Université Strasbourg I - Louis Pasteur

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

Thèse pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ STRASBOURG I

présentée et soutenue publiquement le 20 novembre 1998
par Florent URFELS

Fonctions L p-adiques et variétés abéliennes à multiplication complexe

Composition du jury

Monsieur P. Colmez, Docteur

Monsieur A. Pantchichkine, Professeur .... Rapporteur externe

Madame B. Perrin-Riou, Professeur .... Rapporteur externe

Monsieur N. Schappacher, Professeur .... Rapporteur interne

Monsieur J.P. Wintenberger, Professeur .... Directeur

Remerciements

Je remercie vivement messieurs Colmez et Wintenberger de m'avoir fait l'honneur de diriger cette thèse, ainsi que madame Perrin-Riou et messieurs Pantchichkine et Schappacher d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Toute ma gratitude va également à ma famille et mes amis, dont l'affection m'a permis de mener à bien ce travail.

Table des matières

Introduction

Relier les fonctions L d'Artin et les périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe est un problème déjà ancien. Le premier résultat dans cette direction a été obtenu par Anderson, qui réussit à exprimer les dérivées logarithmiques en $s = 0$ des fonctions L de Dirichlet à l'aide des périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe par une extension abélienne de $\mathbb{Q}$. Cependant le théorème d'Anderson n'est pas complètement satisfaisant en ce sens qu'il ne donne une formule qu'à un nombre algébrique près et qu'il serait intéressant de prévoir le comportement à l'origine des fonctions L d'Artin générales, ce qui nécessite de sortir du contexte abélien. C'est dans ce but que Colmez a énoncé une conjecture égalant une fonction d'origine « arithmétique », construite à partir des dérivées logarithmiques en $s = 0$ des fonctions L d'Artin, et une fonction d'origine « géométrique », passablement compliquée, dont le terme principal est donné par les périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe par un corps CM quelconque. En outre, Colmez démontre sa conjecture dans le cadre abélien d'Anderson et obtient une démonstration géométrique de la formule de Chowla-Selberg à l'aide de la hauteur de Faltings des variétés abéliennes. L'objet de cette thèse est de dégager l'analogue p-adique de la conjecture de Colmez, ce qui se fait en trois temps. Le premier pas consiste à définir l'action du groupe de Weil cristallin W_p sur l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ des logarithmes des périodes p-adiques des groupes formels à multiplication formelle. Dans un deuxième temps, nous construisons l'analogue p-adique de la fonction d'origine géométrique de Colmez, à valeurs dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$. Le troisième et dernier chapitre est dévolu à la mise en place de la conjecture p-adique et à sa démonstration dans le cas abélien. Nous allons maintenant détailler chacune de ces étapes.

Considérons donc un nombre premier p, un plongement $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, et notons $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}} \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de Fontaine correspondant. Soient Γ un groupe formel de hauteur finie sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ d'une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, $T_p(\Gamma)$ son module de Tate et $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$ sa cohomologie de de Rham. On peut définir un accouplement périodes

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L) \times T_p(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{B}^+_p,\ (\omega, u) \longmapsto \langle \omega, u\rangle_p,$$

où $\mathbb{B}^+_p$ est le sous-anneau de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ engendré par $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Notre premier objectif est de donner un sens au logarithme $\log\langle \omega, u\rangle_p$. Pour ce faire on note $\theta\colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \twoheadrightarrow \mathbb{C}_p$ le morphisme surjectif naturel et t l'analogue p-adique de $2i\pi$. Soient également T une indéterminée et $\mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}} = \{x \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}, |\theta(x) - 1| < 1\}$, ouvert dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$. On définit le logarithme $\log\colon \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[T]$ comme étant l'unique application vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\log x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-1)^n/n$ pour $x \in \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$;

(2) $\log xy = \log x + \log y$ pour tous $x, y \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times$;

(3) $\log p = 0$ et $\log t = T$.

Soient maintenant E une extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ la sous-$\mathbb{B}^+_p$-algèbre de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[T]$ engendrée par les logarithmes des périodes p-adiques propres des groupes formels à multiplication formelle par E. Nous prouvons alors que $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ est une algèbre de polynômes en $[E:\mathbb{Q}_p]$ variables sur $\mathbb{B}^+_p$. De manière plus précise, soient Γ un Lubin-Tate associé à E (et à une uniformisante π de E), u un générateur de $T_p(\Gamma)$ et (ω_τ) une base propre de $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$. A l'aide du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ agissant sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, nous montrons que les $\log\langle\omega_\tau, u\rangle_p$ sont algébriquement indépendants et engendrent $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ sur $\mathbb{B}^+_p$. Ce résultat permet de faire agir W_p sur l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} = \cup_E \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$, de telle sorte que si $\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p$ est une période propre d'un groupe formel à multiplication formelle on a pour tout $\psi \in W_p$ la formule

$$\psi(\log\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p) = \log\psi(\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p) = \log\langle\psi(\tilde\omega_\tau), \tilde u\rangle_p.$$

Donnons maintenant les grandes lignes de la construction du coté géométrique de notre conjecture, exprimé grâce à une application $ht{:}\, \mathscr{CM}^0 \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ dont nous allons d'abord détailler l'ensemble de départ $\mathscr{CM}^0$. Soient $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ et $c{:}\, \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugaison complexe, que l'on peut voir comme élément de $\mathscr{G}$. On rappelle qu'un corps CM est par définition un corps de nombres E totalement imaginaire, extension quadratique d'un corps totalement réel, et qu'un type CM de E est une partie Φ de $\mathrm{H}_E = \mathrm{Hom}(E, \overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant $\Phi \cup c\Phi = \mathrm{H}_E$ et $\Phi \cap c\Phi = \emptyset$. Notons également $\mathbb{Q}^{\mathrm{cm}}$ le compositum de tous les corps CM. Pour considérer les types CM de tous les corps CM en même temps, il est commode d'introduire le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathscr{CM}^0$ des applications localement constantes $a{:}\, \mathscr{G} \to \mathbb{Q}$, centrales, qui se factorisent à travers le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cm}}/\mathbb{Q})$, et telles que la quantité $a(gc) + a(g)$ soit indépendante de $g \in \mathscr{G}$. En conservant les notations de Colmez nous associons à tout triplet (E, τ, Φ), où E est un corps CM, τ un élément de H_E et Φ un type CM de E, une fonction $a_{E,\tau,\Phi}{:}\, \mathscr{G} \to \mathbb{Q}$ en posant

$$a_{E,\tau,\Phi}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g\tau \in \Phi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit enfin $a^0_{E,\tau,\Phi} = [K:\mathbb{Q}]^{-1} \sum_{\sigma \in \mathrm{H}_K} a_{E,\sigma\tau,\sigma\Phi}$, où $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ désigne n'importe quel corps de nombres contenant tous les corps conjugués de E. On vérifie sans difficulté que les $a^0_{E,\tau,\Phi}$ engendrent $\mathscr{CM}^0$ sur $\mathbb{Q}$. En s'inspirant directement du cas complexe, on montre alors qu'il existe une unique application $\mathbb{Q}$-linéaire $ht{:}\, \mathscr{CM}^0 \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ telle que pour tout triplet (E, τ, Φ) comme ci-dessus on ait l'égalité

$$ht(a^0_{E,\tau,\Phi}) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in \mathrm{H}_K} \log\langle\omega^\sigma_\tau, \omega^\sigma_{c\tau}, u_\sigma\rangle_p - \frac{1}{2} \sum_{\ell < \infty} \Big[v_\ell(\omega^\sigma_\tau) - v_\ell(\omega^\sigma_{c\tau})\Big] \log_p \ell.$$

Explicitons chacun des termes intervenant dans cette formule. En premier lieu, la présence de $\sigma \in \mathrm{H}_K$ en exposant désigne l'extension de l'objet considéré à $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via le plongement $\iota\sigma{:}\, K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On suppose également donnés une base propre (ω_τ) de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$, ainsi que pour tout $\sigma \in \mathrm{H}_K$ un élément non nul u_σ de $H_1(X^\sigma(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, avec la condition de compatibilité $c(u_\sigma) = u_{c\sigma}$. On pose alors

$$\langle\omega^\sigma_\tau, \omega^{c\sigma}_\tau, u_\sigma\rangle_p = \left(\frac{\langle\omega^\sigma_\tau, u_\sigma\rangle_p}{\langle\omega^\sigma_{c\tau}, u_\sigma\rangle_p}\right)^{1/2}$$

dont le logarithme constitue le terme principal de ht. Cela étant, il reste à définir un terme correctif assurant l'indépendance de $ht(a^0_{E,\tau,\Phi})$ en les divers choix possibles, obtenu avec les $v_\ell(\omega^\sigma_\tau)$ qui sont les valuations ℓ-adiques des formes différentielles propres, ceci pour tout nombre premier ℓ. L'existence de ht repose sur les résultat de Blasius-Gillard-Wintenberger (analogue p-adique des relations monomiales de Shimura) et sur la théorie des motifs pour les cycles de Hodge, due à Deligne. Signalons pour conclure que la conjecture est plus commodément énoncée à l'aide de l'extension des scalaires à $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ de ht. Or on sait que le groupe W_p n'agit que $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-semi-linéairement sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$. Pour avoir une action linéaire, ce qui est plus agréable, on fera agir W_p sur le membre de gauche de l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$; ceci fait de ce dernier un $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$-module. Par extension des scalaires on récupère donc une application

$$ht\colon \mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$$

qui est bien entendu $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$-linéaire.

Construisons enfin le coté arithmétique de notre conjecture, donné par les fonctions L d'Artin p-adiques. On conviendra d'appeler « caractère d'Artin » toute application $\chi\colon \mathscr{G} \to \mathbb{C}$ donnée par la formule $\chi(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g|_K))$, où $\rho\colon \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to GL(V)$ est une représentation complexe du groupe de Galois d'un corps de nombres K galoisien sur $\mathbb{Q}$. Il est possible d'associer à un tel χ une fonction L complexe $L(\chi, s)$ et une fonction L p-adique $L_p(\chi, s)$, définies et méromorphes sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}_p$ respectivement. En outre, on sait que χ est à valeurs dans l'extension abélienne maximale $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathbb{Q}$, et que les caractères d'Artin irréductibles vérifiant $L(\chi, 0) \neq 0$ forment une base sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathscr{C}\mathscr{M}^0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$. Nous considèrerons également le polynôme

$$r(\chi, T) = \det(1 - T\psi | V^{I_{\mathbb{Q}_p}})/\det(1 - T\psi | V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}})$$

où ψ est un élément de degré 1 dans W_p, arbitrairement choisi. On peut alors définir une application $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéaire $\hat{Z}_p\colon \mathscr{C}\mathscr{M}^0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ en décrétant pour χ caractère d'Artin comme ci-dessus

$$\hat{Z}_p(\chi) = L'_p(\chi, 0)/L(\chi, 0)r(\chi, 1).$$

A l'aide d'un théorème de Siegel, redémontré par Shintani, on peut établir que $\hat{Z}_p(a)$ est un élément de $\mathbb{Q}_p$ dès que a appartient à $\mathscr{C}\mathscr{M}^0$. Ceci permet de définir une application $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéaire

$$Z_p\colon \mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$$

obtenue par extension des scalaires de la restriction de $\hat{Z}_p$ à $\mathscr{C}\mathscr{M}^0$. Partons maintenant d'une représentation complexe irréductible $\rho\colon \mathscr{G} \to GL(V)$ de caractère χ, satisfaisant $L(\chi, 0) \neq 0$ (autrement dit ρ est totalement impaire ou triviale). On étendra naturellement ρ pour en faire un morphisme d'algèbre $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[\mathscr{G}] \to \mathrm{End}(V)$. Si $q = \sum a_\psi \psi$ appartient à $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ on posera $q(1) = \sum a_\psi$ et $q'(1) = \sum a_\psi \deg(\psi)$. Soit q un élément de l'algèbre de groupes $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ vérifiant $\rho(q) = 0$. Nous conjecturons alors l'égalité

$$ht(q\chi) + q'(1) \log w_p(\chi^*) = q(1) Z_p(\chi^*).$$

Dans cette formule, w_p est la distribution de nombres de Weil construite par Anderson à la fin de son article et qu'il note W. Concluons cette introduction par quelques remarques.

(1) Cette égalité se passe a priori dans l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ puisque $q\chi$ appartient à $\mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]}$ donc $ht(q\chi) \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$. Cela étant on peut montrer que $\log w_p(\chi^*)$ et $Z_p(\chi^*)$ sont

éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ donc il devrait en être de même de $ht(q\chi)$ si la conjecture est vraie. Nous ne savons pas prouver ceci mais en revanche nous avons établi le résultat $ht(q\chi) \in \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$.

(2) Il existe une conjecture relative au comportement à l'origine des fonctions L p-adiques, à savoir la conjecture de Gross, qui prévoit l'ordre d'annulation de $L_p(\chi, s)$ en $s = 0$ et le premier terme non nul de son développement en série entière. La conjecture de Gross donne ainsi une formule pour $Z_p(\chi)$ dès que $L_p(\chi, 0) = 0$. D'un autre coté, notre conjecture ne permet de calculer $Z_p(\chi)$ qu'à la condition de trouver un $q \in \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ vérifiant $q(1) \neq 0$. Cette condition équivaut à $V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = 0$, soit encore $L_p(\chi, 0) \neq 0$, ce qui est justement le cas non couvert par la conjecture de Gross. Signalons au passage la présence de la distribution de nombres de Weil w_p dans chacune des expressions obtenues pour $Z_p(\chi)$.

(3) Si le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ plongé dans $\mathscr{G}$ agit trivialement sur V, un théorème de Weil sur les variétés abéliennes sur les corps finis permet de montrer la validité de notre conjecture (dans ce cas il s'agit de relier ht et $\log w_p$).

(4) Si V est une représentation de dimension 1 (autrement dit si χ est un caractère de Dirichlet), la conjecture est vraie modulo un multiple rationnel de $\log_p 2$. La démonstration utilise d'une part les résultats de Coleman sur les matrices de Frobenius des (jacobiennes des) courbes de Fermat pour le calcul de $ht(\chi)$, d'autre part la formule de Ferrero-Greenberg pour l'évaluation de $Z_p(\chi)$. Dans les deux cas on tombe sur une expression invoquant la fonction Γ_p de Morita ou la fonction log-gamma de Diamond, et il ne reste plus qu'à identifier les termes correspondants.

Chapitre I

L'anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^{+}$.

Soient p un nombre premier fixé et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On désignera par $\mathbb{C}_p$ le corps des nombres complexes p-adiques, c'est-à-dire le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ relativement à l'unique valeur absolue étendant celle de $\mathbb{Q}_p$: il s'agit d'un corps algébriquement clos, isomorphe (pas du tout canoniquement) à $\mathbb{C}$. On peut alors se demander s'il existe un moyen de définir les périodes p-adiques des variétés algébriques à l'aide de $\mathbb{C}_p$. La réponse est malheureusement négative à cause d'un résultat de Tate que nous allons expliciter. Introduisons l'ensemble μ_{p^∞} des racines de l'unité dans $\mathbb{C}_p$ dont l'ordre est une puissance de p. Lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ nous poserons $K_\infty = K(\mu_{p^\infty})$ et nous désignerons par $\mathscr{G}_K$ et Γ_K les groupes de Galois profinis $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$ et $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Ils agissent respectivement sur $\mathbb{C}_p$ et sur l'adhérence $\widehat{K}_\infty$ de K_∞ dans $\mathbb{C}_p$.

Théorème I.1 (Tate [25]) *Soient $\chi\colon \Gamma_K \to \mathbb{Q}_p^\times$ un morphisme de groupes continu et x un élément de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $g(x) = \chi(g)x$ pour tout $g \in \mathscr{G}_K$. Alors ou bien x est nul, ou bien χ est d'ordre fini.*

Revenons à notre problème initial et expliquons pourquoi la période $2i\pi$ du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ ne peut pas appartenir à $\mathbb{C}_p$. Nous avons besoin pour cela du caractère cyclotomique $\chi_{\mathbb{Q}_p}$, obtenu en associant à tout $g \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ l'unique élément $\chi_{\mathbb{Q}_p}(g)$ de $\mathbb{Z}_p$ vérifiant $g(\zeta) = \zeta^{\chi_{\mathbb{Q}_p}(g)}$ pour toute racine de l'unité $\zeta \in \mu_{p^\infty}$. Ce procédé donne naissance à un morphisme de groupes continu et surjectif $\chi_{\mathbb{Q}_p}\colon \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}_p^\times$ dont le noyau est le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$. Supposons maintenant $2i\pi \in \mathbb{C}_p$ et étudions l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur cet élément. En utilisant le fait que $e^{2i\pi/p^n}$ est une racine primitive p^n-ème de l'unité on obtient la formule $g(2i\pi) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)2i\pi$, valable pour tout $g \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On peut donc appliquer le théorème ci-dessus, ce qui conduit à l'égalité peu raisonnable $2i\pi = 0$. Une première façon de lever cette difficulté consiste à rajouter de force $2i\pi$ en le voyant comme indéterminée sur $\mathbb{C}_p$. De manière plus précise soit $\mathbb{B}_{\mathrm{HT}}$ l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathbb{C}_p[t, 1/t]$, équipée de l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ donnée par $g(at^i) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i g(a)t^i$ pour $a \in \mathbb{C}_p$ et $i \in \mathbb{Z}$. L'anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{HT}}$ intervient dans l'étude des représentations p-adiques inaugurée par Fontaine, qui procède selon le schéma suivant : soient K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, c'est-à-dire un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un morphisme de groupes continu $\mathscr{G}_K \to GL(V)$. Notons $D_{\mathrm{HT}}(V) = (\mathbb{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$, espace vectoriel de dimension $\leq \dim V$ sur le corps $(\mathbb{B}_{\mathrm{HT}})^{\mathscr{G}_K} = K$. Le morphisme naturel

$$\mathbb{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_K D_{\mathrm{HT}}(V) \to \mathbb{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

est injectif et on dit que V est *de Hodge-Tate* quand cette flèche est un isomorphisme.

Théorème I.2 (Faltings [9]) *Les représentations qui proviennent de la géométrie (données par la cohomologie étale p-adique des variétes propres et lisses sur K) sont de Hodge-Tate.*

Le résultat ci-dessus est un morceau de la conjecture dite C_{HT}, démontrée par Tate [25] pour les variétés abéliennes ayant bonne réduction et par Faltings en général. Pour pouvoir classifier les représentations p-adique de $\mathscr{G}_K$, Fontaine a construit toute une série d'anneaux $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}}$, $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$ que l'on peut substituer à $\mathbb{B}_{\mathrm{HT}}$ dans le mécanisme ci-dessus. On obtient alors la notion de représentation *de de Rham*, *semi-stable*, *cristalline* ainsi que les conjectures correspondantes C_{dR}, C_{st} et C_{cris} pour les repésentations provenant de la géométrie. Dans ce chapitre nous grossissons un peu l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$ pour construire l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ des logarithmes des périodes p-adiques des groupes formels de type FM. Nous montrons également comment définir l'action d'un Frobenius sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$.

1 Notations et rappels.

Soient K un corps de nombres et X un schéma propre et lisse sur K. Une des clefs de notre étude est de comprendre l'action d'un certain groupe (le groupe de Weil cristallin) sur la cohomologie de de Rham algébrique de X/K, obtenue par application du foncteur dérivé

$$R\Gamma(X,\cdot)\colon \mathbf{D}^+(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}) \to \mathbf{D}^+(\mathrm{Mod}_K)$$

au complexe $\Omega^\bullet_{X/K}$ des formes différentielles algébriques sur X. Les groupes de cohomologie que l'on récupère sont notés $H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X/K)$ et en utilisant les différents théorèmes de comparaison on peut définir un accouplement entre cette cohomologie de de Rham et l'homologie du complexifié de X, à valeurs dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ ou dans l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, donnant ainsi naissance aux périodes complexes et p-adiques de X.

§1. Périodes complexes.

Lorsque X est un schéma lisse sur $\mathbb{C}$ l'ensemble de ses points complexes $X(\mathbb{C})$ est équipé naturellement d'une structure de variété analytique complexe. Nous désignerons respectivement par $H_\bullet(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ et $H^\bullet_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ l'homologie singulière entière et la cohomologie de Betti rationnelle de $X(\mathbb{C})$. D'après un théorème de Grothendieck [15] la flèche naturelle

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

est un isomorphisme, ce qui revient à dire que l'accouplement de « périodes complexes »

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}) \times H_1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \to \mathbb{C},\ (\omega,u) \mapsto \langle \omega, u\rangle_\infty$$

est non dégénéré.

Partons maintenant d'un schéma X lisse sur un corps de nombres K. Pour définir les périodes complexes de X nous devons étendre les scalaires à $\mathbb{C}$ et a priori il n'y a pas de choix canonique d'une telle extension. Désignons donc par σ un élément de $\mathrm{H}_K = \mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})$, ce qui permet de définir $X^\sigma = X \otimes_K \mathbb{C}$ construit via σ. Il s'agit d'un schéma lisse sur $\mathbb{C}$ et en utilisant l'isomorphisme naturel $H^1_{\mathrm{dR}}(X^\sigma/\mathbb{C}) \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) \otimes_K \mathbb{C}$ on récupère un accouplement

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) \times H_1(X^\sigma(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \to \mathbb{C},\ (\omega,u) \mapsto \langle \omega^\sigma, u\rangle_\infty$$

dépendant évidemment du plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$.

§2. Les anneaux de Fontaine.

Avant de rappeler la définition des périodes p-adiques des variétés algébriques nous allons esquisser la construction des anneaux de Fontaine (voir [12] et [13] pour plus de détails). Soient $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$ et $\mathscr{R}$ la limite projective du système

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathcal{O}_p$$

où les flèches de transition sont l'élévation à la puissance p. Les éléments de $\mathscr{R}$ sont donc les suites $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{O}_p$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n et la multiplication composante par composante fait de $\mathscr{R}$ un monoïde abélien d'élément neutre $1 = (1, 1, \ldots)$. Lorsque $x = (x^{(n)})_{n\geq 0}$ et $y = (y^{(n)})_{n\geq 0}$ sont deux éléments de $\mathscr{R}$ on vérifie qu'à $n \in \mathbb{N}$ fixé la suite $(x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^m}$ converge dans $\mathcal{O}_p$ vers un élément $s^{(n)}(x, y)$. La suite

$$x + y \overset{\text{déf}}{=} (s^{(n)}(x, y))_{n\geq 0}$$

est alors élément de $\mathscr{R}$ et $(\mathscr{R}, +, \cdot)$ ainsi défini est un anneau de caractéristique p, intègre et parfait, naturellement équipé d'une action continue du groupe de Galois $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On dispose également d'une valuation $v_{\mathscr{R}}$ définie par $v_{\mathscr{R}}(x) = v_p(x^{(0)})$, pour laquelle $\mathscr{R}$ est complet. Nous noterons $\varphi\colon x \mapsto x^p$ le Frobenius de $\mathscr{R}$, dont l'action sur $\mathscr{R}$ commute à celle de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. L'ensemble des éléments x de $\mathscr{R}$ vérifiant $x^{(0)} = 1$ est noté $\mathbb{Z}_p(1)$. L'élévation à la puissance un élément de $\mathbb{Z}_p$ et l'action induite de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ font de $\mathbb{Z}_p(1)$ un $\mathbb{Z}_p[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-module et pour $x \in \mathbb{Z}_p(1)$, $g \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ on a la formule $g(x) = x^{\chi_{\mathbb{Q}_p}(g)}$. En tant que $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbb{Z}_p(1)$ est libre de rang 1 et nous nous en fixerons une base ε, ce qui revient à dire que $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)$ vérifie $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. Choisissons enfin un élément $\tilde{p}$ de $\mathscr{R}$ tel que $\tilde{p}^{(0)} = p$.

On note $A_{\text{inf}} = W(\mathscr{R})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathscr{R}$, de sorte que A_{inf} est un anneau intègre, de caractéristique nulle, complet pour la topologie p-adique et d'anneau résiduel $\mathscr{R}$. Ensemblistement on a $A_{\text{inf}} = \mathscr{R}^{\mathbb{N}}$ et nous équiperons systématiquement A_{inf} de la topologie produit déduite de celle de $(\mathscr{R}, v_{\mathscr{R}})$, qu'on appellera topologie naturelle et pour laquelle A_{inf} est un anneau topologique complet. En fait cette topologie n'est autre que la topologie $(p, [\tilde{p}])$-adique, où $[x] \in A_{\text{inf}}$ désigne comme d'habitude le représentant de Teichmüller de $x \in \mathscr{R}$. Signalons également que A_{inf} est muni d'un automorphisme de Frobenius $\varphi\colon A_{\text{inf}} \to A_{\text{inf}}$ et d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Comme $\mathscr{R}$ est parfait tout élément de A_{inf} s'écrit d'une unique manière $\sum_{n=0}^{\infty} p^n[a_n]$ avec $a_n \in \mathscr{R}$. Nous pouvons donc considérer l'application

$$\begin{aligned} \theta\colon A_{\text{inf}} &\longrightarrow \mathcal{O}_p \\ \sum_{n=0}^{\infty} p^n[a_n] &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_n^{(0)} \end{aligned}$$

qui est un morphisme d'anneaux surjectif et continu, dont le noyau est principal engendré par $p - [\tilde{p}]$. De plus le couple (A_{inf}, θ) est un épaississement pro-infinitésimal formel p-adique universel de $\mathcal{O}_p$ (consulter [13] page 62 pour la définition d'un épaissisement pro-infinitésimal formel p-adique).

