A mon pre

# Remerciements

Je voudrais remercier le Professeur Marc Rosso d'avoir accept de diriger ma thse. Je lui suis trs reconnaissant de m'avoir propos un sujet si intressant et de s'tre montr toujours disponible.

Je remercie les Professeurs Michel DuÆo, Christian Kassel et Thierry Levasseur qui m'ont fait l'honneur de soumettre ce travail  leur jugement, ainsi que le Professeur Jean-Louis Loday qui a accept de faire partie du Jury de thse.

Merci aux amis Elvire, Cline, Alex, Henrik, JeanJ, Jean et Cyrille qui par leur soutien et leur gaiet ont rendu ces annes de thse trs agrables.

Je remercie enøn toute ma famille pour son soutien constant.

# Table des matires

# Introduction

Les interactions entre la gomtrie diœrentielle et la thorie des groupes ont t trs fructueuses. Dans le but de dvelopper des outils de gomtrie diœrentielle pour la thorie des espaces non commutatifs, S. L. Woronowicz introduit dans l'article [33] la notion de calcul diœrentiel sur les groupes quantiques. Suivant les ides de A. Connes, les formes diœrentielles sont au cur de cette thorie.

Suite cet article, de nombreux auteurs ont construit des calculs diœrentiels sur les groupes quantiques. Dans l'article [22], M. Rosso utilise la structure quasi-triangulaire de $\mathrm{U}_q\mathcal{G}$ pour construire un calcul diœrentiel sur ce groupe quantique. En s'inspirant de cette construction, B. Juro dønit dans [17] d'autres exemples de calculs diœrentiels.

Calculs diœrentiels et algbres de Lie quantiques.

Dans l'article [33], S. L. Woronowicz montre que la donne d'un tel calcul diœrentiel permet de construire un espace qui doit tre vu comme une algbre de Lie quantique.

Paralllement aux travaux de S. L. Woronowicz, M. Wambst dønit de faon algbrique une autre notion d'algbre de Lie quantique. Mais les algbres de Lie quantiques de S. L. Woronowicz n'en sont pas au sens de M. Wambst.

De faon avoir une notion algbrique qui soit compatible avec les travaux de S. L. Woronowicz, nous dønissons une nouvelle structure d'algbre de Lie quantique. Une algbre de Lie quantique est la donne d'un espace vectoriel $T$, d'un tressage $\sigma : T \otimes T \longrightarrow T \otimes T$ et d'un crochet $C : T \otimes T \longrightarrow T$ satisfaisant certains axiomes. Parmi ces axiomes se trouvent des relations de commutation entre $C$ et $\sigma$, ainsi que la relation de Jacobi

$$C(\mathrm{id} \otimes C) = C(C \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \sigma).$$

Cette dønition gnralise la notion d'algbre de Lie classique et englobe les algbres de Lie quantiques dønies par S. L. Woronowicz. Ainsi, tout calcul diœrentiel sur les groupes quantiques est associe une algbre de Lie quantique.

De manire pouvoir dønir une thorie cohomologique pour les algbres de Lie quantiques qui permette de retrouver la diœrentielle extrieure de S. L. Woronowicz, nous introduisons la notion de comodule sur une algbre de Lie quantique. Par analogie au cas classique, o l'algbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un groupe de Lie est un module sur l'algbre de Lie associe ce groupe, nous montrons que la donne d'un calcul diœrentiel sur une algbre de Hopf $\mathcal{A}$ permet de la munir d'une structure de comodule sur l'algbre de Lie quantique associe ce calcul diœrentiel.

Ces objets tant dønis, il est possible de construire une thorie cohomologique adapte aux algbres de Lie quantiques et leurs comodules: le complexe de cochanes dønissant cette cohomologie utilise la notion de puissance extrieure quantique dønie par S. L. Woronowicz et est construit partir des applications $\sigma$ et $C$. La cohomologie, valeurs dans un comodule, des algbres de Lie quantiques gnralise la cohomologie, valeurs dans un module, des algbres de Lie classiques et se comporte vis--vis des calculs diœrentiels comme les algbres de Lie classiques vis--vis de la diœrentielle de de Rham.

Bon nombre de rsultats classiques portant sur les algbres de Lie et la diœrentielle de De Rham devraient pouvoir se transposer au cas quantique. Le thorme de van Est, qui, dans la thorie des groupes de Lie, permet sous certaines hypothses sur la diœrentielle de de Rham de comparer la cohomologie de l'algbre de Lie celle de son groupe, admet l'analogue quantique ci-dessous:

Thorme 1
Supposons donn un calcul diœrentiel sur une algbre de Hopf $\mathcal{A}$ et convenons de noter $H_{DR}$ la cohomologie dønie par le calcul diœrentiel, $H_{LIE}$ la cohomologie de l'algbre de Lie quantique qui lui est associe, et $H_{COG}$ la cohomologie de la cogbre $\mathcal{A}$.
Alors, si $H^0_{DR} \cap \ker \epsilon = H^1_{DR} = \cdots = H^n_{DR} = 0$, on a:

- $H^i_{COG} \simeq H^i_{LIE}$ pour $i = 0, \ldots, n$.
- $H^{n+1}_{COG} \hookrightarrow H^{n+1}_{LIE}$.

Classiøcation des calculs diœrentiels.

L'un des problmes issus des calculs diœrentiels de S. L. Woronowicz est, algbre de Hopf øxe, la non-unicit de ceux-ci. En 1995, K. Schmdgen et A. Schler ont classiø, de manire calculatoire, certains calculs diœrentiels sur le dual de $\mathrm{U}_q\mathcal{G}$. Dans cette partie, nous expliquerons comment classiøer tous les calculs diœrentiels sur ce dual.

Par la suite, nous appellerons algbre de Hopf coquasi-triangulaire la donne d'un couple $(\mathcal{A}, \gamma)$, o $\mathcal{A}$ est une algbre de Hopf et $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ est une application qui est un morphisme de cogbres, un antimorphisme d'algbres, et telle que pour $a, b \in \mathcal{A}$:

$$a_{(1)}b_{(1)}\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)}\rangle = \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)}\rangle b_{(2)}a_{(2)} \ .$$

A une algbre de Hopf coquasi-triangulaire $(\mathcal{A}, \gamma)$, nous associons l'application $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ dønie par: $\langle \gamma a, b\rangle = \langle \delta b, Sa\rangle$. Puis, partir des deux applications $\gamma$ et $\delta$, nous pouvons dønir l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{I}: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \\ & a & \mapsto & \gamma(a_{(1)})\, S\delta(a_{(2)}) \end{array}$$

qui permet de dønir la notion d'algbre de Hopf coquasi-triangulaire factorisable: on dit que l'algbre de Hopf coquasi-triangulaire $(\mathcal{A}, \gamma)$ est factorisable si l'accouplement

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & k \\ (a, b) & \mapsto & \langle \mathrm{I}(a), b\rangle \end{array}$$

est non dgnr. En utilisant des rsultats dus  A. Joseph et G. Letzter, nous montrons alors que le dual restreint $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ de $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, muni de l'application $\gamma$ dønie par

$$\langle \gamma(a), b\rangle = \langle R_{12}, b \otimes a\rangle,$$

est une algbre de Hopf coquasi-triangulaire factorisable et que l'ensemble $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ des l-ments ad-localement ønis de $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ est l'image de I.

Nous donnons une classiøcation des calculs diœrentiels sur $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ en terme de $V$-modules, $V$ dsignant la sous-algbre de $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ engendre par $E_i$, $F_iK_{\alpha_i}$ et $K_{2\lambda}$ ($\lambda \in \mathrm{P}$). Il est connu que la classiøcation des calculs diœrentiels sur $\mathcal{A}$ se ramne  la classiøcation des idaux  droite $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$, qui sont des sous-comodules pour la coaction  droite

$$\begin{array}{rccc} \delta_{\mathrm{R}}: & \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\ & a & \mapsto & a_{(2)}\otimes S(a_{(1)})a_{(3)} \end{array}$$

En utilisant que $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ est coquasi-triangulaire et que $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ est l'image de I, nous prouvons le thorme de classiøcation suivant.

Thorme 2

1. Soit $\mathcal{R}$ un idal  droite de codimension ønie de $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ qui est un sous-comodule de $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ pour la coaction  droite $\delta_{\mathrm{R}}$. Alors, il existe un V-module, de dimension ønie, M tel que $\mathcal{R} = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\,\mathrm{M})$.

2. Si M est un V-module de dimension ønie alors $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\,\mathrm{M})$ est un idal  droite de codimension ønie de $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, stable par la coaction  droite $\delta_{\mathrm{R}}$.

3. Si M et N sont deux V-modules de dimension ønie alors M et N ont les mme composantes irrductibles si et seulement si

$$\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\,\mathrm{M}) = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\,\mathrm{N}).$$

4. $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\,\mathrm{M})$ est contenu dans le noyau de l'augmentation de $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ si et seulement si M contient le V-module trivial.

Partant d'une algbre de Hopf coquasi-triangulaire factorisable $(\mathcal{A}, \gamma)$ et d'un $\mathcal{A}$-comodule  droite simple $M$, de dimension ønie, nous construisons explicitement un calcul diœrentiel $d: \mathcal{A} \rightarrow \Gamma \equiv \mathcal{A}\otimes \mathrm{End}(\mathrm{M})$ et nous montrons que :

Thorme 3
L'idal $\mathcal{R}$ qui correspond au calcul diœrentiel construit  partir de l'algbre de Hopf $(\mathcal{A}, \gamma)$ et du $\mathcal{A}$-module  droite $M$ est $\mathcal{R} = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathcal{A}^*}(k \oplus \mathrm{M}))$, o $k$ est le $\mathcal{A}^*$-module trivial.

En utilisant les deux thormes prcdents, nous voyons que si le rseau des poids et le rseau des racines sont identiques, alors tous les calculs diœrentiels sur $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ sont obtenus par la mthode prcdente.

Une seconde partie de cette thse est consacre aux algbres de battages quantiques. Ces algbres ont t dønies par M. Rosso dans l'article [24] et gnralisent les algbres de battages.

Homologie de Hochschild des algbres de battages quantiques.

Considrons un espace vectoriel tress, c'est dire la donne d'un espace vectoriel $V$ et d'un automorphisme $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ vriøant l'quation de Yang-Baxter.

Comme l'explique M. Rosso, chaque espace vectoriel tress $(V, \sigma)$ est associ l'algbre de battages quantique $\mathrm{T}_\sigma(V)$: l'espace vectoriel sous-jacent de $\mathrm{T}_\sigma(V)$ est celui de l'algbre tensorielle $\mathrm{T}(V)$ et le produit est obtenu via l'action des battages releve au groupe des tresses sur les puissances tensorielles de $V$. Cette algbre n'est pas engendre par $V$. Pour certains tressages, la sous-algbre engendre par $V$ n'est autre que la sous-algbre $\mathrm{U}_q\mathfrak{n}_+$ des algbres enveloppantes quantiques. Dans ses travaux, A. Varchenko relie la cohomologie de Hochschild de $\mathrm{U}_q\mathfrak{n}_+$ valeurs dans certains modules la cohomologie de certains groupes des tresses pures. L'objet de cette partie est de relier l'homologie de Hochschild de l'algbre $\mathrm{T}_\sigma(V)$ valeurs dans le bimodule trivial la cohomologie du groupe des tresses valeurs dans les puissances tensorielles de $V$.

Soit $\mathrm{H}_*(\mathrm{T}_\sigma(V), k)$ l'homologie de Hochschild de l'algbre $\mathrm{T}_\sigma(V)$ valeurs dans le bimodule trivial. La graduation naturelle de l'algbre de battages quantique $\mathrm{T}_\sigma(V)$ induit une graduation des groupes d'homologie $\mathrm{H}_*(\mathrm{T}_\sigma(V), k)$:

$$\mathrm{H}_p(T_\sigma(V), k) = \bigoplus_{n \geq p} \mathrm{H}_p(T_\sigma(V), k)_n \quad (p \geq 1)$$

Par ailleurs, pour chaque entier $n$, la donne d'un espace vectoriel tress $(V, \sigma)$ permet de construire une reprsentation du groupe des tresses $n$ brins $\mathrm{B}_n$ dans $V^{\otimes n}$. En s'appuyant sur des travaux de C. de Concini et M. Salvetti, nous montrons comment la cohomologie, valeurs dans $V^{\otimes n}$, du groupe $\mathrm{B}_n$ est relie certains groupes de cohomologie $\mathrm{H}_*(T_\sigma(V), k)_n$. Plus prcisement, nous dmontrons le thorme suivant.

Thorme 4
Pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n$ tel que $n \geq p$, nous avons

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{T}_\sigma(V)), k)_n \simeq \mathrm{H}^{n-p}(B_n, V^{\otimes n}).$$

Le plan que nous avons choisi est le suivant. Dans un premier chapitre, nous nous intresserons la structure d'algbre de Lie qui correspond ces calculs diœrentiels. Le problme de leur classiøcation sera l'objet du second chapitre. Dans le troisime et dernier chapitre, nous relierons l'homologie de Hochschild d'une algbre de battages quantique certains groupes de cohomologie du groupe des tresses. Chacun de ces chapitres est constitu d'un article (cf. [2, 26, 27]).

# Une version quantique du thorme de van Est

## Introduction

La notion d'algbre de Lie est troitement lie  la thorie des groupes de Lie. En eœet, nous savons qu' chaque groupe de Lie est associe une algbre de Lie et que la cohomologie de cette algbre de Lie permet de reconstruire la diœrentielle de de Rham du groupe de Lie. De plus, W. T. van Est a montr dans [11] que lorsque la cohomologie des formes diœrentielles de de Rham est nulle, la cohomologie du groupe et celle de son algbre de Lie sont identiques.

Dans [33], S. L. Woronowicz dønit un analogue quantique de la diœrentielle de de Rham. Le but de cet article est de dønir une notion d'algbre de Lie quantique et de construire une thorie cohomologique pour ces nouveaux objets qui est compatible avec les calculs diœrentiels sur les groupes quantiques de S. L. Woronowicz. Plus prcisment, nous montrons comment associer  chaque calcul diœrentiel sur les groupes quantiques une algbre de Lie quantique, puis que la cohomologie de cette algbre de Lie permet de reconstruire le calcul diœrentiel dont elle est issue. Enøn, nous dmontrons un analogue quantique du thorme de van Est.

La premire partie est consacre aux dønitions. Nous y introduisons la notion d'algbre de Lie quantique, ainsi que celle de module et comodule sur une algbre de Lie quantique. Dans la deuxime partie, nous construisons une thorie cohomologique pour les algbres de Lie quantiques. Puis, dans la troisime partie, nous montrons que les constructions et dønitions faites dans les deux premires sont compatibles avec la notion de calcul diœrentiel sur les groupes quantiques. Enøn, la dernire partie est ddie  l'nonc et  la dmonstration d'une version quantique du thorme de van Est.

## Notations

Les espaces vectoriels considrs dans cet article sont des espaces vectoriels sur un corps commutatif $k$ øx. Les oprations d'algbre linaire (produit tensoriel, ...) auront lieu dans la catgorie des $k$-espaces vectoriels. Si $T$ est un espace vectoriel, nous noterons respectivement par $T^*$, $T^{\otimes n}$, $\Lambda^n T$ son dual, sa $n$-ime puissance tensorielle et sa $n$-ime puissance extrieure.

Le groupe des permutations de $n$ lments sera not $S_n$. Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n-1$, nous noterons $\tau_i$ la transposition $(i, i+1)$ de $S_n$.

Si $\mathcal{A}$ est une algbre de Hopf, dsignons respectivement par $m$, $\eta$, $\Delta$, $\varepsilon$ et $S$ son produit, son unit, son coproduit, sa conit et son antipode. La notation de Sweedler pour le coproduit ($\Delta(a) = a^{(1)} \otimes a^{(2)}$) sera utilise.

Si $V$ est un comodule gauche (resp. droite), dsignons par $\delta_{\mathrm{L}}$ (resp. $\delta_{\mathrm{R}}$) la coaction qui lui est associe et pour tout $v \in V$, nous crirons : $\delta_{\mathrm{L}}(v) = v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$ (resp. $\delta_{\mathrm{R}}(v) = v^{(0)} \otimes v^{(1)}$).

## 2.1 Algbre de Lie quantique

Soit $\mathfrak{g}$ une algbre de Lie. En notant $C : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ son crochet et $\sigma : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ le twist $x \otimes y \mapsto y \otimes x$, la formule de Jacobi s'crit $C(\mathrm{id} \otimes C) = C(C \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \sigma)$ et la condition d'antisymtrie signiøe que le noyau de $\mathrm{id} - \sigma$ est contenu dans celui de $C$. Dans cette partie, nous verrons comment gnraliser la notion d'algbre de Lie en autorisant n'importe quel twist qui vriøe, outre les deux conditions cites ci-dessus, des conditions de compatibilit avec le crochet.

Dønition 1

On appelle algbre de Lie quantique la donne d'un espace vectoriel $T$ et de deux applications linaires $\sigma : T \otimes T \to T \otimes T$ et $C : T \otimes T \to T$ satisfaisant les axiomes ci-dessous :

1. l'application $\sigma$ satisfait l'quation de Yang-Baxter :
$$(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma); \tag{2.1}$$

2. le noyau de $\mathrm{id} - \sigma$ est contenu dans celui de $C$ :
$$\ker(\mathrm{id} - \sigma) \subset \ker C; \tag{2.2}$$

3. les applications $C$ et $\sigma$ sont lies par les formules de commutation :
$$\sigma(C \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes C)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma), \tag{2.3}$$
$$\sigma(\mathrm{id} \otimes C) = (\mathrm{id} \otimes C)\left[(\sigma \otimes \mathrm{id}) - (\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)^2\right] + (C \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}); \tag{2.4}$$

4. les applications $C$ et $\sigma$ vriøent la relation de Jacobi quantique :
$$C(\mathrm{id} \otimes C) = C(C \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \sigma). \tag{2.5}$$

Remarque :

Dans [32], M. Wambst appelle algbre de Lie quantique la donne d'un espace vectoriel $T$ et de deux applications linaires $\sigma : T \otimes T \to T \otimes T$ et $C : T \otimes T \to T$ vriøant les axiomes suivants :

1. l'application $\sigma$ vriøe les deux formules :
$$(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma), \tag{2.6}$$
$$(\sigma + \mu \cdot \mathrm{id})(\sigma - \mathrm{id}) = 0; \tag{2.7}$$

2. les applications $C$ et $\sigma$ satisfont aux formules de commutation :

$$C\sigma = -\mu C, \tag{2.8}$$
$$\sigma(C \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes C)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma), \tag{2.9}$$
$$\sigma(\mathrm{id} \otimes C) = (C \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}), \tag{2.10}$$
$$\sigma(C \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma) = (\mathrm{id} \otimes C)(\sigma \otimes \mathrm{id}); \tag{2.11}$$

3. les applications $C$ et $\sigma$ vriøent la relation de Jacobi quantique :

$$C(\mathrm{id} \otimes C) = C(C \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \sigma). \tag{2.12}$$

Les formules (2.5) et (2.12), puis (2.1) et (2.6) sont les mmes. Quant aux formules (2.9), (2.10) et (2.11), elles impliquent les formules (2.3) et (2.4). Enøn, pour $\mu$ gal 1, la formule (2.8) implique (2.2).

Exemples :
1) Toute algbre de Lie est une algbre de Lie quantique en prenant $C$ et $\sigma$ respectivement gaux au crochet de Lie et l'change $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.
2) Toute algbre $\mathcal{A}$, de produit $m$, dote d'une application $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ vriøant l'quation de Yang-Baxter est munie d'une structure d'algbre de Lie quantique par le crochet $C = m(\mathrm{id} - \sigma)$ si

$$\begin{aligned}
\sigma(m \otimes \mathrm{id}) &= (\mathrm{id} \otimes m)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma), \\
\sigma(\mathrm{id} \otimes m) &= (\mathrm{id} \otimes m)[\mathrm{id} - (\mathrm{id} \otimes \sigma)][(\sigma \otimes \mathrm{id}) + (\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)] \\
&\quad + (m \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}).
\end{aligned}$$

De plus, si $\sigma$ est involutive (i.e. $\sigma^2 = 1$), la condition concernant $\sigma(m \otimes \mathrm{id})$ suŒt.
3) Toute algbre de Hopf $\mathcal{A}$ est munie d'une structure d'algbre de Lie quantique par

$$\begin{array}{ll}
\sigma(a \otimes b) = b^{(1)} \otimes S(b^{(2)})ab^{(3)} & \text{pour } a, b \in \mathcal{A}, \\
C(a \otimes b) = S(b^{(1)})ab^{(2)} - \varepsilon(b)a & \text{pour } a, b \in \mathcal{A}.
\end{array}$$

Le tressage $\sigma$ a t døni par S. L. Woronowicz dans [34].
4) Par restriction des applications $\sigma$ et $C$ dønies ci-dessus, le noyau de l'augmentation de toute algbre de Hopf est muni d'une structure d'algbre de Lie quantique.

En s'inspirant de la notion de module sur les algbres de Leibniz, introduite par C. Cuvier dans [8], il est naturel de poser la dønition ci-dessous :

Dønition 2
On appelle module sur une algbre de Lie quantique $T$ tout espace vectoriel $V$ qui est dot d'une application linaire $m_{\mathrm{L}} : T \otimes V \to V$ vriøant

$$m_{\mathrm{L}}(\mathrm{id} \otimes m_{\mathrm{L}})(\mathrm{id} - \sigma \otimes \mathrm{id}) = m_{\mathrm{L}}(C \otimes \mathrm{id}). \tag{2.13}$$

Bien entendu, lorsque $T$ est une algbre de Lie classique, la dønition ci-dessus concide avec la dønition usuelle des $T$-modules. En eœet, si $V$ est un module sur $T$ au sens quantique, il

est clair que $m_{\mathrm{L}}$ munit $V$ d'une structure de module sur la puissance tensorielle de $T$ et que la formule (2.13) permet de passer au quotient et d'obtenir une structure de $U(T)$-module sur $V$. Rciproquement, si $V$ est un $U(T)$-module, il est clair que la restriction $T$ de l'action de $U(T)$ sur $V$ dønit une application $m_{\mathrm{L}}$ qui satisfait (2.13).
Exemple :
Toute algbre $\mathcal{A}$, de multiplication $m$, qui est aussi une algbre de Lie quantique de crochet $C = m(\mathrm{id} - \sigma)$ est un module sur $\mathcal{A}$ en prenant $m_{\mathrm{L}}$ gal la multiplication $m$.

Dønition 3
On appelle comodule sur une algbre de Lie quantique de dimension ønie $T$ la donne d'un espace vectoriel $V$ et d'une application linaire $\Delta_{\mathrm{R}} : V \to V \otimes T^*$ telle que

$$(\mathrm{id} \otimes C^t)\Delta_{\mathrm{R}} = (\mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \sigma^t)(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}, \tag{2.14}$$

o $C^t$ et $\sigma^t$ sont respectivement les transposes des applications $C$ et $\sigma$.

Exemple :
Toute algbre de dimension ønie $\mathcal{A}$ et de produit $m$ qui est aussi une algbre de Lie quantique de crochet $C = m(\mathrm{id} - \sigma)$ munit son dual $\mathcal{A}^*$ d'une structure de comodule sur $\mathcal{A}$ en prenant $\Delta_{\mathrm{R}}$ gal au coproduit.

## 2.2 Cohomologie des algbres de Lie quantiques

Cette partie est consacre la construction d'une thorie cohomologique pour les algbres de Lie quantiques. Nous commencerons par quelques notations, puis nous dønirons des applications $B^n$, $C^n$ et $D^n$ qui interviendront lors de la construction du complexe de cochanes. Celle-ci sera l'objet de la øn de cette partie. Outre la construction de ce complexe, nous montrerons que la thorie cohomologique ainsi obtenue gnralise la thorie cohomologique des algbres de Lie. Enøn, nous verrons que, dans le cas o l'algbre de Hopf considre est l'algbre des fonctions sur un groupe, nous retrouvons un complexe døni par A. Connes.

Soient $T$ une algbre de Lie quantique de dimension ønie, $\Gamma$ son dual, et $V$ un comodule sur $T$. Par transposition des applications $\sigma$ et $C$ qui dønissent la structure d'algbre de Lie quantique de $T$, nous obtenons deux applications $\sigma^t : \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ et $C^t : \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ qui vriøent :

1. l'application $\sigma^t$ satisfait l'quation de Yang-Baxter :

$$(\sigma^t \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma^t)(\sigma^t \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \sigma^t)(\sigma^t \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma^t); \tag{2.15}$$

2. l'image de $C^t$ est contenue dans celle de $\mathrm{id} - \sigma^t$ :

$$\mathrm{im}\, C^t \subset \mathrm{im}(\mathrm{id} - \sigma^t); \tag{2.16}$$

3. les applications $C^t$ et $\sigma^t$ sont lies par les formules de commutation :

$$(C^t \otimes \mathrm{id})\sigma^t = (\mathrm{id} \otimes \sigma^t)(\sigma^t \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes C^t), \tag{2.17}$$

$$(\mathrm{id} \otimes C^t)\sigma^t = (\sigma^t \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma^t)(C^t \otimes \mathrm{id}) + [(\sigma^t \otimes \mathrm{id}) - (\mathrm{id} \otimes \sigma^t)^2(\sigma^t \otimes \mathrm{id})](\mathrm{id} \otimes C^t); \tag{2.18}$$

4. les applications $C^t$ et $\sigma^t$ vriøent :

$$(\mathrm{id} \otimes C^t)C^t = (\mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \sigma^t)(C^t \otimes \mathrm{id})C^t. \tag{2.19}$$

De plus, comme l'application $\sigma^t$ vriøe l'quation de Yang-Baxter, nous pouvons considrer les applications de ısymtrisationȷ $A_n$, $A_{n,k}$ qui lui correspondent. Celles-ci sont dønies par S. L. Woronowicz dans [33] et sont construites comme suit. Nous savons que, pour toute permutation $P$ de $S_n$, nous pouvons dønir deux applications $P_{\sigma^t}$ et $P^{op}_{\sigma^t}$ en posant

$$P_{\sigma^t} = \sigma^t_{i_1}\sigma^t_{i_2}\cdots\sigma^t_{i_{\ell(P)}}, \quad P^{op}_{\sigma^t} = \sigma^t_{i_{\ell(P)}}\cdots\sigma^t_{i_2}\sigma^t_{i_1},$$

o $\sigma^t_i = \overbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}^{i-1}\otimes\sigma^t\otimes\overbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}^{n-(i+1)}$ et $\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_{\ell(P)}}$ est une dcomposition rduite de $P$. Alors

$$A_n = \sum_{P\in S_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(P)}\, P_{\sigma^t}, \quad A_{n,k} = \sum_{P\in S_{n,k}}(-1)^{\mathrm{sgn}(P)}\, P^{op}_{\sigma^t},$$

o

$$S_{n,k} = \{\ P\in S_n \mid P(i) < P(j) \text{ si } i<j\le k \text{ ou } k<i<j\ \}.$$

Par la suite, nous utiliserons les proprits ci-dessous des applications de ısymtrisationȷ :

$$A_n = A_{n,k}\left(A_k\otimes A_{n-k}\right), \tag{2.20}$$

$$A_{n,1} = \mathrm{id} - (\mathrm{id}\otimes A_{n-1,1})(\sigma^t\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}). \tag{2.21}$$

Celles-ci sont dmontres dans l'article [33] de S. L. Woronowicz.

