INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (URA 01)

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cedex

SUR LA RÉGULARITÉ DES CHAOS GAUSSIENS DE DEGRÉ FINI

Par

Philippe HEINRICH

AMS subject classification : 60Gxx, 60G17, 60F20.

Mots clés : chaos gaussiens, mesures gaussiennes, lois zéro-un, oscillations numériques, mesures majorantes.

REMERCIEMENTS

Je suis reconnaissant au Professeur émérite Xavier Fernique d'avoir accepté de diriger mes recherches. Sa bienveillance et sa disponibilité m'ont permis de travailler dans d'excellentes conditions. C'est en Maîtrise qu'il m'a fait apprécier le calcul des Probabilités ; je mesure aujourd'hui le chemin parcouru et la chance d'être l'un de ses élèves. J'espère mériter une telle confiance.

Je remercie les Professeurs Bernard Heinkel et Michel Ledoux. Leur présence dans ce jury de thèse me flatte ; j'ai pu bénéficier de leurs remarques et de leurs conseils au cours de la rédaction de ce texte.

Le Professeur Jan Rosiński me fait l'honneur de participer à cette commission d'examen ; je l'en remercie d'autant plus que l'un de ses travaux est à l'origine du chapitre 2.

Merci à mes collègues de bureau et amis, Sophie Gérardy et Philippe Balcer, de m'avoir supporté pendant trois ans. Leur gentillesse et leur discrétion m'ont beaucoup aidé.

Je remercie également Madame Biechel, Madame Grienenberger et Monsieur Blondel pour le soin apporté à la réalisation de cette thèse.

SOMMAIRE

Introduction aux chaos gaussiens

Le concept de chaos polynômial a été introduit pour la première fois par N. Wiener en 1941 [WIE]. Les chaos sont apparus ensuite sous diverses formes dans la littérature et font l'objet d'une attention croissante aujourd'hui. Pour fixer les idées, étant donnés un polynôme $P \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ et une suite (ξ_i) de variables aléatoires i.i.d., $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est un exemple de *chaos polynômial réel basé sur* (ξ_i). La suite (ξ_i) peut être gaussienne ; on parlera dans ce cas de *chaos gaussien réel basé sur* (ξ_i) *de degré* d (celui du polynôme P).

Les chaos gaussiens de degré fini apparaissent en Mécanique Statistique dans l'analyse des solutions d'équations différentielles stochastiques. Ils sont aussi à la base de la construction d'intégrales stochastiques multiples puisqu'ils interviennent dans les sommes de Riemann permettant la définition de celles-ci. On les retrouve également dans la limite en loi des U-statistiques canoniques qui apparaissent souvent en Statistique comme estimateurs non biaisés de paramètres comme la moyenne ou la variance. Précisons un peu : soient une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de vecteurs aléatoires i.i.d. de loi P à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ et une fonction mesurable $f : E^m \longrightarrow \mathbf{R}$. Les *$U$-statistiques* $\{U_n(f),\ n \geq m\}$ *d'ordre* m *et de noyau* f *basées sur* $(X_i)_{i\geq 1}$ sont données par

$$U_n(f) = \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in I_n^m} f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$$

où I_n^m est l'ensemble $\{(i_1, \ldots, i_m) \in [1,n]^m \ :\ i_j \neq i_k \text{ pour } j \neq k\}$. Le noyau f est dit *canonique* s'il est symétrique, si la variable aléatoire $f(X_1, \ldots, X_m)$ est centrée et si l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}[f(X_1, \ldots, X_m)|X_2, \ldots, X_m]$ est nulle. A partir des U-statistiques, le théorème de la limite centrale suivant introduit une classe plus générale de chaos gaussiens de degré fini :

Théorème ([A-G]). — *Soient* $(\phi_i)_{i\geq 1}$ *une base orthonormale de l'espace (supposé séparable)* $\mathrm{L}^2(E, \mathcal{B}, P)$, $(g_j)_{j\geq 1}$ *une suite orthogaussienne et* $(h_j)_{j\geq 1}$ *la suite des polynômes d'Hermite de degrés* j *et de coefficients dominants égaux à 1. Soit de plus* f *un noyau canonique en* m *variables tel que* $\mathbf{E}f^2(X_1, \ldots, X_m)$ *soit fini. Alors la suite* $\left\{ \binom{n}{m}^{\frac{1}{2}} U_n(f),\ n \geq 1 \right\}$ *converge en loi vers*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}[f(X_1, \ldots, X_m)\phi_{i_1}(X_1)\cdots\phi_{i_m}(X_m)]}{\sqrt{m!}} \prod_{j\geq 1} h_{j(i_1,\ldots,i_m)}(g_j)$$

où $j(i_1, \ldots, i_m)$ *est le nombre d'occurences de* j *dans* $(i_1, \ldots, i_m)$.

Il y a plusieurs façons de définir les chaos gaussiens de degré fini et on privilégie dans cette thèse la plus "concrète" : un chaos gaussien réel de degré d est une série orthogonale convergente dans L^2 de la forme

$$\sum_{|p|\leq d} a_p H_p$$

où p est une suite d'entiers $p_k \geq 0$ nulle à partir d'un certain rang et $|p| = \sum_k p_k$; les coefficients a_p sont réels et les variables aléatoires H_p des produits de polynômes d'Hermite $\prod_k h_{p_k}(g_k)$ en des variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées réduites (on n'isole donc pas les termes diagonaux). Cette définition (définitions 4, chapitre I) s'étend au cadre vectoriel des espaces de Fréchet séparables.

L'objet de cette thèse est l'étude de la régularité des (fonctions aléatoires) chaos gaussiens de degré fini. L'intérêt d'une telle étude réside dans le fait que nombre de fonctions aléatoires peuvent se développer en chaos gaussiens. Si l'on sait bien aujourd'hui, grâce aux travaux de X. Fernique et M. Talagrand, caractériser la régularité des chaos gaussiens de degré 1 (plus souvent appelés fonctions aléatoires gaussiennes) à partir d'une mesure majorante, on ne sait toujours pas le faire pour les chaos gaussiens de degré supérieur à 1. L'objectif initial de la thèse était de trouver des conditions nécessaires et suffisantes en utilisant si possible la théorie des mesures majorantes pour qu'un chaos gaussien de degré fini ait une modification à trajectoires bornées ou continues. Bien qu'inaccessible à ce jour, cet objectif a néanmoins permis des avancées que nous résumons ci-dessous.

Une telle étude supposait une mise au point des propriétés d'intégrabilité de ces chaos gaussiens ; c'est l'objet du premier chapitre. Des travaux antérieurs dûs notamment à C. Borell et S. Kwapień montrent que, comme les vecteurs gaussiens, les chaos gaussiens à valeurs vectorielles (chaos gaussiens vectoriels) de degré fini ont de bonnes propriétés d'intégrabilité. Elles sont formulées ici simplement. Les schémas de preuve, simples aussi, sont presque tous itératifs : on s'appuie sur des résultats connus pour les vecteurs gaussiens (l'inégalité isopérimétrique entre autres) et on procède par récurrence sur le degré d des chaos gaussiens. Les conséquences sont diverses ; si X est un chaos gaussien vectoriel de degré d et N une semi-norme continue, on a par exemple

$$\mathbf{P}\{N(X) < \infty\} > 0 \Longrightarrow \mathbf{E}N^2(X) < \infty.$$

En particulier, on montre une inégalité de concentration de type isopérimétrique pour les chaos gaussiens vectoriels qui s'énonce à partir des deux seuls paramètres M (un quantile) et σ (un écart-type).
On présente en outre une technique d'extraction : on peut en effet extraire une partie homogène de degré donné d'un chaos gaussien non-homogène en lui appliquant un opérateur linéaire (élément du semi-groupe d'Hermite), en multipliant le résultat par une fonction polynômiale convenable et en intégrant le tout sur $[-1, 1]$. Cette technique, que l'on

retrouve dans l'ouvrage de S. Kwapień et W.A. Woyczyński, motive en grande partie le chapitre quatre.

Au second chapitre, on exploite les techniques de découplage déjà abordées au chapitre premier. Ces techniques, introduites par C. Borell et S. Kwapień, simplifient les questions abordées dans cette thèse à savoir les lois zéro-un et la continuité des chaos gaussiens. Par découplage, on entend généralisation à un ordre n quelconque de l'opération faite en Algèbre lorsqu'on associe une forme quadratique à une forme bilinéaire symétrique ; l'idée est d'associer au monôme x^n le produit $x_1 \times \cdots \times x_n$. L'opération inverse est appelée recouplage. Ainsi, à un chaos gaussien de degré d homogène $X_d = \sum_{|p|=d} a_p H_p$ correspond un chaos gaussien homogène découplé $\widehat{X}_d = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} \hat{a}_i G_i$ qui est une forme d-linéaire symétrique en des vecteurs gaussiens standards indépendants $g^1, \dots, g^d$ où la variable aléatoire G_i est le produit gaussien indépendant $g^1_{i_1} \times \cdots \times g^d_{i_d}$ et le coefficient $\hat{a}_i$ symétrique en i.
Le découplage permet ainsi l'analyse des chaos gaussiens par itération sur les degrés. Cet outil est largement employé par J. Rosiński, G. Samorodnitsky et M.S. Taqqu dans une démonstration des lois zéro-un [R-S-T] pour les chaos gaussiens ou stables. Le point de vue de C. Borell [BOR1] nous a permis une démonstration simple des lois zéro-un pour les chaos gaussiens vectoriels. Comme J. Rosiński, G. Samorodnitsky et M.S. Taqqu, on montre en effet que si un chaos gaussien de degré d est dans un espace vectoriel V avec probabilité positive, il en est de même pour sa partie homogène découplée de degré d ; on montre ensuite que sa partie homogène de degré d est dans F avec probabilité 1 à un terme additif près qui est un chaos gaussien de degré inférieur à d. On procède par récurrence sur le degré d, mais le schéma de preuve présenté ici est nettement plus simple et utilise une nouvelle technique. Contrairement à J. Rosiński, G. Samorodnitsky et M.S. Taqqu, on propose une méthode générale pour traiter à la fois le cas où $d = 2$ (pour lequel il existe un argument spécifique) et le cas où $d \geq 3$.
On démontre que si X est un chaos gaussien vectoriel de degré fini et V un sous-espace vectoriel mesurable alors

$$\mathbf{P}\{X \in V\} = 0 \text{ ou } 1.$$

Le théorème énoncé ci-dessus montre en particulier que, si X est un chaos gaussien de degré fini sur un espace métrique compact T, ou bien presque toutes les trajectoires de X sont continues, ou bien presque toutes les trajectoires de X sont discontinues.

Dans le troisième chapitre , on s'est attaché à généraliser aux (fonctions aléatoires) chaos gaussiens de degré fini un théorème de Dudley et Jaïn-Kallianpur caractérisant la continuité des trajectoires des processus gaussiens. On prouve le théorème suivant : un chaos gaussien de degré fini sur un espace métrique compact T qui est continu en probabilité et presque sûrement continu en tout point d'un sous-ensemble dénombrable dense de T a presque toutes ses trajectoires continues. La démonstration, inspirée par les travaux de X. Fernique [FER4], utilise là encore les techniques de découplage et recouplage : on montre d'abord que si un chaos gaussien de degré fini vérifie les hypothèses du théorème, alors il en est de même pour sa partie homogène découplée de degré maximal ; on montre ensuite que le théorème est vrai pour cette partie homogène découplée, grâce aux techniques d'oscillations des fonctions aléatoires dûes à K. Itô et M. Nisio ; enfin, en recouplant cette partie homogène de degré maximal et en la retranchant au chaos initial, on est ramené à un chaos gaussien de degré plus petit qui vérifie aussi les hypothèses du théorème. On conclut donc par récurrence sur le degré.

Le quatrième chapitre est consacré aux conditions de mesures majorantes pour les chaos gaussiens de degré fini. Il s'agit d'analyser la régularité d'un chaos sur un ensemble T à partir de la "géométrie" de T. On dresse un rapide tableau des résultats (peu nombreux et pas très satisfaisants) dans ce domaine : le résultat de M. Talagrand pour les chaos homogènes de degré 2 et ceux plus récents de M.B. Marcus que l'on généralise aux chaos non-homogènes grâce à la technique d'extraction introduite au chapitre deux. Cette technique permet en effet de comparer des distances associées à une partie homogène d'un chaos à celles associées au chaos tout entier ; on peut montrer ensuite que les conditions de mesures majorantes sur le chaos tout entier impliquent des conditions du même type sur chaque partie homogène, d'où la généralisation.

Liste des publications

[1] *Zero-one laws for polynomials in Gaussian random variables : a simple proof*, J. Theor. Probab. 9, 4, 1996, 1019-1027.

[2] *Continuité des trajectoires des chaos gaussiens de degré fini*, Probab. Math. Statist. 16, 2, 1996, 201-209.

Chapitre I
Définitions et propriétés des chaos gaussiens vectoriels de degré fini

1. Les polynômes d'Hermite généralisés et les produits de variables gaussiennes indépendantes centrées réduites

On note $\mathrm{N}^{(\mathbf{N})}$ (la notation $\mathrm{N}^{(\mathbf{N}-\{0\})}$ serait plus juste) l'ensemble des suites d'entiers $p = (p_k)_{k\geq 1}$ nulles à partir d'un certain rang ; l'ordre de p est par définition $|p| = \sum_{k\geq 1} p_k$.
Soit g une suite orthogaussienne sur un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ complet.
Considérons les polynômes d'Hermite h_k définis par le développement en série

$$\exp(ux - u^2/2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{\sqrt{k!}} h_k(x) \qquad u \in \mathbf{C},\ x \in \mathbf{R}.$$

Remarque. — Le coefficient dominant de h_k sera donc $1/\sqrt{k!}$; d'autres normalisations sont possibles ([A-G]) mais celle-ci a l'avantage de rendre la famille $(h_k)_{k\geq 0}$ orthonormale par rapport à la mesure gaussienne centrée réduite sur $\mathbf{R}$ plutôt que simplement orthogonale.

Définition 1. — *Pour tout $p \in \mathrm{N}^{(\mathbf{N})}$, on définit le polynôme d'Hermite généralisé d'indice p par*

$$H_p(x) = \prod_{k\geq 1} h_{p_k}(x_k) \qquad x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}.$$

Remarque. — Selon le contexte et lorsqu'il n'y aura pas risque de confusion, la notation H_p désignera soit l'application $x \mapsto H_p(x)$ soit la v.a. $H_p(g)$.

Proposition 2. — *La famille $\{H_p(g),\ p \in \mathrm{N}^{(\mathbf{N})}\}$ forme un système orthonormal de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, elle est de plus totale si la tribu $\mathcal{A}$ est engendrée par g.*

Démonstration. — Notons γ la loi $\mathcal{N}(0,1)$; pour tout couple $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \exp(ux - u^2/2)\exp(vx - v^2/2)\gamma(dx) &= \exp(-\frac{u^2+v^2}{2})\exp(\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} (u+v)^2 x^2 \gamma(dx)) \\ &= \exp(uv)\ ;\end{aligned}$$

en dérivant m fois en u et n fois en v cette dernière égalité au point $(0,0)$, il vient

$$\int_{\mathbf{R}} h_m(x) h_n(x)\gamma(dx) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

La famille $(h_k)_{k\geq 0}$ forme ainsi un système orthonormal dans $L^2(\mathbf{R},\gamma)$. Plus généralement, la famille $\{\otimes_{k=1}^n h_{p_k},\ (p_1,\ldots,p_n)\in\mathbf{N}^n\}$ est un système orthonormal de $L^2(\mathbf{R}^n,\gamma^{\otimes n})$. Elle est de plus totale : si f est orthogonale à chaque $\otimes_{k=1}^n h_{p_k}$, la série génératrice des h_k montre, en substituant $-iu_l$ à u, que

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n)\prod_{l=1}^n \exp(-iu_lx_l+u_l^2/2)d\gamma^{\otimes n}(x_1,\ldots,x_n)=0.$$

En notant $<\cdot,\cdot>$ et $|\cdot|$ le produit scalaire et la norme euclidiens de $\mathbf{R}^n$, on déduit de l'égalité précédente que pour tout $u\in\mathbf{R}^n$,

$$\int_{\mathbf{R}^n} fe^{-i<u,\cdot>}e^{-\frac{|\cdot|}{2}^2}d\lambda=0,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. Le théorème d'inversion de Fourier ([RUD], chap. 7) implique alors que $fe^{-\frac{|\cdot|}{2}^2}$, élément de $L^1(\mathbf{R}^n,\lambda)$, est nul donc f aussi. Dans la situation générale de la proposition, on a pour tout couple $p,q\in\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}H_p(g)H_q(g)&=\prod_{k\geq 1}\mathbf{E}h_{p_k}(g_k)h_{q_k}(g_k)\\&=\begin{cases}0 & \text{si } p\neq q\\ 1 & \text{si } p=q\,;\end{cases}\end{aligned}$$

la famille $\{H_p(g),\ p\in\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}\}$ est donc orthonormale. Supposons de plus que la tribu $\mathcal{A}$ soit engendrée par g ; alors cette même famille est totale : si la classe $f\in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ lui est orthogonale, elle est orthogonale à $\{\prod_{k=1}^n h_{p_k}(g_k),\ (p_1,\ldots,p_n)\in\mathbf{N}^n\}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$; il résulte de ce qui précède que f est orthogonale à $\mathbf{E}_n(f)=\mathbf{E}[f|g_1,\ldots,g_n]$ et le théorème des espérances conditionnelles relatives à une suite croissante de tribus (théorème de convergence des martingales, [DOO]) montre que $\mathbf{E}_n(f)$ converge vers f dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$; on a alors au sens L^2

$$\mathbf{E}f^2=\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbf{E}(f\mathbf{E}_n(f))=0,\quad f=0.$$

□

Outre les polynômes d'Hermite généralisés, on considérera aussi la famille orthonormale de produits indépendants gaussiens suivante :

DÉFINITION 3. — *Soient $g^1,\ldots,g^d$ des copies indépendantes de g. La famille orthonormale $(G_i)_{i\in\mathbf{N}^d}$ de produits indépendants gaussiens est donnée par*

$$G_i=g^1_{i_1}\cdots g^d_{i_d}\qquad i\in\mathbf{N}^d.$$

2. Chaos gaussiens vectoriels

A. Définitions

Nous nous plaçons dans le cadre des espaces de Fréchet séparables ; dans toute cette thèse F désignera un tel espace. Considérons l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}; F)$ des classes de vecteurs aléatoires $\mathbf{X}$ dans F tels que pour toute semi-norme continue N, l'espérance $\mathrm{E}N^2(\mathbf{X})$ soit finie. Munissons-le de la topologie définie par les semi-normes $(\mathrm{E}N^2(\cdot))^{1/2}$. Dans cet espace, on s'intéresse plus particulièrement aux séries de polynômes en g à coefficients dans F. Plus précisement, en reprenant les notations du paragraphe 1,

Définitions 4. — *Soient d un entier positif, $(a_p)_{p \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^d}$ deux familles de F.*

(i) *Un chaos gaussien de degré d est un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}; F)$ de la forme*

$$\sum_{|p| \le d} a_p H_p,$$

(ii) *Un chaos gaussien homogène de degré d est un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}; F)$ de la forme*

$$\sum_{|p| = d} a_p H_p,$$

(iii) *Un chaos gaussien découplé homogène de degré d est un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}; F)$ de la forme*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^d} b_i G_i.$$

Remarque. — Un chaos gaussien de degré d est donc la somme d'une série convergente dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}; F)$.