Convenons de poser $B_{\text{inf}}^+ = A_{\text{inf}}[1/p]$, qui est donc un anneau intègre de caractéristique nulle contenant A_{inf} comme sous-anneau. Le morphisme $\theta\colon A_{\text{inf}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_p$ induit un morphisme $\theta\colon B_{\text{inf}}^+ \to \mathbb{C}_p$ qui reste surjectif. On munira B_{inf}^+ de la topologie obtenue en prenant les $\operatorname{Ker}(\theta)^i + p^j A_{\text{inf}}$ comme base de voisinages ouverts de 0, pour laquelle θ est continu. Ceci fait de B_{inf}^+ un anneau topologique non archimédien, équipé d'un automorphisme de Frobenius $\varphi\colon B_{\text{inf}}^+ \to B_{\text{inf}}^+$ et d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On définit alors $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ comme étant le complété de B^+_{inf}, ce qui en fait un anneau non archimédien complet, intègre et contenant naturellement B^+_{inf} comme sous-anneau. Nous renoterons par $\theta\colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \twoheadrightarrow \mathbb{C}_p$ l'unique prolongement continu de $\theta\colon B^+_{\mathrm{inf}} \to \mathbb{C}_p$ à $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Alors $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est un anneau local d'idéal maximal principal $\mathrm{Ker}(\theta)$ et il est complet pour la topologie $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique, qui est plus fine que sa topologie naturelle. En outre $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est naturellement muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On peut aussi prouver que $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel $\mathbb{C}_p$, donc que $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \simeq \mathbb{C}_p[\![T]\!]$ en tant qu'anneau, mais ceci n'est pas très intéressant dans la mesure où l'on a perdu la topologie naturelle de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Nous pouvons également déduire de ce résultat que $\mathbb{C}_p$ se plonge dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ mais de manière pas du tout canonique. En revanche il existe un unique plongement trivial sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant $\overline{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ qui, suivi de $\theta\colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \twoheadrightarrow \mathbb{C}_p$, redonne le plongement naturel $\overline{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow \mathbb{C}_p$. Nous désignerons par $\mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ vérifiant $|\theta(x)-1| < 1$, qui est manifestement un sous-groupe du groupe des unités $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^\times$. En outre et en se souvenant que le rayon de convergence du logarithme sur $\mathbb{C}_p$ est 1 on voit que $\mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$ est un ouvert de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ sur lequel on dispose d'un morphisme de groupes continu

$$\begin{array}{rcl} \log\colon \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}} & \longrightarrow & \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-1)^n/n. \end{array}$$

Du fait que $[\varepsilon] \in \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$ il est loisible de poser $t = \log[\varepsilon] \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, qui est un générateur de $\mathrm{Ker}(\theta)$, et nous noterons $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[1/t]$ le corps des fractions de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$. L'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur t est donnée par la formule $g(t) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)t$, ce qui permet de voir en t un analogue p-adique de $2i\pi$.

L'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ a un rôle très important dans la mesure où il devrait permettre de trier parmi toutes les représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ celles provenant de la géométrie (conjecture de Fontaine-Mazur). En outre il contient toutes les périodes p-adiques des variétés algébriques, mais il est trop gros pour que l'on puisse y définir un endomorphisme de Frobenius, ce qui empêche de faire le lien avec la cohomologie cristalline. Pour pallier cet inconvénient il faut considérer un sous-anneau de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, noté $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$, qui est défini de la manière suivante. Considérons le générateur $\omega = ([\varepsilon]-1)/([\varepsilon^{1/p}]-1)$ de $\mathrm{Ker}(\theta)$ et désignons par A_{cris} la sous-A_{inf}-algèbre de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ constitué des éléments $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\omega^n/n!$ où (a_n) est une suite d'éléments de A_{inf} tendant vers 0. L'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}}[1/p]$ est stable sous l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et muni d'un endomorphisme de Frobenius φ, qui est continu mais n'est plus un automorphisme. On peut montrer que t est élément de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$, que $\varphi(t) = pt$, et l'on notera $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ le sous-anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}[1/t]$ de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$.

§3. Périodes p-adiques.

Considérons un schéma X propre et lisse sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et soit $X_{\text{ét}}$ le petit site étale associé. On peut alors définir la cohomologie p-adique de X par la formule

$$H^\bullet_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_p) = (\varprojlim H^\bullet(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

et une conjecture de Fontaine, prouvée par Faltings dans [10], donne l'existence d'un isomorphisme naturel de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$-vectoriels

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X/\overline{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \simeq H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}.$$

Désignons par $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et fixons une bonne fois pour toutes un plongement de corps $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. A partir de maintenant on supposera que tous les corps de nombres sont contenus dans $\mathbb{C}$, donc dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit enfin X un schéma propre et lisse sur un corps de nombres K. Après avoir choisi un élément σ de H_K il est loisible d'introduire l'extension des scalaires $X_p^\sigma = X \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_p$ construite à l'aide du plongement $\iota\sigma\colon K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Le théorème de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie classique (SGA 4 XII) fournit un isomorphisme canonique de $\mathbb{Q}_p$-vectoriels

$$H^1_{\text{ét}}(X_p^\sigma, \mathbb{Q}_p) \simeq H^1_{\mathrm{B}}(X^\sigma(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$$

et avec le théorème de Faltings ceci donne naissance à une application

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) \times H_1(X^\sigma(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}},\ (\omega, u) \mapsto \langle \omega^\sigma, u \rangle_p$$

appelée accouplement « périodes p-adiques ».

§4. Matrices de Frobenius.

Pour certains calculs que nous avons en vue nous n'aurons pas besoin de toute l'information donnée par les périodes p-adiques mais seulement d'un sous-produit, à savoir les matrices de Frobenius des variétés algébriques. Faisons l'hypothèse supplémentaire que X a potentiellement bonne réduction en toutes les places au-dessus de p. On désignera par $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ l'extension non ramifiée maximale de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, de sorte que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbb{Q}_p)$ est muni d'un élément de Frobenius ϕ_p bien déterminé. Définissons par ailleurs le groupe de Weil cristallin W_p comme étant le sous-groupe de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ constitué des éléments ψ dont la restriction à $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ s'écrit ϕ_p^n pour un certain entier $n \in \mathbb{Z}$, appelé degré de ψ. Au vu de l'hypothèse de bonne réduction potentielle le schéma X_p^σ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ admet un modèle $\mathcal{X}_p^\sigma$ propre et lisse sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ d'une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit k le corps résiduel de $\mathcal{O}_L$, $W(k)$ les vecteurs de Witt sur k et X_k^σ la fibre spéciale $\mathcal{X}_p^\sigma \otimes_{\mathcal{O}_L} k$. D'après un théorème de Berthelot et Ogus [2] il existe un isomorphisme naturel de $\overline{\mathbb{Q}}_p$-vectoriels

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq H^1_{\mathrm{cris}}(X_k^\sigma, W(k)) \otimes_{W(k)} \overline{\mathbb{Q}}_p$$

et l'on peut faire agir $\psi \in W_p$ sur le membre de droite par $H^1_{\mathrm{cris}}(F^n) \otimes \psi$ où F désigne le Frobenius absolu sur X_k^σ et n le degré de ψ. D'après [2] et [5] cela définit canoniquement une action semi-linéaire de W_p sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_p$. Maintenant si l'on se fixe une base $\omega_1, \ldots, \omega_m$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$ sur K cette action fournit une distribution de « matrices de Frobenius » $\rho\colon W_p \to GL(m, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ dépendant bien entendu du plongement σ. Pour conclure cette partie nous allons rappeler comment les périodes p-adiques permettent de retrouver ces matrices. Nous désignerons par $\mathbb{B}_p$ le sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ engendré par $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On peut alors montrer que les périodes p-adiques de X sont dans $\mathbb{B}_p$ et que le morphisme d'anneaux naturel $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \overline{\mathbb{Q}}_p \to \mathbb{B}_p$ est bijectif. Ceci permet de faire agir semi-linéairement W_p sur $\mathbb{B}_p$ en décrétant que pour $\psi \in W_p$ de degré n et pour $x \otimes y \in \mathbb{B}_p$ on a $\psi(x \otimes y) = \varphi^n(x) \otimes \psi(y)$. Maintenant si l'on choisit une base $u_1, \ldots, u_m$ de $H_1(X^\sigma(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}$ et si l'on forme la matrice des périodes p-adiques correspondante $\mathcal{M} = (\langle \omega_j^\sigma, u_i \rangle_p)_{1 \le i,j \le m}$ à coefficients dans $\mathbb{B}_p$ le théorème 4.4 de [20] entraîne $\rho(\psi) = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}^\psi$.

2 Un résultat d'indépendance algébrique.

Notre objectif final est de faire coïncider conjecturalement une fonction « arithmétique » donnant les dérivées logarithmiques en $s = 0$ des fonctions L d'Artin p-adiques et une fonction d'origine « géométrique » construite à l'aide des logarithmes des périodes p-adiques des variétés algébriques. Or l'embryon de logarithme $\log\colon \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ dont nous disposons ne permet en général pas de donner un sens à $\log\langle\omega^\sigma, u\rangle_p$ (c'est déjà le cas pour le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ puisque $t \notin \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$). Nous allons donc étendre de manière idoine le domaine de définition du logarithme puis prouver un résultat d'indépendance algébrique pour les périodes p-adiques des groupes formels, ce qui permettra de définir l'action du groupe de Weil W_p sur les logarithmes des dites périodes.

§1. Le logarithme.

Rappelons que l'on a posé $\mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}} = \{x \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}, |\theta(x) - 1| < 1\}$ et que le morphisme de groupes $\log\colon \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est continu et $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant. Pour qu'elle soit raisonnable une extension de cette application à $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times$ devrait au moins être $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariante et vérifier $\log xy = \log x + \log y$. En fait nous allons prouver qu'une telle application $\log\colon (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ n'existe pas mais que le seul problème consiste justement à donner une image à t, autrement dit à trouver un élément $u = \log t$ de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ sur lequel l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est donnée par $g(u) = \log g(t) = u + \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)$. En appliquant θ puis l'exponentielle à cette égalité on retombe sur un problème du type $2i\pi \in \mathbb{C}_p$ et cela permet de conclure à l'inexistence d'un tel u. Avant de donner un énoncé précis introduisons la notation suivante : lorsque L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ on désignera par I_L le sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_L = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$.

Lemme I.3 *Soit $\chi\colon \mathscr{G}_L \to L^\times$ un caractère continu.*

(i) *Si χ est trivial sur I_L il existe un élément x de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $g(x) = x + \log\chi(g)$ pour tout $g \in \mathscr{G}_L$.*

(ii) *Si χ et $\chi_{\mathbb{Q}_p}$ coïncident sur I_L il n'existe pas d'élément u dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ tel que $g(u) = u + \log\chi(g)$ pour tout $g \in \mathscr{G}_L$.*

Démonstration.— Pour le point (i) on choisit arbitrairement un élément ϕ de $\mathscr{G}_L$ qui s'envoie sur le Frobenius de $\mathrm{Gal}(\overline{k}_L/k_L)$. Comme χ est continu son image est un sous-groupe compact de $L^\times$, donc en fait de $\mathcal{O}_L^\times$. Soient π une uniformisante de L, q le cardinal du corps résiduel k_L de L et L^{nr} l'extension non ramifiée maximale de L dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Posons enfin $c = \chi(\phi)$, $x_0 = 0$ et supposons avoir construit une suite $x_0, \ldots, x_n$ d'éléments de $\mathcal{O}_{L^{\mathrm{nr}}}$ vérifiant $|\phi(x_n) - x_n - c| \leq |\pi|^n$ et $|x_i - x_{i-1}| \leq |\pi|^{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Du fait que $y = \pi^{-n}(\phi(x_n) - x_n - c)$ appartient à $\mathcal{O}_{L^{\mathrm{nr}}}$ et que le corps résiduel de L^{nr} est une clôture algébrique de k_L il existe $z \in \mathcal{O}_{L^{\mathrm{nr}}}$ tel que $\bar{z}^q - \bar{z} + \bar{y} = 0$. Ceci implique que $x_{n+1} = x_n + \pi^n z$ est élément de $\mathcal{O}_{L^{\mathrm{nr}}}$ et vérifie $|\phi(x_{n+1}) - x_n - c| \leq |\pi|^{n+1}$ ainsi que $|x_{n+1} - x_n| \leq |\pi|^n$. On construit de cette façon une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{L^{\mathrm{nr}}}$, qui converge vers un élément x de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $\phi(x) = x + \chi(\phi)$. Par conséquent l'égalité $g(x) = x + \log\chi(g)$, vraie pour $g \in I_L$ et $g = \phi$, le reste par continuité pour $g \in \mathscr{G}_L$. Démontrons maintenant le point (ii) et supposons d'abord $u \notin \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, de sorte qu'il existe $i \geq 1$ et $y \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \setminus t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ vérifiant $u = y/t^i$. On a alors

$$g(y) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i y + t^i \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i \log\chi(g)$$

donc $z = \theta(y)$ est un élément non nul de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $g(z) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i z$. En vertu du théorème de Tate cette égalité implique que $\chi_{\mathbb{Q}_p}|_{\mathscr{G}_L}$ est d'ordre fini et comme $\chi_{\mathbb{Q}_p}(\mathscr{G}_L)$ contient $1 + p^n\mathbb{Z}_p$ pour

n assez grand ceci est absurde. Traitons maintenant le cas où $u \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui nous donne un élément $y = \theta(u)$ dans $\mathbb{C}_p$ tel que $g(y) = y + \log \chi(g)$. D'autre part le point (i) assure l'existence d'un élément $x \in \mathbb{C}_p$ tel que

$$g(x) = x + \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g) - \log \chi(g)$$

donc $v = x + y \in \mathbb{C}_p$ vérifie $g(v) = v + \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)$ pour tout $g \in \mathscr{G}_L$. On dispose également d'une décomposition canonique

$$\mathbb{Z}_p^\times \simeq \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p) \ \text{ si } p \geq 3 \text{ et } \ \mathbb{Z}_2^\times \simeq \{-1, 1\} \times (1 + 4\mathbb{Z}_2) \ \text{ si } p = 2$$

et on notera ω et $\langle \cdot \rangle$ les projections sur les premier et deuxième facteurs. Soit également $N \geq 1$ un entier suffisamment grand pour que $N \geq -v_p(v) + 1/(p-1)$, de sorte que $w = e^{vp^N} \in \mathbb{C}_p^\times$ existe. On a alors $g(w) = \langle \chi_{\mathbb{Q}_p}(\sigma) \rangle^{p^N} w$ et de nouveau grâce au théorème de Tate on obtient que les restrictions à $\mathscr{G}_L$ des caractères $\chi_{\mathbb{Q}_p}^{p^N} / (\omega \circ \chi_{\mathbb{Q}_p})^{p^N}$ puis $\chi_{\mathbb{Q}_p}$ sont d'ordre fini, ce qui est absurde. $\square$

En vertu du lemme précédent lorsque $\chi = \chi_{\mathbb{Q}_p}$, il n'y a pas d'élément de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ pouvant jouer de façon raisonnable le rôle de $\log t$. Il faut donc le rajouter de force et considérer l'anneau de polynômes en une indéterminée $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[u]$, équipé de l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ prolongeant celle sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et vérifiant $g(u) = u + \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)$. Nous pouvons donc voir u comme étant l'analogue p-adique de $\log 2i\pi$.

Lemme I.4 *Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ on a $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[u])^{\mathscr{G}_L} = L$.*

Démonstration.— Considérons un élément $f = \sum_{i=0}^n a_i u^i$ de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[u]$ fixé par $\mathscr{G}_L$, avec $a_n \neq 0$. On dispose donc pour tout $g \in \mathscr{G}_L$ de l'égalité

$$\sum_{i=0}^n g(a_i)(u + \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g))^i = \sum_{i=0}^n a_i u^i$$

et, en regardant le coefficient dominant, on voit que $g(a_n) = a_n$. Comme d'autre part $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_L} = L$ nous en déduisons $a_n \in L$ et quitte à diviser f par a_n on peut supposer $a_n = 1$. Dans l'espoir d'obtenir une contradiction supposons $n \geq 1$ et regardons les termes de degré $n - 1$: on tombe sur l'égalité $n \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g) + g(a_{n-1}) = a_{n-1}$ donc $x = -a_{n-1}/n$ est dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et vérifie $g(x) = x + \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)$, ce qui est absurde. Au total $f = 1$ et le lemme est démontré. $\square$

Lemme I.5 *Tout élément $x \neq 0$ de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ se met sous la forme $x = yt^i p^r \zeta$ où $y \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{**}$, $i \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q}$ et ζ est une racine de 1. De plus i et r sont uniquement déterminés.*

Démonstration.— Comme $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ et d'idéal maximal $t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, il est clair que x se met sous la forme $x = zt^i$ avec $z \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \setminus t\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $i \in \mathbb{Z}$. Maintenant $\theta(z)$ est un élément non nul de $\mathbb{C}_p$ donc en posant $r = v_p(\theta(z)) \in \mathbb{Q}$ il est loisible d'écrire $z = wp^r$ où $w \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est tel que $|\theta(w)| = 1$. On sait que l'image de $\theta(w)$ dans le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathbb{C}_p$ est une racine de l'unité d'ordre premier à p donc on peut appliquer le lemme de Newton pour trouver dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une racine de l'unité ζ ayant même image que $\theta(w)$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Au total $y = w\zeta^{-1}$ est élément de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{**}$ et on a bien la décomposition $x = yt^i p^r \zeta$. L'unicité de i et r est quant à elle immédiate. $\square$

Nous sommes alors en mesure de définir le logarithme sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$.

Proposition I.6 *Il existe une unique application* $\log\colon (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[u]$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\log x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-1)^n/n$ *pour* $x \in \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$ *;*

(ii) $\log xy = \log x + \log y$ *pour tous* $x, y \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times$ *;*

(iii) $\log p = 0$ *et* $\log t = u$.

En outre log *est* $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$*-équivariante et induit le logarithme d'Iwasawa sur* $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$.

Démonstration.— Soit $x \in (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times$ que l'on écrit $x = yt^ip^r\zeta$ où $y \in \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$, $i \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q}$ et ζ est une racine de 1. En combinant (i), (ii) et (iii) on voit que $\log x = \log y + iu$ donc l'unicité est prouvée. Montrons l'existence et considérons une autre écriture $x = y't^ip^r\zeta'$. On voit alors que y'/y est en même temps dans $\mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$ et est une racine de 1. Du fait que log est un morphisme de groupes sur $\mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$ on en déduit $\log y' = \log y$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et il est loisible de prendre pour définition $\log x = \log y + iu$. Il est alors clair que les points (i) à (iii) sont vérifiés. Considérons maintenant $g \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, de sorte que $g(x) = g(y)\chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i g(p^r)g(\zeta)$ où $g(p^r)$ est encore une racine de p et $g(\zeta)$ une racine de 1. Comme on sait déjà que log est $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariante sur $\mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$, ce calcul donne

$$\log g(x) = g(\log y) + i \log \chi_{\mathbb{Q}_p}(g) + iu = g(\log x)$$

donc log est $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-équivariante sur $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^\times$. Pour montrer que l'on retrouve le logarithme d'Iwasawa sur $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ on commence par se donner $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \cap \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$. On a alors $|x-1| < 1$ donc $\log_p x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-1)^n/n$. Du fait que l'injection naturelle $\eta\colon \mathbb{Q}_p(x) \hookrightarrow \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est continue, on a

$$\eta(\log_p x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\eta(x)-1)^n/n = \log \eta(x)$$

ce qui est le résultat voulu. Si $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ est quelconque il ne reste plus qu'à observer que la décomposition $x = yt^ip^r\zeta$ a priori dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ fournit en réalité un $y \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \cap \mathbb{B}^{**}_{\mathrm{dR}}$ et donc que la formule $\eta(\log_p x) = \log \eta(x)$ est encore vraie. □

§2. Périodes p-adiques des groupes formels.

Nous allons rappeler ici la théorie des périodes des groupes formels telle qu'elle a été développée par Fontaine dans [11]. Considérons donc une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et soit Γ une loi de groupe formelle de dimension d et de hauteur finie h sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ de L. On désignera par $\Gamma_L \in L[\![X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d]\!]$ l'extension des scalaires de Γ à L et lorsque ω est une forme différentielle fermée sur Γ_L on notera $F_\omega \in L[\![X_1, \dots, X_d]\!]$ l'unique série formelle satisfaisant $dF_\omega = \omega$ et $F_\omega(0) = 0$. Introduisons également $G_\omega = F_\omega(\Gamma(X,Y)) - F_\omega(X) - F_\omega(Y)$, de sorte que ω est une forme différentielle invariante si et seulement si $G_\omega = 0$. On dira enfin que ω est exacte si F_ω est à coefficients bornés et de seconde espèce si G_ω est à coefficients bornés. L'ensemble des formes différentielles invariantes (donc automatiquement fermées) sur Γ_L sera noté $\Omega_{\Gamma/L}$; il s'agit d'un L-espace vectoriel de dimension d s'injectant naturellement dans le quotient $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$ des formes de seconde espèce par les formes exactes. De plus $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$ est de dimension h sur L et on le munira de la filtration de Hodge donnée par $\mathrm{Fil}^0 H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L) = H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$, $\mathrm{Fil}^1 H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L) = \Omega_{\Gamma/L}$

et $\mathrm{Fil}^i H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L) = 0$ pour $i \geq 2$. Nous noterons enfin $T_p(\Gamma)$ le module de Tate de Γ, qui est donc un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang h, muni d'une action du groupe de Galois $\mathscr{G}_L$. Considérons un élément $u = (0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ de $T_p(\Gamma)$ et ω une forme différentielle de seconde espèce sur Γ. Soit $A_{\mathrm{inf},L}$ le sous-anneau de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ engendré par A_{inf} et L. En désignant par $\hat{u}_n$ un élément de $(A_{\mathrm{inf},L})^d$ vérifiant $\theta(\hat{u}_n) = u_n$, la suite des $-p^n F_\omega(\hat{u}_n)$ converge vers un élément $\langle \omega, u\rangle_p$ de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne dépendant que de u et ω. De plus $\langle \omega, u\rangle_p$ appartient au sous-anneau $\mathbb{B}^+_p$ de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ engendré par $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et ce procédé construit un accouplement de périodes

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L) \times T_p(\Gamma) \to \mathbb{B}^+_p,\ (\omega, u) \mapsto \langle \omega, u\rangle_p$$

respectant les filtrations et commutant à l'action de $\mathscr{G}_L$.

Considérons maintenant une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ telle que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E, L)$ est de cardinal $[E : \mathbb{Q}_p] = h$ (ainsi L contient tous les corps conjugués de E). On dit que le groupe formel Γ est à multiplication formelle par E quand on l'équipe d'un morphisme injectif de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $E \hookrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{End}(\Gamma)$. Par fonctorialité on en déduit une action de E sur la cohomologie $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$ et celle-ci se diagonalise pour donner naissance à une décomposition $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L) = \bigoplus_\tau L\omega_\tau$, où la somme est prise sur les $\mathbb{Q}_p$-plongements $E \hookrightarrow L$. Le type FM de Γ est alors par définition l'ensemble des τ satisfaisant $\omega_\tau \in \mathrm{Fil}^1 H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$.

§3. Construction d'une distribution de période.

Soit E une extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}_p$, que l'on ne suppose pas a priori contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On désignera par G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$ et par $v_E\colon E^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation de E. Introduisons enfin l'ensemble $\mathscr{F}\!\mathscr{M}_E$ des couples (a, α) où a est une application $G \to \mathbb{Z}$ et α et un élément de $E^\times$ vérifiant $v_E(\alpha) = \deg(a)$, sachant que l'on a posé $\deg(a) = \sum_{\sigma\in G} a(\sigma)$. Ainsi $\mathscr{F}\!\mathscr{M}_E$ est naturellement un groupe abélien et on associera à tout couple (τ, Φ) formé d'un élément τ et d'une partie Φ de G une fonction $a_{\tau,\Phi}\colon G \to \mathbb{Z}$ définie par

$$a_{\tau,\Phi}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma\tau \in \Phi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est la construction explicite d'un morphisme de groupes $ht_E\colon \mathscr{F}\!\mathscr{M}_E \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[\log t]$ donné sur les $a_{\tau,\Phi}$ par les logarithmes des périodes des groupes formels à multiplication formelle par E.