### 2.2.1 Construction des applications $B^n$, $C^n$, $D^n$

Les applications $B^n$

Grce la structure de comodule de $V$, dønissons pour tout entier $n\ge 0$ des applications $B^n : V\otimes\Gamma^{\otimes n}\to V\otimes\Gamma^{\otimes n+1}$ de la faon suivante :

$$B^n = (\mathrm{id}\otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}}\otimes\overbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}^{n}). \tag{2.22}$$

Lemme 1
La restriction de $B^n$ $V\otimes\operatorname{im} A_n$ est image dans $V\otimes\operatorname{im} A_{n+1}$.

Preuve :
Comme $A_{1,1}$ est gal $A_1$, il est clair que l'image de $B^0$ est contenue dans $V\otimes\operatorname{im} A_1$. Ensuite, lorsque $n$ n'est pas nul, la formule (2.20) donne le rsultat :

$$\begin{aligned} B^n(\mathrm{id}\otimes A_n) &= (\mathrm{id}\otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}}\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes A_n) \\ &= (\mathrm{id}\otimes A_{n+1,1})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes A_n)(\Delta_{\mathrm{R}}\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}) \\ &= (\mathrm{id}\otimes A_{n+1})(\Delta_{\mathrm{R}}\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}). \end{aligned}$$

□

Les applications $C^n$

A partir du crochet $C^t$, dønissons pour tout $n \geq 1$ des applications $C^n : \Gamma^{\otimes n} \longrightarrow \Gamma^{\otimes n+1}$ en posant

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -C^t && (2.23)\\
C^n &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (\overbrace{\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}}^{i} \otimes A_{n+1-i,1}) C_i^t + (-1)^n C_n^t \text{pour } n \geq 2, && (2.24)
\end{aligned}
$$

o

$$C_i^t = \overbrace{\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}}^{i-1} \otimes C^t \otimes \overbrace{\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}}^{n-i}.$$

Remarquons que pour $n \geq 2$ :

$$C^n = -\mathrm{id} \otimes C^{n-1} - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) C_1^t. \tag{2.25}$$

Soient $\alpha^n : \Gamma^{\otimes n+1} \longrightarrow \Gamma^{\otimes n+1}$ les applications dønies pour tout entier $n \geq 1$ par

$$
\begin{aligned}
&\alpha^1 = -\mathrm{id}, && (2.26)\\
&\alpha^n = (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1}) \sigma_1^t \sigma_2^t - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1}), \text{pour } n \geq 2. && (2.27)
\end{aligned}
$$

Lemme 2
Pour $n \geq 2$, les applications $\alpha^n$ vriøent

$$\alpha^n (A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}) = -A_{n+1,1} (\mathrm{id} \otimes A_{n,1}). \tag{2.28}$$

Preuve :
Raisonnons par rcurrence sur $n$. La formule (2.28) se vriøe facilement au cran $n = 2$. Ensuite, si elle est vraie au cran $n-1$, le calcul suivant montre qu'elle l'est aussi au cran $n$ :

$$
\begin{aligned}
&\alpha^n (A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})\\
&\quad = -(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1}) \sigma_1^t \sigma_2^t (A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})\\
&\quad = -(\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) + (\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) \sigma_1^t + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1}) \sigma_1^t \sigma_2^t - (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1}) \sigma_1^t \sigma_2^t \sigma_1^t\\
&\quad = -(\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) + \mathrm{id} - A_{n+1,1} + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})(\mathrm{id} \otimes A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}) \sigma_1^t \sigma_2^t\\
&\quad = -(\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) + \mathrm{id} - A_{n+1,1} - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) \sigma_1^t \sigma_2^t\\
&\quad = -(\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) + \mathrm{id} - A_{n+1,1} - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) \sigma_1^t (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) \sigma_2^t\\
&\quad = -(\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) + \mathrm{id} - A_{n+1,1} - (\mathrm{id} - A_{n+1,1})(\mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes A_{n,1})\\
&\quad = -A_{n+1,1} (\mathrm{id} \otimes A_{n,1}).
\end{aligned}
$$

La formule (2.28) est donc vriøe pour tout $n \geq 2$. $\square$

La dmonstration du lemme prcdent utilise uniquement l'axiome (2.15). Les axiomes (2.15), (2.17), (2.18) permettent d'obtenir le lemme suivant.

Lemme 3
Les applications $C^n$ et $A_{n,1}$ vriøent la formule de commutation :

$$C^n A_{n,1} = \begin{cases} \alpha^1 C_1^t & \text{pour } n = 1, \\ \alpha^n C_1^t - A_{n+1,1} (\mathrm{id} \otimes C^{n-1}) & \text{pour } n \geq 2. \end{cases} \tag{2.29}$$

Preuve :
Raisonnons par rcurrence sur $n$. Aux crans $n = 1$ et $n = 2$, la formule se vriøe facilement. Ensuite, si $n \geq 3$ et si le rsultat est vrai au cran $n-1$, nous avons

$$\begin{aligned}
&C^n A_{n,1} \\
&= C^n - C^n(\mathrm{id} \otimes A_{n-1,1})\sigma_1^t \\
&= C^n + (\mathrm{id} \otimes C^{n-1})(\mathrm{id} \otimes A_{n-1,1})\sigma_1^t + (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes A_{n-1,1})\sigma_1^t \\
&= C^n + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})C_2^t\sigma_1^t - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes C^{n-2})\sigma_1^t + (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes A_{n-1,1})\sigma_1^t \\
&= C^n + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})\sigma_1^t\sigma_2^t C_1^t + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})(\sigma_1^t - \sigma_2^{t\,2}\sigma_1^t)C_2^t - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})\sigma_1^t(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes C^{n-2}) \\
&\quad +(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1})\sigma_2^t\sigma_1^t C_2^t
\end{aligned}$$

En exprimant $C^n$ et $C^{n-2}$ en fonction des $C_i^t$, nous voyons que la formule ci-dessus permet d'crire $C^n A_{n,1}$ comme la somme $\sum_{i=1}^n \alpha_i^n C_i^t$, o les applications $\alpha_1^n$, $\alpha_2^n$, $\alpha_i^n$ $(i = 3, \ldots, n-1)$ et $\alpha_n^n$ sont donnes par

$$\begin{aligned}
\alpha_1^n &= (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})\sigma_1^t\sigma_2^t - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1}) \\
&= \alpha^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2^n &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})\left[\sigma_1^t - \sigma_2^{t\,2}\sigma_1^t\right] + (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1})\sigma_2^t\sigma_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})\left[\sigma_1^t - \sigma_2^{t\,2}\sigma_1^t\right] - (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})(\mathrm{id} \otimes A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})\sigma_2^t\sigma_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})\left[\sigma_1^t - \sigma_2^t\sigma_1^t\right] \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n-1})(\mathrm{id} \otimes A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})\sigma_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1})\sigma_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) - (\mathrm{id} \otimes A_{n,1})\sigma_1^t(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) \\
&= A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1,1}) \\
&= (-1)^2 A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes \cdots \mathrm{id} \otimes A_{n+1-2,1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_i^n &= (-1)^i(\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1-i,1}) + (-1)^{i-1}(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1-i,1})\sigma_1^t \\
&= (-1)^i(\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1-i,1}) + (-1)^{i-1}(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})\sigma_1^t(\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1-i,1}) \\
&= (-1)^i A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1-i,1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n^n &= (-1)^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})\sigma_1^t \\
&= (-1)^n A_{n+1,1}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la formule (2.29) esr vraie au cran $n$. $\square$

Lemme 4
Les applications $C^n$ dønissent un complexe de cochanes :

$$\mathrm{im}\, A_1 \xrightarrow{C^1} \mathrm{im}\, A_2 \xrightarrow{C^2} \cdots \xrightarrow{C^{n-1}} \mathrm{im}\, A_n \xrightarrow{C^n} \mathrm{im}\, A_{n+1} \xrightarrow{C^{n+1}} \cdots \;.$$

Preuve :

1) Montrons que l'image de $\operatorname{im} A_n$ par $C^n$ est incluse dans $\operatorname{im} A_{n+1}$. La formule (2.16) permet de voir que l'image de $\operatorname{im} A_1$ par $C^1$ est incluse dans $\operatorname{im} A_2$. Ensuite, pour $n \geq 2$, nous avons grce la formule (2.29) :

$$C^n A_n = C^n A_{n,1}(\mathrm{id} \otimes A_{n-1}) = \underbrace{\alpha^n C_1^t(\mathrm{id} \otimes A_{n-1})}_{A} - \underbrace{A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes C^{n-1})(\mathrm{id} \otimes A_{n-1})}_{B}.$$

Comme $\operatorname{im} C_1^t$ est contenue dans $\operatorname{im} A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}$, le terme $A$ est image dans $\operatorname{im} A_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
\alpha^n (A_2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1}) &= -A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1}) \\
&= -A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes A_n) \\
&= -A_{n+1}.
\end{aligned}$$

Puis, si l'image de $\operatorname{im} A_{n-1}$ par $C^{n-1}$ est contenue dans $\operatorname{im} A_n$, le terme $B$ est image dans $\operatorname{im} A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes A_n)$, c'est dire dans $\operatorname{im} A_{n+1}$. Donc, par rcurrence, il est clair que l'image de $\operatorname{im} A_n$ par $C^n$ est incluse dans $\operatorname{im} A_{n+1}$.

2) Montrons que $C^{n+1}C^n$ est nul pour tout $n$. Lorsque $n$ est gal 1, c'est immdiat partir de la formule (2.19). Ensuite, lorsque $n$ est au moins gal 2, nous voyons que les formules (2.19) et (2.29) permettent de se ramener au cas prcdent :

$$\begin{aligned}
&C^{n+1}C^n \\
&= (\mathrm{id} \otimes C^n)(\mathrm{id} \otimes C^{n-1}) + (\mathrm{id} \otimes C^n)(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes C^{n-1}) \\
&\quad + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes C^n C^{n-1}) + (\mathrm{id} \otimes C^n A_{n,1})C_1^t + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes C^{n-1}) \\
&\quad + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t C_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes C^n C^{n-1}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^n)C_2^t C_1^t - (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes C^{n-1})C_1^t \\
&\quad + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes C^{n-1}) + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t C_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes C^n C^{n-1}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^n)(\mathrm{id} \otimes A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})C_1^t C_1^t - (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes C^{n-1}) \\
&\quad + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})C_1^t(\mathrm{id} \otimes C^{n-1}) + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t C_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes C^n C^{n-1}) - (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t C_1^t + (\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n,1})C_1^t C_1^t \\
&= (\mathrm{id} \otimes C^n C^{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Pour dmontrer que l'image de $\operatorname{im} A_n$ par $C^n$ est incluse dans $\operatorname{im} A_{n+1}$, nous avons utilis les axiomes (2.15), (2.16) et la formule (2.29). La formule (2.29) associe aux axiomes (2.15) et (2.19) nous a permis de montrer que les applications $C^{n+1}C^n$ sont nulles.

Les applications $D^n$

Grce aux applications $B^n$ et $C^n$, dønissons des applications $D^n : V \otimes \Gamma^{\otimes n} \to V \otimes \Gamma^{\otimes n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$ :

$$D^0 = B^0, \tag{2.30}$$

$$D^n = (\mathrm{id} \otimes C^n) + B^n, \text{pour } n \geq 1. \tag{2.31}$$

Lemme 5
Les applications $D^n$ dønissent un complexe de cochanes :

$$V \xrightarrow{D^0} V \otimes \operatorname{im} A_1 \xrightarrow{D^1} V \otimes \operatorname{im} A_2 \xrightarrow{D^2} \cdots \xrightarrow{D^{n-1}} V \otimes \operatorname{im} A_n \xrightarrow{D^n} V \otimes \operatorname{im} A_{n+1} \xrightarrow{D^{n+1}} \cdots .$$

Preuve :
Compte tenu des lemmes 1 et 4, il est clair que l'image de $V \otimes \operatorname{im} A_n$ par $D^n$ est incluse dans $V \otimes \operatorname{im} A_{n+1}$. Ensuite, grce aux formules (2.14) et (2.29), nous vriøons aisment que $D^{n+1}D^n$ est toujours nul. En eœet, (2.14) donne immdiatement le rsultat pour $n$ nul; (2.14) associe (2.29) et au rsultat similaire pour les $C^n$ permet, via le calcul suivant, de le vriøer dans tous les autres cas :

$$\begin{aligned}
&D^{n+1}D^n \\
&\quad = (\mathrm{id} \otimes C^{n+1})(\mathrm{id} \otimes C^n) + B^{n+1}(\mathrm{id} \otimes C^n) + (\mathrm{id} \otimes C^{n+1})B^n + B^{n+1}B^n \\
&\quad = (\mathrm{id} \otimes C^{n+1}C^n) + (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes C^n) + (\mathrm{id} \otimes C^{n+1})(\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad + (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad = (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes C^n)(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) + (\mathrm{id} \otimes C^{n+1}A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad + (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad = (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes C^n)(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) + (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n+1})(\mathrm{id} \otimes C_1^t)(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad - (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes C^n)(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) + (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad = (\mathrm{id} \otimes \alpha^{n+1})(\mathrm{id} \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) + (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad = -(\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\qquad + (\mathrm{id} \otimes A_{n+2,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n+1,1})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id}) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

□

Dønition de la cohomologie des algbres de Lie quantiques

D'aprs ce qui a dj t fait, nous pouvons construire partir de toute algbre de Lie quantique $T$, de dimension ønie, et tout comodule $V$ sur $T$ un complexe de cochanes :

$$\mathrm{C}^*_{lie}(T,V) \ : \ V \xrightarrow{D^0} V \otimes \operatorname{im} A_1 \xrightarrow{D^1} \cdots \xrightarrow{D^{n-1}} V \otimes \operatorname{im} A_n \xrightarrow{D^n} V \otimes \operatorname{im} A_{n+1} \xrightarrow{D^{n+1}} \cdots .$$

Dønition 4
La cohomologie de ce complexe de cochanes, note $\mathrm{H}^*_{lie}(T,V)$, est appele la cohomologie de l'algbre de Lie quantique $T$ valeurs dans le comodule $V$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^0_{lie}(T,V) &= \ker D^0, \\
\mathrm{H}^n_{lie}(T,V) &= \ker D^n / \operatorname{im} D^{n-1}, \text{pour } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Lorsque le comodule $V$ est $k$ muni de la structure de comodule trivial (i.e. $\Delta_R$ identiquement nul), nous crirons $\mathrm{C}^*_{lie}(T)$, $\mathrm{H}^*_{lie}(T)$ la place de $\mathrm{C}^*_{lie}(T,k)$, $\mathrm{H}^*_{lie}(T,k)$ et nous parlerons de la cohomologie de l'algbre de Lie quantique $T$.

Exemples :

1) Supposons que $T$ soit une algbre de Lie classique, c'est dire que $\sigma(t_1 \otimes t_2) = t_2 \otimes t_1$. Alors, il est vident que $A_n$ dsigne en fait l'antisymtrisation de $\Gamma^{\otimes n}$ et que la transpose de $A_{n,1}$ est la somme $P_1 - P_2 + P_3 + \cdots + (-1)^{n+1} P_n$, avec

$$P_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ i & 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

De plus, comme l'application entre $V \otimes \operatorname{im} A_n$ et $\operatorname{Hom}(\Lambda^n T, V)$ qui transforme $v \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ en l'application $t_1 \wedge \cdots \wedge t_n \mapsto (f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(t_1 \otimes \cdots \otimes t_n) v$ est un isomorphisme, nous pouvons obtenir la cohomologie de $T$ valeurs dans $V$ en considrant les applications $d^n$ dønies ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \operatorname{im} A_n & \xrightarrow{\quad D^n \quad} & V \otimes \operatorname{im} A_{n+1} \\ \wr \big\downarrow & & \big\downarrow \wr \\ \operatorname{Hom}(\Lambda^n T, V) & \xrightarrow[\quad d^n \quad]{} & \operatorname{Hom}(\Lambda^{n+1} T, V) \end{array}$$

En munissant $V$ de la structure de $T$-module dønie via $\Delta_{\mathrm{R}}$ et en convenant que l'image d'un lment $v$ de $V$ par $\Delta_{\mathrm{R}}$ est gale $\sum v' \otimes v''$, nous obtenons immdiatement que

$$d^0(v)(t) = \sum v''(t) v' = t \cdot v.$$

De mme, si l'application $f$ de $\operatorname{Hom}(\Lambda^n T, V)$ correspond l'lment $\sum v \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ de $V \otimes \operatorname{im} A_n$, nous voyons facilement que

$$\begin{aligned} (d^n f)(t_1 \wedge \cdots \wedge t_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} t_i \cdot f(t_1 \wedge \cdots \widehat{t_i} \cdots \wedge t_{n+1}) \\ &\quad + f\left( \sum_{i<j} (-1)^{i+j} C(t_i \otimes t_j) \wedge t_1 \wedge \cdots \widehat{t_i} \cdots \widehat{t_j} \cdots \wedge t_{n+1} \right). \end{aligned}$$

Comme ces formules sont celles qui dønissent la cohomologie des algbres de Lie classiques, valeurs dans le $T$-module $V$, nous voyons que la cohomologie des algbres de Lie quantiques introduite dans cette partie est une extension de la cohomologie des algbres de Lie.

2) Lorsque $V$ est une varit lisse et $\Gamma$ est un groupe discret qui agit sur $V$ par diœomorphisme, A. Connes montre dans [7] comment dcrire la cohomologie cyclique de l'algbre produit crois $\mathcal{C}_c^\infty(V) \rtimes \Gamma$. Pour cela, A. Connes construit une algbre diœrentielle $(\mathcal{C}, d)$. En tant qu'algbre, $\mathcal{C}$ est le produit crois $\mathcal{B} \rtimes \Gamma$, o $\mathcal{B}$ est l'algbre obtenue en faisant le produit tensoriel gradu de l'algbre $A^*(V)$ des formes diœrentielles lisses de $V$ support compact par l'algbre extrieure $\Lambda^*(\Gamma')$, o $\Gamma'$ est le noyau de l'augmentation de $k(\Gamma)$. Si nous convenons de noter $U_g$ un lment $g$ de $\Gamma$ vu dans $\mathcal{C}$ et $\delta_g$ la projection de ce mme lment dans $\Gamma'$, la diœrentielle $d$ est donne par la formule :

$$d(bU_g) = d_{A^*(V)}(b) U_g + (-1)^{\partial} b (1 \otimes \delta_{g^{-1}}) U_g,$$

o $d_{A^*(V)}(b)$ est la diœrentielle de $A^*(V)$ qui agit sur la partie $A^*(V)$ de $\mathcal{B}$. Pour montrer que $d$ est une diœrentielle, A. Connes utilise que $d$ est la somme des applications $d'$ et $d''$ dønies par $d'(bU_g) = (-1)^{\partial b} U_g \delta_g$ et $d''(bU_g) = d_{A^*(V)}(b)U_g$. Il constate ensuite que ces deux applications sont deux diœrentielles qui anticommutent.

Maintenant, si nous voulons transposer cela au cas quantique en remplaant $\Gamma$ par une algbre de Hopf $\mathcal{A}$ et $A^*(V)$ par une $\mathcal{A}^{cop}$-module algbre $V$ ($\mathcal{A}^{cop}$ dsignant l'algbre de Hopf $\mathcal{A}$ munie du coproduit oppos $\Delta^{cop}(a) = a^{(2)} \otimes a^{(1)}$) munie d'une diœrentielle $d_V$ qui commute l'action de $\mathcal{A}$, nous sommes confronts plusieurs problmes. Tout d'abord, il faut gnraliser la notion de puissance extrieure de $\ker \varepsilon$. Pour cela, il suŒt de remarquer que le quatrime exemple d'algbre de Lie quantique donn permet de munir $\ker \varepsilon$ d'une structure d'algbre de Lie quantique, puis de suivre les ides de S. L. Woronowicz en dønissant la puissance extrieure d'ordre $n$ de $\ker \varepsilon$ comme l'image de l'application $A_n$ qui correspond $\sigma^t$. Ensuite, si nous voulons gnraliser les applications $d'$ et $d''$, il est naturel de poser pour tout $v \otimes \epsilon$ de $\mathcal{B}$ et $a$ de $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}
&d'((v \otimes \epsilon) \cdot a) = (-1)^n (v \otimes A_{n+1,1}(\epsilon \otimes \overline{S^{-1}(a^{(2)})})) \cdot a^{(1)}, \\
&d''((v \otimes \epsilon) \cdot a)) = (d_V(v) \otimes \epsilon) \cdot a,
\end{aligned}$$

o $\overline{S^{-1}(a^{(2)})}$ est la projection de $S^{-1}(a^{(2)})$ sur le noyau de $\varepsilon$. Nous remarquons que $d''$ est une diœrentielle qui anticommute avec $d'$ et qui n'est pas de carr nul. En introduisant un terme qui correspond la cohomologie de l'algbre de Lie quantique $\ker \varepsilon$, nous dønissons une nouvelle application $d'$ :

$$d'((v \otimes \epsilon) \cdot a) = (v \otimes C(\epsilon)) \cdot a + (-1)^n (v \otimes A_{n+1,1}(\epsilon \otimes \overline{S^{-1}(a^{(2)})})) \cdot a^{(1)}.$$

Ainsi corrige, $d'$ est une diœrentielle qui anticommute avec $d''$. Remarquons pour ønir que dans le cas o $\mathcal{A}$ est l'algbre du groupe $\Gamma$, la puissance extrieure $\operatorname{im} A_n$ concide avec la puissance extrieure $\Lambda^n \Gamma'$ et l'application $C$ qui dcrit la cohomologie de l'algbre de Lie quantique $\ker \varepsilon$ est identiquement nulle.

## 2.3 Calcul diœrentiel et algbre de Lie quantique

Jusqu' prsent, nous avons gnralis la notion d'algbre de Lie en construisant de nouveaux objets algbriques, les algbres de Lie quantiques, et en dveloppant une thorie cohomologique adapte. Nous allons maintenant voir pourquoi ces objets sont appels des algbres de Lie quantiques.

Dans le cas classique, nous savons qu' chaque groupe de Lie est associe une algbre de Lie et que la cohomologie de celle-ci permet de reconstruire la cohomologie de de Rham du groupe de Lie. Dans [33], S. L. Woronowicz dønit un analogue quantique de la diœrentielle de de Rham : le calcul diœrentiel sur les groupes quantiques. Aprs quelques rappels sur les calculs diœrentiels de S. L. Woronowicz, nous verrons comment associer chacun d'entre eux une algbre de Lie quantique, puis que la cohomologie de celle-ci permet de reconstruire le calcul diœrentiel dont elle est issue.

### 2.3.1 Calcul diœrentiel sur les groupes quantiques

La notion de calcul diœrentiel sur une algbre de Hopf a t dønie par S. L. Woronowicz [33]. Rappelons quelques rsultats qui nous seront utiles par la suite.

