sur $[\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$; et donc $ps = \mathrm{id}_{\mathfrak{u}}$ puisque $\mathfrak{u} = [\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$ (cf. Proposition 1). D'où la Proposition 2 lorsque $\mathfrak{g}$ est parfaite.

ii) Soit $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}$ une extension centrale quelconque de $\mathfrak{u}$. Notons p' la restriction de p à la sous-algèbre des commutateurs $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. L'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ étant parfaite, il est clair que le morphisme $p' : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{u}$ est surjectif et à noyau central.

Montrons que l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}'$ est parfaite. Soit $[x,y]$ un générateur de $\mathfrak{g}'$. Comme $\mathfrak{u}$ est parfaite et p est surjectif, on peut écrire $p(x)$ sous la forme

$$p(x) = \sum [l_i, l'_i] = \sum [p(x_i), p(x'_i)] = \sum p([x_i, x'_i]), \quad l_i, l'_i \in \mathfrak{u},\ x_i, x'_i \in \mathfrak{g}.$$

Et l'élément $h := x - \sum [x_i, x'_i]$ est alors dans $\ker(p)$. De même, il existe des éléments (y_j, y'_j) de $\mathfrak{g}$ tels que l'élément $h' := y - \sum [y_j, y'_j]$ soit dans $\ker(p)$. Comme $\ker(p)$ est central dans $\mathfrak{g}$, il vient

$$[x,y] = [\ h + \sum [x_i, x'_i],\ h' + \sum [y_j, y'_j]\ ] = \sum\sum [\ [x_i, x'_i],\ [y_j, y'_j]\ ].$$

Ainsi, nous avons montré que $\mathfrak{g}'$ est parfaite. Et en vertu de l'étape i), il existe un morphisme d'algèbres $s' : \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}'$ qui scinde p'. En désignant par ι l'inclusion $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$, le composé $s := \iota s' : \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres scindant p. ∎

Ces deux propriétés (Propositions 1 et 2) caractérisent l'universalité d'une extension centrale *i.e.*,

Théorème 3. — *Soit $\mathfrak{l}$ une algèbre de Leibniz. Une extension centrale $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{l}$ est universelle si, et seulement si, l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ est parfaite et toute extension centrale de $\mathfrak{u}$ est inessentielle.*

Démonstration de la réciproque. — Soit $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ une extension centrale de $\mathfrak{l}$. Il s'agit de montrer l'existence d'un unique morphisme d'algèbres $\phi : \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$ tel que $p\phi = \alpha$. L'unicité résulte du

Lemme 4. — *Si $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{l}$ est une extension centrale et si l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}$ est parfaite alors, pour toute extension centrale $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$, il existe au plus un morphisme d'algèbres $\phi : \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$ tel que $p\phi = \alpha$.*

Démonstration du Lemme. — En effet, supposons qu'il existe deux tels morphismes ϕ et ϕ'. Alors pour tous $x, y \in \mathfrak{u}$, on a

$$\begin{aligned}(\phi - \phi')([x,y]) &= [\phi(x), \phi(y)] - [\phi'(x), \phi'(y)] \\ &= [\phi(x) - \phi'(x), \phi(y)] + [\phi'(x), \phi(y) - \phi'(y)].\end{aligned}$$

Comme le morphisme $\phi - \phi'$ est à valeurs dans $\ker(p)$, lequel est central dans $\mathfrak{g}$, il en résulte que $\phi - \phi'$ est nul sur $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = \mathfrak{u}$; d'où le Lemme 4. ■

Il nous reste à montrer l'existence d'un tel morphisme. A cet effet, considérons l'algèbre de Leibniz produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{u}$ (de crochet donné par $[(g,u),(g',u')] := ([g,g'],[u,u'])$) et notons $\mathfrak{g} \times_{\mathfrak{l}} \mathfrak{u}$ la sous-algèbre

$$\mathfrak{g} \times_{\mathfrak{l}} \mathfrak{u} := \{ \ (g,u) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{u} \mid p(g) = \alpha(u) \ \}.$$

La seconde projection $\rho_2 : \mathfrak{g} \times_{\mathfrak{l}} \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$ est un morphisme surjectif d'algèbres, et son noyau est de manière évidente central dans $\mathfrak{g} \times_{\mathfrak{l}} \mathfrak{u}$. Il existe donc un morphisme d'algèbres $s : \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{g} \times_{\mathfrak{l}} \mathfrak{u}$ tel que $\rho_2 s = \mathrm{id}_{\mathfrak{u}}$. Considérons alors le morphisme d'algèbres $\phi := \rho_1 s : \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{g}$ où $\rho_1 : \mathfrak{g} \times_{\mathfrak{l}} \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{g}$ désigne la première projection. Par définition de ρ_1, ρ_2, ϕ et s, on a $s(u) = (\rho_1 s(u), \rho_2 s(u)) = (\phi(u), u)$. Mais $(\phi(u), u) \in \mathfrak{g} \times_{\mathfrak{l}} \mathfrak{u}$ signifie que $p\phi(u) = \alpha(u)$; donc $p\phi = \alpha$. Ce qui démontre le Théorème 3. ■

3. Critères d'existence.— Nous allons à présent caractériser les algèbres de Leibniz possédant une extension centrale universelle.

Théorème 5. — *Une algèbre de Leibniz* $\mathfrak{l}$ (*libre en tant que* K-*module*) *possède une extension centrale universelle si, et seulement si, elle est parfaite. De plus, le noyau de l'extension centrale universelle est canoniquement isomorphe au module* $\mathrm{HL}_2(\mathfrak{l})$.

Démonstration. — La condition est nécessaire car une extension centrale universelle est parfaite (*cf.* Propostion 1) et l'image surjective d'une algèbre de Leibniz parfaite est aussi parfaite.

Réciproquement, supposons que l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$ soit parfaite. Soit $\mathrm{Im}(d_3)$ l'image du bord de Leibniz d_3 *i.e.*, le sous-module de $\mathfrak{l}^{\otimes 2}$ engendré par les éléments

$$d_3(x \otimes y \otimes z) = x \otimes [y,z] - [x,y] \otimes z + [x,z] \otimes y \ , \quad \forall \ x,y,z \in \mathfrak{l} \ .$$

Considérons le module quotient $M := \mathfrak{l}^{\otimes 2}/\mathrm{Im}(d_3)$, muni de la structure triviale de représentation de $\mathfrak{l}$. La projection canonique $\pi : \mathfrak{l}^{\otimes 2} \rightarrow M$ est de manière évidente un 2-cocycle de $\mathrm{HL}^2(\mathfrak{l}, M)$. Considérons alors l'extension centrale $\mathfrak{l}_\pi$ associée à π ; on rappelle qu'il s'agit du K-module $\mathfrak{l}_\pi = \mathfrak{l} \oplus M$ muni du crochet donné par $[(x,m),(x',m')] := ([x,x'], \pi(x,x'))$.

Montrons que la sous-algèbre des commutateurs $\mathfrak{l}'_\pi := [\mathfrak{l}_\pi, \mathfrak{l}_\pi]$ est parfaite. Pour cela, remarquons d'abord que l'on a l'égalité $\mathfrak{l}_\pi = \mathfrak{l}'_\pi + M$. En effet, puisque l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$ est parfaite, tout élément de $\mathfrak{l}_\pi$ est de la forme $(\sum [x_i, x'_i], m)$; et par définition du crochet dans $\mathfrak{l}_\pi$, on obtient

$$(\sum [x_i, x'_i], m) = \sum [(x_i, 0), (x'_i, 0)] + (0, m - \sum \pi(x_i, x'_i)) \ \in \mathfrak{l}'_\pi + M,$$

ce qui prouve l'égalité $\mathfrak{l}_\pi = \mathfrak{l}'_\pi + M$. Comme M est central dans $\mathfrak{l}_\pi$, on en déduit que

$$\mathfrak{l}'_\pi = [\mathfrak{l}_\pi, \mathfrak{l}_\pi] = [\mathfrak{l}'_\pi + M, \mathfrak{l}'_\pi + M] = [\mathfrak{l}'_\pi, \mathfrak{l}'_\pi].$$

Ainsi, nous avons montré que l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}'_\pi$ est parfaite.

Désignons par $\rho_1 : \mathfrak{l}'_\pi \to \mathfrak{l}$ la première projection. Il est clair que le noyau $\ker(\rho_1)$, qui est engendré par les éléments de la forme $(0, \sum \pi(x_i, x'_i))$ tels que $\sum [x_i, x'_i] = 0$, est central dans $\mathfrak{l}'_\pi$. Nous avons donc construit une extension centrale et parfaite.

Montrons que $\ker(\rho_1)$ est canoniquement isomorphe au module d'homologie $\mathrm{HL}_2(\mathfrak{l})$. Puisque le bord de Leibniz $d_2 : \mathfrak{l}^{\otimes 2} \to \mathfrak{l}$ opère par $x \otimes y \mapsto [x, y]$, l'application $\mathbf{K}$-linéaire

$$\xi : \ker(\rho_1) \longrightarrow \mathrm{HL}_2(\mathfrak{l}), \quad (0, \sum \pi(x_i, x'_i)) \mapsto \sum x_i \otimes x'_i$$

est bien définie et surjective. Supposons que $\xi(0, \sum \pi(x_i, x'_i))$ soit un bord *i.e.*,

$$\xi(0, \sum \pi(x_i, x'_i)) = \sum x_i \otimes x'_i = \sum d_3(y_j \otimes y'_j \otimes y''_j).$$

Alors, par définition de $M = \mathfrak{l}^{\otimes 2}/\mathrm{Im}(d_3)$, on a

$$\sum \pi(x_i, x'_i) = \sum \pi d_3(y_j \otimes y'_j \otimes y''_j) = 0.$$

Par conséquent l'application ξ est injective. Ainsi, nous avons construit un isomorphisme $\xi : \ker(\rho_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HL}_2(\mathfrak{l})$.

Il nous reste à prouver l'universalité de l'extension centrale $\rho_1 : \mathfrak{l}'_\pi \to \mathfrak{l}$. Comme le $\mathbf{K}$-module $\mathfrak{l}$ est libre, toute extension centrale (donc abélienne) de $\mathfrak{l}$ est de la forme $p : \mathfrak{l}_f \to \mathfrak{l}$ pour un 2-cocycle bien déterminé f de $\mathrm{HL}^2(\mathfrak{l}, V)$. Alors l'application

$$\phi : \mathfrak{l}'_\pi \to \mathfrak{l}_f, \quad (x, \pi(y, z)) \mapsto (x, f(y, z))$$

est un morphisme d'algèbres vérifiant $p\phi = \rho_1$. Comme l'algèbre $\mathfrak{l}'_\pi$ est parfaite, l'unicité du morphisme ϕ résulte du Lemme 4. Ce qui achève de démontrer le Théorème 5. ∎

4. Cas des algèbres de Lie.— Soit $\mathfrak{l}$ une $\mathbf{K}$-algèbre de Lie parfaite et libre en tant que $\mathbf{K}$-module. Il existe donc une extension centrale universelle $\alpha_1 : \mathfrak{u}_1 \to \mathfrak{l}$ dans la catégorie (**Leib**) des algèbres de Leibniz, et une extension centrale universelle $\alpha_2 : \mathfrak{u}_2 \to \mathfrak{l}$ dans la catégorie (**Lie**) des algèbres de Lie.

Proposition 6. — *L'algèbre de Leibniz $\mathfrak{u}_1$ est une extension centrale universelle de l'algèbre $\mathfrak{u}_2$ dans la catégorie* (**Leib**) *et l'on a un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{u}_2 \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{u}_1)_{Lie}$ où $(\mathfrak{u}_1)_{Lie} := \mathfrak{u}_1/([x, x])$ est l'algèbre de Lie associée à $\mathfrak{u}_1$.*

Démonstration. — En effet, l'extension $\alpha_2 : \mathfrak{u}_2 \to \mathfrak{l}$ étant aussi centrale dans la catégorie (**Leib**), il existe un morphisme d'algèbres de Leibniz $\phi : \mathfrak{u}_1 \to \mathfrak{u}_2$ tel que $\alpha_2\phi = \alpha_1$. Comme $\mathfrak{u}_1$ est pafaite et toute extension centrale de $\mathfrak{u}_1$ est inessentielle, il suffit de montrer que $\phi : \mathfrak{u}_1 \to \mathfrak{u}_2$ est une extension centrale. Il est clair que $\ker(\phi)$ est central dans $\mathfrak{u}_1$; montrons que le morphisme ϕ est surjectif. Remarquons d'abord que l'on a l'égalité $\mathfrak{u}_2 = \mathrm{Im}(\phi) + \ker(\alpha_2)$. En effet, soit $z \in \mathfrak{u}_2$; comme α_1 est surjectif et $\alpha_2\phi = \alpha_1$, il existe un élément $z' \in \mathfrak{u}_1$ tel que $\alpha_2(z) = \alpha_1(z') = \alpha_2\phi(z')$ *i.e.*, $z - \phi(z') \in \ker(\alpha_2)$. D'où l'égalité $\mathfrak{u}_2 = \mathrm{Im}(\phi) + \ker(\alpha_2)$. Comme l'algèbre $\mathfrak{u}_2$ est parfaite et $\ker(\alpha_2)$ est central dans $\mathfrak{u}_2$, on en déduit que

$$\mathfrak{u}_2 = [\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_2] = [\mathrm{Im}(\phi) + \ker(\alpha_2), \mathrm{Im}(\phi) + \ker(\alpha_2)] = [\mathrm{Im}(\phi), \mathrm{Im}(\phi)] \subset \mathrm{Im}(\phi).$$

Donc le morphisme ϕ est surjectif ; ainsi, nous avons montré que $\mathfrak{u}_1$ est une extension centrale universelle de $\mathfrak{u}_2$.

Par ailleurs, désignons par $\overline{\alpha}_1$ (*resp.* $\overline{\phi}$) le morphisme induit par α_1 (*resp.* ϕ) sur $(\mathfrak{u}_1)_{Lie}$. Il est clair que l'extension $\overline{\alpha}_1 : (\mathfrak{u}_1)_{Lie} \to \mathfrak{l}$ est centrale dans la catégorie (**Lie**) et que $\alpha_2\overline{\phi} = \overline{\alpha}_1$. Il existe donc un morphisme d'algèbres de Lie $\psi : \mathfrak{u}_2 \to (\mathfrak{u}_1)_{Lie}$ tel que $\overline{\alpha}_1\psi = \alpha_2$. Par composition, on obtient

$$\overline{\alpha}_1(\psi\overline{\phi}) = \alpha_2\overline{\phi} = \overline{\alpha}_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2(\overline{\phi}\psi) = \overline{\alpha}_1\psi = \alpha_2.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_2$ (*resp.* $(\mathfrak{u}_1)_{Lie}$) étant parfaite, on déduit du Lemme 4 que $\overline{\phi}\psi = \mathrm{id}$ sur $\mathfrak{u}_2$ et $\psi\overline{\phi} = \mathrm{id}$ sur $\mathfrak{u}_1$; d'où l'isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{u}_2 \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{u}_1)_{Lie}$. ■

Comme conséquence immédiate, nous obtenons un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \ker(can_2) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{u}_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{l}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{u}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{l} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 & (\textbf{Leib}) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_2(\mathfrak{l}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{u}_2 = (\mathfrak{u}_1)_{Lie} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{l} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (\textbf{Lie}) \\
 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & (\textbf{Leib}) & & &
\end{tikzcd},$$

qui permet d'avoir la caractérisation suivante :

Corollaire 7. — *Avec les notations précédentes, on a des isomorphismes de* K-*modules* : $\ker(\mathfrak{u}_1 \to (\mathfrak{u}_1)_{Lie}) \cong \mathrm{HL}_2((\mathfrak{u}_1)_{Lie}) \cong \ker(can_2 : \mathrm{HL}_2(\mathfrak{l}) \to \mathrm{H}_2(\mathfrak{l}))$. ■

5. Un exemple classique : les algèbres de Steinberg.— Soit A une algèbre associative et soit $\mathfrak{sl}_n(A)$ l'algèbre de Lie des matrices carrées $n \times n$, à coefficients dans A et à trace nulle dans l'*abélianisé* $A/[A,A]$. On rappelle que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$ est parfaite si $n \geq 3$ ou, si $n = 2$ et 2 est inversible dans A.

En étudiant l'extension centrale universelle $\mathfrak{st}_n(A)$ de $\mathfrak{sl}_n(A)$ dans la catégorie (**Lie**), Ch. Kassel et J.-L. Loday (*cf.* [K-L]) généralisent un résultat de S. Bloch (*cf.* [Bl] où l'algèbre A est supposée commutative) et démontrent l'isomorphisme

$$\mathrm{H}_2(\mathfrak{sl}_n(A)) \cong \mathrm{HC}_1(A) \ , \quad \forall\, n \geq 5 \quad \text{ou} \quad (\forall\, n \geq 2 \text{ si } 2^{-1} \in A)$$

où $\mathrm{HC}_*(A)$ désigne l'homologie cyclique de l'algèbre A.

De même, J.-L. Loday et T. Pirashvili (*cf.* [L-P1]) construisent l'extension centrale universelle $\mathfrak{stl}_n(A)$ de $\mathfrak{sl}_n(A)$ dans la catégorie (**Leib**) et obtiennent l'isomorphisme

$$\mathrm{HL}_2(\mathfrak{sl}_n(A)) \cong \mathrm{HH}_1(A) \ , \quad \forall\, n \geq 5$$

où $\mathrm{HH}_*(A)$ désigne l'homologie de Hochschild de l'algèbre A. De plus, on a l'analogue du diagramme commutatif précédent, où B désigne le *bord de Connes* :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & \mathrm{HC}_0(A) \arrow[d, "B"] & \mathrm{HL}_2(\mathfrak{st}_n(A)) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{HH}_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{stl}_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{sl}_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 & (\mathbf{Leib}) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{HC}_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{st}_n(A) \cong (\mathfrak{stl}_n(A))_{Lie} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{sl}_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (\mathbf{Lie}) \\
 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & (\mathbf{Leib}) & & & ,
\end{tikzcd}$$

l'isomorphisme $\mathfrak{st}_n(A) \cong (\mathfrak{stl}_n(A))_{Lie}$ provenant de la Proposition 6.

II.— SUITE SPECTRALE D'UNE EXTENSION D'ALGÈBRES DE LEIBNIZ

Introduction.— Nous nous proposons de construire une «version Leibniz» de la suite spectrale de Hochschild-Serre (*cf.* [Ko], [H-S]). Rappelons que pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et tout $\mathfrak{g}$-module M, il existe une suite spectrale $(\mathrm{E}^r(\mathfrak{h}, M))_{r\geq 1}$ caractérisée par

$$(\dagger) \qquad \mathrm{E}^2_{p,q}(\mathfrak{h}, M) \cong \mathrm{H}_p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathrm{H}_q(\mathfrak{h}, M)) \underset{p}{\Longrightarrow} \mathrm{H}_{p+q}(\mathfrak{g}, M),$$

$\mathrm{H}_*(X, Y)$ étant l'homologie de l'algèbre de Lie X à coefficients dans le X-module Y.

Cependant, pour la théorie d'homologie HL_* développée par Loday-Pirashvili (*cf.* [L-P1]), le module $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$ — où $\mathfrak{h}$ (*resp.* M) est un idéal bilatère (*resp.* une coreprésentation) de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ — n'est pas en général une coreprésentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Nous contournons ce problème technique en travaillant avec des semi-représentations. En revanche, on ne peut espérer des résultats aussi «simples» que ci-dessus ($\dagger$) pour les termes $\mathrm{E}^2_{p,q}(\mathfrak{h}, M)$ de cette nouvelle théorie. En effet, pour des algèbres de Leibniz abéliennes (donc de Lie) $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$, on a les isomorphismes

$$\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \mathrm{K}) \cong \mathrm{T}^*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong \mathrm{T}^*(\mathfrak{g}) \star \mathrm{T}^*(\mathfrak{g}') \cong \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, \mathrm{K}) \star \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}', \mathrm{K})$$

— où $\star$ désigne le *produit libre* des modules gradués *i.e.*, l'analogue non-commutatif du produit tensoriel (*cf.* [Lo3]) — alors que dans le cas classique, on a les isomorphismes

$$\mathrm{H}_*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}', \mathrm{K}) \cong \Lambda^*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong \Lambda^*(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}') \cong \mathrm{H}_*(\mathfrak{g}, \mathrm{K}) \otimes \mathrm{H}_*(\mathfrak{g}', \mathrm{K}),$$

T^* et Λ^* désignant respectivement les algèbres tensorielle et extérieure. En fait, la «bonne présentation» des termes E^2 est due à la structure d'algèbre de Hopf cocommutative de l'enveloppe universelle des algèbres de Lie (*cf.* [Th]), alors que celle des algèbres de Leibniz n'a pas de structure d'algèbre de Hopf.

Dans ce chapitre nous supposons que $\mathbf{K}$ est un corps. Nous construisons une *filtration* du complexe de Leibniz $(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g}, M),\ d^M_*)$ qui permet d'obtenir les résultats suivants :

Théorème. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Leibniz, soit* $\mathfrak{h}$ *un idéal bilatère de* $\mathfrak{g}$ *et soit* M *une semi-représentation de* $\mathfrak{g}$. *Il existe une suite spectrale* $(\mathrm{E}^r(\mathfrak{h},M))_{r\geq 1}$ *convergeant vers l'homologie de Leibniz* $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g},M)$.

– Les termes E^1 *sont donnés par les isomorphismes*

$$\mathrm{E}^1_{0,q}\cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M)\ ,\quad \mathrm{E}^1_{p,q}\cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M)\otimes(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})\otimes\mathfrak{g}^{\otimes\,(p-1)}\ ,\ \forall\, p>0,\ \forall\, q\geq 0\ .$$

– Pour tout entier $q\geq 0$, *on a les isomorphismes*

$$\mathrm{E}^2_{0,q}\cong \mathrm{HL}_0(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M))\ ,\quad \mathrm{E}^2_{1,q}\cong \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M)),$$

et une longue suite exacte

$$\begin{aligned}\cdots\to \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g},\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M)\otimes\mathfrak{h})\to \mathrm{HL}_p(\mathfrak{g},\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M))\to \mathrm{E}^2_{p,q}\to\\ \to \mathrm{HL}_{p-2}(\mathfrak{g},\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M)\otimes\mathfrak{h})\to\cdots\to \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g},\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M))\to \mathrm{E}^2_{1,q}\to 0.\end{aligned}$$

– Si l'action adjointe diagonale de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *sur* $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M)$ *est triviale alors on a les isomorphismes*

$$\mathrm{E}^2_{p,q}\cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h},M)\otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}/\mathfrak{h})\ ,\ \forall\, p\geq 2,\ \forall\, q\geq 0\ .$$

Nous obtenons ainsi un procédé récursif de calcul d'homologie. Toutefois, dans la pratique, les calculs explicites ne sont pas aussi aisés que dans le cas classique, même en basses dimensions.

1.— Filtration associée à l'extension

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz, M une semi-représentation de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{g}$. Considérons la famille (F^p_*) définie par :

$$F^p_n := \begin{cases} M\otimes\mathfrak{h}^{\otimes\,(n-p)}\otimes\mathfrak{g}^{\otimes\,p}, & \text{si } n>p\\ M\otimes\mathfrak{g}^{\otimes\,n}\quad, & \text{si } n\leq p.\end{cases}\tag{1}$$

Il est clair que l'on a les inclusions $F^p_n\subset F^{p+1}_n\subset T^n(\mathfrak{g},M)$. En outre, pour tout $\xi=\omega_q\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_p\in F^p_{p+q}$ où $\omega_q\in M\otimes\mathfrak{h}^{\otimes\,q}$ et $q>0$, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}d_M(\xi)=d_M(\omega_q)\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_p\ +\ (-1)^{q+1}\omega_q\otimes d\mathbf{K}(x_1\otimes\cdots\otimes x_p)\\ +\sum_{i=1}^{n}(-1)^{q+i+1}[\omega_q,x_i]\otimes x_1\otimes\cdots\otimes\widehat{x_i}\otimes\cdots\otimes x_p.\end{aligned}\tag{2}$$

Comme $\mathfrak{h}$ est un idéal (à droite), on voit immédiatement que $d_M(F_n^p) \subset F_{n-1}^p$ pour $n > p$. Si $n \leq p$, l'inclusion $d_M(F_n^p) \subset F_{n-1}^p$ est évidente.

Par conséquent, la famille (F_*^p) est une filtration du complexe $(T(\mathfrak{g}, M), d_M)$. Elle détermine donc une suite spectrale $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r\geq 1}$. Et puisque la filtration est bornée,

$$T^n(\mathfrak{h}, M) = F_n^0 \subset F_n^1 \subset \cdots \subset F_n^n = F_n^{n+1} = \cdots = T^n(\mathfrak{g}, M),$$

cette suite spectrale converge vers l'homologie de Leibniz $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}, M)$.