Lemme I.7 *Soient U_E (*resp. *$U^{(1)}_E$) le groupe des unités (*resp. *des unités principales) de $\mathcal{O}_E$. On peut trouver un élément v de $U^{(1)}_E$ et un entier $m \geq 1$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in U_E$ il existe une unique décomposition*

$$x^{p^m} = \zeta \prod_{\sigma\in G} \sigma(v)^{n_\sigma}$$

où ζ est une racine de l'unité et les n_σ sont des éléments de $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration.— Notons μ le groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de p dans E et soit V le $\mathbb{Z}_p$-module $U^{(1)}_E/\mu$, qui est libre de rang $[E : \mathbb{Q}_p]$. Comme on est en caractéristique nulle le théorème de la base normale donne l'existence d'un élément u de E tel que $\{\sigma(u), \sigma \in G\}$ est une base de $E/\mathbb{Q}_p$. Quitte à multiplier u par une puissance de p on peut supposer $v_E(u) >$

$v_E(p)/p-1$, auquel cas la série $v=\exp(u)$ converge dans E et appartient à $U_E^{(1)}$. Une relation $\prod_{\sigma\in G}\sigma(v)^{n_\sigma}\in\mu$ avec $n_\sigma\in\mathbb{Z}_p$ donne après passage au logarithme (qui est G-équivariant) l'égalité $\sum_{\sigma\in G}n_\sigma\sigma(u)=0$, donc les n_σ sont tous nuls. Ainsi le sous-$\mathbb{Z}_p$-module W de V engendré par les $\sigma(v)$ est libre de rang $[E:\mathbb{Q}_p]$ et par platitude de $\mathbb{Q}_p$ sur $\mathbb{Z}_p$ la suite

$$0\longrightarrow W\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\longrightarrow V\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\longrightarrow (V/W)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\longrightarrow 0$$

est exacte. En outre $W\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ et $V\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ sont des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de même dimension donc $(V/W)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p=0$, et comme V/W est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ cela revient à dire qu'il existe un entier $m\geq 0$ tel que V/W est tordu par p^m. Le couple (v,m) est alors solution du problème. □

Dans ce qui suit on suppose fixé (v,m) comme ci-dessus, on note E^0 l'extension non ramifiée maximale de $\mathbb{Q}_p$ dans E et on pose $f=[E^0:\mathbb{Q}_p]=f(E/\mathbb{Q}_p)$. On définit alors le semi-groupe de Frobenius $\widetilde{G}$ comme étant l'ensemble des couples $(\sigma,n)\in G\times\mathbb{N}$ vérifiant $\sigma|_{E^0}=\mathrm{Frob}_E^n$, où Frob_E est le Frobenius (absolu) de $E^0/\mathbb{Q}_p$. Le complété $\widehat{E^{\mathrm{nr}}}$ de l'extension non ramifiée maximale de E est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}}\otimes_{E^0}E$, ce qui permet de faire agir $\widetilde{G}$ sur $\widehat{E^{\mathrm{nr}}}$. On note enfin $\phi_E\in\mathrm{Gal}(\widehat{E^{\mathrm{nr}}/E})$ le Frobenius absolu de E et on choisit également une bonne fois pour toutes un élément w de $\widehat{E^{\mathrm{nr}}}$ vérifiant $\phi_E(w)=vw$. Du fait que $\phi_E=(\mathrm{id},f)\in\widetilde{G}$ on a alors $\phi_E(w^{(\sigma,n)})=v^\sigma w^{(\sigma,n)}$ pour tout $(\sigma,n)\in\widetilde{G}$.

Lorsque σ est un élément de G on désignera par $\deg(\sigma)$ l'unique élément de $\{0,\dots,f-1\}$ tel que $\sigma|_{E^0}=\mathrm{Frob}_E^{\deg(\sigma)}$. Soit π une uniformisante de E et, pour $\tau\in G$, soit $l_\tau\in L[\![X]\!]$ la série formelle en une indéterminée

$$l_\tau(X)=\begin{cases}\sum_{n=0}^\infty\tau(\pi)^{-n}X^{p^{nf}} & \text{si}\quad \deg(\tau)=0\\ \sum_{n=0}^\infty\tau(\pi)^{-n-1}X^{p^{nf+\deg(\tau)}} & \text{si}\quad \deg(\tau)\neq 0.\end{cases}$$

On vérifie alors que $l_{\mathrm{id}}^{-1}(l_{\mathrm{id}}(X)+l_{\mathrm{id}}(Y))$ définit une loi de groupe formelle Γ_π sur $\mathcal{O}_E$, isomorphe au groupe de Lubin-Tate pour E associé à l'uniformisante π. Il s'agit donc d'un groupe de dimension 1, de hauteur $[E:\mathbb{Q}_p]$, à multiplication formelle par E et dont le type FM vaut $\{\mathrm{id}\}$. En outre les formes différentielles $\omega_\tau=dl_\tau\in\Omega_{\Gamma_\pi/E}$ sont de seconde espèce et elles induisent une base de $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma_\pi/E)$ sur le corps E, propre sous l'action de $\mathcal{O}_E$. Soit enfin u un générateur du $\mathcal{O}_E$-module $T_p(\Gamma_\pi)$. Lorsque (a,α) est un élément de $\mathscr{F}\mathscr{M}_E$ il existe une unique décomposition

$$\Big[\alpha\prod_{\tau\in G}\tau(\pi)^{-a(\tau^{-1})}\Big]^{p^m}=\zeta\prod_{\tau\in G}\tau(v)^{n_\tau}$$

où ζ est une racine de l'unité et les n_τ sont des éléments de $\mathbb{Z}_p$. On pose alors

$$ht_E(a,\alpha)=\sum_{\tau\in G}a(\tau^{-1})\log\langle\omega_\tau,u\rangle_p+p^{-m}n_\tau\log w^{(\tau,\deg(\tau))}$$

et cette définition donne naissance à un morphisme de groupes $ht_E\colon\mathscr{F}\mathscr{M}_E\to\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[\log t]$.

Notre premier objectif est de montrer que ht_E permet de retrouver les périodes de tous les groupes formels à multiplication formelle par E. Pour ce faire donnons-nous une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et désignons par L^{ab} l'extension abélienne maximale de L dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. La théorie du corps de classe local fournit un isomorphisme de groupes profinis entre $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/L^{\mathrm{nr}})$ et $\mathcal{O}_L^\times$, ce qui permet de définir un caractère continu et surjectif $\chi_L\colon I_L\to\mathcal{O}_L^\times$ dont le noyau est exactement $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L^{\mathrm{ab}})$. Lorsque $L=\mathbb{Q}_p$ on retombe d'ailleurs sur la restriction du caractère cyclotomique à $I_{\mathbb{Q}_p}$, ce qui est cohérent avec nos notations antérieures.

Proposition I.8 *Soient Γ/L un groupe formel à multiplication formelle par E (on suppose que $E \subset L$), Φ son type* FM, *$\tilde{\omega}_\tau \in H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$ un vecteur propre, $\tilde{u} \in T_p(\Gamma)$ un élément non nul de son module de Tate et $\alpha_\Gamma \in E$ donnant l'action du Frobenius relatif ϕ_L sur $H^1_{\mathrm{dR}}(\Gamma/L)$. Alors pour tout $\tau \in G$ on a*

$$ht_E(f_{L/E}a_{\tau,\Phi}, \tau(\alpha_\Gamma)) \equiv f_{L/E} \log\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p \pmod{L}.$$

Démonstration.— Remarquons en premier lieu que $(a, \alpha) = (f_{L/E}a_{\tau,\Phi}, \tau(\alpha_\Gamma))$ est effectivement élément de $\mathscr{F}\mathscr{M}_E$ puisque d'après le corollaire 6.6 de [6] nous avons $v_E(\alpha_\Gamma) = f_L\sharp\Phi/f_E = \deg(f_{L/E}a_{\tau,\Phi})$. Écrivons

$$\Big[\alpha \prod_{\sigma\in G} \sigma(\pi)^{-a(\sigma^{-1})}\Big]^{p^m} = \zeta \prod_{\sigma\in G} \sigma(v)^{n_\sigma}$$

et posons

$$x = \prod_{\sigma\in G} \langle\omega_\sigma, u\rangle_p^{p^m a(\sigma^{-1})} w^{n_\sigma(\sigma,\deg(\sigma))}$$

de sorte que $ht_E(a, \alpha) = p^{-m}\log x$. Soit également $N \geq 1$ un entier vérifiant $\zeta^N = 1$. On sait alors que x et $\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p$ appartiennent au sous-anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L}$ de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ engendré par $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$ et L. Or la flèche naturelle $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{L^0} L \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L}$ est un isomorphisme, ce qui permet de faire agir le Frobenius relatif ϕ_L sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L}$, et les éléments de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L}$ fixés en même temps par I_L et ϕ_L sont exactement les éléments de L. Notre stratégie va consister à déterminer l'action de I_L et ϕ_L sur x^N et $\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p^{Np^m f_{L/E}}$, à en déduire que ces deux nombres sont égaux à multiplication par un élément de $L^\times$ près et à prendre le logarithme de la dite égalité pour conclure. On sait que pour $g \in I_L$ on a d'une part

$$g(\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p) = \langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p \prod_{\sigma\in\Phi} \tau\sigma^{-1}(N_{L/\sigma(E)}(\chi_L(g)))$$

et d'autre part

$$g(x) = x \prod_{\sigma\in G} \sigma(\chi_E(g))^{p^m a(\sigma^{-1})}$$

car $I_L \subset I_E$ agit trivialement sur $\widehat{E^{\mathrm{nr}}}$. En tenant compte du fait que $a(\sigma^{-1}) = f_{L/E}$ si $\sigma^{-1}\tau \in \Phi$ et $a(\sigma^{-1}) = 0$ sinon on trouve

$$g(x) = x \prod_{\sigma\in\Phi} \tau\sigma^{-1}(\chi_E(g))^{p^m f_{L/E}}$$

et comme $E/\mathbb{Q}_p$ est galoisienne on a $\sigma(E) = E$ et $\chi_E(g) = N_{L/E}(\chi_L(g))$ donc I_L agit de la même manière sur $\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p^{p^m f_{L/E}}$ et x. De même

$$\phi_L(\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p) = \tau(\alpha_\Gamma)\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p = \alpha\langle\tilde{\omega}_\tau, \tilde{u}\rangle_p$$

et

$$\phi_E(x) = \Big[\prod_{\sigma\in G} \sigma(\pi)^{p^m a(\sigma^{-1})}\sigma(v)^{n_\sigma}\Big]x = \zeta^{-1}\alpha^{p^m}x.$$

Sachant que $x \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},E}$ et que sur ce dernier anneau ϕ_L agit comme la puissance $f_{L/E}$-ème de ϕ_E on obtient finalement $\phi_L(x^N) = \alpha^{p^m N f_{L/E}}x$, ce qui conclut la preuve. □

§4. Action de W_p sur les logarithmes de périodes.

Convenons de désigner par $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ la sous-$\mathbb{B}^+_p$-algèbre de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[\log t]$ engendrée par les logarithmes des périodes p-adiques propres des groupes formels à multiplication formelle par E.

Théorème I.9 *L'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ est une algèbre de polynômes en $[E:\mathbb{Q}_p]$ variables sur $\mathbb{B}^+_p$. De manière plus précise les $\{ht_E(a_{\tau,\{\mathrm{id}\}},\tau(\pi)),\tau\in G\}$ sont algébriquement indépendants et engendrent $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ sur $\mathbb{B}^+_p$.*

Démonstration.— En vertu de la proposition précédente $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ est engendrée comme $\mathbb{B}^+_p$-algèbre par l'image de ht_E. Or tout élément (a,α) de $\mathscr{F}\mathscr{M}_E$ peut s'écrire $(a,\alpha)=(0,x)+\sum_{\tau\in G}a(\tau^{-1})(a_\tau,\tau(\pi))$ avec $x\in U_E$, et comme $ht_E(0,x)\in\widehat{E^{\mathrm{nr}}}\subset\mathbb{B}^+_p$ on en déduit bien que les $\{ht_E(a_{\tau,\{\mathrm{id}\}},\tau(\pi)),\tau\in G\}$ engendrent $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ sur $\mathbb{B}^+_p$. Pour montrer que ces éléments sont algébriquement indépendants posons $n=[E:\mathbb{Q}_p]$ et soient $\tau_1,\dots,\tau_n$ les éléments de G. On notera pour simplifier $x_\nu=ht_E(a_{\tau_\nu,\{\mathrm{id}\}},\tau_\nu(\pi))$ pour $1\le\nu\le n$. Lorsque $i=(i_1,\dots,i_n)$ est élément de $\mathbb{N}^n$ nous définirons également $|i|=i_1+\dots+i_n$ et $x^i=x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$. Munissons l'ensemble $\mathbb{N}^n$ de l'ordre $\preceq$ défini par récurrence sur $n\ge 1$ comme suit : pour $n=1$ $\preceq$ est l'ordre usuel et quand $n\ge 2$ on dira que $i,j\in\mathbb{N}^n$ vérifient $i\preceq j$ si et seulement si $|i|<|j|$ ou $|i|=|j|$ et $(i_1,\dots,i_{n-1})\preceq(j_1,\dots,j_{n-1})$. Il est clair que $\preceq$ est un ordre total et que pour $d\in\mathbb{N}^n$ fixé l'ensemble des $i\preceq d$ est fini. Nous définirons alors le degré d'un polynôme non nul $f=\sum_{i\in\mathbb{N}^n}a_iX^i\in\mathbb{B}^+_p[X_1,\dots,X_n]=\mathbb{B}^+_p[X]$ comme étant le plus grand $i\in\mathbb{N}^n$ vérifiant $a_i\neq 0$. Raisonnons par l'absurde et considérons $f=\sum_{i\in\mathbb{N}^n}a_iX^i\in\mathbb{B}^+_p[X]$ tel que $f(x)=0$, $f\neq 0$ et le degré d de f est minimal. Choisissons alors une extension galoisienne L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ contenant E et telle que tous les a_i soient éléments de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L}$. Quitte à diviser tout le monde par a_d on supposera désormais $a_d=1$ et $a_i\in\mathrm{Frac}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L})$. Convenons enfin de désigner par $\chi_\nu\colon\mathscr{G}_L\to L^\times$ le caractère décrivant l'action de $\mathscr{G}_L$ sur $\langle\omega_{\tau_\nu},u\rangle_p$. Pour $g\in\mathscr{G}_L$ l'égalité $f(x)^g=0$ combinée à la minimalité de d donne l'égalité dans $\mathbb{B}^+_p[X]$

$$\sum_{i\preceq d}a_iX_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}=\sum_{i\preceq d}g(a_i)(X_1+\log\chi_1(g))^{i_1}\dots(X_n+\log\chi_n(g))^{i_n}.$$

Égalons le coefficient de X^e lorsque $e\in\mathbb{N}^n$ vérifie $|e|=|d|$: il vient $a_e=g(a_e)$ donc a_e est élément de L. Considérons maintenant $e\in\mathbb{N}^n$ tel que $|e|=|d|-1$ et pour $1\le\nu\le n$ définissons $e^{(\nu)}=(e_1,\dots,e_{\nu-1},e_\nu+1,e_{\nu+1},\dots,e_n)\in\mathbb{N}^n$, de sorte que $|e^{(\nu)}|=|d|$. En égalant le coefficient de X^e on récupère $a_e=g(a_e)+\sum_{\nu=1}^n a_{e^{(\nu)}}\log\chi_\nu(g)$ donc le lemme I.10 s'applique et assure que $e^{(\nu)}=0$ pour tout $1\le\nu\le n$. Or en choisissant bien e et ν on tombe sur $a_d=0$, d'où une contradiction. □

Lemme I.10 *Pour $\tau\in G$ soit $\chi_\tau\colon\mathscr{G}_L\to L^\times$ le caractère décrivant l'action de $\mathscr{G}_L$ sur $\langle\omega_\tau,u\rangle_p$. Soit x un élément de $\mathrm{Frac}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L})$ et $(a_\tau)_{\tau\in G}$ une famille d'éléments de L vérifiant $g(x)=x+\sum_\tau a_\tau\log\chi_\tau(g)$ pour tout $g\in\mathscr{G}_L$. Alors $x\in L$ et les a_τ sont tous nuls.*

Démonstration.— On remarque en premier lieu que la nullité des a_τ entraîne $x\in L$. Raisonnons par l'absurde et supposons les a_τ non tous nuls. Soit $\widetilde{G}_L$ le semi-groupe de Frobenius associé à l'extension $L/\mathbb{Q}_p$. On fera agir $\widetilde{G}_L$ sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L}\simeq\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}\otimes_{L^0}L$ puis sur son corps des fractions par la formule $(h,n)(a\otimes b)=\varphi^n(a)\otimes h(b)$. Du fait que les actions de $\mathscr{G}_L$ et $\widetilde{G}_L$ commutent et que pour $h\in\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ on a $h\circ\chi_\tau=\chi_{h\tau}$ on voit que $y=(h,n)(x)\in\mathrm{Frac}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L})$ et $b_\tau=h(a_{h^{-1}\tau})\in L$

vérifient $g(y) = y + \sum_\tau b_\tau \log\chi_\tau(g)$. Par conséquent si τ est un élément de G vérifiant $a_\tau \neq 0$ on peut choisir (h,n) de telle sorte que $h^{-1}|_E = \tau$ et cela nous ramène à traiter le cas $a_{\mathrm{id}} \neq 0$. Quitte à diviser tout le monde par a_{id} on peut même supposer $a_{\mathrm{id}} = 1$. Dans l'espoir d'obtenir une contradiction supposons maintenant $x \notin \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, de sorte que $x = y/t^i$ avec $y \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \setminus t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et $i \geq 1$. On constate que

$$g(y) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i y + t^i \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i \sum_\tau a_\tau \log\chi_\tau(g)$$

donc $z = \theta(y)$ est un élément non nul de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $g(z) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)^i z$. Ceci contredit le théorème de Tate et nous avons prouvé $x \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cap \mathrm{Frac}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L})$. Lorsque $\tau \in G$ est distinct de l'identité on a $\langle\omega_\tau, u\rangle_p \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \setminus t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ puisque le type FM du Lubin-Tate sur lequel on calcule cette période n'est autre que $\{\mathrm{id}\}$. Ainsi $p_\tau = ht_E(a_{\tau,\{\mathrm{id}\}}, \tau(\pi))$ est un élément de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ sur lequel l'action de $\mathscr{G}_L$ est donnée par $g(p_\tau) = p_\tau + \log\chi_\tau(g)$. Notons également $p_{\mathrm{id}} = x - \sum_{\tau\neq\mathrm{id}} a_\tau p_\tau \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, de sorte que $g(p_{\mathrm{id}}) = p_{\mathrm{id}} + \log\chi_{\mathrm{id}}(g)$. En posant $p = \sum_{\tau\in G} p_\tau \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et $\chi = \prod_{\tau\in G}\chi_\tau \colon \mathscr{G}_L \to L^\times$ on récupère la formule $g(p) = p + \log\chi(g)$ et comme $\chi|_{I_L} = \chi_{\mathbb{Q}_p}|_{I_L}$ on obtient une contradiction avec le lemme I.3. □

On définit enfin $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ comme étant la réunion $\bigcup_E \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ quand E décrit les extensions galoisiennes finies de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Il s'agit donc d'une algèbre sur $\mathbb{B}^+_p$.

Proposition I.11 *Soit ψ un élément de W_p. Le morphisme d'anneau $\psi\colon \mathbb{B}^+_p \to \mathbb{B}^+_p$ s'étend de manière unique en un morphisme $\psi\colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ de telle sorte que si $\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p$ est une période propre d'un groupe formel à multiplication formelle on a*

$$\psi(\log\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p) = \log\psi(\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p) = \log\langle\psi(\tilde\omega_\tau), \tilde u\rangle_p.$$

Démonstration.— L'unicité est claire au vu de la définition de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$. Pour l'existence on définit d'abord l'action de ψ sur les anneaux $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$, où E est une extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. En vertu du théorème I.9 il existe une et une seule extension de $\psi\colon \mathbb{B}^+_p \to \mathbb{B}^+_p$ en un endomorphisme d'anneaux $\psi\colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ satisfaisant

$$\psi(ht_E(a_{\tau,\{\mathrm{id}\}}, \tau(\pi))) = \log\psi(\langle\omega_\tau, u\rangle_p).$$

On sait que toute période propre $\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p$ d'un groupe formel défini sur L et à multiplication formelle par E s'écrit $\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p = y\prod_i \langle\omega_{\tau_i}, u\rangle_p$ pour un $y \in \widehat{L^{\mathrm{nr}}}$, $y \neq 0$, et certains $\tau_i \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$. On a donc

$$\psi(\log\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p) = \psi(\log y) + \sum_i \psi(ht_E(a_{\tau_i,\{\mathrm{id}\}}, \tau(\pi)))$$

et comme la continuité de $\psi\colon \mathbb{B}^+_p \to \mathbb{B}^+_p$ implique $\psi(\log y) = \log\psi(y)$ nous pouvons affirmer $\psi(\log\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p) = \log\psi(\langle\tilde\omega_\tau, \tilde u\rangle_p)$.

Il nous reste à prouver que les actions de ψ sur les divers $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E}$ se recollent et pour ce faire on considère un sur-corps E' de E, galoisien sur $\mathbb{Q}_p$, et soit $\chi_{E'}\colon I_{E'} \twoheadrightarrow \mathcal{O}^\times_{E'}$ le caractère donné par la théorie du corps de classe. La formule $\chi_E(g) = N_{E'/E}(\chi_{E'}(g))$, valable pour tout $g \in I_{E'}$, peut se réécrire sous la forme $\chi_E = \prod_\sigma \sigma\circ\chi_{E'}$ où le produit est pris sur les $\sigma \in \mathrm{Gal}(E'/E)$. On en déduit l'égalité

$$\langle\omega_\tau, u\rangle_p = \prod_{\sigma|_E=\tau} \langle\omega_\sigma, u'\rangle_p$$

à multiplication par un élément non nul de $\widehat{E'^{\mathrm{nr}}}$ près, et ceci pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$. Par conséquent $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E'}$ contient tous les nombres $ht_E(a_{\tau,\{\mathrm{id}\}}, \tau(\pi)))$ et finalement $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E} \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM},E'}$. Ainsi pour vérifier le recollement des divers morphismes ψ il suffit de traiter le cas $E \subset E'$, et on conclut avec la formule ci-dessus et la définition de ψ. □

Nous allons conclure ce paragraphe par une formule explicitant l'action de W_p sur $ht_E(a,\alpha)$. A cet effet associons à tout élément ψ de W_p le morphisme de groupes $\nabla_\psi \colon \mathscr{FM}_E \to E$ défini par

$$\begin{aligned}\nabla_\psi(a,\alpha) &= \sum_{\tau\in G}\left(\left[\frac{\deg(\psi)+\deg(\tau)-1}{f}\right]-\left[\frac{\deg(\tau)-1}{f}\right]\right)a(\tau^{-1})\log\psi\tau(\pi)\\ &\quad+\left[\frac{\deg(\psi)+\deg(\tau)}{f}\right]p^{-m}n_\tau\log\psi\tau(v)\end{aligned}$$

où $[x]$ désigne la partie entière inférieure de $x \in \mathbb{R}$ et où les (n_τ) sont définis de la manière habituelle. Rappelons également que si $a\colon G \to \mathbb{Z}$, on note $a^\psi\colon G \to \mathbb{Z}$ la fonction $\sigma \mapsto a(\sigma\psi)$.