Lorsque $\mathcal{A}$ est une algbre de Hopf, un bidule de Hopf (ou bimodule bicovariant) sur $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel $\Gamma$ qui est un $\mathcal{A}$-bimodule, un $\mathcal{A}$-comodule droite et gauche, et de sorte que les coactions $\delta_{\mathrm{R}}$, $\delta_{\mathrm{L}}$ soient des morphismes de $\mathcal{A}$-bimodules qui vriøent

$$(\mathrm{id} \otimes \delta_{\mathrm{R}})\delta_{\mathrm{L}} = (\delta_{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{id})\delta_{\mathrm{R}}.$$

Le sous-espace de $\Gamma$ form des lments $\gamma$ qui vriøent $\delta_{\mathrm{L}}(\gamma) = 1 \otimes \gamma$ est appel espace des convariants gauche et est not $\Gamma^{\mathrm{L}}$. Ce sous-espace est un sous-comodule droite de $\Gamma$ et est un $\mathcal{A}$-module droite pour l'action $\gamma \cdot a = S(a^{(1)})\gamma a^{(2)}$. Cette action et cette coaction munissent $\Gamma^{\mathrm{L}}$ d'une structure de bicomodule crois droite (cf. [35]), c'est dire vriøant

$$\delta_{\mathrm{R}}(\gamma \cdot a) = \gamma^{(0)} \cdot a^{(2)} \otimes S(a^{(1)})\gamma^{(1)}a^{(3)}. \tag{2.32}$$

La structure de bicomodule crois de $\Gamma^{\mathrm{L}}$ permet alors de reconstruire le bidule de Hopf $\Gamma$. Plus prcisment, $\Gamma$ est isomorphe au bidule de Hopf $\mathcal{A}\otimes\Gamma^{\mathrm{L}}$ muni des actions et des coactions suivantes :

$$\begin{array}{ll} b \cdot (a \otimes \gamma) = ba \otimes \gamma, & (a \otimes \gamma) \cdot b = ab^{(1)} \otimes \gamma \cdot b^{(2)}, \\ \delta_{\mathrm{L}}(a \otimes \gamma) = a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes \gamma, & \delta_{\mathrm{R}}(a \otimes \gamma) = a^{(1)} \otimes \gamma^{(0)} \otimes a^{(2)}\gamma^{(1)}. \end{array}$$

Un calcul diœrentiel sur une algbre de Hopf $\mathcal{A}$ est la donne d'un $\mathcal{A}$-bidule de Hopf $\Gamma$ et d'une application linaire $d : \mathcal{A} \to \Gamma$ ayant les proprits suivantes : $d$ est une drivation, $d$ est un morphisme de comodule droite et gauche, l'image de $d$ engendre $\Gamma$ en tant que $\mathcal{A}$-module. Alors, si nous notons $d^{\mathrm{L}}$ l'application $\mathcal{A} \to \Gamma^{\mathrm{L}}$ obtenue partir de $d$ en projetant sur l'espace des convariants gauche (i.e. $d^{\mathrm{L}}(a) = S(a^{(1)})d(a^{(2)})$), nous vriøons immdiatement que

$$d^{\mathrm{L}}(ab) = d^{\mathrm{L}}(a) \cdot b + \varepsilon(a)d^{\mathrm{L}}(b), \tag{2.33}$$

$$\delta_{\mathrm{R}}(d^{\mathrm{L}}(a)) = d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}) \otimes S(a^{(1)})a^{(3)}. \tag{2.34}$$

A partir d'un tel calcul diœrentiel, S. L. Woronowicz construit des analogues quantiques des puissances extrieures de $\Gamma$ et de $\Gamma^{\mathrm{L}}$ que nous notons respectivement $\Lambda\Gamma$ et $\Lambda\Gamma^{\mathrm{L}}$. L'espace $\Lambda\Gamma$ est muni par S. L. Woronowicz de deux structures diœrentes :

1. l'espace $\Lambda\Gamma$ est un $\mathcal{A}$-bidule de Hopf;

2. l'espace $\Lambda\Gamma$ est une algbre diœrentielle gradue.

La structure de $\mathcal{A}$-module gauche du $\mathcal{A}$-bidule de Hopf $\Lambda\Gamma$ est isomorphe $\mathcal{A} \otimes \Lambda\Gamma^{\mathrm{L}}$. La drivation $d : \Lambda\Gamma \to \Lambda\Gamma$ qui munie $\Lambda\Gamma$ de sa structure d'algbre diœrentielle est obtenue en tendant $\Lambda\Gamma$ le calcul diœrentiel $d : \mathcal{A} \to \Gamma$. Comme l'explique S. L. Woronowicz, cette diœrentielle extrieure est l'analogue quantique de la diœrentielle de de Rham. Par la suite, nous noterons $\mathrm{H}_{\mathit{diff}}(d)$ la cohomologie qui lui correspond.

### 2.3.2 Algbre de Lie quantique associe  un calcul diœrentiel

Soit $d : \mathcal{A} \to \Gamma$ un calcul diœrentiel et soient $\sigma^t : \Gamma^{\mathrm{L}} \otimes \Gamma^{\mathrm{L}} \to \Gamma^{\mathrm{L}} \otimes \Gamma^{\mathrm{L}}$, $C^t : \Gamma^{\mathrm{L}} \to \Gamma^{\mathrm{L}} \otimes \Gamma^{\mathrm{L}}$ les applications dønies par

$$\sigma^t(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = \gamma_2^{(0)} \otimes \gamma_1 \cdot \gamma_2^{(1)}, \tag{2.35}$$

$$C^t(\gamma) = \gamma^{(0)} \otimes d^{\mathrm{L}}(\gamma^{(1)}). \tag{2.36}$$

Proposition 1

1. L'espace vectoriel $T$ des formes linaires sur $\Gamma^{\mathrm{L}}$ muni des deux applications linaires $\sigma : T \otimes T \to T \otimes T$ et $C : T \otimes T \to T$ obtenues par transposition des applications $\sigma^t$ et $C^t$ est une algbre de Lie quantique.

2. Tout $\mathcal{A}$-comodule  droite $(V, \delta_{\mathrm{R}})$ est muni d'une structure de comodule sur $T$ par l'application $(\mathrm{id} \otimes d^{\mathrm{L}})\delta_{\mathrm{R}}$. En particulier, la diœrentielle $d$ vue en tant qu'application de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A} \otimes T^*$ munit $\mathcal{A}$ d'une structure de comodule sur $T$.

3. La cohomologie de l'algbre de Lie quantique $T$  valeurs dans le comodule $\mathcal{A}$ est celle dønie par la diœrentielle extrieure de S. L. Woronowicz.

Preuve :
1) Il s'agit de voir que les applications $\sigma^t$ et $C^t$ vriøent les relations (2.16)˘(2.19). Comme tout lment de $\Gamma$ s'crit comme une somme $\sum a_k d(b_k)$, il est clair que tout lment de $\Gamma^{\mathrm{L}}$ est de la forme $d^{\mathrm{L}}(a)$. Or, en utilisant les formules (2.33) et (2.34), nous voyons que l'image d'un tel lment par $C^t$ est contenue dans $\mathrm{im}(\mathrm{id} - \sigma^t)$, et plus prcisment que

$$\begin{aligned}
C^t(d^{\mathrm{L}}(a)) &= d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(S(a^{(1)})a^{(3)}) \\
&= d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(S(a^{(1)}))a^{(3)} + d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}) \\
&= -d^{\mathrm{L}}(a^{(3)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}S(a^{(2)}))a^{(4)} + d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(S(a^{(1)}))a^{(3)} + d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}) \\
&= -d^{\mathrm{L}}(a^{(3)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(1)})S(a^{(2)})a^{(4)} + d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}) \\
&= (\mathrm{id} - \sigma^t)(d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(2)})).
\end{aligned}$$

La formule (2.16) est donc vriøe. Quant aux formules (2.15)˘(2.19), elles rsultent toutes des formules (2.32), (2.33), (2.34).
2) C'est vident puisque nous savons que $C^t(d^{\mathrm{L}}(a))$ est gal  $(\mathrm{id} - \sigma^t)(d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}))$.
3) Par construction, la diœrentielle extrieure $d^n : \Lambda^n\Gamma \to \Lambda^{n+1}\Gamma$ est une application qui, vue comme application de $\mathcal{A} \otimes \Lambda^n\Gamma^{\mathrm{L}}$ sur $\mathcal{A} \otimes \Lambda^{n+1}\Gamma^{\mathrm{L}}$, vriøe $d^n = d \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes c^n$, o $c^n$ est la restriction de $d^n : \Lambda^n\Gamma \to \Lambda^{n+1}\Gamma$ aux convariants  gauche $\Lambda^n\Gamma^{\mathrm{L}}$. Aussi, nous aurons øni si nous montrons que les deux diagrammes ci-dessous sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \Lambda^n\Gamma^{\mathrm{L}} \arrow[r, "d\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes A_n", "\wr"'] & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{n+1}\Gamma^{\mathrm{L}} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes A_{n+1}"', "\wr"] \\
\mathcal{A} \otimes \mathrm{im}\, A_n \arrow[r, "B^n"'] & \mathcal{A} \otimes \mathrm{im}\, A_{n+1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda^n\Gamma^{\mathrm{L}} \arrow[r, "c^n"] \arrow[d, "A_n", "\wr"'] & \Lambda^{n+1}\Gamma^{\mathrm{L}} \arrow[d, "A_{n+1}"', "\wr"] \\
\mathrm{im}\, A_n \arrow[r, "C^n"'] & \mathrm{im}\, A_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Par dønition de la structure de comodule mise sur $\mathcal{A}$, le premier diagramme commute lorsque $n$ est nul. Ensuite, en utilisant la proprit (2.20) de $A_n$, il est clair que ceci est encore vrai pour tous les autres $n$. Le second diagramme commute lorsque $n$ est gal 1 puisque $C^1(d^{\mathrm{L}}(a)) = -C^t(d^{\mathrm{L}}(a)) = -A_2(d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(2)})) = A_2(d(S(a^{(1)}) \otimes d(a^{(2)})) = A_2 d(d^{\mathrm{L}}(a))$. Ensuite, en raisonnant par rcurrence et en utilisant que $c^n = d \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes c^{n-1}$, nous obtenons tous les autres cas :

$$\begin{aligned}
C^n A_n &= C^n A_{n,1}(\mathrm{id} \otimes A_{n-1}) \\
&= \alpha^n C_1^t(\mathrm{id} \otimes A_{n-1}) - A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes C^{n-1})(\mathrm{id} \otimes A_{n-1}) \\
&= \alpha^n(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1})C_1^t - A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes C^{n-1}A_{n-1}) \\
&= -\alpha^n(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1})(A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})(d \otimes \mathrm{id}) - A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes A_n)(\mathrm{id} \otimes c^{n-1}) \\
&= -\alpha^n(A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1})(d \otimes \mathrm{id}) - A_{n+1}(\mathrm{id} \otimes c^{n-1}) \\
&= A_{n+1,1}(\mathrm{id} \otimes A_{n,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{n-1})(d \otimes \mathrm{id}) - A_{n+1}(\mathrm{id} \otimes c^{n-1}) \\
&= A_{n+1}\left[(d \otimes \mathrm{id}) - (\mathrm{id} \otimes c^{n-1})\right] \\
&= A_{n+1}c^n.
\end{aligned}$$

□

Dans la dmonstration de la proposition prcdente, nous avons utilis que $C^1(d^{\mathrm{L}}(a))$ tait gal $-A_2(d^{\mathrm{L}}(a^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}))$. En fait, nous avons un rsultat plus gnral.

Lemme 6
Pour tout entier $r$, nous avons

$$\begin{aligned}
&C^r A_r \left(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}(-1)^i A_{r+1}\left(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(2)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)\right).
\end{aligned}$$

Preuve :
Raisonnons par rcurrence sur $r$. Nous avons dj vu que cette formule est vraie au cran 1. Si elle est vraie au cran $r-1$, nous avons

$$\begin{aligned}
&C^r A_r \left(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)\right) \\
&\quad= C^r A_{r,1}(\mathrm{id} \otimes A_{r-1})(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)) \\
&\quad= \left[\alpha^r C_1^t - A_{r+1,1}(\mathrm{id} \otimes C^{r-1})\right](\mathrm{id} \otimes A_{r-1})(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)) \\
&\quad= \alpha^r(A_2 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{r-1})(d^{\mathrm{L}}(a_1^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_1^{(2)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)) \\
&\qquad -\textstyle\sum_{i=1}^{r-1}(-1)^i A_{r+1,1}(\mathrm{id} \otimes A_{r+1})(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_{i+1}^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_{i+2}^{(2)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)) \\
&\quad= -A_{r+1,1}(\mathrm{id} \otimes A_{r,1})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes A_{r-1})(d^{\mathrm{L}}(a_1^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_1^{(2)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)) \\
&\qquad +\textstyle\sum_{i=2}^{r}(-1)^i A_{r+1}(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(2)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)) \\
&\quad= \textstyle\sum_{i=1}^{r}(-1)^i A_{r+1}(d^{\mathrm{L}}(a_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(2)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_r)).
\end{aligned}$$

Celle-ci est donc vriøe au cran $r$. □

## 2.4 Thorie de van Est

Dans les parties prcdentes, nous avons vu que les algbres de Lie quantiques se comportaient vis--vis des calculs diœrentiels sur les groupes quantiques comme les algbres de Lie vis--vis de la diœrentielle de de Rham. Il est donc naturel de se demander si le thorme de van Est sur les groupes de Lie, qui sous certaines hypothses sur la diœrentielle de de Rham permet de comparer la cohomologie de l'algbre de Lie associe un groupe de Lie avec la cohomologie de ce groupe, admet un analogue quantique.

Dans le cas quantique, nous savons que le groupe de Lie est remplac par une algbre de Hopf $\mathcal{A}$ qui doit tre vue comme l'algbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur celui-ci. La cohomologie des formes diœrentielles de de Rham est alors remplace par la cohomologie dønie par un calcul diœrentiel sur $\mathcal{A}$ et la cohomologie du groupe par la cohomologie de la cogbre $\mathcal{A}$. Dans les parties prcdentes, nous avons vu comment associer une algbre de Lie quantique ce calcul diœrentiel et nous avons døni une notion cohomologique pour celle-ci. Nous verrons que, sous ces conditions, le thorme de van Est reste valable.

Aprs avoir introduit les notations, nous commencerons par rappeler quelques faits sur la cohomologie des cogbres. Ensuite, nous construirons un bicomplexe qui nous permettra ønalement d'noncer et de dmontrer l'analogue quantique du thorme de van Est.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une algbre de Hopf, $V$ un $\mathcal{A}$-comodule et $d : \mathcal{A} \to \Gamma$ un calcul diœrentiel sur $\mathcal{A}$. Notons $T = (\Gamma^{\mathrm{L}})^*$ l'algbre de Lie quantique associe ce calcul diœrentiel et $d^{\mathrm{L}} : \mathcal{A} \to \Gamma^{\mathrm{L}}$ l'application $a \mapsto S(a^{(1)})d(a^{(2)})$. Munissons $V$ et $\mathcal{A}^{\otimes s} \otimes V$ des structures de $T$-comodules issues des structures de $\mathcal{A}$-comodules droite ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\delta_{\mathrm{R}}(v) = v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)}),\\
&\delta_{\mathrm{R}}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s-1} \otimes a_s^{(1)} \otimes v^{(0)} \otimes a_s^{(2)} S(v^{(-1)}).
\end{aligned}$$

Intressons-nous maintenant la cohomologie de la cogbre $\mathcal{A}$. Pour cela, notons $d_0^n : \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A}^{\otimes n+1}$, $d^n : \mathcal{A}^{\otimes n} \otimes V \to \mathcal{A}^{\otimes n+1} \otimes V$ les applications respectivement dønies par

$$d_0^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i^{(1)} \otimes a_i^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_n, \quad (2.37)$$

$$d^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes v) = d_0^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes v + (-1)^{n+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)}. \quad (2.38)$$

D'aprs les travaux de P. Cartier (cf. [5]), les applications $d_0^n$ et $d^n$ dønissent deux complexes. Le premier complexe est acyclique. Quant au second, il n'est en gnral pas acyclique et dønit la cohomologie $\mathrm{H}_{cog}(\mathcal{A})$ de la cogbre $\mathcal{A}$.

### 2.4.1 Construction du bicomplexe $(F, \Delta)$

Soit $F$ l'espace bigradu admettant ${}^sF^r = \mathcal{A}^{\otimes s} \otimes V \otimes \operatorname{im} A_r$ pour espace de degr $(s, r)$. Notons $F^r$, ${}^sF$ les espaces lignes et colonnes correspondant et $A^r$, ${}^sA$ les øltrations qui en rsultent :

$$\begin{aligned}
F^r &= \oplus_s \mathcal{A}^{\otimes s} \otimes V \otimes \operatorname{im} A_r, & A^r &= \oplus_{p \geq r} \oplus_s \mathcal{A}^{\otimes s} \otimes V \otimes \operatorname{im} A_p,\\
{}^sF &= \oplus_r \mathcal{A}^{\otimes s} \otimes V \otimes \operatorname{im} A_r, & {}^sA &= \oplus_{q \geq s} \oplus_r \mathcal{A}^{\otimes q} \otimes V \otimes \operatorname{im} A_r.
\end{aligned}$$

Soit $d' : F \to F$ la diœrentielle de degr $(0, 1)$ qui concide sur chaque espace colonne ${}^sF$ avec la diœrentielle qui dønit la cohomologie de $T$ valeurs dans le $T$-comodule $\mathcal{A}^{\otimes s} \otimes V$.

Soit $\delta' : F \to F$ la diœrentielle de degr $(1,0)$ qui concide sur l'espace ligne $F^0$ avec la diœrentielle $d$ dønie par (2.38) et qui concide sur les autres espaces ligne $F^r$ $(r \neq 0)$ avec $d_0 \otimes \mathrm{id}_{V\otimes \mathrm{im}\, A_r}$, o $d_0$ est dønie par (2.37).

Lemme 7
Les diœrentielles $d'$ et $\delta'$ commutent.

Preuve :
Comme la structure de comodule de $\mathcal{A}^{\otimes s}\otimes V$ utilise uniquement la composante ønale $\mathcal{A}\otimes V$, $d'$ agit principalement sur $\mathcal{A}\otimes V\otimes \mathrm{im}\, A_1$. Comme il en est de mme pour $\delta'$, nous voyons que si nous vriøons que $d'$ et $\delta'$ commutent sur ${}^0F^0$, ${}^1F^0$, ${}^0F^1$, ${}^1F^1$, alors des calculs similaires permettront de montrer que $d'$ et $\delta'$ commutent sur n'importe quelle composante ${}^sF^r$. En utilisant que $V$ est un comodule sur $\mathcal{A}$ et que $d^{\mathrm{L}}(1)$ est nul, nous voyons que pour tout lment $v$ de $V = {}^0F^0$:

$$\begin{aligned}
&(d'\delta' - \delta' d')(v)\\
&\quad = d'(1\otimes v - v^{(-1)}\otimes v^{(0)}) - \delta'(v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(Sv^{(-1)}))\\
&\quad = 1\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(Sv^{(-1)}) + v^{(-3)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(v^{(-2)}Sv^{(-1)}) - 1\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(Sv^{(-1)})\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que les applications $d'$ et $\delta'$ commutent sur $V = {}^0F^0$. De mme, en utilisant que $\mathcal{A}$ est une cogbre, que $V$ est un comodule sur $\mathcal{A}$ et que $d^{\mathrm{L}}(1)$ est nul, nous voyons que pour $a\otimes v \in {}^1F^0$, $v\otimes t \in {}^0F^1$ et $a\otimes v\otimes t \in {}^1F^1$:

$$\begin{aligned}
&(d'\delta' - \delta' d')(a\otimes v)\\
&\quad = d'(1\otimes a\otimes v - a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v + a\otimes v^{(-1)}\otimes v^{(0)}) - \delta'(a^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}Sv^{(-1)}))\\
&\quad = 1\otimes a^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}Sv^{(-1)}) - a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(a^{(3)}Sv^{(-1)})\\
&\qquad + a\otimes v^{(-3)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(v^{(-2)}Sv^{(-1)}) - 1\otimes a^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}Sv^{(-1)})\\
&\qquad + a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(a^{(3)}Sv^{(-1)})\\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(d'\delta' - \delta' d')(v\otimes t)\\
&\quad = d'(1\otimes v\otimes t) - \delta'(v\otimes C^1(t) + v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(Sv^{(-1)}))\\
&\quad = 1\otimes v\otimes C^1(t) + 1\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(Sv^{(-1)}) - 1\otimes v\otimes C^1(t) - 1\otimes v^{(0)}\otimes A_{1,1}d^{\mathrm{L}}(Sv^{(-1)})\\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(d'\delta' - \delta' d')(a\otimes v\otimes t)\\
&\quad = d'(1\otimes a\otimes v\otimes t - a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v\otimes t)\\
&\qquad - \delta'(a\otimes v\otimes C^1(t) + a^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{2,1}(d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}Sv^{(-1)})\otimes t))\\
&\quad = 1\otimes a\otimes v\otimes C^1(t) + 1\otimes a^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{2,1}(d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}Sv^{(-1)})\otimes t) - a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v\otimes C^1(t)\\
&\qquad - a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{2,1}(d^{\mathrm{L}}(a^{(3)}Sv^{(-1)})) - 1\otimes a\otimes v\otimes C^1(t) + a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v\otimes C^1(t)\\
&\qquad - 1\otimes a^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{2,1}(d^{\mathrm{L}}(a^{(2)}Sv^{(-1)})\otimes t)) + a^{(1)}\otimes a^{(2)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{2,1}(d^{\mathrm{L}}(a^{(3)}Sv^{(-1)})\otimes t))\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $d'$ et $\delta'$ commutent sur ${}^1F^0$, ${}^0F^1$, ${}^1F^1$. $\square$

A partir des diœrentielles $d'$ et $\delta'$, dønissons l'application $\Delta : F \to F$ qui concide sur chaque espace colonne ${}^sF$ avec l'application $(-1)^s d' + \delta'$.

Lemme 8

1. $(F, \Delta)$ est un bicomplexe;

2. le sous-complexe $(A^1, \Delta)$ est acyclique.

Preuve :
Les applications $d'$ et $\delta'$ tant deux diœrentielles qui commutent, $(F, \Delta)$ est un complexe. Reste  montrer que $(A^1, \Delta)$ est acyclique. Prenons un lment $g_0$ de $A^1$, de degr total $k$, vriøant $\Delta(g_0) = 0$ et montrons qu'il existe un lment $g_{-1}$ de $A^1$, de degr $k-1$, tel que

$$\Delta(g_{-1}) = g_0.$$

Notons ${}^sg_0^{k-s}$ la composante de degr $(s, k-s)$ de $g_0$ et $i(g_0)$ le plus grand $i$ tel que ${}^ig_0^{k-i}$ soit non nul. Puisque $\Delta(g_0)$ a t suppos nul, nous avons

$$d_0^{i(g_0)}({}^{i(g_0)}g_0^{k-i(g_0)}) = 0\ .$$

Mais, comme le complexe døni par la diœrentielle $d_0$ est acyclique, il existe un lment ${}^{i(g_0)-1}h^{k-i(g_0)}$ de ${}^1A$, de degr total $k-1$, tel que

$${}^{i(g_0)}g_0^{k-i(g_0)} = d_0^{i(g_0)-1}({}^{i(g_0)-1}h^{k-i(g_0)}).$$

La diœrentielle $\Delta$ s'annule sur $g_1 = g_0 - \Delta({}^{i(g_0)-1}h^{k-i(g_0)})$ qui est un lment de ${}^1A$, de degr $k$, et tel que $i(g_1) < i(g_0)$. En ritrant ce procd, nous trouvons un lment $g_{-1}$ de ${}^1A$, de degr $k-1$, tel que $g_n = g_0 - \Delta(g_{-1})$ soit un lment de ${}^1A$, de degr $k$, et avec $i(g_n)$ au plus gal  0. Alors $\Delta(g_n)$ est gal  $1 \otimes g_n$ modu lo des lments de ${}^0F$. Comme $\Delta(g_n)$ est nul, nous avons $g_n = 0$ et $g_0 = \Delta(g_{-1})$. $\square$

### 2.4.2 Le thorme de van Est

Dans cette partie, nous allons prouver le thorme ci-dessous.

Thorme 5
Soit $n$ un entier. Si $\mathrm{H}^0({}^1F) \cap (\ker \varepsilon \otimes V) = \mathrm{H}^1({}^1F) = \cdots = \mathrm{H}^n({}^1F) = 0$, alors :

1. $\mathrm{H}^i(F^0)$ et $\mathrm{H}^i({}^0F)$ sont isomorphes pour $i = 0, \ldots, n$;

2. $\mathrm{H}^{n+1}(F^0)$ s'injecte dans $\mathrm{H}^{n+1}({}^0F)$.

Remarquons que lorsque $V$ est le comodule trivial, le thorme ci-dessus devient :

Corollaire 1
Soit $n$ un entier. Si $\mathrm{H}^0_{diff}(d) \cap (\ker \varepsilon) = \mathrm{H}^1_{diff}(d) = \cdots = \mathrm{H}^n_{diff}(d) = 0$, alors :

1. $\mathrm{H}^i_{cog}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{H}^i_{lie}(T)$ sont isomorphes pour $i = 0, \ldots, n$;

2. $\mathrm{H}^{n+1}_{cog}(\mathcal{A})$ s'injecte dans $\mathrm{H}^{n+1}_{lie}(T)$.

Le morphisme $\tau$

Soit $\tau : F^0 \longrightarrow F$ l'application obtenue en sommant toutes les applications $\tau_r : F^0 \longrightarrow F^r$ avec

$$\tau_r(a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v) = \begin{cases} a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v & \text{si } r = 0, \\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s-r} \otimes v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1}Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s Sv^{(-r)})) & \text{si } 1 \leq r \leq s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2
L'application $\tau$ est un morphisme de complexes injectif de $(F^0, d)$ dans $(F, \Delta)$.