B. Conditionnement des chaos gaussiens découplés

Les chaos découplés sont en général plus maniables comme le montre le lemme suivant que nous appliquerons ultérieurement. Nous ne savons pas énoncer un lemme analogue pour les chaos non découplés.

Lemme 5. — *Soit $\mathbf{Y} = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} b_i G_i$ un chaos gaussien homogène découplé de degré d et soit $I = I^1 \times \cdots \times I^d$ un sous-ensemble de N^d. Notons $\mathcal{B}_I$ la tribu engendrée par $\{g^k_{i_k},\ i_k \in I^k,\ 1 \le k \le d\}$. Dans ces conditions,*

$$\mathbf{E}[\mathbf{Y} | \mathcal{B}_I] = \sum_{i \in I} b_i G_i.$$

Démonstration. — La série $\sum_i b_i\mathbf{E}[G_i|\mathcal{B}_I]$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}; F)$ vers $\mathbf{E}[\mathbf{Y}|\mathcal{B}_I]$: en effet, si N est une semi-norme continue et ε un réel positif, la convergence de $\sum_i b_iG_i$ vers $\mathbf{Y}$ implique l'existence d'une partie finie J_ε telle que pour toute partie finie $J \supset J_\varepsilon$ on ait

$$\mathrm{E}N^2(\mathbf{Y} - \sum_{i\in J} b_iG_i) \leq \varepsilon\ ;$$

mais d'après l'inégalité de Jensen conditionnelle on a

$$\mathbf{E}N^2(\mathbf{E}[\mathbf{Y}|\mathcal{B}_I] - \sum_{i\in J} b_i\mathbf{E}[G_i|\mathcal{B}_I]) \leq \mathbf{E}N^2(\mathbf{Y} - \sum_{i\in J} b_iG_i) \leq \varepsilon.$$

Pour conclure, il suffit alors de constater que

$$\mathbf{E}[G_i|\mathcal{B}_I] = \begin{cases} G_i & \text{si } i \in I, \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

or on a

$$G_i = \prod_{(k,i_k)\in[1,d]\times I^k} g^k_{i_k} \times \prod_{(k,i_k)\notin[1,d]\times I^k} g^k_{i_k}\ ;$$

le premier facteur est $\mathcal{B}_I$-mesurable et le second est centré et indépendant de $\mathcal{B}_I$; le résultat s'ensuit. □

C. Chaos gaussiens vectoriels et convergence presque sûre

Ce type de convergence est bien adapté dans plusieurs arguments de passage à la limite.

Définition 6. —

(i) *Pour tout chaos gaussien* $\mathbf{X} = \sum_{|p|\leq d} a_pH_p$ *de degré* d, *on note* X_n *sa somme partielle de rang* n, *c'est à dire*

$$X_n = \sum_{\substack{|p|\leq d \\ p^*\leq n}} a_pH_p,$$

où $p^* = \max\{k\ :\ p_k > 0\}$,

(ii) *De même, pour tout chaos gaussien découplé* $\mathbf{Y} = \sum_{i\in\mathbb{N}^d} b_iG_i$ *de degré* d, *on note* Y_n *sa somme partielle de rang* n, *c'est à dire*

$$Y_n = \sum_{i^*\leq n} b_iG_i,$$

où $i^* = \max\{i_1, \ldots, i_d\}$.

Proposition 7. —

(i) *Soit* $\mathbf{X} = \sum_{|p|\le d} a_p H_p$ *un chaos gaussien de degré d. La suite des sommes partielles* $(X_n)_{n\ge 1}$ *converge presque sûrement dans* F,

(ii) *Soit* $\mathbf{Y} = \sum_{i\in\mathbf{N}^d} b_i G_i$ *un chaos gaussien découplé de degré d. La suite des sommes partielles* $(Y_n)_{n\ge 1}$ *converge presque sûrement dans* F.

Démonstration. — On ne démontre que (i) car (ii) suit le même schéma. Rappelons que les H_p dépendent de $g = (g_k)_{k\ge 1}$; on considère $\mathcal{G}_n$ la tribu engendrée par $(g_k)_{k\le n}$ et $\mathcal{G}$ celle engendrée par $(g_k)_{k\ge 1}$. Posons

$$X_n(g) = \sum_{\substack{|p|\le d \\ p^*\le n}} a_p H_p(g)\,;$$

puisque la suite $(h_{p_k}(g_k))_{k\ge 1}$ est indépendante et centrée,

$$\mathbf{E}[H_p(g)|\mathcal{G}_n] = \begin{cases} H_p(g) & \text{si } p^* \le n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour $m \ge n$ on a $\mathbf{E}[X_m(g)|\mathcal{G}_n] = X_n(g)$. Comme la suite $(\mathbf{E}[X_m(g)|\mathcal{G}_n])_{m\ge 1}$ converge dans L^2 vers $\mathbf{E}[\mathbf{X}(g)|\mathcal{G}_n]$, pour tout $n \ge 1$, on a

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}(g)|\mathcal{G}_n] = X_n(g).$$

Rappelons un théorème classique de convergence de martingales dans notre cadre d'étude :

> Théorème (cf. [FER3]). — *Soit F un espace de Fréchet séparable, X un vecteur aléatoire fortement intégrable à valeurs dans F et $(\mathcal{B}_n)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$ engendrant une tribu $\mathcal{B}$; dans ces conditions, on a presque sûrement*
>
> $$\mathbf{E}[X|\mathcal{B}] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X|\mathcal{B}_n].$$

Puisque $(\mathcal{G}_n)_{n\ge 1}$ est une suite croissante de sous-tribus, la suite $(\mathbf{E}[\mathbf{X}(g)|\mathcal{G}_n])_{n\ge 1}$ converge p.s. vers $\mathbf{E}[\mathbf{X}(g)|\mathcal{G}] = \mathbf{X}(g)$; le résultat s'ensuit. $\square$

Convention. — Comme il sera parfois commode d'utiliser les vecteurs aléatoires plutôt que leurs classes, on pose

$$X = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n & \text{si cette limite existe,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On fait de même pour un chaos homogène découplé $\mathbf{Y}$. La proposition précédente montre que X est un représentant de $\mathbf{X}$. Par la suite, on appelera invariablement chaos gaussien la classe $\mathbf{X}$ ou son représentant X défini ici.

3. Les techniques : découplage, recouplage et extraction

Le découplage a pour but d'associer à un chaos gaussien homogène ou non un chaos gaussien homogène découplé ; c'est l'analogue de ce que l'on fait en Algèbre lorsqu'on associe une forme quadratique à une forme bilinéaire symétrique. Le recouplage est l'opération inverse. On détaille ci-dessous les propriétés de ces opérations ; on montre par ailleurs comment extraire une partie k-homogène $\sum_{|p|=k} a_p H_p$ d'un chaos de degré fini $\sum_{|p|\le d} a_p H_p$.

A. La formule de polarisation

L'intérêt de l'identité algébrique qui suit a été mis en évidence par C. Borell [BOR] et par S. Kwapień [KWA]. L'idée est d'associer au monôme x^n le produit $x_1 \times \cdots \times x_n$. Dans le cadre des chaos gaussiens, on a plus précisement

LEMME 8. — *Soient $X(g)$ un chaos gaussien vectoriel de degré d et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ une suite de Rademacher indépendante de $(g^1, \ldots, g^d)$. Posons*

$$g_\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 g^1 + \cdots + \varepsilon_d g^d}{\sqrt{d}}.$$

Alors le vecteur aléatoire $\dfrac{1}{d!}\mathbf{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d X(g_\varepsilon)$ est un chaos gaussien homogène découplé de degré d. On le note $\widehat{X} = \widehat{X}(g^1, \ldots, g^d)$.

DÉMONSTRATION. — Considérons $H_p(g_\varepsilon) = \prod_{k\ge 1} h_{p_k}(g_{\varepsilon,k})$ comme un polynôme en les variables $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d$ et calculons $\mathbf{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d H_p(g_\varepsilon)$: on constate que seuls les termes en $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d$ ne sont pas annulés par l'opérateur $\mathbf{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d$; ils n'apparaissent de plus que dans les produits $\prod_k h_{p_k}(g_{\varepsilon,k})$ lorsque p est d'ordre d et plus précisément dans les produits des termes dominants $\prod_k (g_{\varepsilon,k})^{p_k}/\sqrt{p_k!}$. Notant $\tilde p$ le d-uplet $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p_1}, \ldots, \underbrace{k, \ldots, k}_{p_k}, \ldots)$ et $\mathcal{S}^d$ le groupe symétrique à d éléments, on constate de plus que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d \Big(\frac{\varepsilon_1 g_1^1 + \cdots + \varepsilon_d g_1^d}{\sqrt{d}}\Big)^{p_1} \cdots \Big(\frac{\varepsilon_1 g_k^1 + \cdots + \varepsilon_d g_k^d}{\sqrt{d}}\Big)^{p_k} \cdots \\ = \frac{1}{d^{d/2}} \sum_{s\in\mathcal{S}^d} g^1_{\tilde p_{s(1)}} \cdots g^d_{\tilde p_{s(d)}}\end{aligned}$$

d'où en notant $p!$ le produit $\prod_k p_k!$

$$\mathbf{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d H_p(g_\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } |p| < d, \\ \frac{1}{d^{d/2}} \frac{1}{p!^{1/2}} \sum_{s\in\mathcal{S}^d} G_{s(\tilde p)} & \text{si } |p| = d. \end{cases}$$

Finalement, par linéarité,

$$\frac{1}{d!}\mathbf{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d \sum_{\substack{|p|\le d\\ p^*\le n}} a_p H_p(g_\varepsilon) = \frac{1}{d!}\frac{1}{d^{d/2}} \sum_{\substack{|p|=d\\ p^*\le n}} \frac{a_p}{\sqrt{p!}} \sum_{s\in\mathcal{S}^d} G_{s(\tilde p)}. \qquad (*)$$

Le membre de droite de $(*)$ est bien un chaos homogène découplé de degré d ; en effet, l'application $p \mapsto \tilde{p}$ est une bijection de $\{p : |p| = d,\ p^* \leq n\}$ dans $\{i \in \mathbf{N}^d : i_1 \leq \ldots \leq i_d \leq n\}$ et posant $b_{s(\tilde{p})} = (d! d^{\frac{d}{2}} p!^{\frac{d}{2}})^{-1} a_p$ pour tout $s \in \mathcal{S}^d$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{d!}\frac{1}{d^{\frac{d}{2}}} \sum_{\substack{|p|=d \\ p^* \leq n}} \frac{a_p}{\sqrt{p!}} \sum_{s \in \mathcal{S}^d} G_{s(\tilde{p})} &= \sum_{\substack{|p|=d \\ p^* \leq n}} \sum_{s \in \mathcal{S}^d} b_{s(\tilde{p})} G_{s(\tilde{p})} \\ &= \sum_{i\,:\, i_1 \leq \ldots \leq i_d \leq n} \sum_{s \in \mathcal{S}^d} b_{s(i)} G_{s(i)} \\ &= \sum_{\substack{i \in \mathbf{N}^d \\ i^* \leq n}} b_i G_i.\end{aligned}$$

Résumons : pour tout entier n,

$$\frac{1}{d!} \mathbf{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d \sum_{\substack{|p| \leq d \\ p^* \leq n}} a_p H_p(g_\varepsilon) = \sum_{\substack{i \in \mathbf{N}^d \\ i^* \leq n}} b_i G_i,$$

comme g_ε a même loi que g, en faisant tendre n vers l'infini, la proposition 7 fournit le résultat. $\square$

Exemple. — Soit $\mathbf{X} = a + \sum_{|p|=1} a_p H_p + \sum_{|p|=2} a_p H_p$ un chaos gaussien de degré 2. En pratique, on utilise une autre indexation des coefficients ; en fonction des suites p qui interviennent, on pose

$$\begin{aligned} a_k &= a_{(0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\k}}{1},0,\ldots)}, \\ a_{kl} = a_{lk} &= \frac{1}{2} a_{(0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\k}}{1},0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\l}}{1},0,\ldots)}, \qquad k < l, \\ a_{kk} &= a_{(0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\k}}{2},0,\ldots)}. \end{aligned}$$

Le chaos $\mathbf{X}$ s'écrit alors

$$\mathbf{X} = a + \sum_{k \geq 1} a_k g_k + \sum_{k \neq l \geq 1} a_{kl} g_k g_l + \sum_{k \geq 1} a_{kk} \frac{g_k^2 - 1}{\sqrt{2}}.$$

Les formules indiquées dans la démonstration du lemme 8 montrent que le chaos découplé associé à $\mathbf{X}$ est

$$\widehat{\mathbf{X}} = \frac{1}{4} \sum_{k \neq l \geq 1} a_{kl} g_k g'_l + \sum_{k \geq 1} \frac{a_{kk}}{\sqrt{2}} g_k g'_k.$$

Remarque. — Une autre indexation des chaos et une autre normalisation des polynômes d'Hermite h_k facilitent l'obtention du chaos découplé : supposons un instant que les polynômes h_k aient 1 comme coefficient dominant et soit $\mathbf{X}$ un chaos gaussien de degré d écrit sous la forme

$$\mathbf{X} = a_0 + \sum_{k=1}^{d} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j\geq 1} h_{j(i_1,\ldots,i_k)}(g_j),$$

où $j(i_1,\ldots,i_k)$ est le nombre d'occurrences de l'entier j dans le k-uplet $(i_1,\ldots,i_k)$; le coefficient $a_{i_1,\ldots,i_k}$ pouvant être supposé invariant par permutation de ses indices (ce qui fixe la représentation de $\mathbf{X}$), la démonstration du lemme 8 montrerait que le chaos homogène découplé associé est

$$\widehat{\mathbf{X}} = \frac{1}{d^{\frac{d}{2}}} \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_d} g^1_{i_1} \cdots g^d_{i_d}.$$

B. Indépendance conditionnelle et recouplage

Le recouplage, c'est à dire l'obtention d'un chaos gaussien homogène de degré d à partir d'un chaos homogène découplé de degré d, repose sur une propriété d'indépendance conditionnelle.

Définition 9 ([MEY]). — *Soient $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n,\mathcal{B}$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$ sont conditionnellement indépendantes relativement à $\mathcal{B}$ si l'on a*

$$\mathbf{E}[Z_1\cdots Z_n|\mathcal{B}] = \mathbf{E}[Z_1|\mathcal{B}]\cdots\mathbf{E}[Z_n|\mathcal{B}]$$

pour toute suite $(Z_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que Z_k soit une variable aléatoire positive $\mathcal{B}_k$-mesurable.

Remarque. — On dira que les vecteurs aléatoires $V_1,\ldots,V_n$ sont conditionnellement indépendants relativement au vecteur aléatoire V si les tribus engendrées $\mathcal{T}(V_1),\ldots,\mathcal{T}(V_n)$ sont conditionnellement indépendantes relativement à la tribu $\mathcal{T}(V)$.

Lemme 10. — *Notons $\hat{g}_i$ le vecteur $(g^1_i,\ldots,g^d_i)$ et posons*

$$\bar{g} = \frac{g^1 + \cdots + g^d}{\sqrt{d}}.$$

Les vecteurs $\hat{g}_i$ sont conditionnellement indépendants relativement à $\bar{g}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer ([MEY, T51]) que pour tout $i \geq 1$ et toute variable aléatoire Y_i mesurable pour la tribu engendrée par $\hat{g}_i$ et intégrable, on a

$$\mathbf{E}[Y_i|(\hat{g}_j)_{j\neq i},\bar{g}] = \mathbf{E}[Y_i|\bar{g}] \qquad (*)$$

Or la tribu engendrée par $(\hat{g}_j)_{j\neq i}, \bar{g}$ coïncide avec celle engendrée par $(\hat{g}_j)_{j\neq i}, \bar{g}_i$; de plus, la variable Y_i est indépendante de la suite $(\hat{g}_j)_{j\neq i}$ qui elle-même est indépendante de $\bar{g}_i$. Il vient

$$\mathbf{E}[Y_i|(\hat{g}_j)_{j\neq i}, \bar{g}] = \mathbf{E}[Y_i|(\hat{g}_j)_{j\neq i}, \bar{g}_i] = \mathbf{E}[Y_i|\bar{g}_i] \ ;$$

pour une raison similaire on a aussi

$$\mathbf{E}[Y_i|\bar{g}] = \mathbf{E}[Y_i|\bar{g}_i].$$

Les deux dernières égalités fournissent $(*)$. ∎

Corollaire 11. — *Soit* $\mathbf{X}$ *un chaos gaussien vectoriel de degré* d. *Alors,*

(i) *La classe de vecteurs aléatoires* $\mathbf{X}_d : \bar{g} \mapsto \mathbf{X}_d(\bar{g})$ *définie par*

$$\mathbf{X}_d(\bar{g}) = d^d \mathbf{E}[\widehat{\mathbf{X}}(g^1, \ldots, g^d)|\bar{g}]$$

est un chaos gaussien vectoriel homogène de degré d ; *de plus* $\mathbf{X} - \mathbf{X}_d$ *est un chaos gaussien vectoriel de degré* $d-1$.