Lemme I.12 *Pour* $(a,\alpha) \in \mathscr{FM}_E$ *et* $\psi \in W_p$ *on a*

$$\psi(ht_E(a,\alpha)) = ht_E(a^\psi, \psi(\alpha)) + \nabla_\psi(a,\alpha).$$

Démonstration.— Soit τ un élément de G. En posant $k_\tau = [\deg(\psi)+\deg(\tau)-1/f]-[\deg(\tau)-1]$ on vérifie que $\psi(l_\tau)-\psi\tau(\pi)^{k_\tau}l_{\psi\tau}$ est un polynôme, ce qui entraîne $\psi(\omega_\tau) = \psi\tau(\pi)^{k_\tau}\omega_{\psi\tau}$. Définissons par ailleurs $r_\tau = [\deg(\psi)+\deg(\tau)/f]$, de sorte que $\psi_{|E}\tau \in G$ est de degré $\deg(\psi)+\deg(\tau)-r_\tau f$. L'action de $\psi \in W_p$ sur $\widehat{E^{\mathrm{nr}}}$ est donnée par celle de $(\psi_{|E}, \deg(\psi)) \in \widetilde{G}$, et on peut écrire

$$(\psi_{|E}, \deg(\psi))(\tau, \deg(\tau)) = (\psi_{|E}\tau, \deg(\psi_{|E}\tau))(\mathrm{id}_E, r_\tau f) = (\psi_{|E}\tau, \deg(\psi_{|E}\tau))\phi_E^{r_\tau}$$

donc $\psi(w^{(\tau,\deg(\tau))}) = \psi\tau(v)^{r_\tau}w^{(\psi_{|E}\tau,\deg(\psi_{|E}\tau))}$. On calcule alors

$$\begin{aligned}\psi(ht_E(a,\alpha)) &= \sum_{\tau\in G} a(\tau^{-1})\Big[\log\langle\omega_{\psi\tau},u\rangle_p + k_\tau\log\psi\tau(\pi)\Big]\\ &\quad +p^{-m}n_\tau\Big[\log w^{(\psi_{|E}\tau,\deg(\psi_{|E}\tau))}+r_\tau\log\psi\tau(v)\Big]\\ &= \nabla_\psi(a,\alpha)+\sum_{\tau\in G}a^\psi(\tau^{-1})\log\langle\omega_\tau,u\rangle_p + p^{-m}n_{\psi^{-1}\tau}\log w^{\tau,\deg(\tau))}\end{aligned}$$

et comme la décomposition

$$\Big[\psi(\alpha)\prod_{\tau\in G}\tau(\pi)^{-a^\psi(\tau^{-1})}\Big]^{p^m} = \psi(\zeta)\prod_{\tau\in G}\tau(v)^{n_{\psi^{-1}\tau}}$$

est celle de $(a^\psi, \psi(\alpha)) \in \mathscr{FM}_E$ on obtient bien la formule annoncée. □

Chapitre II

Distributions de périodes.

Sur le corps $\mathbb{C}$ une conséquence remarquable et presque immédiate des relations monomiales de Shimura [22] est l'existence d'une « distribution de périodes », traduisant le fait que les périodes propres des variétés abéliennes à multiplication complexe sont déterminées modulo $\overline{\mathbb{Q}}$ par le type CM de la dite variété. Ce phénomène, réinterprété par Anderson ([1] théorème 1.3), a un analogue p-adique dû à Blasius-Gillard-Wintenberger que nous allons rappeler dans une première partie. Ceci étant les résultats de ce type ne permettent de prédire que le morceau transcendant des valeurs spéciales de fonctions L. Si l'on désire une formule exacte il va falloir supprimer l'indétermination modulo $\overline{\mathbb{Q}}$ dans cette distribution de périodes, ce qui est l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

1 Distributions de périodes modulo $\overline{\mathbb{Q}}$.

Nous allons d'abord préciser certains résultats relatifs aux variétés abéliennes à multiplication complexe, dont nous aurons besoin par la suite.

§1. Variétés abéliennes à multiplication complexe.

Notons $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ et soit $c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugaison complexe, que l'on peut voir comme élément de $\mathscr{G}$. Considérons un corps de nombres $E \subset \overline{\mathbb{Q}}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout élément g de $\mathscr{G}$ l'automorphisme $cg^{-1}cg$ est trivial sur E. De ceci on déduit que $c(E) = E$ et lorsque c n'est pas trivial sur E on dit que E est un corps CM. Une définition équivalente consiste à dire que E est un corps de nombres totalement imaginaire, extension quadratique d'un corps totalement réel. Ceci implique que le degré $[E : \mathbb{Q}]$ est un entier pair. Il est également clair que le compositum dans $\overline{\mathbb{Q}}$ de deux corps CM est un corps CM et que l'image par $g \in \mathscr{G}$ d'un corps CM est un corps CM. On désignera par $\mathbb{Q}^{\mathrm{cm}}$ la réunion dans $\overline{\mathbb{Q}}$ de tous les corps de nombres CM ; il s'agit donc d'un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$, galoisien sur $\mathbb{Q}$. On notera également $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}$, qui n'est autre que le compositum de tous les corps cyclotomiques $\mathbb{Q}(\mu_m)$ (théorème de Kronecker-Weber). En outre il découle directement de la définition d'un corps CM que $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}^{\mathrm{cm}}$. Lorsque E est un corps CM on appelle type CM de E toute partie Φ de $\mathrm{H}_E = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})$ vérifiant $\Phi \cup c\Phi = \mathrm{H}_E$ et $\Phi \cap c\Phi = \emptyset$.

Soient maintenant E un corps CM de degré $2d$ sur $\mathbb{Q}$ et $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps de nombres contenant tous les corps conjugués de E. Soit également X une variété abélienne définie sur

K, à multiplication complexe par E. Ainsi X est un K-schéma abélien de dimension d équipé d'un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres $E \hookrightarrow \mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Par fonctorialité l'action de E se transmet à tous les groupes de cohomologie que l'on a attaché à X : après s'être fixé un plongement de corps $\sigma \in \mathrm{H}_K$ le groupe $H_1(X^\sigma(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ devient un E-vectoriel de dimension 1, $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$ un $K \otimes_{\mathbb{Q}} E$-module libre de rang 1 et $H^1_{\text{ét}}(X^\sigma_p, \mathbb{Q}_p)$ un $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} E$-module libre de rang 1. Grâce à un théorème de Serre et Tate [21], qui assure que X a potentiellement bonne réduction en toutes les places de K, et après tensorisation par les anneaux idoines on dispose, comme expliqué précédemment, d'isomorphismes entre ces divers groupes. En outre ces isomorphismes respectent l'action de E et l'action de E sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$ se diagonalise. De manière plus précise associons au plongement $\tau \in \mathrm{H}_E$ le sous-espace propre

$$H_{\mathrm{dR}}(X)(\tau) = \{v \in H^1_{\mathrm{dR}}(X/K), \forall x \in E, (1 \otimes x)v = \tau(x)v\}.$$

Alors $H_{\mathrm{dR}}(X)(\tau)$ est de dimension 1 sur K et $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) = \bigoplus_{\tau \in \mathrm{H}_E} H_{\mathrm{dR}}(X)(\tau)$. Maintenant pour tout $\tau \in \mathrm{H}_E$ on peut choisir ω_τ non nul dans $H_{\mathrm{dR}}(X)(\tau)$ et la famille $\xi = (\omega_\tau)_{\tau \in \mathrm{H}_E}$, bien définie à multiplication par un élément de $(K^\times)^{2d}$ près, sera désignée sous le terme de *base propre* de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$. La forme des matrices de Frobenius de X (voir page 15) calculées avec une base propre est particulièrement simple : dans chaque ligne et chaque colonne il y a exactement un coefficient non nul.

Lemme II.1 *Rappelons que les objets déduits de X par le changement de base $\iota\sigma : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ sont signalés par la présence de σ en exposant. Alors pour tout $\psi \in W_p$ il existe un élément non nul $\beta_\psi(\omega^\sigma_\tau)$ de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ tel que*

$$\psi(\omega^\sigma_\tau) = \beta_\psi(\omega^\sigma_\tau)\omega^\sigma_{\sigma^{-1}\psi\sigma\tau}.$$

Démonstration.— On peut toujours écrire $\psi(\omega^\sigma_\tau) = \sum_{\alpha \in \mathrm{H}_E} c_\alpha \omega^\sigma_\alpha$ où les coefficients c_α appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Faisons agir un élément arbitraire x de E sur les deux membres de cette égalité. En sous-entendant la présence de ι on obtient la formule $\psi\sigma\tau(x)\psi(\omega^\sigma_\tau) = \sum_{\alpha \in \mathrm{H}_E} \sigma\alpha(x) c_\alpha \omega^\sigma_\alpha$ donc $\psi\sigma\tau(x)c_\alpha = \sigma\alpha(x)c_\alpha$ pour tout plongement α. Par suite la non-nullité de c_α équivaut à $\psi\sigma\tau = \sigma\alpha$ et le lemme est prouvé. □

On définit le type CM de X comme étant l'ensemble Φ des $\tau \in \mathrm{H}_E$ vérifiant $\omega_\tau \in H^0(X, \Omega_{X/K})$. Il s'agit d'un type CM de E.

§2. Distributions complexes et p-adiques.

Nous allons d'abord rappeler en quoi consistent les relations monomiales de Shimura pour les périodes complexes. Soient E un corps CM et I_E le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\mathrm{H}_E = \mathrm{Hom}(E, \overline{\mathbb{Q}})$. Toute partie S de H_E sera vue comme élément de I_E au moyen de la somme formelle $\sum_{\sigma \in S} \sigma$.

Théorème II.2 (Shimura [22]) *Fixons-nous un plongement $\tau \in \mathrm{H}_E$. Soient (X_i) et (X'_j) deux familles de variétés abéliennes définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et à multiplication complexe par E. On note Φ_i (*resp. *Φ'_j) le type* CM *de X_i (*resp. *X'_j) et on choisit une forme propre $\omega_{\tau,i} \in H^1_{\mathrm{dR}}(X_i/\overline{\mathbb{Q}})$ (*resp. *$\omega'_{\tau,j} \in H^1_{\mathrm{dR}}(X'_j/\overline{\mathbb{Q}})$) ainsi qu'un cycle $u_i \in H_1(X_i(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ (*resp. *$u'_j \in H_1(X'_j(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$). On suppose vérifiée dans I_E la relation*

$$\sum_i \Phi_i = \sum_j \Phi'_j.$$

Alors

$$\prod_i \langle \omega_{\tau,i}, u_i \rangle_\infty = \prod_j \langle \omega'_{\tau,j}, u'_j \rangle_\infty$$

à un nombre algébrique près.

Un autre type de relation est vérifiée lorsque l'on étends le corps de multiplication complexe. De manière plus précise soient F un corps CM contenant E et $m = [F : E]$. On dispose d'une flèche de restriction $I_F \to I_E$ envoyant par définition $\sigma \in \mathrm{H}_F$ sur $\sigma|_E$.

Théorème II.3 (Shimura [22]) *Désignons par $(\tau_i)_{1\le i\le m}$ la famille des prolongements de τ à F. Soient X et $(X_i)_{1\le i\le m}$ des variétés abéliennes définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et à multiplication complexe par E. On note Ψ (*resp. *Φ_i) le type* CM *de X (*resp. *X_i) et on choisit une forme propre $\omega_{\tau_i} \in H^1_{\mathrm{dR}}(X/\overline{\mathbb{Q}})$ (*resp. *$\omega_{\tau,i} \in H^1_{\mathrm{dR}}(X_i/\overline{\mathbb{Q}})$) ainsi qu'un cycle $u \in H_1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ (*resp. *$u_i \in H_1(X_i(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$). On suppose que la restriction de Ψ à E coïncide dans I_E avec $\sum_{i=1}^m \Phi_i$. Alors on a*

$$\prod_{i=1}^{m} \langle \omega_{\tau_i}, u\rangle_\infty = \prod_{i=1}^{m} \langle \omega_{\tau,i}, u_i\rangle_\infty$$

à un nombre algébrique près.

Ces deux théorèmes sont encore valides en p-adique : il s'agit d'un résultat de Blasius-Gillard-Wintenberger (consulter Gillard [14] pour le cas des variétés abéliennes ordinaires).

Nous allons maintenant reformuler ceci en terme d'existence de distributions de périodes (complexes et p-adiques). Soit k un anneau non nul. Pour considérer les types CM de tous les corps CM en même temps il est commode d'introduire le k-module $\mathscr{C}\mathscr{M}_k$ des applications localement constantes $a\colon \mathscr{G} \to k$ se factorisant à travers le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cm}}/\mathbb{Q})$ et telles que la quantité $a(gc) + a(g)$ soit indépendante de $g \in \mathscr{G}$. Lorsque $k = \mathbb{Q}$ on retrouve l'espace noté M par Anderson [1] et $\mathscr{C}\mathscr{M}$ par Colmez [7]. En conservant les notations de ce dernier nous associerons à tout triplet (E, τ, Φ), où E est un corps CM, τ un élément de H_E et Φ un type CM de E, un élément $a_{E,\tau,\Phi}$ de $\mathscr{C}\mathscr{M}_k$ en posant

$$a_{E,\tau,\Phi}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g\tau \in \Phi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $g \in \mathscr{G}$. Dans le cas où E est galoisienne sur $\mathbb{Q}$ on définira enfin $\mathscr{C}\mathscr{M}_k(E)$ comme étant le sous-espace de $\mathscr{C}\mathscr{M}_k$ des fonctions a se factorisant à travers $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Lemme II.4 (Lemme de Serre) *Si $E/\mathbb{Q}$ est galoisienne le module $\mathscr{C}\mathscr{M}_k(E)$ est libre de rang $1 + [E : \mathbb{Q}]/2$ sur k. En outre les fonctions $a_{E,\tau,\Phi}$ forment une partie génératrice de $\mathscr{C}\mathscr{M}_k(E)$.*

Démonstration.— Notons $\mathscr{C}\mathscr{M}'_k(E)$ le sous-k-module de $\mathscr{C}\mathscr{M}_k(E)$ engendré par les $a_{E,\tau,\Phi}$ et associons à tout plongement $\tau \in \mathrm{H}_E$ un élément $\hat\tau \in \mathscr{G}$ satisfaisant $\hat\tau|_E = \tau$. Fixons-nous également un type CM de E, soit Φ. L'application

$$\begin{array}{rcl} \theta\colon \mathscr{C}\mathscr{M}_k & \longrightarrow & k \oplus k^\Phi \\ a & \longmapsto & (a(c) + a(\mathrm{id}), (a(\hat\tau))_{\tau\in\Phi}) \end{array}$$

est k-linéaire et injective. Lorsque σ est un élément de Φ on notera Φ_σ le type CM de E obtenu en substituant $c\sigma$ à σ dans Φ. La fonction $b_\sigma = a_{E,\mathrm{id},\Phi} - a_{E,\mathrm{id},\Phi_\sigma}$ vérifie alors $b_\sigma(g) = 1$ si $g|_E = \sigma$, $b_\sigma(g) = -1$ si $g|_E = c\sigma$ et $b_\sigma(g) = 0$ dans les autres cas. Par conséquent $\theta(b_\sigma) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le 1 est en position σ. En outre si τ est un élément de Φ on a $\theta(a_{E,\tau,\Phi}) =$

$(1, *, \ldots, *)$ donc θ envoie surjectivement $\mathscr{CM}'_k(E)$ dans $k \oplus k^\Phi$. Par conséquent θ est un isomorphisme et $\mathscr{CM}'_k(E) = \mathscr{CM}_k(E)$. $\square$

L'égalité $\mathscr{CM}_k = \bigcup_E \mathscr{CM}_k(E)$, où la réunion est prise sur tous les corps CM galoisiens sur $\mathbb{Q}$, entraîne que les $a_{E,\tau,\Phi}$ forment une partie k-génératrice de $\mathscr{CM}_k$. En outre on déduit du lemme précédent que la flèche naturelle $\mathscr{CM}_\mathbb{Z} \otimes k \to \mathscr{CM}_k$ est un isomorphisme. Le corps E étant fixé (mais non nécessairement galoisien sur $\mathbb{Q}$) nous désignerons par $\mathscr{CM}_k(E)$ le sous-k-module de $\mathscr{CM}_k$ engendré par les $a_{E,\tau,\Phi}$. On dispose alors du résultat suivant.

Corollaire II.5 *Il existe une unique application $\mathbb{Q}$-linéaire*

$$\Omega_\infty : \mathscr{CM}_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

telle que, pour toute variété abélienne X définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et à multiplication complexe par E, et pour tout plongement $\tau \in \mathrm{H}_E$, on ait l'égalité $\Omega_\infty(a_{E,\tau,\Phi}) = \langle \omega_\tau, u \rangle_\infty$ où Φ est le type CM *de X, $\omega_\tau \in H^1_{\mathrm{dR}}(X/\overline{\mathbb{Q}})$ est une forme propre de caractère τ et $u \in H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ est non nul.*

Pour son analogue p-adique on se heurte au problème que $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ n'est pas algébriquement clos donc $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Il faut donc se placer sur l'espace $\mathscr{CM}_\mathbb{Z}$ plutôt que sur $\mathscr{CM}_\mathbb{Q}$ et on obtient le

Corollaire II.6 *Il existe une unique application $\mathbb{Z}$-linéaire*

$$\Omega_p : \mathscr{CM}_\mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

telle que pour tout triplet (E, τ, Φ) comme ci-dessus on ait l'égalité $\Omega_p(a_{E,\tau,\Phi}) = \langle \omega_\tau, u \rangle_p$.

Notons que la démonstration des relations monomiales en p-adique utilise les résultats de Deligne sur les cycles de Hodges absolus et repose donc sur des techniques assez sophistiquées. En revanche l'existence d'une distribution $\Omega_p : \mathscr{CM}_\mathbb{Z} \to (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times / \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ peut être obtenue plus simplement avec les méthodes de [6]. Signalons en outre que si l'inclusion $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ permet de définir intrinsèquement l'application Ω_∞, il n'en va pas de même de Ω_p, qui dépend du plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ que l'on s'est fixé depuis le début. On désignera par $\Omega_p(E)$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de ${\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}}^\times / \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ image de $\mathscr{CM}_\mathbb{Z}(E)$ par Ω_p. Il est clair que $\Omega_p(E)$ est sans torsion ; il est également de type fini sur $\mathbb{Z}$ puisque c'est le cas pour $\mathscr{CM}_\mathbb{Z}(E)$ donc $\Omega_p(E)$ est libre et son rang sera noté $\delta_p(E)$. Introduisons également le sous-corps $\mathbb{B}_{\mathrm{CM},E}$ de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ par les périodes p-adiques des variétés abéliennes définies sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et à multiplication complexe par E. Le degré de transcendance de $\mathbb{B}_{\mathrm{CM},E}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ sera noté $d_p(E)$.

§3. Variétés abéliennes et groupes formels.

Soient E un corps CM galoisien sur $\mathbb{Q}$ et $X/\overline{\mathbb{Q}}_p$ une variété abélienne à multiplication complexe par l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ de E. Notons Φ le type CM de X et soit L une extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, contenant $\iota(E)$ et assez grosse pour que X admette un modèle propre et lisse $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{O}_L$. On désignera par $\widehat{\mathcal{X}}$ le groupe formel sur $\mathcal{O}_L$ associé à $\mathcal{X}/\mathcal{O}_L$. Soit $\mathfrak{p}_E$ le premier de E induit par $\iota : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Lorsque $\mathfrak{p}$ est un premier quelconque de E au-dessus de p on se fixe une bonne fois pour toutes un élément $\sigma_\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ vérifiant $\sigma_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}_E) = \mathfrak{p}$ et on note $\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}}$ l'ensemble des plongements $\tau : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ tels que $\iota\tau : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ induise $\mathfrak{p}$. En désignant par E_p l'adhérence de $\iota(E)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on sait que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E_p, \overline{\mathbb{Q}}_p) & \longrightarrow & \mathrm{H}_E \\ \overline{\tau} & \longmapsto & \overline{\tau}\iota\sigma_\mathfrak{p} \end{array}$$

établit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ et $\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}}$, la bijection réciproque étant notée $\tau \mapsto \overline{\tau}$. On pose enfin $\Phi_{\mathfrak{p}} = \{\overline{\tau}, \tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}} \cap \Phi\}$ et $\mathfrak{p}(\Phi)$ désignera l'ensemble des premiers $\mathfrak{p}$ de E vérifiant $\Phi_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$. On a alors une décomposition canonique

$$\widehat{\mathcal{X}} \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}(\Phi)} \widehat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}$$

où $\widehat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}$ est un groupe formel défini sur $\mathcal{O}_L$, à multiplication formelle par E_p et dont le type FM est $\Phi_{\mathfrak{p}}$. En outre on dispose d'une application

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}/\mathcal{O}_L) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(\widehat{\mathcal{X}}/\mathcal{O}_L) \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}(\Phi)} H^1_{\mathrm{dR}}(\widehat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_L)$$

envoyant un vecteur propre ω_τ sur un vecteur propre $\overline{\omega}_{\overline{\tau}} \in H^1_{\mathrm{dR}}(\widehat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}(\tau)}/\mathcal{O}_L)$ quand le premier $\mathfrak{p}(\tau)$ de E induit par $\iota\tau$ appartient à $\mathfrak{p}(\Phi)$, et sur 0 quand $\mathfrak{p}(\tau) \notin \mathfrak{p}(\Phi)$. On a également un morphisme sur les modules de Tate

$$T_p(\mathcal{X}) \longrightarrow T_p(\widehat{\mathcal{X}}) \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}(\Phi)} T_p(\widehat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}})$$

noté $u \mapsto (u_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}(\Phi)}$, et qui donne pour tout plongement τ vérifiant $\mathfrak{p}(\tau) \in \mathfrak{p}(\Phi)$ la formule $\langle \omega_\tau, u \rangle_p = \langle \overline{\omega}_{\overline{\tau}}, u_{\mathfrak{p}(\tau)} \rangle_p$.

D'autre part la fibre spéciale $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$ de $\mathcal{X}$ est une variété abélienne sur le corps fini k_L, donc elle est équipé d'une action du Frobenius relatif ϕ_L. Comme les actions de $\mathcal{O}_E$ et de ϕ_L sur le schéma $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$ commutent, un argument de dimension donne l'existence d'un élément α_Φ de $\mathcal{O}_E$ tel que ϕ_L est l'image de α_Φ dans $\mathrm{End}(\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L)$. On peut alors donner explicitement la décomposition de α_Φ en produit de premiers. Tout d'abord si $|\cdot|$ est une valeur absolue archimédienne de E étendant la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$ un théorème, dû à Weil assure que $|\alpha_\Phi| = p^{f_L/2}$, où $f_L = [k_L : \mathbb{F}_p]$ est l'indice d'inertie de $L/\mathbb{Q}_p$. En utilisant la formule du produit on en déduit que α_Φ est une unité en toutes les places finies ne divisant par p. Enfin un premier $\mathfrak{p}$ de E au-dessus de p étant donné, un théorème de Shimura-Taniyama donne $v_{\mathfrak{p}}(\alpha_\Phi) = f_{L/E_p} \sharp \Phi_{\mathfrak{p}}$, où l'on a normalisé $v_{\mathfrak{p}}$ par la condition $v_{\mathfrak{p}}(E^\times) = \mathbb{Z}$. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire $\Phi_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset$ on sait que $\iota\sigma_{\mathfrak{p}}(\alpha_\Phi) \in E_p$ donne l'action du Frobenius ϕ_L sur $\widehat{\mathcal{X}}_{\mathfrak{p}}$. On notera G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E_p/\mathbb{Q}_p)$, de sorte que l'on dispose d'une application de restriction $\mathscr{CM}_{\mathbb{Z}}(E) \to \mathbb{Z}^G$ définie via ι, où $\mathbb{Z}^G$ est l'ensemble des fontions $G \to \mathbb{Z}$.