2.— Sur les termes E^1 de la suite spectrale

Ce sont les modules d'homologie $\mathrm{E}_{p,q}^1 := \mathrm{H}_{p+q}(F_*^p / F_*^{p-1}, d^0)$ où d^0 est le bord induit par d_M sur le complexe quotient.

Proposition 1. — *Pour tout idéal à droite $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, on a les isomorphismes*

$$\mathrm{E}_{0,q}^1 \cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)\ ,\ \mathrm{E}_{p,q}^1 \cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (p-1)},\ \forall\, p > 0,\ \forall\, q \geq 0. \tag{3}$$

Démonstration. — Notons d'abord que, comme $F_*^{-1} = \{0\}$, il vient

$$\mathrm{E}_{0,q}^1 = \mathrm{H}_q(F_*^0, d^0) = \mathrm{H}_q(T^*(\mathfrak{h}, M), d_M) = \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M).$$

Supposons à présent $p \geq 1$ et adoptons la notation $x_0 \cdots x_n := x_0 \otimes \cdots \otimes x_n$.

Description du bord d^0.— Pour tout $\xi = \omega_q \otimes x_1 \cdots x_p \in F_{p+q}^p$, les termes $[\omega_q, x_i] \otimes x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_p$ et $\omega_q \otimes d_k(x_1 \cdots x_p)$ de (2) sont dans $M \otimes \mathfrak{h}^{\otimes q} \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (p-1)}$. On en déduit que le bord $d^0 : F_{p+q}^p / F_{p+q}^{p-1} \longrightarrow F_{p+q-1}^p / F_{p+q-1}^{p-1}$ opère par la formule

$$\overline{m x_1 \cdots x_{p+q}} \longmapsto \overline{d_M(m x_1 \cdots x_q) \otimes x_{q+1} \cdots x_{p+q}} \tag{4}$$

où $\overline{\omega}$ désigne l'image de l'élément $\omega \in F_{p+q}^p$ dans le quotient $F_{p+q}^p / F_{p+q}^{p-1}$.

Par ailleurs, on a un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$F_{p+q}^p / F_{p+q}^{p-1} \cong M \otimes \mathfrak{h}^{\otimes q} \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (p-1)}.$$

La description précédente (4) de d^0 n'est alors autre que celle du bord $d_M \otimes \mathrm{id}_V$ où $V := (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (p-1)}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{p,q}^1 = \mathrm{H}_q(F_{p+*}^p / F_{p+*}^{p-1}, d^0) &\cong \mathrm{H}_q(T^*(\mathfrak{h}, M) \otimes V, d_M \otimes \mathrm{id}_V) \\ &\cong \mathrm{H}_q(T^*(\mathfrak{h}, M), d_M) \otimes V \qquad \text{(Künneth)} \\ &\cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (p-1)} \qquad (p \geq 1). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

3.— Sur les termes E^2 de la suite spectrale

Ce sont les modules d'homolgie $\mathrm{E}^2 := H(\mathrm{E}^1, d^1)$ des E^1-termes. Plus précisément, on a

$$\mathrm{E}^2_{p,q} := \ker(d^1 : \mathrm{E}^1_{p,q} \to \mathrm{E}^1_{p-1,q})/\mathrm{Im}(d^1 : \mathrm{E}^1_{p+1,q} \to \mathrm{E}^1_{p,q}).$$

Remarquons d'abord que pour tout q-cycle c_q de $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$ et tout élément h de $\mathfrak{h}$, la formule (2) s'écrit

$$d_M(c_q \otimes h) \;=\; d_M(c_q) \otimes h \;+\; (-1)^{q+2}[c_q, h] \;=\; (-1)^q[c_q, h],$$

donc l'élément $[c_q, h]$ est un bord. Il en résulte que l'action adjointe diagonale de $\mathfrak{h}$ devient triviale sur $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$. Par conséquent les modules $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$ héritent d'une structure de semi-représentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. De plus, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, les cycles $[c_q, x]$ et $[c_q, \overline{x}]$ sont homologues dans $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$ où l'on note $\overline{x}$ l'image de x dans le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Proposition 2. — *Pour tout idéal bilatère $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, tout entier $q \geq 0$, on a les isomorphismes*

$$\mathrm{E}^2_{0,q} \cong \mathrm{HL}_0(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)) \quad \textit{et} \quad \mathrm{E}^2_{1,q} \cong \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)), \tag{5}$$

et une longue suite exacte

$$\begin{aligned}\cdots \to \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes \mathfrak{h}) \to \mathrm{HL}_p(\mathfrak{g}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)) \to \mathrm{E}^2_{p,q} \to \\ \to \mathrm{HL}_{p-2}(\mathfrak{g}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes \mathfrak{h}) \to \cdots \to \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)) \to \mathrm{E}^2_{1,q} \to 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Démonstration. — Commençons par décrire le bord d^1. Il s'agit de la composée $d^1 := \pi \circ \gamma$ où π et γ sont les homomorphismes de la longue suite exacte en homologie

$$\cdots \to \mathrm{H}_{p+q}(F^{p-1}_*) \longrightarrow \mathrm{H}_{p+q}(F^p_*) \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}_{p+q}(F^p_*/F^{p-1}_*) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{H}_{p+q-1}(F^{p-1}_*) \to \cdots$$

associée à la courte suite exacte de complexes $\quad 0 \to F^{p-1}_* \to F^p_* \to F^p_*/F^{p-1}_* \to 0.$

Par construction de l'homomorphisme de liaison γ, on obtient $d^1([\xi]) = \overline{\pi \circ d(\xi)}$ où $[\xi]$ désigne la classe d'homologie du cycle $\xi \in F^p_*/F^{p-1}_*$.
Soit $\xi = c_q \otimes \overline{x} \otimes x_1 \cdots x_{p-1} \in \mathrm{E}^1_{p,q} = \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (p-1)}$; comme $d(c_q)$ est nul, la formule (2) devient

$$\begin{aligned}d_M(\xi) = (-1)^q[c_q, \overline{x}] \otimes x_1 \cdots x_{p-1} \;+\; \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{q+i}[c_q, x_i] \otimes \overline{x} \otimes x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_{p-1} \\ + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{q+i} c_q \otimes [\overline{x}, x_i] \otimes x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_{p-1} \;+\; (-1)^q c_q \otimes \overline{x} \otimes d_k(x_1 \cdots x_{p-1}).\end{aligned}$$

Puisque les cycles $[c_q, x_i]$ et $[c_q, \overline{x_i}]$ sont homologues et que $\overline{([\overline{x}, y])} = [\overline{x}, \overline{y}]$, il vient

$$d^1(\xi) = (-1)^q(\ [c_q, \overline{x}] \otimes x_1 \cdots x_{p-1}\ +\ c_q \otimes \overline{x} \otimes d_k(x_1 \cdots x_{p-1})\ ) + \tag{7}$$
$$+\ (-1)^q \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i (\ [c_q, \overline{x_i}] \otimes \overline{x} + c_q \otimes [\overline{x}, \overline{x_i}]\ ) \otimes x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_{p-1}.$$

Pour $p \leq 2$, la formule (7) se réduit à :

$$d^1(c_q) = 0 = (-1)^q \tilde{d}(c_q), \quad d^1(c_q \otimes \overline{x}) = (-1)^q [c_q, \overline{x}] = (-1)^q \tilde{d}(c_q \otimes \overline{x}),$$
$$d^1(c_q \otimes \overline{x} \otimes y) = (-1)^q ([c_q, \overline{x}] \otimes \overline{y} -\ [c_q, \overline{y}] \otimes \overline{x} -\ c_q \otimes [\overline{x}, \overline{y}]) = (-1)^q \tilde{d}(c_q \otimes \overline{x} \otimes \overline{y})$$

où $\tilde{d} : \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\otimes n} \to \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\otimes (n-1)}$ est le bord du complexe de Leibniz de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ à coefficients dans $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$ (q étant fixé). Les isomorphismes (5) en résultent immédiatement.

Par ailleurs, on peut aussi voir le terme $\mathrm{E}^1_{p,q}$ comme le conoyau de l'inclusion

$$\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (p-1)} \hookrightarrow \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes p}.$$

En conséquence, on vérifie que l'on a une suite exacte de complexes (q étant fixé)

$$0 \to T^{*-1}(\mathfrak{g}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes \mathfrak{h}) \to T^*(\mathfrak{g}, \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)) \to \mathrm{E}^1_{*,q} \to 0.$$

Nous en déduisons en homologie la longue suite exacte (6). ■

Cas particulier.— Supposons que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ opère trivialement sur les modules $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$. Alors la formule (7) devient

$$d^1(\xi) = (-1)^q \left(\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i c_q \otimes [\overline{x}, \overline{x_i}] \otimes x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_{p-1}\ +\ c_q \otimes \overline{x} \otimes d_k(x_1 \cdots x_{p-1}) \right),$$

ce qui n'est autre que le bord $(-1)^q \mathrm{id}_W \otimes d'$ où $W := \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$, d' étant le bord du complexe de Leibniz de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (q étant fixé).
Par conséquent nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^2_{p,q} &\cong \mathrm{H}_{p-1}(\ W \otimes T^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}),\ (-1)^q \mathrm{id}_W \otimes d'\ ) \\ &\cong W \otimes \mathrm{H}_{p-1}(\ T^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}),\ d'\ ) \\ &\cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \quad (p \geq 2). \end{aligned}$$

Nous en déduisons la

Proposition 3. — *Si l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ opère trivialement sur $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M)$ alors, pour tout $p \geq 2$, on a l'isomorphisme*

$$\mathrm{E}^2_{p,q} \cong \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, M) \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}). \tag{8}$$

4.— Applications

Nous donnons ici quelques exemples de calculs qui illustrent assez bien la complexité de cette suite spectrale par rapport à la version classique des algèbres de Lie pour laquelle des arguments de dimensions permettent d'obtenir des *dégénérescences* sans coup férir.

4.1.— Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et soit $\mathfrak{h} = 0$ (*resp.* $M = \mathrm{K}$) l'idéal bilatère (*resp.* la semi-représentation) trivial(e). Puisque nous avons

$$\mathrm{HL}_0(\mathfrak{h}, \mathrm{K}) \cong \mathrm{K}\ , \quad \mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, \mathrm{K}) \cong 0, \quad \forall\, q > 0\ ,$$

l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ opère trivialement sur $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, \mathrm{K})$. Par conséquent, nous obtenons

$$\mathrm{E}^2_{p,q}(0, \mathrm{K}) \cong \begin{cases} \mathrm{HL}_p(\mathfrak{g}, \mathrm{K}) & \text{si } p = 0, 1 \text{ et } q = 0 \\ \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) & \text{si } p \geq 2 \text{ et } q = 0 \\ 0 & \text{si } p \geq 2 \text{ et } q \neq 0 \end{cases} \quad \underset{p}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{HL}_{p+q}(\mathfrak{g}, \mathrm{K})\ .$$

Ainsi, la suite spectrale $\mathrm{E}(0, \mathrm{K})$ dégénère et nous retrouvons l'isomorphisme (*cf.* 0.3.6)

$$\mathrm{HL}_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathrm{HL}_{n+1}(\mathfrak{g}), \quad \forall\, n \geq 1\ .$$

4.2.— Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(S^2)$ l'algèbre de Leibniz de dimension 2, ayant pour base $\{X, Y\}$, dont le crochet est défini par les relations

$$[X, X] = Y\ , \quad [X, Y] = [Y, X] = [Y, Y] = 0\ .$$

Nous allons montrer que ses groupes d'homologie sont donnés par l'isomorphisme

$$\mathrm{HL}_n(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathrm{K}\ , \quad \forall\, n \in \mathrm{N}\ .$$

Comme pour toute algèbre de Leibniz, nous savons déjà que

$$\mathrm{HL}_0(\mathcal{L}) \cong \mathrm{K} \quad \text{et} \quad \mathrm{HL}_1(\mathcal{L}) \cong \mathcal{L}/[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \cong \mathcal{L}/\mathrm{K}.Y \cong \mathrm{K}.\overline{X}\ .$$

Pour les groupes d'homologie d'ordre supérieur, nous allons considérer la suite spectrale relative à l'idéal bilatère $\mathfrak{h} := \mathrm{K}.Y$ et la semi-représentation triviale $M := \mathrm{K}$.

L'algèbre de Leibniz $\mathfrak{h} = \mathrm{K}.Y$ étant abélienne, nous avons

$$\mathrm{HL}_n(\mathfrak{h}, \mathrm{K}) \cong \mathfrak{h}^{\otimes n} \cong \mathrm{K}.Y^{\otimes n}, \quad \forall\, n \in \mathrm{N}\ .$$

Par ailleurs, il est clair que l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}/\mathfrak{h} \cong \mathrm{K}.\overline{X}$ (*resp.* $\mathcal{L}$) opère trivialement sur les groupes $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{h}, \mathrm{K})$ (*resp.* la semi-représentation $\mathcal{L}/\mathfrak{h} \cong \mathrm{K}.\overline{X}$). Nous en déduisons les termes $\mathrm{E}^2(\mathrm{K}.Y, \mathrm{K})$:

$$\mathrm{E}^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathrm{HL}_q(\mathrm{K}.Y, \mathrm{K}) \cong \mathrm{K}.Y^{\otimes q} & \text{si } p = 0 \\ \mathrm{HL}_q(\mathrm{K}.Y, \mathrm{K}) \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathcal{L}, \mathrm{K}.\overline{X}) \cong \mathrm{K}.(Y^{\otimes q} \otimes \overline{X}) \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathcal{L}) & \text{si } p > 0\ . \end{cases}$$

Par un calcul long (et peu significatif pour être repris ici), nous obtenons

$$\mathrm{E}^{\infty}_{0,0} \cong \mathbf{K}\ , \quad \mathrm{E}^{\infty}_{2p+1,0} \cong \mathbf{K}\ , \quad \mathrm{E}^{\infty}_{2p+1,1} \cong \mathbf{K}\ , \quad \forall\, p \in \mathbf{N}$$

et $\mathrm{E}^{\infty}_{p,q} \cong 0$ partout ailleurs. Le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.

Remarque.— Dans le chapitre IV suivant, nous déterminons par une autre méthode la (co)homologie entière de l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}(S^2)$, y compris la structure d'*algèbre de Leibniz duale* de sa cohomologie.

4.3.— Soient $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}''$ des algèbres de Leibniz et soit $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$ la somme directe munie du crochet défini par

$$[(x', x''), (y', y'')] := ([x', y'], [x'', y''])\ , \quad \forall\, x', y' \in \mathfrak{g}',\ \forall\, x'', y'' \in \mathfrak{g}''.$$

Par définition du crochet de $\mathfrak{g}$, il est clair que le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{g}''$ (*resp.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'' \cong \mathfrak{g}'$) opère trivialement sur les modules $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{g}')$ (*resp.* $\mathrm{HL}_q(\mathfrak{g}'')$). Ainsi, en prenant $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$ et $M = \mathbf{K}$, nous obtenons une suite spectrale

$$\mathrm{E}^2_{p,q}(\mathfrak{g}', \mathrm{K}) \cong \begin{cases} \mathrm{HL}_q(\mathfrak{g}') & \text{si } p = 0 \\ \\ \mathrm{HL}_q(\mathfrak{g}') \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'') & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad \underset{p}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{HL}_{p+q}(\mathfrak{g})\ .$$

Ensuite pour $\mathfrak{h} = M = \mathfrak{g}''$ et via l'isomorphisme $\mathrm{HL}_n(\mathfrak{g}'', \mathfrak{g}'') \cong \mathrm{HL}_{n+1}(\mathfrak{g}'')$, nous obtenons une suite spectrale

$$\mathrm{E}^2_{p,q}(\mathfrak{g}'', \mathfrak{g}'') \cong \begin{cases} \mathrm{HL}_{q+1}(\mathfrak{g}'') & \text{si } p = 0 \\ \\ \mathrm{HL}_{q+1}(\mathfrak{g}'') \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad \underset{p}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{HL}_{p+q}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'')\ .$$

De même, en prenant $\mathfrak{h} = M = \mathfrak{g}'$, nous obtenons une nouvelle suite spectrale

$$\mathrm{E}^2_{p,q}(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}') \cong \begin{cases} \mathrm{HL}_{q+1}(\mathfrak{g}') & \text{si } p = 0 \\ \\ \mathrm{HL}_{q+1}(\mathfrak{g}') \otimes \mathrm{HL}_{p-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'') & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad \underset{p}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{HL}_{p+q}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')\ .$$

La conjonction de ces trois suites spectrales permet de retrouver par récurrence la *formule du type Künneth* pour l'homologie de Leibniz *i.e.*, l'isomorphisme (*cf.* 0.3.8.)

$$\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'') \cong \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}') \star \mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}'')\ .$$

III.— HOMOLOGIE DE LEIBNIZ D'ALGÈBRES DE LIE ÉTENDUES PAR UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE

Introduction.— On est souvent amené à calculer l'homologie d'algèbres de Lie de la forme $A\otimes\mathfrak{g}$ (où A est une algèbre commutative et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie), notamment dans l'étude des conjectures de Macdonald (sur les systèmes de racines, *cf.* [Hn]) ou d'algèbres de Kac-Moody (*cf.* [Hd1]). Pour cela, A. Haddi exprime (*cf.* [Hd2]) l'homologie des coinvariants $\mathrm{H}_*(\Lambda^*(A\otimes\mathfrak{g})_\mathfrak{g})$ à l'aide de l'homologie cyclique $\mathrm{HC}(A)$ de A et des coinvariants des puissances symétriques $(\mathrm{S}^p\mathfrak{g})_\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$.

Le but de ce chapitre est d'en donner une version non-commutative : l'homologie de Leibniz joue le rôle de l'homologie classique d'algèbres de Lie, et l'homologie de Hochschild celui de l'homologie cyclique. Rappelons que le complexe donnant l'homologie de Leibniz est obtenu en remplaçant, dans le complexe usuel de Chevalley-Eilenberg, l'algèbre extérieure Λ par l'algèbre tensorielle T.

Nous commençons par construire un morphisme de complexes reliant l'homologie de Leibniz $\mathrm{HL}_*(A\otimes\mathfrak{g}, M\otimes\mathfrak{g})$ à l'homologie de Hochschild $\mathrm{H}_*(A,M)$ où M est un A-bimodule symétrique. En utilisant la décompositon de l'homologie de Hochschild en parties négative et positive, puis par passage aux coinvariants, nous obtenons en bas degrés :

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est parfaite et si le $\mathfrak{g}$-module $A\otimes\mathfrak{g}$ est complètement réductible, il existe un isomorphisme

$$\mathrm{HL}_2(A\otimes\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}_1(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \;\cong\; \Omega^1_{A|\mathbf{K}}\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g}$$

et un épimorphisme

$$\mathrm{HL}_3(A\otimes\mathfrak{g}) \to \mathrm{HH}_2^-(A)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \quad\oplus\quad \mathrm{HH}_2^+(A)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_\mathfrak{g}.$$

Ensuite nous comparons nos résultats avec ceux du cas classique.

1.— Définitions et notations

Nous travaillons sur un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, A une algèbre associative commutative et unitaire, et M un A-bimodule symétrique.

Posons $\mathfrak{g}_A := A \otimes \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_M := M \otimes \mathfrak{g}$. Alors les opérations suivantes

$$[-,-] : \mathfrak{g}_A \times \mathfrak{g}_A \to \mathfrak{g}_A \ , \quad [a \otimes x, a' \otimes x'] := aa' \otimes [x,x']$$
$$[-,-] : \mathfrak{g}_M \times \mathfrak{g}_A \to \mathfrak{g}_M \ , \quad [m \otimes x, a \otimes x'] := m.a \otimes [x,x']$$

où $a, a' \in A$, $x, x' \in \mathfrak{g}$ et $m \in M$, confèrent à l'espace $\mathfrak{g}_A$ une structure d'algèbre de Lie, puis à l'espace $\mathfrak{g}_M$ une structure de $\mathfrak{g}_A$-module à droite.

On peut donc considérer l'homologie de Leibniz $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)$ de $\mathfrak{g}_A$ à coefficients dans $\mathfrak{g}_M$. Nous noterons ax (*resp.* mx) l'élément $a \otimes x$ (*resp.* $m \otimes x$) de $\mathfrak{g}_A$ (*resp.* $\mathfrak{g}_M$), et $(mx, a_1x_1, \cdots, a_nx_n)$ l'élément $mx \otimes a_1x_1 \otimes \cdots \otimes a_nx_n$ de $T^n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)$.

D'autre part, soit $[\mathrm{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{U}(\mathfrak{g})]$ le sous-espace de l'enveloppe universelle $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ engendré par les commutateurs $[a,b] = ab - ba$ où a et b sont dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. On note $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab} := \mathrm{U}(\mathfrak{g})/[\mathrm{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{U}(\mathfrak{g})]$ l'espace vectoriel quotient. On observera que tout produit dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est invariant par permutation circulaire des facteurs dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$.

Rappelons aussi que l'homologie de Hochschild $\mathrm{H}_*(A, M)$ est l'homologie du complexe $(C_*(A,M) := M \otimes A^{\otimes *},\ b)$ où la différentielle $b : C_n(A,M) \to C_{n-1}(A,M)$ opère par la formule

$$b(m, a_1, \cdots, a_n) := (ma_1, a_2, \cdots, a_n) + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p (m, a_1, \cdots, a_{p-1}, a_p a_{p+1}, \cdots, a_n) \ + \ (-1)^n (a_n m, a_1, \cdots, a_{n-1}).$$

2.— Un morphisme de complexes

Soit $\lambda_n : \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \to C_n(A,M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ l'opérateur défini par la formule

$$\lambda_n(mx, a_1x_1, \cdots, a_nx_n) := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(m, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n)}) \otimes x x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

où $\mathrm{sgn}(\sigma)$ désigne la *signature* de l'élément σ de S_n, le groupe des permutations sur $\{1, 2, \cdots, n\}$. En munissant $C_*(A,M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ de la différentielle $b \otimes \mathrm{id}$, nous obtenons

Proposition 1. — *L'opérateur λ_* est un morphisme de complexes.*

Démonstration. — Il s'agit de prouver la commutativité du carré suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{T}^n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) & \xrightarrow{d} & \mathrm{T}^{n-1}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_{n-1}} \\
C_n(A,M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab} & \xrightarrow{b \otimes \mathrm{id}} & C_{n-1}(A,M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}
\end{array}$$

A cet effet, nous avons $(b\otimes \mathrm{id})\circ\lambda(mx, a_1x_1, \cdots, a_nx_n) = X_1 + X_2 + Y$ où

$$X_1 := \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(ma_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \cdots, a_{\sigma(n)})\otimes xx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$
$$X_2 := (-1)^n \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(a_{\sigma(n)}m, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n-1)})\otimes xx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$
$$Y := \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} (-1)^p\mathrm{sgn}(\sigma)(m, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)}a_{\sigma(p+1)}, \cdots, a_{\sigma(n)})\otimes xx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

et $\lambda\circ d(mx, a_1x_1, \cdots, a_nx_n) = X' + Y'$ où

$$X' := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\lambda(ma_j[x, x_j], a_1x_1, \cdots, \widehat{a_jx_j}, \cdots, a_nx_n)$$
$$Y' := \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{j+1}\lambda(mx, a_1x_1, \cdots, a_ia_j[x_i, x_j], \cdots, \widehat{a_jx_j}, \cdots, a_nx_n).$$

Il suffit donc de montrer que $X_1 + X_2 = X'$ et $Y = Y'$.

En notant τ la permutation $(1\ 2\cdots n)$ de S_n et en remarquant que l'application $\sigma\mapsto\sigma\circ\tau$ est une bijection sur S_n, nous obtenons

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma\tau)(ma_{\sigma\tau(n)}, a_{\sigma\tau(1)}, \cdots, a_{\sigma\tau(n-1)})\otimes xx_{\sigma\tau(n)}x_{\sigma\tau(1)}\cdots x_{\sigma\tau(n-1)} \\ &= \mathrm{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(ma_{\sigma(n)}, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n-1)})\otimes xx_{\sigma(n)}x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n-1)}. \end{aligned}$$

Comme le A-bimodule M est symétrique et que tout produit dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ est invariant par permutation circulaire des facteurs, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(ma_{\sigma(n)}, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n-1)})\otimes \\ &\qquad\qquad (xx_{\sigma(n)}x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n-1)} - xx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}) \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(ma_{\sigma(n)}, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n-1)})\otimes [x, x_{\sigma(n)}]x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n-1)}. \end{aligned}$$

D'autre part, notons τ_j la permutation $(j\ j+1\cdots n)$ de S_n et identifions S_{n-1} à $\mathrm{S}_n^n := \{\ \sigma\in \mathrm{S}_n : \sigma(n) = n\ \}$. Alors nous avons

$$X' = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\lambda(ma_{\tau_j(n)}[x, x_{\tau_j(n)}], a_{\tau_j(1)}x_{\tau_j(1)}, \cdots, a_{\tau_j(n-1)}x_{\tau_j(n-1)})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{n-1}} (-1)^{j+1} \mathrm{sgn}(\sigma)(ma_{\tau_j\sigma(n)}, a_{\tau_j\sigma(1)}, \cdots, a_{\tau_j\sigma(n-1)}) \otimes [x, x_{\tau_j\sigma(n)}] x_{\tau_j\sigma(1)} \cdots x_{\tau_j\sigma(n-1)}$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ \sigma \in \tau_j \mathrm{S}_{n-1}}} (-1)^{j+1} \mathrm{sgn}(\sigma\tau_j)(ma_{\sigma(n)}, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n-1)}) \otimes [x, x_{\sigma(n)}] x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n-1)}.$$

Et puisqu'il est clair que $\mathrm{S}_n = \coprod_{1 \le j \le n} \{ \tau_j \circ \sigma : \sigma \in \mathrm{S}_n^n \equiv \mathrm{S}_{n-1} \}$, il vient

$$X' = (-1)^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(ma_{\sigma(n)}, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n-1)}) \otimes [x, x_{\sigma(n)}] x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n-1)}.$$

Ainsi, nous avons montré que $X' = X_1 + X_2$.