(ii) *Le chaos* $\mathbf{X}$ *est la somme des* $d+1$ *chaos gaussiens vectoriels homogènes* $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_d$ *appelés parties homogènes de* $\mathbf{X}$ *de degrés respectifs* $0, 1, \ldots, d$.

Démonstration. — (a) Fixons $i \in \mathbf{N}^d$ et soit $p \in \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$ tel que pour tout $k \geq 1$, le terme p_k soit le nombre d'occurrences de l'entier k dans l'ensemble des composantes de i. Montrons que

$$\mathbf{E}[G_i|\bar{g}] = (p!)^{1/2} d^{-d/2} H_p(\bar{g}) \qquad (\diamond)$$

Soit s une permutation de $\{1, \ldots, d\}$ qui ordonne la suite $\{i_1, \ldots, i_d\}$ dans le sens croissant ; on peut alors écrire

$$G_i = \prod_{k\,:\,p_k>0} g_k^{s(p_1+\ldots+p_{k-1}+1)} \cdots g_k^{s(p_1+\ldots+p_k)},$$

et le lemme 10 fournit

$$\mathbf{E}[G_i|\bar{g}] = \prod_{k:p_k>0} \mathbf{E}[g_k^{s(p_1+\ldots+p_{k-1}+1)} \cdots g_k^{s(p_1+\ldots+p_k)}|\bar{g}_k].$$

Pour simplifier les notations, faisons le calcul pour $\mathbf{E}[g_1^1 \cdots g_1^k|\bar{g}_1]$: considérons une base orthonormale du sous-espace $\mathrm{Vect}(g_1^1, \ldots, g_1^k)$ commençant par $\bar{g}_1$; exprimé dans cette base, le produit $g_1^1 \cdots g_1^k$ est un polynôme de degré k en $\bar{g}_1$ et à coefficients indépendants de $\bar{g}_1$. Il en résulte que

$$\mathbf{E}[g_1^1 \cdots g_1^k|\bar{g}_1] = \sum_{j\leq k} \mathbf{E}(g_1^1 \cdots g_1^k h_j(\bar{g}_1)) h_j(\bar{g}_1) \ ;$$

remarquons enfin que pour tout $j < k$ l'espérance $\mathbf{E}(g_1^1 \cdots g_1^k (\bar{g}_1)^j)$ est nulle; nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[g_1^1 \cdots g_1^k | \bar{g}_1] &= \mathbf{E}(g_1^1 \cdots g_1^k h_k(\bar{g}_1)) h_k(\bar{g}_1) \\ &= \mathbf{E}(g_1^1 \cdots g_1^k \frac{(\bar{g}_1)^k}{\sqrt{k!}}) h_k(\bar{g}_1) \\ &= (k!)^{1/2} d^{-k/2} h_k(\bar{g}_1),\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{E}[g_k^{s(p_1+\ldots+p_{k-1}+1)} \cdots g_k^{s(p_1+\ldots+p_k)} | \bar{g}_k] = (p_k!)^{1/2} d^{-p_k/2} h_{p_k}(\bar{g}_k)$$

et en regroupant les différents facteurs de $\mathbf{E}[G_i|\bar{g}]$, on obtient $(\diamond)$.
(b) La preuve du lemme 8 montre que la série $\frac{1}{d!} \frac{1}{d^{\frac{d}{2}}} \sum_{|p|=d} \frac{a_p}{\sqrt{p!}} \sum_{s \in \mathcal{S}^d} G_{s(\tilde{p})}$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}; F)$ vers $\widehat{\mathbf{X}}$ où $\tilde{p}$ est le d-entier $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p_1}, \ldots, \underbrace{k, \ldots, k}_{p_k}, \ldots)$; donc la série $\frac{1}{d!} \frac{1}{d^{\frac{d}{2}}} \sum_{|p|=d} \frac{a_p}{\sqrt{p!}} \mathbf{E}[\sum_{s \in \mathcal{S}^d} G_{s(\tilde{p})} | \bar{g}]$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}; F)$ vers $\mathbf{E}[\widehat{\mathbf{X}}|\bar{g}]$. Mais d'après (a),

$$\mathbf{E}[\sum_{s \in \mathcal{S}^d} G_{s(\tilde{p})} | \bar{g}] = d! \sqrt{p!} d^{-d/2} H_p(\bar{g});$$

on en déduit que $\sum_{|p|=d} a_p H_p(\bar{g})$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}; F)$ et que

$$\mathbf{E}[\widehat{\mathbf{X}}|\bar{g}] = d^{-d} \sum_{|p|=d} a_p H_p(\bar{g}).$$

Ceci démontre (i); l'assertion (ii) est alors immédiate. ∎

Remarque. — Complétons la remarque faite après le lemme 8 : si le chaos découplé $\mathbf{Y}$ s'écrit $\sum_{i \in \mathbb{N}^d} b_i G_i$, avec l'autre normalisation des polynômes d'Hermite h_k (coefficient dominant égal à 1), on obtient

$$\mathbf{E}[\mathbf{Y}|\bar{g}] = d^{-\frac{d}{2}} \sum_{i \in \mathbb{N}^d} b_i H_i(\bar{g}),$$

avec $H_i(\bar{g}) = \prod_{j \geq 1} h_{j(i)}(\bar{g}_j)$.

C. L'opérateur $T(\varepsilon)$ et extraction

Nous présentons ici une technique utile dans la suite (équivalence des moments des chaos, comparaison de distances).

Notons $\gamma = \mathcal{N}(0,1)^{\otimes \mathbf{N}}$ la loi du vecteur g. Soit un réel $\varepsilon \in [-1,1]$ et soit $T(\varepsilon)$ l'opérateur linéaire défini sur tout $\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \gamma, F)$ pour $q \geq 1$ par

$$T(\varepsilon) f(\cdot) = \int f(\varepsilon \cdot + \sqrt{1-\varepsilon^2} y) \gamma(dy).$$

Cet opérateur agit sur les polynômes d'Hermite généralisés H_p de façon simple :

$$T(\varepsilon) H_p = \varepsilon^{|p|} H_p \; ;$$

ceci se vérifie (cf. [WAT]) à partir de la série génératrice des polynômes d'Hermite h_k. On a donc pour $\mathbf{X} = \sum_{|p| \leq d} a_p H_p$ chaos gaussien vectoriel de degré d,

$$T(\varepsilon) \mathbf{X} = \sum_{|p| \leq d} \varepsilon^{|p|} a_p H_p.$$

Comme $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^d$ sont linéairement indépendants, il existe une suite de polynômes $(f_k)_{0 \leq k \leq d}$ de degré d telle que

$$\int_{-1}^{1} \varepsilon^k f_l(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ 1 & \text{si } k = l \, ; \end{cases}$$

d'où la "formule d'extraction"

$$\int_{-1}^{1} f_k(\varepsilon) T(\varepsilon) \mathbf{X} d\varepsilon = \sum_{|p| = k} a_p H_p.$$

Cette formule d'extraction paraît plus directe (on ne passe pas par les chaos découplés) et plus générale (on peut extraire n'importe quelle partie homogène) que la technique de découplage et recouplage portant sur la partie homogène de degré maximal. Mais nous avons déjà remarqué que les chaos découplés sont plus faciles à étudier puisqu'ils sont conditionnellement gaussiens. Dans les chapitres qui suivent, beaucoup de propriétés qui sont établies simplement pour les chaos découplés se conservent lors du recouplage. Les deux méthodes ont donc leurs avantages et leurs inconvénients.

4. Intégrabilité des chaos gaussiens

Les chaos gaussiens de degré fini possèdent des propriétés d'intégrabilité tout à fait analogues aux vecteurs gaussiens ; nous en rappelons les principaux aspects : l'équivalence des moments, le phénomène d'hypercontractivité, l'intégrabilité exponentielle et les propriétés de concentration de la mesure gaussienne ; enfin nous insistons sur un lemme d'intégrabilité pour les chaos gaussiens découplés qui nous sera utile à plusieurs reprises dans la suite.

Définition 12. — *Une jauge N sur F est une pseudo-semi-norme semi-continue inférieurement c'est à dire une application $N : F \longrightarrow \overline{\mathrm{R}}_+$ telle que*

(i) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x),\ \ (\lambda, x) \in \mathbf{R} \times F,$

(ii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y),\ \ x, y \in F,$

(iii) $\{x : N(x) > a\}$ *est ouvert dans* $F,\ \ a > 0.$

A. Equivalence des moments des chaos gaussiens

L'équivalence des moments peut être reliée à *l'hypercontractivité* de l'opérateur linéaire $T(\varepsilon)$; cette idée est dûe à C. Borell [BOR4]. Rappelons qu'il est défini sur tout $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \gamma, F)$ pour $p \geq 1$ par

$$T(\varepsilon) f(\cdot) = \int f(\varepsilon \cdot + \sqrt{1-\varepsilon^2}\, y)\gamma(dy).$$

Théorème 13. — *Soient* $1 < p < q$. *Pour tout chaos gaussien vectoriel homogène de degré d noté $\mathbf{X}$ et toute jauge N,*

$$(\mathbf{E} N^q(\mathbf{X}))^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{\frac{d}{2}} (\mathbf{E} N^p(\mathbf{X}))^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. — La série génératrice des polynômes d'Hermite $(h_n)_{n \geq 0}$ montre que

$$T(\varepsilon) h_n = \varepsilon^n h_n, \quad n \geq 0\,;$$

on en déduit que pour les polynômes d'Hermite généralisés,

$$T(\varepsilon) H_r = \varepsilon^{|r|} H_r, \quad r \in \mathrm{N}^{(\mathbf{N})}.$$

Pour un chaos $\mathbf{X}$ homogène de degré d, nous avons $T(\varepsilon)\mathbf{X} = \varepsilon^d \mathbf{X}$; de plus, l'inégalité de Jensen implique

$$N(T(\varepsilon)\mathbf{X}) \leq T(\varepsilon) N(\mathbf{X})\,;$$

d'où

$$\varepsilon^d \left(\mathbf{E}N^q(\mathbf{X})\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\mathbf{E}N^q(T(\varepsilon)\mathbf{X})\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\mathbf{E}|T(\varepsilon)N(\mathbf{X})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (\diamond)$$

Théorème (Nelson) ([NEL], [GRO]). — *Supposons* $1 < p < q < \infty$ *et* $0 \leq \varepsilon \leq (\frac{p-1}{q-1})^{1/2}$. *Pour tout* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \gamma)$, *on a*

$$\left(\int |T(\varepsilon)f|^q d\gamma\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int |f|^p d\gamma\right)^{\frac{1}{p}} .$$

En appliquant ce théorème à $f = N(\mathbf{X})$ pour $\varepsilon = (\frac{p-1}{q-1})^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$\left(\mathbf{E}|T(\varepsilon)N(\mathbf{X})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\mathbf{E}N^p(\mathbf{X})\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

et en combinant avec les inégalités $(\diamond)$, on obtient

$$\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{\frac{d}{2}} \left(\mathbf{E}N^q(\mathbf{X})\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\mathbf{E}N^p(\mathbf{X})\right)^{\frac{1}{p}} .$$

□

D'autres approches sont possibles : dans [GIN], l'inégalité de Khintchine-Kahane pour les sommes de Rademacher est généralisée aux chaos de Rademacher vectoriels et un théorème de la limite centrale permet d'obtenir les équivalences des moments des chaos gaussiens. Nous proposons de partir des résultats connus pour les vecteurs gaussiens et les généraliser aux chaos gaussiens découplés (homogènes), puis aux chaos gaussiens non découplés homogènes par conditionnement.

Théorème 14. — *Soient p et q deux réels positifs. Il existe une constante K ne dépendant que de p et q telle que pour tout chaos gaussien vectoriel $\mathbf{Y}$ découplé (homogène) de degré d et toute jauge N, on ait*

$$\left(\mathbf{E}N^q(\mathbf{Y})\right)^{\frac{1}{q}} \leq K^d \left(\mathbf{E}N^p(\mathbf{Y})\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Démonstration. — On peut supposer que $0 < p < q$ et procéder par récurrence sur d : le cas $d = 1$ résulte du théorème bien connu suivant :

Théorème (cf. [L-T]). — *Etant donnés p, q positifs, il existe une constante K ne dépendant que de p et q telle que pour tout vecteur gaussien X à valeurs dans F et toute jauge N sur F,*

$$\left(\mathbf{E}N(X)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq K \left(\mathbf{E}N(X)^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Supposons la conclusion du lemme vraie jusqu'au degré $d-1$; soient R une application d-linéaire mesurable R de $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^d$ dans F et N une jauge sur F. Notons $\mathbf{E}'$ l'espérance par rapport à g^d et $\mathbf{E}''$ l'espérance par rapport à $g^1, \ldots, g^{d-1}$. Pour pouvoir opérer, on a besoin d'un lemme auxiliaire.

LEMME (cf. [K-W]). — *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés. Soient p, q tels que $0 < p < q$ et $f : X \times Y \mapsto \mathbf{R}$ mesurable.*

$$\left[\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

L'hypothèse de récurrence combinée avec ce lemme permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}N^q(\mathbf{Y}) &= \mathbf{E}'\mathbf{E}''N^q(\mathbf{Y}(g^1, \ldots, g^{d-1}, g^d)) \\
&\leq \mathbf{E}'K^{(d-1)q}\left(\mathbf{E}''N^p(\mathbf{Y}(g^1, \ldots, g^{d-1}, g^d))\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq K^{(d-1)q}\left(\mathbf{E}'\left(\mathbf{E}''N^q(\mathbf{Y}(g^1, \ldots, g^{d-1}, g^d))\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq K^{(d-1)q}\mathbf{E}''\mathbf{E}'N^q(\mathbf{Y}(g^1, \ldots, g^{d-1}, g^d)) \\
&\leq K^{(d-1)q}\mathbf{E}''K\left(\mathbf{E}'N^p(\mathbf{Y}(g^1, \ldots, g^{d-1}, g^d))\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq K^{dq}\left(\mathbf{E}N^p(\mathbf{Y})\right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

□

On peut alors proposer une seconde démonstration du théorème 13 : soit $\mathbf{X}$ un chaos gaussien vectoriel homogène de degré d, $\widehat{\mathbf{X}}$ le chaos gaussien vectoriel découplé associé et N une jauge. En vertu du théorème 14, il suffit de montrer que pour tout $p > 1$, il existe une constante $C = C_d$ ne dépendant que de d telle que

$$C^{-1}\left(\mathbf{E}N^p(\mathbf{X})\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbf{E}N^p(\widehat{\mathbf{X}})\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\mathbf{E}N^p(\mathbf{X})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or les chaos $\mathbf{X}$ et $\widehat{\mathbf{X}}$ sont, à une constante multiplicative près dépendant de d, des espérances conditionnelles l'un de l'autre, d'après le lemme 8 et le corollaire 11 ; l'inégalité de Jensen conditionnelle fournit alors le résultat.

Le théorème 14 s'étend aux chaos gaussiens non-homogènes ; nous avons besoin pour cela du lemme suivant.

LEMME 15 ([K-W]). — *Soit $\mathbf{X}$ un chaos gaussien de degré d à valeurs dans F. La partie homogène de degré k de $\mathbf{X}$ est notée $\mathbf{X}_k$. Soit $\phi : F \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable, convexe telle que $\phi(-x) = \phi(x)$. Il existe une constante K ne dépendant que de d telle que*

$$\mathbf{E}\phi(\mathbf{X}_k) \leq K\mathbf{E}\phi(K\mathbf{X}), \qquad 0 \leq k \leq d.$$

Démonstration. — Remarquons que $t \mapsto \phi(tx)$ est croissante sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in F$. D'autre part, puisque $1, t, \ldots, t^d$ sont linéairement indépendants, il existe des fonctions $f_k \in \mathrm{L}^2[-1,1],\ 0 \leq k \leq d$, telles que

$$\int_{-1}^{1} t^l f_k(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ 1 & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Posons $C_k = \int_{-1}^{1} |f_k(t)|dt$ et $K = K_d = \max_{0 \leq k \leq d} C_k$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\phi(\mathbf{X}_k) &= \mathbf{E}\phi(\int_{-1}^{1} \mathbf{X}_k t^k f_k(t)dt) \\
&= \mathbf{E}\phi(\int_{-1}^{1} \sum_{l=0}^{d} \mathbf{X}_l t^l f_k(t)dt) \\
&= \mathbf{E}\phi(\int_{-1}^{1} T(t)\mathbf{X} f_k(t)dt) \\
&\leq C_k^{-1}\mathbf{E}(\int_{-1}^{1} \phi(C_k T(t)\mathbf{X})|f_k(t)|dt) \\
&\leq \sup_{|t|\leq 1} \mathbf{E}\phi(C_k T(t)\mathbf{X}) \\
&\leq \mathbf{E}\phi(K\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

□

Théorème 16. — *Soient $0 < p < q$ et $d \in \mathbf{N}$. Il existe une constante K ne dépendant que de p, q et d telle que pour tout chaos gaussien vectoriel homogène ou non de degré d noté $\mathbf{X}$ et toute jauge N,*

$$(\mathbf{E}N^q(\mathbf{X}))^{\frac{1}{q}} \leq K\,(\mathbf{E}N^p(\mathbf{X}))^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. — (a) Supposons d'abord que $1 < p < q$. Si $\mathbf{X}_k$ désigne la partie k-homogène d'un chaos gaussien $\mathbf{X}$ de degré d, l'inégalité triangulaire, le théorème 14 et le lemme 15 fournissent

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}N^q(\mathbf{X}))^{\frac{1}{q}} &\leq \sum_{k=0}^{d} (\mathbf{E}N^q(\mathbf{X}_k))^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{\frac{d}{2}} \sum_{k=0}^{d} (\mathbf{E}N^p(\mathbf{X}_k))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{\frac{d}{2}} (d+1)K_d\,(\mathbf{E}N^p(\mathbf{X}))^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

(b) Supposons maintenant que $0 < p \leq 1 < q$. Soit $\alpha \in]0,1[$; l'inégalité de Hölder et le cas (a) nous donnent

$$\begin{aligned}\mathbf{E}N^q(\mathbf{X}) &\leq (\mathbf{E}N^p(\mathbf{X}))^\alpha \left(\mathbf{E}N^{\frac{q-\alpha p}{1-\alpha}}(\mathbf{X})\right)^{1-\alpha} \\ &\leq (\mathbf{E}N^p(\mathbf{X}))^\alpha \left(\frac{\frac{q-\alpha p}{1-\alpha}-1}{q-1}\right)^{\frac{d(q-\alpha p)}{2}} ((d+1)K_d)^{q-\alpha p} \left(\mathbf{E}N^q(\mathbf{X})\right)^{\frac{q-\alpha p}{q}} \ ;\end{aligned}$$

on en déduit en simplifiant

$$(\mathbf{E}N^q(\mathbf{X}))^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\frac{q-\alpha p}{1-\alpha}-1}{q-1}\right)^{\frac{d(q-\alpha p)}{2\alpha p}} ((d+1)K_d)^{\frac{q-\alpha p}{\alpha p}} (\mathbf{E}N^p(\mathbf{X}))^{\frac{1}{p}} .$$

(c) Dans le cas où $0 < p < q \leq 1$, on procède de même qu'en (b) en choisissant α suffisamment proche de 1 pour avoir $\frac{q-\alpha p}{1-\alpha} > 1$; le cas (b) permet alors de conclure. □

B. Concentration et intégrabilité

L'intégrabilité des chaos gaussiens peut se déduire de propriétés de concentration de leurs lois à partir de leurs paramètres moyens ; nous énonçons auparavant un lemme qui compare la variance faible et la médiane du vecteur gaussien g. Nous notons $\mathcal{O}$ la boule unité fermée de ℓ_2.