Preuve :
Comme $\tau(a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v)$ est gal  $a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v$ modulo des lments de $A^1$, il est clair que $\tau$ est injectif. Ensuite, pour voir que $\tau$ est un morphisme de complexes, il suŒt de vriøer que sur chaque espace ${}^sF^0$ :

$$\tau_r d = (-1)^{s-r+1} d' \tau_{r-1} + \delta' \tau_r. \tag{2.39}$$

Si $r \leq -1$ ou $r \geq s+2$, la formule (2.39) est vraie puisque $\tau_r$ et $\tau_{r-1}$ sont nuls. Pour $r$ nul, $\tau_{-1}$ est nul, $\tau_0$ est l'identit, et $\delta'$ concide avec $d$ sur $F^0$. La formule (2.39) est donc vriøe dans ce cas. Pour $r = s+1$, la restriction de $\tau_r$  ${}^sF^0$ est nulle. De plus, pour tout lment $a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v$ de ${}^sF^0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\tau_r d(a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v) \\
&\quad = \tau_r(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v) + \textstyle\sum_{i=1}^{s} (-1)^i \tau_r(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i^{(1)} \otimes a_i^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v) + (-1)^{s+1} \tau_r(a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)}) \\
&\quad = v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(S(v^{(-1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_1 S(v^{(-2)})) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s S(v^{(-r)})) \\
&\qquad + \textstyle\sum_{i=1}^{s} (-1)^i v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_1 Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(1)} Sv^{(-i)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(2)} Sv^{(-i-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s Sv^{(-r)})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{s-r+1} d' \tau_{r-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v) \\
&\quad = d'(v^{(0)} \otimes A_{r-1}(d^{\mathrm{L}}(a_1 Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s v^{(-r+1)})) \\
&\quad = v^{(0)} \otimes C^{r-1} A_{r-1}(d^{\mathrm{L}}(a_1 Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s v^{(-r+1)}) + v^{(0)} \otimes A_{r,1}(\mathrm{id} \otimes A_{r-1})(d^{\mathrm{L}}(Sv^{(-1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_1 Sv^{(-2)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s Sv^{(-r)})) \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=1}^{s} (-1)^i v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_1 Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(1)} Sv^{(-i)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(2)} Sv^{(-i-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s Sv^{(-r)})) \\
&\qquad + v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(S(v^{(-1)}) \otimes d^{\mathrm{L}}(a_1 S(v^{(-2)})) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s S(v^{(-r)})).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la formule (2.39) est vriøe lorsque $r = s+1$. Enøn, si $1 \leq r \leq s$, nous voyons que pour tout lment $a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v$ de ${}^sF^0$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\delta' \tau_r(a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes v) \\
&\quad = \delta'(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s-r} \otimes v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1} Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s Sv^{(-r)}))) \\
&\quad = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{s-r} \otimes v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1} Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s Sv^{(-r)})) \\
&\qquad + \textstyle\sum_{i \leq s-r} (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i^{(1)} \otimes a_i^{(2)} \otimes \cdots \otimes a_{s-r} \otimes v^{(0)} A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1} Sv^{(-1)}) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(a_s Sv^{(-r)})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tau_r d(a_1\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v)\\
&= \tau_r(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v)+\textstyle\sum_{i=1}^{s}(-1)^i\tau_r(a_1\otimes\cdots\otimes a_i^{(1)}\otimes a_i^{(2)}\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v)+(-1)^{s+1}\tau_r(a_1\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v^{(-1)}\otimes v^{(0)})\\
&= 1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r}\otimes v^{(0)}\otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1}Sv^{(-1)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r)}))\\
&\quad+\sum_{i\le s-r}(-1)^i a_1\otimes\cdots\otimes a_i^{(1)}\otimes a_i^{(2)}\otimes\cdots\otimes a_{s-r}\otimes v^{(0)}A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1}Sv^{(-1)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r)}))\\
&\quad+(-1)^{s-r+1}a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r+1}^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1}^{(2)}Sv^{(-1)})\otimes d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+2}Sv^{(-2)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r)}))\\
&\quad+\sum_{i\ge s-r+2}(-1)^i a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r+1}\otimes v^0\otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+2}Sv^{(-1)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(1)}Sv^{(-i+s-r+1)})\otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(2)}Sv^{(-i+s-r)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r)})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{s-r+1}d'\tau_{r-1}(a_1\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v)\\
&= (-1)^{s-r+1}d'(a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r+1}\otimes v^{(0)}A_{r-1}(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+2}Sv^{(-1)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r+1)})))\\
&= (-1)^{s-r+1}a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r+1}\otimes v^{(0)}\otimes C^{r-1}A_{r-1}(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+2}Sv^{(-1)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r+1)}))\\
&\quad+(-1)^{s-r+1}a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r}\otimes a_{s-r+1}^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_{r,1}(\mathrm{id}\otimes A_{r-1})(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1}^{(2)}Sv^{(-1)})\otimes d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+2}Sv^{(-2)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r)}))\\
&= \sum_{i\ge s-r+2}(-1)^i a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r+1}\otimes v^0\otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+2}Sv^{(-1)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(1)}Sv^{(-i+s-r+1)})\otimes d^{\mathrm{L}}(a_i^{(2)}Sv^{(-i+s-r)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r)}))\\
&\quad+(-1)^{s-r+1}a_1\otimes\cdots\otimes a_{s-r+1}^{(1)}\otimes v^{(0)}\otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+1}^{(2)}Sv^{(-1)})\otimes d^{\mathrm{L}}(a_{s-r+2}Sv^{(-2)})\otimes\cdots\otimes d^{\mathrm{L}}(a_sSv^{(-r)})).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\tau_r d(a_1\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v)=(-1)^{s-r+1}d'\tau_{r-1}(a_1\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v)+\delta'\tau_r(a_1\otimes\cdots\otimes a_s\otimes v).$$

Ce qui prouve que la formule (2.39) est vriøe lorsque $1\le r\le s$. □

Proposition 3

1. La projection $\sigma_0 : F \to F^0$ est un quasi-isomorphisme;
2. l'application $\tau : F^0 \to F$ est un quasi-isomorphisme;
3. les applications $\sigma_0$ et $\tau$ induisent en cohomologie des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Preuve :
Grce la suite exacte de complexes $0\to A^1\to F\to F^0\to 0$, o $A^1$, $F$ et $F^0$ admettent respectivement $\Delta$, $\Delta$ et $d$ pour diœrentielle, nous obtenons le triangle exact

$$\begin{tikzcd}
H(F) \arrow[rr] & & H(F^0) \arrow[dl] \\
& H(A^1) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathrm{H}(A^1)$ est nul, la premire assertion est dmontre. Ensuite, en utilisant que $\sigma_0\tau=\mathrm{id}$, nous obtenons les autres rsultats annoncs. □

Les morphismes ${}_0\sigma$ et ${}_0\tau$

Soit ${}_0\sigma$ la projection canonique de $F$ sur ${}^0F$.

Lemme 9
L'application ${}_0\sigma$ est un morphisme de $(F, \Delta)$ sur $({}^0F, d')$ et la restriction de ${}_0\sigma$ $\tau F^0$ est surjective.

Preuve :
Il est clair que ${}_0\sigma$ est un morphisme de complexes. Montrons que sa restriction $\tau F^0$ est surjective. Tout lment de ${}^0F$ s'crit comme une somme de termes de la forme $v \otimes A_r(t_1 \otimes \cdots \otimes t_r)$. Par dønition du calcul diœrentiel sur les groupes quantiques, nous pouvons crire $t_i$ sous la forme $\sum a_k^i d(b_k^i)$. Ensuite, en projetant sur l'espace des convariants gauche, nous voyons que $t_i = d^{\mathrm{L}}(b_i)$ avec $b_i = \sum \varepsilon(a_k^i) b_k^i$. Aussi :

$$
\begin{aligned}
& v \otimes A_r(t_1 \otimes \cdots \otimes t_r) \\
&\quad = \quad v \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}(b_1) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}(b_r)) \\
&\quad = \quad v^{(0)} \otimes A_r(d^{\mathrm{L}}((b_1 v^{(-2r)}) S(v^{(-1)})) \otimes \cdots \otimes d^{\mathrm{L}}((b_r v^{(-r-1)}) S(v^{(-r)}))) \\
&\quad = \quad \tau_r(b_1 v^{(-r)} \otimes \cdots \otimes b_r v^{(-1)} \otimes v^{(0)}) \\
&\quad = \quad {}_0\sigma\tau(b_1 v^{(-r)} \otimes \cdots \otimes b_r v^{(-1)} \otimes v^{(0)}).
\end{aligned}
$$

□

Soit ${}_0\tau$ l'application de $F^0 \to {}^0F$ obtenue en composant ${}_0\sigma$ et $\tau$. Par dønition, nous avons

$$
{}_0\tau\big|_{{}^sF^0} = \tau_s. \tag{2.40}
$$

Lemme 10

1. Le noyau $Z$ de ${}_0\tau$ est stable par $d$;

2. la suite suivante est exacte :

$$
\cdots \to \mathrm{H}^i(Z) \to \mathrm{H}^i(F^0) \to \mathrm{H}^i({}^0F) \to \mathrm{H}^{i+1}(Z) \to \mathrm{H}^{i+1}(F^0) \to \cdots . \tag{2.41}
$$

Preuve :
1) Soit $z$ un lment de $Z$. En notant $z_s$ la composante de degr $(s, 0)$ de $z$, nous avons $\tau_s z_s = 0$, puis :

$$
{}_0\tau d(z) = \sum {}_0\tau d(z_s) = \sum \tau_{s+1} d(z_s) = \sum d'\tau_s z_s + \delta'\tau_{s+1} z_s = 0.
$$

2) En utilisant que la suite $0 \to Z \to F^0 \to F^0/Z \to 0$ est exacte et que ${}_0\sigma$ induit un isomorphisme de $H(F^0/Z)$ sur $H({}^0F)$, nous obtenons la suite exacte voulue. □

Lemme 11
L'application $\tau$ induit un isomorphisme entre $\mathrm{H}(Z)$ et $\mathrm{H}({}^1A)$.

Preuve :
Puisque l'application ${}_0\sigma : \tau F^0 \to {}^0F$ est surjective, nous pouvons crire :

$$F = \tau F^0 + {}^1A.$$

Nous avons donc la suite exacte de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau F^0 \cap {}^1A & \longrightarrow & \tau F^0 \oplus {}^1A & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ & & u & \longmapsto & (-u, u) & & & & \\ & & & & (v, w) & \longmapsto & v + w & & \end{array}$$

puis le triangle exact

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}(\tau F^0) \oplus \mathrm{H}({}^1A) \arrow[rr, "\beta"] & & \mathrm{H}(F) \arrow[dl, "\gamma"] \\ & \mathrm{H}(\tau F^0 \cap {}^1A) \arrow[ul, "\alpha"] & \end{tikzcd}$$

avec $\alpha(u) = (-\eta_1 u, \eta_2 u)$, $\beta(v, w) = \zeta_1 v + \zeta_2 w$ et $\eta_i$, $\zeta_i$ induits par les injections. Comme $\tau$ est un quasi-isomorphisme, l'application $\zeta_1 : \mathrm{H}(\tau F^0) \to \mathrm{H}(F)$ est un isomorphisme. Ce qui implique que $\beta$ est surjective, que $\gamma$ est nulle et enøn que $\alpha$ est injective. Donnons nous un lment $u$ du noyau de $\eta_2$. Cela signiøe qu'il existe un lment $v$ de ${}^1A$ tel que $u = \Delta(v)$. Mais, comme $\tau$ est un quasi-isomorphisme, nous savons que $v$ est un lment de la forme $\tau(w) + \Delta(x)$ avec $w \in \tau F^0$ et $x \in F$. D'o $u = \Delta(\tau w)$. Ce qui montre que $u$ est contenu dans le noyau de $\eta_1$. Comme $u$ est aussi un lment du noyau de $\eta_2$, $u$ est un lment du noyau de $\alpha$. Puisque $\alpha$ est injective, $u$ est nul et l'application $\eta_2$ est injective. Maintenant, soit $u$ un lment de $\mathrm{H}({}^1A)$. Comme $\zeta_1$ est surjective, il existe un lment $v$ de $\mathrm{H}(\tau F^0)$ tel que $\alpha(u) = \alpha(v)$. Alors $u - v$ appartient au noyau de $\alpha$ et $u - v = \beta(w)$ pour un certain $w$ de $\mathrm{H}(\tau F^0 \cap {}^1A)$. En appliquant la projection de $\mathrm{H}(\tau F^0) \oplus \mathrm{H}({}^1A)$ sur $\mathrm{H}({}^1A)$, nous obtenons $u = \eta_2(w)$. Ce qui montre que $\eta_2$ est surjective et dønit un isomorphisme

$$\eta_2 : \mathrm{H}(\tau F^0 \cap {}^1A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}({}^1A).$$

Comme ${}_0\sigma$ est la projection de $F$ sur ${}^0F$, un lment $\tau u$ avec $u \in F^0$ appartient ${}^1A$ si et seulement si $0 = {}_0\sigma\tau u = {}_0\tau u$. Puisque $Z$ est le noyau de ${}_0\tau$, cela prouve que $\tau Z$ est gal $\tau F^0 \cap {}^1A$, puis que

$$\eta_2 : \mathrm{H}(\tau Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}({}^1A).$$

D'autre part, comme $\tau$ est injectif, $\tau$ induit un isomorphisme entre $\mathrm{H}(Z)$ et $\mathrm{H}(\tau Z)$. Aussi, comme l'application $\eta_2$ induite par l'injection est un isomorphisme de $\mathrm{H}(\tau Z)$ sur $\mathrm{H}({}^1A)$, nous voyons que $\tau$ induit en fait un isomorphisme de $\mathrm{H}(Z)$ sur $\mathrm{H}({}^1A)$. $\Box$

Preuve du thorme de van Est

Grce au lemme 11 et la suite exacte (2.41), il suŒt de montrer que les $n + 2$ premiers groupes de cohomologie de $({}^1A, \Delta)$ sont nuls. Soit $f$ un lment de ${}^1A$, de degr $k \leq n + 1$,

et tel que $\Delta(f) = 0$. Il s'agit de voir qu'il existe un lment $g$ de ${}^1A$ tel que $f = \Delta(g)$. Notons ${}^pf^q$ la composante de degr $(p,q)$ de $f$ et $s \geq 1$ le plus petit indice $j$ pour lequel la composante ${}^jf^{k-j}$ est non nulle. Distinguons deux cas.
i) Si $k-s$ est nul.
Dans ce cas, $f$ est un lment de ${}^kF^0$ et peut donc s'crire sous la forme $\sum a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes v$. Comme $f$ est un lment de ${}^kF^0$ qui est un cycle pour $\Delta$, $f$ est aussi un cycle pour $\delta'$. En appliquant $\mathrm{id}_{\mathcal{A}^{\otimes k-1}} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}_V \quad \delta' f$, nous obtenons alors que $\sum \varepsilon(a_k) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes v$ est contenu dans le noyau de $d_0 \otimes \mathrm{id}_V$. Mais comme le complexe døni par $d_0$ est acyclique, nous avons un lment $\sum b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-2} \otimes v$ tel que

$$\sum \varepsilon(a_k) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes v = (d_0 \otimes \mathrm{id}_V) \left( \sum b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-2} \otimes v \right).$$

Nous avons alors aussi :

$$\sum \varepsilon(a_k) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)} = \delta' \left( \sum b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-2} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)} \right).$$

Puis, comme $d'(\sum b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-2} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)})$ est nul, nous avons en fait :

$$\sum \varepsilon(a_k) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)} = \Delta \left( \sum b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-2} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)} \right).$$

Mais comme l'intersection $\mathrm{H}^0({}^1F) \cap \ker \varepsilon \otimes V$ est nulle et que $\sum a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes v - \sum \varepsilon(a_k) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$ appartient $\mathcal{A}^{\otimes k-1} \otimes (Z^0({}^1F) \cap \ker \varepsilon)$, cela signiøe que

$$\begin{aligned} \sum a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes v &= \sum \varepsilon(a_k) a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)} \\ &= \Delta \left( \sum b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k-2} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)} \right). \end{aligned}$$

ii) Si $k-s$ est non nul.
Comme $f$ appartient au noyau de $\Delta$, il est clair que ${}^sf^{k-s}$ appartient au noyau de $d'$. Mais, comme $\mathrm{H}^1({}^1F) = \cdots = \mathrm{H}^n({}^1F) = 0$, nous avons $\mathrm{H}^1({}^sF) = \cdots = \mathrm{H}^n({}^sF) = 0$ et il existe ${}^sg^{k-s-1}$ tel que ${}^sf^{k-s} = d'({}^sg^{k-s-1})$. L'lment $f - (-1)^s \Delta({}^sg^{k-s-1})$ est  nouveau un lment de ${}^1A$, contenu dans le noyau de $\Delta$, de degr $k$, mais avec un $s$ plus grand (et donc un $k-s$ plus petit). Aussi, en ritrant ce procd autant de fois que ncessaire, nous aboutissons au cas o $k-s$ est nul. □

Remarque :
La preuve prcdente montre que les isomorphismes du thorme (5) sont induits par ${}_0\tau$.

# Classiøcation of bicovariant diœerential calculi on quantum groups

## Introduction

Let $\mathrm{G}$ be a semi-simple connected simply-connected complex Lie group, $\mathfrak{g}$ its Lie algebra, $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ the quantized enveloping algebra of $\mathfrak{g}$. $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ is a Hopf algebra. The associated quantum group is an object of non-commutative geometry. According to a point of view due to Woronowicz and developed by Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan [12], one may view the restricted (Hopf) dual $(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})^{*\,\mathrm{res}}$ as the function algebra $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ on this quantum group. In this way, the Peter˘Weyl theorem becomes a deønition: the rational representations of the quantum group are the ønite dimensional representations of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$.

In order to study the diœerential geometry of quantum groups, Woronowicz [33] deøned the notion of bicovariant diœerential calculus. As in the classical case, one needs only to deøne the diœerential of functions at the unity point of the quantum group. If $\varepsilon : \mathcal{A}_q\mathrm{G} \to \mathbb{C}(q)$ is the augmentation map, this amounts to take the residual class of functions belonging to $\ker\varepsilon$ modulo a right ideal $\mathcal{R} \subseteq \ker\varepsilon$. In the classical case, one takes $\mathcal{R} = (\ker\varepsilon)^2$. As for quantum groups, it is more important to preserve the group structure than the inønitesimal structure, and one is led to select ideals $\mathcal{R}$ as above by the requirement of a certain invariance condition. In this article, we solve the classiøcation problem for these ideals $\mathcal{R}$, and we give a picture of what they look like.

We now compare our results with previous ones. Rosso [22] showed how to use the quasi-triangular structure of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ in order to construct left covariant diœerential calculi on the quantum group. Modifying this construction, Juro [17] used the $R$-matrix in the natural representation of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ (and in the dual of it) so as to construct bicovariant diœerential calculi: he obtained particular cases (when $\mathrm{M}$ is the natural $\mathfrak{g}$-module or its dual) of our theorem 2. As regards classiøcation results, Schmdgen and Schler have classiøed the ideals $\mathcal{R}$ as above, but only when $\mathfrak{g}$ is of classical type, and under restrictive assumptions on $\mathcal{R}$. Most of the results in [28, 29] are particular cases of our theorem 1. For instance, the classiøcation given in [28, Theorem 2.1] corresponds (in the wording of our theorem) to the ideals $\mathcal{R}$ constructed (up to a twisting character $\chi : 2\mathrm{X}/2\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$, as explained in the section 3.3.3) from the natural $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module or its dual.

Let us explain our proof and the contents of our article. Our proof relies on the quasi-triangular structure of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$. Since the formalism of $R$-matrices may be justiøed only for ønite dimensional Hopf algebras, we will employ the dual notion of co-quasi-triangular (c.q.t.) Hopf algebra (see [18]): the algebra $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ is a c.q.t. Hopf algebra. We use then a bilinear form on $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, introduced by Reshetikhin and Semenov-Tian-Shansky. As $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ is a factorizable quasi-triangular Hopf algebra (in the terminology of [25]), this pairing is non-degenerate and gives a linear injection $\mathcal{A}_q\mathrm{G} \hookrightarrow \mathrm{U}_q\mathfrak{g} \subseteq (\mathcal{A}_q\mathrm{G})^*$. The image of $\mathcal{R}$ under this map is nearly the annihilator of a $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module. It is then easier to discuss what $\mathcal{R}$ may be. The deønitions and the proofs of these assertions are given in sections 3.1 and 3.2. In section 3.3, we present a contruction of bicovariant diœerential calculi valid for any factorizable c.q.t. Hopf algebra. Finally we link, in the case of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, these constructions with our classiøcation result.

### Notations

- Let $\mathrm{A}$ be a $k$-algebra. If $\mathrm{M}$ is an $\mathrm{A}$-module, its annihilator is noted $\mathrm{ann}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$. If $m \in \mathrm{M}$ and $m^* \in \mathrm{M}^*$ (the $k$-dual of $\mathrm{M}$), we denote by $\theta_{\mathrm{M}}(m, m^*)$ the matrix coeŒcient

$$\begin{array}{rrcl} \theta_{\mathrm{M}}(m,m^*): & \mathrm{A} & \to & k \\ & a & \mapsto & \langle m^*, a\cdot m\rangle \end{array}$$

- For a Hopf algebra $\mathrm{H}$, we will use Sweedler's notation for coproduct ($\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$) and for coaction on comodules. The sum sign will generally be omitted. We will denote the augmentation and the antipode of $\mathrm{H}$ by $\varepsilon$ and $S$ respectively.

- Let $\mathrm{H}$ be a Hopf algebra, and $\mathrm{H}^{*\,\mathrm{res}}$ be the restricted (Hopf) dual of $\mathrm{H}$. A ønite dimensional left $\mathrm{H}$-module $\mathrm{M}$ of $\mathrm{M}^*$) can be viewed as a right $\mathrm{H}^{*\,\mathrm{res}}$-comodule with structure map

$$\begin{array}{rrcl} \delta_{\mathrm{R}}: & \mathrm{M} & \to & \mathrm{M}\otimes \mathrm{H}^{*\,\mathrm{res}} \\ & m & \mapsto & \sum m_i \otimes \theta_{\mathrm{M}}(m, m_i^*) \end{array}$$

  where $(m_i)$ is a basis of $M$ and $(m_i^*)$ is the dual basis of $M^*$.

## 3.1 Co-quasi-triangular Hopf algebras

### 3.1.1 Some deønitions

Let $\mathrm{H}$ be a Hopf algebra over a øeld $k$. A right crossed bimodule over $\mathrm{H}$ (in the sense of Yetter [35]) is a $k$-vector space $\mathrm{M}$, which is also a right $\mathrm{H}$-module, a right $\mathrm{H}$-comodule (with structure map $\delta_{\mathrm{R}} : (\mathrm{M} \to \mathrm{M}\otimes\mathrm{H}, m \mapsto \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)})$), and such that:

$$\delta_{\mathrm{R}}(m\cdot a) = \sum m_{(0)}\cdot a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})m_{(1)}a_{(3)} \quad \text{for } m \in \mathrm{M},\ a \in \mathrm{H}.$$

Examples :
There are two easy examples: we can endow $\mathrm{H}$ with the structures:

$$a\cdot b = ab, \quad \delta_{\mathrm{R}}(a) = a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}).$$

Alternatively, we can put on $\mathrm{H}$ the structures

$$a\cdot b = S(b_{(1)})ab_{(2)}, \quad \delta_{\mathrm{R}}(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

When $\mathrm{M}$ and $\mathrm{N}$ are right crossed bimodules over $\mathrm{H}$, $\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}$ becomes a right crossed bimodule for the action and coaction given by :

$$(m \otimes n) \cdot a = m \cdot a_{(1)} \otimes n \cdot a_{(2)}, \quad \delta_{\mathrm{R}}(m \otimes n) = (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \otimes m_{(1)} n_{(1)}.$$

When $\Gamma$ is a bicovariant bimodule (see [33]), the space $\Gamma^{\mathrm{L}}$ of left coinvariants is a right crossed bimodule over $\mathrm{H}$. Conversely, any right crossed bimodule over $\mathrm{H}$ is the space of left coinvariants of a bicovariant bimodule.

Finally, we endow the tensor product coalgebra $\mathrm{H}^{*\,\mathrm{res}} \otimes \mathrm{H}$ with the product

$$(f \otimes a)(g \otimes b) = \langle g_{(3)}, a_{(3)} \rangle \langle g_{(1)}, S(a_{(1)}) \rangle (g_{(2)} f \otimes a_{(2)} b).$$

We obtain a bialgebra, called Drinfel$'$d's double of $\mathrm{H}$ and denoted by $\mathcal{D}(\mathrm{H})$. When $\mathrm{M}$ is a right crossed bimodule over $\mathrm{H}$, it is a right $\mathcal{D}(\mathrm{H})$-module for the actions:

$$m \cdot (f \otimes 1) = \langle f, m_{(1)} \rangle m_{(0)}, \quad m \cdot (1 \otimes a) = m \cdot a.$$

### 3.1.2 Definition of a co-quasi-triangular Hopf algebra

We give the definition of c.q.t. Hopf algebras, by now usual (see [18] for historical notes):

Definition 1
A co-quasi-triangular Hopf algebra is a pair $(\mathcal{A}, \gamma)$ where $\mathcal{A}$ is a Hopf algebra and $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ is a coalgebra morphism and algebra antimorphism such that we have the Yang-Baxter equation :

$$a_{(1)} b_{(1)} \langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle = \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle b_{(2)} a_{(2)} \quad \text{for all } a, b \in \mathcal{A}.$$

That $\gamma$ is a coalgebra morphism and an algebra antimorphism gives us that for all $a, b \in \mathcal{A}$, $\langle \gamma a, b \rangle = \langle \gamma S a, S b \rangle$. So there exists a map $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ such that

$$\langle \gamma a, b \rangle = \langle \delta b, S a \rangle.$$

We verify easily that $\delta$ takes its values in $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ and $(\mathcal{A}, \delta)$ is a c.q.t. Hopf algebra.
Example :
If $\mathrm{U}$ is a Hopf algebra quasi-triangular for an $R$-matrix $R_{12}$, then $\mathrm{U}^{*\,\mathrm{res}}$ becomes a c.q.t. Hopf algebra for the map $\gamma$ given by:

$$\langle \gamma(a), b \rangle = \langle b \otimes a, R_{12} \rangle \quad \text{for } a, b \in \mathrm{U}^{*\,\mathrm{res}}.$$

Then

$$\langle \delta(a), b \rangle = \langle b \otimes a, R_{21}^{-1} \rangle \quad \text{for } a, b \in \mathrm{U}^{*\,\mathrm{res}}.$$

This follows from Drinfel$'$d's classical axioms. For instance, let $\mathrm{H}$ be a finite dimensional Hopf algebra, and $\mathrm{U} = \mathcal{D}(\mathrm{H})$ the Drinfel$'$d's double of $\mathrm{H}$: the dual vector space $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^*$ of $\mathrm{U}$ is the underlying space of the restricted dual of $\mathrm{U}$. If $(e_i)$ is a basis for $\mathrm{H}$, the canonical $R$-matrix is $\sum (e_i^* \otimes 1) \otimes (1 \otimes e_i) \in \mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$. It corresponds to the maps

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^* & \to & \mathrm{U} \\ & a \otimes f & \mapsto & \varepsilon(a) f \otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \delta : & \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^* & \to & U \\ & b \otimes g & \mapsto & g(1)\varepsilon \otimes S^{-1}(b) \end{array}$$

The category of left modules over a quasi-triangular Hopf algebra is braided. The translation in the present formalism is the:

Proposition 4
Let $(\mathcal{A}, \gamma)$ be a c.q.t. Hopf algebra. If $\mathrm{M}$ is a right $\mathcal{A}$-comodule, it becomes a right crossed bimodule over $\mathcal{A}$ when endowed with the right module structure given by:

$$m \cdot a = \langle \gamma a, m_{(1)} \rangle m_{(0)} \quad \text{for } m \in \mathrm{M} \text{ and } a \in \mathcal{A}.$$

This extra structure is compatible with tensor products of comodules and crossed bimodules.