Lemme II.7 *Soient $\tau \in \mathrm{H}_E$, $\omega_\tau \in H^1_{\mathrm{dR}}(X/L)$ un vecteur propre et u un élément non nul de $T_p(X)$. On dispose des formules*

$$\phi_L(\langle \omega_\tau, u \rangle_p) = \langle \omega_\tau, u \rangle_p \iota\tau(\alpha_\Phi) \quad et \quad g(\langle \omega_\tau, u \rangle_p) = \langle \omega_\tau, u \rangle_p \prod_{\sigma \in \Phi_{\mathfrak{p}(\tau)}} \overline{\tau}\sigma^{-1}(\chi_{E_p}(g))$$

pour tout $g \in I_L$. En outre si τ vérifie $\mathfrak{p}(\tau) \in \mathfrak{p}(\Phi)$ on a la congruence

$$f_{L/E_p} \log \langle \omega_\tau, u \rangle_p \equiv ht_{E_p}(f_{L/E_p} a_{E,\tau,\Phi}|_G, \iota\tau(\alpha_\Phi)) \pmod{L}.$$

Démonstration.— Traitons en premier lieu le cas où $\mathfrak{p}(\tau) \in \mathfrak{p}(\Phi)$. La formule

$$\langle \omega_\tau, u \rangle_p = \langle \overline{\omega}_{\overline{\tau}}, u_{\mathfrak{p}(\tau)} \rangle_p$$

assure que ϕ_L agit sur $\langle\omega_\tau, u\rangle_p$ par multiplication par $\overline{\tau}(\iota\sigma_{\mathfrak{p}}(\alpha_\Phi)) = \iota\tau(\alpha_\Phi)$, et que l'action de I_L est donnée par le caractère $g \mapsto \prod_{\sigma\in\Phi_{\mathfrak{p}(\tau)}} \overline{\tau}\sigma^{-1}(\chi_{E_p}(g))$. Le lien avec ht_{E_p} découlera de la proposition I.8 et de $a_{\overline{\tau},\Phi_{\mathfrak{p}}} = a_{E,\tau,\Phi}|_G$, cette dernière égalité se prouvant à l'aide de la suite d'équivalences, valable pour $\sigma \in G$,

$$a_{\overline{\tau},\Phi_{\mathfrak{p}}}(\sigma) = 1 \Longleftrightarrow \sigma\overline{\tau} \in \Phi_{\mathfrak{p}} \Longleftrightarrow \sigma\overline{\tau}\iota\sigma_{\mathfrak{p}} \in \Phi \Longleftrightarrow \sigma\tau \in \Phi \Longleftrightarrow a_{E,\tau,\Phi}(\sigma) = 1,$$

où l'on sous-entend l'injection $G \hookrightarrow \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ induite par ι. Supposons maintenant $\mathfrak{p}(\tau) \in \mathfrak{p}(\Phi)$, ce qui revient à dire $\Phi_{\mathfrak{p}(\tau)} = \emptyset$. On en déduit $c\tau \in \Phi$ et $\Phi_{\mathfrak{p}(c\tau)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E_p, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ donc ϕ_L agit sur $\langle\omega_{c\tau}, u\rangle_p$ par multiplication par $\iota c\tau(\alpha_\Phi)$ et l'action de I_L sur $\langle\omega_{c\tau}, u\rangle_p$ est donnée par le caractère $g \mapsto N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(\chi_{E_p}(g)) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)$. Par ailleurs on sait qu'il existe un élément $a \in L$ tel que $\langle\omega_\tau, u\rangle_p\langle\omega_{c\tau}, u\rangle_p = at$, où $t \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$ est l'équivalent p-adique de $2i\pi$. Pour conclure il suffit donc d'utiliser les formules $\iota\tau(\alpha_\Phi)\iota c\tau(\alpha_\Phi) = p^{f_L}$, $\phi_L(t) = p^{f_L}t$ et $g(t) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(g)t$ pour $g \in I_L$. □

§4. Calcul du degré de transcendance de $\mathbb{B}_{\mathrm{CM},E}$.

Ce paragraphe est dévolu au calcul des entiers $d_p(E)$ et $\delta_p(E)$ dans le cas où E est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$. Nous allons d'abord montrer que ces deux nombres coïncident, ceci sans hypothèse supplémentaire sur E.

Lemme II.8 *Lorsque E est un corps* CM *arbitraire on a l'égalité $d_p(E) = \delta_p(E)$.*

Démonstration.— Notons $\delta = \delta_p(E)$ et soient $\beta_1, \ldots, \beta_\delta$ des éléments de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ dont les images dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times/\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ forment une base de $\Omega_p(E)$. Du fait que β_i est produit d'un élément de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et de périodes propres de variétés abéliennes à multiplication complexe par E nous avons l'inclusion $\overline{\mathbb{Q}}_p(\beta_1, \ldots, \beta_\delta) \subset \mathbb{B}_{\mathrm{CM},E}$. D'autre part si $\langle\omega, u\rangle_p$ est une période p-adique on peut exprimer ω comme combinaison linéaire de formes différentielles propres donc modulo $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ le nombre $\langle\omega, u\rangle_p$ est combinaison linéaire d'éléments de $\Omega_p(E)$, qui sont eux-mêmes des produits des β_i. Tout ceci implique que $\overline{\mathbb{Q}}_p(\beta_1, \ldots, \beta_\delta) = \mathbb{B}_{\mathrm{CM},E}$; il nous suffit donc de prouver que les β_i sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Considérons une relation $\sum_{j\in\mathbb{N}^\delta} a_j\beta^j = 0$ où les a_j sont des éléments presque tous nuls de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Choisissons alors une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ contenant tous les a_j, tous les corps conjugués de E et telle que les β_i soient donnés par des variétés abéliennes à multiplication complexe par E définies sur L. On sait que $g \in \mathscr{G}_L$ agit sur $\langle\omega, u\rangle_p$ par multiplication par un élément de $L^\times$ donc pour tout $j \in \mathbb{N}^\delta$ on dispose d'un caractère $\chi_j : \mathscr{G}_L \to L^\times$ vérifiant $g(\beta^j) = \chi_j(g)\beta^j$, où $\beta^j \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris},L}$ désigne le produit $\beta_1^{j_1} \ldots \beta_\delta^{j_\delta}$. Remarquons également que l'égalité $\chi_j = \chi_k$ implique que β^j/β^k est fixé par $\mathscr{G}_L$, donc est élément de L, et comme les β_i forment une base de $\Omega_p(E)$ ceci n'est possible que pour $j = k$. Au total l'indépendance linéaire des caractères nous assure que les $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}^\delta}$ sont libres sur n'importe quel sur-corps de L. Or en faisant agir $\mathscr{G}_L$ sur la relation de dépendance algébrique de départ on trouve que $\sum_{j\in\mathbb{N}^\delta} a_j\beta^j\chi_j = 0$ donc les $a_j\beta^j$ puis les a_j sont tous nuls et finalement $d_p(E) = \delta$. □

Soit k un anneau non nul. Nous munirons l'espace $\mathscr{CM}_k$ de la topologie discrète et nous ferons agir continûment $\mathscr{G}$ à gauche sur $\mathscr{CM}_k$ en posant $a^g(h) = a(hg)$ pour tous $g, h \in \mathscr{G}$. Le stabilisateur de a relativement à cette action sera noté $\mathrm{Stab}(a)$, il s'agit d'un sous-groupe ouvert de $\mathscr{G}$. D'autre part le plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ étant fixé nous pouvons identifier $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ à un sous-groupe de $\mathscr{G}$ et considérer en particulier le sous-espace $\mathscr{CM}_{(p),k}$ de $\mathscr{CM}_k$ sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ agit trivialement. Si l'on se donne une fonction $a \in \mathscr{CM}_k$ et un sous-groupe $H \subset \mathrm{Stab}(a)$ d'indice fini dans $\mathscr{G}$ le symbole $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}/\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\cap H$ fera référence à un système de représentants des classes à gauche de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sous $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\cap H$. On pose alors

$$m_{(p)}(a)=\frac{1}{[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}:\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\cap H]}\sum_{g\in\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}/\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}\cap H}a^g,$$

définition indépendante de H et donnant naissance à un projecteur linéaire

$$m_{(p)}\colon\mathscr{C}\mathscr{M}_k\twoheadrightarrow\mathscr{C}\mathscr{M}_{(p),k}.$$

Nous aurons également besoin de l'involution continue sur $\mathscr{C}\mathscr{M}_k$ donnée par la formule $a^*(g)=a(g^{-1})$.

Proposition II.9 *Le noyau de $\Omega_p\colon\mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Z}}\to(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times/\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ est constitué des applications $a\in\mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Z}}$ vérifiant :*

(i) $a+a^c=0$;

(ii) $a|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}=0$;

(iii) $m_{(p)}(a^*)=0$.

Démonstration.— Partons d'un élément a de $\mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Z}}$ et soit E un corps CM galoisien sur $\mathbb{Q}$, assez gros pour que a appartienne à $\mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Z}}(E)$. Fixons-nous également un type CM de E, soit Φ, et notons $\Phi^{-1}=\{\tau^{-1},\tau\in\Phi\}$ son type CM dual. Convenons d'associer à tout élément $\sigma\in\Phi^{-1}$ la fonction $b_\sigma\colon\mathscr{G}\to\mathbb{Z}$ définie par $b_\sigma(g)=1$ si $g|_E=\sigma$, $b_\sigma(g)=-1$ si $g|_E=c\sigma$ et $b_\sigma(g)=0$ dans les autres cas. Il est clair que $b_\sigma\in\mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Z}}(E)$. D'autre part on peut trouver des entiers $n\in\mathbb{N}^*$, α_0 et $(\alpha_\tau)_{\tau\in\Phi}$ vérifiant $na=\alpha_0+\sum_{\tau\in\Phi}\alpha_\tau b_{\tau^{-1}}$ et comme $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times/\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ est sans torsion on a l'équivalence

$$\Omega_p(a)=1\Longleftrightarrow t^{\alpha_0}\prod_{\tau\in\Phi}\Omega_p(b_{\tau^{-1}})^{\alpha_\tau}\in\overline{\mathbb{Q}}_p.$$

On peut toujours supposer que Φ contient id et nous désignerons par Φ' le type CM de E obtenu en remplaçant id par c dans Φ, de sorte que $b_{\tau^{-1}}=a_{E,\tau,\Phi}-a_{E,\tau,\Phi'}$. Choisissons également deux variétés abéliennes X et X' à multiplication complexe par E, de type CM respectifs Φ et Φ', et soit L_0 une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ sur laquelle X et X' sont définies et ont bonne réduction. On notera $\alpha=\alpha_\Phi$ et $\alpha'=\alpha_{\Phi'}$ les éléments de $E^\times$ donnant l'action du Frobenius relatif sur les réductions modulo p de X et X'. Notons $\mathfrak{p}_0$ le premier de E induit par ι et soit E_p l'adhérence de $\iota(E)$ dans L. Pour ne pas alourdir encore les notations nous identifierons chaque élément de $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times/\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ avec un de ses relevés dans $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times$, que nous supposons fixé une bonne fois pour toutes, le contexte se chargeant de lever les ambiguïtés possibles. Partons donc d'une relation $t^{\alpha_0}\prod_{\tau\in\Phi}\Omega_p(b_{\tau^{-1}})^{\alpha_\tau}\in\overline{\mathbb{Q}}_p$ et choisissons une extension galoisienne finie L de L_0 dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, contenant E_p ainsi que le produit $P=t^{\alpha_0}\prod_{\tau\in\Phi}\Omega_p(b_{\tau^{-1}})^{\alpha_\tau}$. Nous allons exprimer le fait que ϕ_L et I_L agissent trivialement sur cet élément en distinguant deux cas.

Premier cas : $\mathfrak{p}_0$ est inerte ou ramifié dans l'extension quadratique E/E_+. On a alors $\mathfrak{p}_0=c(\mathfrak{p}_0)$, de sorte qu'on dispose du plongement $c\colon E_p\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ induit par la conjugaison complexe. On sait déjà que α/α' a toutes ses valeurs absolues archimédiennes égales à 1 et est une unité en toutes les places de E ne divisant pas p. Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un premier de E au-dessus de p. On a la formule

$$v_{\mathfrak{p}}(\alpha/\alpha')=f_{L/E_p}(\sharp\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}}\cap\Phi-\sharp\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}}\cap\Phi')$$

et comme $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}(\mathrm{id}) = \mathfrak{p}(c)$ ceci implique $v_{\mathfrak{p}}(\alpha/\alpha') = 0$ donc α/α' est une racine de 1. L'action de ϕ_L sur P donne alors $p^{f_L \alpha_0} \in \mu_E$ puis $\alpha_0 = 0$. De plus pour $\tau \in \Phi$ la formule $\Omega_p(b_{\tau^{-1}}) = \Omega_p(a_{E,\tau,\Phi})\Omega_p(a_{E,\tau,\Phi'})^{-1}$ combinée avec le lemme II.7 assure que pour $g \in I_L$ on a

$$\Omega_p(b_{\tau^{-1}})^{g-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{p}(\tau) \neq \mathfrak{p}_0 \\ \overline{\tau}(\chi_{E_p}(g))c\overline{\tau}(\chi_{E_p}(g))^{-1} & \text{si } \mathfrak{p}(\tau) = \mathfrak{p}_0, \end{cases}$$

où $\overline{\tau}\colon E_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ est induit par ι. L'action de I_L sur P combinée à la surjectivité de χ_{E_p} donne l'égalité

$$\prod_{\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0} \cap \Phi} \tau^{\alpha_\tau} = \prod_{\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0} \cap \Phi} (c\tau)^{\alpha_\tau}$$

et en vertu de l'indépendance algébrique des automorphismes quand le corps de base est infini on en déduit $\alpha_\tau = 0$ pour tout $\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0} \cap \Phi$. Réciproquement les égalités $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_\tau = 0$ pour tout $\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0} \cap \Phi$ impliquent que si L est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}_p$ contenant L_0 et les corps conjugués de E alors I_L agit trivialement sur P et $P^{\phi_L - 1}$ est une racine de l'unité. Par suite une puissance de P est dans L et au total nous avons l'équivalence $\Omega_p(a) = 1 \iff \alpha_0 = 0$ et $\alpha_\tau = 0$ pour tout $\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0} \cap \Phi$. Remarquons également que $2\alpha_0 = n(a(\mathrm{id}) + a(c))$ et que pour $g \in \mathscr{G}$ on a $\alpha_0 + \alpha_\tau = na^*(g)$ si $g|_E = \tau \in \Phi$ et $\alpha_0 - \alpha_\tau = na^*(g)$ si $cg|_E = \tau \in \Phi$. En outre $\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$ n'est autre que l'image de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ par la flèche de restriction $\mathscr{G} \to \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ donc la condition (ii) entraîne à elle seule $\Omega_p(a) = 1$. Réciproquement si $\Omega_p(a) = 1$ est vérifiée le fait que c appartienne à $\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$ entraîne que (i) et (ii) sont valides et que $m_{(p)}((a^*)^c) = m_{(p)}(a^*)$ donc (iii) est une conséquence du (i).

Deuxième cas : $\mathfrak{p}_0$ est décomposé dans E/E_+, ce qui revient à dire $\mathfrak{p}_0 \neq c(\mathfrak{p}_0)$, et on peut supposer que Φ contient $\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$. En faisant agir ϕ_L sur P on obtient l'égalité

$$p^{f_L \alpha_0} \prod_{\tau \in \Phi} \tau(\alpha/\alpha')^{\alpha_\tau} = 1$$

et cela implique déjà, en prenant une valeur absolue archimédienne, $\alpha_0 = 0$. De plus si $\mathfrak{p}$ est un premier de E au-dessus de p on a

$$v_{\mathfrak{p}}(\tau(\alpha/\alpha')) = \begin{cases} f_{L/E_p} & \text{si } \mathfrak{p} = \tau(\mathfrak{p}_0) \\ -f_{L/E_p} & \text{si } \mathfrak{p} = c\tau(\mathfrak{p}_0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\sum_{\tau \in \Phi} \varepsilon_{\mathfrak{p}}(\tau)\alpha_\tau = 0$ où $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(\tau) = 1$ si $\mathfrak{p} = \tau(\mathfrak{p}_0)$, $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(\tau) = -1$ si $\mathfrak{p} = c\tau(\mathfrak{p}_0)$ et $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(\tau) = 0$ sinon. On voit également que pour $g \in I_L$ on a

$$\Omega_p(b_{\tau^{-1}})^{g-1} = \begin{cases} \overline{\tau}(\chi_{E_p}(g)) & \text{si } \mathfrak{p}(\tau) = \mathfrak{p}_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

puisque le cas $\mathfrak{p}(\tau) = c(\mathfrak{p}_0)$ et $\tau \in \Phi$ n'arrive jamais. Subséquemment

$$\prod_{\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}} \tau^{\alpha_\tau} = 1$$

et cela entraîne $\alpha_\tau = 0$ pour tout $\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$. On en déduit l'équivalence entre $\Omega_p(a) = 1$ et les conditions $\alpha_0 = 0$, $\alpha_\tau = 0$ pour tout $\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$ et $\sum_{\tau \in \Phi} \varepsilon_{\mathfrak{p}}(\tau)\alpha_\tau = 0$ pour tout $\mathfrak{p}|p$. Il est clair que (i) et (ii) sont équivalentes aux conditions $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_\tau = 0$ pour tout $\tau \in \mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$. En outre et sous la condition $\alpha_0 = 0$ on voit qu'à un facteur n près on a $\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})}\varepsilon_\mathfrak{p}(\tau)a^*(\tau) = \sum_{\tau\in\Phi}\varepsilon_\mathfrak{p}(\tau)\alpha_\tau - \sum_{\tau\in\Phi}\varepsilon_\mathfrak{p}(c\tau)\alpha_\tau = 2\sum_{\tau\in\Phi}\varepsilon_\mathfrak{p}(\tau)\alpha_\tau$ donc la nullité de cette dernière somme est équivalente à celle de la première. Prenons alors un élément quelconque $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ et notons $\mathfrak{p}$ le premier $\sigma(\mathfrak{p}_0)$. La définition de $\varepsilon_\mathfrak{p}$ se reformule en $\varepsilon_\mathfrak{p}(\tau) = 1$ si $\tau \in \sigma\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$, $\varepsilon_\mathfrak{p}(\tau) = -1$ si $\tau \in c\sigma\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}$ et $\varepsilon_\mathfrak{p}(\tau) = 0$ sinon donc

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})}\varepsilon_\mathfrak{p}(\tau)a^*(\tau) &= \sum_{\tau\in\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}} a^*(\sigma\tau) - a^*(c\sigma\tau)\\ &= 2\sum_{\tau\in\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}} a^*(\sigma\tau)\\ &= 2\sharp\mathrm{H}_{E,\mathfrak{p}_0}m_{(p)}(a^*)(\sigma)\end{aligned}$$

et cela conclut la preuve. □

Corollaire II.10 *Soit E un corps* CM *galoisien sur $\mathbb{Q}$. On note E_+ son sous-corps réel maximal et $p\mathcal{O}_{E_+} = (\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r)^e$ la décomposition en produit de premiers de p dans E_+. On a alors*

$$\delta_p(E) = \begin{cases} 1 + \frac{[E_+:\mathbb{Q}]}{r} & \textit{si } \mathfrak{p}_1 \textit{ est inerte ou ramifié dans } E\\ r + \frac{[E_+:\mathbb{Q}]}{r} & \textit{si } \mathfrak{p}_1 \textit{ est décomposé dans } E.\end{cases}$$

Démonstration.— Soit $\mathcal{K}$ le noyau de $\Omega_p\colon\mathscr{CM}_\mathbb{Z}(E) \to (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times/\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$. Dans le cas inerte ou ramifié $\mathcal{K}$ est constitué des fonctions a vérifiant $a|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = 0$. On sait d'une part que l'image D_p de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ dans $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ est de cardinal $[E:\mathbb{Q}]/r$, d'autre part que $c \in D_p$. Si Φ est un type CM de E contenant la moitié des éléments de D_p l'isomorphisme explicite $\mathscr{CM}_\mathbb{Z}(E) \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^\Phi$ du lemme II.4 donne alors $\delta_p(E) = \mathrm{rang}\mathscr{CM}_\mathbb{Z}(E) - \mathrm{rang}\mathcal{K} = 1 + [E:\mathbb{Q}]/2r$ et c'est le résultat annoncé. Traitons maintenant le cas décomposé, ce qui implique $\sharp D_p = [E_+:\mathbb{Q}]/r$, et notons $\mathcal{L}$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathscr{CM}_\mathbb{Z}(E)$ constitué des fonctions a vérifiant $a + a^c = 0$ et $a|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = 0$. Alors $\mathcal{L}$ est stable sous l'action de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et de $a \mapsto a^*$. En outre $\mathcal{K}$ n'est autre que le noyau de la restriction à $\mathcal{L}$ de $a \mapsto m_{(p)}(a^*)$ donc $\mathrm{rang}\mathcal{L} - \mathrm{rang}\mathcal{K} = \sharp D_p^{-1}\mathrm{rang}\mathcal{L}$ et la formule $\mathrm{rang}\mathscr{CM}_\mathbb{Z}(E) - \mathrm{rang}\mathcal{L} = 1 + \sharp D_p$ permet de conclure. □

2 Distributions de périodes exactes.

Comme expliqué dans l'introduction les distributions de périodes présentées ci-dessus ne sont pas complètement satisfaisantes à cause du facteur multiplicatif algébrique qui intervient dans leur définition. Colmez a donné dans [7] un raffinement des relations monomiales permettant, dans le cas complexe, de supprimer cette indétermination. En revanche il n'est plus possible de donner un sens à $\Omega_\infty(a)$ si la fonction $a \in \mathscr{CM}$ n'est pas centrale, condition que nous retrouverons d'ailleurs quand nous essayerons de relier ht aux fonctions L d'Artin. Après une revue plus précise du cas complexe nous allons, dans cette partie, appliquer le même procédé de normalisation au cas p-adique pour définir une distribution de périodes à valeurs dans l'anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^+$.

§1. Le cas complexe.

Soit k un anneau non nul. On désignera par $\mathscr{CM}_k^0$ le k-module des fonctions $a \in \mathscr{CM}_k$ centrales et on fera agir $\mathscr{G}$ continûment à gauche sur $\mathscr{CM}_k$ (muni de la topologie discrète) en posant $ga(h) = a(g^{-1}hg)$ pour tous $g, h \in \mathscr{G}$. Ainsi $\mathscr{CM}_k^0$ n'est autre que le sous-espace de $\mathscr{CM}_k$ fixé par $\mathscr{G}$ relativement à cette action. Le stabilisateur de $a \in \mathscr{CM}_k$ est un sous-groupe ouvert de $\mathscr{G}$, qui sera noté $\mathrm{Stab}^0(a)$. Lorsque H est un sous-groupe de $\mathscr{G}$ contenu dans $\mathrm{Stab}^0(a)$ et d'indice fini dans $\mathscr{G}$ nous désignerons par $\mathscr{G}/H$ un système de représentants des classes à gauche de $\mathscr{G}$ sous H. Ainsi $\mathscr{G}$ peut s'écrire comme la réunion disjointe $\coprod_{g\in\mathscr{G}/H} gH$. On constate alors que la fonction

$$a^0 = \frac{1}{[\mathscr{G} : H]} \sum_{g\in\mathscr{G}/H} ga$$

ne dépend ni de H ni du système de représentants choisi et qu'elle est fixée par $\mathscr{G}$, de sorte que l'application $a \mapsto a^0$ est un projecteur de $\mathscr{CM}_k$ sur $\mathscr{CM}_k^0$. Il s'ensuit du lemme II.4 que les $a^0_{E,\tau,\Phi}$ engendrent $\mathscr{CM}_k^0$ sur k. Remarquons également que si E est un corps CM, τ un élément de H_E et Φ un type CM de E, nous avons la formule $a^0_{E,\tau,\Phi} = [K : \mathbb{Q}]^{-1} \sum_{\sigma\in\mathrm{H}_K} a_{E,\sigma\tau,\sigma\Phi}$ où $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ désigne n'importe quel corps de nombres contenant tous les corps conjugués de E.

Considérons à nouveau une variété abélienne X de dimension d, définie sur un corps de nombres K, à multiplication complexe par un corps CM E dont tous les corps conjugués sont contenus dans K. Soit également (ω_τ) une base propre de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$. Après s'être fixé pour tout nombre premier ℓ un plongement $\iota_\ell \colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, associons à tout plongement $\sigma \in \mathrm{H}_K$ un modèle $\mathscr{X}_\ell^\sigma$ de $X \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ construit via $\iota_\ell\sigma$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_\ell$ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. L'injection naturelle fait de $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{X}_\ell^\sigma/\mathcal{O}_\ell)$ un réseau de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et si l'on choisit n'importe quelle base $\omega_1, \ldots, \omega_{2d}$ du $\mathcal{O}_\ell$-module libre $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{X}_\ell^\sigma/\mathcal{O}_\ell)$ on définira la valuation de $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$ relativement à la place de K déterminée par σ par la formule $v_\ell(\omega^\sigma) = \mathrm{Inf}\{v_\ell(x_i), 1 \le i \le 2d\}$, où les $x_i \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ vérifient $\omega \otimes 1 = \sum_{i=1}^{2d} x_i\omega_i$. Bien entendu cette définition dépend de σ mais ni de la base (ω_i) ni du modèle $\mathscr{X}_\ell^\sigma$. Par ailleurs la conjugaison complexe c induit un homéomorphisme $X^\sigma(\mathbb{C}) \to X^{c\sigma}(\mathbb{C})$ donc on dispose d'un isomorphisme de E-vectoriels $H_1(X^\sigma(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \to H_1(X^{c\sigma}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, que nous renoterons c. On appellera *famille admissible de cycles* (u_σ) sur X la donnée pour tout $\sigma \in \mathrm{H}_K$ d'un élément non nul u_σ de $H_1(X^\sigma(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, avec la condition de compatibilité $c(u_\sigma) = u_{c\sigma}$. Introduisons enfin le nombre complexe non nul

$$\langle \omega_\tau^\sigma, \omega_\tau^{c\sigma}, u_\sigma\rangle_\infty = \left(\langle \omega_\tau^\sigma, u_\sigma\rangle_\infty \frac{2i\pi}{\langle \omega_{c\tau}^\sigma, u_\sigma\rangle_\infty} \right)^{1/2}$$

qui est bien défini au signe près.