Lemme 17. — *Soit N une jauge sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On a alors*

(i) $\mathbf{E}N^2(g) \geq \sup_{h\in\mathcal{O}} N^2(h)$,

(ii) $\sup_{h\in\mathcal{O}} N(h) \leq 2\mathrm{med}(N(g))$.

Démonstration. — Commençons par rappeler un corollaire du théorème de Hahn-Banach.

> Lemme (cf. [FER2], [FER3]). — *Soit N une jauge sur F. Il existe une suite $(y^n)_{n\geq 1}$ du dual topologique F' telle que*
>
> $$N(\cdot) = \sup_{n\geq 1} | < \cdot, y^n > |.$$

(i) Le dual topologique de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ étant l'espace des suites réelles à support fini $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, une minoration simple et l'inégalité de Schwarz impliquent que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}N^2(g) &\geq \sup_{n\geq 1} \mathbf{E} < g, y^n >^2 \\ &= \sup_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} (y_k^n)^2 = \sup_{n\geq 1} \sup_{h\in\mathcal{O}} < h, y^n >^2 \\ &= \sup_{h\in\mathcal{O}} N^2(h).\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $n \geq 1$, la table de la loi normale d'une part et la définition de la médiane d'autre part donnent

$$\mathbf{P}\{| < g, y^n > | \leq \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{E}| < g, y^n > |^2}\} < \frac{1}{2},$$
$$\mathbf{P}\{| < g, y^n > | \leq \mathrm{med}(N(g))\} \geq \frac{1}{2}\ ;$$

par comparaison, on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{med}(N(g)) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{E}| < g, y^n > |^2},$$

d'où le résultat. $\square$

Le théorème qui suit est l'analogue de celui présenté dans [L-T] pour les chaos gaussiens d'ordre 2 ; nous n'utilisons que 2 paramètres au lieu de $d+1$.

Théorème 18. — *Soient $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(g^1, \ldots, g^d)$ un chaos gaussien homogène découplé de degré d à valeurs dans F et N une jauge sur F. Posons*

$$\sigma = \sup_{h^1,\ldots,h^d \in \mathcal{O}} (N \circ \mathbf{Y})(h^1, \ldots, h^d).$$

On suppose de plus l'existence d'un réel M tel que

$$\mathbf{P}\{(N \circ \mathbf{Y})(g^1, \ldots, g^d) \leq M\} \geq 1 - \frac{1}{2^{d+1}d!}.$$

Alors

$$\mathbf{P}\left\{(N \circ \mathbf{Y})(g^1, \ldots, g^d) > M \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} (2t)^k + \sigma t^d\right\} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Démonstration. — Introduisons d'abord quelques notations : notons $\mathbf{h}^k$ le vecteur $(h^1, \ldots, h^k)$, $\mathbf{g}^{d-k}$ le vecteur gaussien $(g^{k+1}, \ldots, g^d)$ et $\mathbf{g}$ le vecteur gaussien $(g^1, \ldots, g^d)$; enfin, $\mathcal{S}^d$ désigne le groupe symétrique à d éléments et $\mathbf{x}^{d-k}$ étant le vecteur $(x^{k+1}, \ldots, x^d)$ de $\left(\mathrm{R}^{\mathbf{N}}\right)^{d-k}$, on note $s(x^{d-k})$ le vecteur $(x^{s(k+1)}, \ldots, x^{s(d)})$ pour tout $s \in \mathcal{S}^d$.
(a) On suppose pour commencer que le chaos découplé $\mathbf{Y}$ est défini par une somme finie et que N est une semi-norme continue. Montrons d'abord par récurrence sur $k \in [0, d-1]$ que

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\mathbf{h}^k \in \mathcal{O}^k} (N \circ \mathbf{Y})(\mathbf{h}^k, \mathbf{g}^{d-k}) \leq 2^k M\right\} \geq 1 - \frac{1}{2^{d-k+1}d!}. \qquad (*)$$

Le rang $k = 0$ correspond à l'hypothèse du théorème; supposons l'inégalité $(*)$ vraie au rang $k-1$ et considérons le sous-ensemble de $\left(\mathrm{R}^{\mathbf{N}}\right)^{d-k}$

$$A = \left\{z\ :\ \mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{h}^{k-1} \in \mathcal{O}^{k-1}} (N \circ \mathbf{Y})(\mathbf{h}^{k-1}, g^k, z) \leq 2^{k-1}M\} \geq 1/2\right\},$$

une évaluation simple, le théorème de Fubini et l'hypothèse de récurrence impliquent

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\mathbf{g}^{d-k}\in A\}+\frac{1}{2}\mathbf{P}\{\mathbf{g}^{d-k}\in A^c\}\\
&\qquad\geq \mathbf{E}_{\mathbf{g}^{d-k}}\mathbf{P}\left\{\sup_{\mathbf{h}^{k-1}\in\mathcal{O}^{k-1}}(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{h}^{k-1},g^k,\mathbf{g}^{d-k})\leq 2^{k-1}M\right\}\\
&\qquad\geq 1-\frac{1}{2^{d-k+2}d!},
\end{aligned}$$

on obtient donc

$$\mathbf{P}\{\mathbf{g}^{d-k}\in A\}\geq 1-\frac{1}{2^{d-k+1}d!}.$$

Il résulte alors de la définition d'une médiane et du lemme 17(ii) que pour tout z de A,

$$\begin{aligned}
2^{k-1}M &\geq \operatorname{med}\left[\sup_{\mathbf{h}^{k-1}\in\mathcal{O}^{k-1}}(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{h}^{k-1},g^k,z)\right]\\
&\geq \frac{1}{2}\sup_{\mathbf{h}^{k}\in\mathcal{O}^{k}}(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{h}^{k},z)\ ;
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\mathbf{h}^{k}\in\mathcal{O}^{k}}(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{h}^{k},\mathbf{g}^{d-k})\leq 2^{k}M\right\}\geq\mathbf{P}\{\mathbf{g}^{d-k}\in A\}\geq 1-\frac{1}{2^{d-k+1}d!},$$

ce qui démontre $(*)$.
Rappelons le théorème de Sudakov-Tsirelson-Borell dans $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^d$:

Lemme (cf. [FER2]). — *Soit B une partie mesurable de $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^d$ telle que $\mathbf{P}\{\mathbf{g}\in B\}\geq 1/2$. Pour tout $t\geq 0$, on a alors*

$$\mathbf{P}\{\mathbf{g}\in B+t\mathcal{O}^d\}\geq\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du.$$

On constate d'après $(*)$ que le sous-ensemble de $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)^d$

$$B=\{\mathbf{x}\ :\ \sup_{0\leq k<d}\ \sup_{s\in S^d}\ \sup_{\mathbf{h}^k\in\mathcal{O}^k}(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{h}^k,s(\mathbf{x}^{d-k}))\leq 2^kM\}$$

est de mesure supérieure à $1/2$. Pour tout couple $(\mathbf{x},\mathbf{h})\in B\times\mathcal{O}^d$, la d-linéarité et la symétrie de $\mathbf{Y}$ impliquent

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}+t\mathbf{h})=\mathbf{Y}(\mathbf{x})+t\sum_{k=1}^{d}\mathbf{Y}(x^1,\ldots,x^{k-1},h^k,x^{k+1}\ldots,x^d)+\ldots+t^d\mathbf{Y}(\mathbf{h}),$$

$$(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\leq M\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}2^kt^k+\sigma t^d,$$

d'où

$$\mathbf{P}\left\{(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{g}) > M\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}2^k t^k + \sigma t^d\right\} \leq \int_t^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}du \leq e^{-t^2/2}.$$

(b) On ne suppose plus que $\mathbf{Y}$ est une somme finie; d'après la proposition 7, on a presque sûrement

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}) = \lim_{n\to\infty} Y_n(\mathbf{g}),$$
$$(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{g}) = \lim_{n\to\infty}(N\circ Y_n)(\mathbf{g})$$

où $Y_n(\mathbf{g}) = \sum_{i^*\leq n} b_i G_i$. Si l'on note σ_n et M_n les paramètres associés à Y_n, on montre aisément que $\sigma = \sup_n \sigma_n$ et que l'on peut choisir M_n égal à M. Le cas (a) nous fournit donc

$$\sup_n \mathbf{P}\left\{(N\circ Y_n)(\mathbf{g}) > M\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}2^k t^k + \sigma t^d\right\} \leq e^{-t^2/2},$$

et d'après la convergence presque sûr de (Y_n) vers $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{P}\left\{(N\circ\mathbf{Y})(\mathbf{g}) > M\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}2^k t^k + \sigma t^d\right\} \leq e^{-t^2/2}.$$

(c) Dans le cas général, la jauge N est la borne supérieure d'une suite croissante de semi-normes continues $(N_l)_{l\geq 1}$. Le cas (b) fournit ainsi pour tout $l\geq 1$

$$\mathbf{P}\left\{(N_l\circ\mathbf{Y})(\mathbf{g}) > M_l\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}2^k t^k + \sigma_l t^d\right\} \leq e^{-t^2/2};$$

comme on a $\sigma = \sup_l \sigma_l$ et que chaque M_l peut être choisi égal à M, on peut conclure en faisant tendre l vers l'infini. □

Pour être complet, rappelons le résultat précis sur l'intégrabilité exponentielle des chaos gaussiens homogènes.

Théorème 19 (cf. [LED2], [A-G]). — *Soient $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(g^1,\ldots,g^d)$ un chaos gaussien homogène découplé de degré d à valeurs dans F et N une jauge sur F. Posons*

$$\sigma = \sup_{h^1,\ldots,h^d\in\mathcal{O}}(N\circ\mathbf{Y})(h^1,\ldots,h^d).$$

On a alors

(i) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\frac{2}{d}}}\log\mathbf{P}\{(N\circ\mathbf{Y})(g^1,\ldots,g^d) > t\} = -\frac{1}{2\sigma^{\frac{2}{d}}},$

(ii) $\mathbf{E}\exp\frac{1}{2}\Big(\frac{(N\circ\mathbf{Y})(g^1,\ldots,g^d)}{\alpha}\Big)^{\frac{2}{d}}<\infty\Longleftrightarrow\alpha>\sigma.$

Remarque. — Le théorème 19 reste vrai pour un chaos gaussien non découplé de degré fini (voir [A-G], 4.6) : s'il s'écrit $\mathbf{X}(g)=\sum_{|p|\leq d}a_pH_p(g)$, le paramètre σ correspondant sera

$$\sigma=\sup_{h\in\mathcal{O}}N(\mathbf{E}\sum_{|p|=d}a_pH_p(g+h))=\sup_{h\in\mathcal{O}}N\left(\sum_{|p|=d}\frac{a_p}{\sqrt{p!}}h^p\right),$$

où, comme l'usage le permet, $p!$ et h^p désignent les produits $\prod_{k\geq 1}p_k!$ et $\prod_{k\geq 1}h_k^{p_k}$.

C. Un lemme d'intégrabilité

Nous savons que par définition, un chaos gaussien $\mathbf{X}$ découplé ou non est *fortement intégrable* puisque pour toute semi-norme continue N sur F, $N(\mathbf{X})$ est intégrable. Dans le cas des chaos découplés, on peut facilement préciser et renforcer ces propriétés d'intégrabilité.

Lemme 20. — *Etant donnés deux espaces de Fréchet séparables E et F, soit $\mathcal{L}_k(E,F)$ l'espace des applications k-linéaires mesurables de E^k dans F, μ une mesure gaussienne centrée sur E et N une pseudo-semi-norme sur F. Pour tout $Q\in\mathcal{L}_k(E,F)$, on a alors*

$$\mu^{\otimes k}\{N(Q)>1\}\leq\alpha<1\quad\Longrightarrow\quad\int N^2(Q)d\mu^{\otimes k}\leq\frac{C^k}{\left(1-\alpha^{2^{1-k}}\right)^{2k}},$$

où C est une constante absolue.

Démonstration. — On procède par récurrence sur k. Ce lemme est bien connu si k vaut 1 : en effet, l'application linéaire Q est alors un vecteur gaussien centré dans F et (voir [FER1]) :

$$\mu\{N\,(Q)>1\}\leq\alpha<1\Longrightarrow\int N^2(Q)d\mu\leq\frac{C}{(1-\alpha)^2}.$$

Supposons le résultat vrai au rang k et soit $Q\in\mathcal{L}_{k+1}(E,F)$ tel que :

$$\mu^{\otimes k+1}\{N\,(Q)>1\}\leq\alpha<1.$$

Notons Q_x l'élément de $\mathcal{L}_k(E,F)$ déduit de Q en fixant une variable x. Posons $B=\{x\,:\,\mu^{\otimes k}\{N(Q_x)>1\}>\alpha^{\frac{1}{2}}\}$ et appliquons lui l'inégalité de Chebychev :

$$\mu\{B\}\leq\alpha^{-\frac{1}{2}}\int\mu^{\otimes k}\{N(Q_x)>1\}\mu(dx)\leq\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

L'hypothèse de récurrence implique alors que pour tout $x \in B^c$,

$$\int N^2(Q_x)d\mu^{\otimes k} \leq \frac{C^k}{\left(1-\alpha^{2^{-k}}\right)^{2k}};$$

on a ainsi

$$\mu\{x \,:\, \int N^2(Q_x)d\mu^{\otimes k} > \frac{C^k}{\left(1-\alpha^{2^{-k}}\right)^{2k}}\} \leq \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Posons de plus pour tout $x \in E$,

$$M(x) = \left(\int N^2(Q_x)d\mu^{\otimes k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par définition et d'après le théorème de Fubini, l'application M est une pseudo-semi-norme sur E et on a :

$$\mu\{x \,:\, M^2(x) > \frac{C^k}{\left(1-\alpha^{2^{-k}}\right)^{2k}}\} \leq \alpha^{\frac{1}{2}}\,;$$

en appliquant le lemme au rang $k = 1$ en prenant M comme pseudo-semi-norme avec $F = E$ et $Q = id_E$, il vient :

$$\int M^2(x)\mu(dx) \leq \frac{C^k}{\left(1-\alpha^{2^{-k}}\right)^{2k}} \times \frac{C}{\left(1-\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2} \leq \frac{C^{k+1}}{\left(1-\alpha^{2^{-k}}\right)^{2k+2}},$$

soit :

$$\int N^2(Q)d\mu^{\otimes k+1} \leq \frac{C^{k+1}}{\left(1-\alpha^{2^{-k}}\right)^{2k+2}}.$$

C'est le résultat au rang $k+1$. $\square$

Remarque. — Sous les hypothèses du lemme 20, on peut montrer suivant le même schéma que pour tout $p > 0$ on a

$$\mu^{\otimes k}\{N(Q) > 1\} \leq \alpha < 1 \quad \Longrightarrow \quad \int N^p(Q)d\mu^{\otimes k} \leq \frac{C_p^k}{\left(1-\alpha^{2^{1-k}}\right)^{pk}},$$

où C_p est une constante dépendant de p.

Application. — Soit Y un chaos gaussien découplé de degré d à valeurs dans $\mathbf{R}^S$, S étant un ensemble dénombrable. Dans ces conditions, il existe une constante $K_{d,\alpha}$ telle que

$$\mathbf{P}\{\sup_{s\in S}|Y(s)| > 1\} \leq \alpha < 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}\sup_{s\in S}|Y(s)|^2 \leq K_{d,\alpha}.$$

Pour le voir, notons Q l'élément de $\mathcal{L}_d\left(\left(\mathrm{R}^{\mathbf{N}}\right)^d, \mathrm{R}^{\mathbf{N}\times S}\right)$ défini par

$$Q_{n,s}(u^1, \ldots, u^d) = \sum_{i^* < n} b_i(s) U_i,$$

avec $i^* = \max_{1\leq k\leq d} i_k$ et $U_i = u^1_{i_1} \cdots u^d_{i_d}$. Posons de plus pour tout $x \in \mathrm{R}^{\mathbf{N}\times S}$,

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \lim_n |x_{n,s}| & \text{si elle existe,} \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

On constate alors que $\sup_{s\in S} |\varphi_s(\cdot)|$ est une pseudo-semi-norme sur $\mathrm{R}^{\mathbf{N}\times S}$ et que, d'après la proposition 7, $\sup_{s\in S} |\varphi_s \circ Q(g^1, \ldots, g^d)|$ est presque sûrement égal à $\sup_{s\in S} |Y(s)|$. On conclut alors en appliquant le lemme 20.