Pour l'égalité $Y = Y'$, posons pour $p \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$\mathrm{S}_n^{p+} := \{ \sigma \in \mathrm{S}_n : \sigma(p) < \sigma(p+1) \} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n^{p-} := \{ \sigma \in \mathrm{S}_n : \sigma(p) > \sigma(p+1) \}.$$

Alors $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_n^{p+} \coprod \mathrm{S}_n^{p-}$ et l'application $\sigma \mapsto (\sigma(p)\ \sigma(p+1)) \circ \sigma$ est une bijection de S_n^{p+} sur S_n^{p-}. La multiplication dans A étant commutative, il vient

$$Y = \sum_{1 \le p \le n} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n^{p+}} (-1)^p \mathrm{sgn}(\sigma) Y_p^\sigma \quad \text{où}$$

$$Y_p^\sigma = (m, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p-1)}, a_{\sigma(p)} a_{\sigma(p+1)}, a_{\sigma(p+2)}, \cdots, a_{\sigma(n)}) \otimes x x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p-1)} (x_{\sigma(p)} x_{\sigma(p+1)} - x_{\sigma(p+1)} x_{\sigma(p)}) x_{\sigma(p+2)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

$$= (m, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p-1)}, a_{\sigma(p)} a_{\sigma(p+1)}, a_{\sigma(p+2)}, \cdots, a_{\sigma(n)}) \otimes x x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p-1)} [x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}] x_{\sigma(p+2)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Comme $\mathrm{S}_n^{p+} = \coprod_{1 \le i < j \le n} \mathrm{S}_{n,p}^{i<j}$ où $\mathrm{S}_{n,p}^{i<j} := \{ \sigma \in \mathrm{S}_n : \sigma(p) = i < j = \sigma(p+1) \}$, on a

$$Y = \sum_{\substack{1 \le i < j \le n \\ 1 \le p \le n-1}} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{n,p}^{i<j}} (-1)^p \mathrm{sgn}(\sigma)(m, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p-1)}, a_i a_j, a_{\sigma(p+2)}, \cdots a_{\sigma(n)}) \otimes x x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p-1)} [x_i, x_j] x_{\sigma(p+2)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Il reste à trouver une expression semblable pour $Y' = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{j+1} Y'_{i,j}$ où

$$Y'_{i,j} := \lambda(mx, a_1 x_1, \cdots, a_{i-1} x_{i-1}, a_i a_j [x_i, x_j], a_{i+1} x_{i+1}, \cdots, \widehat{a_j x_j}, \cdots, a_n x_n).$$

En remarquant que $\mathrm{S}_{n-1} = \coprod_{1\leq p\leq n-1} \{\sigma \in \mathrm{S}_{n-1} : \sigma(p) = i\}$, puis que l'application $\sigma \mapsto \tau_j\sigma\tau_{p+1}^{-1}$ réalise une bijection de $\{\sigma \in \mathrm{S}_{n-1} : \sigma(p) = i\}$ sur $\mathrm{S}_{n,p}^{i<j}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
Y'_{i,j} &= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{S}_{n-1}\\ \sigma(p)=i}} \mathrm{sgn}(\sigma)(m, a_{\tau_j\sigma(1)}, \cdots, a_{\tau_j\sigma(p-1)}, a_ia_j, a_{\tau_j\sigma(p+1)}, \cdots, a_{\tau_j\sigma(n-1)}) \\
&\qquad \otimes xx_{\tau_j\sigma(1)}\cdots x_{\tau_j\sigma(p-1)}x_ix_jx_{\tau_j\sigma(p+1)}\cdots x_{\tau_j\sigma(n-1)} \\
&= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{n,p}^{i<j}} (-1)^{p+j+1}\mathrm{sgn}(\sigma)(m, a_{\sigma\tau_{p+1}(1)}, \cdots, a_ia_j, \cdots, a_{\sigma\tau_{p+1}(n-1)}) \\
&\qquad \otimes xx_{\sigma\tau_{p+1}(1)}\cdots [x_i, x_j]\cdots x_{\sigma\tau_{p+1}(n-1)}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
Y' = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ 1\leq p\leq n-1}} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{n,p}^{i<j}} (-1)^p\mathrm{sgn}(\sigma)(m, a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p-1)}, a_ia_j, a_{\sigma(p+2)}, \cdots a_{\sigma(n)}) \\
\otimes xx_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(p-1)}[x_i, x_j]x_{\sigma(p+2)}\cdots x_{\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $Y = Y'$. Ce qui achève de prouver la Proposition. ∎

3.— Lien avec les formes différentielles

Rappelons que pour toute K-algèbre A (commutative), $\Omega^n_{A|\mathbf{K}}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ puissance extérieure $\Lambda^n_A(\Omega^1_{A|\mathbf{K}})$ sur A du module de Kähler $\Omega^1_{A|\mathbf{K}}$: en tant que A-module $\Omega^n_{A|\mathbf{K}}$ est engendré par les symboles $da_1\cdots da_n := da_1\wedge\cdots\wedge da_n$ assujettis par distributivité à la relation : $d(aa') = ada' + a'da$.

Soit $\phi_n : T^n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \to (M\otimes_A\Omega^n_{A|\mathbf{K}})\otimes_k(\mathrm{S}^{n+1}\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ l'application définie par

$$\phi_n(mx, a_1x_1, \cdots, a_nx_n) := (m\otimes_A da_1\cdots da_n)\otimes(xx_1\cdots x_n)$$

où $(\mathrm{S}^n\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ désigne l'espace des coinvariants de la $n^{\text{ième}}$ puissance symétrique $\mathrm{S}^n\mathfrak{g}$ sous l'action adjointe diagonale de $\mathfrak{g}$ donnée par la formule

$$[x_1\cdots x_n, x] := \sum_{i=1}^n x_1\cdots x_{i-1}[x_i, x]x_{i+1}\cdots x_n \ .$$

Nous allons montrer que

Lemme 2. — *Pour tout élément $\zeta = (mx, a_1x_1, \cdots, a_nx_n)$ de $T^n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)$, on a*

$$\phi_{n-1}\circ d(\zeta) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}(ma_i\otimes_A da_1\cdots\widehat{da_i}\cdots da_n)\otimes[xx_1\cdots\widehat{x_i}\cdots x_n, x_i].$$

Et comme $[xx_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n, x_i] \equiv 0$ dans $(\mathrm{S}^n\mathfrak{g})_\mathfrak{g}$, il en résultera la

Proposition 3. — *Pour tout entier $n \geq 0$, on a un morphisme bien défini*

$$\phi_n : \mathrm{HL}_n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \to (M \otimes_A \Omega^n_{A|\mathbf{K}}) \otimes_k (\mathrm{S}^{n+1}\mathfrak{g})_\mathfrak{g}.$$

Preuve du Lemme 2. — Soit $\zeta = (mx, a_1x_1, \cdots, a_nx_n) \in \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)$

$$\phi \circ d(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(ma_i \otimes_A da_1 \cdots \widehat{da_i} \cdots da_n) \otimes ([x, x_i]x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n) +$$
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+1}(m \otimes_A da_1 \cdots d(a_ia_j) \cdots \widehat{da_j} \cdots da_n) \otimes (xx_1 \cdots [x_i, x_j] \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n).$$

Or pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq n$, nous avons l'égalité

$$da_1 \cdots d(a_ia_j) \cdots \widehat{da_j} \cdots da_n = a_j da_1 \cdots \widehat{da_j} \cdots da_n + (-1)^{j-i+1} a_i da_1 \cdots \widehat{da_i} \cdots da_n$$

qui, injectée dans la dernière sommation ci-dessus, permet d'obtenir le Lemme 2 ■

Remarque.— Le morphisme ϕ s'interprête aussi comme la composée $(\pi \otimes \eta^{-1}) \circ \lambda$ où η est l'isomorphisme de *Poincaré-Birkhoff-Witt* (P.B.W. rappelé ci-après) et π , l'application canonique (*cf.* [Lo1])

$$\pi_n : H_n(A, M) \to M \otimes_A \Omega^n_{A|\mathbf{K}}, (m, a_1, \cdots, a_n) \mapsto m \otimes_A da_1 \cdots da_n.$$

4.— Bas degrés

Nous nous proposons de regarder, en bas degrés, ce que devient le morphisme λ sous la décomposition de l'homologie de Hochschild en parties positive et négative. Comme le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, on sait qu'il existe

- un isomorphisme (non normalisé ici) de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels $\eta : (\mathrm{S}\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ (P.B.W.) donné sur l'élément homogène $x_0 \cdots x_n$ de $(\mathrm{S}\mathfrak{g})_\mathfrak{g}$ par la formule

$$\eta(x_0 \cdots x_n) := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \ ;$$

- une décomposition du complexe de Hochschild en somme directe de sous-complexes propres pour l'involution u définie par

$$u(m, a_1, \cdots, a_n) := (-1)^{n(n+1)/2}(m, a_n, \cdots, a_2, a_1) \ .$$

On rappelle que les opérateurs b et u commutent et que l'on a

$$C_n(A,M) = C_n^-(A,M) \oplus C_n^+(A,M) \text{ où } C_n^\pm(A,M) = \{z \in C_n(A,M) : u(z) = \pm z\},$$

$$(m, a_1, \cdots, a_n) = (m, a_1, \cdots, a_n)^- + (m, a_1, \cdots, a_n)^+ \quad \text{avec}$$

$$(m, a_1, \cdots, a_n)^\pm := \frac{1}{2}\Big((m, a_1, \cdots, a_n) \pm u(m, a_1, \cdots, a_n)\Big),$$

les homologies correspondantes étant notées $\mathrm{H}_n^-(A,M)$ et $\mathrm{H}_n^+(A,M)$.

– Pour $n = 1$, on a $u(m,a) = -(m,a)$ donc $C_1^-(A,M) = C_1(A,M) = M \otimes A$. Et puisque $\lambda_1(mx, ay) = (m,a) \otimes xy = (m,a) \otimes \eta(xy)$, on en déduit une application

$$\lambda_1' : \mathrm{T}^1(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \to C_1^-(A,M) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \ , \ (mx, ay) \mapsto (m,a) \otimes (xy).$$

– Pour $n = 2$, on a $u(m, a_1, a_2) = -(m, a_2, a_1)$ et donc

$$\begin{aligned} \lambda_2(mx, a_1x_1, a_2x_2) &= (m, a_1, a_2) \otimes xx_1x_2 - (m, a_2, a_1) \otimes xx_2x_1 \\ &= (m, a_1, a_2)^- \otimes x(x_1x_2 - x_2x_1) + (m, a_1, a_2)^+ \otimes x(x_1x_2 + x_2x_1) \\ &= (m, a_1, a_2)^- \otimes \eta(x[x_1, x_2]) + (m, a_1, a_2)^+ \otimes \eta(xx_1x_2), \end{aligned}$$

d'où une application

$$\begin{aligned} \lambda_2' : \mathrm{T}^2(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \ &\to \ C_2^-(A,M) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \ \oplus \ C_2^+(A,M) \otimes (\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \\ (mx, a_1x_1, a_2x_2) \ &\mapsto \ (m, a_1, a_2)^- \otimes x[x_1, x_2] + (m, a_1, a_2)^+ \otimes xx_1x_2. \end{aligned}$$

– Pour $n = 3$, on a $u(m, a_1, a_2, a_3) = (m, a_3, a_2, a_1)$ puis, en décomposant $\lambda_3(mx, a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3)$ en parties positive et négative, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_3(mx, a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3) \ = \ & \quad (m, a_1, a_2, a_3)^- \otimes X_0 + \ (m, a_1, a_2, a_3)^+ \otimes Y_0 \\ & + \ (m, a_2, a_3, a_1)^- \otimes X_1 + \ (m, a_2, a_3, a_1)^+ \otimes Y_1 \\ & + \ (m, a_3, a_1, a_2)^- \otimes X_2 + \ (m, a_3, a_1, a_2)^+ \otimes Y_2 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$X_0 := xx_1x_2x_3 + xx_3x_2x_1, \ X_1 := xx_2x_3x_1 + xx_1x_3x_2, \ X_2 := xx_3x_1x_2 + xx_2x_1x_3$$
$$Y_0 := xx_1x_2x_3 - xx_3x_2x_1, \ Y_1 := xx_2x_3x_1 - xx_1x_3x_2, \ Y_2 := xx_3x_1x_2 - xx_2x_1x_3.$$

On vérifie que dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ on a, pour tout $i = 0, 1, 2$,

$$X_i = \frac{1}{3}\eta\Big(xx_1x_2x_3 \ + \ [x, x_{\tau^i(1)}][x_{\tau^i(2)}, x_{\tau^i(3)}] \ + \ [x_{\tau^i(3)}, x][x_{\tau^i(1)}, x_{\tau^i(2)}]\Big)$$

$$\text{et} \qquad Y_i = \frac{1}{2}\eta\Big(xx_{\tau^i(1)}[x_{\tau^i(2)}, x_{\tau^i(3)}] \ + \ [x, x_{\tau^i(1)}]x_{\tau^i(2)}x_{\tau^i(3)}\Big)$$

où τ désigne la permutation (123) de S_3 et $\tau^i := \tau \circ \cdots \circ \tau$ (i fois).

Il en résulte donc, après élimination du terme $\eta(xx_1x_2x_3)$ dans les X_i, une application

$$\lambda_3' : \mathrm{T}^3(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M) \to C_3^-(A,M) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \;\oplus\; C_3^+(A,M) \otimes (\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}, \text{ donnée par}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_3'(mx, a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3)\\
= \; & \frac{1}{3}\sum_{\sigma \in \mathbf{Z}_3} (m, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})^- \otimes \Big([x, x_{\sigma(1)}][x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] \;+\; [x_{\sigma(3)}, x][x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \Big)\\
& + \frac{1}{2}\sum_{\sigma \in \mathbf{Z}_3} (m, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})^+ \otimes \Big(x x_{\sigma(1)}[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] \;+\; [x, x_{\sigma(1)}] x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \Big)
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Z}_3$ désigne l'ensemble $\{ \ \mathrm{id}, \tau, \ \tau^2 \ \}$.

Dans $C_3(A,M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$, les valeurs de λ_3 et λ_3', sur $\zeta = (mx, a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3)$, diffèrent exactement de la quantité

$$(\lambda_3 - \lambda_3')(\zeta) = \frac{1}{3}\Big(\sum_{\sigma \in \mathbf{Z}_3} (m, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \Big)^- \otimes \eta(xx_1x_2x_3).$$

Cependant, puisque les opérateurs b et u commutent, on a

$$(b \otimes \mathrm{id}) \circ (\lambda_3 - \lambda_3')(\zeta) = \frac{1}{3}\Big(\sum_{\sigma \in \mathbf{Z}_3} b(m, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \Big)^- \otimes \eta(xx_1x_2x_3) \ ,$$

et après quelques simplifications,

$$= \frac{2}{3}\Big(\sum_{\sigma \in \mathbf{Z}_3} (m, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)})^+ \Big)^- \otimes \eta(xx_1x_2x_3) \ = 0.$$

Par conséquent on a $(b \otimes \mathrm{id})\lambda_3 = (b \otimes \mathrm{id})\lambda_3'$. Comme λ_2 et λ_2' (*resp.* λ_1 et λ_1') ont mêmes valeurs dans $C_2(A,M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ (*resp.* $C_1(A,M) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g})_{ab}$), il vient

$$(b \otimes \mathrm{id})\lambda_3' = \lambda_2' d \qquad \text{et} \qquad (b \otimes \mathrm{id})\lambda_2' = \lambda_1' d.$$

Nous en déduisons que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{T}^3(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M) & \xrightarrow{\lambda_3'} & C_3^-(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g}\oplus C_3^+(A,M)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \\
d\big\downarrow & & \big\downarrow b\otimes\mathrm{id} \\
\mathrm{T}^2(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M) & \xrightarrow{\lambda_2'} & C_2^-(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g}\oplus C_2^+(A,M)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \\
d\big\downarrow & & \big\downarrow b\otimes\mathrm{id} \\
\mathfrak{g}_M\otimes\mathfrak{g}_A & \xrightarrow{\lambda_1'} & C_1(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \\
d\big\downarrow & & \big\downarrow b\otimes\mathrm{id} \\
\mathfrak{g}_M & & 0
\end{array}$$

Il lui correspond donc en homologie des morphismes bien définis

$$\begin{aligned}
\lambda_1' &: \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M) \longrightarrow \mathrm{H}_1^-(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} = \mathrm{H}_1(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g}\\
\lambda_2' &: \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M) \longrightarrow \mathrm{H}_2^-(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \oplus \mathrm{H}_2^+(A,M)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_\mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

5.— Passage aux coinvariants

Nous nous intéressons à présent au complexe $(\mathrm{T}^n(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M)_\mathfrak{g},\ d)$ des coinvariants pour l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ (identifiée à la sous-algèbre $1\otimes\mathfrak{g}$ de $A\otimes\mathfrak{g}$) définie par la formule

$$[(mx_0,a_1x_1\cdots,a_nx_n),x] := \sum_{i=0}^{n}(mx_0,\cdots,a_{i-1}x_{i-1},a_i[x_i,x],a_{i+1}x_{i+1}\cdots,a_nx_n).$$

On vérifie aisément que $\lambda_n'([(mx_0,a_1x_1\cdots,a_nx_n),x])\equiv 0$, de sorte que λ_n' se factorise en un morphisme bien défini sur $\mathrm{T}^n(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M)_\mathfrak{g}$ où $n\le 3$. Et comme le bord d est compatible avec l'action sus-décrite de $\mathfrak{g}$, le diagramme précédent reste commutatif par passage aux coinvariants. Dans ces conditions nous avons

Proposition 4. — *Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est parfaite, il existe un isomorphisme*

$$\widetilde{\lambda_1'} : \mathrm{H}_1(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M)_\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g}$$

et un épimorphisme

$$\widetilde{\lambda_2'} : \mathrm{H}_2(\mathrm{T}^*(\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_M)_\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_2^-(A,M)\otimes(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \oplus \mathrm{H}_2^+(A,M)\otimes(\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_\mathfrak{g}.$$

Démonstration. — Il s'agit essentiellement de montrer que λ_1' est bijectif et λ_2' surjectif. A cet effet, nous avons

LEMME 5. — *Si $\mathfrak{g}$ est parfaite alors $mx \otimes ay \equiv my \otimes ax$ dans $(\mathfrak{g}_M \otimes \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$.*

Nous en déduisons que l'application

$$\mu_1 : C_1(A, M) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \to (\mathfrak{g}_M \otimes \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} \ , \quad (m, a) \otimes xy \mapsto mx \otimes ay$$

est bien définie et réciproque de λ_1' ; d'où la bijectivité de λ_1'.

Par ailleurs, il est clair que les applications suivantes sont bien définies :

$$\mu_2^+ : C_2^+(A, M) \otimes (\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathrm{T}^2(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}$$

donnée sur l'élément générique $\xi = (m, a_1, a_2) \otimes (x_0 x_1 x_2)$ par

$$\mu_2^+(\xi) := \frac{1}{12} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_3'} \Big((mx_{\sigma(0)}, a_1 x_{\sigma(1)}, a_2 x_{\sigma(2)}) - (mx_{\sigma(0)}, a_2 x_{\sigma(1)}, a_1 x_{\sigma(2)}) \Big)$$

et

$$\mu_2^- : C_2^-(A, M) \otimes (\Lambda^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \to \mathrm{T}^2(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}$$

donnée sur l'élément générique $\xi' = (m, a_1, a_2) \otimes (x_0 \wedge x_1 \wedge x_2)$ par

$$\mu_2^-(\xi') := \frac{1}{12} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_3'} \mathrm{sgn}(\sigma) \Big((mx_{\sigma(0)}, a_1 x_{\sigma(1)}, a_2 x_{\sigma(2)}) + (mx_{\sigma(0)}, a_2 x_{\sigma(1)}, a_1 x_{\sigma(2)}) \Big)$$

où S_3' est le groupe des permutations sur $\{ \ 0, 1, 2 \ \}$. D'autre part, on a le

LEMME 6. — *Si $\mathfrak{g}$ est parfaite alors l'application $x \wedge y \wedge z \mapsto x[y, z]$ est un isomorphisme de $(\Lambda^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ sur $(\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$.*

On peut donc voir μ_2^- comme une application bien définie de $C_2^-(A, M) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{T}^2(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}$.

On vérifie que l'application $\mu_2 := \mu_2^- \oplus \mu_2^+$ est une section de λ_2' (*i.e.*, $\lambda_2' \circ \mu_2 = id$), ce qui assure la surjectivité de λ_2'. D'où la Proposition 4. ■

Preuve du Lemme 5. — Comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est parfaite, il suffit de montrer que $m[x, y] \otimes az \equiv mz \otimes a[x, y]$ dans $(\mathfrak{g}_M \otimes \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$. En effet, compte tenu de la définition de l'action de $\mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned} m[x, y] \otimes az &= [mx \otimes az, y] + mx \otimes [ay, z] \equiv [mx \otimes ay, z] + [mz, x] \otimes ay \\ &\equiv [mz \otimes ay, x] + mz \otimes [ax, y] \equiv mz \otimes a[x, y], \end{aligned}$$

ce qui prouve le Lemme 5 ■

Preuve du Lemme 6. — De même, comme $\mathfrak{g}$ est parfaite, il suffit de montrer les relations suivantes

$$\begin{array}{rl} i) & x[y,z] \equiv [x,y]z \equiv [z,x]y \quad \text{dans} \quad (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad \text{et} \\ ii) & [x,x'] \wedge y \wedge y' \equiv x \wedge x' \wedge [y,y'] \quad \text{dans} \quad (\Lambda^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}. \end{array}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [xz,y] = [x,y]z + x[z,y]\ ,\ \text{donc}\ x[y,z] \equiv [x,y]z\ ,\ \text{d'où l'assertion i).} \\ 0 &\equiv [x' \wedge y \wedge y', x] - [x \wedge y \wedge y', x'] - [x \wedge x' \wedge y', y] + [x \wedge x' \wedge y, y'] \\ &\equiv 2x \wedge x' \wedge [y,y'] - 2[x,x'] \wedge y \wedge y'\ ,\ \text{d'où l'assertion ii).} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque.— On ne peut espérer l'injectivité de λ_2' sur $\mathrm{T}^2(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}$ puisque

$$\lambda_2'(my \otimes az \otimes bx) = \lambda_2'(mx \otimes ay \otimes bz) = -\lambda_2'(mx \otimes bz \otimes ay).$$

Toutefois, on vérifie aisément que $\mu_2 \circ \lambda_2' = \mathrm{id}$ sur le quotient de $\mathrm{T}^2(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_M)_{\mathfrak{g}}$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $mx \otimes ay \otimes bz - my \otimes az \otimes bx$ ou $mx \otimes ay \otimes bz + mx \otimes bz \otimes ay$ (ce sont des 2-cycles).