Pour alléger un peu les notations nous désignerons par $\mathscr{CM}$, $\mathscr{CM}_{(p)}$ et $\mathscr{CM}^0$ les espaces $\mathscr{CM}_\mathbb{Q}$, $\mathscr{CM}_{(p),\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{CM}^0_\mathbb{Q}$.

Théorème II.11 (Colmez [7]) *Il existe une unique application $\mathbb{Q}$-linéaire*

$$ht \colon \mathscr{CM}^0 \to \mathbb{R}$$

telle que pour toute variété abélienne X/K à multiplication complexe par $\mathcal{O}_E$, dont le type CM *est Φ, et tout plongement $\tau \in \mathrm{H}_E$ on ait l'égalité*

$$ht(a^0_{E,\tau,\Phi}) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\in\mathrm{H}_K} \log|\langle \omega_\tau^\sigma, \omega_{c\tau}^\sigma, u_\sigma\rangle_\infty| - \frac{1}{2} \sum_{\ell<\infty} \left[v_\ell(\omega_\tau^\sigma) - v_\ell(\omega_{c\tau}^\sigma) \right] \log \ell.$$

§2. Le cas p-adique.

En s'inspirant du cas complexe on définit l'élément non nul de $\mathbb{B}_p$

$$\langle \omega_\tau^\sigma, \omega_\tau^{c\sigma}, u_\sigma \rangle_p = \left(\frac{\langle \omega_\tau^\sigma, u_\sigma \rangle_p}{\langle \omega_{c\tau}^\sigma, u_\sigma \rangle_p} \right)^{1/2}$$

où l'on a conservé les hypothèses et notations du §1. Il n'est pas nécessaire de préciser le signe de cette expression car seul son logarithme interviendra réellement dans ce qui suit.

Théorème II.12 *Il existe une unique application $\mathbb{Q}$-linéaire $ht\colon \mathscr{CM}^0 \to \mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^+$ telle que pour tout triplet (E, τ, Φ) comme ci-dessus on ait l'égalité*

$$ht(a_{E,\tau,\Phi}^0) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in \mathrm{H}_K} \log \langle \omega_\tau^\sigma, \omega_{c\tau}^\sigma, u_\sigma \rangle_p - \frac{1}{2} \sum_{\ell < \infty} \Big[v_\ell(\omega_\tau^\sigma) - v_\ell(\omega_{c\tau}^\sigma) \Big] \log_p \ell.$$

Démonstration.— Rappelons d'abord un fait classique : pour tout (E, τ, Φ) comme ci-dessus il est possible de trouver un corps de nombres $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ contenant tous les conjugués de E et une variété abélienne X définie sur K et à multiplication complexe par $\mathcal{O}_E$ dont le type CM est précisément Φ. Ceci se démontre en réalisant $\mathcal{O}_E$ comme réseau de $\mathbb{C}^{c\Phi}$, de sorte que le quotient $X^{\mathrm{an}} = \mathbb{C}^{c\Phi}/\mathcal{O}_E$ est un groupe de Lie complexe compact muni d'une action de $\mathcal{O}_E$. Le principe de Lefschetz assure alors que X^{an} est l'analytifié d'une variété abélienne X définie sur $\mathbb{C}$, à multiplication complexe par $\mathcal{O}_E$. En regardant l'action de E sur l'homologie simpliciale de X^{an} on voit que le type CM de X est Φ et il ne reste plus qu'à remarquer que tout ceci se descend sur $\overline{\mathbb{Q}}$ donc sur un corps de nombres assez gros. L'unicité de ht découle alors du fait que les $a_{E,\tau,\Phi}^0$ engendrent $\mathscr{CM}^0$ sur $\mathbb{Q}$. Remarquons également que si ht existe en tant qu'application $\mathscr{CM}^0 \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[\log t]$ elle est automatiquement à valeurs dans $\mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^+$, grâce à la formule exprimant les périodes p-adiques des variétés abéliennes en fonction de celles du groupe formel associé. La preuve de l'existence est totalement analogue à celle de [7], pages 665-667, et nous allons juste en tracer les grandes lignes.

Désignons par $h(E, \tau, K, X, \xi, u)$ le nombre candidat pour être $ht(a_{E,\tau,\Phi}^0)$, où ξ est une base propre de $H_{\mathrm{dR}}^1(X/K)$ et u une famille admissible de cycles sur X, arbitrairement choisis. Dans une première étape on prouve que $h(E, \tau, K, X, \xi, u)$ ne dépend ni de ξ ni de u, ce qui découle de l'indépendance en u, à $\sigma \in \mathrm{H}_K$ fixé, du produit

$$\langle \omega_\tau^\sigma, \omega_{c\tau}^\sigma, u_\sigma \rangle_p \langle \omega_\tau^{c\sigma}, \omega_{c\tau}^{c\sigma}, u_{c\sigma} \rangle_p$$

et de la formule du produit dans $\mathbb{C}_p$, c'est-à-dire l'égalité

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{H}_K} \log_p \sigma(x) = \sum_{\sigma \in \mathrm{H}_K} \sum_{\ell < \infty} v_\ell(\sigma(x))$$

valable pour tout $x \in K^\times$. En notant $h(E, \tau, K, X)$ la valeur commune à tous les nombres $h(E, \tau, K, X, \xi, u)$ la deuxième étape consiste à établir que $h(E, \tau, K, X)$ ne dépend pas de K, autrement dit que si $K' \subset \overline{\mathbb{Q}}$ est un corps de nombres contenant K on a $h(E, \tau, K', X \otimes_K K') = h(E, \tau, K, X)$. Cette assertion découle simplement du fait que $h(E, \tau, K, X)$ est défini par une moyenne sur H_K. Dans un troisième temps il faut prouver que le nombre $h(E, \tau, K, X)$ ne dépend que de E, τ et du type CM de X/K, ce qui se montre en utilisant le fait que deux variétés abéliennes ayant le même type CM sont isogènes donc ont même cohomologie. En conservant les notations ci-dessus $h(E,\tau,\Phi)$ désignera la valeur commune aux nombres $h(E,\tau,K,X)$ lorsque X/K est une variété abélienne dont le type CM est Φ. De nouveau grâce au fait que $h(E,\tau,\Phi)$ est défini par une moyenne sur H_K on voit que $h(E,g\tau,g\Phi)=h(E,\tau,\Phi)$ pour tout $g\in\mathscr{G}$. La cinquième étape est la suivante : soient $E\subset F$ deux corps CM, $\tau\in\mathrm{H}_F$, Φ un type CM de E et Φ_F le type CM de F constitué par les $\alpha\in\mathrm{H}_F$ dont la restriction à E est dans Φ. Alors $h(E,\tau_{|E},\Phi)=h(F,\tau,\Phi_F)$. Pour prouver ceci on pose $n=[F:E]$ et on choisit une variété abélienne X/K à multiplication complexe par $\mathcal{O}_E$ et dont le type CM est Φ. Quitte à grossir K on peut supposer que K contient tous les corps conjugués de F. Le produit $Y=X\times\cdots\times X$ de n copies de X est une variété abélienne sur K, de dimension $[F:\mathbb{Q}]/2$. On peut la munir d'une multiplication complexe par $\mathcal{O}_F$ et le type CM de Y est alors Φ_F. Le résultat voulu s'obtient alors presque immédiatement.

Pour conclure il faut se donner deux ensembles finis disjoints I_1 et I_2 ainsi que pour tout $i\in I_1\cup I_2$ un coefficient $n_i\in\mathbb{Q}$, un corps CM E_i, un élément τ_i de $\mathrm{H}_{\mathrm{E_i}}$ et un type CM Φ_i de E_i. On suppose $\sum_{i\in I_1}n_ia^0_{E_i,\tau_i,\Phi_i}=\sum_{i\in I_2}n_ia^0_{E_i,\tau_i,\Phi_i}$ et on veut prouver $\sum_{i\in I_1}n_ih(E_i,\tau_i,\Phi_i)=\sum_{i\in I_2}n_ih(E_i,\tau_i,\Phi_i)$. Quitte à multiplier tout le monde par un entier assez gros on peut supposer que $n_i\in\mathbb{Z}$. Quitte à ne considérer que les n_i non nuls et à faire passer de part et d'autre de l'égalité ceux qui n'ont pas le bon signe on peut supposer que $n_i\in\mathbb{N}^*$. En utilisant les cinq étapes précédentes on peut supposer que que tous les E_i sont égaux à un même corps E et que tous les τ_i sont égaux à un même $\tau\in\mathrm{H}_E$. Le résultat voulu est alors une conséquence du théorème de Deligne sur les cycles de Hodges absolus et des raffinements p-adiques dûs à Blasius et Wintenberger [27]. □

§3. La distribution de nombres de Weil.

Il existe une autre distribution de périodes en p-adique, celle construite par Anderson à la fin de [1] et qu'il note W_p. Dans le but de la relier à la distribution ht nous allons rappeler comment il procède. La valeur absolue usuelle du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ sera notée $|\cdot|_\infty$ et l'on désignera par $\mathfrak{A}_p$ le sous-groupe des nombres de Weil de $\overline{\mathbb{Q}}^\times$. Ainsi α appartient à $\mathfrak{A}_p$ quand :

(i) il existe $f\in\mathbb{Q}$ vérifiant $|g(\alpha)|_\infty=p^{f/2}$ pour tout $g\in\mathscr{G}$;

(ii) pour tout premier $\ell\neq p$ et tout $g\in\mathscr{G}$ on a $|\iota_\ell g(\alpha)|_\ell=1$;

sachant que l'on s'est fixé pour tout ℓ un plongement de corps $\iota_\ell\colon\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Associons à un élément arbitraire α de $\mathfrak{A}_p$ la fonction a_α de $\mathscr{CM}_{(p)}$ donnée pour $g\in\mathscr{G}$ par la formule

$$|\alpha|^2_\infty|\iota g^{-1}(\alpha)|_p=p^{a_\alpha(g)},$$

où l'on rappelle que $|\cdot|_p$ est normalisée par $|p|_p=p^{-1}$. Nous avons donc fabriqué un morphisme de groupes $\mathfrak{A}_p\to\mathscr{CM}_{(p)}$, $\alpha\mapsto a_\alpha$. A titre d'exemple pour $\alpha=p$ on trouve $a_p=1$. Introduisons également l'ensemble μ_∞ des racines de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Si l'on combine la formule du produit dans $\mathbb{C}$ avec le fait qu'un nombre algébrique est dans μ_∞ si et seulement si toutes ses valeurs absolues valent 1, on trouve que le noyau de $\alpha\mapsto a_\alpha$ est exactement μ_∞. En outre Anderson signale ([1], proposition 6.1) que ce morphisme est surjectif, en faisant référence à un théorème de Honda ([16], théorème 1). Nous incluons ici une preuve directe de cette surjectivité, obtenue en s'inspirant de [16], lemme 1. La première étape consiste à décrire explicitement une famille génératrice de $\mathscr{CM}_{(p)}$, ce qui nécessite une nouvelle définition. Lorsque K est un corps de nombres contenu dans $\overline{\mathbb{Q}}$ on désignera par $\mathfrak{p}_K$ le premier de K au-dessus de p défini par ι, autrement dit

$\mathfrak{p}_K = \{x \in \mathcal{O}_K, |\iota(x)|_p < 1\}$. Soit maintenant E un corps CM galoisien sur $\mathbb{Q}$ vérifiant $c(\mathfrak{p}_E) \neq \mathfrak{p}_E$. Le groupe de décomposition $D_E = D(\mathfrak{p}_E/p)$ ne contient donc pas la conjugaison complexe et l'on peut associer à tout élément $\sigma \in \mathrm{H}_E$ une application $b_{E,\sigma}\colon \mathscr{G} \to \mathbb{Z}$ par la formule

$$b_{E,\sigma}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g \in \sigma D_E \\ -1 & \text{si} \quad gc \in \sigma D_E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme II.13 *L'espace $\mathscr{CM}_{(p)}$ est engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1 et les fonctions $b_{E,\sigma}$.*

Démonstration.— En premier lieu il est clair que $b_{E,\sigma}$ se factorise à travers $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ et que $b_{E,\sigma}(gc) + b_{E,\sigma}(g)$ est identiquement nul. En outre si $h \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ la restriction de h à E appartient à D_E donc $b_{E,\sigma}(gh) = b_{E,\sigma}(g)$ et finalement $b_{E,\sigma} \in \mathscr{CM}_{(p)}$. Montrons maintenant que toute fonction $a \in \mathscr{CM}_{(p)}$ est combinaison linéaire de 1 et des $b_{E,\sigma}$. Quitte à remplacer a par $a - \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{Q}$ est une constante judicieusement choisie, on peut supposer que $a(gc) + a(g) = 0$. Soit alors E un corps CM galoisien sur $\mathbb{Q}$ tel que a se factorise à travers $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. Si $a = 0$ il n'y a rien à prouver donc on peut supposer $a \neq 0$, ce qui implique $c \notin D_E$. Soit alors $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ un système de représentants de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ sous $D_E \cup cD_E$, de sorte que $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ est la réunion disjointe de $\coprod_{i=1}^r \sigma_i D_E$ et de $\coprod_{i=1}^r \sigma_i c D_E$. Il est alors clair que $a = \sum_{i=1}^r a(\sigma_i) b_{E,\sigma_i}$ et le lemme est prouvé. □

Corollaire II.14 *Pour tout $a \in \mathscr{CM}_{(p)}$ il existe un élément $\alpha \in \mathfrak{A}_p$ tel que $a = a_\alpha$.*

Démonstration.— Le groupe $\mathfrak{A}_p$ est divisible donc l'image de n'importe quel morphisme de groupes $\mathfrak{A}_p \to \mathscr{CM}_{(p)}$ est un sous-$\mathbb{Q}$-vectoriel de $\mathscr{CM}_{(p)}$. Pour obtenir la surjectivité désirée il suffit donc de prouver que 1 et les $b_{E,\sigma}$, à un multiple rationnel près, peuvent se mettre sous la forme a_α. Comme signalé plus haut le choix $\alpha = p$ nous fait retrouver la fonction constante 1. Par ailleurs lorsque $h \in \mathscr{G}$ on voit immédiatement que les fonctions $g \mapsto a_\alpha(hg)$ et $g \mapsto b_{E,\sigma}(hg)$ ne sont autre que $a_{h^{-1}(\alpha)}$ et $b_{E,h^{-1}\sigma}$. Avec les notations ci-dessus on peut donc supposer $\sigma = \mathrm{id}$. Considérons alors E un corps CM galoisien sur $\mathbb{Q}$ vérifiant $c \notin D_E$. Posons $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_E$, $e = e(\mathfrak{P}/p)$ et soit $K = E^{D_E}$ le corps de décomposition $\mathfrak{P}/p$. Le premier $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_K$ satisfait alors l'égalité $\mathfrak{p}\mathcal{O}_E = \mathfrak{P}^e$ et, en notant h le nombre de classes de K, l'idéal $\mathfrak{p}^h$ est principal, engendré par un élément ξ de $\mathcal{O}_K$. Formons alors $\alpha = \xi/c(\xi) \in E^\times$. Il est clair que pour tout $g \in \mathscr{G}$ on a $g(\alpha)cg(\alpha) = 1$ donc $|g(\alpha)|_\infty = 1$. En outre $\alpha\mathcal{O}_E = \mathfrak{P}^{eh} c(\mathfrak{P})^{-eh}$ donc α est une unité en toutes les places finies de E ne divisant pas p, ce qui prouve $\alpha \in \mathfrak{A}_p$. On voit enfin que

$$a_\alpha(g) = \frac{1}{e} v_{g(\mathfrak{P})}(\alpha) = \begin{cases} h & \text{si} \quad g \in D_E \\ -h & \text{si} \quad gc \in D_E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $a_\alpha = h b_{E,\mathrm{id}}$ et cela conclut la preuve. □

On peut donc définir

$$w_p\colon \mathscr{CM}_{(p)} \longrightarrow \mathfrak{A}_p/\mu_\infty$$

comme étant l'unique morphisme de groupes vérifiant $w_p(a_\alpha) = \alpha \pmod{\mu_\infty}$. Remarquons que $\mathfrak{A}_p/\mu_\infty$ est un $\mathbb{Z}$-module divisible et sans torsion donc il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, faisant de w_p une application $\mathbb{Q}$-linéaire. On dira que w_p est la distribution de nombres de Weil.

Lemme II.15 *Soient $a \in \mathscr{CM}_{(p)}$ et $h \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. En notant ${}^h a$ l'élément de $\mathscr{CM}_{(p)}$ défini par $g \mapsto a(h^{-1}g)$ on a $w_p({}^h a) = h(w_p(a))$.*

Démonstration.— Soit $\alpha \in \mathfrak{A}_p$ vérifiant $a = a_\alpha$. On constate que

$$p^{a_{h(\alpha)}(g)} = |h(\alpha)|_\infty^2 |\iota g^{-1} h(\alpha)|_p = |\alpha|_\infty^2 |\iota(h^{-1}g)^{-1}(\alpha)|_p = p^{a_\alpha(h^{-1}g)}$$

donc ${}^h a = a_{h(\alpha)}$ et cela permet de conclure. □

En faisant précéder $\log w_p\colon \mathscr{CM}_{(p)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ de l'opérateur de moyenne

$$m_{(p)}\colon \mathscr{CM} \to \mathscr{CM}_{(p)}$$

on récupère un morphisme $\mathscr{CM} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ et par extension des scalaires ceci donne naissance à une application $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéaire

$$\log w_p\colon \mathscr{CM}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}.$$

Corollaire II.16 *Si $a \in \mathscr{CM}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ alors $\log w_p(a) \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$.*

Démonstration.— Il suffit de prouver que si $a \in \mathscr{CM}^0$ alors $\log w_p(m_{(p)}(a))$ appartient à $\mathbb{Q}_p$. Pour cela on se donne un sous-groupe $H \subset \mathrm{Stab}(a)$ d'indice fini dans $\mathscr{G}$ ainsi qu'un élément h de $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$; on calcule alors

$${}^h m_{(p)}(a) = \frac{1}{[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} : \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \cap H]} \sum_{g \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}/\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \cap H} {}^h a^g = \frac{1}{[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} : \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \cap H]} \sum_{g \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}/\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \cap H} a^{gh^{-1}} = m_{(p)}(a).$$

En vertu du lemme précédent ceci implique que $\log w_p(m_{(p)}(a))$ est fixé par $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ donc appartient bien à $\mathbb{Q}_p$. □

§4. Propriétés élémentaires de la distribution ht.

L'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ est certes intéressant pour construire la distribution p-adique ht, mais nous ne devons pas perdre de vue que notre objectif est d'utiliser cette dernière pour calculer des valeurs de fonctions L, qui appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Il est donc utile de disposer d'un critère permettant de fabriquer des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ à partir de ht, ce qui est l'objet de ce paragraphe.

On sait que le groupe W_p n'agit que $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-semi-linéairement sur $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$. Pour avoir une action linéaire, ce qui est plus commode, on fera agir W_p sur le membre de gauche de l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$; ceci fait de ce dernier un $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$-module. Par extension des scalaires on récupère alors une application

$$ht\colon \mathscr{CM}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$$

qui est bien entendu $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$-linéaire. D'autre part $\mathscr{CM}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ est également un $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$-module avec l'action $a^\psi(g) = a(g\psi)$ donc on dispose d'une flèche naturelle $\mathscr{CM}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]} \to \mathscr{CM}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$.

Proposition II.17 *Soient A un élément de $\mathscr{CM}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]}$ et a l'image de A dans $\mathscr{CM}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $ht(A) \in \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$;

(ii) $a|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = a^c|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$ *et* $m_{(p)}(a^*) = m_{(p)}(a^*)^c$.

Démonstration.— Donnons-nous une fonction $a = a_{E,\tau,\Phi}$ dans $\mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Z}}$ ainsi qu'un élément ψ de W_p. Par définition de Ω_p on calcule $\psi(\Omega_p(a)) = \psi(\langle\omega_\tau, u\rangle_p) = \beta_\psi(\omega_\tau)\langle\omega_{\psi\tau}, u\rangle_p$ où $\beta_\psi(\omega_\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ est un coefficient d'une matrice de Frobenius attachée à la variété abélienne sur laquelle on calcule la période. En se souvenant que Ω_p est définie modulo $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ sur son but ceci entraîne $\Omega_p(a) = \Omega_p(a^\psi)$ donc Ω_p est $\mathbb{Z}[W_p]$-linéaire. Introduisons l'application $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$-linéaire

$$\log \Omega_p \colon \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to (\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}/\overline{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$$

obtenue par extension des scalaires à $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ de la composée de $\Omega_p \colon \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Z}} \to (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times/\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ et du logarithme $\log \colon (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^\times/\overline{\mathbb{Q}}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}[\log t]/\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soient également

$$\pi \colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow (\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}/\overline{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$$

la surjection canonique, $\nu \colon \mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]} \to \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ la flèche naturelle et $\varepsilon \colon \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ l'application $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$-linéaire donnée par $a \mapsto a - a^c$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]} & \xrightarrow{ht} & \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon\circ\nu} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} & \xrightarrow{\log\Omega_p} & (\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}/\overline{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}
\end{array}$$

est commutatif car c'est vrai sur les $a^0_{E,\tau,\Phi}$, qui engendrent $\mathscr{C}\mathscr{M}^0$ sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$. Par conséquent $ht(A) \in \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ si et seulement si $\log\Omega_p(\varepsilon(a)) = 0$ et la proposition II.9 donne le résultat souhaité. □

Nous appellerons corps p-central tout corps de nombres K galoisien sur $\mathbb{Q}$ tel qu'en désignant par $\mathfrak{p}$ un premier arbitraire de K au-dessus de p le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}/p$ soit contenu dans le centre de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. C'est en particulier le cas si $K/\mathbb{Q}$ est abélienne ou si p est totalement décomposé dans K.

Lemme II.18 *Soient E un corps* CM *p-central, Φ un type* CM *de E et τ un élément de H_E. En posant $a = a^0_{E,\tau,\Phi}$ on a $a^\psi \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0$ et*

$$\begin{aligned}
ht(\psi a - a^\psi) &= \frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\in\mathrm{H}_K} \log_p \beta_\psi(\omega^\sigma_\tau) - \log_p \beta_\psi(\omega^\sigma_{c\tau}) \\
&\quad - \sum_{\ell<\infty} \Big[v_\ell(\omega^\sigma_\tau) - v_\ell(\omega^\sigma_{c\tau}) - v_\ell(\omega^\sigma_{\psi\tau}) + v_\ell(\omega^\sigma_{c\psi\tau}) \Big] \log_p \ell.
\end{aligned}$$

Démonstration.— Choisissons un corps de nombre $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ contenant tous les conjugués de E. On calcule en premier lieu $a^\psi = [K:\mathbb{Q}]^{-1}\sum_{\sigma\in\mathrm{H}_K} a^\psi_{E,\sigma\tau,\sigma\Phi} = [K:\mathbb{Q}]^{-1}\sum_{\sigma\in\mathrm{H}_K} a_{E,\psi\sigma\tau,\sigma\Phi}$ et l'hypothèse faite sur le groupe de décomposition de n'importe quel premier de E au-dessus de p entraîne que $\psi\sigma\tau = \sigma\psi\tau$. Par suite $a^\psi = a^0_{E,\psi\tau,\Phi}$ est effectivement élément de $\mathscr{C}\mathscr{M}^0$. Donnons-nous par ailleurs une variété abélienne X, définie sur K (ce qui est possible quitte à grossir K), à multiplication complexe par E et dont le type CM est Φ. Soient également (ω_τ) une base propre de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$ et (u_σ) une famille admissible de cycles sur X. Au vu du lemme précédent on a $ht(\psi a - a^\psi) = \psi(ht(a)) - ht(a^\psi)$ et la formule $\psi(\langle\omega^\sigma_\tau, u_\sigma\rangle_p) = \beta_\psi(\omega^\sigma_\tau)\langle\omega^\sigma_{\sigma^{-1}\psi\sigma\tau}, u_\sigma\rangle_p = \beta_\psi(\omega^\sigma_\tau)\langle\omega^\sigma_{\psi\tau}, u_\sigma\rangle_p$ permet de conclure. □

La fin de ce paragraphe est consacrée à l'établissement d'une formule reliant ht et la distribution de nombres de Weil w_p. Dans la suite on notera $\mathscr{CM}^0_{(p)} = \mathscr{CM}^0 \cap \mathscr{CM}_{(p)}$.