Chapitre II
Lois zéro-un pour les chaos gaussiens

Les lois zéro-un pour les polynômes d'un vecteur gaussien ont déja été étudiées par Rosiński, Samorodnitsky et Taqqu [R-S-T]. On se propose ici de les établir simplement en utilisant le théorème de Fubini et l'invariance par rotation d'une mesure gaussienne centrée. Notre point de vue provient d'un travail de Borell [BOR1] peu exploité et utilise une formule de polarisation [A-G] , [KWA] légèrement différente de celle du lemme 8 et qui joue un rôle central dans ce chapitre.

1. Polynômes dans les espaces de Fréchet séparables

Nous commençons par préciser la notion de polynôme. Soient E et F deux espaces de Fréchet séparables munis de leurs tribus boréliennes $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(F)$.

Définition 21. — *Un polynôme de degré inférieur ou égal à d de E dans F est une application mesurable de la forme*

$$x \mapsto S_0 + \sum_{k=1}^{d} S_k\,(\underbrace{x,\ldots,x}_{k})$$

où pour tout entier k, S_k est un élément de $\mathcal{S}(E^k,F)$, l'espace des applications k-linéaires, symétriques et mesurables de E^k vers F. Ces polynômes forment un espace vectoriel noté $\mathcal{P}^d(E,F)$.

Remarque. — La propriété "S_k symétrique" n'est pas restrictive puisque sur la diagonale $(x,\ldots,x)$ une application multilinéaire et sa symétrisée coïncident.

A. Trois lemmes élémentaires

Dans ce paragraphe, on présente sous forme de lemmes les trois étapes qui constituent le schéma de démonstration du théorème principal i.e. la loi zéro-un pour les polynômes de $\mathcal{P}^d(E,F)$. Ces lemmes, dont l'un est nouveau, tiennent compte de deux idées dûes à Rosiński, Samorodnitsky et Taqqu :

(i) Si la partie homogène maximale R d'un polynôme P n'appartient pas à un sous-espace vectoriel mesurable V presque sûrement, alors P n'appartient pas à V presque sûrement.

(ii) Si la partie homogène maximale R appartient à V presque sûrement pour la mesure produit, on peut se ramener à un polynôme de degré inférieur et conclure par récurrence.

Dans toute la suite, μ désigne une *mesure gaussienne centrée* sur E, V un sous-espace vectoriel mesurable de F et d un entier positif.

Lemme 22. — *Soit P un polynôme de degré d et R sa partie d-homogène. On a alors*

$$\mu^{\otimes d}\left\{x_1,\ldots,x_d \,:\, R\left(x_1,\ldots,x_d\right)\in V\right\} \;\geq\; \left[\mu\left\{x \,:\, P\left(x\right)\in V\right\}\right]^{2^d}.$$

Démonstration. — Pour faciliter la lecture, on utilise quelques notations : soit $\varepsilon\in\{-1,1\}^d$ de coordonnées $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)$. On définit $(r_0,\ldots,r_d)$ comme suit :

$$\begin{cases} r_d = r_{d-1} = 2^{-d/2} \\ r_{k-1} = \sqrt{2}r_k\,, \qquad \text{pour } k=1,\ldots,d-1. \end{cases}$$

On a donc la relation de récurrence $r_{k-2} = \sqrt{r_{k-1}^2+r_k^2}$. Posons pour tout $k\in[1,d]$ $x_{\varepsilon,k} = r_0x_0 + r_1\varepsilon_1x_1 + \cdots + r_k\varepsilon_kx_k$.

(a) Montrons d'abord que

$$\mu^{\otimes d+1}\big\{\forall\varepsilon\in\{-1,1\}^d,\, P(x_{\varepsilon,d})\in V\big\} \;\geq\; \left[\mu\{x \,:\, P(x)\in V\}\right]^{2^d}. \qquad (*)$$

Pour cela, on note $\mathbf{E}_k$ l'opérateur d'intégration en $(x_0,\ldots,x_k)$ par rapport à $\mu^{\otimes k+1}$ et on introduit la suite $(p_k)_{k<d}$ définie par

$p_0 = \mu^2\left\{x \,:\, P\left(x\right)\in V\right\},$

$p_1 = \mathbf{E}_0\mu^2\{x \,:\, P(r_0x_0 - r_0x)\in V,\, P(r_0x_0+r_0x)\in V\},$

$p_{k+1} = \mathbf{E}_k\mu^2\big\{x \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k+1}\in\{-1,1\},\, P(x_{\varepsilon,k}+r_k\varepsilon_{k+1}x)\in V\big\}.$

D'après le théorème de Fubini, en distinguant les deux cas $\varepsilon_d = -\varepsilon_{d-1}$ et $\varepsilon_d = \varepsilon_{d-1}$ et par la propriété d'invariance par rotation de μ, le membre de gauche de $(*)$ s'écrit

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{d-2}\mu^{\otimes 2}\big\{x,y \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d,\, P(x_{\varepsilon,d-2}+\varepsilon_{d-1}[r_{d-1}x + r_d\varepsilon_dy])\in V\big\} \\ &\quad = \mathbf{E}_{d-2}\mu^{\otimes 2}\left\{x,y \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{d-1},\, \begin{matrix} P(x_{\varepsilon,d-2}+\varepsilon_{d-1}[r_{d-1}x - r_dy])\in V \\ P(x_{\varepsilon,d-2}+\varepsilon_{d-1}[r_{d-1}x + r_dy])\in V \end{matrix}\right\} \\ &\quad = \mathbf{E}_{d-2}\mu^2\big\{x \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{d-1},\, P(x_{\varepsilon,d-2}+r_{d-2}\varepsilon_{d-1}x)\in V\big\} \\ &\quad = p_{d-1}\,; \end{aligned}$$

de plus, on a $p_{k+1}\geq p_k^2$ pour $k\in[0,\ldots,d-1]$. En effet, d'après l'inégalité de Jensen et l'argument précédent

$$\begin{aligned} \sqrt{p_{k+1}} &\geq \mathbf{E}_k\mu\big\{x \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k+1},\, P(x_{\varepsilon,k-1}+r_k\varepsilon_kx_k + r_k\varepsilon_{k+1}x)\in V\big\} \\ &= \mathbf{E}_{k-1}\mu^{\otimes 2}\big\{x,y \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{k+1},\, P(x_{\varepsilon,k-1}+\varepsilon_k[r_kx + r_k\varepsilon_{k+1}y])\in V\big\} \\ &= \mathbf{E}_{k-1}\mu^{\otimes 2}\left\{x,y \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,\, \begin{matrix} P(x_{\varepsilon,k-1}+\varepsilon_k[r_kx - r_ky])\in V \\ P(x_{\varepsilon,k-1}+\varepsilon_k[r_kx + r_ky])\in V \end{matrix}\right\} \\ &= \mathbf{E}_{k-1}\mu^2\big\{x \,:\, \forall\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,\, P(x_{\varepsilon,k-1}+\varepsilon_kr_{k-1}x)\in V\big\}, \end{aligned}$$

c'est à dire $p_{k+1} \geq p_k^2$. En itérant cette inégalité, on obtient $p_{d-1} \geq p_0^{2^{d-1}}$; on a donc prouvé $(*)$.
(b) Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ une suite de Rademacher. Une version plus simple de la formule de polarisation présentée au paragraphe 3 du chapitre I (voir aussi [BOR1]) nous donne

$$R(x_1, \ldots, x_d) = \left[d! \prod_{k=1}^{d} \lambda_k \right]^{-1} \mathbf{E}_\varepsilon \, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d \, P(x_{\varepsilon,d}) \ ;$$

d'après $(*)$ et la linéarité de V, on déduit facilement que

$$\mu^{\otimes d} \{x_1, \ldots, x_d \, : \, R(x_1, \ldots, x_d) \in V\} \ \geq \ p_{d-1} \ \geq \ p_0^{2^{d-1}},$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Lemme 23. — *Pour tout $k > 0$ et $R \in \mathcal{S}(E^k, F)$,*

$$\mu^{\otimes k} \{x_1, \ldots, x_k \, : \, R(x_1, \ldots, x_k) \in V\} \ = \ \textit{0 ou 1.}$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur k. Si k vaut 1, l'application R est linéaire de E dans F. Dans ce cas, l'ensemble $\{x \, : \, R(x) \in V\}$ est un sous-espace vectoriel mesurable de E et il est bien connu (voir [FER1]) que $\mu\{x \, : \, R(x) \in V\} = 0$ ou 1. Supposons la conclusion du lemme vérifiée au rang $k > 0$ pour tout élément de $\mathcal{S}(E^k, F)$ et soit $R \in \mathcal{S}(E^{k+1}, F)$. Posons $p = \mu^{\otimes k+1} \{x_1, \ldots, x_k, x \, : \, R(x_1, \ldots, x_k, x) \in V\}$ et montrons que

$$p > 0 \Longrightarrow p = 1\,.$$

D'après le théorème de Fubini et l'hypothèse de récurrence, on a

$$p = \mu \big\{x \, : \, \mu^{\otimes k} \{x_1, \ldots, x_k \, : \, R(x_1, \ldots, x_k, x) \in V\} = 1\big\} > 0\,;$$

en remarquant que $\big\{x \, : \, \mu^{\otimes k} \{x_1, \ldots, x_k \, : \, R(x_1, \ldots, x_k, x) \in V\} = 1\big\}$ est un sous-espace vectoriel mesurable de E, le lemme appliqué au rang 1 fournit $p = 1$. $\square$

Lemme 24. — *Soit R un élément de $\mathcal{S}(E^d, F)$ satisfaisant*

$$\mu^{\otimes d} \{x_1, \ldots, x_d \, : \, R(x_1, \ldots, x_d) \in V\} = 1.$$

Alors il existe un polynôme P dans $\mathcal{P}^{d-1}(E, F)$ tel que

$$\mu \{x \, : \, R(x, \ldots, x) + P(x) \in V\} = 1.$$

Démonstration. — Prenons pour commencer le cas particulier $d = 3$. Soit $R \in \mathcal{S}(E^3, F)$ satisfaisant l'hypothèse du lemme. Posons

$$\begin{aligned} y_1 &= x - x_1, \\ y_2 &= (x + x_1) - \sqrt{2}x_2, \\ y_3 &= (x + x_1) + \sqrt{2}x_2. \end{aligned}$$

La propriété d'invariance par rotation de μ montre que l'application trilinéaire $R(y_1, y_2, y_3)$ a même loi que $R(\sqrt{2}x, 2x_1, 2x_2)$; V étant un sous-espace vectoriel mesurable,

$$\mu^{\otimes 3}\,\{x, x_1, x_2\ :\ R(y_1, y_2, y_3) \in V\} = \mu^{\otimes 3}\,\{x, x_1, x_2\ :\ R(x, x_1, x_2) \in V\} = 1. \qquad (*)$$

Par ailleurs, en écrivant $R(y_1, y_2, y_3)$ en fonction de x, x_1, x_2,

$$\begin{aligned} R(y_1, y_2, y_3) = R(x, x, x) &+ R(x, x, x_1) \\ &+ R(x, x_1 - \sqrt{2}x_2, x_1 + \sqrt{2}x_2) + R(x, -x_1, x_1 + \sqrt{2}x_2) \\ &+ R(x, -x_1, x_1 - \sqrt{2}x_2) + R(-x_1, x_1 - \sqrt{2}x_2, x_1 + \sqrt{2}x_2)\,; \end{aligned}$$

le théorème de Fubini appliqué à $(*)$ montre l'existence d'un couple $(x_1^0, x_2^0) \in E^2$ et d'un polynôme $P \in \mathcal{P}^2\,(E, F)$ s'écrivant explicitement

$$\begin{aligned} P(x) = R(x, x, x_1^0) &+ R(x, x_1^0 - \sqrt{2}x_2^0, x_1^0 + \sqrt{2}x_2^0) \\ &+ R(x, -x_1^0, x_1^0 + \sqrt{2}x_2^0) + R(x, -x_1^0, x_1^0 - \sqrt{2}x_2^0) \\ &+ R(-x_1^0, x_1^0 - \sqrt{2}x_2^0, x_1^0 + \sqrt{2}x_2^0) \end{aligned}$$

tels que $\mu\,\{x : R(x, x, x) + P(x) \in V\} = 1$.
On procède de la même façon pour tout $d > 1$. Soit R un élément de $\mathcal{S}(E^d, F)$ satisfaisant l'hypothèse du lemme. Posons

$$\begin{aligned} &\bar{y}_0 = x, \\ &y_k = \bar{y}_{k-1} - 2^{\frac{k-1}{2}}\,x_k\,;\ \bar{y}_k = \bar{y}_{k-1} + 2^{\frac{k-1}{2}}\,x_k \text{ pour } k = 1, \ldots, d-1, \\ &y_d = \bar{y}_{d-1}. \end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précédent, les variables y_k ont été définies de sorte que $R(y_1, \ldots, y_d)$ ait même loi que $R(\sqrt{2}x, 2x_1, \ldots, 2^{\frac{k-1}{2}}\,x_{d-2}, 2^{\frac{k-1}{2}}\,x_{d-1})$. Comme R est d-linéaire et V un sous-espace vectoriel mesurable, on en déduit

$$\begin{aligned} &\mu^{\otimes d}\,\{x, x_1, \ldots, x_{d-1} : R(y_1, \ldots, y_d) \in V\} \\ &\qquad = \mu^{\otimes d}\,\{x, x_1, \ldots, x_{d-1} : R(x, x_1, \ldots, x_{d-1}) \in V\} \\ &\qquad = 1\,; \end{aligned}$$

en développant $R(y_1,\ldots,y_d)$ sous la forme $R(x,\ldots,x)+P_{x_1,\ldots,x_{d-1}}(x)$ où $P_{x_1,\ldots,x_{d-1}}$ est un polynôme $\mathcal{P}^{d-1}(E,F)$ lorsque $(x_1,\ldots,x_{d-1})$ est fixé et en appliquant le théorème de Fubini, on montre l'existence de $(x_1^0,\ldots,x_{d-1}^0)\in E^{d-1}$ tel que

$$\mu\left\{x:\ R(x,\ldots,x)+P_{x_1^0,\ldots,x_{d-1}^0}(x)\in V\right\}=1.$$

□

Remarque. — Dans [R-S-T], Rosiński, Samorodnitsky et Taqqu remarquent que la principale difficulté est de généraliser le cas $d=2$ (pour lequel il existe une méthode spécifique) au cas $d>2$. Ils développent d'ailleurs une autre technique pour ce dernier. La méthode présentée ici à partir du lemme 22 est simple et générale.

B. Le résultat principal

Théorème 25. — *Soient V un sous-espace vectoriel mesurable de F et P un élément de $\mathcal{P}^d(E,F)$. Alors*

$$\mu\{P\in V\} \;=\; 0 \text{ ou } 1.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur d. Si d vaut 0, le polynôme P se réduit à un vecteur constant de F et le théorème est immédiat. Supposons maintenant le théorème vrai pour $k\in[0,d-1]$ et que $\mu\{P\in V\}>0$ pour $P\in\mathcal{P}^d(E,F)$. Notons R la partie d-homogène de P de sorte que $P-R$ est un élément noté T de $\mathcal{P}^{d-1}(E,F)$. Les lemmes 22, 23 et 24 appliqués successivement à R fournissent l'existence de $Q\in\mathcal{P}^{d-1}(E,F)$ tel que

$$\mu\{x:\ R(x,\ldots,x)+Q(x)\in V\}=1.$$

En considérant l'intersection de $\{P\in V\}$ avec l'ensemble presque sûr ci-dessus, il vient

$$\mu\{x:\ P(x)\in V\}=\mu\{x:\ T(x)-Q(x)\in V\},$$

et l'hypothèse de récurrence nous donne

$$\mu\{x:\ P(x)\in V\}=1.$$

□

2. Application aux chaos gaussiens de degré fini

Rappelons qu'un chaos gaussien X de degré d à valeurs dans F peut s'écrire comme limite presque sûre d'une suite de polynômes :

$$X = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{d} \sum_{\substack{|p|=k \\ p^*<n}} a_p H_p$$

où $p^* = \max\{k : p_k > 0\}$ et a_p est dans F.

Nous disposons d'une loi 0-1 pour les polynômes et il n'est pas très difficile de la généraliser aux limites en probabilité de polynômes.

Théorème 26. — *Soient $\mathcal{P}^d(F,\mu)$ la fermeture en probabilité de $\mathcal{P}^d(E,F)$ dans $L^0(F,\mu)$, P un élément de $\mathcal{P}^d(F,\mu)$ et V un sous-espace vectoriel mesurable de F. Alors*

$$\mu\{P \in V\} \;=\; \textit{0 ou 1.}$$

Démonstration. — Prenons une suite $Q = (Q_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{P}^d(E,F)$ telle que presque sûrement

$$P = \lim_{n\to\infty} Q_n.$$

La suite Q peut être vue comme un élément de $\mathcal{P}^d(E,F^{\mathbf{N}})$ et si on note π_n l'application n-ième composante sur $F^{\mathbf{N}}$, on a presque sûrement

$$P = \lim_{n\to\infty} \pi_n Q.$$

Définissons par ailleurs le sous-espace vectoriel mesurable de $F^{\mathbf{N}}$

$$V' = \left\{y \in F^{\mathbf{N}} : \lim_{n\to\infty} \pi_n y \text{ existe et appartient à } V\right\};$$

Le théorème 25 montre alors que $\mu\{Q \in V'\}$ vaut 0 ou 1 et on conclut en remarquant que

$$\mu\{P \in V\} = \mu\{Q \in V'\}.$$

□

Remarque. — L'argument de passage à la limite se réduit ici à la mesurabilité de V'. Si on note $A(B)$ l'ensemble $\{x \in F^{\mathbf{N}} : \lim x_n \text{ existe appartient à } B\}$ et $\mathcal{F}$ la famille $\{B \in \mathcal{B}(F) : A(B) \in \mathcal{B}(F^{\mathbf{N}})\}$, on montre aisément que $\mathcal{F}$ est une tribu contenant toutes les boules fermées et donc coïncide avec $\mathcal{B}(F)$; la mesurabilité de $V' = A(V)$ s'ensuit.