On rappelle que, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{l}$, on a un isomorphisme (*cf.* 0.3.6)

$$\mathrm{HL}_n(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \cong \mathrm{HL}_{n+1}(\mathfrak{l})\ , \quad \forall\, n \geq 0.$$

Par ailleurs on sait que, si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$ et V un $\mathfrak{l}$-module, la projection canonique $\mathrm{T}^*(\mathfrak{l}, V) \to \mathrm{T}^*(\mathfrak{l}, V)_{\mathfrak{h}}$ est un quasi-isomorphisme lorsque les $\mathfrak{h}$-modules $\mathfrak{l}$ et V sont complètement réductibles (*cf.* [Lo1, 10.6.6]). Nous en déduisons donc le

Corollaire 7. — *Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est parfaite et si le $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}_A$ est complètement réductible, il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{HL}_2(A \otimes \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_1(A) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \cong \Omega^1_{A|\mathbf{K}} \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$$

et un épimorphisme

$$\mathrm{HL}_3(A \otimes \mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_2^-(A) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \quad \oplus \quad \mathrm{H}_2^+(A) \otimes (\mathrm{S}^3\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}.$$

Rappelons aussi que pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{l}$ et tout $\mathfrak{l}$-module V, on a

$$\mathrm{HL}_0(\mathfrak{l}, V) = V/[V, \mathfrak{l}] = V_{\mathfrak{l}}.$$

On en déduit que, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et toute algèbre commutative A sur $\mathbf{K}$,

$$\mathrm{HL}_0(\mathfrak{g}_A) = \mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mathrm{HL}_1(\mathfrak{g}_A) \cong \mathfrak{g}_A/[\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A] \cong A \otimes (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]).$$

6.— Comparaison avec le cas classique

On sait que la projection canonique $\mathfrak{l}^{\otimes n} \to \Lambda^n \mathfrak{l}$ induit un morphisme naturel $can_* : \mathrm{HL}_*(\mathfrak{l}) \to \mathrm{H}_*(\mathfrak{l})$ (où $\mathrm{H}_*(\mathfrak{l})$ désigne l'homologie classique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$), qui est un isomorphisme en degrés 0 et 1, et surjectif en degré 2.

En étudiant le complexe des coinvariants $((\Lambda^* \mathfrak{g}_A)_\mathfrak{g}, d)$, A. Haddi obtient (*cf.* [H2]), sous les hypothèses du Corollaire 4.5, les isomorphismes :

$$\mathrm{H}_p(\mathfrak{g}_A) \cong \mathrm{HC}^-_{p-1}(A) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \quad \oplus \quad \mathrm{HC}^+_{p-1}(A) \otimes (\mathrm{S}^p\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \quad (p = 2, 3)$$

où $\mathrm{HC}^\pm_*(A)$ désignent les parties positive et négative de l'homologie cyclique de A. Via ces isomorphismes et ceux du Corollaire 4.5, l'application *can* s'identifie à l'application $I \otimes \mathrm{id}$ (où $I : \mathrm{HH}_n(A) \to \mathrm{HC}_n(A)$ est le morphisme de la longue suite exacte de Connes) ; en d'autres termes, on a un diagramme commutatif $(p = 2, 3)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{HL}_p(\mathfrak{g}_A) & \longrightarrow & \mathrm{HH}^-_{p-1}(A) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \quad \oplus \quad \mathrm{HH}^+_{p-1}(A) \otimes (\mathrm{S}^p\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \\
{\scriptstyle can}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle I \otimes \mathrm{id}} \\
\mathrm{H}_p(\mathfrak{g}_A) & \longrightarrow & \mathrm{HC}^-_{p-1}(A) \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \quad \oplus \quad \mathrm{HC}^+_{p-1}(A) \otimes (\mathrm{S}^p\mathfrak{g})_\mathfrak{g} .
\end{array}$$

En particulier, comme $\mathrm{HC}^-_1(A) \cong \Omega^1_{A|\mathbf{K}}/dA$ et $\mathrm{HC}^+_1(A) \cong 0$, la surjection $\mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}_A) \to \mathrm{H}_2(\mathfrak{g}_A)$ n'est autre que la flèche naturelle

$$\Omega^1_{A|\mathbf{K}} \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} \to \Omega^1_{A|\mathbf{K}}/dA \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} .$$

Par ailleurs, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_A$ étant parfaite, elle admet une extension centrale universelle $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}_A)$ dans la catégorie des algèbres de Leibniz, telle que $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}_A)_{Lie}$ soit l'extension centrale universelle dans la catégorie des algèbres de Lie. En vertu de ce qui précède et du Corollaire I.7, on en déduit que

$$\mathrm{HL}_2(\mathfrak{u}(\mathfrak{g}_A)_{Lie}) \cong \ker(can_2 : \mathrm{HL}_2(\mathfrak{g}_A) \to \mathrm{H}_2(\mathfrak{g}_A)) \cong A \otimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{g})_\mathfrak{g} .$$

IV.— COHOMOLOGIE DE L'ALGÈBRE DE LEIBNIZ $\mathcal{L}(S^2)$

Introduction.— Dans ce chapitre nous supposons que K est un corps. Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(S^2)$ l'algèbre de Leibniz de dimension 2, ayant pour base $\{X, Y\}$, dont le crochet est défini par les relations

$$[X, X] = Y \ , \quad [X, Y] = [Y, X] = [Y, Y] = 0 \ .$$

Nous nous proposons de montrer que les groupes de (co)homologie à coefficients triviaux de l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}(S^2)$ sont donnés par

$$\mathrm{HL}_n(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathrm{K} \ , \quad \mathrm{HL}^n(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathrm{K} \ , \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Comme K est un corps, nous utiliserons la caractérisation des groupes de (co)homologie de Leibniz en termes de foncteurs dérivés (*cf.* 0.3.3). Nous construisons une résolution libre «assez simple» du $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$-module à droite $\mathrm{U}(\mathcal{L}_{Lie})$ au-dessus de l'algèbre associative $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$. A cet effet, nous commençons par donner une description de l'algèbre associative $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$. Ensuite nous explicitons les générateurs des groupes de cohomologie $\mathrm{HL}^n(\mathcal{L})$ et nous donnons une présentation de l'espace $\widetilde{\mathrm{HL}^*}(\mathcal{L}) := \bigoplus_{n \geq 1} \mathrm{HL}^n(\mathcal{L})$ en tant qu'algèbre de Leibniz duale .

1.— Description de l'enveloppe universelle

Rappelons que *l'enveloppe universelle* $\mathrm{UL}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est le quotient de l'algèbre tensorielle $\mathrm{T}(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)$ (où $\mathfrak{g}^l$ et $\mathfrak{g}^r$ sont des copies de $\mathfrak{g}$ dont les éléments sont notés respectivement l_x et r_x , $x \in \mathfrak{g}$) par l'idéal bilatère déterminé par les relations suivantes

$$r_{[x,y]} = r_x r_y - r_y r_x, \quad l_{[x,y]} = l_x r_y - r_y l_x, \quad (l_x + r_x) l_y = 0, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

Soit $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie})$ l'enveloppe universelle classique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{Lie}$. Il existe un isomorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie})$-modules à gauche (*cf.* [L-P, Proposition 2.4])

$$\eta : \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie}) \quad \oplus \quad \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie}) \otimes \mathfrak{g} \ \xrightarrow{\sim}\ \mathrm{UL}(\mathfrak{g}) \ , \quad \bar{x} \mapsto r_x, \ 1 \otimes y \mapsto l_y$$

au moyen duquel la structure multiplicative sur la somme directe est induite par la multiplication de l'algèbre $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie})$ et par les relations suivantes

(1) $\qquad (1 \otimes x).\bar{y} = \bar{y} \otimes x + 1 \otimes [x, y], \quad (1 \otimes x).(1 \otimes y) = -\bar{x} \otimes y, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$

L'algèbre de Lie associée à $\mathcal{L}$ n'est autre que l'algèbre de Lie abélienne

$$\mathcal{L}_{Lie} \cong \mathcal{L}/\mathrm{K}.Y \cong \mathrm{K}.\overline{X}.$$

Ainsi, son enveloppe universelle est précisément l'algèbre de polynômes $\mathrm{U}(\mathcal{L}) \cong \mathrm{K}[\overline{X}]$. Il en résulte la description suivante de l'enveloppe universelle $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$.

Proposition 1. — *L'enveloppe universelle* $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$ *s'identifie à la somme directe* $\mathrm{K}[\overline{X}] \;\oplus\; \mathrm{K}[\overline{X}] \otimes \mathcal{L}$ *sur laquelle la multiplication est induite par celle de l'algèbre polynômiale* $\mathrm{K}[\overline{X}]$ *et par les relations suivantes* :

$$(1 \otimes X).P(\overline{X}) = P(\overline{X}) \otimes X \;+\; P'(\overline{X}) \otimes Y\ , \quad (1 \otimes Y).P(\overline{X}) = P(\overline{X}) \otimes Y\ ,$$
$$(1 \otimes X).(P(\overline{X}) \otimes X) = -\overline{X}P(\overline{X}) \otimes X\ , \quad (1 \otimes X).(P(\overline{X}) \otimes Y) = -\overline{X}P(\overline{X}) \otimes Y\ ,$$
$$(1 \otimes Y).(P(\overline{X}) \otimes X) = (1 \otimes Y).(P(\overline{X}) \otimes Y) = 0$$

où P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P.

Démonstration. — Il s'agit d'une transcription immédiate des relations (1) de l'isomorphisme de Loday-Pirashvili décrit ci-dessus, à l'exception de la relation

$$(1 \otimes X).P(\overline{X}) = P(\overline{X}) \otimes X \;+\; P'(\overline{X}) \otimes Y$$

qu'il suffit d'établir pour $P = X^n$ où $n \in \mathrm{N}$. Comme elle est évidente pour $n = 0, 1$, supposons par récurrence que

$$(1 \otimes X).\overline{X}^n = \overline{X}^n \otimes X \;+\; n\overline{X}^{n-1} \otimes Y.$$

Puisque l'algèbre $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$ est associative, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
(1 \otimes X).\overline{X}^{n+1} &= ((1 \otimes X).\overline{X}).\overline{X}^n = (\overline{X} \otimes X + 1 \otimes Y).\overline{X}^n \\
&= \overline{X}.((1 \otimes X).\overline{X}^n) \;+\; \overline{X}^n \otimes Y \\
&= \overline{X}.(\overline{X}^n \otimes X + n\overline{X}^{n-1} \otimes Y) \;+\; \overline{X}^n \otimes Y \quad \text{par hypothèse} \\
&= \overline{X}^{n+1} \otimes X \;+\; (n+1)\overline{X}^n \otimes Y,
\end{aligned}$$

ce qui achève de prouver la Proposition 1. ■

Il découle de la description de la structure multiplicative de $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$ la

Proposition 2. — *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{K}[\overline{X}] \otimes \mathcal{L}$ *est l'idéal à droite de* $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$ *engendré par l'élément* $1 \otimes X$ *i.e.,* $\mathrm{K}[\overline{X}] \otimes \mathcal{L} = (1 \otimes X).\mathrm{UL}(\mathcal{L})$.

Démonstration. — En effet, pour tous polynômes Q, R, S, nous avons la relation

$$\begin{aligned}
&(1 \otimes X).(\ R(\overline{X}) + Q(\overline{X}) \otimes X + S(\overline{X}) \otimes Y\ ) \\
&= (\ R(\overline{X}) - \overline{X}Q(\overline{X})\ ) \otimes X \;+\; (\ R'(\overline{X}) - \overline{X}S(\overline{X})\ ) \otimes Y.
\end{aligned} \tag{2}$$

Si $P_1(\overline{X})\otimes X + P_2(\overline{X})\otimes Y$ est un élément quelconque de $\mathbf{K}[\overline{X}]\otimes\mathcal{L}$, posons

$$R(X) = P_2(0)X + P_1(0),\ S(X) = (P_2(0) - P_2(X))/X,\ Q(X) = (R(X) - P_1(X))/X$$

où $P(0)$ désigne le terme constant du polynôme P. Alors, on vérifie que l'on a

$$(1\otimes X).(R(\overline{X}) + Q(\overline{X})\otimes X + S(\overline{X})\otimes Y) = P_1(\overline{X})\otimes X + P_2(\overline{X})\otimes Y,$$

ce qui achève de démontrer la Proposition 2. ■

2.— Construction d'une résolution libre

Rappelons que pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, l'application

$$d_0 : \mathrm{UL}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie})\ ,\quad l_x \mapsto 0\ ,\quad r_x \mapsto \overline{x}$$

est un morphisme surjectif d'algèbres dont le noyau est précisément $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie})\otimes\mathfrak{g}$ (*cf.* [L-P, Proposition 2.5]). On munit ainsi $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{Lie})$ d'une structure de $\mathrm{UL}(\mathfrak{g})$-module à droite au moyen de d_0, lequel devient un morphisme de $\mathrm{UL}(\mathfrak{g})$-modules à droite.

Comme $\mathbf{K}[\overline{X}]\otimes\mathcal{L} = (1\otimes X).\mathrm{UL}(\mathcal{L})$, (Proposition 2), nous obtenons un début de résolution en la suite exacte de $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$-modules à droite

$$\mathrm{UL}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\mu_1} \mathrm{UL}(\mathcal{L}) \xrightarrow{d_0} \mathbf{K}[\overline{X}] \to 0$$

où μ_1 désigne la multiplication à gauche par $1\otimes X$. Par ailleurs, nous avons la

Proposition 3. — *Soient* $K_2 := \overline{X}^2 + \overline{X}\otimes X + 2\otimes Y$ *et* μ_1 *(resp.* μ_2*) la multiplication à gauche par* $1\otimes X$ *(resp.* K_2*). Alors on a*

$$\ker(\mu_1) = K_2.\mathrm{UL}(\mathcal{L}) = K_2.\mathbf{K}[\overline{X}] \quad \textit{et} \quad \ker(\mu_2) = \mathbf{K}[\overline{X}]\otimes\mathcal{L} = (1\otimes X).\mathrm{UL}(\mathcal{L}).$$

Démonstration. — En effet, d'après la relation (2), l'élément générique $R(\overline{X}) + Q(\overline{X})\otimes X + S(\overline{X})\otimes Y$ est dans $\ker(\mu_1)$ si, et seulement si, $R(X) - XQ(X) = 0$ et $R'(X) - XS(X) = 0$. Ce qui n'est possible que si $R(X) = X^2R_1(X)$. Et dans ce cas, nous avons $Q(X) = XR_1(X)$ et $S(X) = 2R_1(X) + XR_1'(X)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} & R(\overline{X}) + Q(\overline{X})\otimes X + S(\overline{X})\otimes Y \\ = \ & \overline{X}^2R_1(\overline{X})\ +\ (\ \overline{X}R_1(\overline{X})\otimes X + \overline{X}R_1'(\overline{X})\otimes Y\ )\ +\ 2R_1(\overline{X})\otimes Y \\ = \ & (\overline{X}^2 + \overline{X}\otimes X + 2\otimes Y).R_1(\overline{X}). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons $\ker(\mu_1) = K_2.\mathbf{K}[\overline{X}]$. Par ailleurs, on vérifie que l'on a

$$\begin{aligned} & K_2.(\ R(\overline{X}) + Q(\overline{X})\otimes X + S(\overline{X})\otimes Y\ ) \\ = \ & \overline{X}^2R(\overline{X})\ -\ \overline{X}R(\overline{X})\otimes X\ +\ (\ \overline{X}R'(\overline{X}) + 2R(\overline{X})\ )\otimes Y. \end{aligned}$$

On en déduit que l'élément $R(\overline{X}) + Q(\overline{X}) \otimes X + S(\overline{X}) \otimes Y$ est dans $\ker(\mu_2)$ si, et seulement si, $R(X) = 0$; c'est-à-dire que $\ker(\mu_2) = \mathrm{K}[\overline{X}] \otimes \mathcal{L} = (1 \otimes X).\mathrm{UL}(\mathcal{L})$. Ainsi nous avons montré que

$$\ker(\mu_1) = K_2.\mathrm{K}[\overline{X}] = K_2.\mathrm{UL}(\mathcal{L}) = \mathrm{Im}(\mu_2) \text{ et } \ker(\mu_2) = (1 \otimes X).\mathrm{UL}(\mathcal{L}) = \mathrm{Im}(\mu_1). \quad \blacksquare$$

Nous en déduisons une longue suite exacte 2-périodique de $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$-modules à droite

$$\cdots \xrightarrow{\mu_1} \mathrm{UL}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\mu_2} \cdots \xrightarrow{\mu_1} \mathrm{UL}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\mu_2} \mathrm{UL}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\mu_1} \mathrm{UL}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\mu_2} \mathrm{UL}(\mathcal{L}) \xrightarrow{d_0} \mathrm{K}[\overline{X}] \to 0.$$

Comme l'algèbre $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$ est un $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$-module libre à droite, nous sommes donc en présence d'une résolution libre de $\mathrm{U}(\mathcal{L}) = \mathrm{K}[\overline{X}]$ au dessus de $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$. Par conséquent, l'espace $\mathrm{HL}^*(\mathcal{L}) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathrm{UL}(\mathcal{L})}(\mathrm{U}(\mathcal{L}), \mathrm{K})$ s'obtient comme l'homologie du complexe

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\mu_2}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{UL}}(\mathrm{UL}, \mathrm{K}) \xrightarrow{\widetilde{\mu_1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{UL}}(\mathrm{UL}, \mathrm{K}) \xrightarrow{\widetilde{\mu_2}} \cdots \xrightarrow{\widetilde{\mu_1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{UL}}(\mathrm{UL}, \mathrm{K}),$$

où, pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{UL}}(\mathrm{UL}, \mathrm{K}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{UL}(\mathcal{L})}(\mathrm{UL}(\mathcal{L}), \mathrm{K})$, $\widetilde{\mu_2}(f)$ est l'application $f \circ \mu_2$. Comme K est une représentation triviale de l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}$, nous avons

$$\widetilde{\mu_1}(f)(z) = f(1).((1 \otimes X).z) = 0, \quad \widetilde{\mu_2}(f)(z) = f(1).(K_2.z) = 0,$$

pour tous $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{UL}}(\mathrm{UL}, \mathrm{K})$, $z \in \mathrm{UL}(\mathcal{L})$, 1 étant l'unité de l'algèbre associative $\mathrm{UL}(\mathcal{L})$. Et puisqu'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_{\mathrm{UL}}(\mathrm{UL}, \mathrm{K}) \cong \mathrm{K}$, on en déduit que $\mathrm{HL}^n(\mathcal{L}) \cong \mathrm{K}$, pour tout entier $n \in \mathrm{N}$; et par dualité (*théorème des coefficients universels*), il est clair que $\mathrm{HL}_n(\mathcal{L}) \cong \mathrm{K}$.

3.— Sur les générateurs des modules de cohomologie

Rappelons d'abord que la cohomologie d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ (à valeurs dans la représentation triviale K) est définie comme l'homologie du complexe $(\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes *}, \mathrm{K}),\ \delta)$ où la différentielle $\delta : \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes n}, \mathrm{K}) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes (n+1)}, \mathrm{K})$ opère par la formule

$$\delta(f)(x_1, \cdots, x_{n+1}) := \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{j+1} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, [x_i, x_j], \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_{n+1}).$$

D'autre part, il existe un cup-produit $\cup : \mathrm{HL}^p(\mathfrak{g}) \times \mathrm{HL}^q(\mathfrak{g}) \to \mathrm{HL}^{p+q}(\mathfrak{g})$, $(p > 0, q > 0)$ ni associatif, ni commutatif, et satisfaisant aux relations suivantes

$$(f \cup g) \cup h = f \cup (g \cup h) \ + \ (-1)^{|g||h|} f \cup (h \cup g), \ \delta(f \cup g) = \delta(f) \cup g \ + \ (-1)^{|f|} f \cup \delta(g).$$

Il est donné par $f \cup g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \rho_{pq}$, $(p = |f|, q = |g|)$, μ étant la multiplication de $\mathbf{K}$ et $\rho_{pq} : \mathfrak{g}^{\otimes (p+q)} \to \mathfrak{g}^{\otimes (p+q)}$ opérant par la formule suivante (cf. [Lo4])

$$\rho_{pq}(x_1, \cdots, x_{p+q}) := \sum_{\sigma=(p-1,q)-shuffle} \operatorname{sgn}(\sigma)(x_1, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)}).$$

Adoptons la notation $\mathcal{L}'^n := \operatorname{Hom}(\mathcal{L}^{\otimes n}, \mathbf{K})$, $x^p y^q \cdots x^r y^s$ désignant la forme linéaire prenant la valeur 1 sur l'élément $X^{\otimes p} \otimes Y^{\otimes q} \otimes \cdots \otimes X^{\otimes r} \otimes Y^{\otimes s}$ et 0 ailleurs. Nous allons montrer que

Proposition 4. — *Le groupe de cohomologie* $\mathrm{HL}^n(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbf{K}$ *admet pour générateur l'élément* $(yx)^p$ *(resp.* $x(yx)^p$*) si* $n = 2p$ *(resp.* $n = 2p+1$*), où l'on note* $(yx)^p := yxyx \cdots yx$ *(*p *facteurs* yx*).*

Puisque l'on sait déjà que $\mathrm{HL}^n(\mathcal{L}) \cong \mathbf{K}$, il suffit de montrer que les éléments $(yx)^p$ et $x(yx)^p$ sont des cocycles qui ne peuvent être des cobords. Nous allons l'établir par récurrence en commençant par le

Lemme 5. — *i) Pour toute cochaîne* $\omega_n \in \mathcal{L}'^n$*, on a* $\delta(x\omega_n) = -x\delta(\omega_n)$*.*
ii) Pour tout entier naturel $p \geq 1$*, on a*

$$(yx)^p \cup x = 0, \quad x(yx)^p \cup x = x^2(yx)^p, \quad x^2 \cup (yx)^p = 0.$$

Démonstration. — i) Par définition du crochet de l'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}(S^2)$, il est clair que $\delta(x) = 0$. Et puisque $x \cup \omega_n = x\omega_n$, il vient

$$\delta(x\omega_n) = \delta(x \cup \omega_n) = \delta(x) \cup \omega_n \ - \ x \cup \delta(\omega_n) = -x\delta(\omega_n).$$

Les deux premières relations de ii) se montrent par récurrence. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (yx) \cup x \ &= (y \cup x) \cup x = y \cup (x \cup x) - y \cup (x \cup x) = 0, \\ x(yx) \cup x \ &= (x \cup (yx)) \cup x = x \cup ((yx) \cup x) + x \cup (x \cup (yx)) = x \cup (xyx) = x^2 yx. \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait $(yx)^p \cup x = 0$ et $x(yx)^p \cup x = x^2(yx)^p$; alors, on a :

$$\begin{aligned} (yx)^{p+1} \cup x \ &= (y \cup x(yx)^p) \cup x = y \cup (x(yx)^p \cup x) \ - \ (y \cup (x \cup x(yx)^p) \\ &= y \cup (x^2(yx)^p) \ - \ y \cup (x^2(yx)^p) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(yx)^{p+1} \cup x \ &= (x \cup (yx)^{p+1}) \cup x = x \cup ((yx)^{p+1} \cup x) \ + \ x \cup (x \cup (yx)^{p+1}) \\ &= 0 \ + \ x \cup (x(yx)^{p+1}) = x^2(yx)^{p+1}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement la dernière relation de ii) :

$$\begin{aligned} x^2 \cup x(yx)^p \ &= (x \cup x) \cup x(yx)^p = x \cup (x \cup x(yx)^p) \ + \ (-1)^{2p+1} x \cup (x(yx)^p \cup x) \\ &= x \cup (x^2(yx)^p) \ - \ x \cup (x^2(yx)^p) = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver le Lemme 5. ■

Lemme 6. — *Pour tout $p \in \mathbf{N}$, les cochaînes $(yx)^p$ et $x(yx)^p$ sont des cocycles.*

Démonstration. — Comme $\delta(x\omega) = -x\delta(\omega)$, il suffit de montrer que $\delta((yx)^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$. La propriété étant évidente pour $p = 0$, supposons par récurrence qu'elle est vraie à l'ordre p ; alors on a

$$\delta((yx)^{p+1}) = \delta(y \cup x(yx)^p) = \delta(y) \cup x(yx)^p \ - \ y \cup \delta(x(yx)^p).$$

Or $[X, X] = Y$ et tous les autres crochets sont nuls, donc $\delta(y) = x^2$. Ainsi, on a

$$\delta((yx)^{p+1}) = x^2 \cup x(yx)^p \ + \ y \cup x\delta((yx)^p) = 0$$

par hypothèse et en vertu du Lemme 5 ii) ; d'où le Lemme 6. ■

Il nous reste à prouver que les cocycles $(yx)^p$ et $x(yx)^p$ ne sont pas des cobords. Comme $\delta(\lambda) = 0$ ($\lambda \in \mathbf{K}$), $\delta(x) = 0$ et $\delta(y) = x^2$, les cocycles x et yx ne peuvent être des cobords et l'on a $\mathrm{HL}^1(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbf{K}.x$ et $\mathrm{HL}^2(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbf{K}.yx$. Il suffit donc de montrer que

Lemme 7. — *Si $\mathrm{HL}^{2p-1}(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbf{K}.x(yx)^{p-1}$ et $\mathrm{HL}^{2p}(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbf{K}.(yx)^p$, alors les cocycles $x(yx)^p$ et $(yx)^{p+1}$ ne sont pas des cobords.*

Démonstration. — Tout élément de $\mathcal{L}'^{2p}$ est de la forme $\omega_{2p} = x\omega_{2p-1} + y\omega'_{2p-1}$ avec $\omega_{2p-1}, \omega'_{2p-1} \in \mathcal{L}'^{2p-1}$, et alors on a

$$\begin{aligned} \delta(\omega_{2p}) &= -x\delta(\omega_{2p-1}) \ + \ x^2 \cup \omega'_{2p-1} \ - \ y\delta(\omega'_{2p-1}) \\ &= x\omega \ - \ y\delta(\omega'_{2p-1}) \ , \quad \omega := -\delta(\omega_{2p-1}) \ + \ x\omega'_{2p-1} \ - \ \omega'_{2p-1} \cup x. \end{aligned}$$

Donc si $x(yx)^p = \delta(\omega_{2p})$, on doit avoir $x(yx)^p = x\omega$ et $\delta(\omega'_{2p-1}) = 0$; comme $\mathrm{HL}^{2p-1}(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbf{K}.x(yx)^{p-1}$, on en déduit que $\omega'_{2p-1} = \lambda.x(yx)^{p-1} + \delta(\omega_{2p-2})$, $\lambda \in \mathbf{K}$ et $\omega_{2p-2} \in \mathcal{L}'^{2p-2}$. Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} x(yx)^p &= -x\delta(\omega_{2p-1}) + x^2 \cup \omega'_{2p-1} = x\delta(\omega_{2p-1}) + \lambda.x^2 \cup (yx)^{p-1} + x^2 \cup \delta(\omega_{2p-2}) \\ &= \delta(x\omega_{2p-1} + x^2 \cup \omega_{2p-2}) = -x\delta(\omega_{2p-1} + x\omega_{2p-2} + \omega_{2p-2} \cup x) \end{aligned}$$

Et alors on aurait la relation $(yx)^p = -\delta(\omega_{2p-1} + x\omega_{2p-2} + \omega_{2p-2} \cup x)$; ce qui est absurde car, étant générateur de $\mathrm{HL}^{2p}(\mathcal{L}(S^2))$, le cocycle $(yx)^p$ ne peut être un cobord. Donc le cocycle $x(yx)^p$ n'est pas un cobord.