Proof.
We have:

$$\begin{aligned} m_{(0)} \cdot a_{(2)} \otimes S(a_{(1)}) m_{(1)} a_{(3)} &= m_{(0)} \otimes \langle \gamma a_{(2)}, m_{(1)} \rangle S(a_{(1)}) m_{(2)} a_{(3)} \\ &= m_{(0)} \otimes S(a_{(1)}) a_{(2)} m_{(1)} \langle \gamma a_{(3)}, m_{(2)} \rangle \\ &= m_{(0)} \otimes m_{(1)} \langle \gamma a, m_{(2)} \rangle \\ &= \delta_{\mathrm{R}}(m \cdot a). \end{aligned}$$

The compatibility with tensor products is a consequence of $\gamma$ being a coalgebra homomorphism. □

We also note that the antipode of a c.q.t. Hopf algebra is always invertible, the square of its transpose being an inner automorphism of the algebra $\mathcal{A}^*$ (see [10]).

Finally, when $(\mathcal{A}, \gamma)$ is a c.q.t. Hopf algebra, Radford [20] has shown that $(\operatorname{im}\gamma)(\operatorname{im}\delta)$ is a sub-Hopf-algebra of $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ and that

$$(\operatorname{im}\gamma)(\operatorname{im}\delta) = (\operatorname{im}\delta)(\operatorname{im}\gamma).$$

This was shown in the early [25]: there is a Hopf algebra structure (with invertible antipode) on the tensor product coalgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ such that the map

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \\ a \otimes b & \mapsto & \gamma b \cdot \delta a \end{array}$$

is a coalgebra morphism and an algebra antimorphism.
Example :
In the F.R.T. construction [12], one considers matrices $L^+$ and $L^-$, whose elements lie in $\operatorname{im}\gamma$ and $\operatorname{im}\delta$ respectively. Then Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan deøned $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ to be the algebra $(\operatorname{im}\gamma)(\operatorname{im}\delta)$.

### 3.1.3 The maps I and J

We øx in this subsection a c.q.t. Hopf algebra $(\mathcal{A}, \gamma)$ over the øeld $k$, and note $\delta$ the associated map. We deøne two maps $\mathrm{I} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ and $\mathrm{J} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ by :

$$\mathrm{I}(a) = \gamma(a_{(1)})\, S\delta(a_{(2)}), \qquad \mathrm{J}(a) = S\delta(a_{(1)})\, \gamma(a_{(2)}).$$

Equivalently, we may consider the pairing of two elements $a, b \in \mathcal{A}$:

$$\langle \mathrm{I}(a), b\rangle = \langle \mathrm{J}(b), a\rangle.$$

We have

$$\mathrm{I} = S \circ \mathrm{J} \circ S, \quad \mathrm{J} = S \circ \mathrm{I} \circ S.$$

Example :
When $\mathcal{A}$ is the dual of a quasi-triangular Hopf algebra, this pairing is $\langle a \otimes b, R_{21}R_{12}\rangle$.

We will now state an important property of the map I. $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ is a left $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}\otimes\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$-module for the law $(x \otimes y)\cdot z = xz\,S(y)$. $\mathcal{A}$ is a right crossed bimodule over $\mathcal{A}$ for the structures: $a \cdot b = ab$ and $\delta_{\mathrm{R}}(a) = a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}$, so $\mathcal{A}$ is a right $\mathcal{D}(\mathcal{A})$-module. Let

$$\begin{array}{rlcl} \Pi: \ \mathcal{D}(\mathcal{A}) \equiv & \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \otimes \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \otimes \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \\ & x \otimes b & \mapsto & \gamma(b_{(1)})x_{(1)} \otimes \delta(b_{(2)})x_{(2)} \end{array}$$

Proposition 5

1. $\Pi$ is an algebra antimorphism.
2. If $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ and $a \in \mathcal{A}$, then

$$\mathrm{I}(a \cdot \xi) = \Pi(\xi)\cdot \mathrm{I}(a).$$

Proof.
That $\Pi$ is an antimorphism is already in [25]. Then, as a consequence of the Yang-Baxter equation, we may write, for $x \in \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ and $a \in \mathcal{A}$, that:

$$S\gamma(a_{(1)})\langle x, a_{(2)}\rangle = \langle x_{(2)}, a_{(1)}\rangle x_{(1)} S\gamma(a_{(2)})S(x_{(3)}).$$

Then we compute, for $\xi = x \otimes b \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(a\cdot\xi) &= \langle x, S(a_{(1)})a_{(3)}\rangle\, \mathrm{I}(a_{(2)}b) \\ &= \gamma(b_{(1)})\,\langle x, S(a_{(1)})a_{(4)}\rangle\,\gamma(a_{(2)})\,S\delta(a_{(3)})\,S\delta(b_{(2)}) \\ &= \gamma(b_{(1)})\,\langle x_{(1)}, S(a_{(1)})\rangle\,S\gamma S(a_{(2)})\,\langle x_{(2)}, a_{(4)}\rangle\,S\delta(a_{(3)})\,S\delta(b_{(2)}) \\ &= \gamma(b_{(1)})\,\langle x_{(2)}, S(a_{(2)})\rangle\,x_{(1)}\,S\gamma S(a_{(1)})\,S(x_{(3)})\,\langle x_{(5)}, a_{(3)}\rangle\,x_{(4)}\,S\delta(a_{(4)})\,S(x_{(6)})\,S\delta(b_{(2)}) \\ &= \gamma(b_{(1)})\,\langle x_{(2)}, S(a_{(2)})\rangle\,x_{(1)}\,S\gamma S(a_{(1)})\,\langle x_{(3)}, a_{(3)}\rangle\,S\delta(a_{(4)})\,S(x_{(4)})\,S\delta(b_{(2)}) \\ &= \gamma(b_{(1)})\,x_{(1)}\,\gamma(a_{(1)})\,S\delta(a_{(2)})\,S(x_{(2)})\,S\delta(b_{(2)}) \\ &= \Pi(\xi)\cdot\mathrm{I}(a). \end{aligned}$$

□

We single out the particular case $\xi = x \otimes 1$:

Proposition 6
We consider $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ as left $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$-modules for the adjoint action:

$$\begin{array}{ll} x\cdot a = \langle x, S(a_{(1)})a_{(3)}\rangle a_{(2)} & \text{for } x \in \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}},\ a \in \mathcal{A} \\ x \cdot y = x_{(1)}y\,S(x_{(2)}) & \text{for } x, y \in \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \end{array}$$

Then $\mathrm{I}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ is a morphism of $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$-modules.

Finally, we give the deønition, due to Reshetikhin and Semenov-Tian-Shansky [25]:

Deønition 2
One says that $(\mathcal{A}, \gamma)$ is factorizable if the pairing given below is non-degenerate:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \rightarrow & k \\ (a, b) & \mapsto & \langle \mathrm{I}(a), b \rangle \end{array}$$

Thus $(\mathcal{A}, \gamma)$ is factorizable iœ the maps I and J are injective. It is possible to show that $(\mathcal{A}, \gamma)$ is factorizable iœ $(\mathcal{A}, \delta)$ is so.

#### 3.1.4 A related construction

First, let U be a Hopf algebra. It is a left U-module for the adjoint action: $x \cdot y = x_{(1)} y \, S(x_{(2)})$. We let $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$ be the sum of all ønite dimensional U-submodules of U. It is known [15] that $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$ is a subalgebra of U, a left coideal in U, and a U-submodule for the left adjoint action. The multiplication in U deønes a morphism of left U-modules $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}) \otimes \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}) \rightarrow \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$. We can then do the semi-direct product $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}) \otimes \mathrm{U}$: we obtain an algebra. $\mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$ denoting the ordinary tensor product algebra, there is an algebra morphism

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}) \otimes \mathrm{U} & \rightarrow & \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \\ x \otimes y & \mapsto & x y_{(1)} \otimes y_{(2)} \end{array}$$

We can make the same constructions on the right: we obtain an algebra $\mathrm{F}_r(\mathrm{U})$, and the resulting algebra morphism

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U} \otimes \mathrm{F}_r(\mathrm{U}) & \rightarrow & \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \\ x \otimes y & \mapsto & x_{(1)} \otimes x_{(2)} y \end{array}$$

This algebra morphism has same image as the previous one. Hence this image contains

$$\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}) \otimes \mathrm{F}_r(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U} \otimes \mathrm{U}.$$

We take now a c.q.t. Hopf algebra $(\mathcal{A}, \gamma)$, with $\delta$, I and J as in the preceding subsection. Let U be the minimal sub-Hopf-algebra of $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ in which $\gamma$ and $\delta$ take their values:

$$\mathrm{U} = (\operatorname{im} \gamma)(\operatorname{im} \delta).$$

We consider on $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ the $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$-module structures of proposition 6. By restriction, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ are U-modules, and $\mathrm{I} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$ is a morphism of U-modules. We can see that I takes its values in U, which is a U-submodule of $\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$. Further, $\mathcal{A}$ is the sum of its ønite dimensional U-submodules, hence

$$\operatorname{im} \mathrm{I} \subseteq \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}).$$

Proposition 7
Let $(\mathcal{A}, \gamma)$ be a c.q.t. factorizable Hopf algebra, and I be the associated map. Let U be the

sub-Hopf-algebra $(\operatorname{im}\gamma)(\operatorname{im}\delta) \subseteq \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}$. We suppose that $\operatorname{im}\mathrm{I} = \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$. Then $\mathrm{I}$ induces a bijection between:

- the set of right ideals $\mathcal{R}$ of $\mathcal{A}$, which are subcomodules for the right coaction

$$\begin{array}{rrcl} \delta_{\mathrm{R}}: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\ & a & \mapsto & a_{(2)}\otimes S(a_{(1)})a_{(3)} \end{array}$$

- the set of two-sided ideals $\mathcal{I}$ of $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$, which are U-submodules for the adjoint action.

This bijection preserves dimensions, codimensions, and the inclusion ordering in both sets.

Proof.
By assumption, $\mathrm{I}:\mathcal{A}\to\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$ is a U-module isomorphism. We adopt the notations of the proposition 5. $\mathcal{A}$ is a $\mathcal{D}(\mathcal{A})$-module, and $\mathrm{U}\otimes\mathcal{A}$ is the underlying space of a sub-Hopf-algebra of $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. So we will view $\mathcal{A}$ as a right $\mathrm{U}\otimes\mathcal{A}$-module: $1\otimes\mathcal{A}$ acts on $\mathcal{A}$ by right multiplication, $\mathrm{U}^{\mathrm{op}}\otimes 1$ acts on $\mathcal{A}$ by the left adjoint action. The injectivity of $\mathrm{I}$ implies that $\operatorname{im}\mathrm{J}\subseteq\mathrm{U}$ separates the points of $\mathcal{A}$: hence the sub-$\mathrm{U}\otimes\mathcal{A}$-modules of $\mathcal{A}$ are the right ideals which are subcomodules for the right coaction $\delta_{\mathrm{R}}$.

On the other hand, we let $\mathrm{E}$ be the image of the morphism

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})\otimes\mathrm{U} & \to & \mathrm{U}\otimes\mathrm{U} \\ x\otimes y & \mapsto & xy_{(1)}\otimes y_{(2)} \end{array}$$

$\mathrm{U}$ is a $\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}$-module, so is an $\mathrm{E}$-module, and $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$ is a sub-E-module of $\mathrm{U}$. $\mathrm{E}$ contains $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})\otimes\mathrm{F}_r(\mathrm{U})$, with $S(\mathrm{F}_r(\mathrm{U}))=\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$. Therefore, the sub-E-modules of $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$ are the two-sided ideals $\mathcal{I}$ which are U-submodules for the adjoint action.

Now the proposition is a consequence of the proposition 5: writing $\Pi$ as the composition of the maps

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}\otimes\mathcal{A} & \to & \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})\otimes\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \\ x\otimes a & \mapsto & \mathrm{I}(a_{(1)})\otimes\delta(a_{(2)})x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})\otimes\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} & \to & \mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}}\otimes\mathcal{A}^{*\,\mathrm{res}} \\ x\otimes y & \mapsto & xy_{(1)}\otimes y_{(2)} \end{array}$$

and using the assumption $\operatorname{im}\mathrm{I}=\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U})$, we can see that $\mathrm{E}$ is the image of $\mathrm{U}\otimes\mathcal{A}$ through $\Pi$.
□

## 3.2 The case of the quantum coordinate algebra

### 3.2.1 Notations

In this section, we study the preceding constructions in the case where $\mathcal{A}$ is the algebra $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ of regular functions on a quantum group.

Let $\mathfrak{g}$ be a finite dimensional semi-simple split Lie algebra, $\mathfrak{h}$ a splitting Cartan subalgebra, $\{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}\subseteq\mathfrak{h}^*$ a basis for the root system, $\{\alpha_1^\vee,\dots,\alpha_\ell^\vee\}\subseteq\mathfrak{h}$ the inverse roots, $\mathrm{P}\subseteq\mathfrak{h}^*$

and $\mathrm{Q} \subseteq \mathfrak{h}^*$ the weight and the root lattices. The choice of an invariant (under Weyl group action) scalar product $(\cdot|\cdot)$ allows us to identify $\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{h}^*$, with

$$\alpha_i = d_i \alpha_i^\vee, \quad d_i = \frac{(\alpha_i \mid \alpha_i)}{2}.$$

We choose the normalization of $(\cdot|\cdot)$ so that $(\lambda \mid \mu) \in \mathbb{Z}$ whenever $\lambda$ and $\mu$ belong to $\mathrm{P}$. We denote by $\rho$ half the sum of the positive roots, by $\mathrm{P}_+$ the set of dominant weights, and by $w_0$ the longest element in the Weyl group.

We now choose the following version of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$: this is a $\mathbb{C}(q)$-algebra ($q$ is generic) generated by $E_i$, $F_i$ and $K_\lambda$ ($\lambda \in \mathrm{P}$). The relations are the usual ones among which:

$$K_\lambda E_i = q^{(\lambda|\alpha_i)} E_i K_\lambda$$

$$K_\lambda F_i = q^{-(\lambda|\alpha_i)} F_i K_\lambda$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}$$

The coproduct is given by:

$$\Delta K_\lambda = K_\lambda \otimes K_\lambda$$

$$\Delta E_i = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i$$

$$\Delta F_i = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_{-\alpha_i}$$

We note $S$ the antipode of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$. If one chooses a dominant weight $\lambda$ and a character $\chi : \mathrm{P}/2\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$, one knows how to construct a simple finite dimensional $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-modules, in which there is a highest weight vector $m_\lambda$ such that

$$K_\mu \cdot m_\lambda = \chi(\mu \bmod 2\mathrm{Q}) q^{(\mu|\lambda)} m_\lambda.$$

We note $\mathrm{L}_\chi(\lambda)$ such a $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module ; when $\chi$ is the trivial character, we simply write $\mathrm{L}(\lambda)$, and then $\mathrm{L}_\chi(\lambda) = \mathrm{L}(\lambda) \otimes \mathrm{L}_\chi(0)$.

The matrix coefficients of the representation $\mathrm{L}(\lambda)$ span a linear subspace $\mathrm{C}(\lambda)$ of the restricted dual of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, and we let

$$\mathcal{A}_q\mathrm{G} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{P}_+} \mathrm{C}(\lambda).$$

This is a Hopf subalgebra of $(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})^{*\,\mathrm{res}}$. The elements of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ separate the points of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ [15], so that there is an inclusion of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ into the dual of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, actually into the restricted dual of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$. We note $S$ the antipode of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, which is the restriction to $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ of the transpose of the antipode of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$.

There is an $R$-matrix for $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ [9, 30, 13]. We choose the $R$-matrix with the structure $\sum$(diagonal part)(polynomial in $F$) $\otimes$ (polynomial in $E$). If $a$ and $b$ belong to $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, the number $\langle R_{12}, b \otimes a\rangle \in \mathbb{C}(q)$ is well-defined (thanks to the weight graduation of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ and of any finite dimensional $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module), and we can define $\gamma, \delta : \mathcal{A}_q\mathrm{G} \to (\mathcal{A}_q\mathrm{G})^*$ such that

$$\langle R_{12}, b \otimes a\rangle = \langle \gamma(a), b\rangle = \langle \delta(b), S(a)\rangle.$$

$(\mathcal{A}_q\mathrm{G}, \gamma)$ and $(\mathcal{A}_q\mathrm{G}, \delta)$ are c.q.t. Hopf algebras, $\mathrm{im}(\gamma)$ and $\mathrm{im}(\delta)$ are the sub-Hopf-algebras $\mathrm{U}^-\mathrm{U}^0$ and $\mathrm{U}^0\mathrm{U}^+$ of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g} \subseteq (\mathcal{A}_q\mathrm{G})^{*\,\mathrm{res}}$ respectively, and $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ is the sub-Hopf-algebra $(\mathrm{im}\,\gamma)(\mathrm{im}\,\delta) = (\mathrm{im}\,\delta)(\mathrm{im}\,\gamma)$ of $(\mathcal{A}_q\mathrm{G})^{*\,\mathrm{res}}$.

### 3.2.2 Factorizability of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$

Let $(\mathcal{A}_q\mathrm{G}, \gamma)$ be the c.q.t. algebra presented above, and $\delta$ be the associated map. For all the section, we endow $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ and $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ with the left adjoint action of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, as in the section 3.1.4: in particular, the map $\mathrm{I} : \mathcal{A}_q\mathrm{G} \to \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ is a morphism of left $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-modules. Joseph and Letzter [15, 16] have studied the structure of $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$, and we need the following results:

- If $\lambda \in \mathrm{P}_+$, $K_{-2\lambda}$ generates a ønite dimensional $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-submodule of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, and
$$\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{P}_+} (\mathrm{U}_q\mathfrak{g} \cdot K_{-2\lambda}).$$
- Each block $\mathrm{U}_q\mathfrak{g} \cdot K_{-2\lambda}$ contains a unique one-dimensional $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-submodule; it deønes a unique (up to scalars) element $z_\lambda$ of the center of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$.
- $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) \subseteq (\mathcal{A}_q\mathrm{G})^*$ separates the points of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$.

The next assertion has been stated in [25]:

Proposition 8
$(\mathcal{A}_q\mathrm{G}, \gamma)$ is a factorizable c.q.t. Hopf algebra, and $\operatorname{im} \mathrm{I} = \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$.

Proof.
Let $\lambda \in \mathrm{P}_+$, $\mathrm{L}(\lambda)$ the standard $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module, $m_\lambda$ a highest weight vector, $m_{w_0\lambda}$ a lowest weight vector, $(m_i)$ a basis for $\mathrm{L}(\lambda)$ composed of weight vectors, $(m_i^*)$ the dual basis. We have:

- The matrix element $\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)$ is the linear form on $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ given by (in the triangular decomposition $\mathrm{U}^+ \otimes \mathrm{U}^0 \otimes \mathrm{U}^-$ of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$): $EK_\mu F \mapsto \varepsilon(E) q^{(w_0\lambda|\mu)} \varepsilon(F)$.
- On this element, $\gamma$ takes the value $K_{w_0\lambda}$ and $\delta$ the value $K_{-w_0\lambda}$.
- The image by $\gamma$ (respectively $\delta$) of the matrix element $\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_i, m_{w_0\lambda}^*)$ (respectively $\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_i^*)$) is zero if $i \neq w_0\lambda$.

So we have:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)) &= \gamma((\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*))_{(1)})\ S(\delta((\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*))_{(2)})) \\
&= \sum \gamma(\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_i, m_{w_0\lambda}^*))\ S(\delta(\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_i^*))) \\
&= \gamma(\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*))\ S(\delta(\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*))) \\
&= K_{2w_0\lambda}.
\end{aligned}$$

Hence $\operatorname{im} \mathrm{I}$ is a $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-submodule of $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ which contains all the $K_{2w_0\lambda}$ ($\lambda \in \mathrm{P}_+$), so

$$\operatorname{im} \mathrm{I} = \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}).$$

We now want to show that J is injective. If $b \in \ker \mathrm{J}$, then for all $a \in \mathcal{A}_q\mathrm{G}$,

$$\langle \mathrm{I}(a), b \rangle = \langle \mathrm{J}(b), a \rangle = 0.$$

So $b$ is null when viewed as a linear form on $\operatorname{im} \mathrm{I} = \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$. Then $b = 0$, because $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ separates the points of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$. Finally, owing to the formula $\mathrm{J} = S \circ \mathrm{I} \circ S$ and to the invertibility of $S$, $\mathrm{I}$ is also injective. This concludes the proof of the proposition. $\square$

There is another way to present this result. Rosso [21] introduced a bilinear non-degenerate ad-invariant form on $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, that Caldero [3] writes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}_q\mathfrak{g} \times \mathrm{U}_q\mathfrak{g} & \to & \mathbb{C}(q^{1/2}) \\ (x, y) & \mapsto & \langle \zeta(x), S^{-1}(y) \rangle \end{array}$$

where $\zeta : \mathrm{U}_q\mathfrak{g} \to (\mathrm{U}_q\mathfrak{g})^*$. Rosso's non-degeneracy result is that $\zeta$ is injective; Caldero's theorem states that $\zeta$ maps $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ onto $\mathcal{A}_q\mathrm{G} \subseteq (\mathrm{U}_q\mathfrak{g})^{*\,\mathrm{res}}$. The triangular behaviour of Rosso's form gives us that

$$\zeta(K_{2w_0\lambda}) = \theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m^*_{w_0\lambda}).$$

The ad-invariance of Rosso's form can be translated for $\zeta$: when we restrict $\zeta$ to $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ and $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, $\zeta$ is a morphism of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-modules for the adjoint structures. Now the maps $\mathrm{I} \circ \zeta : \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) \to \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ and $\zeta \circ \mathrm{I} : \mathcal{A}_q\mathrm{G} \to \mathcal{A}_q\mathrm{G}$ are morphisms of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-modules and øx the respective generators $K_{2w_0\lambda}$ and $\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m^*_{w_0\lambda})$ of these modules (the fact that $\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m^*_{w_0\lambda})$ generates the $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-submodule $\mathrm{C}(\lambda)$ of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ is equivalent to the fact that $m^*_{w_0\lambda} \otimes m_{w_0\lambda}$ generates the $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module $\mathrm{L}(\lambda)^* \otimes \mathrm{L}(\lambda)$). So we conclude that $\zeta$ and $\mathrm{I}$ are mutually inverse isomorphisms, and that $\mathrm{I}$ is a bijection between $\mathrm{C}(\lambda)$ and $\mathrm{U}_q\mathfrak{g} \cdot K_{2w_0\lambda}$. The analysis also shows the amusing side-result:

Proposition 9
If $x \in \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$, $y \in \mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, then the Rosso form on $(x, y)$ is given by $\langle \mathrm{I}^{-1}(x), S^{-1}(y) \rangle$ where

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{I}: & \mathcal{A}_q\mathrm{G} & \to & \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) \\ & a & \mapsto & \langle a \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}_q\mathfrak{g}}, R_{21}R_{12} \rangle \end{array}$$

Remarks :

1. It is also possible to give an heuristic proof of this result, using the canonical $R$-matrix for Drinfel′d's double and using Rosso's formula for his form [23].