On peut énoncer également une loi 0-1 pour les processus définis par des chaos gaussiens de degré fini. Soit T un ensemble, F un espace de Fréchet séparable et considérons l'espace vectoriel mesurable $\left(F^T, \mathcal{B}(F)^{\otimes T}\right)$.

COROLLAIRE 27. — *Soient $X(g)$ une fonction aléatoire vectorielle telle que pour tout $t \in T$, $X_t(g)$ est un chaos gaussien de degré d à valeurs dans F et V un sous-espace vectoriel mesurable de F^T. Alors*

$$\mathrm{P}\{X(g) \in V\} \;=\; \textit{0 ou 1}.$$

DÉMONSTRATION. — D'après le théorème de Kolmogorov, on peut supposer T dénombrable : dans ce cas $G = F^T$ est un espace de Fréchet séparable ; en prenant $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ pour E et P_g pour μ, on sait d'après le rappel en début de paragraphe que la fonction aléatoire X appartient à $\mathcal{P}^d(G, \mu)$ et d'après le théorème 26, on a

$$\mu\{X \in V\} \;=\; 0 \text{ ou } 1.$$

□

Chapitre III
Chaos gaussiens sur un espace métrique compact : un théorème de continuité

On va généraliser aux chaos gaussiens de degré quelconque un résultat classique sur les fonctions aléatoires gaussiennes [FER3]. La version informelle du théorème que nous allons démontrer est la suivante : si un chaos gaussien est continu en probabilité sur un espace métrique compact et presque sûrement continu sur un sous-ensemble dénombrable dense, alors il admet une modification à trajectoires continues. Pour cela, nous utiliserons, outre la méthode de découplage, les techniques d'oscillations numériques [I-N] que nous présentons un peu plus loin.

0. Préliminaires

Dans tout ce chapitre (T, δ) sera un *espace métrique compact* et T^* une *partie dénombrable dense* de T.

DÉFINITION 28. — *On appelle chaos gaussien de degré d sur T la fonction aléatoire $X : T \to \mathbf{R}$ où, pour tout $t \in T$, la variable aléatoire $X(t)$ est le représentant (cf. I.2.C) d'un chaos gaussien réel $\mathbf{X}(t)$ de degré d.*

Nous introduisons dès maintenant *la propriété (P)* suivante pour une fonction aléatoire ξ sur T :

(P1) ξ est continue en probabilité,

(P2) $\forall t \in T, \quad \mathbf{P}\left\{ \lim_{\substack{s \to t \\ s \in T^*}} \xi(s) = \xi(t) \right\} = 1.$

1. Le résultat intermédiaire pour les chaos homogènes découplés

THÉORÈME 29. — *Un chaos gaussien homogène découplé Y de degré d sur T vérifiant (P) admet une modification à trajectoires continues.*

REMARQUE. — La condition (P2) se renforce pour Y sur T : le lemme 20 montre qu'elle est équivalente à

$$\forall t \in T, \quad \lim_{\eta \to 0} \mathbf{E} \sup_{\substack{\delta(s,t) < \eta \\ s \in T^*}} |Y(s) - Y(t)| = 0.$$

Pour la démonstration, on utilise les notations du théorème 29 : on suppose que le chaos gaussien découplé homogène Y vérifie la propriété (P). Procédons par récurrence sur d. Si d vaut 1, Y est une fonction aléatoire gaussienne et le théorème est connu [I-N] ; supposons-le vrai au rang $d-1$. Le passage au rang d se fait en trois étapes : on décompose Y en somme de deux séries, l'une faisant apparaître des combinaisons linéaires conditionnelles de chaos découplés de degré $d-1$, l'autre par voie de conséquences ayant les mêmes oscillations que Y ; on montre ensuite que, comme dans le cas des fonctions aléatoires gaussiennes, ces oscillations sont non-aléatoires.

A. Séries extraites du chaos homogène découplé Y

Dans un premier temps donc, on examine une partie de la série $\sum b_i G_i$ définissant Y.

Lemme 30. — *Posons $i_* = \min_{1\le k\le d} i_k$ pour tout i de N^d. Pour tout l de N, on pose de plus*

$$\mathbf{S}_l(t) = \sum_{i_*\le l} b_i(t) G_i.$$

Dans ces conditions, le chaos gaussien homogène découplé S_l admet une modification à trajectoires continues.

Démonstration. — On écrira simplement $\xi \doteq \zeta$ lorsque la fonction aléatoire ξ sera une modification de la fonction aléatoire ζ. On notera aussi $\mathbf{E}[\xi|\mathcal{B}]$ la classe $t \longmapsto \mathbf{E}[\xi(t)|\mathcal{B}]$ de fonctions aléatoires pour la relation d'équivalence $\doteq$. Fixons un entier l. (a) Etant donné un entier j, on définit le sous-ensemble $I_{d,j}$ de N^d comme suit :

$$I_{d,j} = \mathrm{N}^{d-1} \times \{j\}.$$

Montrons que $\mathbf{E}[Y|\mathcal{B}_{I_{d,j}}]$, où $\mathcal{B}_{I_{d,j}}$ est la tribu engendrée par l'ensemble $\{g^k_{i_k} : i_k \ge 1, 1 \le k \le d-1, i_d = j\}$, est un chaos gaussien découplé homogène admettant une modification à trajectoires continues. En effet, il vérifie (P) puisque c'est une espérance conditionnelle de Y et le lemme 5 montre que

$$\mathbf{E}[Y|\mathcal{B}_{I_{d,j}}] \doteq g^d_j \sum_{i\in\mathrm{N}^{d-1}} b_{i,j} G_i\,;$$

on remarque que cette dernière série est un chaos découplé homogène de degré $d-1$ vérifiant (P) et qui, par hypothèse de récurrence, admet une modification à trajectoires continues.

(b) Soit I_d le sous-ensemble de N^d suivant

$$I_d = \mathrm{N}^{d-1} \times [1,l].$$

On constate alors que si $\mathcal{B}_{I_d}$ est la tribu engendrée par l'ensemble $\{g^k_{i_k} \ : \ i_k \geq 1, 1 \leq k \leq d-1, \ 1 \leq i_d \leq l\}$,

$$\mathbf{E}[Y|\mathcal{B}_{I_d}] \doteq \sum_{j=1}^{l} \mathbf{E}[Y|\mathcal{B}_{I_{d,j}}] \ ;$$

le résultat (a) appliqué à chacun des termes du second membre montre que $\mathbf{E}[Y|\mathcal{B}_{I_d}]$ a une modification à trajectoires continues. Plus généralement, en considérant le sous-ensemble de $\mathbf{N}^d$

$$I_{k'} = \mathbf{N} \times \cdots \times \mathbf{N} \times \underbrace{[1,l]}_{k'\text{-ième facteur}} \times \mathbf{N} \times \cdots \times \mathbf{N}$$

et la tribu $\mathcal{B}_{I_{k'}}$ engendrée par l'ensemble $\{g^k_{i_k} \ : \ i_k \geq 1, \ k \neq k', \ 1 \leq i_{k'} \leq l\}$, le chaos gaussien découplé $\mathbf{E}[Y|\mathcal{B}_{I_{k'}}]$ a une modification à trajectoires continues.
(c) On itère (b) pour montrer que S_l admet une modification à trajectoires continues.
Avec les notations du (b), posons

$$\begin{cases} Y_0 = & Y \\ Y_k = & Y_{k-1} - \mathbf{E}[Y_{k-1}|\mathcal{B}_{I_k}] \end{cases}$$

Le chaos Y_1 vérifie la propriété (P) car Y_0 et $\mathbf{E}[Y_0|\mathcal{B}_{I_1}]$ la vérifient ; en appliquant (b) à Y_1, on prouve que $\mathbf{E}[Y_1|\mathcal{B}_{I_2}]$ admet une modification à trajectoires continues. En itérant cet argument, on montre ainsi successivement que les chaos $\mathbf{E}[Y_{k-1}|\mathcal{B}_{I_k}]$ admettent des modifications à trajectoires continues. On remarque de plus qu'intégrer Y_{k-1} conditionnellement à $\mathcal{B}_{I_k}$ revient à supprimer tous les termes dont les multi-indices i ont une k-ième coordonnée plus grande que l. Si J_k est l'ensemble $\{i \ : \ i_k \leq l, \min_{j<k} i_j > l\}$, on a ainsi par construction

$$\mathbf{E}[Y_{k-1}|\mathcal{B}_{I_k}] \doteq \sum_{i \in J_k} b_i G_i \ ;$$

sachant que $\{J_k\}_{1 \leq k \leq d}$ est une partition de $\{i \ : \ i_* \leq j\}$, on en déduit

$$S_l \doteq \sum_{k=1}^{d} \mathbf{E}[Y_{k-1}|\mathcal{B}_{I_k}] \ ;$$

d'où le lemme. $\square$

B. Oscillations numériques du chaos homogène découplé Y

Définition 31. — *Soit f une fonction sur l'espace métrique compact (T, δ). Notons $C(t, u, \eta)$ (resp. $C(t, \eta)$) le sous-ensemble* $\{(s, s') \ : \ \min(\delta(s,t), \delta(s',t)) \leq u, \ \delta(s,s') \leq \eta\}$

(resp. $\{(s,s') : \min(\delta(s,t),\delta(s',t)) \leq \eta\}$*) de* $T^* \times T^*$*. Les oscillations numériques de* f *sont les fonctionnelles*

$$W(f,t,u) = \lim_{\eta\to 0} \sup_{C(t,u,\eta)} |f(s) - f(s')|,$$
$$W(f,t) = \lim_{\eta\to 0} \sup_{C(t,\eta)} |f(s) - f(s')|.$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

(i) la fonction $u \mapsto W(f,t,u)$ est croissante et $W(f,t) = \lim_{u\to 0} W(f,t,u)$.

(ii) si g est une fonction continue sur (T,δ), alors $W(f+g,t,u) = W(f,t,u)$.

Si ξ est une fonction aléatoire sur (T,δ), ses oscillations numériques sont a priori des variables aléatoires. Dans le cas particulier des chaos gaussiens, on a le lemme suivant :

Lemme 32. — *Pour tout couple* (t,u) *de* $T \times \mathbf{R}^+$, *l'oscillation* $W(Y,t,u)$ *est presque sûrement constante.*

Démonstration. — Notons d le degré de Y et soit $\mathcal{C}_l$ la tribu engendrée par la famille $\{g_j^k\,;\, j \leq l,\, 1 \leq k \leq d\}$ et $\mathcal{C}$ la tribu complétée engendrée par $\cup_l \mathcal{C}_l$. Le chaos Y est clairement $\mathcal{C}$-mesurable et il en est de même pour $W(Y,t,u)$, ceci pour tout couple (t,u) dans $T \times \mathbf{R}^+$. Mais d'après le lemme 30 et la propriété (ii) ci-dessus, pour tout entier l, on a presque sûrement

$$W(Y,t,u) = W(Y - S_l, t, u)\,;$$

on en déduit que $W(Y,t,u)$ est indépendante de $\mathcal{C}_l$ pour tout l et par conséquent indépendante de $\mathcal{C}$. L'oscillation $W(Y,t,u)$ est à la fois $\mathcal{C}$-mesurable et indépendante de $\mathcal{C}$, elle est donc presque sûrement constante. $\square$

On procède maintenant suivant les schémas classiques.

Lemme 33. — *La fonction d'oscillation du chaos* Y *est presque sûrement nulle sur* T*. Plus précisément,*

$$\mathbf{P}\{\forall t \in T,\ W(Y,t) = 0\} = 1.$$

Démonstration. — Le lemme 32 nous dit que pour tout couple (t,u) de $T \times \mathbf{R}^+$, il existe un nombre $\alpha(t,u)$ de $\overline{\mathbf{R}}$ tel que

$$\mathbf{P}\{W(Y,t,u) = \alpha(t,u)\} = 1\,;$$

soit alors l'ensemble Ω_0 mesurable et presque sûr suivant

$$\bigcap_{(s,u)\in T^*\times \mathbf{Q}^+} \{W(Y,s,u) = \alpha(s,u)\}\,;$$

fixant ω dans Ω_0, on vérifie que pour tout triplet (s,t,u) de $T \times T \times \mathbf{R}^+$,

$$\delta(s,t) < u \Longrightarrow \begin{cases} W(Y(\omega),s,u) \leq W(Y(\omega),t,2u) \\ \alpha(s,u) \leq \alpha(t,2u)\ ; \end{cases}$$

comme T^* est dense dans T, $\mathbf{Q}$ dense dans $\mathbf{R}$ et les applications $u \mapsto W(Y(\omega),t,u)$ et $u \mapsto \alpha(t,u)$ croissantes, on déduit de cette dernière implication que pour tout t dans T

$$W(Y(\omega),t) = \lim_{u\to 0} W(Y(\omega),t,u) = \lim_{u\to 0} \alpha(t,u).$$

Posons $\alpha(t) = \lim_{u\to 0} \alpha(t,u)$; nous avons donc prouvé que

$$\mathbf{P}\{\omega\ :\ W\,(Y(\omega),t) = \alpha(t)\} = 1.$$

Il reste à montrer que la fonction α est identiquement nulle sur T ; or d'après la propriété (P2), on sait que pour tout t de T,

$$\mathbf{P}\{\omega\ :\ W\,(Y(\omega),t) = 0\} = 1,$$

et en choisissant ω dans l'intersection des deux ensembles presque sûrs ci-dessus, il vient $\alpha(t) = 0.$ $\square$

C. Continuité du chaos homogène découplé Y

On peut à présent construire une modification à trajectoires continues pour le chaos Y. Prenons ω dans l'ensemble Ω_0 presque sûr du lemme 33 : pour tout t dans T, la famille $\{Y(\omega,s),\ s \in B(t,\varepsilon) \cap T^*\}_{\varepsilon\downarrow 0}$ est un filtre de Cauchy dans $\mathbf{R}$; il converge donc vers une limite $L(\omega,t)$. On pose alors

$$Y'(\omega,t) = \begin{cases} L(\omega,t) & \text{si } \omega \in \Omega_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La propriété (P2) assure que la fonction aléatoire Y' ainsi définie est une modification de Y puisqu'on a alors $Y(t) = L(t)$ presque sûrement ; la modification Y' est de plus à trajectoires continues sur T car pour tout ω dans Ω_0 et t dans la δ-boule $B(t_0,\eta)$, on a

$$|L(\omega,t) - L(\omega,t_0)| \leq |L(\omega,t) - L(\omega,s)| + \sup_{C(t_0,\eta)} |L(\omega,s) - L(\omega,s')| + |L(\omega,s') - L(\omega,t_0)|\ ,$$

où l'on peut choisir s et s' arbitrairement dans $B(t_0,\eta) \cap T^*$, ce qui permet de conclure.

2. Le théorème principal

Théorème 34. — *Soit X un chaos gaussien réel de degré fini d vérifiant la propriété (P) sur l'espace métrique compact (T,δ). Le chaos X admet alors une modification à trajectoires continues.*

Démonstration. — Par récurrence sur le degré d. Le théorème est trivial si d est nul ; supposons-le vrai au rang $d-1$ et considérons un chaos gaussien X de degré d vérifiant la propriété (P). D'après le lemme 8 du chapitre I, la *partie homogène découplée de degré maximal* de X que l'on note $\widehat{X}_d$ est de la forme

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^d} \alpha_\varepsilon X(g_\varepsilon),$$

elle vérifie donc la propriété (P). Le théorème 29 permet de conclure que $\widehat{X}_d$ admet une modification à trajectoires continues. Montrons à partir de là que la partie homogène X_d de degré maximal de X admet aussi une modification à trajectoires continues. Pour cela, on utilise l'équivalence des propriétés suivantes [NEV] qui est vraie pour toute fonction aléatoire ξ sur (T,δ) :

(i) ξ admet une modification à trajectoires continues sur (T,δ),

(ii) Pour toute partie dénombrable S de T,

$$\mathbf{P}\{\lim_{\eta\to 0} \sup_{\substack{d(s,s')<\eta \\ s,s'\in S}} |\xi(s)-\xi(s')| = 0\} = 1,$$

(iii) ξ est continue en probabilité et il existe un sous-ensemble T^* dénombrable dense de T tel que

$$\mathbf{P}\{\lim_{\eta\to 0} \sup_{\substack{d(s,s')<\eta \\ s,s'\in T^*}} |\xi(s)-\xi(s')| = 0\} = 1.$$

Montrons le point (ii) pour le chaos X_d ; le lemme de recouplage 11 du chapitre I et l'inégalité de Jensen conditionnelle impliquent en effet que

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\delta(s,s')<\eta \\ s,s'\in S}} |X_d(\bar g)(s) - X_d(\bar g)(s')| &\le d^d \sup_{\substack{\delta(s,s')<\eta \\ s,s'\in S}} |\mathbf{E}[\widehat{X}_d(s)|\bar g] - \mathbf{E}[\widehat{X}_d(s')|\bar g]| \\ &\le d^d \mathbf{E}[\sup_{\substack{\delta(s,s')<\eta \\ s,s'\in S}} |\widehat{X}_d(s) - \widehat{X}_d(s')||\bar g],\end{aligned}$$

en intégrant et en faisant tendre η vers 0, on obtient

$$\lim_{\eta\to 0} \mathbf{E} \sup_{\substack{\delta(s,s')<\eta \\ s,s'\in S}} |X_d(s) - X_d(s')| \le d^d \lim_{\eta\to 0} \mathbf{E} \sup_{\substack{\delta(s,s')<\eta \\ s,s'\in S}} |\widehat{X}_d(s) - \widehat{X}_d(s')|\,;$$

la propriété (ii) que $\widehat{X}_d$ vérifie et le lemme d'intégrabilité 20 du chapitre I assurent que le second membre de cette dernière inégalité est nul ; le chaos X_d a donc une modification à trajectoires continues notée X'_d. Soit Z le chaos gaussien de degré $d-1$ obtenu en soustrayant à X sa partie homogène maximale X_d ; ce chaos vérifie la propriété (P) et d'après l'hypothèse de récurrence, il admet une modification à trajectoires continues notée