De même, si $(yx)^{p+1} = \delta(x\omega_{2p} + y\omega'_{2p})$, alors on aurait la relation $x(yx)^p = -\delta(\omega'_{2p})$, ce qui est absurde d'après ce qui précède. Par conséquent, le cocycle $(yx)^{p+1}$ ne peut être un cobord. Ce qui achève de démontrer le Lemme 7 et donc la Proposition 4. ■

4.— Structure duale de l'espace de cohomologie

Rappelons qu'une *algèbre de Leibniz duale* est la donnée d'un espace vectoriel gradué $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ muni d'une application bilinéaire $(--) : R_p \times R_q \to R_{p+q}$ satisfaisant à la relation de *Leibniz duale*

$$((rs)t) = (r(st)) \ + \ (-1)^{|s||t|}(r(ts)), \quad \forall\, r, s, t \in R.$$

Par exemple, le cup-produit décrit précédemment munit la cohomologie d'une algèbre de Leibniz d'une structure d'algèbre de Leibniz duale.

D'autre part, si V est un espace vectoriel, on munit l'espace vectoriel gradué

$$\overline{\mathrm{T}}(V) := V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

du produit $\bullet$ donné par la formule

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \bullet (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) := v_1 \otimes sh_{p-1,q}(v_2 \otimes \cdots \otimes v_{p+q})$$

où $sh_{p-1,q}$ désigne le *shuffle* usuel : une permutation σ de S_n opère par

$$\sigma.(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Alors le couple $(\overline{\mathrm{T}}(V), \bullet)$ est une algèbre de Leibniz duale; c'est l'algèbre de Leibniz duale libre sur V (cf. [Lo4]).

Considérons l'espace vectoriel $V := \mathbf{K}.\alpha \oplus \mathbf{K}.\beta$ où $\alpha := x$ (*resp.* $\beta := yx$) est le générateur de $\mathrm{HL}^1(\mathcal{L}(S^2))$ (resp. $\mathrm{HL}^2(\mathcal{L}(S^2))$). Nous nous proposons de comparer les algèbres de Leibniz duales $(\overline{\mathrm{T}}(V), \bullet)$ et $(\widetilde{\mathrm{HL}}^*(\mathcal{L}(S^2)), \cup)$ où l'on note

$$\widetilde{\mathrm{HL}}^*(\mathcal{L}(S^2)) := \bigoplus_{n>0} \mathrm{HL}^n(\mathcal{L}(S^2)).$$

Proposition 8. — *Il existe un morphisme surjectif d'algèbres de Leibniz duales* $\Psi : (\overline{\mathrm{T}}(V), \bullet) \longrightarrow (\widetilde{\mathrm{HL}}^*(\mathcal{L}(S^2)), \cup)$ *dont le noyau est l'idéal bilatère de* $\overline{\mathrm{T}}(V)$ *engendré par* $\alpha^2 := \alpha \otimes \alpha$ *et* $\beta\alpha := \beta \otimes \alpha$, *i.e.*

$$\overline{\mathrm{T}}(V)/(\alpha^2 = \beta\alpha = 0) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{HL}}^*(\mathcal{L}(S^2)).$$

Démonstration. — Comme $(\overline{\mathrm{T}}(V), \bullet)$ est l'algèbre de Leibniz duale libre sur V, l'inclusion $V \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{HL}}^*(\mathcal{L}(S^2))$ se prolonge en un (unique) morphisme d'algèbres de Leibniz duales

$$\Psi : \overline{\mathrm{T}}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{HL}}^*(\mathcal{L}(S^2)), \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto (v_1 \cup (\cdots \cup (v_{n-1} \cup v_n) \cdots)).$$

Nous savons que $\mathrm{HL}^{2p}(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbb{K}.(yx)^p$ et $\mathrm{HL}^{2p+1}(\mathcal{L}(S^2)) \cong \mathbb{K}.x(yx)^p$. Et puisque

$$\Psi(\beta^{\otimes p}) = yx \cup (yx \cup (\cdots \cup (yx \cup yx) \cdots)), \quad \Psi(\alpha \otimes \beta^{\otimes p}) = x \cup \Psi(\beta^{\otimes p}),$$

la surjectivité du morphisme Ψ résulte de la relation

$$(yx)^p = (yx \cup (yx \cup (\cdots \cup (yx \cup yx) \cdots)))$$

qui découle du Lemme 5ii) par une récurrence immédiate .

Par ailleurs, tout élément de $\overline{\mathrm{T}}(V)$ est de la forme $P_1(\beta) + \alpha P_2(\beta) + R(\alpha^2, \beta\alpha)$ où $P_i(\beta)$ est un polynôme en β et $R(\alpha^2, \beta\alpha)$ un élément de l'idéal bilatère $< \alpha^2,\ \beta\alpha >$ de $\overline{\mathrm{T}}(V)$ engendré par α^2 et $\beta\alpha$. Or nous avons

$$\Psi(P_1(\beta)) = P_1(yx), \quad \Psi(\alpha P_2(\beta)) = xP_2(yx),$$
$$\Psi(\alpha^2) = x \cup x = x^2 = \delta(y) = 0, \quad \Psi(\beta\alpha) = yx \cup x = 0 \quad \text{(Lemme 5ii))}.$$

Par conséquent, il est clair que $\ker(\Psi) = < \alpha^2,\ \beta\alpha >$, ce qui achève de démontrer la Proposition 8. $\blacksquare$

Références bibliographiques

[**Ba**] Balavoine (D.). — *Déformations des algèbres de Leibniz*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. **319**, 1994, p. 783–788.

[**Bl**] Bloch (S.). — *The dilogarithm and extensions of Lie algebras*, Alg. K-theory, Evanston 1980, Springer Lecture Notes in Math., t. **854**, 1981, p. 1–23.

[**Ca**] Cathelineau (J.-L.). — *Homologie de degré trois d'algèbres de Lie simples déployées étendues à une algèbre commutative*, L'Enseignement Mathématique, t. **33**, 1987, p. 159–173.

[**Ch-E**] Chevalley (C.), Eleinberg (S.). — *Cohomologie theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. of the A.M.S., t. **63**, 1948, p. 85–124.

[**Cu1**] Cuvier (C.). — *Homologie de Leibniz et homologie de Hochschild*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. **313**, 1991, p. 569–572.

[**Cu2**] Cuvier (C.). — *Homologie de Leibniz*, Ann. Ec. Norm. Sup., t. **27**, 1994, p. 1–45.

[**Ga**] Garland (H.). — *The arithmetic theory of loop groups*, Publ. I.H.E.S., t. **52**, 1980, p. 5–136.

[**Hd1**] Haddi (A.). — *Les algèbres de Kac-Moody et l'homologie diédrale*, (à paraître).

[**Hd2**] Haddi (A.). — *Homologie de degré trois des algèbres de Lie étendues à une algèbre commutative*, (à paraître).

[**Hn**] Hanlon (Ph.). — *Cyclic homology and the Macdonald conjectures*, Invent. Math. 86 N°1, 1986, p. 131–159.

[**H-S**] Hochschild (G.), Serre (J.-P.). — *Cohomology of Lie algebras*, Annal. Math., t. **57**, 1953, p. 591–603.

[**Ka**] Kassel (C.). — *Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra*, J. of Pure Appl. Algebra, t. **34**, 1984, p. 265–275.

[**K-L**] Kassel (C.), Loday (J.-L.). — *Extensions centrales d'algèbres de Lie*, Annal. Inst. Fourier, t. **32**, 1982, p. 119–142.

[**Ko**] Koszul (J.-L.). — *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, t. **78**, 1950, p. 65–127.

[**Lo1**] Loday (J.-L.). — *Cyclic homology*. — Grundlehren der math. Wissenschaften, 301, Springer Verlag, 1992.

[**Lo2**] Loday (J.-L.). — *Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz*, L'Enseignement Math., t. **39**, 1993, p. 269–293.

[**Lo3**] Loday (J.-L.). — *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebra*, Mathematische Zeitschrift (à paraître), 1995.

[**Lo4**] Loday (J.-L.). — *Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras*, Math. Scand. (à paraître), 1995.

[**L-P1**] Loday (J.-L.), Pirashvili (T.). — *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Annal. 296, 1993, p. 139–158.

[**L-P2**] Loday (J.-L.), Pirashvili (T.). — *The tensor category of linear maps and Leibniz algebras*, Preprint IRMA Strasbourg, 1994.

[**L-P3**] Loday (J.-L.), Pirashvili (T.). — *Leibniz representations of Leibniz algebras*, J. Algebra (à paraître), 1995.

[**Ld**] Lodder (J.M.). — *Leibniz homology and the James model*, Math. Nachricht, 1994.

[**McC**] Mc Cleary (J.). — *User's guide to spectral sequences.* — Mathematics Lecture Series, 12, Publish or Perish, Inc., 1985.

[**Nt**] Ntolo (P.). — *Homologie de Leibniz d'algèbres de Lie semi-simples*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. **318**, 1994, p. 707–710.

[**Ou**] Oudom (J.-M.). — *La diagonale en homologie des algèbres de Leibniz*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. **320**, 1995, p. 1165–1170.

[**Pi**] Pirashvili (T.). — *On Leibniz homology*, Ann. Inst. Fourier, t. **44**, 1994, p. 401–411.

[**Th**] Thomas (J.-C.). — *Graded Lie algebras for rational homotopy theory*, Pub. IRMA Lille, t. **36**, 1995.

SECONDE PARTIE

OPÉRADES DES ALGÈBRES $(k+1)$-AIRES

INTRODUCTION

V. Ginzburg et M. Kapranov viennent de donner un nouveau souffle à la théorie des *opérades* (*cf.* [Gi-K]). Cependant, en développant la notion d'opérades quadratiques, ils abordent essentiellement le cas des algèbres binaires, c'est-à-dire les opérades engendrées par des S-modules concentrés en degré 2. Or, lorsqu'on regarde une opérade comme une algèbre associative dans la catégorie monoïdale des S-modules, on s'aperçoit que la *quadraticité* porte en fait sur les relations et non sur les générateurs.

Le but de ce travail est précisément d'étendre la *théorie de dualité* de Ginzburg et Kapranov aux opérades engendrées par des S-modules concentrés en degré $(k+1)$ où $k \geq 1$ est un entier quelconque. Nous travaillons donc avec des *algèbres* $(k+1)$-*aires*, c'est-à-dire dont la multiplication porte sur $(k+1)$ variables. Le cas classique correspond à la valeur $k = 1$.

Dans le chapitre I, nous définissons les notions générales d'algèbres $(k+1)$-aires et leurs divers types. Les deux manières d'écrire l'*associativité classique i.e.*,

$$(ab)c = a(bc) \qquad \text{ou} \qquad (ab)c - a(bc) = 0$$

donnent respectivement naissance à l'*associativité totale* (k relations)

$$(a_0 \dots a_{i-1}(a_i \dots a_{i+k})a_{i+k+1} \dots a_{2k}) = ((a_0 \dots a_k)a_{k+1} \dots a_{2k}) \quad \text{où} \quad i = 1, \cdots, k$$

et à l'*associativité partielle* (une relation)

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik}(a_0 \dots a_{i-1}(a_i \dots a_{i+k})a_{i+k+1} \dots a_{2k}) = 0 \ .$$

De même nous généralisons les notions de *commutativité*, d'*(anti)symétrie*, et la *relation de Jacobi* définissant les *algèbres de Lie* $(k+1)$*-aires*. Notons que ces dernières, déjà considérées par Ph. Hanlon et M. Wachs (*cf.* [H-W]), interviennent dans l'étude des problèmes combinatoires liés au *réseau de partition*.

Nous donnons des exemples d'algèbres $(k+1)$-aires provenant du cas classique, et nous construisons certaines algèbres $(k+1)$-aires libres utiles pour la suite.

Le chapitre II est consacré à la notion d'*opérades quadratiques* $(k+1)$*-aires* et à leurs opérades duales : les générateurs sont placés en degré $(k+1)$ et les relations en degré $(2k+1)$. Nous appliquons cette généralisation en déterminant les opérades de nos exemples d'algèbres $(k+1)$-aires. Nous montrons que les deux types d'algèbres $(k+1)$-aires associatives ont des opérades quadratiques $(k+1)$-aires duales l'une de l'autre; puis que l'opérade des algèbres de Lie $(k+1)$-aires est en dualité avec celle des algèbres $(k+1)$-aires totalement associatives et symétriques.

Dans le chapitre III, nous construisons des théories d'homologie pour les algèbres $(k+1)$-aires : l'homologie de Hochschild des algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives, et l'analogue Chevalley-Eilenberg pour les algèbres de Lie $(k+1)$-aires construite par Hanlon et Wachs. Nous montrons que l'homologie de Hochschild de toute algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre est triviale. Nous donnons une décomposition du complexe de Hanlon-Wachs en somme directe de sous-complexes et nous en déduisons le «bon» complexe pour l'homologie des algèbres de Lie $(k+1)$-aires.

Notations.— Dans tout ce qui suit le symbole $\mathbf{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique nulle; sauf mention expresse du contraire, les espaces vectoriels, les applications linéaires, les produits tensoriels seront relatifs à $\mathbf{K}$.

Pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p \leq q$, nous désignons par $|_p^q$ l'ensemble $\{n \in \mathrm{N} : p \leq n \leq q\}$. Pour tout entier $n \geq 0$, nous notons S_n (*resp.* $\mathrm{sgn}(\sigma)$) le groupe symétrique opérant sur l'ensemble $|_0^{n-1}$ (resp. la signature de la permutation σ de S_n). Enfin, nous notons $\mathrm{Sh}_{p,q}$ l'ensemble des (p,q)-shuffles *i.e.*, les permutations σ de S_{p+q} telles que

$$\sigma(0) < \sigma(1) < \cdots < \sigma(p-1) \quad \text{et} \quad \sigma(p) < \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q-1).$$

Nous fixons une fois pour toutes un entier $k \geq 1$.

I.— ALGÈBRES $(k+1)$-AIRES

Nous commençons par introduire la notion d'algèbre $(k+1)$-aire et quelques unes de ses sous-structures : sous-algèbre, idéal, *etc.* Nous donnons ensuite des exemples qui serviront de références, et des outils pour en fabriquer : les algèbres $(k+1)$-aires libres.

1.— Définitions générales

Une *algèbre* $(k+1)$*-aire* est la donnée d'un espace vectoriel A muni d'une application multilinéaire $(\quad) : A^{\otimes k+1} \longrightarrow A$ appelée *multiopération.* Le résultat $(x_0 \ldots x_k)$ de la multiopération est dit *multiproduit des facteurs* $x_0, \ldots, x_k$.

Par *cas classique*, nous entendons le cas d'une opération binaire, qui correspond à la valeur $k = 1$.

Une *sous-algèbre* d'une algèbre $(k+1)$-aire A est un sous-espace vectoriel B de A stable pour la multiopération *i.e.*, tout multiproduit $(x_0 \ldots x_k)$ est dans B lorsque les éléments $x_0, \ldots, x_k$ sont dans B.

Un *idéal multilatère* d'une algèbre $(k+1)$-aire A est un sous-espace vectoriel $\mathcal{I}$ de A tel que tout multiproduit $(x_0 \ldots x_k)$ soit dans $\mathcal{I}$ dès que l'un des facteurs x_i est dans $\mathcal{I}$. Il est clair que tout quotient d'une algèbre $(k+1)$-aire par un idéal multilatère hérite d'une structure d'algèbre $(k+1)$-aire.

De manière évidente, toute intersection d'une famille de sous-algèbres (*resp.* d'idéaux multilatères) d'une algèbre $(k+1)$-aire est une sous-algèbre (*resp.* un idéal multilatère).

Soit A une algèbre $(k+1)$-aire et soit X une partie quelconque de A. L'intersection de toutes les sous-algèbres (*resp.* de tous les idéaux multilatères) de A contenant X est appelée *la sous-algèbre* (*resp. l'idéal multilatère*) *de* A *engendrée par* X.

Une *unité* dans une algèbre $(k+1)$-aire A est un élément e tel que l'on ait les relations

$$(\underbrace{e \ldots e}_{j \text{ facteurs}} x e \ldots e) = x, \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, j \in |_0^k.$$

On observera qu'une unité n'est plus nécessairement unique dès que l'entier k est supérieur ou égal à 2.

Par morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires, nous entendons toute application linéaire commutant avec les multiopérations. Il est clair que les algèbres $(k+1)$-aires et leurs morphismes forment une catégorie que nous notons $\mathbf{ALG}^{<k>}$.

2.— Types d'algèbres $(k+1)$-aires.

Comme dans le cas classique, la multiopération peut être amenée à satisfaire à certaines compatibilités que nous abordons maintenant.

2.1. Algèbres $(k+1)$-aires associatives.— Il y a deux notions d'associativité pour les algèbres $(k+1)$-aires :

- *l'associativité totale* caractérisée par les k relations

$$(2.1.1) \quad ((x_0 \ldots x_k)x_{k+1} \ldots x_{2k}) = (x_0 \ldots x_{i-1}(x_i \ldots x_{i+k})x_{i+k+1} \ldots x_{2k}) \ , \ \forall\, i \in |_1^k;$$

- *l'associativité partielle* caractérisée par la relation

$$(2.1.2) \qquad \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik}(x_0 \ldots x_{i-1}(x_i \ldots x_{i+k})x_{i+k+1} \ldots x_{2k}) = 0 \ .$$

Evidemment, pour $k = 1$, ces deux notions coïncident et nous retrouvons les algèbres associatives classiques. Remarquons aussi que, si l'entier k est impair, toute algèbre $(k+1)$-aire totalement associative est partiellement associative. D'autres exemples d'algèbres $(k+1)$-aires associatives s'obtiennent par la proposition suivante.

Proposition 1. — *Soit $(A, \bullet)$ une algèbre associative au sens classique. Alors la multiopération, définie par*

$$(2.1.3) \qquad (a_0 \ldots a_k) := a_0 \bullet \ldots \bullet a_k \quad \text{où} \quad a_0, \ldots, a_k \in A,$$

confère à l'espace vectoriel A une structure d'algèbre $(k+1)$-aire totalement associative. Cette structure est donc aussi partiellement associative si l'entier k est impair.

Démonstration. — L'associativité totale (*resp.* partielle) découle immédiatement de celle de l'algèbre A (*resp.* et de la parité de k). ■

2.2. Algèbres $(k+1)$-aires commutatives.— De même, il y a deux notions possibles de commutativité pour les algèbres $(k+1)$-aires :

- *la symétrie* caractérisée par les relations

$$(2.2.1) \qquad (x_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(k)}) = (x_0 \ldots x_k) \ , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{S}_{k+1} \ ;$$

- *la commutativité* caractérisée par la relation

$$(2.2.2) \qquad \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(k)}) = 0 \ .$$

Puisqu'il y a autant de permutations paires qu'impaires, il est clair qu'une algèbre $(k+1)$-aire symétrique est aussi commutative. Pour toute algèbre associative et commutative au sens classique, l'algèbre $(k+1)$-aire totalement associative associée (*cf.* Proposition 1) est symétrique et donc commutative.

Proposition 2 (Amitsur-Levitzki). — *Soit R une algèbre associative et commutative au sens classique. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, l'algèbre classique des matrices carrées $\mathcal{M}_n(R)$ est une algèbre $(2n)$-aire commutative, totalement et partiellement associative.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{M}_n(R)$ est une algèbre associative classique, la relation d'associativité totale (resp. partielle) de la multiopération découle de la Proposition 1 où $k = 2n-1$. La commutativité résulte de la formule d'Amitsur-Levitzki (*cf.* [A-L], [R]) :

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma)(M_{\sigma(0)} \dots M_{\sigma(2n-1)}) = 0 \quad \text{pour tous} \quad M_0, \dots, M_{2n-1} \in \mathcal{M}_n(R). \ \blacksquare$$

3 Remarque.— On observera qu'il faut prendre le même entier n pour avoir la commutativité de l'algèbre $(2n)$-aire $\mathcal{M}_n(R)$. En effet, $\mathcal{M}_{n+1}(R)$ est une algèbre $(2n)$-aire partiellement et totalement associative mais pas commutative (prendre par exemple $n = 1$).

2.3. Algèbres de Lie $(k+1)$-aires .— Introduites par Ph. Hanlon et M. Wachs (*cf.* [H-W]), les algèbres de Lie $(k+1)$-aires sont les algèbres $(k+1)$-aires dont la multiopération, appelée *crochet* et notée $[x_0 \dots x_k]$, est assujettie aux axiomes suivants :

- *l'antisymétrie* caractérisée par les relations

$$[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}] = \mathrm{sgn}(\sigma)[x_0 \dots x_k] \ , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{S}_{k+1} \tag{2.3.1}$$

- et *la relation de Jacobi généralisée* suivante

$$J(x_0, \dots, x_{2k}) := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{2k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)[[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}]x_{\sigma(k+1)} \dots x_{\sigma(2k)}] = 0 \ . \tag{2.3.2}$$

Lorsque $k = 1$, nous retrouvons la notion classique d'algèbres de Lie. Notons qu'en présence de l'antisymétrie, la relation (2.3.2) (qui possède $(2k+1)\,!$ termes) se ramène à une relation ayant moins de termes :

$$J'(x_0, \dots, x_{2k}) := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}} \mathrm{sgn}(\sigma)[[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}]x_{\sigma(k+1)} \dots x_{\sigma(2k)}] = 0 \ , \tag{2.3.3}$$

et nous avons $J(x_0, \dots, x_{2k}) = k!(k+1)!J'(x_0, \dots, x_{2k})$.

Proposition 4. — *Soit* $(A, (\quad))$ *une algèbre* $(k+1)$*-aire partiellement associative. Alors le crochet, défini par la formule*

$$[a_0 \dots a_k] := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(a_{\sigma(0)} \dots a_{\sigma(k)}), \tag{2.3.4}$$

confère à l'espace vectoriel A *une structure d'algèbre de Lie* $(k+1)-aire$*. C'est l'algèbre de Lie* $(k+1)-aire$ *universelle associée à* $(A, (\quad))$ *que l'on note* $(A_L, [\quad])$.

Démonstration. — L'antisymétrie est évidente par définition du crochet. Pour vérifier la relation de Jacobi, remarquons d'abord que $J(a_0, \dots, a_{2k})$ est une combinaison linéaire sur $\mathbf{K}$ des $(2k+1)!(k+1)$ éléments

$$\mathbf{a}_{\sigma,i} := (a_{\sigma(0)} \dots a_{\sigma(i-1)}(a_{\sigma(i)} \dots a_{\sigma(i+k)})a_{\sigma(i+k+1)} \dots a_{\sigma(2k)}) \text{ où } \sigma \in \mathrm{S}_{2k+1} \text{ et } i \in |_0^k .$$

Le coefficient devant $\mathbf{a}_{\sigma,i}$ valant $\mathrm{sgn}(\sigma)$ fois celui devant $\mathbf{a}_{id,i}$, nous pouvons donc les regrouper et nous contenter de rechercher les $\mathbf{a}_{id,i}$ impliqués dans $J'(a_0, \dots, a_{2k})$.