2. In the preceding discussion, we were lying a bit. Caldero's map $\zeta$ does not give exactly Rosso's bilinear form, but our formula connecting $\mathrm{I}$ and Rosso's form is correct as stated. In our notations, Caldero's map $\zeta$ is the inverse of the map

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_q\mathrm{G} & \to & \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) \\ a & \mapsto & \delta(a_{(1)})\, S\gamma(a_{(2)}) \end{array}$$

Later, we will need to know the relations between the central elements $z_\lambda$ deøned above. To this aim, we recall Drinfel′d's construction of the center of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ [10]. Let $\lambda \in \mathrm{P}_+$ and $t \in \mathcal{A}_q\mathrm{G}$ be the quantum trace in $\mathrm{L}(\lambda)$:

$$\langle t, x \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}(\lambda)}(K_{2\rho}\, x) \quad \text{for } x \in \mathrm{U}_q\mathfrak{g}.$$

$t$ is an invariant element for the adjoint action of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ in $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, so $\mathrm{I}(t)$ is central, and belongs to $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}\cdot K_{2w_0\lambda}$. We choose the normalization of $z_{-w_0\lambda}$ by letting $z_{-w_0\lambda}=\mathrm{I}(t)$. We then have a Mackey-like theorem (which is implicit in [10] and in the thesis of Caldero, chapter II, 1.2):

Proposition 10
Let $\mathrm{c}^{\nu}_{\lambda\mu}$ be the fusion coeŒcients for $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{L}(\lambda)\otimes\mathrm{L}(\mu)\simeq\bigoplus_{\nu}\mathrm{c}^{\nu}_{\lambda\mu}\mathrm{L}(\nu).$$

Then

$$z_\lambda z_\mu=\sum_{\nu}\mathrm{c}^{\nu}_{\lambda\mu}z_\nu.$$

Proof.
Let $\mu\in\mathrm{P}_+$. With the help of the formulas $S(\theta_{\mathrm{L}(\mu)}(m_\mu,m^*_\mu))=\theta_{\mathrm{L}(-w_0\mu)}(m_{-\mu},m^*_{-\mu})$ and $\mathrm{J}=S\circ\mathrm{I}\circ S$, we compute

$$\mathrm{J}(\theta_{\mathrm{L}(\mu)}(m_\mu,m^*_\mu))=K_{2\mu}.$$

Now let $\lambda\in\mathrm{P}_+$ and let $t$ be the quantum trace in $\mathrm{L}(\lambda)$. Let $\Psi$ be the Harish-Chandra morphism from the center of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ to $\mathrm{U}^0$ [21]. We want to compute $\Psi(z_{-w_0\lambda})$ on $\mu+\rho$ (evaluation on $\mu+\rho$ means the algebra homomorphism $(\mathrm{U}^0\to\mathbb{C}(q),K_\lambda\mapsto q^{(\lambda|\mu+\rho)})$). The result will be the image of $z_{-w_0\lambda}$ by the central character of $\mathrm{L}(\mu)$. So it is

$$\langle\mathrm{I}(t),\theta_{\mathrm{L}(\mu)}(m_\mu,m^*_\mu)\rangle=\langle\mathrm{J}\theta_{\mathrm{L}(\mu)}(m_\mu,m^*_\mu),t\rangle=\langle K_{2\mu},t\rangle=\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}(\lambda)}(K_{2\mu}K_{2\rho})=\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}(\lambda)}(K_{2(\mu+\rho)}).$$

Thus $\Psi(z_{-w_0\lambda})$ equals the sum of $K_{2\nu}$ for $\nu$ in the set of weights (with multiplicities) of $\mathrm{L}(\lambda)$. We then use the fact that $\Psi$ is an injective algebra homomorphism. $\square$

We note $\mathcal{R}$ the Grothendieck ring of the category of ønite dimensional $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-modules whose components are modules $\mathrm{L}(\lambda)$, without any twisting character $\chi:\mathrm{P}/2\mathrm{Q}\to\mathbb{C}(q)^\times$. Let $\mathrm{Z}(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ the center of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, and $\mathbb{Z}[\mathrm{P}]$ the group algebra of $\mathrm{P}$. The map

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{R}&\to&\mathcal{A}_q\mathrm{G}\\ [\mathrm{M}]&\mapsto&\mathrm{Tr}_{\mathrm{M}}(K_{2\rho}-)\end{array}$$

is a ring homomorphism. If $a,b\in\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ are such that $\mathrm{I}(a)$ belongs to the center of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, then $\mathrm{I}(ab)=\mathrm{I}(a)\,\mathrm{I}(b)$. As a consequence, the map

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{R}&\to&\mathrm{Z}(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})\\ [\mathrm{M}]&\mapsto&\mathrm{I}(\mathrm{Tr}_{\mathrm{M}}(K_{2\rho}-))\end{array}$$

is a ring homomorphism. This shows again the statement in proposition 10, and we can paraphrase the above proof by saying that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & \mathcal{A}_q\mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathrm{Z}(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) \arrow[d, "\Psi"] \\
\mathbb{Z}[\mathrm{P}] \arrow[rr] & & \mathrm{U}^0
\end{tikzcd}$$

Here $\mathrm{ch} : \mathcal{R} \to \mathbb{Z}[\mathrm{P}]$ is the ring homomorphism which maps a module to its formal character, and the bottom arrow is the map

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\mathrm{P}] & \to & \mathrm{U}^0 \\ e^\nu & \mapsto & K_{2\nu} \end{array}$$

where $(e^\nu)_{\nu\in\mathrm{P}}$ is the standard $\mathbb{Z}$-basis of $\mathbb{Z}[\mathrm{P}]$.

### 3.2.3 A technical result on the representation ring

We have just introduced a Grothendieck ring $\mathcal{R}$: by the classical results of Lusztig and Rosso, $\mathcal{R}$ is naturally isomorphic to the representation ring of $\mathfrak{g}$. The elements $[\mathrm{L}(\lambda)]$ $(\lambda \in \mathrm{P}_+)$ form a $\mathbb{Z}$-basis of $\mathcal{R}$ and a $\mathbb{Q}$-basis of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Proposition 11
Let $\lambda \in \mathrm{P}_+$. Then the ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ generated by the elements $[\mathrm{L}(\lambda+\varpi)]$ $(\varpi \in \mathrm{P}_+)$ is the whole algebra $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

The proof of this proposition can be skipped without any drawbacks. Before we give it, we have to state an elementary lemma:

Lemma
Let $(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}) \in (\mathbb{C}^\ell)^k$ be such that their image in $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^\ell$ are all diœerent, and let $(P^{(1)}, \dots, P^{(k)}) \in (\mathbb{C}[X_1, \dots, X_\ell])^k$. If $\sum_i P^{(i)}(n_1, \dots, n_\ell) \exp(2\pi i \sum_j n_j \mu_j^{(i)}) = 0$ holds for all $(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, then the polynomials $P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$ are all equal to zero.

For $\ell = 1$, this lemma states linear independance of elementary solutions of a linear diœerence equation. The general proof is by induction on $\ell$.

Proof of proposition 11
In this proof, we are in a classical context and we do not identify $\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{h}^*$. Let $\mathrm{R} \subseteq \mathfrak{h}^*$ and $\mathrm{R}^\vee \subseteq \mathfrak{h}$ be the direct and inverse root systems, $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ the canonical bijection between $\mathrm{R}$ and $\mathrm{R}^\vee$, $\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee) \subseteq \mathfrak{h}$ the root lattice. $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{R}) \subseteq \mathfrak{h}^*$ is still the weight lattice; we denote by $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\}$ the set of inverse simple roots, and by $\{\varpi_1, \dots, \varpi_\ell\}$ the set of fundamental weights. $\mathrm{R}^\vee$ and $\mathrm{R}$ deøne $\mathbb{Q}$-structures on $\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{h}^*$, and we can deøne $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ and $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$. The Weyl group $\mathrm{W}$ operates on $\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{h}^*$, and the aŒne Weyl group $\mathrm{W}_a = \mathrm{W} \ltimes \mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$ operates on $\mathfrak{h}$. Let $\mathbb{Z}[\mathrm{P}]$ be the $\mathbb{Z}$-algebra of the group $\mathrm{P}$, $\mathbb{Z}[\mathrm{P}]^\mathrm{W}$ be the set of elements which are invariant under Weyl group action, $\mathrm{ch} : \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\mathrm{P}]^\mathrm{W}$ be the ring isomorphism ıformal characterȷ. Finally, we denote by $\varepsilon(w) = \pm 1$ the determinant of an element $w$ of the Weyl group.

For $\mu \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$, let $\mathrm{ev}_\mu : \mathbb{Z}[\mathrm{P}] \to \mathbb{C}$ be the ring morphism which sends a basic element $e^\nu$ $(\nu \in \mathrm{P})$ to $\exp(2\pi i \langle \mu, \nu \rangle)$, where $\exp$ is the complex exponential. This extends to an algebra morphism $\mathrm{ev}_\mu : \mathbb{C}[\mathrm{P}] \to \mathbb{C}$. If $\nu \in \mathrm{P}_+$, let $f_\nu$ be the map

$$\begin{array}{cccc} f_\nu : & \mathfrak{h}_\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & \mu & \mapsto & \mathrm{ev}_\mu(\mathrm{ch}\, \mathrm{L}(\nu)) \end{array}$$

We ørst assert that given any $(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$, there exists $\mu \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ such that

$$f_{\varpi_i}(\mu) = x_i \quad \text{for all } i \in \{1, \ldots, \ell\}.$$

We view $\mathbb{C}[\mathrm{P}]$ as the coordinate ring of the aŒne variety $(\mathbb{C}^\times)^\ell$, and we view an element $\mu = \sum \mu_i \alpha_i^\vee$ $(\mu_i \in \mathbb{C})$ as the point $(e^{2\pi i \mu_1}, \ldots, e^{2\pi i \mu_\ell}) \in (\mathbb{C}^\times)^\ell$. By the Nullstellensatz, it is suŒcient to prove that the elements $(\mathrm{ch}\,\mathrm{L}(\varpi_i) - x_i e^0)$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ generate a proper ideal in $\mathbb{C}[\mathrm{P}]$. This is already true in $\mathbb{C}[\mathrm{P}]^\mathrm{W}$ by [1], ch. VI,  3, Thorme 1. The case of $\mathbb{C}[\mathrm{P}]$ is given by a standard trick: let $\natural : \mathbb{C}[\mathrm{P}] \to \mathbb{C}[\mathrm{P}]^\mathrm{W}$ be the projection onto the trivial homogeneous component in $\mathbb{C}[\mathrm{P}]$ for the action of W; $\natural$ is a morphism of $\mathbb{C}[\mathrm{P}]^\mathrm{W}$-modules, and thus a relation $\sum Q_i \cdot (\mathrm{ch}\,\mathrm{L}(\varpi_i) - x_i e^0) = 1$ in $\mathbb{C}[\mathrm{P}]$ would give a relation $\sum Q_i^\natural \cdot (\mathrm{ch}\,\mathrm{L}(\varpi_i) - x_i e^0) = 1$ in $\mathbb{C}[\mathrm{P}]^\mathrm{W}$, which is impossible.

We now want to prove a formula for the character $f_\nu(\mu) = \mathrm{ev}_\mu(\mathrm{ch}\,\mathrm{L}(\nu))$. We ørst remark that $f_\nu$ is invariant under the action of the aŒne Weyl group $\mathrm{W}_a$ in $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$. If the real part $\mathrm{Re}(\mu)$ of $\mu$ lies in an open alcove of $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, our formula will just be Weyl's character formula:

$$f_\nu(\mu) = \frac{\sum_{w \in \mathrm{W}} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \nu + \rho \rangle)}{\sum_{w \in \mathrm{W}} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \rho \rangle)}.$$

Writing the denominator as a product over the positive roots:

$$\exp(2\pi i \langle \mu, \rho \rangle) \prod_{\alpha \in \mathrm{R}, \alpha \geq 0} (1 - \exp(-2\pi i \langle \mu, \alpha \rangle)),$$

we can see that it is a non-zero complex number. In the general case, we let

$$\mathrm{T} = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \mathrm{Re}(\langle \mu, \alpha \rangle) \in \mathbb{Z}\}.$$

This is a closed symmetric subset of $\mathrm{R}$ ([1], ch. VI,  1, Dønition 4), thus $\mathrm{T}$ is a root system in the vector space $\mathrm{V}_1 \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ that it spans ([1], ch. VI,  1, Proposition 23). The stabilizer of $\mu$ in $\mathrm{W}_a$ is generated by the reÆections across the aŒne hyperplanes in which $\mathrm{Re}(\mu)$ lies ([1], ch. V,  3, Proposition 2), thus

$$\mathrm{W}_1 = \{w \in W \mid \mu - w\mu \in \mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)\}$$

is precisely the subgroup generated by reÆections along $\alpha^\vee$ $(\alpha \in \mathrm{T})$, and its restriction to $\mathrm{V}_1$ is the Weyl group of $\mathrm{T}$. Let $\sigma$ be half the sum of the inverse positive roots of $\mathrm{T}$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathrm{T}, \alpha \geq 0} \alpha^\vee.$$

In restriction to $\mathrm{V}_1$, $\sigma$ is the sum of the fundamental weights of the root system $\mathrm{T}^\vee$ of $\mathrm{V}_1^*$. Let $h$ be a small real parameter: $\mathrm{Re}(\mu) + h\sigma$ then lies in an open alcove of $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ and we can compute (with a small piece of abuse):

$$\begin{aligned} f_\nu(\mu) &= \lim_{h \to 0} f_\nu(\mu + h\sigma) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{w \in \mathrm{W}/\mathrm{W}_1} \sum_{w_1 \in \mathrm{W}_1} \varepsilon(ww_1) \exp(2\pi i \langle w\mu, \nu + \rho \rangle) \exp(2\pi i h \langle w_1 \sigma, w^{-1}(\nu + \rho) \rangle)}{\sum_{w \in \mathrm{W}/\mathrm{W}_1} \sum_{w_1 \in \mathrm{W}_1} \varepsilon(ww_1) \exp(2\pi i \langle w\mu, \rho \rangle) \exp(2\pi i h \langle w_1 \sigma, w^{-1}\rho \rangle)}. \end{aligned}$$

In the sums, we fix $w \in \mathrm{W}/\mathrm{W}_1$ and compute the sums on $w_1$: in the numerator for instance, we have an alternating sum of $\exp(2\pi i h\langle w_1\sigma, w^{-1}(\nu+\rho)\rangle)$ where $w^{-1}(\nu+\rho) \in \mathrm{P}(\mathrm{R})$ has to be projected on $\mathrm{V}_1$, as in [1], ch. VI, 1, Proposition 28. The formula (valid in the group algebra of the weight lattice of $\mathrm{T}^\vee$)

$$\sum_{w_1 \in W_1} \varepsilon(w_1) e^{w_1\sigma} = e^\sigma \prod_{\alpha \in \mathrm{T}, \alpha \geq 0} (1 - e^{-\alpha^\vee})$$

then gives

$$f_\nu(\mu) = \frac{\sum_{w \in \mathrm{W}/\mathrm{W}_1} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \nu+\rho\rangle) \prod_{\alpha \in \mathrm{T}, \alpha \geq 0} \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\nu+\rho)\rangle}{\sum_{w \in \mathrm{W}/\mathrm{W}_1} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \rho\rangle) \prod_{\alpha \in \mathrm{T}, \alpha \geq 0} \langle \alpha^\vee, w^{-1}\rho\rangle}.$$

As $\nu+\rho$ and $\rho$ are regular, neither of the products occurring here can be zero (we will see soon that the denominator cannot be zero.)

We now prove that the ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ generated by the elements $[\mathrm{L}(\lambda+\varpi)]$ $(\varpi \in \mathrm{P}_+)$ is the whole algebra $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. We consider again [1], ch. VI, 3, Thorme 1: this time, the isomorphism $\varphi : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_\ell] \to \mathbb{C}[\mathrm{P}]^{\mathrm{W}}$ is given by

$$\varphi(X_i) = \mathrm{ch}\,\mathrm{L}(\varpi_i).$$

Composing with the isomorphism $\mathrm{ch} : \mathcal{R} \to \mathbb{Z}[\mathrm{P}]^{\mathrm{W}}$, we can see that $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ is a polynomial algebra over $\mathbb{C}$. We suppose by the way of contradiction that the elements $[\mathrm{L}(\lambda+\varpi)]$ $(\varpi \in \mathrm{P}_+)$ all belong to some maximal ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Then, by the Nullstellensatz, there exists a point $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ such that

$$\varphi^{-1}(\mathrm{ch}\,\mathrm{L}(\lambda+\varpi))(x_1, \dots, x_\ell) = 0 \quad \text{for all } \varpi \in \mathrm{P}_+.$$

We can find $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ such that $f_{\varpi_i}(\mu) = x_i$ $(i = 1, \dots, \ell)$: then $f_{\lambda+\varpi}(\mu) = 0$ for all $\varpi \in \mathrm{P}_+$. We next use the formula:

$$f_{\lambda+\varpi}(\mu)\ (\text{denominator}) = \sum_{w \in \mathrm{W}/\mathrm{W}_1} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \lambda+\varpi+\rho\rangle) \prod_{\alpha \in \mathrm{T}, \alpha \geq 0} \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\lambda+\varpi+\rho)\rangle,$$

and write $\varpi = \sum n_i \varpi_i$, where $(n_i) \in \mathbb{N}^\ell$ are any integers. The $w\mu$ $(w \in \mathrm{W}/\mathrm{W}_1)$ are all distinct modulo $\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$, and the expressions $\prod_{\alpha \in \mathrm{T}, \alpha \geq 0} \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\lambda+\varpi+\rho)\rangle$ are non-zero polynomials in $(n_1, \dots, n_\ell)$ (they never vanish indeed). Then the above lemma states that the right-hand side cannot vanish for all $(n_i) \in \mathbb{N}^\ell$. This proves firstly that the denominator is not null, and secondly that $f_{\lambda+\sum n_i\varpi_i}(\mu)$ cannot vanish for all $(n_i) \in \mathbb{N}^\ell$. We have reached a contradiction.

To go down to the case of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ is then easy: we have shown that we can express in $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ the unity as a finite sum $1 = \sum x_i [\mathrm{L}(\tau_i)][\mathrm{L}(\nu_i)]$, where $\tau_i \in \mathrm{P}_+$, $\nu_i \in \lambda + \mathrm{P}_+$ and $x_i \in \mathbb{C}$. As the structure constants of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ are integer-valued, this system, viewed as linear equations in $(x_i)$, has a solution in $\mathbb{C}$, so has a solution in $\mathbb{Q}$. $\square$

### 3.2.4 Classiøcation of some ideals of $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$

In order to achieve our classiøcation of ideals $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_q G$ in the next section, we must study the ideals $\mathcal{I} \subseteq F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ which are stable by the adjoint action of $U_q\mathfrak{g}$. The analysis requires the use of the subalgebra V of $U_q\mathfrak{g}$ generated by $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ and by the elements $K_{2\lambda}$ ($\lambda \in P_+$).

Joseph and Letzter [15] have shown that V is the subalgebra generated by the elements $E_i$, $F_iK_{\alpha_i}$ and $K_{2\lambda}$ ($\lambda \in P$). As it is such a ıbigȷ subalgebra of $U_q\mathfrak{g}$, its representation theory is similar to that of $U_q\mathfrak{g}$. We will describe it in the next subsection, but in the following proof, we need to know that the annihilator of a ønite dimensional V-module is homogeneous with respect to the Q-graduation of V.

Proposition 12
The following two properties for a subspace $\mathcal{I} \subseteq F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ are equivalent:

1. $\mathcal{I}$ is the annihilator in $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ of a ønite dimensional V-module;

2. $\mathcal{I}$ is a ønite codimensional two-sided ideal of $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ and a $U_q\mathfrak{g}$-submodule of $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ for the left adjoint action.

Proof.
We ørst show that (1) imply (2). If M is a ønite dimensional V-module, its annihilator in V is a ønite codimensional two-sided ideal of V, and is homogeneous w.r.t. the Q-graduation of V. It is then easy to see that $\mathrm{ann}_V M$ is a $U_q\mathfrak{g}$-submodule of V for the left adjoint action. The annihilator $\mathcal{I} = (\mathrm{ann}_V M) \cap F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ of M in $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ thus satisøes the property (2).

Conversely, let $\mathcal{I} \subseteq F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ satisfying the property (2). We consider the left regular $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$-module $M = F_\ell(U_q\mathfrak{g})/\mathcal{I}$. $\mathcal{I}$ is its annihilator, so it is suŒcient to show that M extends to a V-module. We thus want to show that the elements $K_{-2\lambda} \in F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ ($\lambda \in P_+$) map to invertible operators in $\mathrm{End}(M)$.

1. M is a ønite dimensional algebra, and is also a left $U_q\mathfrak{g}$-module (for the adjoint action). The multiplication in M deønes a morphism of left $U_q\mathfrak{g}$-modules: $M \otimes M \to M$. Thus the Q-graduation of M (deøned by the structure of $U_q\mathfrak{g}$-module) is an algebra grading.

2. We øx $\lambda \in P_+$. We can write $M = M_0 \oplus M_\infty$ (as $\mathbb{C}(q)$-vector space) where $K_{-2\lambda}$ acts nilpotently on $M_0$ and inversibly on $M_\infty$ (Fitting's decomposition). $M_0$ and $M_\infty$ are stable by the commutant of $K_{-2\lambda}$ in $\mathrm{End}(M)$, so are right ideals of M. If $x \in F_\ell(U_q\mathfrak{g})$ is homogeneous w.r.t. the Q-graduation of $F_\ell(U_q\mathfrak{g})$, $x$ commutes (up to a scalar) with $K_{-2\lambda}$, so $M_0$ and $M_\infty$ are stable by left multiplication by $x$. Thus $M_0$ and $M_\infty$ are also left ideals of M.

3. We now show that $M_0$ and $M_\infty$ are $U_q\mathfrak{g}$-submodules of M.

   (a) Let $\{e_1, \dots, e_k\}$ be the set of central idempotents in M. The elements $K_\mu$ ($\mu \in P$) of $U_q\mathfrak{g}$ act on M (by the adjoint action) as algebra automorphisms, so permute the elements of the set $\{e_1, \dots, e_k\}$. Hence for each $\mu$, there exists an integer $n \geq 1$ such that $K_{n\mu}$ øxes each $e_i$. Since M is, as a $U_q\mathfrak{g}$-module, a direct sum of modules $L(\nu)$ (without any twisting character $\chi$), and since $q$ is generic, we conclude that $e_1$, ..., $e_k$ are øxed by the adjoint action of the elements $K_\mu$.

(b) Let $e$ be a central idempotent in $\mathrm{M}$. $e$ is of weight zero. We consider the $q$-exponential

$$\exp_q(\operatorname{ad} E_i) = \sum_{n \geq 0} q^{-d_i n(n-1)/2} \frac{\operatorname{ad} E_i^n}{[n]_i!} \quad \text{for } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

Then $\exp_q(\operatorname{ad} E_i)$ is a well deøned operator in $\mathrm{M}$. The formula

$$\Delta(E_i^n) = \sum_{k=0}^{n} nk_i q^{d_i(n-k)k} E_i^{n-k} K_{\alpha_i}^k \otimes E_i^k$$

enables us to see that $\exp_q(\operatorname{ad} E_i)(e)$ is an idempotent which we write $e+x$. Then $2ex + x^2 = x$, $x(1-2e) = x^2$ and $x = x(1-2e)^2 = x^3$. The weights of the Q-homogeneous components of $x$ belong to $\{n\alpha_i \mid n \geq 1\}$; so the weights of the Q-homogeneous components of $x^3$ belong to $\{n\alpha_i \mid n \geq 3\}$, and the homogeneous component of $x$ of weight $\alpha_i$ is null. We obtain that

$$(\operatorname{ad} E_i)(e) = 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

Similarly,

$$(\operatorname{ad} F_i)(e) = 0 \quad \text{for } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

(c) $\mathrm{M}_0$ and $\mathrm{M}_\infty$ are ideals in $\mathrm{M}$ generated by central idempotents $e_0$ and $e_\infty$ respectively. (a) and (b) show that $e_0$ and $e_\infty$ deøne the trivial $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module. Hence for $x \in \mathrm{M}_0$ and $u \in \mathrm{U}_q\mathfrak{g}$,

$$u \cdot x = u \cdot (xe_0) = (u_{(1)} \cdot x)(u_{(2)} \cdot e_0) = (u_{(1)} \cdot x)\varepsilon(u_{(2)})e_0 = (u \cdot x)e_0 \in \mathrm{M}_0.$$

The same holds for $\mathrm{M}_\infty$.

4. We ørst consider the case $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. We choose naturally $\lambda = \varpi$ the fundamental weight, and write $\mathrm{M}_0 = \mathcal{L}_0/\mathcal{I}$ and $\mathrm{M}_\infty = \mathcal{L}_\infty/\mathcal{I}$. The points 2) and 3) show that $\mathcal{L}_0$ and $\mathcal{L}_\infty$ are two-sided ideals and left $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-submodules of $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$. By deønition of the Fitting decomposition, there exists an integer $n \geq 0$ such that $K_{-2n\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$. Hence for all integers $m \geq n$, we have $K_{-2m\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$, and thus $z_{m\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$. Let $n_0 \geq 0$ be the smallest integer such that for all $m \geq n_0$, $z_{m\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$. The proposition 10 and the Clebsch˘Gordan theorem show that if $n \geq 1$

$$z_{(n+1)\varpi} + z_{(n-1)\varpi} = z_\varpi z_{n\varpi}.$$

Thus $n_0$ has to be equal to zero. So $1 = z_0 \in \mathcal{L}_\infty$, $\mathrm{M}_\infty = \mathrm{M}$, and $K_{-2\varpi}$ acts inversibly on $\mathrm{M}$.

5. The general case is solved in the same way. We consider the decomposition of the point 2) and write $\mathrm{M}_0 = \mathcal{L}_0/\mathcal{I}$ and $\mathrm{M}_\infty = \mathcal{L}_\infty/\mathcal{I}$. $\mathcal{L}_0$ and $\mathcal{L}_\infty$ are two-sided ideals and left $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-submodules of $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$, and there exists an integer $n \geq 0$ such that $K_{-2n\lambda} \in \mathcal{L}_\infty$.

If $\varpi \in \mathrm{P}_+$, then $K_{-2(n\lambda+\varpi)} \in \mathcal{L}_\infty$, and thus $z_{n\lambda+\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$. Let $\varphi$ be the $\mathbb{Q}$-algebra morphism

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \to & \mathrm{Z}(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) \\ & [\mathrm{M}] & \mapsto & \mathrm{I}(\mathrm{Tr}_{\mathrm{M}}(K_{2\rho}-)) \end{array}$$

considered at the end of section 3.2.2. Then $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_\infty)$ is an ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, which contains all the elements $[\mathrm{L}(-w_0 n\lambda + \varpi)]$ $(\varpi \in \mathrm{P}_+)$. Thus $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_\infty) = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ by the proposition 11, and so $1 = \varphi([\mathrm{L}(0)]) \in \mathcal{L}_\infty$, $\mathrm{M}_\infty = \mathrm{M}$, and $K_{-2\lambda}$ acts inversibly on $\mathrm{M}$.

□

Remark :
This result is a particular case of the proposition 8.4.13 in [14]. Accordingly, its proof is shorter than the one of Joseph's theorem, and does not require the knowledge of the inclusions between Verma modules, nor the use of Gel′fandˇKirillov dimensions.

### 3.2.5 Classiøcation of some right ideals of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$

The notations $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$, $\mathrm{V}$ have the same meaning as in sections 3.2.1 and 3.2.4. The map $\mathrm{I} : \mathcal{A}_q\mathrm{G} \tilde{\to} \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$ was introduced in section 3.1.3.