Z'. On conclut en remarquant que $Z' + X'_d$ est une modification à trajectoires continues de X. $\square$

Comme dans [FER4], on peut préciser la conclusion du théorème principal :

Théorème 35. — *Soit X un chaos gaussien de degré d sur (T,δ) vérifiant la propriété (P). Les trajectoires de X sont presque toutes continues.*

Démonstration. — La propriété (P1) et le lemme d'intégrabilité I.20 assurent que l'injection $(T,\delta) \longrightarrow (T,d_X)$ où $d_X^2(s,t) = \mathbf{E}|X(s)-X(t)|^2$ est continue; il suffit donc de montrer que les trajectoires de X sont presque toutes continues sur (T,d_X). Comme les sommes partielles X_n de X (cf. définition 7) sont continues sur (T,d_X), on peut se borner à montrer que, presque sûrement, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers X sur le compact T. Or le théorème 34 nous dit qu'il existe une modification Z de X ($Z \doteq X$) à trajectoires continues; Z est donc un vecteur aléatoire à valeurs dans l'espace de Banach séparable $\mathcal{C}(T)$ et d'après le lemme I.20,

$$\mathbf{E}\sup_{t\in T}|X(t)| = \mathbf{E}\sup_{t\in T^*}|X(t)| < \infty.$$

Dans la démonstration du théorème I.7, nous avons vu que si $\mathcal{G}_n$ est la tribu engendrée par $(g_k)_{k\leq n}$,

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_n] \doteq X_n \ ;$$

d'autre part, puisque $Z \doteq X$, on a aussi

$$E[Z|\mathcal{G}_n] \doteq E[X|\mathcal{G}_n] \ ;$$

en notant Z_n un représentant de $E[Z|\mathcal{G}_n]$, il vient

$$Z_n \doteq X_n \ ;$$

l'ensemble T^* étant dénombrable dense dans T, Z_n et X_n étant à valeurs dans $\mathcal{C}(T)$, on déduit l'existence d'un ensemble presque sûr Ω_0 tel que

$$\forall \omega \in \Omega_0,\ \forall t \in T,\ \forall n \geq 1,\ X_n(\omega,t) = Z_n(\omega,t).$$

Parallèlement, $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ étant une suite croissante de tribus et Z fortement intégrable, le théorème de convergence des martingales implique que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. dans $\mathcal{C}(T)$ et il existe un ensemble presque sûr Ω_1 tel que

$$\forall \omega \in \Omega_1,\ (Z_n(\omega))_{n\geq 1} \text{ converge uniformément sur } T.$$

Finalement, pour tout $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge uniformément sur T et sa limite est par définition $X(\omega)$. $\square$

Chapitre IV
Conditions suffisantes de mesures majorantes pour les chaos gaussiens

Comme le chapitre précédent, ce chapitre traite de la régularité des chaos gaussiens sur un ensemble T, mais les conditions sont d'une autre nature : c'est en fonction des propriétés de T muni d'une ou plusieurs (pseudo-)distances associées à un chaos que l'on étudie la majoration ou la continuité des trajectoires. Nous résumons ici brièvement les travaux de C. Borell [BOR2] et M. Talagrand [L-T] sur les chaos gaussiens homogènes de degré 2, puis ceux plus récents de M.B. Marcus [MAR] sur les chaos gaussiens homogènes de degré supérieur à 2. Nous présentons ensuite une généralisation de ces résultats aux chaos gaussiens non-homogènes de degré fini.

N.B. : Pour éviter toute confusion avec les éléments h de ℓ_2, on note à présent H_n le n-ième polynôme d'Hermite au lieu de h_n.

1. Régularité des chaos gaussiens homogènes : les résultats connus

Commençons par rappeler la notion de mesure majorante.

Définition 36. — *Etant donné un espace (pseudo-)métrique (T, d) et une fonction croissante ψ de $[1, \infty[$ dans R^+, on dit qu'une probabilité μ est une mesure majorante pour (T, d, ψ) si*

$$\sup_{t\in T}\int_0^D \psi\Big(\frac{1}{\mu\, B(t,\varepsilon)}\Big)d\varepsilon < \infty,$$

où D est le d-diamètre de T et $B(t, \varepsilon)$ la d-boule fermée de centre t et de rayon ε.

Remarque. — L'existence d'une mesure majorante implique que l'espace (T, d) correspondant est pré-quasi-compact [FER2].

Les mesures majorantes ont été introduites à l'origine pour caractériser la régularité des fonctions aléatoires gaussiennes (cf. [LIF]), c'est à dire des chaos gaussiens homogènes de degré 1. Le premier résultat pour les chaos gaussiens homogènes de degré 2 faisant intervenir des mesures majorantes est dû à C. Borell [BOR2] : soit $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t))_{t\in T}$ un chaos gaussien homogène de degré 2 sur un ensemble T ; on a donc

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i\neq j\geq 1} a_{ij}(t) g_i g_j + \sum_{i\geq 1} a_{ii}(t)\Big(\frac{g_i^2-1}{\sqrt{2}}\Big),$$

où les coefficients $a_{ij}(t)$ sont symétriques $(a_{ij}(t) = a_{ji}(t))$. Posons $d_0(s,t) = \mathbf{E}|\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(t)|$.

Théorème 37. — *Supposons l'existence d'une probabilité μ_0 sur (T, d_0) telle que*

$$\lim_{\eta \to 0} \sup_{t \in T} \int_0^\eta \log \frac{1}{\mu_0 \, B_0(t, \varepsilon)} \, d\varepsilon = 0,$$

où B_0 désigne une d_0-boule. Alors le chaos gaussien homogène $\mathbf{X}$ de degré 2 admet une modification à trajectoires continues sur (T, d_0).

Ce résultat, qui peut être généralisé aux degrés supérieurs, a été ensuite affiné par M. Talagrand pour le degré 2 en introduisant une distance supplémentaire :

$$d_2(s,t) = \sup_{|h| \le 1} |\sum_{i,j \ge 1} (a_{ij}(s) - a_{ij}(t)) h_i h_j|.$$

Théorème 38 ([L-T]). — *Supposons l'existence de 2 probabilités μ_0 sur (T, d_0) et μ_2 sur (T, d_2) telles que*

$$\lim_{\eta \to 0} \sup_{t \in T} \int_0^\eta \left(\log \frac{1}{\mu_0 \, B_0(t, \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = 0,$$
$$\lim_{\eta \to 0} \sup_{t \in T} \int_0^\eta \log \frac{1}{\mu_2 \, B_2(t, \varepsilon)} \, d\varepsilon = 0,$$

où B_i désigne une d_i-boule $(i = 0, 2)$. Alors le chaos gaussien homogène $\mathbf{X}$ de degré 2, admet une modification à trajectoires continues sur (T, d_0).

Remarque. — On pourrait définir d_0 à partir des moments d'ordre 2 sans changer le résultat (les moments sont équivalents) ; pour des raisons d'homogénéité avec d_2, nous préférons les moments d'ordre 1.

La preuve initiale de ce théorème comportant une lacune, M.B. Marcus en a rédigé une autre plus générale [MAR] utilisant d'ailleurs des techniques proches de celles développées par M. Talagrand dans des publications intermédiaires [TAL1], [TAL2]. Le théorème de continuité de Marcus fait intervenir m mesures majorantes pour un chaos gaussien homogène de degré m : soit $\mathbf{X}$ un tel chaos sur un ensemble T ; on a

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_m \ge 1} a_{i_1, \dots, i_m}(t) \prod_{j \ge 1} H_{j(i_1, \dots, i_m)}(g_j),$$

les coefficients $a_{i_1, \dots, i_m}(t)$ étant symétriques. Posons $a_{i_1, \dots, i_m}(s,t) = a_{i_1, \dots, i_m}(s) - a_{i_1, \dots, i_m}(t)$ et définissons les distances d_p, $0 \le p \le m$, comme suit :

$$d_0(s,t) = \mathbf{E}|\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(t)|,$$
$$d_p(s,t) = \mathbf{E} \sup_{|h| \le 1} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m \ge 1} a_{i_1, \dots, i_m}(s,t) \prod_{j \ge 1} H_{j(i_1, \dots, i_{m-p})}(g_j) h_{i_{m-p+1}} \cdots h_{i_m} \right|.$$

Théorème 39 ([MAR]). — *Supposons l'existence de probabilités μ_p sur (T, d_p), $1 \le p \le m$, telles que*

$$\lim_{\eta \to 0} \sup_{t \in T} \int_0^\eta \left(\log \frac{1}{\mu_p B_p(t, \varepsilon)} \right)^{\frac{p}{2}} d\varepsilon = 0, \qquad 1 \le p \le m,$$

où B_p désigne une d_p-boule. Alors le chaos gaussien homogène $\mathbf{X}$ de degré m admet une modification à trajectoires continues sur (T, d_0).

2. Généralisation aux chaos gaussiens non-homogènes

On se propose dans ce paragraphe d'étendre le théorème 39 aux chaos non-homogènes. Pour cela, on compare les distances associées à chaque partie homogène d'un chaos à des distances associées au chaos tout entier ; la technique d'extraction abordée en I.3.C est à la base de ces comparaisons.

A. Comparaison de distances et généralisation

Soit $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t))_{t \in T}$ un chaos gaussien centré de degré m défini par

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k}(t) \prod_{j \ge 1} H_{j(i_1, \ldots, i_k)}(g_j)$$

où $j(i_1, \ldots, i_k) = \sum_{l=1}^{k} I_{(i_l = j)}$. Posons $a_{i_1, \ldots, i_k}(s, t) = a_{i_1, \ldots, i_k}(s) - a_{i_1, \ldots, i_k}(t)$. Pour chaque partie k-homogène de $\mathbf{X}$ ($k \le m$), considérons la suite de distances $(d_p^k)_{0 \le p \le k}$ définie par

$$d_p^k(s, t) = \mathbf{E} \sup_{|h| \le 1} \left| \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k}(s, t) \prod_{j \ge 1} H_{j(i_1, \ldots, i_{k-p})}(g_j) h_{i_{k-p+1}} \cdots h_{i_k} \right|.$$

Associons à présent au chaos $\mathbf{X}$ tout entier la suite de distances $(d_p)_{0 \le p \le m}$ définie comme suit :

$$d_0(s, t) = \mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k}(s, t) \prod_{j \ge 1} H_{j(i_1, \ldots, i_k)}(g_j) \right|,$$

$$d_p(s, t) = \mathbf{E} \sup_{|h| \le 1} \left| \sum_{k=p}^{m} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k}(s, t) \prod_{j \ge 1} H_{j(i_1, \ldots, i_{k-p})}(g_j) h_{i_{k-p+1}} \cdots h_{i_k} \right| \quad p \ge 1.$$

Remarques. —

(1) On utilise dans les distances définies ci-dessus la convention $j(i_1, \ldots, i_0) = 0$.

(2) On suppose comme d'habitude les coefficients $a_{i_1, \ldots, i_k}$ symétriques (invariants par permutation de leurs indices).

(3) Toutes ces distances sont finies d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\sum_{k=1}^m \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^\infty a_{i_1,\ldots,i_k}^2(s,t)$ converge.

Le lemme suivant compare toutes ces distances :

LEMME 40. — *Soit k un entier positif inférieur ou égal à m.*

(i) *Pour tout entier $p \in [0, k-1]$, il existe une constante K_{k-p} telle que*

$$\forall s,t \in T, \quad d_{p+1}^k(s,t) \leq K_{k-p} d_p^k(s,t),$$

(ii) *Pour tout entier $p \in [0, k]$, il existe une constante K'_{k-p} telle que*

$$\forall s,t \in T, \quad \frac{d_p^k(s,t)}{K'_{k-p}} \leq d_p(s,t) \leq \sum_{l=\max(p,1)}^m d_p^l(s,t).$$

DÉMONSTRATION. — Dans toute la démonstration s et t sont fixés. Pour prouver (i), fixons k et p tels que $0 \leq p < k \leq m$. Pour alléger l'écriture, nous posons $r = k - p$, entier qui correspond au degré du chaos intervenant dans la distance d_p^k. Les inégalités de découplage, qui peuvent se déduire du lemme 8 et du corollaire 11, montrent l'existence d'une constante C_r telle que

$$C_r^{-1} d_p^k(s,t) \leq \widehat{d}_p^k(s,t) \leq C_r d_p^k(s,t)$$

où

$$\widehat{d}_p^k(s,t) = \mathbf{E} \sup_{|h|\leq 1} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^\infty a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) g_{i_1}^1 \cdots g_{i_r}^r h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right|.$$

Notons Ω^l l'espace d'épreuves du vecteur orthogaussien g^l ; le théorème 7 et le théorème de Fubini montrent l'existence d'un ensemble p.s. $\Omega^{(1,\ldots,r-1)} \subset \Omega^1 \times \cdots \times \Omega^{r-1}$ tel que pour tout $(\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}) \in \Omega^{(1,\ldots,r-1)}$, la suite

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) g_{i_1}^1(\omega^1) \cdots g_{i_{r-1}}^{r-1}(\omega^{r-1}) g_{i_r}^r h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right)_{n\geq 1}$$

converge p.s. Fixons $(\omega^1, \ldots, \omega^{r-1}) \in \Omega^{(1,\ldots,r-1)}$ et considérons la jauge sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par

$$N_l(x) = \sup_{|h|\leq 1} \sup_{n\geq l} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) g_{i_1}^1(\omega^1) \cdots g_{i_{r-1}}^{r-1}(\omega^{r-1}) x_{i_r} h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right|.$$

Le lemme 17 implique pour tout $l \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^r N_l^2(g^r) &\geq \sup_{|h'|\leq 1} N_l^2(h') \\
&\geq \sup_{|h|\leq 1} \sup_{n\geq l} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_k\leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) g^1_{i_1}(\omega^1)\cdots g^{r-1}_{i_{r-1}}(\omega^{r-1}) h_{i_r} h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right|^2 \\
&\geq \sup_{|h|\leq 1} \limsup_{n} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_k\leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) g^1_{i_1}(\omega^1)\cdots g^{r-1}_{i_{r-1}}(\omega^{r-1}) h_{i_r} h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right|^2 \ ;
\end{aligned}$$

en intégrant cette dernière inégalité, il vient

$$\left(\mathbf{E} \sup_{|h|\leq 1} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) g^1_{i_1} \cdots g^r_{i_r} h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \widehat{d}^k_{p+1}(s,t) \ ;$$

le membre de gauche étant équivalent à

$$\mathbf{E} \sup_{|h|\leq 1} \left| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) g^1_{i_1} \cdots g^r_{i_r} h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right|,$$

on obtient donc (i). Pour l'assertion (ii), on ne démontre que l'inégalité de gauche. On reprend pour cela la preuve du lemme 15 : étant donné un entier m arbitraire, il existe une suite de fonctions $(f_p)_{0\leq p\leq m} \subset L^2[-1,1]$ telle que

$$\int_{-1}^{1} \varepsilon^q f_p(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Posons $K'_p = \int_{-1}^{1} |f_p(\varepsilon)| d\varepsilon$. Fixons un entier p compris entre 1 et m. Notant γ la loi de g, considérons les éléments $X_p(h)$ et $X^k_p(h)$ de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \gamma)$ définis par

$$\begin{aligned}
X_p(h)(x) &= \sum_{k=p}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\ldots,i_{k-p})}(x_j) h_{i_{k-p+1}} \cdots h_{i_k}, \\
X^k_p(h)(x) &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t) \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\ldots,i_{k-p})}(x_j) h_{i_{k-p+1}} \cdots h_{i_k}, \quad p \leq k \leq m.
\end{aligned}$$

Rappelons que l'opérateur linéaire $T(\varepsilon)$ défini pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \gamma)$ par

$$T(\varepsilon) f(x) = \int f(\varepsilon x + \sqrt{1-\varepsilon^2} y) \gamma(dy)$$

agit sur les polynômes d'Hermite généralisés de sorte que

$$T(\varepsilon)\prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\ldots,i_k)}(x_j) = \varepsilon^k \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\ldots,i_k)}(x_j), \quad \varepsilon\in[-1,1].$$

On a donc

$$\int_{-1}^{1} T(\varepsilon)X_p(h)f_{k-p}(\varepsilon)d\varepsilon = X_p^k(h), \qquad p\leq k\leq m.$$

D'où, en utilisant les propriétés de $T(\varepsilon)$ et le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int \sup_{|h|\leq 1} |X_p^k(h)(x)|\gamma(dx) &= \int \sup_{|h|\leq 1}\left|\int_{-1}^{1} T(\varepsilon)X_p(h)(x)f_{k-p}(\varepsilon)d\varepsilon\right|\gamma(dx)\\
&\leq \int\int_{-1}^{1}\sup_{|h|\leq 1}|T(\varepsilon)X_p(h)(x)||f_{k-p}(\varepsilon)|d\varepsilon\otimes\gamma(dx)\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int\sup_{|h|\leq 1}|T(\varepsilon)X_p(h)(x)|\gamma(dx)\right)|f_{k-p}(\varepsilon)|d\varepsilon\\
&\leq K'_{k-p}\sup_{\varepsilon\in[-1,1]}\int\sup_{|h|\leq 1}|T(\varepsilon)X_p(h)(x)|\gamma(dx)\\
&\leq K'_{k-p}\sup_{\varepsilon\in[-1,1]}\int T(\varepsilon)\sup_{|h|\leq 1}|X_p(h)(x)|\gamma(dx)\\
&= K'_{k-p}\int\sup_{|h|\leq 1}|X_p(h)(x)|\gamma(dx),
\end{aligned}$$

soit encore

$$d_p^k(s,t)\leq K'_{k-p}d_p(s,t).$$

Dans le cas particulier $p=0$, on pose

$$X_0(h)(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t)\prod_{j\geq 1}H_{j(i_1,\ldots,i_k)}(x_j),$$

$$X_0^k(h)(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t)\prod_{j\geq 1}H_{j(i_1,\ldots,i_k)}(x_j), \quad 1\leq k\leq m\,;$$

on constate alors que

$$\int_{-1}^{1} T(\varepsilon)X_0(h)f_k(\varepsilon)d\varepsilon = X_0^k(h), \qquad 1\leq k\leq m,$$

et on conclut comme dans le cas précédent. $\square$

Remarque. — On peut être plus précis sur l'équivalence de d_p^k et $\widehat{d}_p^k$: si le coefficient dominant des polynômes d'Hermite est 1, on a

$$r^{-\frac{r}{2}}\, d_p^k(s,t) \le \widehat{d}_p^k(s,t) \le \frac{r^{\frac{r}{2}}}{r!}\, d_p^k(s,t).$$

On peut à présent généraliser le théorème 39 :

Théorème 41. — *Soit* $\mathbf{X}$ *un chaos gaussien réel centré non-homogène de degré* m. *Notons* $(d_p)_{0\le p\le m}$ *la suite de distances associée. Supposons l'existence de probabilités* μ_p *sur* (T,d_p), $1\le p\le m$, *telles que*

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_{t\in T}\int_0^\eta \left(\log\frac{1}{\mu_p\, B_p(t,\varepsilon)}\right)^{\frac{p}{2}} d\varepsilon = 0, \qquad 1\le p\le m,$$

où B_p *désigne une* d_p*-boule. Alors* $\mathbf{X}$ *admet une modification à trajectoires continues sur* (T,d_0).