L'élément $\mathbf{a}_{id,i}$ apparaît une fois, et une seule, dans $J'(a_0, \dots, a_{2k})$ et provient du crochet itéré $[[a_i \dots a_{i+k}]a_0 \dots a_{i-1}a_{i+k+1} \dots a_{2k}]$. Ce dernier a pour signe $(-1)^{i(k+1)}$. Pour obtenir $\mathbf{a}_{id,i}$ à partir de ce crochet, il faut faire sauter un élément au-dessus de i autres, d'où le nouveau signe $(-1)^i$. En multipliant, nous obtenons $(-1)^{ik}$. Ainsi, nous avons montré que

$$J'(a_0, \dots, a_{2k}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik} \mathbf{a}_{\sigma,i} .$$

La relation de Jacobi résulte alors de la condition d'associativité partielle (2.1.2) .

Soit $f : (A, (\quad)) \to (L, [\quad])$ une application linéaire de $(A, (\quad))$ dans une algèbre de Lie $(k+1)$-aire $(L, [\quad])$, commutant avec les multiopérations. On vérifie aisément que l'application linéaire $f_L := f : A_L \to L$ devient un morphisme d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires. C'est clairement l'unique qui étende la structure initiale. Ce qui démontre l'universalité de l'algèbre de Lie $(k+1)$-aire $(A_L, [\quad])$. ■

5 Remarques.— Cette proposition permet d'obtenir d'autres exemples d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires : si l'entier k est impair, toute algèbre $(k+1)$-aire totalement associative donne naissance à une algèbre de Lie $(k+1)$-aire, et nous en connaissons par la Proposition 1.

D'autre part, si $h : A \to B$ est un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives, alors il devient un morphisme d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires que nous notons aussi $h_L := h : A_L \to B_L$.

2.4. Algèbres $(k+1)$-aires et produit tensoriel.— Soient A et B des algèbres $(k+1)$-aires. Munissons le produit tensoriel $A \otimes B$ de la *multiopération diagonale* donnée par

$$(a_0 \otimes b_0 \dots a_k \otimes b_k) := (a_0 \dots a_k) \otimes (b_0 \dots b_k) \tag{2.4.1}$$

où les éléments $a_0, \cdots, a_k$ (*resp.* $b_0, \cdots, b_k$) parcourent A (*resp.* B).

Proposition 6. — *Si l'algèbre $(k+1)$-aire A (resp. B) est totalement (resp. partiellement) associative alors l'algèbre $(k+1)$-aire $A \otimes B$ est partiellement associative.*

Démonstration. — En effet, pour tous éléments $a_0, \cdots, a_{2k}$ de A et $b_0, \cdots, b_{2k}$ de B, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik} (a_0 \otimes b_0 \ldots a_{i-1} \otimes b_{i-1} (a_i \otimes b_i \ldots a_{i+k} \otimes b_{i+k}) \ldots a_{2k} \otimes b_{2k}) \\ = \quad & \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik} (a_0 \ldots a_{i-1} (a_i \ldots a_{i+k}) \ldots a_{2k}) \otimes (b_0 \ldots b_{i-1} (b_i \ldots b_{i+k}) \ldots b_{2k}) \\ = \quad & ((a_0 \ldots a_k) \ldots a_{2k}) \otimes \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik} (b_0 \ldots b_{i-1} (b_i \ldots b_{i+k}) \ldots b_{2k}) = 0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

De même nous avons

Proposition 7. — *Si A est une algèbre $(k+1)$-aire totalement associative et symétrique, et si B est une algèbre de Lie $(k+1)$-aire alors $A \otimes B$ est une algèbre de Lie $(k+1)$-aire.*

Démonstration. — On vérifie facilement que, d'une part

$$\begin{aligned} [x_{\sigma(0)} \otimes y_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(k)} \otimes y_{\sigma(k)}] &= \operatorname{sgn}(\sigma)(x_0 \ldots x_k) \otimes [y_0 \ldots y_k] \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma)[x_0 \otimes y_0 \ldots x_k \otimes y_k], \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$J'(x_0 \otimes y_0 \cdots x_{2k} \otimes y_{2k}) = ((x_0 \ldots x_k) x_{k+1} \ldots x_{2k}) \otimes J'(y_0 \cdots y_{2k}) = 0. \ \blacksquare$$

3.— Algèbres $(k+1)$-aires libres et enveloppes universelles.

Nous nous proposons de construire, pour tout espace vectoriel V, l'objet libre dans la catégorie des algèbres $(k+1)$-aires du type #. Il s'agit d'une algèbre $(k+1)$-aire $\#\mathcal{A}^{<k>}(V)$ du type #, munie d'une application canonique $\iota : V \hookrightarrow \#\mathcal{A}^{<k>}(V)$, et ayant la propriété universelle suivante.

Pour toute application linéaire f de V dans une algèbre $(k+1)$-aire A du type #, il existe un unique morphisme d' algèbres $\tilde{f} : \#\mathcal{A}^{<k>}(V) \to A$, tel que l'on ait $\tilde{f} \circ \iota = f$.

Comme à l'accoutumée, lorsqu'il existe une solution $(\#\mathcal{A}^{<k>}(V), \iota)$, elle est unique à (un unique) isomorphisme d'algèbres près.

Nous commençons par construire l'algèbre $(k+1)$-aire libre sur un espace vectoriel donné V. Ce qui permet, par passage au quotient par les relations qu'il faut, d'en déduire les autres types d'algèbres $(k+1)$-aires libres sur V. Nous donnons les constructions explicites de l'algèbre $(k+1)$-aire libre sur V pour les types “totalement associative”, “symétrique et totalement associative”, “partiellement associative” et de “Lie” (l'entier k étant supposé impair pour les deux derniers types). Parallèlement, nous construisons aussi *l'enveloppe universelle* des algèbres de Lie $(k+1)$-aires dans la catégorie des algèbres $(k+1)$-aires partiellement (resp. totalement) associatives.

3.1. Algèbre $(k+1)$-aire libre.— Soit V un espace vectoriel et soit $(\mathcal{A}_n^{<k>}(V))_{n\geq 0}$ la suite d'espaces vectoriels définie par la relation de récurrence

$$\mathcal{A}_0^{<k>} = V \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n^{<k>} = \bigoplus_{\substack{0\leq n_0,\ldots,n_k\leq n-1\\ n_0+\ldots+n_k=n-1}} \mathcal{A}_{n_0}^{<k>} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_{n_k}^{<k>} \quad \text{pour} \quad n\geq 1\ .$$

Munissons l'espace vectoriel $\mathcal{A}^{<k>}(V) := \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{A}_n^{<k>}(V)$ de la multiopération induite par la $(k+1)$-concaténation : pour tous $w_i \in \mathcal{A}_{n_i}^{<k>}(V)$ où $i \in |_0^k$ et $n_i \in \mathbf{N}$, nous posons

$$(w_0 \ldots w_k) := w_0 \otimes \ldots \otimes w_k \in \mathcal{A}_n^{<k>}(V) \quad \text{où} \quad n = n_0 + \ldots + n_k + 1\ .$$

Il est clair que nous avons défini sur $\mathcal{A}^{<k>}(V)$ une structure d'algèbre $(k+1)$-aire.

Proposition 8. — *L'algèbre $(k+1)$-aire $\mathcal{A}^{<k>}(V)$, munie de l'inclusion canonique $\iota : V = \mathcal{A}_0^{<k>} \hookrightarrow \mathcal{A}^{<k>}(V)$, est l'algèbre $(k+1)$-aire libre sur l'espace vectoriel V .*

Démonstration. — Il nous reste à vérifier l'universalité pour les applications linéaires de V dans une algèbre $(k+1)$-aire. Soit $f : V \to A$ une telle application. Par définition de la multiopération sur $\mathcal{A}^{<k>}(V)$, les restrictions $\tilde{f}_j := \tilde{f}_{|\mathcal{A}_j^{<k>}}$ de tout morphisme d'algèbres $\tilde{f} : \mathcal{A}^{<k>}(V) \to A$ doivent satisfaire à la relation de récurrence

$$\tilde{f}_n(w_0 \otimes \ldots \otimes w_k) = (\tilde{f}_{n_0}(w_0) \ldots \tilde{f}_{n_k}(w_k)) \quad \text{où} \quad n_0 + \ldots + n_k = n-1\ .$$

Ceci assure l'unicité d'un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires $\tilde{f} : \mathcal{A}^{<k>}(V) \to A$, tel que $\tilde{f} \circ \iota = f$, puisque $\tilde{f}_0 = \tilde{f} \circ \iota$.

Par construction, il est clair que l'application linéaire $\tilde{f}$, définie par la relation de récurrence ci-dessus et par $\tilde{f}_0 = f$, est un morphisme d'algèbres qui prolonge f. ■

9. Série de Poincaré de $\mathcal{A}^{<k>}(V)$.— On observera que l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n^{<k>}(V)$ est isomorphe à un nombre de copies de $V^{\otimes nk+1}$ égal à $a_n^{<k>}$ où la suite $(a_n^{<k>})_{n\geq 0}$ est définie par la relation de récurrence

$$a_0^{<k>} = 1 \quad \text{et} \quad a_n^{<k>} = \sum_{\substack{0\leq n_0,\ldots,n_k\leq n-1\\ n_0+\ldots+n_k=n-1}} a_{n_0}^{<k>} \cdots a_{n_k}^{<k>} \quad \text{pour} \quad n\geq 1.$$

Par exemple, on a

$$a_1^{<k>} = 1,\ a_2^{<k>} = k{+}1,\ a_3^{<k>} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2},\ a_4^{<k>} = \frac{(k+1)(16k^2+20k+6)}{6}\ .$$

Ainsi, la série formelle $Y = \sum_{n\geq 0} a_n^{<k>} X^{nk+1}$ vérifie l'équation $Y^{k+1} = Y - X$.

10 Remarque.— On peut aussi voir l'algèbre $(k+1)$-aire $\mathcal{A}^{<k>}(V)$ comme l'espace vectoriel engendré par les arbres $(k+1)$-aires (c'est-à-dire les arbres dont chaque sommet admet exactement $(k+1)$ arêtes rentrantes), les feuilles d'iceux étant paramétrées par V. La multiopération consiste alors à «rabouter» les racines (voir *figure* 1).

3.2. Algèbre $(k+1)$-aire totalement associative libre.— Soit V un espace vectoriel et soit $T^{<k>}(V)$ l'espace vectoriel suivant :

$$T^{<k>}(V) := V \ \oplus \ V^{\otimes\, k+1} \ \oplus \ldots \oplus \ V^{\otimes\, nk+1} \ \oplus \ldots \quad .$$

Considérons la multiopération induite par la $(k+1)$-concaténation :

$$(w_0 \ldots w_k) := x_0^0 \otimes \ldots \otimes x_{n_0 k}^0 \otimes x_0^1 \otimes \ldots \otimes x_{n_k k}^k \tag{3.2.1}$$

pour tous $w_i = x_0^i \otimes \ldots \otimes x_{n_i k}^i \in V^{\otimes\, n_i k+1}$. Comme nous avons l'égalité

$$(n_0 k + 1) + \ldots + (n_k k + 1) = (n_0 + \ldots + n_k + 1)k + 1 \ ,$$

il est clair que nous avons ainsi défini sur l'espace $T^{<k>}(V)$ une structure d'algèbre $(k+1)$-aire totalement associative. De plus, l'élément générique $w = x_0 \otimes \ldots \otimes x_{nk}$ de $V^{\otimes\, nk+1}$ s'obtient comme produit itéré

$$w = (\ldots((x_0 \ldots x_k)x_{k+1} \ldots x_{2k}) \ldots x_{nk}) \ . \tag{3.2.2}$$

Proposition 11. — *L'algèbre $(k+1)$-aire $t\mathcal{A}s^{<k>}(V) := (T^{<k>}(V), (3.2.1))$, munie de l'inclusion canonique $V \hookrightarrow T^{<k>}(V)$, est l'algèbre $(k+1)$-aire totalement associative libre sur l'espace vectoriel V.*

Démonstration. — Vérifions l'universalité pour les applications linéaires de V dans une algèbre $(k+1)$-aire totalement associative. Soit $f : V \to A$ une telle application. Il est clair que l'espace vectoriel $T^{<k>}(V)$ est engendré par les éléments $w = x_0 \otimes \ldots \otimes x_{nk}$ de $V^{\otimes\, nk+1}$ où $n \in \mathrm{N}$. En vertu de la relation (3.2.2), tout morphisme d'algèbres $\tilde{f} : T^{<k>}(V) \to A$ prolongeant f est nécessairement donné par la formule

$$\tilde{f}(w) := (\ldots((f(x_0) \ldots f(x_k))f(x_{k+1}) \ldots f(x_{2k})) \ldots f(x_{nk})) \ . \tag{3.2.3}$$

D'où l'unicité d'un tel morphisme. On vérifie aisément que la formule (3.2.3) définit bien un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires. ■

3.3. Algèbre $(k+1)$-aire symétrique et totalement associative libre.— Soit V un espace vectoriel et soit $T^{<k>}(V)_{sym}$ le quotient de l'algèbre $(k+1)$-aire $t\mathcal{A}s^{<k>}(V)$ par l'idéal multilatère $\mathcal{I}_{sym}$ engendré par les éléments de la forme

$$(x_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(k)}) - (x_0 \ldots x_k) \quad \text{où} \quad x_i \in V \quad \text{et} \quad \sigma \in \mathrm{S}_{k+1} \ .$$

En tant qu'espace vectoriel nous avons

$$T^{<k>}(V)_{sym} = V \ \oplus \ (V^{\otimes\, k+1})_{\mathrm{S}_{k+1}} \ \oplus \ldots \oplus \ (V^{\otimes\, nk+1})_{\mathrm{S}_{nk+1}} \ \oplus \ldots$$

où $(V^{\otimes nk+1})_{\mathrm{S}_{nk+1}}$ désigne l'espace des coinvariants pour l'action naturelle du groupe S_{nk+1} sur l'espace vectoriel $V^{\otimes nk+1}$.

Il est clair que la multiopération (3.2.2) induit sur l'espace $T^{<k>}(V)_{sym}$ une structure d'algèbre $(k+1)$-aire symétrique et totalement associative. Notons-la $st\mathcal{A}s^{<k>}(V)$; comme conséquence immédiate de la Proposition 11, nous avons le

Corollaire 12. — *L'algèbre $(k+1)$-aire $st\mathcal{A}s^{<k>}(V)$, munie de l'inclusion canonique $V \hookrightarrow T^{<k>}(V)_{sym}$, est l'algèbre $(k+1)$-aire symétrique et totalement associative libre sur l'espace vectoriel V .* ■

3.4. Algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre.— Soit V un espace vectoriel et soit $(p\mathcal{A}s_n^{<k>}(V))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'espaces vectoriels définie par la relation de récurrence

$$p\mathcal{A}s_0^{<k>} = V \text{ et } p\mathcal{A}s_n^{<k>} = \bigoplus_{\substack{0\le n_1,\dots,n_k\le n-1\\ n_1+\dots+n_k=n-1}} V\otimes p\mathcal{A}s_{n_1}^{<k>}\otimes\dots\otimes p\mathcal{A}s_{n_k}^{<k>} \text{ pour } n\geq 1.$$

L'espace vectoriel $p\mathcal{A}s_n^{<k>}(V)$ est isomorphe à un nombre de copies de $V^{\otimes nk+1}$ égal à $p_n^{<k>}$ où la suite d'entiers $(p_n^{<k>})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$p_0^{<k>} = 1 \quad \text{et} \quad p_n^{<k>} = \sum_{\substack{0\le n_1,\dots,n_k\le n-1\\ n_1+\dots+n_k=n-1}} p_{n_1}^{<k>}\cdots p_{n_k}^{<k>} \quad \text{pour} \quad n\geq 1.$$

Un calcul immédiat nous donne les premiers coefficients

$$p_1^{<k>} = 1,\ p_2^{<k>} = k,\ p_3^{<k>} = \frac{k(3k-1)}{2},\ p_4^{<k>} = \frac{(k+1)(8k^2-6k+1)}{6}\ .$$

On munit l'espace vectoriel $p\mathcal{A}s^{<k>}(V) := \bigoplus_{n\geq 0} p\mathcal{A}s_n^{<k>}(V)$ de la multiopération définie par récurrence sur *le degré relatif* du premier facteur : pour tous $W_i \in p\mathcal{A}s_{n_i}^{<k>}(V)$ où $i\in |_0^k$ et $n_i\in\mathbb{N}$, on pose

$$(W_0\dots W_k) := W_0\otimes\dots\otimes W_k \quad \text{si} \quad n_0 = 0 \quad \textit{i.e. } W_0\in V\ , \tag{3.4.1}$$

et, si $n_0\geq 1$ et pour $W_0 = w_0^0\otimes\dots\otimes w_k^0$ avec $w_0^0\in V$, on pose

$$(W_0\dots W_k) := -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{ik} w_0^0\otimes\dots\otimes w_{i-1}^0\otimes(w_i^0\dots w_k^0 W_1\dots W_i)\otimes W_{i+1}\otimes\dots\otimes W_k. \tag{3.4.2}$$

Proposition 13. — *Supposons que l'entier k soit impair. Alors l'espace vectoriel $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$, muni de la multiopération définie par les formules (3.4.1) et (3.4.2) et* *de l'inclusion canonique* $\iota : V = p\mathcal{A}s_0^{<k>}(V) \hookrightarrow p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$, *est l'algèbre* $(k+1)$*-aire partiellement associative libre sur l'espace vectoriel* V*.*

Démonstration. — Nous allons vérifier l'associativité partielle par récurrence sur le degré relatif du premier facteur. Soient $W_i \in p\mathcal{A}s_{n_i}^{<k>}(V)$ où $i \in |_0^{2k}$:

- Si $n_0 = 0$, c'est-à-dire que $W_0 \in V$, alors nous avons

$$\begin{aligned} & ((W_0 \ldots W_k)W_{k+1} \ldots W_{2k}) \\ = \quad & ((W_0 \otimes \ldots \otimes W_k)W_{k+1} \ldots W_{2k}) && \text{par } (3.4.1) \\ = -& \sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} W_0 \otimes \ldots \otimes W_{i-1} \otimes (W_i \ldots W_{k+i}) \otimes W_{k+i+1} \otimes \ldots \otimes W_{2k} && \text{par } (3.4.2) \\ = -& \sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} (W_0 \ldots W_{i-1}(W_i \ldots W_{k+i})W_{k+i+1} \ldots W_{2k}) && \text{par } (3.4.1), \end{aligned}$$

d'où la relation d'associativité partielle lorsque $n_0 = 0$.

- Supposons que $W_0 = w_0^0 \otimes \ldots \otimes w_k^0$ avec $w_0^0 \in V$ et $n_0 \geq 1$, puis posons

$$Z_i := (W_0 \ldots W_{i-1}(W_i \ldots W_{k+i})W_{k+i+1} \ldots W_{2k}) \quad \text{où } i \in |_0^k .$$

Alors, par les relations (3.4.1) et (3.4.2), nous avons $Z_0 = \sum_{1 \leq p,q \leq k} (-1)^{k(p+q)} Z_0^{p,q}$ où

$$Z_0^{p,q} = \begin{cases} (w_0^0 \ldots w_{q-1}^0 (w_q^0 \ldots w_{p-1}^0 (w_p^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_p) \ldots W_{k+q}) \ldots W_{2k}), \ q \leq p \\ (w_0^0 \ldots w_{p-1}^0 (w_p^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_p) \ldots (W_q \ldots W_{k+q}) \ldots W_{2k}), \ p < q . \end{cases}$$

De même, pour tout $i \in |_1^k$, nous obtenons $Z_i = -\sum_{j=1}^{k} (-1)^{jk} Z_i^j$ où

$$Z_i^j = \begin{cases} (w_0^0 \ldots w_{j-1}^0 (w_j^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_j) \ldots (W_i \ldots W_{k+i}) \ldots W_{2k}), \ j < i \\ (w_0^0 \ldots w_{j-1}^0 (w_j^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_{i-1}(W_i \ldots W_{k+i}) \ldots W_{k+j}) \ldots W_{2k}), i \geq j. \end{cases}$$

Puisque $Z_0^{p,q} = Z_q^p$ pour tout couple d'entiers (p,q) tels que $p+1 \leq q$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik} Z_i &= \sum_{1 \leq q \leq p \leq k} (-1)^{k(p+q)} Z_0^{p,q} - \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{k(i+j)} Z_i^j \\ &= \sum_{q=1}^{k} \left(\sum_{p=q}^{k} (-1)^{k(p+q)} Z_0^{p,q} - \sum_{i=1}^{q} (-1)^{k(i+q)} Z_i^q \right) . \end{aligned}$$

Soit $q \in |_1^k$; l'hypothèse de récurrence appliquée à $(w_q^0, \ldots, w_k^0, W_1, \ldots, W_{k+q})$ se traduit par la relation

$$Y_q := \sum_{p=q}^{k} (-1)^{k(p+q)} (w_q^0 \ldots w_{p-1}^0 (w_p^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_p) W_{p+1} \ldots W_{k+q})$$
$$+ (-1)^{k^2} \sum_{i=1}^{q} (-1)^{k(i+q)} (w_q^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_{i-1} (W_i \ldots W_{k+i}) W_{k+i+1} \ldots W_{k+q}) \ = \ 0 \ .$$

Comme l'entier k est impair, nous en déduisons que

$$\sum_{p=q}^{k} (-1)^{k(p+q)} Z_0^{p,q} \ - \ \sum_{i=1}^{q} (-1)^{k(i+q)} Z_i^q = (w_0^0 \ldots w_{q-1}^0 Y_q W_{k+q+1} \ldots W_{2k}) = 0 \ .$$

Ainsi nous avons montré que l'algèbre $(k+1)$-aire $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$ est partiellement associative.

Soit f une application linéaire de V dans une algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative A. Comme l'espace vectoriel $p\mathcal{A}s_n^{<k>}(V)$ est engendré par les éléments

$$w_0 \otimes \ldots \otimes w_k = (w_0 \ldots w_k) \quad \text{où} \quad w_0 \in V,\ w_i \in p\mathcal{A}s_{n_i}^{<k>}(V),\ i \in |_1^k,$$

les restrictions $\tilde{f}_n := \tilde{f}_{|p\mathcal{A}s_n^{<k>}}$ de tout morphisme d'algèbres $\tilde{f} : p\mathcal{A}s^{<k>}(V) \to A$, doivent satisfaire à la relation

$$\tilde{f}_n(w_0 \otimes \ldots \otimes w_k) = (\tilde{f}_0(w_0) \tilde{f}_{n_1}(w_1) \ldots \tilde{f}_{n_k}(w_k)) \ ; \tag{3.4.3}$$

d'où l'unicité d'un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f}_0 = \tilde{f} \circ \iota = f$.

Montrons, par récurrence sur le degré relatif du premier facteur, que l'application linéaire $\tilde{f}$, dont les restrictions sont données par (3.4.3) et par $\tilde{f}_0 = f$, est un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires. Soient $W_i \in p\mathcal{A}s_{n_i}^{<k>}(V)$ où $i \in |_0^{2k}$:

- Si $n_0 = 0$, c'est-à-dire que $W_0 \in V$, alors par définition nous avons

$$\tilde{f}(W_0 \ldots W_k) = \tilde{f}(W_0 \otimes \ldots \otimes W_k) = (\tilde{f}_0(W_0) \ldots \tilde{f}_{n_k}(W_k)) = (\tilde{f}(W_0) \ldots \tilde{f}(W_k)) \ .$$

- Supposons que $n_0 \geq 1$ et écrivons

$$W_0 = w_0^0 \otimes \ldots \otimes w_k^0 \quad \text{avec} \quad w_0^0 \in V \quad \text{et} \quad w_i \in p\mathcal{A}s_{n_i^0}^{<k>}(V),\ i \in |_1^k.$$

Par les relations (3.4.2) et (3.4.3), nous avons

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(W_0 \ldots W_k) \\ &= -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} \tilde{f}(w_0^0 \otimes \ldots \otimes w_{i-1}^0 \otimes (w_i^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_i) \otimes W_{i+1} \otimes \ldots \otimes W_k) \\ &= -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} (\tilde{f}_0(w_0^0) \ldots \tilde{f}_{n_{i-1}^0}(w_{i-1}^0) \tilde{f}(w_i^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_i) \ldots \tilde{f}_{n_k}(W_k)) \ . \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\tilde{f}(w_i^0 \dots w_k^0 W_1 \dots W_i) = (\tilde{f}_{n_i^0}(w_i^0) \dots \tilde{f}_{n_k^0}(w_k^0) \tilde{f}_{n_1}(W_1) \dots \tilde{f}_{n_i}(W_i)) \ .$$

Comme l'algèbre $(k+1)$-aire A est partiellement associative, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{f}(W_0 \dots W_k) = & \ ((\tilde{f}_0(w_0^0) \dots \tilde{f}_{n_k^0}(w_k^0)) \tilde{f}_{n_1}(W_1) \dots \tilde{f}_{n_k}(W_k)) \\ = & \ (\tilde{f}_{n_0}(W_0) \dots \tilde{f}_{n_k}(W_k)) = (\tilde{f}(W_0) \dots \tilde{f}(W_k)) \ . \end{aligned}$$

Ainsi nous avons montré que l'application linéaire $\tilde{f} : p\mathcal{A}s^{<k>}(V) \to A$ est un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires ; ce qui achève de démontrer l'universalité de l'algèbre $(k+1)$-aire $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$. ■

14 Remarque.— En d'autres termes, on peut identifier l'espace sous-jacent à l'algèbre $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$ à l'espace vectoriel engendré par les arbres $(k+1)$-aires dont la première arête gauche de chaque sommet est une feuille (voir *figure* 2).