We now specify the structure of the ønite dimensional V-modules: they are completely reducible; each $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$-module $\mathrm{L}_\chi(\lambda)$ , with $\lambda \in \mathrm{P}_+$, $\chi : \mathrm{P}/2\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$, is by restriction a simple V-module; the V-modules $\mathrm{L}_\chi(\lambda)$ and $\mathrm{L}_\varphi(\mu)$ are isomorphic iœ $\lambda = \mu$ and the characters $\chi$, $\varphi$ restrict to the same character $2\mathrm{P}/2\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$. The simple ønite dimensional V-modules will be denoted by $\mathrm{L}_\chi(\lambda)$ with $\lambda \in \mathrm{P}_+$ and $\chi : 2\mathrm{P}/2\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$ a character. We ønally remark (see [15]) that a simple ønite dimensional V-module is still simple as a $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$-module. Consequently, if $(\mathrm{M}_i)$ is a ønite family of non-isomorphic ønite dimensional simple V-modules, the natural ring homomorphism $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g}) \to \bigoplus \mathrm{End}\,\mathrm{M}_i$ is surjective.

Theorem 1

1. Let $\mathcal{R}$ be a ønite codimensional right ideal of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, which is a subcomodule of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ w.r.t. the right coaction

   $$\begin{array}{rccl} \delta_{\mathrm{R}} : & \mathcal{A}_q\mathrm{G} & \to & \mathcal{A}_q\mathrm{G} \otimes \mathcal{A}_q\mathrm{G} \\ & a & \mapsto & a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)} \end{array}$$

   Then there exists a ønite dimensional V-module M such that

   $$\mathcal{R} = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\,\mathrm{M}).$$

2. If M is a ønite dimensional V-module, then $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\,\mathrm{M})$ is a ønite codimensional right ideal of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, stable by the right coaction

   $$\begin{array}{rccl} \delta_{\mathrm{R}} : & \mathcal{A}_q\mathrm{G} & \to & \mathcal{A}_q\mathrm{G} \otimes \mathcal{A}_q\mathrm{G} \\ & a & \mapsto & a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)} \end{array}$$

3. If $\mathrm{M}$ and $\mathrm{N}$ are ønite dimensional V-modules, then $\mathrm{M}$ and $\mathrm{N}$ have the same irreducible components iœ

$$\mathrm{I}^{-1}(\operatorname{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\mathrm{M}) = \mathrm{I}^{-1}(\operatorname{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\mathrm{N}).$$

4. If $\mathrm{M}$ is a ønite dimensional V-module, then $\mathrm{M}$ contains the trivial V-module iœ $\mathrm{I}^{-1}(\operatorname{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\mathrm{M})$ is included in the augmentation ideal of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$.

Proof.
1) and 2) are consequences of the propositions 7 and 12. Let $\mathrm{M}$ and $\mathrm{N}$ be two ønite dimensional V-modules having the same annihilator in $\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})$. Then

$$\operatorname{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\mathrm{M} = \operatorname{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathrm{M}\oplus\mathrm{N}).$$

Let $\mathrm{M}_1,\dots,\mathrm{M}_k$ (respectively $\mathrm{M}_1,\dots,\mathrm{M}_n$) be the distinct irreducible components of $\mathrm{M}$ (respectively $\mathrm{M}\oplus\mathrm{N}$). Then we have

$$\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})/\operatorname{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}\mathrm{M} \simeq \bigoplus_{i=1}^{k}\operatorname{End}\mathrm{M}_i, \quad \mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})/\operatorname{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathrm{M}\oplus\mathrm{N}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n}\operatorname{End}\mathrm{M}_i.$$

So $k = n$ and all the irreducible components of $\mathrm{N}$ appear in $\mathrm{M}$. 3) follows. 4) can be proved in a similar way, using the fact that the augmentation ideal of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ is the inverse image by $\mathrm{I}$ of the annihilator of the trivial V-module. □

## 3.3 Diœerential calculi on quantum groups

### 3.3.1 Woronowicz's deønition

Let $\mathcal{A}$ be a Hopf algebra, $\Gamma$ be a bicovariant bimodule and $d : \mathcal{A} \to \Gamma$ be a linear map. We say that $(\Gamma, d)$ is a bicovariant diœerential calculus on $\mathcal{A}$ if $d$ is a derivation, a morphism of two-sided comodules and if the image of $d$ generates the left $\mathcal{A}$-module $\Gamma$. The dimension of the space $\Gamma^{\mathrm{L}}$ of left coinvariants will be supposed to be ønite.

When $(\Gamma, d)$ is a diœerential calculus over $\mathcal{A}$, we note $d^{\mathrm{L}}$ the map

$$\begin{array}{rccl} d^{\mathrm{L}}: & \mathcal{A} & \to & \Gamma^{\mathrm{L}} \\ & a & \mapsto & S(a_{(1)})\cdot d(a_{(2)}) \end{array}$$

The subspace $\mathcal{R} = \ker d^{\mathrm{L}} \cap \ker\varepsilon$ is a ønite codimensional right ideal of $\mathcal{A}$, and a subcomodule for the right coadjoint coaction

$$\begin{array}{rccl} \delta_{\mathrm{R}}: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\ & a & \mapsto & a_{(2)}\otimes S(a_{(1)})a_{(3)} \end{array}$$

As shown by Woronowicz, the subspace $\mathcal{R}$ determines (up to isomorphism) the bicovariant diœerential calculus $(\Gamma, d)$: we call it the ideal associated to $(\Gamma, d)$.

Geometrically, $\mathcal{A}$ must be viewed as the algebra of functions over a group $\mathrm{G}$, $\Gamma$ is the space of 1-forms on $\mathrm{G}$, $\Gamma^{\mathrm{L}}$ is the space of left-$\mathrm{G}$-invariant 1-forms on $\mathrm{G}$, identiøed with the cotangent space at the unity point of $\mathrm{G}$, and $d^{\mathrm{L}}$ maps a function on $\mathrm{G}$ to its diœerential at the unity point.

### 3.3.2 A construction of bicovariant diœerential calculi

Let $\mathcal{A}$ be a c.q.t. Hopf algebra over the øeld $k$, and let $\gamma$, $\delta$ be the associated maps.

We take a ønite dimensional right $\mathcal{A}$-comodule $\mathrm{M}$. We note $(m_i)$ a basis of $\mathrm{M}$, $(m_i^*)$ the dual basis, and $R_{ij}$ the elements of $\mathcal{A}$ such that

$$\delta_{\mathrm{R}}(m_i) = \sum m_j \otimes R_{ji}.$$

Then

$$\Delta R_{ji} = \sum R_{jk} \otimes R_{ki}, \quad \varepsilon(R_{ji}) = \delta_{ji}.$$

where $\delta_{ji}$ is the Kronecker's symbol. Also, $\mathrm{M}$ is a left $\mathcal{A}^*$-module, and the $R_{ji}$ (viewed as linear forms on $\mathcal{A}^*$) are the matrix coeŒcients $\theta_{\mathrm{M}}(m_i, m_j^*)$ of this module.

Since $(\mathcal{A}, \gamma)$ is c.q.t., $\mathrm{M}$ becomes a right crossed bimodule over $\mathcal{A}$ for the action

$$m_i \cdot a = \sum \langle \gamma(a), R_{ji} \rangle m_j.$$

$\mathrm{M}^*$ is a right comodule over $\mathcal{A}$ too, for the coaction

$$\delta_{\mathrm{R}}(m_i^*) = \sum m_j^* \otimes S(R_{ij}).$$

Using the fact that $(\mathcal{A}, \delta)$ is a c.q.t. Hopf algebra, we may endow $\mathrm{M}^*$ with the structure of a right crossed bimodule over $\mathcal{A}$ for the action

$$m_i^* \cdot a = \sum \langle \delta(a), S(R_{ij}) \rangle m_j^*.$$

Then, by making the tensor product, we obtain that $\mathrm{End}(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{M} \otimes \mathrm{M}^*$ is a right crossed bimodule.

We denote by $\Gamma$ the bicovariant bimodule associated to this right crossed bimodule $\mathrm{End}(\mathrm{M})$. As a vector space, $\Gamma$ is just the tensor product $\mathcal{A} \otimes \mathrm{M} \otimes \mathrm{M}^*$. On the basic elements, the structure maps are:

$$\begin{aligned}
b \cdot (a \otimes m_i \otimes m_j^*) &= ba \otimes m_i \otimes m_j^* \\
(a \otimes m_i \otimes m_j^*) \cdot b &= \sum ab_{(1)} \otimes \langle \gamma(b_{(2)}), R_{ki} \rangle m_k \otimes \langle \delta(b_{(3)}), S(R_{j\ell}) \rangle m_\ell^* \\
\delta_{\mathrm{L}}(a \otimes m_i \otimes m_j^*) &= a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes m_i \otimes m_j^* \\
\delta_{\mathrm{R}}(a \otimes m_i \otimes m_j^*) &= \sum a_{(1)} \otimes m_k \otimes m_\ell^* \otimes a_{(2)} R_{ki} S(R_{j\ell}).
\end{aligned}$$

It follows that the canonical element $X = \sum 1 \otimes m_i \otimes m_i^*$ of $\Gamma$ is left and right coinvariant. The linear map

$$\begin{array}{rccc}
d: & \mathcal{A} & \rightarrow & \Gamma \\
 & a & \mapsto & X \cdot a - a \cdot X
\end{array}$$

is then a derivation and a morphism of two-sided comodules.

Theorem 2

1. If $(\mathcal{A}, \gamma)$ is a factorizable c.q.t. Hopf algebra and if $\mathrm{M}$ is a simple ønite dimensional non-trivial $\mathcal{A}$-comodule, then the above construction gives a bicovariant diœerential calculus $d : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma \equiv \mathcal{A} \otimes \mathrm{End}(\mathrm{M})$.

2. Its associated ideal is $\mathcal{R} = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathcal{A}^*}(k \oplus \mathrm{M}))$, where $k$ is the trivial $\mathcal{A}^*$-module.

Proof.
We first compute for $a \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} d(a) &= \sum a_{(1)}\langle \mathrm{I}(a_{(2)}), R_{k\ell}\rangle \otimes m_k \otimes m_\ell^* - a_{(1)}\langle a_{(2)}, \delta_{k\ell}\rangle \otimes m_k \otimes m_\ell^* \\ &= \sum a_{(1)}\langle \mathrm{I}(a_{(2)}), R_{k\ell} - \delta_{k\ell}\rangle \otimes m_k \otimes m_\ell^* \end{aligned}$$

and so:

$$\begin{aligned} d^{\mathrm{L}}(a) &= \sum \langle \mathrm{I}(a - \varepsilon(a)), R_{k\ell}\rangle m_k \otimes m_\ell^* \\ &= \sum \langle \mathrm{J}(R_{k\ell} - \delta_{k\ell}), a\rangle m_k \otimes m_\ell^*. \end{aligned}$$

The $R_{ji}$ are the matrix coefficients $\theta_{\mathrm{M}}(m_i, m_j^*)$ of the $\mathcal{A}^*$-module $\mathrm{M}$, which is irreducible and non-trivial. Thus, by the Jacobson density theorem, the $(\dim \mathrm{M})^2 + 1$ elements $\{1, R_{ji}\}$ are linearly independant in $\mathcal{A}$. The $(\dim \mathrm{M})^2$ linear forms $\{\mathrm{J}(R_{k\ell} - \delta_{k\ell})\}$ are then linearly independant in $\mathcal{A}^*$, and the formula for $d^{\mathrm{L}}(a)$ shows that $d^{\mathrm{L}}$ maps $\mathcal{A}$ onto $\Gamma^{\mathrm{L}} = \mathrm{End}(\mathrm{M})$. 1) is proved. The same formula shows that $\mathcal{R}$ is the set of elements $a$ in the augmentation ideal of $\mathcal{A}$ such that $\mathrm{I}(a)$ is orthogonal to all the matrix coefficients $R_{k\ell}$ of the $\mathcal{A}^*$-module $\mathrm{M}$. Thus

$$\mathcal{R} = \ker \varepsilon \cap \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathcal{A}^*} \mathrm{M}) = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathcal{A}^*}(k \oplus \mathrm{M})).$$

We have shown 2). □

If we consider now a finite family $(\mathrm{M}_i)$ of non-trivial non-isomorphic finite dimensional simple right $\mathcal{A}$-comodules, we can do the direct sum of such constructions. If $(\mathcal{A}, \gamma)$ is factorizable, then the map $d : \mathcal{A} \to \bigoplus(\mathcal{A} \otimes \mathrm{End}\,\mathrm{M}_i)$ is a bicovariant differential calculus. The associated ideal is $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathcal{A}^*}(k \oplus \bigoplus \mathrm{M}_i))$.

### 3.3.3 The link with the classification theorem

We are now gathering the pieces of our patchwork. According to the statements in section 3.3.1, the theorem 1 yields a complete classification of bicovariant differential calculi on $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$. Morally, they are all given by the construction described in section 3.3.2.

Proposition 13
Let $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ and $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ be the objects defined in section 3.2.1. If the root and the weight lattices for $\mathfrak{g}$ are equal, all the bicovariant differential calculi on $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ can be constructed by the method described in section 3.3.2.

Proof.
The results in section 3.2.5 tell us that an ideal $\mathcal{R}$ associated to a bicovariant differential calculus on $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ is a subspace $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})} \mathrm{M})$, where $\mathrm{M}$ is a V-module containing the trivial V-module. Let $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ be the distinct non-trivial irreducible components of $\mathrm{M}$. The assumption on $\mathfrak{g}$ gives us that the $\mathrm{M}_i$ are modules $\mathrm{L}(\lambda_i)$, and so can be considered as non-trivial non-isomorphic simple right $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$-comodules. The construction of section 3.3.2

for this family of comodules leads to a bicovariant dœerential calculus whose associated ideal is the inverse image by $\mathrm{I}$ of the annihilator of the $(\mathcal{A}_q\mathrm{G})^*$-module $\mathbb{C}(q)\oplus\bigoplus \mathrm{M}_i$. It is $\mathcal{R}$, and the proposition is proved. $\square$

In the remainder of this section, we will discuss what happens when the root and the weight lattices diœer. Up to the end of this article, we consider this case. There exist non-trivial characters $\chi : 2\mathrm{P}/2\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$, and for any weight $\lambda$, we can look at the ideal

$$\mathcal{R} = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q)\oplus \mathrm{L}_\chi(\lambda))),$$

and at the associated bicovariant diœerential calculus. It cannot be constructed by the method of the theorem 2, since $\mathrm{L}_\chi(\lambda)$ is not a right $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$-comodule. However, one may notice that the main trick in the construction of section 3.3.2 consisted in using two diœerent $R$-matrices, namely $R_{12}$ and $R_{21}^{-1}$. $R_{12}$ was used to endow the $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$-comodule $\mathrm{L}(\lambda)$ with the structure of a right crossed bimodule over $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, and $R_{21}^{-1}$ turned the $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$-comodule $\mathrm{L}(\lambda)^*$ into a right crossed bimodule over $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$. The tensor product of these right crossed bimodules then gave the bicovariant diœerential calculus associated to $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q)\oplus \mathrm{L}(\lambda)))$. When one uses the small freedom allowed in the choice of the $R$-matrix of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ (see [13]), one can make similar constructions for the bicovariant diœerential calculi associated with some of the ideals $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q)\oplus \mathrm{L}_\chi(\lambda)))$. We will not write all the details, but point out that this is the way followed by Schmdgen and Schler for the construction described in [28], theorem 2.2.

As an example, we now describe explicitely the bicovariant diœerential calculus associated with the ideal

$$\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q)\oplus \mathrm{L}_\chi(0))).$$

Let $(\mathrm{P}/\mathrm{Q})^\wedge$ be the group of characters $\zeta : \mathrm{P}/\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$. If $\zeta$ is such a character, it extends to a one-dimensional representation $\bar\zeta$ of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ by letting

$$\bar\zeta(\theta_{\mathrm{L}(\lambda)}(m, m^*)) = \zeta(\lambda \bmod \mathrm{Q})\langle m^*, m\rangle,$$

and this gives an inclusion of the group $(\mathrm{P}/\mathrm{Q})^\wedge$ into the center of $(\mathcal{A}_q\mathrm{G})^{*\,\mathrm{res}}$. Since $(\bar\zeta\otimes \mathrm{id})\circ\delta_{\mathrm{R}} : \mathcal{A}_q\mathrm{G} \to \mathbb{C}(q)\otimes\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ is given by $x \mapsto \bar\zeta(x)\otimes 1$, we can see that the kernel of $\bar\zeta$ is a one-codimensional two-sided ideal of $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$, stable by the right coaction $\delta_{\mathrm{R}}$. If $\zeta$ is non-trivial, the ideal $\mathcal{R} = \ker\varepsilon\cap\ker\bar\zeta$ deønes a bicovariant diœerential calculus on $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$. Putting

$$\begin{array}{rccc} \chi : & 2\mathrm{P}/2\mathrm{Q} & \to & \mathbb{C}(q)^\times \\ & 2\lambda \bmod 2\mathrm{Q} & \mapsto & \zeta(\lambda \bmod \mathrm{Q}) \end{array}$$

we can check that

$$\mathcal{R} = \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q)\oplus \mathrm{L}_\chi(0))).$$

This construction gives all the one-dimensional diœerential calculi on $\mathcal{A}_q\mathrm{G}$ (generalizing the result of [28], remark 4 after the theorem 2.2).

Finally, let $\mathrm{X}$ be an intermediate lattice between $\mathrm{P}$ and $\mathrm{Q}$. The matrix coeŒcients of the irreducible representations of $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ whose highest weight belongs to $\mathrm{X}$ span a subalgebra $\mathcal{A}_q\mathrm{G}_{\mathrm{X}} \subseteq \mathcal{A}_q\mathrm{G}$. These algebras $\mathcal{A}_q\mathrm{G}_{\mathrm{X}}$ are factorizable c.q.t. Hopf algebras. For instance,

$\mathcal{A}_q\mathrm{G}_{\mathrm{Q}}$ is the algebra of functions on the quantum adjoint group, and $\mathcal{A}_q\mathrm{G} \equiv \mathcal{A}_q\mathrm{G}_{\mathrm{P}}$ is the algebra of functions on the quantum simply-connected group. Our arguments in the section 3.2.5 show that the indecomposable bicovariant diœerential calculi on $\mathcal{A}_q\mathrm{G}_{\mathrm{X}}$ are classiøed by ideals

$$\mathcal{R} = \mathcal{A}_q\mathrm{G}_{\mathrm{X}} \cap \mathrm{I}^{-1}(\mathrm{ann}_{\mathrm{F}_\ell(\mathrm{U}_q\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q) \oplus \mathrm{L}_\chi(\lambda))),$$

where $\chi : 2\mathrm{X}/2\mathrm{Q} \to \mathbb{C}(q)^\times$ is a character (extended arbitrarily to a character of the group $2\mathrm{P}/2\mathrm{Q}$). Thus the ıtwistedȷ bicovariant diœerential calculi are non-local, their appearance depending of the choice of $\mathrm{X}$. The bicovariant diœerential calculi seem localized at the central elements of $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}$, that is to say, at the øxed points of $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}$ under the adjoint action.

# Homologie de Hochschild des algbres de battages quantiques

## Introduction

A tout espace vectoriel tress $(V, \sigma)$ est associ son algbre de battages quantique $\mathrm{T}_\sigma(V)$. L'espace vectoriel sous-jacent de $\mathrm{T}_\sigma(V)$ est celui de l'algbre tensorielle $\mathrm{T}(V)$ et le produit est obtenu via l'action des battages releve aux groupes des tresses sur les puissances tensorielles de $V$. L'algbre $\mathrm{T}_\sigma(V)$ n'est pas engendre par $V$. Pour certains exemples de tressages, la sous-algbre de $\mathrm{T}_\sigma(V)$ engendre par $V$ n'est autre que la sous-algbre $\mathrm{U}_q\mathfrak{n}_+$ des algbres enveloppantes quantiques. Dans ses travaux (cf. [31]), A. Varchenko relie la cohomologie de Hochschild de $\mathrm{U}_q\mathfrak{n}_+$ valeurs dans certains modules la cohomologie de certains groupes des tresses pures. En s'appuyant sur des travaux de C. de Concini et M. Salvetti (cf. [6]), nous montrons comment l'homologie de Hochschild de l'algbre $\mathrm{T}_\sigma(V)$ valeurs dans le bimodule trivial est relie la cohomologie du groupe des tresses valeurs dans les puissances tensorielles de $V$.

La construction du complexe de cochanes de C. de Concini et M. Salvetti est rappele dans la premire partie. Aprs avoir nonc le thorme de C. de Concini et M. Salvetti qui permet de relier la cohomologie de leur complexe la cohomologie du groupe des tresses, nous transformons ce complexe de cochanes en un complexe de chanes. La construction de l'algbre de battages quantique associe un espace vectoriel tresse est explique dans la seconde partie. Dans la troisime partie, nous dønissons pour toute algbre de battages quantique une graduation de son homologie de Hochschild. En utilisant le complexe de chanes døni dans la premire partie, nous relions la composante de degr $n$ de l'homologie de Hochschild de cette algbre la cohomologie du groupe des tresses $n$ brins.

## Notations

Le cardinal d'un ensemble $I$ sera not $\operatorname{card} I$. Pour toute partie $J$ d'un ensemble $I$, nous noterons $J^{\mathrm{c}}$ le complmentaire de $J$ dans $I$.

Les espaces vectoriels considrs dans cet article sont des espaces vectoriels sur un corps commutatif $k$ øx. Les oprations d'algbre linaire (produit tensoriel, ...) auront lieu dans la catgorie des $k$-espaces vectoriels. Si $V$ est un espace vectoriel, nous noterons $V^{\otimes n}$ sa $n$-ime puissance tensorielle.

Le groupe des permutations de $n$ lments sera not $S_n$. Pour tout entier $i$ compris entre $1$ et $n-1$, nous dsignerons par $\tau_i$ la transposition $(i, i+1)$ de $S_n$. L'ensemble form par ces transpositions sera not $S$ et sera muni de la relation d'ordre suivante : $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1}$. Pour toute permutation $P$ de $S_n$, nous noterons $\ell(P)$ sa longueur. Si $\Gamma$ est une partie de $S_n$, nous noterons $< \Gamma >$ le sous-groupe de $S_n$ engendr par les lments de $\Gamma$.

Le groupe des tresses  $n$ brins sera not $B_n$ et nous dsignerons par $s_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ ses gnrateurs.

## 4.1 Le complexe de C. de Concini et M. Salvetti

Dans [6], C. de Concini et M. Salvetti construisent un complexe de cochanes  partir d'un systme de Coxeter et d'une reprsentation de son groupe d'Artin. Ils dmontrent que ce complexe de cochanes permet de calculer la cohomologie de ce groupe d'Artin. Dans cette partie, nous considrons le systme de Coxeter $(S_n, S)$. Le groupe d'Artin qui lui est associ est le groupe des tresses $B_n$. Choisissons une reprsentation $\rho_n$ de $B_n$ dans $U$. Pour ces donnes, le construction du complexe de cochanes de C. de Concini et M. Salvetti sera rappele. Nous noncerons le thorme de C. de Concini et M. Salvetti qui permet de relier la cohomologie de ce complexe  la cohomologie de $B_n$  valeurs dans $U$. Finalement, pour des raisons pratiques qui apparatront  la øn de cet article, nous transformerons le complexe de cochanes de C. de Concini et M. Salvetti en un complexe de chanes.

Comme l'explique H. Matsumoto (cf. [19]), le morphisme de groupe $B_n \to S_n$ qui associe respectivement aux gnrateurs $s_1, \ldots, s_{n-1}$ les transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ admet une section

$$\Pi : S_n \longrightarrow B_n.$$

Cette section est dønie comme suit : si la permutation $P$ de $S_n$ admet $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_{\ell(P)}}$ pour dcomposition rduite, alors

$$\Pi(P) = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{\ell(P)}}.$$

Pour tout couple $(\Gamma, \Gamma')$ de sous-ensembles de $S$ vriøant $\Gamma \subset \Gamma'$, C. de Concini et M. Salvetti dønissent l'endomorphisme de $U$

$$T^{\Gamma}_{\Gamma'}(-\rho_n) = \sum_{P \in S_n(\Gamma', \Gamma)} (-1)^{\ell(P)} \Pi(P),$$

o

$$S_n(\Gamma', \Gamma) = \{P \in < \Gamma' > \mid \ \forall Q \in \Gamma, \ \ell(PQ) > \ell(P)\}.$$

Pour tout entier $p$ compris entre 0 et $n-1$, notons $\mathcal{C}^p$ l'espace vectoriel $U^{\wedge^p S}$, o $\wedge^p S$ dsigne l'ensemble des parties  $p$ lments de $S$. Etant donns un lment $c$ de $\mathcal{C}^p$ et un lment $\Gamma$ de $\wedge^p S$, notons $c(\Gamma)$ la $\Gamma$-ime composante de $c$. Avec cette convention, nous dønissons pour tout entier $p$ compris entre 0 et $n-2$ une application $\delta^p : \mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}^{p+1}$ en posant pour tout lment $c$ de $\mathcal{C}^p$ et tout $\Gamma$ de $\wedge^{p+1} S$

$$\delta^p(c)(\Gamma) = \sum_{r=1}^{p+1} (-1)^r T_{\Gamma}^{\Gamma \setminus \{\tau_{i_r}\}}(-\rho_n) \left(c(\Gamma \setminus \{\tau_{i_r}\})\right),$$

o $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_{p+1}}$ sont les lments de $\Gamma$ ordonns par ordre croissant. D'aprs C. de Concini et M. Salvetti, ces applications dønissent un complexe de cochanes.

Dønition 5
On appelle complexe de cochanes de de Concini-Salvetti le complexe ci-dessous :

$$\mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^{n-3}} \mathcal{C}^{n-2} \xrightarrow{\delta^{n-2}} \mathcal{C}^{n-1}.$$

Dans [6], C. de Concini et M. Salvetti dmontrent le thorme suivant.