Lemme II.19 *Lorsque E décrit les corps* CM *galoisiens sur $\mathbb{Q}$ dans lesquels p est totalement décomposé, τ les éléments de H_E et Φ les types* CM *de E, les applications $a^0_{E,\tau,\Phi}$ engendrent $\mathscr{CM}^0_{(p)}$ sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration.— Commençons par remarquer que lorsque E est un corps CM, galoisien sur $\mathbb{Q}$, et dans lesquel p est totalement décomposé, on a $\mathscr{CM}^0(E) \subset \mathscr{CM}^0_{(p)}$: cela découle simplement de l'inclusion $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$. Soient maintenant a un élément de $\mathscr{CM}^0_{(p)}$ et $H = \mathrm{Stab}(a)$, sous-groupe ouvert et distingué de $\mathscr{G}$. Le corps $E = \overline{\mathbb{Q}}^H$ est CM dès que a n'est pas constante, hypothèse que nous ferons désormais. En outre $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \subset H$ donc p est totalement décomposé dans E. On conclut grâce au fait que les $a^0_{E,\tau,\Phi}$ engendrent $\mathscr{CM}^0(E)$ sur $\mathbb{Q}$ d'une part et que $a \in \mathscr{CM}^0(E)$ d'autre part. □

Théorème II.20 *Soient $a \in \mathscr{CM}^0_{(p)}$ et $\psi \in W_p$ de degré 1. On a l'égalité*

$$\log w_p(a^*) = -ht(\psi a - a).$$

Démonstration.— La formule à établir étant $\mathbb{Q}$-linéaire nous pouvons supposer que $a = a^0_{E,\tau,\Phi}$ où E est un corps CM galoisien sur $\mathbb{Q}$ dans lequel p est totalement décomposé, Φ est un type CM de E et τ est un élément de H_E. Dans ce cas E est p-central et $\psi a - a = \psi a - a^\psi$ donc le membre de droite de l'égalité est donné par le lemme II.18. Soit K un corps de nombres assez gros, galoisien sur $\mathbb{Q}$ et contenant E. Considérons également un élément σ de H_K, ainsi qu'une variété abélienne X, définie sur K, à multiplication complexe par E et dont le type CM est Φ. Désignons par L l'adhérence de $\iota(K)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, de sorte que L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Le corps K ayant été choisi assez gros, le schéma $X \otimes_K L$ construit via $\iota\sigma$ admet un modèle propre et lisse $\mathscr{X}^\sigma/\mathcal{O}_L$. On notera $k = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de L puis $X^\sigma_k = \mathscr{X}^\sigma \otimes_{\mathcal{O}_L} k$ la fibre spéciale de $\mathscr{X}^\sigma$. On sait alors que X^σ_k est une variété abélienne sur le corps fini k, à multiplication complexe par E. En outre le Frobenius relatif sur X^σ_k est donné par l'action d'un nombre de Weil $\alpha_\sigma \in \mathcal{O}_E \cap \mathfrak{A}_p$. Lorsque $\mathfrak{q}$ est un premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de p nous désignerons par $\nu_\mathfrak{q}$ l'unique élément de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ vérifiant l'égalité $\nu_\mathfrak{q}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}_E$, où $\mathfrak{p}_E$ est le premier de $\mathcal{O}_E$ déterminé par ι. Si l'on note f l'indice d'inertie de $L/\mathbb{Q}_p$ l'étude précédent le lemme II.7 donne $v_\mathfrak{q}(\alpha_\sigma) = f$ si $\sigma^{-1}\nu_\mathfrak{q} \in \Phi$ et $v_\mathfrak{q}(\alpha_\sigma) = 0$ sinon car $f(\mathfrak{q}/p) = 1$, $\mathrm{H}_{E,\mathfrak{q}} = \{\nu_\mathfrak{q}\}$ et le type CM de $\mathscr{X}^\sigma/\mathcal{O}_L$ est $\sigma\Phi$. Considérons enfin une base propre $\xi = (\omega_\tau)_{\tau \in \mathrm{H}_E}$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K)$. L'inclusion $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ assure que les plongements $\psi\tau$ et τ coïncident donc la matrice de Frobenius de X/K relative à ξ est diagonale et dans le nombre $ht(\psi a - a)$ le terme comprenant les valuations ℓ-adiques est nul. Au total

$$-ht(\psi a - a) = -\frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in \mathrm{H}_K} \log_p \beta_\psi(\omega^\sigma_\tau) - \log_p \beta_\psi(\omega^\sigma_{c\tau})$$

et il nous reste à calculer les valeurs propres de ψ agissant sur la cohomologie de de Rham de X/K. Pour ce faire on remarque que l'action de ψ^f sur le vectoriel $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K) \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}_p$ est donnée par celle du Frobenius relatif sur X^σ_k donc $\beta_\psi(\omega^\sigma_\tau)^f = \iota\sigma\tau(\alpha_\sigma)$. Ainsi en notant $\gamma_\sigma = \sigma\tau(\alpha_\sigma)$ qui est un élément de $\mathfrak{A}_p$ on a la formule $2^{-1}(\log_p \beta_\psi(\omega^\sigma_\tau) - \log_p \beta_\psi(\omega^\sigma_{c\tau})) = f^{-1}\delta(a_{\gamma_\sigma})$. Pour déterminer la fonction $a_{\gamma_\sigma} \in \mathscr{CM}_{(p)}$ on utilise l'égalité $|\gamma_\sigma|^2_\infty |\iota g^{-1}(\gamma_\sigma)|_p = p^{a_{\gamma_\sigma}(g)}$ valable pour tout $g \in \mathscr{G}$. On sait aussi (voir le paragraphe précédent le lemme II.7) que $|\gamma_\sigma|_\infty = p^{f/2}$. D'un autre côté si l'on désigne par $\mathfrak{q}$ le premier de $\mathcal{O}_E$ déterminé par $\iota g^{-1}\sigma\tau$ la non-ramification de $\mathfrak{q}$ au-dessus de p donne la formule $|\iota g^{-1}(\gamma_\sigma)|_p = p^{-v_{\mathfrak{q}}(\alpha_\sigma)}$. En outre $\mathfrak{q} = \tau^{-1}\sigma^{-1}g(\mathfrak{p}_E)$ donc $\nu_{\mathfrak{q}} = g^{-1}\sigma\tau$ puis $v_{\mathfrak{q}}(\alpha_\sigma) = f$ si $g^{-1}\sigma\tau \in \sigma\Phi$ et $v_{\mathfrak{q}}(\alpha_\sigma) = 0$ sinon. Par conséquent $a_{\gamma_\sigma} = f - f a^*_{E,\sigma\tau,\sigma\Phi}$ et comme $\log w_p(1) = 0$ on obtient l'égalité

$$-ht(\psi a - a) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log w_p(a^*_{E,\sigma\tau,\sigma\Phi}) = \log w_p(a^*).$$

□

Chapitre III

Fonctions L d'Artin et périodes.

Dans ce chapitre nous construisons une application $Z_p\colon \mathscr{C}\mathscr{M}^0 \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ à l'aide des dérivées logarithmiques en $s = 0$ des fonctions L d'Artin p-adiques. Nous énonçons alors la conjecture reliant Z_p et ht, puis nous étudions le cas abélien sur $\mathbb{Q}$, où les courbes de Fermat permettent de (presque) démontrer la conjecture.

1 Intervention des fonctions L.

Les fonctions L, qu'elles soient de Dirichlet, d'Artin ou de Hecke, sont omniprésentes en arithmétique. Dans le monde complexe elles prennent la forme de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$; une de leurs propriétés importantes est qu'après avoir chassé un facteur d'Euler en p elles vérifient certaines congruences lorsqu'on les évalue aux entiers négatifs. Ce phénomène permet d'associer à toute fonction L complexe une mesure p-adique puis après intégration d'obtenir une « vraie » fonction L_p, analogue p-adique de la fonction L de départ.

§1. Définition de Z_p.

Lorsque $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ est un corps de nombres galoisien sur $\mathbb{Q}$ et V une représentation complexe du groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ on désignera par χ_V le caractère de V et par $r\colon \mathscr{G} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ la flèche de restriction. On appelera alors caractère d'Artin toute fonction $\chi\colon \mathscr{G} \to \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ qui peut s'écrire $\chi = \chi_V \circ r$ pour une certaine représentation V et on notera $L(\chi, s)$ la fonction méromorphe $L(\chi_V, s)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Enfin on dira que χ est irréductible quand V l'est. Ces définitions sont légitimes, autrement dit ne dépendent que de la fonction χ et pas de la représentation V associée, car les notions en jeu sont invariantes par inflation de

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ à $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ pour L sur-corps galoisien de K.

Lemme III.1 *Les caractères d'Artin irréductibles $\chi\colon \mathscr{G} \to \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ tels que $L(\chi, 0) \neq 0$ forment une base de $\mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$.*

Démonstration.— Montrons d'abord que $\chi\colon \mathscr{G} \to \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ comme ci-dessus est élément de $\mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$. Soient K un corps de nombres galoisien sur $\mathbb{Q}$ et $\rho\colon \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to GL(V)$ une représentation complexe telle que $\chi = \chi_V \circ r$. L'application χ est localement constante car pour $g \in \mathscr{G}$ elle envoie $g\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ sur $\chi(g)$. Il est clair que χ est centrale. Prouvons maintenant les formules $\chi(cg^{-1}cgh) = \chi(h)$ et $\chi(gc) + \chi(g) = \chi(c) + \chi(1)$ pour tous $g, h \in \mathscr{G}$, qui sont évidentes si $\chi = 1$.

Lorsque $\chi \neq 1$ son irréductibilité entraîne $V^{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} = 0$ donc l'ordre du zéro de $L(\chi, s)$ en $s = 0$ est donné par $\dim_{\mathbb{C}}(V^{D_v})$ où v est une place archimédienne arbitraire de K, de groupe de décomposition D_v. Par conséquent $V^{D_v} = 0$ et si l'on prend pour v la place induite par les inclusions $K \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ ceci implique $V^c = 0$. D'un autre côté $\rho(c)$ est une symétrie donc seul le cas $\rho(c) = -\mathrm{id}$ est possible. Ceci permet de conclure que $\chi \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$. L'indépendance linéaire des χ résulte de celle des caractères irréductibles d'un groupe fini. Soient enfin $a: \mathscr{G} \to \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ un élément de $\mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ et E un corps CM galoisien sur $\mathbb{Q}$ tel que a se factorise à travers $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. Nous pouvons écrire $a = \sum_i \lambda_i \chi_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ et où les χ_i sont les caractères irréductibles du groupe fini $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. Il reste à prouver que $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow L(\chi_i, 0) \neq 0$, c'est-à-dire $\chi_i = 1$ ou $\rho_i(c) = -1$. Je dis que chaque $\chi_i \neq 1$ vérifie $\rho_i(c) = \pm 1$ car du fait que E est un corps CM on voit que V_i^c est un sous-$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$-module de V_i donc $V_i^c = V_i$ ou bien $V_i^c = 0$. La relation $a(gc) + a(g) = a(c) + a(1)$ combinée à l'indépendance linéaire des caractères permet de conclure. □

Dans le cas complexe on notera avec Colmez $Z: \mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ l'unique application $\mathbb{C}$-linéaire définie par

$$Z(\chi) = L'(\chi, 0)/L(\chi, 0).$$

Pour définir l'analogue p-adique de Z il nous faut d'abord rappeler comment on associe à $\chi: \mathscr{G} \to \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ caractère d'Artin une fonction méromorphe $L_p(\chi, s): \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$. Nous désignerons par ω le caractère de Teichmüller $(\mathbb{Z}/p)^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ et par $I_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe d'inertie de p, qui n'est autre que le sous-groupe de W_p constitué des éléments de degré 0. Lorsque V est une représentation complexe de $\mathscr{G}$ et $k \in \mathbb{Z}$ un entier on notera $V(k)$ la représentation $V \otimes \tilde{\omega}^k$ où $\tilde{\omega}: \mathscr{G} \to \mathbb{Z}_p^\times$ désigne la composée du caractère cyclotomique $\chi_{\mathbb{Q}_p}: \mathscr{G} \to \mathbb{Z}_p^\times$, de la surjection canonique $\mathbb{Z}_p^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p)^\times$ et de ω. On sait alors (voir par exemple [26]) qu'il existe une et une seule fonction méromorphe $L_p(\chi, \cdot): \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ vérifiant pour tout entier $k \leq -1$ l'égalité

$$L_p(\chi, k) = \det(1 - p^{-k}\psi | V(k)^{I_{\mathbb{Q}_p}}) L(\chi\tilde{\omega}^k, k)$$

où $\psi \in W_p$ est un élément de degré 1 et où le plongement $\iota: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ est sous-entendu. En outre $L_p(\chi, \cdot)$ est holomorphe sur $\mathbb{Z}_p$, sauf si χ est trivial auquel cas elle a un pôle simple en $s = 1$. Il serait alors naturel de prendre pour analogue p-adique de Z la fonction définie par $Z_p(\chi) = L_p'(\chi, 0)/L_p(\chi, 0)$ mais ceci n'est pas raisonnable car $L_p(\chi, 0)$ peut être nul même si $L(\chi, 0)$ ne l'est pas. Pour lever cette difficulté nous considèrerons le polynôme

$$r(\chi, T) = \det(1 - T\psi | V^{I_{\mathbb{Q}_p}}) / \det(1 - T\psi | V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}})$$

où $\psi \in W_p$ est de degré 1. On peut alors définir une application $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéaire $\hat{Z}_p: \mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ en décrétant pour χ caractère d'Artin comme ci-dessus

$$\hat{Z}_p(\chi) = L_p'(\chi, 0)/L(\chi, 0) r(\chi, 1).$$

Remarquons que la convention de normalisation des fonctions L p-adiques que nous avons choisie est légèrement différente de celle trouvée habituellement dans la littérature mais elle donne des formules un peu plus simples d'écriture.

Lemme III.2 *Soit χ un caractère d'Artin irréductible tel que $L(\chi, 0) \neq 0$. Pour tout $g \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ on a l'égalité*

$$\hat{Z}_p(g \circ \chi) = g(\hat{Z}_p(\chi)).$$

Démonstration.— Remarquons en premier lieu que la fonction composée $g \circ \chi: \mathscr{G} \to \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ appartient à $\mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ car c'est le cas pour χ. En fait il s'agit encore d'un caractère d'Artin ; pour le montrer considérons une extension galoisienne finie K de $\mathbb{Q}$ et V une représentation complexe de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ induisant χ. Étendons g à $\mathbb{C}_p \simeq \mathbb{C}$ pour en faire un élément de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ et désignons par V^g le $\mathbb{C}$-vectoriel défini par $\mathbb{C} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto g^{-1}(x)v$. On voit alors que $g \circ \chi$ n'est autre que le caractère de V^g vu comme représentation de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Le théorème 2.2 de [26] donne donc pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$ la formule $L_p(g \circ \chi, s) = g(L_p(\chi, s))$ et comme g est continu cette relation se dérive : en faisant $s = 0$ on tombe sur $L'_p(g \circ \chi, 0) = g(L'_p(\chi, 0))$. Par ailleurs nous avons dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ l'égalité $L(g \circ \chi, 0) = g(L(\chi, 0))$. En effet le théorème de Brauer, qui exprime tout caractère d'Artin comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de caractères induits par des représentations monomiales, permet de se ramener au cas d'une représentation de degré 1 de $\mathrm{Gal}(L/K)$ avec L/K abélienne. Il s'agit alors d'un théorème de Siegel [24], redémontré par Shintani [23]. Pour conclure il suffit de remarquer que les valeurs propres de $\psi \in W_p$ agissant sur $(V^g)^{I_{\mathbb{Q}_p}}$ se déduisent de celle de ψ agissant sur $V^{I_{\mathbb{Q}_p}}$ par application de g. Ainsi $r(g \circ \chi, T) = g(r(\chi, T))$ et en faisant $T = 1$ on obtient le résultat voulu. $\square$

En particulier le lemme précédent assure que $\hat{Z}_p(a) \in \mathbb{Q}_p$ dès que $a \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0$. Cette remarque permet de définir une application $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéaire

$$Z_p: \mathscr{C}\mathscr{M}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$$

obtenue par extension des scalaires de la restriction de $\hat{Z}_p$ à $\mathscr{C}\mathscr{M}^0$. En fait les application Z_p et $\hat{Z}_p$ se déterminent l'une l'autre puisque si l'on fait suivre Z_p de la flèche naturelle $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ on retombe sur $\hat{Z}_p$.

§2. La conjecture.

Dans le monde complexe on dispose de la conjecture suivante :

Conjecture III.3 (Colmez [7]) *Pour tout $a \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0$ on a l'égalité*

$$ht(a) = Z(a^*).$$

Introduisons le sous-espace $\mathscr{C}\mathscr{M}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathscr{C}\mathscr{M}$ constitué des fonctions $a \in \mathscr{C}\mathscr{M}$ se factorisant à travers $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$, de sorte que $\mathscr{C}\mathscr{M}^{\mathrm{ab}} \subset \mathscr{C}\mathscr{M}^0$. Dans [7] Colmez démontre sa conjecture à un multiple rationnel de $\log 2$ près quand $a \in \mathscr{C}\mathscr{M}^{\mathrm{ab}}$, ce qui précise les résultats d'Anderson ([1], théorème 2.1). Il en déduit également une preuve géométrique de la formule de Chowla-Selberg.

En p-adique les choses sont un peu plus délicates à formuler. Partons donc d'une représentation complexe irréductible $\rho: \mathscr{G} \to GL(V)$ de caractère χ, satisfaisant $L(\chi, 0) \neq 0$ (autrement dit ρ est totalement impaire ou triviale). On étendra naturellement ρ pour en faire un morphisme d'algèbre $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[\mathscr{G}] \to \mathrm{End}(V)$. Si $q = \sum a_\psi \psi$ appartient à $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ on posera $q(1) = \sum a_\psi$ et $q'(1) = \sum a_\psi \deg(\psi)$.

Conjecture III.4 *Soient $\rho: \mathscr{G} \to GL(V)$ une représentation complexe irréductible, $\chi = \mathrm{Tr}(\rho)$ son caractère et $q \in \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ vérifiant $\rho(q) = 0$. Si $L(\chi, 0) \neq 0$ on a dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ l'égalité*

$$ht(q\chi) + q'(1) \log w_p(\chi^*) = q(1) Z_p(\chi^*).$$

Avant de démontrer cette conjecture dans le cas d'une représentation de degré 1 nous allons faire quelques remarques. En premier lieu cette égalité a lieu a priori dans l'anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ puisque $q\chi$ appartient à $\mathscr{CM}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]}$ donc $ht(q\chi) \in \mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$. Cela étant on sait que $\log w_p(\chi^*)$ (corollaire II.16) et $Z_p(\chi^*)$ (remarque suivant le lemme III.2) sont éléments de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ donc il devrait en être de même de $ht(q\chi)$ si la conjecture est vraie.

Lemme III.5 *Avec les notations de la conjecture on a* $ht(q\chi) \in \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$.

Démonstration.— Convenons de noter $q = \sum a_\psi \psi$ et soit a l'image de $q\chi$ par la flèche naturelle $\mathscr{CM}^0_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]} \to \mathscr{CM}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$. Pour $g \in \mathscr{G}$ on calcule $a(g) = \sum a_\psi \chi(g\psi) = \mathrm{Tr}(\rho(g)\rho(q)) = 0$ donc $a = 0$ et la proposition II.17 permet de conclure. □

Lorsque $V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} \neq 0$ il existe déjà une conjecture permettant de calculer la dérivée logarithmique $Z_p(\chi)$, à savoir la conjecture de Gross que nous allons maintenant détailler. Pour ce faire on choisit E un corps CM tel que ρ se factorise à travers $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ et on note S un système de représentants sous la conjugaison complexe des premiers $\mathfrak{p}$ de E au-dessus de p. On note $X = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} \mathbb{C}_p(\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}})$, naturellement munit d'une structure de G-module. Il est alors loisible de considérer $V \otimes X$ comme représentation de G. Le premier volet de la conjecture affirme que l'ordre d'annulation $r_p(\chi)$ de la fonction $L_p(\chi, s)$ en $s = 0$ est donné par la formule

$$r_p(\chi) = \mathrm{dim} V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = \dim(V \otimes X)^G.$$

Pour calculer le premier terme non nul $c_p(\chi)$ dans le développement en série entière de $L_p(\chi, s)$ en $s = 0$ on désigne par U_p le sous-groupe $\mathfrak{A}_p \cap E^\times$ de $E^\times$, de sorte que l'on dispose d'un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\colon U_p & \longrightarrow & X \\ \alpha & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\mathfrak{p}\in S} -f v_{\mathfrak{p}}(\alpha)(\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}}) \end{array}$$

où f est le degré résiduel en p de $E/\mathbb{Q}$. Après extension des scalaires on récupère ainsi un isomorphisme $U_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p \to X$. D'autre part on définit une application logarithme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Log}\colon U_p & \longrightarrow & X \\ \alpha & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{\tau} \log_p \tau(\alpha)(\mathfrak{p}_\tau - \overline{\mathfrak{p}_\tau}) \end{array}$$

où la somme est prise sur tous les plongements $\tau\colon E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ et où $\mathfrak{p}_\tau$ désigne le premier de E au-dessus de p induit par τ. Par extension des scalaires on a donc un morphisme $U_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p \to X$, que l'on peut faire précéder de $\mathrm{div}^{-1}\colon X \to U_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p$ pour obtenir un endomorphisme $\mathrm{Log}\colon X \to X$. Après tensorisation par V ceci donne un morphisme de G-modules $V \otimes X \to V \otimes X$ donc on peut considérer $\mathrm{Log}_V\colon (V \otimes X)^G \to (V \otimes X)^G$, restriction de la flèche précédente. On posera enfin $\mathrm{Reg}(\rho) = \det(\mathrm{Log}_V)$. Le deuxième volet de la conjecture s'énonce alors

$$\frac{c_p(\chi)}{L(\chi, 0)r(\chi, 1)} = \mathrm{Reg}(\rho).$$

Revenons un instant à la conjecture III.4. Pour calculer $Z_p(\chi)$ elle n'est utile que si l'on peut trouver $q \in \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ vérifiant $q(1) \neq 0$. Cette condition équivaut à $V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = 0$, ce qui est justement le cas non couvert par la conjecture de Gross. Ces deux conjectures sont cependant reliées par la présence de la distribution de nombres de Weil w_p.