3.5. Enveloppe universelle d'une algèbre de Lie $(k+1)$-aire .— *Dans cette partie nous supposons que l'entier k est impair.* Soit $(\mathcal{L}, [\quad])$ une algèbre de Lie $(k+1)$-aire. Nous cherchons une algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative $pU^{<k>}(\mathcal{L})$, munie d'un morphisme d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires $\varphi : \mathcal{L} \to pU^{<k>}(\mathcal{L})_L$, et ayant la propriété universelle suivante.

Pour toute algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative A et pour tout morphisme d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires $g : \mathcal{L} \to A_L$, il existe un unique morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires $\tilde{g} : pU^{<k>}(\mathcal{L}) \to A$ tel que l'on ait $\tilde{g}_L \circ \varphi = g$

Nous allons construire la solution de ce problème universel. Soit $p\mathcal{A}s^{<k>}(\mathcal{L})$ l'algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ et soit $\mathcal{I}(\mathcal{L})$ l'idéal multilatère de $p\mathcal{A}s^{<k>}(\mathcal{L})$ engendré par les éléments de la forme

$$(3.5.1) \qquad [x_0 \dots x_k] - \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}) \quad \text{où} \quad x_0, \dots x_k \in \mathcal{L}\ .$$

Ensuite posons $pU^{<k>}(\mathcal{L}) := p\mathcal{A}s^{<k>}(\mathcal{L})/\mathcal{I}(\mathcal{L})$ l'algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative quotient, et notons $\varphi : \mathcal{L} \to pU^{<k>}(\mathcal{L})_L$ l'inclusion naturelle d'espaces vectoriels. Alors, pour tous $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{L}$, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi([x_0 \dots x_k]) &= [x_0 \dots x_k] = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}) && \text{dans} \quad pU^{<k>}(\mathcal{L}) \\ &= [x_0 \dots x_k] = [\varphi(x_0) \dots \varphi(x_k)] && \text{dans} \quad pU^{<k>}(\mathcal{L})_L. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est un morphisme d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires.

Proposition 15. — *Soit k un entier impair. L'algèbre $(k+1)$-aire $pU^{<k>}(\mathcal{L})$, munie du morphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{L} \hookrightarrow pU^{<k>}(\mathcal{L})_L$, est l'enveloppe universelle de l'algèbre de Lie $(k+1)$-aire $\mathcal{L}$ dans la catégorie des algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives.*

Démonstration. — Soit A une algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative et soit $g : \mathcal{L} \to A_L$ un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires. Comme l'algèbre $(k+1)$-aire $pU^{<k>}(\mathcal{L})$ est engendrée par l'espace vectoriel $\mathcal{L} = \varphi(\mathcal{L})$, tout morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires $\tilde{g} : pU^{<k>}(\mathcal{L}) \to A$, tel que $\tilde{g}_L \circ \varphi = g$, est déterminé de manière unique.

Par ailleurs, l'universalité de $p\mathcal{A}s^{<k>}(\mathcal{L})$ (*cf.* Proposition 13) assure l'existence d'un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires $\tilde{g} : p\mathcal{A}s^{<k>}(\mathcal{L}) \to A$ qui prolonge l'application linéaire $g : \mathcal{L} \to A_L = A$. Pour tous $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{L}$ nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{g}([x_0 \dots x_k]) &= g([x_0 \dots x_k]) && \text{car } [x_0 \dots x_k] \in \mathcal{L} \\ &= [g(x_0) \dots g(x_k)] && \text{dans } A_L \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(g(x_{\sigma(0)}) \dots g(x_{\sigma(k)})) && \text{par (2.3.4)} \\ &= \tilde{g}(\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)})) && \text{par (3.4.3)}\ . \end{aligned}$$

Par conséquent, le morphisme $\tilde{g}$ s'annule sur l'idéal $\mathcal{I}(\mathcal{L})$. Il induit donc par passage au quotient un morphisme d'algèbres $(k+1)$-aires (encore noté) $\tilde{g} : pU^{<k>}(\mathcal{L}) \to A$. L'égalité $\tilde{g}_L \circ \varphi = g$ est évidente par construction. ■

16 Remarque.— De manière analogue, nous avons une notion d'enveloppe universelle dans la catégorie des algèbres $(k+1)$-aires totalement associatives : il suffit de reprendre ce qui précède en remplaçant le mot «partiellement» (resp. l'algèbre $p\mathcal{A}s^{<k>}(\mathcal{L})$) par le mot «totalement» (resp. l'algèbre $t\mathcal{A}s^{<k>}(\mathcal{L})$). Nous noterons $tU^{<k>}(\mathcal{L})$ l'algèbre $(k+1)$-aire totalement associative ainsi obtenue.

3.6. Algèbre de Lie $(k+1)$-aire libre.— *Dans cette partie nous supposons que l'entier k est impair.* Nous construisons l'algèbre de Lie $(k+1)$-aire libre sur un espace vectoriel V. L'on trouvera dans l'article de Ph. Hanlon et M. Wachs (*cf.* [H-W]) une description en termes d'arbres indépendante de la parité de k.

Soit V un espace vectoriel et soit $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$ l'algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre sur V. Considérons la structure d'algèbre de Lie $(k+1)$-aire $(p\mathcal{A}s^{<k>}(V)_L,\ [\quad])$ canoniquement associée (*cf.* Proposition 4). Soit $\mathcal{L}^{<k>}(V)$ la sous-algèbre de $(p\mathcal{A}s^{<k>}(V)_L,\ [\quad])$ engendrée par l'espace vectoriel V. Alors nous avons

Proposition 17. — *Supposons que l'entier k soit impair. L'algèbre $(k+1)$-aire $\mathcal{L}^{<k>}(V)$, munie de l'inclusion canonique $\iota : V \hookrightarrow \mathcal{L}^{<k>}(V)$, est l'algèbre de Lie $(k+1)$-aire libre sur l'espace vectoriel V.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $(k+1)$-aire et soit $h : V \to \mathcal{L}$ une application linéaire.

Comme l'algèbre de Lie $(k+1)$-aire $\mathcal{L}^{<k>}(V)$ est engendrée par V, tout morphisme d'algèbres défini sur $\mathcal{L}^{<k>}(V)$ est déterminé par ses valeurs sur $V = \iota(V)$. Par conséquent, s'il existe un morphisme d'algèbres $\tilde{h} : \mathcal{L}^{<k>}(V) \to \mathcal{L}$ tel que $\tilde{h} \circ \iota = h$, il est unique.

Considérons l'application linéaire $f := \varphi \circ h : V \to Up^{<k>}(\mathcal{L})$ où φ désigne l'inclusion de $\mathcal{L}$ dans son enveloppe universelle $pU^{<k>}(\mathcal{L})$. Par la Proposition 13, il existe un morphisme d'algèbres $\tilde{f} : p\mathcal{A}s^{<k>}(V) \to pU^{<k>}(\mathcal{L})$ coïncidant avec f sur V. Soit $\tilde{f}_L : p\mathcal{A}s^{<k>}(V)_L \to Up^{<k>}(\mathcal{L})_L$ le morphisme d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires induit par $\tilde{f}$. Pour tous $x_0, \ldots, x_k \in V$, nous avons

$$\tilde{f}_L([x_0 \ldots x_k]) = [\tilde{f}(x_0) \ldots \tilde{f}(x_k)] = [f(x_0) \ldots f(x_k)] \ \in \mathcal{L} \ .$$

Par conséquent la restriction $\tilde{h}$ de $\tilde{f}_L$ sur l'algèbre $\mathcal{L}^{<k>}(V)$ est à valeurs dans $\mathcal{L} \subset pU^{<k>}(\mathcal{L})_L$, et prolonge de manière évidente l'application linéaire h. ■

4.— Cas pathologiques

Nous montrons qu'il existe des exemples d'algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives dans le cas particulier où l'entier k est pair ; nous en déduisons l'existence d'algèbres de Lie $(k+1)$-aires pour cette même parité.

4.1.— Soit $B^{<k>}$ un espace vectoriel de dimension $(k+2)$ et soit $\{e_\infty, e_0, \cdots, e_k\}$ une base de $B^{<k>}$. Munissons $B^{<k>}$ de la multiopération telle que tout multiproduit soit nul à l'exception des suivants :

$$(e_\infty \dots e_\infty) = e_0 \ , \quad (e_0 e_\infty \cdots e_\infty) = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} e_i \ ,$$
$$(\underbrace{e_\infty \dots e_\infty}_{j \text{ facteurs}} e_0 e_\infty \dots e_\infty) = e_j \ , \quad j = 1, \cdots, k.$$

Par construction, il est clair que $B^{<k>}$ est une algèbre $(k+1)$-aire partiellement et non totalement associative, et ce pour tout entier k.

4.2.— Soit V un espace vectoriel de dimension $(k+1)$ et soit $\{f_0, \cdots, f_k\}$ une base de V. D'après la Proposition 6 l'algèbre $(k+1)$-aire $t\mathcal{A}s^{<k>}(V) \otimes B^{<k>}$ est partiellement associative. Nous pouvons donc considérer l'algèbre de Lie $(k+1)$-aire canoniquement associée $(t\mathcal{A}s^{<k>}(V) \otimes B^{<k>})_L$. Son crochet n'est pas identiquement nul puisque nous avons :

$$[f_0 \otimes e_\infty \dots f_k \otimes e_\infty] = (\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)(f_{\sigma(0)} \dots f_{\sigma(k)})) \otimes e_0 \neq 0.$$

Ainsi nous avons construit une algèbre de Lie $(k+1)$-aire non abélienne pour tout entier k.

18 Remarques.— Nous avons dû «grossir» l'algèbre $B^{<k>}$ parce que son algèbre de Lie associée $(B^{<k>})_L$ est abélienne.

Par ailleurs, la plus petite algèbre de Lie $(k+1)$-aire non abélienne a pour dimension $(k+1)$. On peut la décrire en prenant une base $\{x_0, \cdots, x_k\}$ et en décrétant que tous les crochets sont nuls à l'exception de

$$[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}] := \mathrm{sgn}(\sigma) x_0 \ , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{S}_{k+1} \ .$$

II.— OPÉRADES QUADRATIQUES $(k+1)$-AIRES

Nous nous proposons de généraliser les constructions de V.Ginzburg et M. Kapranov afin d'obtenir des opérades pour les algèbres $(k+1)$-aires. Nous appliquons cette généralisation en déterminant les opérades des algèbres $(k+1)$-aires rencontrées précédemment. Puisque nous travaillons avec des opérades non nécessairement unitaires, nous suivrons les notations de Loday (*cf.* [Lo]).

1.— Définitions générales

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action du groupe symétrique S_{k+1}. Considérons l'opérade libre $\mathcal{T}(E)$ construite sur la famille d'espaces vectoriels $\{E(n) = 0,\ n \neq k+1;\ E(k+1) = E\}$. Puisque cette famille est concentrée en degré $(k+1)$, seules les classes d'isomorphisme d'arbres $(k+1)$-aires (c'est-à-dire dont chaque sommet possède exactement $(k+1)$ arêtes rentrantes) apportent une contribution non triviale dans $\mathcal{T}(E)$. En d'autres termes, nous avons

$$\mathcal{T}(E)(n) \;=\; 0 \text{ , si } n \not\equiv 1 \; mod \; k \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(E)(mk+1) \;=\; \bigoplus_{\substack{(mk+1)-\text{arbres} \\ (k+1)-\text{aires } T}} E(T) \; .$$

Lorsque $R \subset \mathcal{T}(E)(2k+1)$ est un sous-espace vectoriel stable sous l'action de S_{2k+1}, nous désignons par (R) l'idéal de $\mathcal{T}(E)$ engendré par R, et nous notons $\mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, E, R) := \mathcal{T}(E)/(R)$ l'opérade quotient. Nous appelons *opérade quadratique $(k+1)$-aire*, toute opérade de la forme $\mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, E, R)$.

Notons $E^{\vee} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(E, \mathrm{K}) \otimes (\mathbf{sgn})$ le dual linéaire tensorisé par la représentation signature de S_{k+1}, et $R^{\perp}$ l'orthogonal de R dans $\mathcal{T}(E^{\vee})(2k+1) \cong \mathcal{T}(E)(2k+1)^{\vee}$. Par définition, *l'opérade duale* de l'opérade quadratique $(k+1)$-aire $\mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, E, R)$ est l'opérade

$$\mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, E, R)^{!} := \mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, E^{\vee}, R^{\perp}).$$

Il est clair que l'on retrouve la même chose lorsque l'on prend deux fois la duale d'une opérade quadratique $(k+1)$-aire :

$$(\mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, E, R)^{!})^{!} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, E, R).$$

Soient $\mathcal{P}^{<k>}(\mathbf{K}, E, R)$ et $\mathcal{P}^{<k>}(\mathbf{K}, E', R')$ des opérades quadratiques $(k+1)$-aires et soit $\phi : E \to E'$ un morphisme S_{k+1}-équivariant. Alors le morphisme ϕ induit fonctoriellement un morphisme d'opérades libres $\Phi : \mathcal{T}(E) \to \mathcal{T}(E')$. Nous appelons *morphisme* (*resp. isomorphisme*) *d'opérades quadratiques* $(k+1)$*-aires*, tout morphisme (*resp.* isomorphisme) S_{k+1}-équivariant $\phi : E \to E'$ tel que $\Phi(R) \subset R'$ (*resp.* $\Phi(R) = R'$).

2.— Description du S_{2k+1}-module $\mathcal{T}(E)(2k+1)$

Nous allons caractériser la structure de S_{2k+1}-module de l'espace $\mathcal{T}(E)(2k+1)$:

Proposition 1. — *Le S_{2k+1}-module $\mathcal{T}(E)(2k+1)$ s'identifie au module induit $\mathrm{Ind}_{\mathrm{S}_{k+1}\times\mathrm{S}_k}^{\mathrm{S}_{2k+1}}(E\otimes E)$. L'espace vectoriel $\mathcal{T}(E)(2k+1)$ est donc isomorphe à un nombre de copies de $E\otimes E$ égal au coefficient binômial $\binom{2k+1}{k+1}$.*

Nous allons démontrer ce résultat en deux étapes. Nous donnons d'abord une présentation générale du produit $\mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_q$ comme sous-groupe de S_{p+q} et les classes à gauche. Ensuite nous montrons que l'espace $\mathcal{T}(E)(2k+1)$ se réalise ainsi.

2.1.— Soient p et q des entiers au moins égaux à 1. Nous considérons le groupe produit $\mathrm{S}_p\times\mathrm{S}_q$ comme un sous-groupe de S_{p+q}, S_p opérant sur les p premiers éléments et S_q sur les q derniers. Plus précisément, on définit un homomorphisme injectif de groupes en associant à tout couple (σ,τ) de $\mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_q$, l'élément de S_{p+q} donné par :

$$(\sigma,\tau) : j \longmapsto \begin{cases} \sigma(j) & \text{si } 0 \le j \le p-1 \\ \tau(j-p)+p & \text{si } p \le j \le p+q-1 \ . \end{cases}$$

Lemme 2. — *Les classes à gauche de $\mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_q$ dans S_{p+q} sont déterminées par les (p,q)-shuffles i.e.,*

$$\mathrm{S}_{p+q} = \coprod_{s\in \mathrm{Sh}_{p,q}} s.(\mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_q) \ .$$

Démonstration. — Remarquons pour commencer que l'indice de $\mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_q$ dans S_{p+q} est égal à $(p+q)!/p!q!$, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble $\mathrm{Sh}_{p,q}$. Il suffit donc de montrer que deux (p,q)-shuffles distincts ne peuvent être dans la même classe à gauche.

En effet, supposons que l'on ait $s' = s\circ(\sigma,\tau)$ où $s', s \in \mathrm{Sh}_{p,q}$ et $(\sigma,\tau) \in \mathrm{S}_p \times\ \mathrm{S}_q$. Alors nous avons

$$\sigma^{-1}(j) \in |_0^{p-1} \quad \text{et} \quad s'(\sigma^{-1}(j)) = s\circ(\sigma,\tau)(\sigma^{-1}(j)) = s(j), \quad \forall\, j \in |_0^{p-1}.$$

Par conséquent nous obtenons $s(j) \in \{s'(0),\ldots,s'(p-1)\}$ pour tout $j \in |_0^{p-1}$. Et puisque les permutations sont des injections, les deux ensembles

$$\{s(0),\ldots,s(p-1)\} \quad \text{et} \quad \{s'(0),\ldots,s'(p-1)\},$$

qui ont même cardinal, sont égaux. Nous en déduisons l'égalité des (p,q)-shuffles s et s'. Ce qui achève de démontrer le Lemme. ■

3 Remarque.— Dans la pratique, on procède de la manière suivante. Etant donné un élément λ de S_{p+q}, on range dans l'ordre croissant les parties $\{\lambda(0),\dots,\lambda(p-1)\}$ et $\{\lambda(p),\dots,\lambda(p+q-1)\}$; cet ordre caractérise un unique (p,q)-shuffle qui détermine la classe de λ.

2.2.— Rappelons que par définition nous avons

$$\mathcal{T}(E)(2k+1) \;=\; \bigoplus_{\substack{(2k+1)-\text{arbres}\\ (k+1)-\text{aires } T}} E(T) \quad \text{et} \quad E(T) \;=\; \bigotimes_{\substack{\text{sommets}\\ v\in T}} E(In(v))\ ,$$

le groupe S_{2k+1} opérant sur $\mathcal{T}(E)(2k+1)$ par permutation des feuilles des arbres.

Tout $(2k+1)$-arbre $(k+1)$-aire T admet exactement deux sommets, et sa classe d'isomorphisme détermine un unique $(k+1,k)$-shuffle s caractérisé par

$$\{s(0),\dots,s(k)\} := \{\text{numéros des arêtes rentrantes dans le premier sommet de } T\}$$

Munissons l'espace vectoriel $E\otimes E$ de l'action diagonale du produit $\mathrm{S}_{k+1}\times\mathrm{S}_k$ déduite de celle de S_{k+1} sur E (S_k étant vu comme sous-groupe de S_{k+1} laissant invariant un élément préalablement fixé dans $\{0,\dots,k\}$: sur la figure, l'arête sortant du sommet v_1). Comme les $(k+1,k)$-shuffles constituent un système de représentants des classes à gauche de $\mathrm{S}_{k+1}\times\mathrm{S}_k$ dans S_{2k+1} (Lemme 2), nous avons

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{S}_{k+1}\times\mathrm{S}_k}^{\mathrm{S}_{2k+1}}(E\otimes E) \cong \bigoplus_{s\in\mathrm{Sh}_{k+1,k}} s.(E\otimes E)\ .$$

Pour tout $(k+1,k)$-shuffle s, la composante $s.(E\otimes E)$ correspond précisément à $E(T_s)$ où T_s est un représentant de la classe d'isomorphisme d'arbres déterminée par s. D'où la Proposition 1 ■

3.— Exemples d'opérades des algèbres $(k+1)$-aires

Rappelons que lorsque $\mathcal{P}$ représente l'opérade des algèbres d'un certain type, $\mathcal{P}(n)$ s'identifie à la partie n-multilinéaire (*i.e.*, engendrée par les monômes contenant chaque x_i une fois et une seule) de l'algèbre du même type libre sur l'espace vectoriel de base $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Nous désignerons par $\mathbf{tAs}^{<k>}$ (resp. $\mathbf{pAs}^{<k>}$, resp. $\mathbf{stAs}^{<k>}$, resp. $\mathbf{Lie}^{<k>}$) l'opérade des algèbres $(k+1)$-aires totalement associatives (resp. partiellement associatives, resp. symétriques et totalement associatives, resp. de Lie).

3.1. L'opérade $\mathbf{tAs}^{<k>}$.— Nous avons vu que l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre $(k+1)$-aire totalement associative libre sur un espace V est donné par (*cf.* I-3.2) :

$$V \;\oplus\; V^{\otimes\, k+1} \;\oplus \ldots \oplus\; V^{\otimes\, mk+1} \;\oplus \ldots \quad .$$

Nous en déduisons que l'opérade $\mathbf{tAs}^{<k>}$ est telle que

$$\text{(3.1.1)} \qquad \begin{cases} \mathbf{tAs}^{<k>}(mk+1) = \mathbf{K}[\mathrm{S}_{mk+1}] & \text{(représentation régulière)} \\ \mathbf{tAs}^{<k>}(n) = 0 & \text{si } n \not\equiv 1 \; mod \; k \; . \end{cases}$$

L'espace vectoriel $E = \mathbf{tAs}^{<k>}(k+1)$ est alors de dimension $(k+1)!$ et est engendré par les éléments

$$\text{(3.1.2)} \qquad \mathbf{x}_\sigma := (x_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(k)}) \; , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{S}_{k+1} \; .$$

L'espace vectoriel $\mathcal{T}(\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1))(2k+1) \cong \binom{2k+1}{k+1}(E \otimes E)$ est donc de dimension $(2k+1)!(k+1)$ et est engendré par les éléments :

$$\text{(3.1.3)} \qquad \mathbf{x}_{\sigma,i} := (x_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(i-1)}(x_{\sigma(i)} \ldots x_{\sigma(i+k)})x_{\sigma(i+k+1)} \ldots x_{\sigma(2k)})$$

où $\sigma \in \mathrm{S}_{2k+1}$ et $i \in |_0^k$. Le sous-espace $R_{\mathbf{tAs}^{<k>}}$ est engendré par les $(2k+1)!k$ associateurs totaux

$$\text{(3.1.4)} \qquad \mathbf{y}_{\sigma,i} := \mathbf{x}_{\sigma,i} - \mathbf{x}_{\sigma,0} \; , \; \forall\, \sigma \in \mathrm{S}_{2k+1} \; , \; \forall\, i \in |_1^k \; .$$

Ainsi, nous avons

$$\mathbf{tAs}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathbf{K}, \mathbf{K}[\mathrm{S}_{k+1}], R_{\mathbf{tAs}^{<k>}}).$$

3.2. L'opérade $\mathbf{pAs}^{<k>}$.— Lorsque l'entier k est impair, nous savons que l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre sur un espace vectoriel V est donné par (*cf.* I-3.4) :

$$p_0^{<k>}.V \;\oplus\; p_1^{<k>}.V^{\otimes\, k+1} \;\oplus \ldots \oplus\; p_m^{<k>}.V^{\otimes\, mk+1} \;\oplus \ldots$$

où $p_m^{<k>}.V^{\otimes mk+1}$ signifie $p_m^{<k>}$ copies de $V^{\otimes mk+1}$. Par conséquent, l'opérade $\mathbf{pAs}^{<k>}$ est telle que

$$(3.2.1)\qquad \begin{cases} \mathbf{pAs}^{<k>}(mk+1) = p_m^{<k>}.\mathrm{K}[\mathrm{S}_{mk+1}] & \text{(représentation régulière)} \\ \mathbf{pAs}^{<k>}(n) = 0 & \text{si } n \not\equiv 1 \ mod\ k\ . \end{cases}$$

Puisque les espaces $\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1)$ et $\mathbf{pAs}^{<k>}(k+1)$ sont identiques, il en est de même pour les opérades libres $\mathcal{T}(\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1))$ et $\mathcal{T}(\mathbf{pAs}^{<k>}(k+1))$. Le sous-espace $R_{\mathbf{pAs}^{<k>}}$ est engendré par les $(2k+1)!$ associateurs partiels

$$(3.2.2)\qquad \mathbf{z}_\sigma := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik}\mathbf{x}_{\sigma,i}\ , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{S}_{2k+1}\ .$$

Ainsi, nous avons

$$\mathbf{pAs}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, \mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}], R_{\mathbf{pAs}^{<k>}}).$$

3.3. L'opérade $\mathbf{stAs}^{<k>}$.— Nous avons vu que l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre $(k+1)$-aire symétrique et totalement associative libre sur un espace vectoriel V est donné par (*cf.* I-3.3) :

$$V \ \oplus\ (V^{\otimes k+1})_{\mathrm{S}_{k+1}}\ \oplus \ldots \oplus\ (V^{\otimes nk+1})_{\mathrm{S}_{nk+1}}\ \oplus \ldots \quad .$$