Thorme 6 (C. de Concini et M. Salvetti)
Le complexe de cochanes de de Concini-Salvetti permet de calculer la cohomologie valeurs dans $U$ du groupe des tresses $B_n$ :

$$\mathrm{H}^*(B_n, U) \simeq \mathrm{H}^*(\mathcal{C}^*, \delta^*).$$

Pour tout entier $p$ compris entre 0 et $n-1$, dønissons une application $\psi_p : \mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}^{n-1-p}$ en posant pour tout lment $c$ de $\mathcal{C}^p$ et tout $\Gamma$ de $\wedge^{n-1-p}S$

$$\psi_p(c)(\Gamma) = c(\Gamma^c).$$

Nous remarquons facilement que ces applications sont des isomorphismes et que $\psi_p$ admet $\psi_{n-1-p}$ pour inverse. Pour tout entier $p$ compris entre 1 et $n-1$, notons $\delta_p : \mathcal{C}^p \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}$ l'application dønie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^p \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "\psi_p"', "\wr"] & \mathcal{C}^{p-1} \arrow[d, "\psi_{p-1}", "\wr"'] \\
\mathcal{C}^{n-1-p} \arrow[r, "\delta^{n-1-p}"'] & \mathcal{C}^{n-1-p+1}
\end{tikzcd}$$

Comme les applications $\delta^p$ $(1 \leq p \leq n-1)$ dønissent un complexe de cochanes, les applications $\delta_p$ $(1 \leq p \leq n-1)$ dønissent un complexe de chanes.

Dønition 6
On appelle complexe de chanes de de Concini-Salvetti le complexe ci-dessous :

$$\mathcal{C}^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \mathcal{C}^{n-2} \xrightarrow{\delta_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^0.$$

En utilisant que l'application $\psi_p$ induit par passage au quotient un isomorphisme de $\ker \delta_p / \operatorname{im} \delta_{p+1}$ sur $\ker \delta^{n-1-p} / \operatorname{im} \delta^{n-1-p-1}$, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 14
Pour tout entier $p$ compris entre 0 et $n-1$, nous avons

$$\mathrm{H}_p(\mathcal{C}^*, \delta_*) \simeq \mathrm{H}^{n-1-p}(B_n, U).$$

Proposition 15

Soit $c$ un lment de $\mathcal{C}^p$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf ventuellement la $\Gamma$-ime. Les composantes non nulles de $\delta_p(c)$ sont des $(\Gamma \setminus \{\tau_i\})$-composantes, o $\tau_i$ est un lment de $\Gamma$. De plus, pour tout lment $\tau_i$ de $\Gamma$, nous avons

$$\delta_p(c)\left(\Gamma \setminus \{\tau_i\}\right) = (-1)^{\mathrm{card}\{\tau_j \in \Gamma^c \cup \{\tau_i\} \ \mid \ \tau_j \leq \tau_i\}} T_{\Gamma^c \cup \{\tau_i\}}^{\Gamma^c}(-\rho_n)(c\left(\Gamma\right)).$$

Preuve :

Par dønition de l'application $\delta_p$, nous avons pour tout lment $\Gamma'$ de $\wedge^{p-1} S$ la formule

$$\delta_p(c)\left(\Gamma'\right) = \sum_{r=1}^{n-1-p+1} (-1)^r T_{\Gamma'^c}^{\Gamma'^c \setminus \{\tau_{i_r}\}}(-\rho_n)\left(c\left(\Gamma' \cup \{\tau_{i_r}\}\right)\right),$$

o $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_{n-1-p+1}}$ sont les lments de $\Gamma'^c$ ordonns par ordre croissant. Comme la seule composante non nulle de $c$ est ventuellement la $\Gamma$-ime composante, il rsulte de la formule ci-dessus que, si $\Gamma'$ n'est pas de la forme $\Gamma \setminus \{\tau_i\}$ pour un lment $\tau_i$ de $\Gamma$, alors la $\Gamma'$-ime composante de $\delta_p(c)$ est nulle. Supposons maintenant que $\Gamma'$ est de la forme $\Gamma \setminus \{\tau_i\}$, o $\tau_i$ est un lment de $\Gamma$. Comme $\tau_i$ n'est pas un lment de $\Gamma'$, nous savons que $\tau_i$ est gal  $\tau_{i_r}$ pour un certain entier $r$ compris entre 1 et $n-1-p+1$. Les ensembles $\Gamma' \cup \{\tau_{i_r}\}$, $\Gamma'^c \setminus \{\tau_{i_r}\}$ et $\Gamma'^c$ sont alors respectivement gaux  $\Gamma$, $\Gamma^c$ et $\Gamma^c \cup \{\tau_i\}$. Nous dduisons donc de la formule prcdente que

$$\delta_p(c)\left(\Gamma \setminus \{\tau_i\}\right) = (-1)^{\mathrm{card}\{\tau_j \in \Gamma^c \cup \{\tau_i\} \ \mid \ \tau_j \leq \tau_i\}} T_{\Gamma^c \cup \{\tau_i\}}^{\Gamma^c}(-\rho_n)(c\left(\Gamma\right)).$$

$\square$

## 4.2 Les algbres de battages quantiques

Dans [24], M. Rosso associe  tout espace vectoriel tress une algbre associative appele algbre de battages quantique. Aprs avoir rappel la notion d'espace vectoriel tress, voyons comment M. Rosso construit ces algbres de battages quantiques.

### 4.2.1 Espaces vectoriels tresss

Dønition 7

On appelle espace vectoriel tress la donne d'un couple $(V, \sigma)$, o $V$ est un espace vectoriel et o $\sigma$ est une automorphisme de $V \otimes V$ vriøant l'quation de Yang-Baxter :

$$(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)$$

Par la suite, pour tout espace vectoriel tress $(V, \sigma)$ et tout entier $n \geq 2$, dsignons par $\sigma_i^n$ l'endomorphisme de $V^{\otimes n}$ døni par

$$\sigma_i^n = \overbrace{\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}}^{i-1} \otimes \sigma \otimes \overbrace{\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}}^{n-(i+1)}.$$

Grce l'quation de Yang-Baxter, on vriøe immdiatement la proposition suivante.

Proposition 16
La donne d'un espace vectoriel tress $(V, \sigma)$ permet de dønir pour tout entier $n \geq 2$ une reprsentation $\rho_n$ du groupe des tresses $n$ brins dans $V^{\otimes n}$ en posant

$$\begin{array}{rccl} \rho_n : & B_n & \to & \mathrm{Aut}(V^{\otimes n}) \\ & s_i & \mapsto & \sigma_i^n \end{array}$$

### 4.2.2 Dønition des algbres de battages quantiques

Soit $(V, \sigma)$ un espace vectoriel tress. Comme l'application $\sigma$ vriøe l'quation de Yang-Baxter, nous savons que pour toute permutation $P$ de $S_n$ nous pouvons dønir un automorphisme $P_\sigma$ de $V^{\otimes n}$ en posant

$$P_\sigma = \rho_n(\Pi(P)).$$

Pour tout couple $(n, p)$ d'entiers vriøant $1 \leq p \leq n$, posons

$$A_{n,p} = \sum_{P \in S_{n,p}} (-1)^{\ell(P)} P_\sigma \in \mathrm{End}(V^{\otimes n}),$$

o $S_{n,p}$ est l'ensemble des $(n, p)$-battages :

$$S_{n,p} = \{P \in S_n \mid P(i) < P(j) \text{ si } i < j \leq p \text{ ou } p < i < j\}.$$

Il est facile de vriøer que les applications $A_{n,p}$ ainsi dønies vriøent le lemme suivant.

Lemme 12
Pour tout triplet $(m, n, p)$ d'entiers strictement positifs, nous avons

$$A_{m+n+p,m+n}(A_{m+n,m} \otimes \mathrm{id}) = A_{m+n+p,m}(\mathrm{id} \otimes A_{n+p,n}).$$

Proposition 17
L'espace vectoriel $\oplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ admet une unique structure d'algbre associative telle que

- l'unit du corps de base soit l'unit de l'algbre,
- le produit d'un lment $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ de $V^{\otimes p}$ $(p > 0)$ par un lment $v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}$ de $V^{\otimes q}$ $(q > 0)$ soit donn par la formule

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = A_{p+q,p}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}).$$

Cette algbre est une algbre $\mathbb{N}$-gradue admettant $V^{\otimes n}$ pour composante de degr $n$.

Preuve :
Il est clair que les deux conditions imposes dønissent entirement le produit. En utilisant le lemme 12, il est facile de remarquer que ce produit est associatif. Cela prouve l'existence et l'unicit d'une telle algbre associative. Puisque le produit d'un lment de $V^{\otimes p}$ par un

lment de $V^{\otimes q}$ est un lment de $V^{\otimes p+q}$, cette algbre est une algbre $\mathbb{N}$-gradue au sens indiqu dans l'nonc. $\square$

Dønition 8
Soit $(V,\sigma)$ un espace vectoriel tress. On appelle algbre de battages quantique associe $(V,\sigma)$ et on note $\mathrm{T}_\sigma(V)$ l'unique algbre associative gradue $\oplus_{n\geq 0}V^{\otimes n}$ telle que :

- l'unit du corps de base $k$ soit l'unit de l'algbre,
- le produit d'un lment $v_1\otimes\cdots\otimes v_p$ de $V^{\otimes p}$ $(p>0)$ par un lment $v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+q}$ de $V^{\otimes q}$ $(q>0)$ soit donn par la formule

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)\cdot(v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+q}) = A_{p+q,p}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p\otimes v_{p+1}\otimes\cdots\otimes v_{p+q}).$$

## 4.3 Homologie de Hochschild des algbres de battages quantiques

Fixons un espace vectoriel tress $(V,\sigma)$. A cette donne est associe, d'une part, l'algbre $\mathrm{T}_\sigma(V)$, et d'autre part, une famille de reprsentations $(\rho_n : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(V^{\otimes n}))_n$. L'objet de cette partie est de relier l'homologie de Hochschild $\mathrm{H}_*(\mathrm{T}_\sigma(V),k)$ coeŒcients dans le bimodule trivial $k$ aux groupes de cohomologie $\mathrm{H}^*(B_n,V^{\otimes n})$ du groupe $B_n$ valeurs dans la reprsentation $\rho_n$. Aprs avoir explicit un complexe de chanes dønissant $\mathrm{H}_*(\mathrm{T}_\sigma(V),k)$, nous dønirons une graduation de cet espace : pour tout entier $p$, nous dcomposerons le groupe d'homologie $\mathrm{H}_p(\mathrm{T}_\sigma(V),k)$ en une somme $\oplus_{n\geq p}\mathrm{H}_p(\mathrm{T}_\sigma(V),k)_n$. Puis, en utilisant les complexes de chanes de de Concini-Salvetti qui correspondent aux reprsentations $\rho_n$, nous montrerons que pour tout couple d'entiers $(n,p)$ vriøant $1\leq p\leq n$, les espaces $\mathrm{H}_p(\mathrm{T}_\sigma(V),k)_n$ et $\mathrm{H}^{n-p}(B_n,V^{\otimes n})$ sont isomorphes.

### 4.3.1 Homologie de Hochschild de l'algbre $\mathrm{T}_\sigma(V)$

Soit $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)$ l'idal d'augmentation de $\mathrm{T}(V)$, i.e. le noyau du morphisme envoyant $V^{\otimes n}$ sur 0 pour tout $n\geq 1$. Cette algbre sans unit est gradue par les entiers $n\geq 1$ et admet $V^{\otimes n}$ pour espace de composante $n$. Pour tout entier $p\geq 1$, dønissons une application linaire $d_p : \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p} \longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p-1}$ en posant pour tout $v_{\underline{1}}\otimes v_{\underline{2}}\otimes\cdots\otimes v_{\underline{p}}$ de $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p}$

$$d_p\left(v_{\underline{1}}\otimes v_{\underline{2}}\otimes\cdots\otimes v_{\underline{p}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p=1 \\ \sum_{r=1}^{p}(-1)^r v_{\underline{1}}\otimes\cdots\otimes v_{\underline{r-1}}\otimes v_{\underline{r}}\cdot v_{\underline{r+1}}\otimes\cdots\otimes v_{\underline{p}} & \text{si } p\geq 2\end{cases}$$

Par associativit du produit, ces applications dønissent un complexe de chanes

$$\cdots\longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes n}\xrightarrow{d_n}\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_3}\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes 2}\xrightarrow{d_2}\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)\xrightarrow{d_1}k.$$

Proposition 18 (cf. [4], chapitre X)
L'homologie de Hochschild $\mathrm{H}_*(\mathrm{T}_\sigma(V),k)$ est l'homologie du complexe de chanes

$$\cdots\longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes n}\xrightarrow{d_n}\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_3}\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes 2}\xrightarrow{d_2}\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)\xrightarrow{d_1}k.$$

### 4.3.2 Graduation de l'homologie de Hochschild de l'algbre $T_\sigma(V)$

Pour tout entier $p \geq 1$, munissons l'espace vectoriel $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p}$ de la graduation tensorielle associe  la graduation de $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)$. L'algbre $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)$ tant gradue par les entiers $n \geq 1$, l'espace vectoriel $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p}$ est gradu par les entiers $n \geq p$. Pour tout entier $n \geq p \geq 1$, notons $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p}$ la composante de degr $n$ de $\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p}$ :

$$\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p} = \bigoplus_{n \geq p} \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p}.$$

Il est clair que pour tout entier $p \geq 2$, l'application $d_p : \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p} \longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{\otimes p-1}$ respecte la graduation. Ceci nous permet d'introduire la dønition suivante. Pour tout couple d'entiers $(n, p)$ vriøant $n \geq p \geq 1$, notons $d_{p,n} : \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p} \longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p-1}$ la composante homogne de $d_p$ de degr $n$. Pour tout entier $n \geq 1$, les applications $d_{p,n}$ dønissent un complexe de chanes :

$$\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes n} \xrightarrow{d_{n,n}} \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes n-1} \xrightarrow{d_{n-1,n}} \cdots \xrightarrow{d_{3,n}} \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes 2} \xrightarrow{d_{2,n}} \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n b \xrightarrow{d_{1,n}} k.$$

Dønition 9
Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle homologie de Hochschild de $T_\sigma(V)$ en degr $n$, note $\mathrm{H}_*(T_\sigma(V), k)_n$, l'homologie dønie par le complexe de chanes

$$\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes n} \xrightarrow{d_{n,n}} \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes n-1} \xrightarrow{d_{n-1,n}} \cdots \xrightarrow{d_{3,n}} \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes 2} \xrightarrow{d_{2,n}} \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n b \xrightarrow{d_{1,n}} k.$$

En utilisant que $d_p$ est gal  la somme $\sum_{n \geq p} d_{p,n}$, la proposition suivante est immdiate.

Proposition 19
Pour tout entier $p \geq 1$, nous avons

$$\mathrm{H}_p(T_\sigma(V), k) = \bigoplus_{n \geq p} \mathrm{H}_p(T_\sigma(V), k)_n.$$

### 4.3.3 Homologie de Hochschild de l'algbre $T_\sigma(V)$ en degr $n$

Dans cette partie, nous øxons un entier $n$ et nous considrons le complexe de chanes de de Concini-Salvetti qui correspond  la reprsentation $\rho_n$ de $B_n$ dans $V^{\otimes n}$. Pour tout entier $p$ vriøant $0 \leq p \leq n-1$ et tout lment $\Gamma$ de $\wedge^p S$, notons

$$C_\Gamma : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes i_1} \otimes V^{\otimes i_2 - i_1} \otimes \cdots \otimes V^{\otimes n - i_p} \subset \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)^{p+1}$$

l'application de csure dønie par

$$C_\Gamma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i_1}) \otimes (v_{i_1+1} \otimes \cdots \otimes v_{i_2}) \otimes \cdots \otimes (v_{i_p+1} \otimes \cdots \otimes v_n),$$

o $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_p}$ sont les lments de $\Gamma$ ordonns par ordre croissant. A partir de ces applications de csure, nous dønissons pour tout entier $p$ compris entre 0 et $n-1$ l'application linaire $\varphi_p : \mathcal{C}^p = (V^{\otimes n})^{\wedge^p S} \longrightarrow \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p+1}$ en posant pour tout lment $c$ de $\mathcal{C}^p$

$$\varphi_p(c) = \sum_{\Gamma \in \wedge^p S} C_\Gamma\left(c\left(\Gamma\right)\right).$$

Lemme 13
Pour tout entier $p$ compris entre 0 et $n-1$, l'application $\varphi_p$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve :
Il est clair que $\varphi_p$ admet pour inverse l'application $\phi_p : \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p+1} \longrightarrow (V^{\otimes n})^{\wedge^p S}$ dønie par

$$\phi_p(v_{\underline{1}} \otimes v_{\underline{2}} \otimes \cdots \otimes v_{\underline{p+1}})(\Gamma) = \begin{cases} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \text{si } \Gamma = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \\ 0 & \text{si } \Gamma \neq \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \end{cases}$$

o $v_{\underline{1}} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i_1}$, $v_{\underline{2}} = v_{i_1+1} \otimes \cdots \otimes v_{i_2}$, $\ldots$, $v_{\underline{p+1}} = v_{i_p+1} \otimes \cdots \otimes v_n$. $\square$

Proposition 20
Pour tout entier $p$ compris entre 1 et $n-1$, le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^p \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "\varphi_p"', "\wr"] & \mathcal{C}^{p-1} \arrow[d, "\varphi_{p-1}", "\wr"'] \\
\overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p+1} \arrow[r, "d_{p+1,n}"'] & \overline{\mathrm{T}}_\sigma(V)_n^{\otimes p}
\end{tikzcd}$$

Preuve :
Considrons un lment $c$ de $\mathcal{C}^p$ dont seule la $\Gamma$-ime composante, gale $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, est ventuellement non nulle. Grce la proposition 15, nous savons que

$$\varphi_{p-1}\left(\delta_p(c)\right) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^r T^{\Gamma^c}_{\Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\}}(-\rho_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n),$$

o $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_p}$ sont les lments de $\Gamma$ ordonns par ordre croissant. Par dønition, nous avons

$$T^{\Gamma^c}_{\Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\}}(-\rho_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{P \in S_n(\Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\}, \Gamma^c)} (-1)^{\ell(P)} \Pi(P)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n),$$

o $S_n(\Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\}, \Gamma^c)$ est l'ensemble des permutations $P$ qui appartiennent au sous-groupe engendr par $\Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\}$ et qui vriøent $\ell(P\tau_j) > \ell(P)$ pour tout $\tau_j$ de $\Gamma^c$. Des rsultats classiques sur le groupe symtrique nous permettent de voir que $S_n(\Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\}, \Gamma^c)$ est l'ensemble :

$$\{Q \in < \Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\} > \mid \ Q(j) < Q(j+1) \ \forall j \neq i_1, \ldots, i_p\}.$$

Or, nous vriøons aisment que cet ensemble correspond aux permutations $P$ de $S_n$ vriøant

- $P(j) = j$ si $j \leq i_{r-1}$ ou $j \geq i_{r+1} + 1$,
- $P(i) < P(j)$ si $i_{r-1} + 1 \leq i < j \leq i_r$ ou $i_r + 1 \leq i < j \leq i_{r+1}$.

Donc, comme nous utilisons $\sigma$ pour dønir la reprsentation $\rho_n$, nous avons

$$T^{\Gamma^c}_{\Gamma^c \cup \{\tau_{i_r}\}}(-\rho_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\underline{1}} \otimes \cdots \otimes v_{\underline{r-1}} \otimes v_{\underline{r}} \cdot v_{\underline{r+1}} \otimes \cdots \otimes v_{\underline{p+1}},$$

o

$$v_{\underline{1}} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i_1},\ v_{\underline{2}} = v_{i_1+1} \otimes \cdots \otimes v_{i_2},\ \ldots,\ v_{\underline{p+1}} = v_{i_p+1} \otimes \cdots \otimes v_n.$$

D'o

$$\varphi_{p-1}(\delta_p(c)) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^r v_{\underline{1}} \otimes \cdots \otimes v_{\underline{r-1}} \otimes v_{\underline{r}} \cdot v_{\underline{r+1}} \otimes \cdots \otimes v_{\underline{p+1}} = d_{p+1,n}(\varphi_p(c)).$$

Par linarit, cela achve la dmonstration. $\square$

Thorme 7
Pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n$ tel que $n \geq p$, nous avons

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{T}_\sigma(V), k)_n \simeq \mathrm{H}^{n-p}(B_n, V^{\otimes n}).$$

Preuve :
D'aprs la proposition 20, le groupe d'homologie $\mathrm{H}_p(\mathrm{T}_\sigma(V), k)_n$ est isomorphe au groupe d'homologie $\mathrm{H}_{p-1}(\mathcal{C}^*, \delta_*)$. Or, ce dernier est, d'aprs la proposition 14, isomorphe $\mathrm{H}_{n-p}(B_n, V^{\otimes n})$. Donc,

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{T}_\sigma(V), k)_n \simeq \mathrm{H}^{n-p}(B_n, V^{\otimes n}).$$

$\square$

# Bibliographie


[1] N. Bourbaki, Groupes et algbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Masson (1981).

[2] P. Baumann, F. Schmitt Classiøcation of bicovariant diœerential calculi on quantum groups (a representation-theoretic approach), paratre dans Communications in Mathematical Physics.

[3] P. Caldero, Elments ad-ønis de certains groupes quantiques, C. R. Acad. Sci. Paris 316 (1993), 327˘329.

[4] H. Cartan, S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press (1956).

[5] P. Cartier, Hyperalgbres et groupes de Lie formels, Sminaire "Sophus Lie" 1955/56.

[6] C. De Concini et M. Salvetti, Cohomology of Artin groups: Addendum: ıThe homotopy type of Artin groupsȷ, Math. Res. Lett. 3 (1996), 293˘297.

[7] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press (1994).

[8] C. Cuvier, Homologie de Leibniz et homologie de Hochschild, C. R. Acad. Sci. Paris t. 313 S. I (1991), 569˘572.

[9] V. G. Drinfel′d, Quantum groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Berkeley 1986, 798˘820, American Mathematical Society (1987).

[10] V. G. Drinfel′d, On almost cocommutative Hopf algebras, Leningrad Math. J. 1 (1990), 321˘342.

[11] W. T. van Est, Group cohomology and Lie algebra cohomology in Lie groups, I, II, Indagationes -Math. 15 (1953), 484˘492.

[12] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, Quantization of Lie groups and Lie algebras, Leningrad Math. J. 1 (1990), 193˘225.

[13] D. Gaitsgory, Existence and uniqueness of the $R$-matrix in quantum groups, J. Algebra 176 (1995), 653˘666.

[14] A. Joseph, Quantum groups and their primitive ideals, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 29, Springer-Verlag (1995).

[15] A. Joseph, G. Letzter, Local øniteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras, J. Algebra 153 (1992), 289ˇ318.

[16] A. Joseph, G. Letzter, Separation of variables for quantized enveloping algebras, Amer. J. Math 116 (1994), 127ˇ177.

[17] B. Juro, Diœerential calculus on quantized simple Lie groups, Lett. Math. Phys. 22 (1991), 177ˇ186.

[18] R. G. Larson, J. Towber, Two dual classes of bialgebras related to the concepts of ıquantum groupȷ and ıquantum Lie algebraȷ, Comm. Algebra 19 (1991), 3295ˇ3345.

[19] H. Matsumoto, Gnrateurs et relations des groupes de Weyl gnraliss, C. R. Acad. Sci. Paris 258 (1964), 3419ˇ3422.

[20] D. E. Radford, Minimal quasi-triangular Hopf algebras, J. Algebra 157 (1993), 285ˇ315.

[21] M. Rosso, Analogues de la forme de Killing et du thorme d'Harish-Chandra pour les groupes quantiques, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 23 (1990), 445ˇ467.

[22] M. Rosso, Algbres enveloppantes quantiøes, groupes quantiques compacts de matrices et calcul diœrentiel non commutatif, Duke Math. J. 61 (1990), 11ˇ40.

[23] M. Rosso, Certaines formes bilinaires sur les groupes quantiques et une conjecture de Schechtman et Varchenko, C. R. Acad. Sci. Paris 314 (1992), 5ˇ8.

[24] M. Rosso, Groupes quantiques et algbres de battage quantiques, C. R. Acad. Sci. Paris 320 (1995), 145ˇ148.

[25] N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky, Quantum $R$-matrices and factorization problems, J. Geom. Phys. 5 (1988), 533ˇ550.

[26] F. Schmitt, Une version quantique du thorme de van Est, paratre dans Journal of Pure and Applied Algebra.

[27] F. Schmitt, Homologie de Hochschild des algbres de battages quantiques, Preprint.

[28] K. Schmdgen, A. Schler, Classiøcation of bicovariant diœerential calculi on quantum groups of type A, B, C and D, Commun. Math. Phys. 167 (1995), 635ˇ670.

[29] K. Schmdgen, A. Schler, Classiøcation of bicovariant diœerential calculi on quantum groups, Commun. Math. Phys. 170 (1995), 315ˇ335.

[30] T. Tanisaki, Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal $R$-matrices for quantum algebras, Inønite analysis part B (Kyoto 1991), 941ˇ961, World Scientiøc Publishing (1992).

[31] A. Varchenko, Multidimensional hypergeometric functions and representation theory of Lie algebras and quantum groups, World Scientiøc Publishing Co. Inc. (1995).

[32] M. Wambst, Complexes de Koszul quantiques, Ann. Inst. Fourier 43, 4 (1993), 1089˘1156.

[33] S. L. Woronowicz, Diœerential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups), Commun. Math. Phys. 122 (1989), 152˘170.

[34] S. L. Woronowicz, Solutions of the braid equation related to a Hopf algebra, Lett. Math. Phys. 23 (1991), 143˘145.

[35] D. N. Yetter, Quantum groups and representations of monoidal categories, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 108 (1990), 261˘290.