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout entier $k\in[1,m]$, la partie homogène de degré k de $\mathbf{X}$, notée $\mathbf{X}_k$, admet une modification à trajectoires continues sur (T,d_0). Fixons un tel entier k. D'après le lemme 40 (ii), on a

$$d_p^k(s,t) \le K_{k-p} d_p(s,t), \quad 0\le p\le k, \qquad (*)$$

où $(d_p^k)_{0\le p\le k}$ est la suite de distances associées à $\mathbf{X}_k$. Les hypothèses du théorème 41 et les inégalités $(*)$ montrent alors que pour tout entier $p\in[1,k]$,

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_{t\in T}\int_0^\eta \left(\log\frac{1}{\mu_p\, B_p^k(t,\varepsilon)}\right)^{\frac{p}{2}} d\varepsilon = 0,$$

où B_p^k désigne une d_p^k-boule ; on conclut en appliquant le théorème 39 au chaos $\mathbf{X}_k$ et en remarquant que l'injection canonique $(T,d_0)\hookrightarrow(T,d_0^k)$ est continue. $\square$

B. Quelques compléments

Le schéma de preuve du théorème 39 se construit à partir d'une inégalité de concentration pour un chaos gaussien homogène. On montre ci-dessous qu'elle s'étend aux chaos gaussiens non-homogènes (de degré fini) et comment elle intervient dans dans ce théorème.

Pour cela, nous avons besoin d'un résultat semblable à celui de M. Arcones et E. Giné ([A-G], (4.11)) ; pour alléger les diverses expressions, on suppose dans tout ce qui suit que les polynômes d'Hermite H_n ont un coefficient dominant égal à 1 :

Théorème 42. — *Soit* $\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{X}_k$ *un chaos gaussien réel centré de degré* m *avec* $\mathbf{X}_k = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_k} \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\dots,i_k)}(g_j)$. *On définit les réels* σ_k *et* $M_{k,r}$, $1 \leq r \leq k \leq m$, *comme suit :*

$$\sigma_k = \sup_{|h|\leq 1} \left| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_k} h_{i_1} \cdots h_{i_k} \right|,$$

$$M_{k,r} = \frac{1}{\alpha_{k,r}} \mathbf{E} \sup_{|h|\leq 1} \left| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_k} \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\dots,i_r)}(g_j) h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right|,$$

où $(\alpha_{k,r})_{1\leq r\leq k\leq m}$ *est une suite de réels positifs vérifiant* $\sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{k} \alpha_{k,r} \leq 1/2$. *Alors*

$$\mathbf{P}\left\{ |\mathbf{X}| \geq \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_k u^k + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} u^{k-r} M_{k,r} \right) \right\} \leq \frac{1}{2} \exp -\frac{u^2}{2}.$$

Démonstration. — On définit les sous-ensembles $B_{k,r}$, $1 \leq r \leq k \leq m$, de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ suivants :

$$B_{k,r} = \left\{ x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sup_{|h|\leq 1} \left| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_k} \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\dots,i_r)}(g_j) h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k} \right| \leq M_{k,r} \right\}.$$

La définition des coefficients $M_{k,r}$ et l'inégalité de Tchebychev montrent que l'ensemble $B = \bigcap_{k=1}^{m} \bigcap_{r=1}^{k} B_{k,r}$ est de mesure supérieure à $1/2$ pour la loi de g ; l'inégalité Borell-Tsirelson-Sudakov (cf. preuve du théorème 18) montre que pour $u \geq 0$,

$$\mathbf{P}\{g \in B + u\mathcal{O}\} \geq \int_{-\infty}^{u} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \geq 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

où $\mathcal{O}$ est la boule unité de ℓ_2.

Lemme ([A-G]). — *Les coefficients* $a_{i_1,\dots,i_k}$ *étant symétriques, on a pour tout* $n \geq 1$,

$$\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_k} \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\dots,i_k)}(x_j + u h_j) =$$
$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} u^{k-r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_k} \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\dots,i_r)}(x_j) h_{i_{r+1}} \cdots h_{i_k}.$$

Si g est dans $B + u\mathcal{O}$, il s'écrit $x + uh$ avec $(x, h) \in B \times \mathcal{O}$ et dans ce cas, en appliquant le lemme précédent,

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_k} \prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\dots,i_k)}(g_j) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_k u^k + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} u^{k-r} M_{k,r} \right) ;$$

d'où le résultat. □

Nous déduisons du lemme 40 et du théorème 42 le résultat suivant :

Théorème 43. — *Soit* $\mathbf{X}$ *un chaos gaussien centré de degré* m. *Il existe une constante* $K_m > 1$ *telle que*

$$\forall u > 0, \quad \mathrm{P}\left\{|\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(t)| \geq K_m \sum_{p=1}^{m} d_p(s,t)u^p\right\} \leq 2\exp -\frac{u^2}{2}$$

où $(d_p)_{1\leq p\leq m}$ *est la suite de distances associée à* $\mathbf{X}$.

Démonstration. — Le théorème 42 montre que pour tout $u \geq 0$,

$$\mathrm{P}\left\{|\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(t)| \geq \sum_{k=1}^{m}\left(d_k^k(s,t)u^k + \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\alpha_{k,r}d_{k-r}^k(s,t)u^{k-r}\right)\right\} \leq \frac{1}{2}\exp -\frac{u^2}{2} ;$$

les majorations suivantes utilisent une permutation des symboles de sommation à la troisième ligne, un changement d'indice à la quatrième et le lemme 40 à la cinquième : en posant $\beta_{k,r} = \binom{k}{r}\alpha_{k,r}$, on a pour tout $u \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m}\left(d_k^k(s,t)u^k + \sum_{r=1}^{k}\beta_{k,r}d_{k-r}^k(s,t)u^{k-r}\right)\\
&\qquad\leq \max_{1\leq r\leq k\leq m}\beta_{k,r}\left(\sum_{k=1}^{m}d_k^k(s,t)u^k + \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}d_{k-r}^k(s,t)u^{k-r}\right)\\
&\qquad= \max_{1\leq r\leq k\leq m}\beta_{k,r}\left(\sum_{k=1}^{m}d_k^k(s,t)u^k + \sum_{r=1}^{m}\sum_{k=r}^{m}d_{k-r}^k(s,t)u^{k-r}\right)\\
&\qquad= \max_{1\leq r\leq k\leq m}\beta_{k,r}\left(\sum_{k=1}^{m}d_k^k(s,t)u^k + \sum_{r=1}^{m}\sum_{p=0}^{m-r}d_p^{p+r}(s,t)u^p\right)\\
&\qquad\leq \max_{1\leq r\leq k\leq m}\beta_{k,r}\max_{0\leq r\leq m}K'_r\left(\sum_{k=1}^{m}d_k(s,t)u^k + \sum_{r=1}^{m}\sum_{p=0}^{m-r}d_p(s,t)u^p\right)\\
&\qquad\leq \max_{1\leq r\leq k\leq m}\beta_{k,r}\max_{0\leq r\leq m}K'_r\,(m+1)\left(\sum_{p=0}^{m}d_p(s,t)u^p\right).
\end{aligned}$$

On peut supprimer le terme $d_0(s,t)$ dans cette dernière somme car il existe une constante K''_m telle que

$$d_0(s,t) \leq K''_m d_1(s,t) ;$$

en effet, par l'inégalité triangulaire,

$$d_0(s,t) \leq \sum_{k=1}^{m} d_0^k(s,t) ; \tag{$*$}$$

de plus, l'équivalence des moments des chaos montrent que

$$\mathbf{E}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t)\prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\ldots,i_k)}(g_j)\right| \sim \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a^2_{i_1,\ldots,i_k}(s,t)\prod_{j\geq 1} j(i_1,\ldots,i_k)!\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathbf{E}\sup_{|h|\leq 1}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(s,t)\prod_{j\geq 1} H_{j(i_1,\ldots,i_{k-1})}(g_j)h_{i_k}\right| \sim$$
$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} a^2_{i_1,\ldots,i_k}(s,t)\prod_{j\geq 1} j(i_1,\ldots,i_{k-1})!\right)^{\frac{1}{2}};$$

il existe en particulier une constante C_k telle que

$$d_0^k(s,t) \leq C_k d_1^k(s,t)\ ;$$

Poursuivant l'évaluation $(*)$, il résulte de la majoration précédente et du lemme 40 que

$$\begin{aligned} d_0(s,t) &\leq \sum_{k=1}^{m} C_k d_1^k(s,t) \\ &\leq \max_{1\leq k\leq m} C_k \sum_{k=1}^{m} d_1^k(s,t) \\ &\leq \max_{1\leq k\leq m} C_k\, m\, d_1(s,t)\ ; \end{aligned}$$

en résumé, nous avons pour $u \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{m}\left(d_k^k(s,t)u^k + \sum_{r=1}^{k}\beta_{k,r}d_{k-r}^k(s,t)u^{k-r}\right)$$
$$\leq K_m\left(\sum_{p=1}^{m} d_p(s,t)u^p\right)$$

avec $K_m = \max_{1\leq r\leq k\leq m}\beta_{k,r}\max_{0\leq r\leq m}K'_r(m+1)(\max_{1\leq k\leq m}C_k m+1)$; on obtient le résultat pour tout $u \leq 0$ en remarquant que pour $u \leq 1$, on a $2\exp(-u^2/2) \geq 1$. □

L'inégalité de concentration du théorème 43 permet de généraliser les théorèmes de M. Marcus aux chaos gaussiens centrés non-homogènes de degré fini $m \geq 2$ pour la suite de distances $(d_p)_{1\leq p\leq m}$ définie en début de section. En effet, via cette inégalité, nous pouvons appliquer (presque) directement le théorème principal de l'article de Marcus :

Théorème 44 ([MAR]). — *Soit X une fonction aléatoire réelle sur un ensemble T fini satisfaisant*

$$\mathbf{P}\{|X(s)-X(t)| \geq x\} \leq K \exp\left(-\min_{1\leq p\leq m}\left(\frac{x}{d_p(s,t)}\right)^{2/p}\right)$$

où K est constante et $(d_p)_{1\leq p\leq m}$ est une suite de distances sur T. Notons $\Delta_p(T)$ le d_p-diamètre de T et $B_p(t,\varepsilon)$ la d_p-boule de centre t et de rayon ε. Suppsons qu'il existe une suite de probabilités $(\mu_p)_{1\leq p\leq m}$ sur T telles que

$$\sup_{t\in T}\int_0^{\Delta_p(T)}\left(\log\frac{1}{\mu_p(B_p(t,\varepsilon))}\right)^{p/2} d\varepsilon < \infty, \quad 1\leq p\leq m.$$

Alors il existe une constante K_m telle que

$$\mathbf{E}\sup_{s,t\in T}|X(s)-X(t)| \leq K_m\left(\sup_{1\leq p\leq m}\Delta_p(T) + \sum_{p=1}^{m}\sup_{t\in T}\int_0^{\Delta_p(T)}\left(\log\frac{1}{\mu_p(B_p(t,\varepsilon))}\right)^{p/2} d\varepsilon\right).$$

Pour être dans les conditions du théorème 44, il suffit de poser dans l'inégalité de concentration du théorème 43

$$x = K_m\sum_{p=1}^{m} d_p(s,t)u^p$$

et de constater qu'il existe alors un entier p entre 1 et m tel que

$$u^2 \geq \left(\frac{x}{mK_m d_p(s,t)}\right)^{2/p}.$$

Remarque. — Le théorème 44 est la clé du théorème 39 ; comme pour les fonctions aléatoires gaussiennes, le théorème de continuité des trajectoires se déduit du théorème de majoration des trajectoires.

[**A-G**] Arcones (A.) et Giné (E.). — *On decoupling, series expansions and tail behavior of chaos processes*, J. Theor. Probab., t. **6**, 1993, p. 101–122.

[**BOR1**] Borell (C.). — *Tail probabilities on Gauss space*, Lect. Notes in Math., t. **644**, 1978, p. 73–82.

[**BOR2**] Borell (C.). — *On polynomial chaos and integrability*, Prob. Math. Statist., t. **3**, 1984, p. 191–203.

[**BOR3**] Borell (C.). — *The Brünn-Minkowsky inequality in Gauss space*, Invent. Math., t. **30**, 1975, p. 207–216.

[**BOR4**] Borell (C.). — On the integrability of Banach space valued Walsh polynomials, *Séminaire de Probabilités* XIII, Lecture Notes in Mathematics 644, Springer, 1979, p. 1–3.

[**DOO**] Doob (J.L.). — *Measure Theory*. — Springer, New York, 1994.

[**FER1**] Fernique (X.). — *Gaussian random vectors and their reproducing kernel Hilbert spaces*, Technical Report Series of the Laboratory for Research in Statistics and Probability, University of Ottawa, t. **34**, 1985, p. 7–9.

[**FER2**] Fernique (X.). — *Fonctions aléatoires gaussiennes, Vecteurs aléatoires gaussiens*, Publications du Centre de Recherche Mathématique de Montréal,, 1997.

[**FER3**] Fernique (X.). — *Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens*, Exposition. Math., t. **8**, 1990, p. 289–364.

[**FER4**] Fernique (X.). — *Eléments d'analyse des chaos gaussiens*, Probab. Math. Statist., t. **15**, 1995, p. 291–300.

[**FER5**] Fernique (X.). — Certaines propriétés des éléments aléatoires gaussiens, *Symposia Mathematica*, IX, London New–York, Academic press, 1972.

[**GIN**] Giné (E.). — U–statistics and processes, Lecture Notes in Mathematics, XXVIè*me Ecole d'Eté de Saint–Flour*, Springer–Verlag, 1996.

[**GRO**] Gross (L.). — *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math., t. **97**, 1975, p. 1061–1083.

[**I-N**] Itô (K.) et Nisio (M.). — *On the oscillation functions of Gaussian processes*, Math. Scand., t. **22**, 1968, p. 209–223.

[**KAL**] Kallianpur (G.). — *Zero-one laws for Gaussian processes*, Trans. Amer. Soc., t. **149**, 1970, p. 199–211.

[**K-W**] Kwapień (S.) et Woyczyński (W.A.). — *Random Series and Stochastic Integrals : Single and Multiple*. — Boston, Birkhäuser, 1992.

[**KWA**] Kwapień (S.). — *Decoupling inequalities for polynomial chaos*, Ann. Prob., t. **15**, 1987, p. 1062–1071.

[**L-T**] Ledoux (M.) et Talagrand (M.). — *Probability in Banach Spaces.* — New York, Springer Verlag, 1991.

[**LED1**] Ledoux (M.). — *On an Integral Criterion for Hypercontractivity of Diffusion Semigroups and Extremal Functions*, J. Funct. Anal., t. **105**, 1992, p. 444–465.

[**LED2**] Ledoux (M.). — Lecture Notes in Mathematics, 1994.

[**LIF**] Lifshits (M.A.). — *Gaussian random functions.* — Kluwer, Dordrecht, 1995.

[**MAR**] Marcus (M.B.). — *A sufficient condition for the continuity of high order Gaussian chaos processes*, preprint, 1997.

[**MEY**] Meyer (P.A.). — *Probabilités et potentiel.* — Hermann, Paris, 1966.

[**NEV**] Neveu (J.). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* — Masson, Paris, 1964.

[**NEL**] Nelson (E.). — *The free Markov field*, J. Funct. Anal., t. **12**, 1973, p. 211–227.

[**R-S-T**] Rosiński (J.), Samorodnitsky (G.) et Taqqu (M.S.). — *Zero-one laws for multilinear forms in Gaussian and other infinitely divisible random variables*, Journal of Mult. Anal., t. **46**, 1993, p. 61–82.

[**RUD**] Rudin (W.). — *Functional Analysis, Second Edition.* — McGraw-Hill, Inc., 1991.

[**S-T**] Sudakov (V.N.), Tsirelson (B.S.). — *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, J. Soviet. Math., t. **9**, 1978, p. 9–18.

[**SCH**] Schaefer (H.H.). — *Topological Vector Spaces.* — Springer, Berlin, 1971.

[**TAL1**] Talagrand (M.). — *Regularity of infinitely divisible processes*, Ann. Probab., t. **21**, 1993, p. 362–432.

[**TAL2**] Talagrand (M.). — *The supremum of some canonical processes*, Amer. J. Math., t. **116**, 1994, p. 283–325.

[**WAT**] Watanabe (S.). — *Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus.* — Springer, Berlin, 1984.

[**WIE**] Wiener (N.). — *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math., t. **60**, 1941, p. 897–936.