Donc l'opérade $\mathbf{stAs}^{<k>}$ est telle que

$$(3.3.1)\qquad \begin{cases} \mathbf{stAs}^{<k>}(mk+1) = \mathbf{1} & \text{(représentation triviale)} \\ \mathbf{stAs}^{<k>}(n) = 0 & \text{si } n \not\equiv 1 \ mod\ k\ . \end{cases}$$

Ainsi, l'espace $E = \mathbf{stAs}^{<k>}(k+1)$ est engendré par l'élément $(x_0 \ldots x_k)$. L'espace $\mathcal{T}(\mathbf{stAs}^{<k>}(k+1))(2k+1) \cong \binom{2k+1}{k+1}(E \otimes E)$ est de dimension $\binom{2k+1}{k+1}$ et engendré par les éléments :

$$(3.3.2)\qquad \mathbf{s}_\sigma := ((x_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(k)})x_{\sigma(k+1)} \ldots x_{\sigma(2k)})\ , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}\ .$$

Le sous-espace S_{2k+1}-invariant $R_{\mathbf{stAs}^{<k>}}$ est engendré par les $(\binom{2k+1}{k+1} - 1)$ associateurs totaux symétriques

$$(3.3.3)\qquad \mathbf{st}_\sigma := \mathbf{s}_\sigma - \mathbf{s}_{id}\ , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k} \setminus \{\mathrm{id}\}\ .$$

Ainsi, nous avons

$$\mathbf{stAs}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, \mathbf{1}, R_{\mathbf{stAs}^{<k>}}).$$

3.4. L'opérade $\mathbf{Lie}^{<k>}$.— Lorsque l'entier k est impair, nous avons donné une construction de l'algèbre de Lie $(k+1)$-aire libre sur V, mais nous ne connaissons pas parfaitement la structure d'espace vectoriel sous-jacent. Toutefois, *l'antisymétrie* du crochet permet d'affirmer que l'espace vectoriel $E = \mathbf{Lie}^{<k>}(k+1)$ est engendré par l'élément $[x_0 \dots x_k]$ et est la représentation signature $(\mathbf{sgn})$ de S_{k+1}. L'espace $\mathcal{T}(\mathbf{Lie}^{<k>}(k+1))(2k+1) \cong \binom{2k+1}{k+1}.(E \otimes E)$ est donc de dimension $\binom{2k+1}{k+1}$ et est engendré par les éléments :

$$(3.4.1) \qquad \mathbf{l}_\sigma := [[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}] x_{\sigma(k+1)} \dots x_{\sigma(2k)}] \ , \quad \forall\, \sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k} \ .$$

Le sous-espace S_{2k+1}-invariant $R_{\mathbf{Lie}^{<k>}}$ est la représentation signature et est engendré par le relateur de Jacobi $J'(x_0, \dots, x_{2k})$. Et nous avons

$$\mathbf{Lie}^{<k>} = \mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, (\mathbf{sgn}), (\mathbf{sgn})).$$

4.— Dualités entre les opérades des algèbres $(k+1)$-aires

Théorème 4. — *Soit k un entier impair. Les opérades quadratiques $(k+1)$-aires $\mathbf{tAs}^{<k>}$ et $\mathbf{pAs}^{<k>}$ sont duales l'une de l'autre.*

Démonstration. — Comme dans [Gi-K, 2.1.11], introduisons sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}(\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1))(2k+1)$ le produit scalaire caractérisé par l'orthogonalité de la famille $(\mathbf{x}_{\sigma,i})$ et les relations

$$< \mathbf{x}_{\sigma,i}, \mathbf{x}_{\sigma,i} >:= (-1)^{k(i+1)} \mathrm{sgn}(\sigma) \ .$$

Nous allons montrer que l'annihilateur de l'espace $R_{\mathbf{tAs}^{<k>}}$ est l'espace $R_{\mathbf{pAs}^{<k>}}$. En effet, pour tout élément $z = \sum \alpha_{\tau,j} \mathbf{x}_{\tau,j}$ de $\mathcal{T}(\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1))(2k+1)$, nous avons

$$< \mathbf{y}_{\sigma,i}, z >= (-1)^k \mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha_{\sigma,0} - (-1)^{ik} \alpha_{\sigma,i}) \ .$$

Par conséquent, l'élément z appartient à l'annihilateur de l'espace $R_{\mathbf{tAs}^{<k>}}$ si, et seulement si, $\alpha_{\sigma,i} = (-1)^{ik} \alpha_{\sigma,0}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{S}_{2k+1}$ et tout $i = 1, \dots, k$; c'est-à-dire que z est de la forme

$$z = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{2k+1}} \alpha_{\tau,0} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{ik} \mathbf{x}_{\tau,i} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{2k+1}} \alpha_{\tau,0} \mathbf{z}_\tau \ .$$

Ainsi, l'annihilateur de l'espace $R_{\mathbf{tAs}^{<k>}}$ est le sous-espace engendré par les éléments $\mathbf{z}_\sigma$, c'est-à-dire l'espace $R_{\mathbf{pAs}^{<k>}}$. La dualité entre les opérades $\mathbf{tAs}^{<k>}$ et $\mathbf{pAs}^{<k>}$ résulte alors du

LEMME 5. — *Les représentations* $\mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}]^\vee$ *et* $\mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}]$ *sont isomorphes.*

Démonstration. — Soit $\{\sigma^* : \sigma \in \mathrm{S}_{k+1}\}$ la base duale de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}], \mathrm{K})$ et soit φ l'application linéaire

$$\varphi : \mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}]^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}], \mathrm{K}) \otimes (\mathbf{sgn}) \to \mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}], \quad \sigma^* \otimes 1 \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma.$$

Il est clair que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, pour tous éléments σ, τ de S_{k+1}, nous avons

$$\varphi(\tau.(\sigma^* \otimes 1)) = \mathrm{sgn}(\tau)\varphi((\tau\sigma)^* \otimes 1) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\tau\sigma)\tau\sigma = \tau.\varphi(\sigma^* \otimes 1).$$

Par conséquent, l'application φ est un isomorphisme de représentations. ■

De même, nous avons

THÉORÈME 6. — *Soit* k *un entier impair. Les opérades quadratiques* $(k+1)$*-aires* $\mathbf{stAs}^{<k>}$ *et* $\mathbf{Lie}^{<k>}$ *sont duales l'une de l'autre.*

Démonstration. — Considérons la restriction du produit scalaire défini ci-dessus au sous-espace $\mathcal{T}(\mathbf{stAs}^{<k>}(k+1))(2k+1)$ de l'espace $\mathcal{T}(\mathbf{tAs}^{<k>}(k+1))(2k+1)$. La famille $(\mathbf{s}_\sigma)$ est orthogonale et nous avons

$$< \mathbf{s}_\sigma, \mathbf{s}_\sigma >= (-1)^k \mathrm{sgn}(\sigma) \ .$$

Nous allons déterminer l'annihilateur de l'espace $R_{\mathbf{tAs}^{<k>}}$. Si $s = \sum \beta_\tau \mathbf{s}_\tau$ est un élément de $\mathcal{T}(\mathbf{stAs}^{<k>}(k+1))(2k+1)$, alors nous avons

$$< \mathbf{st}_\sigma, s >= (-1)^k(\beta_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) - \beta_{id}) \ .$$

Par conséquent, l'élément s appartient à l'annihilateur de l'espace $R_{\mathbf{stAs}^{<k>}}$ si, et seulement si, $\beta_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)\beta_{id}$, pour tout $\sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}$. Ainsi l'annihilateur de l'espace $R_{\mathbf{tAs}^{<k>}}$ est le sous-espace engendré par l'élément

$$\mathbf{s} := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{k+1,k}} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathbf{s}_\sigma \ .$$

Comme l'espace $\mathbf{stAs}^{<k>}(k+1)$ est la représentation unité $\mathbf{1}$, son dual tordu $\mathbf{stAs}^{<k>}(k+1)^\vee$ n'est autre que la représentation signature $(\mathbf{sgn})$. Nous pouvons donc associer au générateur $(x_0 \ldots x_k)$ de l'espace $\mathbf{stAs}^{<k>}(k+1)$, le générateur $[x_0 \ldots x_k]$ de l'espace $\mathbf{Lie}^{<k>}(k+1) \cong \mathbf{stAs}^{<k>}(k+1)^\vee$. Et dans cette correspondance, le générateur $\mathbf{s}$ de l'annihilateur de $R_{\mathbf{stAs}^{<k>}}$ est associé au relateur de Jacobi $J'(x_0, \ldots, x_{2k})$. Ce qui démontre la dualité entre les opérades $\mathbf{stAs}^{<k>}$ et $\mathbf{Lie}^{<k>}$. ■

REMARQUES.— Dans les Théorèmes 4 et 6, nous avons supposé que l'entier k est impair parce que nous avons décrit les opérades $\mathbf{pAs}^{<k>}$ et $\mathbf{Lie}^{<k>}$ uniquement pour cette parité. Toutefois, on observera que la démonstration de ces théorèmes permet de dire que pour les entiers pairs k, on a

$$\mathbf{tAs}^{<k>!} \cong \mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, \mathrm{K}[\mathrm{S}_{k+1}], R_{\mathbf{pAs}^{<k>}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{stAs}^{<k>!} \cong \mathcal{P}^{<k>}(\mathrm{K}, (\mathbf{sgn}), (\mathbf{sgn})).$$

III.— HOMOLOGIE DES ALGÈBRES $(k+1)$-AIRES

Nous construisons une théorie d'homologie pour les algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives et nous montrons que l'homologie de toute algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative libre est triviale. Ensuite nous montrons que le complexe de Hanlon-Wachs se scinde en somme directe de sous-complexes et nous donnons le complexe prédit par la théorie des opérades pour l'homologie des algèbres de Lie $(k+1)$-aires.

1.— Homologie de Hochschild des algèbres $(k+1)$-aires partiellement associatives

Dans toute cette partie nous supposons que l'entier k est impair ; nous conservons délibérément les signes $(-1)^{ik}$, même si les entiers i et ik ont la même parité.

Soit $(A, (\quad))$ une algèbre $(k+1)$-aire partiellement associative. Adoptons les notations $C_n^{<k>}(A) := A^{\otimes nk+1}$ et $(a_0, \dots, a_{nk}) := a_0 \otimes \dots \otimes a_{nk} \in C_n^{<k>}(A)$. Ensuite considérons les applications linéaires

$$b_0^{<k>} :\equiv 0 \quad \text{et} \quad b_n^{<k>} := \sum_{i=0}^{k(n-1)} (-1)^{ik} d_i : C_n^{<k>}(A) \to C_{n-1}^{<k>}(A) \quad \text{pour} \quad n > 0$$

où les opérateurs (d_i) sont définis par la formule

$$d_i(a_0, \dots, a_{nk}) := (a_0, \dots, a_{i-1}, (a_i \dots a_{i+k}), a_{i+k+1}, \dots, a_{nk})$$

et $(a_i \dots a_{i+k})$ désigne le multiproduit dans A.

Lemme 1. — *a) Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leq i < j - k$, nous avons*

$$d_i d_j = d_{j-k} d_i.$$

b) Pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $i \in |_0^{k(n-2)}$, nous avons

$$\sum_{j=i}^{k+i} (-1)^{k(i+j)} d_i d_j = 0 \ .$$

Démonstration. — En effet, soient $\{a_0, \dots, a_{nk}\}$ $(nk+1)$ éléments de A.

- Si $i+k<j$ alors nous avons

$$\begin{aligned} d_i d_j(a_0,\dots,a_{nk}) &= d_i(a_0,\dots,a_{j-1},(a_j\dots a_{j+k}),a_{j+k+1},\dots,a_{nk}) \\ &= (a_0,\dots,a_{i-1},(a_i\dots a_{i+k}),\dots,a_{j-1},(a_j\dots a_{j+k}),a_{j+k+1},\dots,a_{nk}) \\ &= d_{j-k}(a_0,\dots,a_{i-1},(a_i\dots a_{i+k}),a_{i+k+1},\dots,a_{nk}) = d_{j-k}d_i(a_0,\dots,a_{nk}) \ , \end{aligned}$$

d'où l'assertion a) du Lemme.

- Si $i\leq j\leq k+i$ alors nous avons

$$d_i d_j(a_0,\dots,a_{nk}) = (a_0,\dots,a_{i-1},(a_i\dots a_{j-1}(a_j\dots a_{j+k})\dots a_{2k+i}),\dots,a_{nk}).$$

L'associativité partielle appliquée au $(2k+1)$-uplet $\{a_i,\dots,a_{2k+i}\}$ nous donne

$$y_i := \sum_{j=i}^{k+i}(-1)^{k(j-i)}(a_i\dots a_{j-1}(a_j\dots a_{j+k})\dots a_{2k+i}) = 0.$$

Par conséquent, il vient

$$\sum_{j=i}^{k+i}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j(a_0,\dots,a_{nk}) = (a_0,\dots,a_{i-1},y_i,a_{2k+i+1},\dots,a_{nk}) = 0,$$

d'où l'assertion b) du Lemme. ■

Corollaire 2. — *Pour tout entier $n\geq 1$, nous avons $b_{n-1}^{<k>}b_n^{<k>}=0$.*

Démonstration. — Puisque $b_0^{<k>}\equiv 0$, la propriété est évidente pour $n=1$. Si $n\geq 2$, alors nous avons

$$\begin{aligned} b_{n-1}^{<k>}b_n^{<k>} &= \sum_{\substack{0\leq i\leq k(n-2)\\ 0\leq j\leq k(n-1)}}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j \\ &= \sum_{0\leq i\leq j-k-1}(-1)^{k(i+j)}d_{j-k}d_i + \sum_{0\leq j\leq i+k}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j \quad \text{par} \quad \text{a) Lemme 1} \\ &= (-1)^{k^2}\sum_{0\leq j\leq i-1\leq k(n-2)-1}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j + \sum_{0\leq j\leq i+k\leq k(n-1)}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j \\ &= -\sum_{i=1}^{k(n-2)}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j + \sum_{i=0}^{k(n-2)}\sum_{j=0}^{k+i}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j \\ &= \sum_{i=0}^{k(n-2)}\sum_{j=i}^{k+i}(-1)^{k(i+j)}d_i d_j = 0 \quad \text{par} \quad \text{b) Lemme 1}\ . \ ■ \end{aligned}$$

Ainsi nous avons défini un complexe de chaînes $(C_*^{<k>}(A),\ b_*^{<k>})$ dont l'homologie est appelée *l'homologie de Hochschild de l'algèbre* $(k+1)$*-aire partiellement associative* A et est notée

$$pH_n^{<k>}(A) := H_n(C_*^{<k>}(A),\ b_*^{<k>}), \quad n \in \mathbf{N}\ .$$

Théorème 3. — *Soit* V *un espace vectoriel et soit* $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$ *l'algèbre* $(k+1)$*-aire partiellement associative libre sur* V*. Alors l'homologie de Hochschild de* $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$ *est donnée par*

$$pH_n^{<k>}(p\mathcal{A}s^{<k>}(V)) \cong \begin{cases} V & si\ n = 0 \\ 0 & si\ n > 0\ . \end{cases}$$

Démonstration. — Nous allons construire une homotopie entre les applications *identité* et *nulle* sur le complexe de chaînes $(C_*^{<k>}(A),\ b_*^{<k>})$. Considérons les applications linéaires

$$h_n : C_n^{<k>}(A) \to C_{n+1}^{<k>}(A) \quad \text{où} \quad n \in \mathbf{N}$$

définies pour tous $W_i \in p\mathcal{A}s_{n_i}^{<k>}(V)$, $i \in |_0^{nk}$, par la formule

$$h_n(W_0, \ldots, W_{nk}) := \begin{cases} 0 & \text{si } n_0 = 0 \\ (w_0^0, \ldots, w_k^0, W_1, \ldots, W_{nk}) & \text{si } n_0 > 0 \text{ et } W_0 = w_0^0 \otimes \ldots \otimes w_k^0. \end{cases}$$

Lemme 4. — *Pour tout entier* $n \geq 1$, *nous avons* $h_{n-1}b_n^{<k>} + b_{n+1}^{<k>}h_n = \mathrm{id}_n$.

Nous en déduisons que $pH_n^{<k>}(p\mathcal{A}s^{<k>}(V)) \cong 0$ pour tout entier $n \geq 1$. D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$, l'espace $p\mathcal{A}s_n^{<k>}(V)$ est engendré par les éléments de la forme

$$w_0 \otimes \ldots \otimes w_k = (w_0 \ldots w_k) = b_1^{<k>}(w_0, \ldots, w_k)\ .$$

Par conséquent, les seuls $b_0^{<k>}$-cycles de $p\mathcal{A}s^{<k>}(V)$ qui ne sont pas des $b_1^{<k>}$-bords sont les éléments de $p\mathcal{A}s_0^{<k>}(V) = V$. Ainsi nous obtenons $pH_0^{<k>}(p\mathcal{A}s^{<k>}(V)) \cong V$; ce qui achève de démontrer le Théorème. ■

Preuve du Lemme 4. — Soient $W_i \in p\mathcal{A}s_{n_i}^{<k>}(V)$ où $i \in |_0^{nk}$.

- Si $n_0 = 0$, alors nous avons $b_{n+1}^{<k>}h_n(W_0, \ldots, W_{nk}) = 0$ et

$$\begin{aligned} & h_{n-1}b_n^{<k>}(W_0, \ldots, W_{nk}) \\ = \quad & \sum_{i=0}^{k(n-1)} (-1)^{ik} h_{n-1}(W_0, \ldots, W_{i-1}, (W_i \ldots W_{i+k}), W_{i+k+1}, \ldots, W_{nk}) \\ = \quad & h_{n-1}((W_0 \ldots W_k), W_{k+1}, \ldots, W_{nk}) \ = \ (W_0, \ldots, W_k, W_{k+1}, \ldots, W_{nk})\ , \end{aligned}$$

d'où la relation $h_{n-1}b_n^{<k>} + b_{n+1}^{<k>}h_n = \mathrm{id}_n$ pour $n_0 = 0$.

- Supposons que $n_0 > 0$; alors nous avons

  Lemme 5. — *Pour tous entiers* $n \geq 1$ *et* $j \geq 1$, *nous avons les relations*

$$d_0 h_n = \mathrm{id}_n, \quad h_{n-1} d_j = d_{j+k} h_n, \quad h_{n-1} d_0 = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} d_i h_n$$

sur les éléments $(W_0, \ldots, W_{nk})$ *tels que* $n_0 > 0$.

Il en résulte immédiatement que

$$\begin{aligned}
h_{n-1} b_n^{<k>} &= \sum_{j=0}^{k(n-1)} (-1)^{jk} h_{n-1} d_j \\
&= -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} d_i h_n + \sum_{j=1}^{k(n-1)} (-1)^{jk} d_{j+k} h_n \\
&= -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} d_i h_n + (-1)^{k^2} \sum_{i=k+1}^{nk} (-1)^{ik} d_i h_n \\
&= -\left(\sum_{i=1}^{nk} (-1)^{ik} d_i \right) h_n = -(b_{n+1}^{<k>} - d_0) h_n.
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons la relation $h_{n-1} b_n^{<k>} + b_{n+1}^{<k>} h_n = d_0 h_n = \mathrm{id}_n$, pour $n_0 > 0$. Ce qui démontre le Lemme 4. ■

Preuve du Lemme 5. — Soient $W_0 = w_0^0 \otimes \ldots \otimes w_k^0 \in p\mathcal{A}s_{n_0}^{<k>}(V)$ avec $n_0 > 0$ et $W_i \in p\mathcal{A}s_{n_i}^{<k>}(V)$ où $i \in |_1^{nk}$; alors nous avons

$$\begin{aligned}
d_0 h_n (W_0, \ldots, W_{nk}) &= d_0 (w_0^0, \ldots, w_k^0, W_1, \ldots, W_{nk}) \\
&= ((w_0^0 \ldots w_k^0), W_1, \ldots, W_{nk}) = (W_0, W_1, \ldots, W_{nk}).
\end{aligned}$$

Si l'entier $j > 0$, on a

$$\begin{aligned}
& h_{n-1} d_j (W_0, \ldots, W_{nk}) \\
= \; & h_{n-1} (W_0, \ldots, W_{j-1}, (W_j \ldots W_{j+k}), W_{j+k+1}, \ldots, W_{nk}) \\
= \; & (w_0^0, \ldots, w_k^0, W_1, \ldots, W_{j-1}, (W_j \ldots W_{j+k}), W_{j+k+1}, \ldots, W_{nk}) \\
= \; & d_{j+k} (w_0^0, \ldots, w_k^0, W_1, \ldots, W_{nk}) = d_{j+k} h_n (W_0, \ldots, W_{nk}) \,.
\end{aligned}$$

Enfin, par la formule (3.4.2) du Chapitre I, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& h_{n-1} d_0 (W_0, \ldots, W_{nk}) = h_{n-1} ((W_0 \ldots W_k), W_{k+1}, \ldots, W_{nk}) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} h_{n-1} (w_0^0 \otimes \ldots \otimes w_{i-1}^0 \otimes (w_i^0 \ldots w_k^0 W_1 \ldots W_i), W_{i+1}, \ldots, W_{nk}) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} d_i (w_0^0, \ldots, w_k^0, W_1, \ldots, W_{nk}) = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{ik} d_i h_n (W_0, \ldots, W_{nk}) \,.
\end{aligned}$$

Ce qui achève de prouver le Lemme 5. ■

2.— Homologie des algèbres de Lie $(k+1)$-aires

Ph. Hanlon et M. Wachs ont construit une théorie d'homologie pour les algèbres de Lie $(k+1)$-aires. Il s'agit de l'homologie du complexe $(\Lambda^*(L), \partial_*)$ où la différentielle $\partial_r : \Lambda^r(L) \to \Lambda^{r-k}(L)$ est donnée par $\partial_r \equiv 0$ si $r \leq k$ et, pour $r > k$, on a :

$$\partial_r(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{r-k-1,k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(r-k-1)} \wedge [x_{\sigma(r-k)} \dots x_{\sigma(r)}].$$

Ensuite ils montrent que l'homologie de toute algèbre de Lie $(k+1)$-aire libre est triviale.

Comme ∂_r envoie $\Lambda^r(L)$ sur $\Lambda^{r-k}(L)$, il est clair que le complexe $(\Lambda^*(L), \partial_*)$ se scinde en somme directe de k sous-complexes

$$\cdots \to \Lambda^{nk+i}(L) \xrightarrow{\partial} \Lambda^{(n-1)k+i}(L) \to \cdots \to \Lambda^{k+i}(L) \xrightarrow{\partial} \Lambda^i(L) \to 0, \quad i = 1, \cdots k.$$

Le «bon» complexe prédit par la théorie des opérades est le sous-complexe correspondant à la valeur $i = 1$ que nous notons $(D_*^{<k>}(L) = \Lambda^{*k+1}(L), \partial_*)$.

Références bibliographiques

[**A-L**] Amitsur (S.A.), Levitzki (J.). — *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., t. **1**, 1950, p. 449–463.

[**B-G-S**] Beilinson (A.), Ginzburg (V.), Soergel (W.). — *Koszul Duality Patterns in Representation Theory*, preprint, 1994.

[**G-J1**] Getzler (E.), Jones (J.D.S.). — A_∞*-algebras and the cyclic bar-complex*, Ill. J. Math., t. **34**, 1989, p. 256–283.

[**G-J2**] Getzler (E.), Jones (J.D.S.). — *Operads, homotopy algebra, and iterated integrals for double loop spaces*, preprint, 1994.

[**Ge-K**] Getzler (E.), Kapranov (M.M.). — *Cyclic operads and cyclic homology*, preprint, 1994.

[**Gi-K**] Ginzburg (V.), Kapranov (M.M.). — *Koszul duality for operads*, Duke Math. J., t. **76**, 1994, p. 203–272.

[**Gn**] Gnedbaye (A.V.). — *Les algèbres* k*-aires et leurs opérades*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. **321**, 1995, p. 147–152.

[**H-W**] Hanlon (Ph.), Wachs (M.). — *On Lie* k*-algebras*, Advances in Math., t. **113**, 1995, p. 206–236.

[**J**] Jacobson (N.). — *Lie algebras.* — Interscience, New York, 1962.

[**L**] Loday (J.-L.). — *La renaissance des opérades*, Exposé 792 Séminaire Bourbaki, novembre 1994 , Astérisque à paraître .

[**Ma**] Manin (Y.I.). — *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier, t. **37**, 1987, p. 191–205.

[**Pr**] Priddy (S.B.). — *Koszul resolutions*, Trans. AMS, t. **152**, 1970, p. 39–60.

[**Qu**] Quillen. — *Rational homotopy theory*, Ann. Maths, t. **90**, 1969, p. 205–295.

[**Ro**] Rosset (S.). — *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math., t. **23**, 1976, p. 187–188.