Proposition III.6 *Supposons la validité de la conjecture de Gross. Avec les notations de la conjecture III.4 on a alors la formule*

$$Z_p(\chi) = \begin{cases} \log w_p(\chi) & \text{si} \quad \dim V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \dim V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration.— Le cas $\dim V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} \geq 2$ découle simplement de l'égalité $r_p(\chi) = \dim V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$. Supposons maintenant $\dim V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} = 1$, ce qui correspond à un zéro simple pour $L_p(\chi, s)$. Considérons un élément non nul v de $V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$, soit $\mathfrak{p}$ le premier de E induit par le plongement $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ et notons $D_p \subset G$ le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}/p$. On sait alors que l'élément

$$w = \sum_{\sigma \in G/D_p} \rho(\sigma) v \otimes (\mathfrak{p}^\sigma - \overline{\mathfrak{p}}^\sigma)$$

est une base de $(V \otimes X)^G$ donc $\mathrm{Reg}(\rho)$ est donné par l'égalité

$$\mathrm{Log}_V(w) = \sum_{\sigma \in G/D_p} \rho(\sigma) v \otimes \mathrm{Log}(\mathfrak{p}^\sigma - \overline{\mathfrak{p}}^\sigma) = \mathrm{Reg}(\rho) w.$$

Introduisons le nombre de classes d'idéaux h de E ; on peut trouver un élément α de U_p tel que $(\mathfrak{p}/\overline{\mathfrak{p}})^h = \alpha \mathcal{O}_E$, ce qui implique

$$-fh\mathrm{Log}(\mathfrak{p}^\sigma - \overline{\mathfrak{p}}^\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in G} \log_p \iota\tau\sigma(\alpha)(\mathfrak{p}^{\tau^{-1}} - \overline{\mathfrak{p}}^{\tau^{-1}}).$$

En échangeant les signes sommes il est loisible d'écrire

$$\begin{aligned} -2fh\mathrm{Log}_V(w) &= \sum_{\tau \in G} \sum_{\sigma \in G/D_p} \rho(\sigma) v \otimes \log_p \tau^{-1}\sigma(\alpha)(\mathfrak{p}^\tau - \overline{\mathfrak{p}}^\tau) \\ &= \sum_{\tau \in G/D_p} \Big(\sum_{\sigma \in G/D_p} \sum_{\varepsilon \in D_p} \log_p \varepsilon^{-1}\tau^{-1}\sigma(\alpha)\rho(\sigma)v \Big) \otimes (\mathfrak{p}^\tau - \overline{\mathfrak{p}}^\tau) \\ &= \sum_{\tau \in G/D_p} \sum_{\sigma \in G/D_p} \log_p N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(\sigma(\alpha))\rho(\tau\sigma) v \otimes (\mathfrak{p}^\tau - \overline{\mathfrak{p}}^\tau) \end{aligned}$$

où E_p désigne l'adhérence de $\iota(E)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Si l'on fait $\tau = \mathrm{id}$ on tombe finalement sur la formule

$$-2fh\mathrm{Reg}(\rho)v = \sum_{\sigma \in G/D_p} \log_p N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(\sigma(\alpha))\rho(\sigma)v,$$

ce qui nous amène à introduire l'opérateur $\Psi = 1/\sharp D_p \sum_{\sigma \in G} \log_p N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(\sigma(\alpha))\rho(\sigma)$ agissant sur l'espace vectoriel V. Ainsi on a d'une part $\Psi(v) = -2fh\mathrm{Reg}(\rho)v$ et d'autre part $\Psi\rho(\varepsilon) = \Psi$ pour tout $\varepsilon \in D_p$ car $\varepsilon(\alpha)$ et α diffèrent simplement d'une racine de l'unité. Finalement le projecteur

$\pi = 1/\sharp D_p \sum_{\varepsilon \in D_p} \rho(\varepsilon)$ de V sur $V^{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}$ vérifie $\Psi\pi = \Psi$ donc Ψ est nul sur $\mathrm{Ker}(\pi)$ et agit par multiplication par $\mathrm{Tr}(\Psi)$ sur v. En mettant tout ces résultats ensemble on obtient l'expression

$$\begin{aligned} -2fh\mathrm{Reg}(\rho) &= \sum_{\sigma\in G} \log_p N_{E_p/\mathbb{Q}_p}(\sigma(\alpha))\chi(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma\in G}\sum_{\varepsilon\in D_p} \log_p \varepsilon\sigma(\alpha)\chi(\sigma) \\ &= ef\sum_{\sigma\in G} \log_p \sigma(\alpha) m_{(p)}(\chi)(\sigma) \end{aligned}$$

où e est l'indice d'inertie de $E_p/\mathbb{Q}_p$. Lorsque $\sigma \in G$ on notera $b_\sigma\colon \mathscr{G} \to \mathbb{Q}$ l'application donnée par

$$b_\sigma(g) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g \in \sigma D_p \\ -1 & \text{si} \quad g \in c\sigma D_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que b_σ appartient à $\mathscr{CM}_{(p)}$ et $a_{\sigma(\alpha)} = -h/eb_\sigma$. Nous pouvons alors écrire

$$2m_{(p)}(\chi) = \sum_{\sigma\in G} m_{(p)}(\chi)(\sigma) b_\sigma$$

puis

$$2\log w_p(\chi) = -\frac{e}{h}\sum_{\sigma\in G} m_{(p)}(\chi)(\sigma)\log_p \sigma(\alpha)$$

et cela permet de conclure. □

Outre le cas $\dim(V) = 1$ voici un exemple de situation où la conjecture est valide.

Proposition III.7 *Avec les notations de la conjecture III.4 on suppose en plus que $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ agit trivialement sur V. Alors la conjecture III.4 est vraie.*

Démonstration.— Nous allons d'abord généraliser le théorème II.20 en établissant la formule $ht((1-\psi)a) = \deg(\psi)\log w_p(a^*)$ pour tous $a \in \mathscr{CM}^0_{(p)}$ et $\psi \in W_p$. Pour ce faire on désigne par $f\colon W_p \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$ l'application envoyant ψ sur $ht((1-\psi)a)$. On constate que $f(\psi\phi) = f(\psi) + \psi(f(\phi))$ et par ailleurs $f(\phi) = \log w_p(a^*) \in \mathbb{Q}_p$ pour tout $\phi \in W_p$ de degré 1. En raisonnant par récurrence sur $\deg\psi$ on peut alors montrer que f est un morphisme de groupes $W_p \to \mathbb{Q}_p$ puis que $f(\psi) = \deg(\psi)\log w_p(a^*)$. Soit maintenant $q = \sum a_\psi \psi$ un élément de $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ vérifiant $\rho(q) = 0$, ce qui revient à dire $q(1) = 0$. On constate que $\chi \in \mathscr{CM}^0_{(p),\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ donc il est loisible d'écrire $\chi = \sum_i \zeta_i a_i$ pour certains $\zeta_i \in \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ et $a_i \in \mathscr{CM}^0_{(p)}$. Finalement

$$\begin{aligned} ht(q\chi) &= \sum_i \zeta_i \sum_\psi a_\psi ht((\psi-1)a_i) \\ &= -\sum_i \zeta_i \sum_\psi a_\psi \deg(\psi)\log w_p(a_i^*) \\ &= -q'(1)\log w_p(\chi^*) \end{aligned}$$

et le lemme est prouvé. □

§3. Fonctions L de Kubota-Leopoldt.

Dans le contexte abélien sur $\mathbb{Q}$ les fonctions L d'Artin coïncident avec les fonctions L de Dirichlet en complexe, de Kubota-Leopoldt en p-adique. On peut alors exprimer leurs dérivées logarithmiques en $s = 0$ à l'aide de la fonction $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, ce qui est aussi le cas pour les matrices de Frobenius de certaines variétés abéliennes et annonce le lien précisé par la conjecture III.4. Nous allons d'abord rappeler les définitions et principales propriétés de deux avatars p-adiques de Γ, construits respectivement par Morita [19] et Diamond [8], en renvoyant à [18] et [17] pour plus de détails. Pour fabriquer l'analogue p-adique de Γ la première idée venant à l'esprit est d'interpoler ses valeurs sur un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ dense p-adiquement et d'utiliser la formule $\Gamma(n) = (n-1)!$ valable pour $n \geq 1$. En fait cette fonction n'est pas prolongeable par continuité et pour remédier à ceci Morita élimine dans $\Gamma(n)$ les entiers divisibles par p.

Proposition III.8 *Il existe une unique fonction continue $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ vérifiant pour tout entier $n \geq 0$ la formule*

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{1 \leq k < n \\ (k,p)=1}} k.$$

Bon nombre des propriétés de la fonction Γ complexe trouvent leur équivalent en p-adique. A titre d'exemple nous allons énoncer les analogues des faits suivants : Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$; $\Gamma(z) = z\Gamma(z-1)$; $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin(\pi z)$ (formule des compléments). Lorsque $p \geq 3$ on notera $l : \mathbb{Z}_p \to \{1, 2, ...p\}$ l'application continue qui envoie z sur l'unique entier $1 \leq l(z) \leq p$ vérifiant $|z - l(z)| < 1$.

Proposition III.9 (i) *L'application Γ_p est à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^\times$ et $\Gamma_p(0) = 1$.*

(ii) *Pour $z \in \mathbb{Z}_p$ on a la formule*

$$\frac{\Gamma_p(z+1)}{\Gamma_p(z)} = \begin{cases} -z & si \quad |z| = 1 \\ -1 & si \quad |z| < 1 \end{cases} .$$

(iii) *Lorsque $p \geq 3$ on a $\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) = (-1)^{l(z)}$.*

Du fait que *ht* est défini par les logarithmes des périodes, nous avons besoin de l'équivalent p-adique de la fonction $\log \Gamma$ plutôt que de l'équivalent de Γ. Une solution consiste à composer le logarithme d'Iwasawa et la fonction Γ_p de Morita, ce qui donne naissance à une fonction continue $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$. Si l'on veut donner un sens à $\log \Gamma(x)$ pour $x \notin \mathbb{Z}_p$ on est obligé de recourir à la fonction G_p de Diamond. Dans la proposition qui vient le mot « analytique » fait référence aux fonctions analytiques souples, c'est-à-dire localement développables en série entière au voisinage de tout point.

Proposition III.10 *Soient A un ouvert de $\mathbb{C}_p$ et $f : A \to \mathbb{C}_p$ une fonction analytique. Posons $A^* = \{x \in \mathbb{C}_p, x + \mathbb{Z}_p \subset A\}$. Alors A^* est un ouvert de $\mathbb{C}_p$, pour tout $x \in A^*$ la limite*

$$F(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k - 1} f(x+n)$$

existe dans $\mathbb{C}_p$ et la fonction $F : A^* \to \mathbb{C}_p$ ainsi définie est analytique.

Cette assertion repose sur le phénomène suivant : en p-adique la moyenne $p^{-j}\sum_{i=0}^{p^j-1} i^k$ converge vers le k-ème nombre de Bernouilli B_k quand $j \to \infty$. La fonction log Gamma de Diamond s'obtient alors en prenant $A = \mathbb{C}_p^\times$ et $f\colon x \mapsto x\log_p x - x$. Dans ce cas $A^* = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ et la fonction analytique $G_p\colon \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ que l'on récupère est définie par

$$G_p(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} (x+n)\log_p(x+n) - (x+n).$$

Les principales propriétés de G_p sont données par la

Proposition III.11 *Soient x un élément de $\mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ et y un élément de $\mathbb{Z}_p$.*

(i) $G_p(x+1) = G_p(x) + \log_p x$;

(ii) *si $|x| > 1$ on a*

$$G_p(x) = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\log_p x - x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{j+1}}{j(j+1)} x^{-j} \ ;$$

(iii) *pour $m \geq 1$ entier on a*

$$G_p(x) = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\log_p m + \sum_{j=0}^{m-1} G_p\Big(\frac{x+j}{m}\Big) \ ;$$

(iv) *pour $r \geq 0$ entier on a*

$$G_p(x) = \sum_{a=0}^{p^r-1} G_p\Big(\frac{x+a}{p^r}\Big) \ ;$$

(v) $G_p(x) + G_p(1-x) = 0$;

(vi) *on a*

$$\log_p \Gamma_p(y) = \sum_{\substack{j=0 \\ |y+j|=1}}^{p-1} G_p\Big(\frac{y+j}{p}\Big).$$

En accord avec nos conventions antérieures les fonctions L p-adiques de Kubota-Leopoldt que nous utilisons sont normalisées comme suit (on continue de désigner par $\omega\colon (\mathbb{Z}/p)^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère de Teichmüller) : lorsque $\chi\colon (\mathbb{Z}/d)^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ est un caractère de Dirichlet et $k \in \mathbb{Z}$ un entier on définit le caractère de Dirichlet χ_k, modulo dp si $p \geq 3$, modulo $4d$ si $p = 2$, par la formule $\chi_k(x) = \chi(x)\omega(x)^{-k}$ où $x \in \mathbb{Z}$, $(x, dp) = 1$. On désigne alors par $L_p(\chi, \cdot)\colon \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{Z}_p \setminus \{1\} \to \mathbb{C}_p$ l'unique fonction analytique vérifiant $L_p(\chi, -k) = L(\chi_k, -k)$ pour tout entier $k \geq 0$. La formule de Ferrero-Greenberg telle que l'on peut la trouver par exemple dans [17] page 52 devient

Théorème III.12 *Soit N un entier ≥ 1, multiple de d et de p si $p \geq 3$, multiple de d et de 4 si $p = 2$. Alors*

$$L_p'(\chi, 0) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{N-1} \chi(a) G_p\Big(\frac{a}{N}\Big) - L_p(\chi, 0)\log_p N.$$

Nous allons modifier légèrement cette expression afin de la rendre plus proche de la formule de Lerch dans le cas complexe.

Lemme III.13 *Supposons $d \geq 2$. Si $(p,d)=1$ on a*

$$L'_p(\chi,0) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/d)^\times} \chi(x)\log_p \Gamma_p\langle x/d\rangle - L_p(\chi,0)\log_p d$$

et si $p|d$ on a

$$L'_p(\chi,0) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/d)^\times} \chi(x) G_p\langle x/d\rangle - L_p(\chi,0)\log_p d.$$

Démonstration.— Supposons d'abord $p\geq 3$. Si $p|d$ on applique le théorème III.12 avec $N=d$ et on obtient exactement la formule voulue. Si $(p,d)=1$ on choisi $N=dp$ et il faut évaluer

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{dp-1} \chi(a) G_p\Big(\frac{a}{dp}\Big) = \sum_{x\in(\mathbb{Z}/d)^\times}\chi(x)d_x$$

où l'on a posé $d_x = \sum_a G_p(a/dp)$ avec une somme prise sur les $\{1\leq a\leq dp-1, (a,p)=1, a\equiv x \pmod d\}$. Pour obtenir cet ensemble on pose $x_0 = d\langle x/d\rangle$, on forme la liste $x_0, x_0+d,\ldots,x_0+(p-1)d$ et on biffe les termes divisibles par p, donc avec la proposition III.11

$$d_x = \sum_{\substack{j=0\\|x_0+jd|=1}}^{p-1} G_p\Big(\frac{x_0+jd}{dp}\Big) = \log_p\Gamma_p\Big(\frac{x_0}{d}\Big)$$

et c'est gagné puisque $\log_p N = \log_p d$. Le cas $p=2$ se traite de façon similaire. □

2 Le cas abélien sur $\mathbb{Q}$.

La formule de Ferrero-Greenberg nous a permis de décrire explicitement de la fonction Z_p dans le cas abélien. Pour la relier à la fonction ht donnée par le théorème II.12, nous devons effectuer le même travail mais du côté géométrique cette fois. Ceci est rendu possible par les deux faits suivants : les jacobiennes des courbes de Fermat donnent naissance à une famille génératrice de $\mathscr{C}\mathscr{M}^{\mathrm{ab}}$; Coleman a effectué dans [4] le calcul des matrices de Frobenius de ces courbes. Nous allons donc procéder en trois étapes : après avoir donné quelques notations et rappels sur les courbes de Fermat, nous transformons les résultats de Coleman, puis nous concluons par l'identification entre ht et Z_p.

§1. Courbes de Fermat.

Dans ce qui suit nous avons respecté les notations de [7] partie III paragraphe 2, auquel le lecteur est invité à se reporter pour plus de détails, et qui sont plus ou moins celles de [4]. Nous munirons $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de sa structure de $\mathscr{G}$-module donnée par l'action sur les racines de l'unité. Lorsque r est un élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on désignera par $\langle r\rangle$ l'unique représentant de r dans $[0,1[\cap\mathbb{Q}$. Toujours pour $r\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on pose $a_r\colon\mathscr{G}\to\mathbb{Q}$, $g\mapsto\langle gr\rangle - 1/2$, qui est dans $\mathscr{C}\mathscr{M}^{\mathrm{ab}}$. En utilisant l'ordre d'annulation en $s=0$ des fonctions L de Dirichlet complexes on peut d'ailleurs montrer que les

$(a_r)_{r\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ engendrent $\mathscr{CM}^{\mathrm{ab}}$ sur $\mathbb{Q}$ (voir par exemple [1] théorème 3.1). Introduisons le sous-ensemble I de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ constitué des triplets (r,s,t) satisfaisant $r+s+t=0$, $r\neq 0$, $s\neq 0$, $t\neq 0$. Nous ferons agir $\mathscr{G}$ sur I coordonnée par coordonnée. A toute orbite η de I sous $\mathscr{G}$ nous allons associer une variété abélienne J_η sur $\mathbb{Q}$ qui acquiert après extension des scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}$ une multiplication complexe par l'anneau des entiers $\mathcal{O}_\eta$ d'un certain corps cyclotomique, dont nous connaîtrons le type CM et les matrices de Frobenius. Soient donc $\eta\in I/G$, $q\in\eta$ arbitraire, d_η le plus petit entier ≥ 1 tel que $d_\eta q=0$ et $m\geq 1$ un entier multiple de d_η. On notera $F_m\hookrightarrow\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ la courbe de Fermat (projective, lisse) d'ordre m sur $\mathbb{Q}$ et J_m sa jacobienne, qui est donc une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$, de dimension $m(m-1)$. Il est alors loisible d'identifier les groupes $H^1_{\mathrm{dR}}(F_m/\mathbb{Q})$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(J_m/\mathbb{Q})$, ainsi que les groupes $H_1(F_m(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ et $H_1(J_m(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$. On désigne par μ_m le groupe des racines m-èmes de 1 dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{Q}(\mu_m)$ le corps cyclotomique associé. On a un morphisme de groupes évident $\mu_m^2\to\mathrm{Aut}(F_m\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\mu_m))$ et on notera A_m le quotient de $\mathbb{Z}[\mu_m^2]$ à travers lequel μ_m^2 agit sur $H_1(F_m(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$, de sorte que J_m est à multiplication complexe par $A_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Pour $q=(r,s,t)\in\eta$ on notera $\omega_{m,q}$ l'image dans $H^1_{dR}(F_m/\mathbb{Q})$ de la forme différentielle

$$m\langle r+s\rangle^{b_q(1)+1/2}x^{m\langle r\rangle}y^{m\langle s\rangle}\frac{y}{x}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$

où l'on a posé $b_q=a_r+a_s+a_t\in\mathscr{CM}^{\mathrm{ab}}$. Alors $\omega_{m,q}$ est vecteur propre de $H^1_{\mathrm{dR}}(F_m/\mathbb{Q})$ sous l'action de A_m et donne un caractère $\tau_{m,q}\in\mathrm{Hom}(A_m,\overline{\mathbb{Q}})$ déterminé par la formule $(1\otimes x)\omega_{m,q}=\tau_{m,q}(x)\omega_{m,q}$ pour tout $x\in A_m$. Remarquons que pour $g\in\mathscr{G}$ on a $g\tau_{m,q}=\tau_{m,gq}$ et en particulier l'idéal $\mathrm{Ker}(\tau_{m,q})$ de A_m ne dépend que de η. Soit maintenant $J_{m,\eta}$ la sous-variété abélienne de J_m engendrée par les $x^*(J_m)$ lorsque x décrit $\mathrm{Ker}(\tau_{m,q})$ et $J_\eta=J_m/J_{m,\eta}$. Alors J_η est bien une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$, indépendante de m pourvu que d_η divise m et $J_\eta\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}$ acquiert une multiplication complexe par l'anneau des entiers $\mathcal{O}_\eta$ du corps $E_\eta=\mathbb{Q}(\mu_{d_\eta})$. En outre $\omega_{m,q}$ est l'image réciproque d'un unique élément $\omega_q\in H^1_{\mathrm{dR}}(J_\eta/\mathbb{Q})$, lui aussi indépendant de m, vecteur propre pour l'action de $\mathcal{O}_\eta$ et l'on notera $\tau_q\in\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_\eta,\overline{\mathbb{Q}})$ le caractère associé. Enfin les $(\omega_q)_{q\in\eta}$ forment une base de vecteurs propres de $H^1_{\mathrm{dR}}(J_\eta/\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}$, $g\tau_q=\tau_{gq}$ pour tout $g\in\mathscr{G}$ et si l'on note Φ_η le type CM de J_η on a la formule $a_{E_\eta,\tau_q,\Phi_\eta}=1/2-b_q$ valable pour tout $q\in\eta$. Comme J_η est définie sur $\mathbb{Q}$ il n'est pas nécessaire de se fixer de plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour que W_p agisse sur $H^1_{\mathrm{dR}}(J_\eta/\mathbb{Q})$. En outre les ω_q sont également définis sur $\mathbb{Q}$ donc pour $\psi\in W_p$ le coefficient $\beta_\psi(q)=\beta_\psi(\omega_{\psi^{-1}q})$ a bien un sens. C'est ce nombre qui a été calculé par Coleman [3], [4]. Rappelons les résultats de ce dernier : dans le cas de bonne réduction, à savoir $(p,d_\eta)=1$, et pour ψ de degré 1 on a simplement

$$\beta_\psi(q)=\frac{(-p)^{b_q^*(c\psi)+1/2}}{\Gamma_p\langle r\rangle\Gamma_p\langle s\rangle\Gamma_p\langle t\rangle}$$

où comme d'habitude $q=(r,s,t)$ et où $\Gamma_p\colon\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p^\times$ désigne la fonction Gamma de Morita ([3] théorème 19, [4] proposition 1.9, [20] théorème 2.5). Dans le cas de mauvaise réduction la formule correspondante est plus compliquée, mais comme nous allons prendre son $\log_p$ nous sommes en droit de négliger toutes les puissances rationnelles de p, ainsi que toutes les racines de 1, ce qui va considérablement simplifier les calculs.

§2. Le cocycle de Coleman.

A partir de maintenant nous supposerons $p\geq 3$ et nous allons d'abord expliciter le procédé utilisé par Coleman dans le paragraphe II de [4] pour étendre la fonction Gamma de Morita à

$\mathbb{Q}_p$. On rappelle que ω désigne le caractère de Teichmüller, vu indifféremment comme morphisme de groupes $(\mathbb{Z}/p)^\times \to \mu_{p-1}$ ou $\mathbb{Z}_p^\times \to \mu_{p-1}$. Lorsque z est un élément non nul de $\mathbb{Q}_p$ on notera $<z>= zp^{-v_p(z)}/\omega(zp^{-v_p(z)}) \in 1 + p\mathbb{Z}_p$.

Proposition III.14 (Coleman) *Il existe une unique application continue* $\Gamma_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}_p^\times$ *vérifiant* $\Gamma_p(z) = 1$ *pour tout* $z \in]0,1] \cap \mathbb{Z}[1/p]$ *et*

$$\frac{\Gamma_p(z+1)}{\Gamma_p(z)} = \begin{cases} <z> & si \quad |z| > 1 \\ -z & si \quad |z| = 1 \\ -1 & si \quad |z| < 1 \end{cases}$$

pour tout $z \in \mathbb{Q}_p$.

Il est clair qu'une telle application prolonge l'ancienne fonction Γ_p, ce qui justifie la notation employée. Par ailleurs lorsque A est un $\mathscr{G}$-module on conviendra de noter $M(A)$ le $\mathbb{Z}$-module des fonctions $A \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. On peut en faire un W_p-module à gauche en décrétant $(\psi f)(a) = \psi(f(\psi^{-1}a))$ où $\psi \in W_p$, $f \in M(A)$ et $a \in A$.

Lemme III.15 (Coleman) *Il existe un unique cocycle* $G : W_p \to M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\psi \mapsto G_\psi$ *vérifiant :*

(i) $G_\psi(r) = 1/\Gamma_p\langle r\rangle$ *si* $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ *et* $\deg(\psi) = 1$ *;*

(ii) $G_\psi(r) = \Gamma_p\langle \psi^{-1}r\rangle/\Gamma_p\langle r\rangle$ *si* $r \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$.

Dans ce qui suit on adoptera la convention suivante : lorsque A est un $\mathbb{Z}$-module, $\lambda : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to A$ une application et $q = (r,s,t)$ un élément de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^3$ on posera $\lambda(q) = \lambda(r) + \lambda(s) + \lambda(t)$. En introduisant les ensembles $I_0 = \{(r,s,t) \in I,\ r,s,t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\}$, $I_2 = \{(r,s,t) \in I,\ r,s,t \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\}$ et $I_1 = I \setminus (I_0 \cup I_2)$, la proposition 3.10 de [4] combinée avec la remarque qui précède la proposition 3.5 entraîne le premier résultat fondamental :

Lemme III.16 *Soient* $\psi \in W_p$ *de degré* 1 *et* $q = (r,s,t) \in I_0 \cup I_1$. *Alors*

$$\log_p \beta_\psi(q) = \log_p G_\psi(q).$$

Pour traiter le cas $q \in I_2$ on associe à $r \in \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$ et $\psi \in W_p$ l'élément de $\mathbb{Q}_p$ donné par la formule

$$\begin{aligned} a_\psi(r) \quad &= \quad (\langle 2r\rangle - \langle 2\psi^{-1}r\rangle)\log_p 2 + \log_p \Gamma_p\left(\langle r\rangle + (-1)^{\langle 2r\rangle}/2\right) \\ &\quad - \log_p \Gamma_p\left(\langle \psi^{-1}r\rangle + (-1)^{\langle 2\psi^{-1}r\rangle}/2\right). \end{aligned}$$

Toujours pour $r \in \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$ on désignera par f_r l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p^{-v_p(r)})^\times$. On remarque également que pour $i \geq 1$ entier il existe un et un seul $s \in \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$ vérifiant $2^i s = r$, qui sera désigné par le symbole $2^{-i}r$. Tout ceci permet de définir un autre élément de $\mathbb{Q}_p$ par

$$d_\psi(r) = \sum_{i=1}^{f_r} \frac{2^{i-1}}{2^{f_r} - 1} a_\psi(2^{-i}r).$$

Enfin la composée de la surjection naturelle $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ et de l'injection naturelle $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$ donne naissance à une application $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$, notée avec Coleman $r \mapsto r_p$. On étend cette définition à I coordonnée par coordonnée. La proposition 3.12 de [4] implique alors le résultat suivant :

Lemme III.17 *On suppose $p \geq 5$. Soient $\psi \in W_p$ de degré 1 et $q = (r, s, t) \in I_2$. Alors*

$$\log_p \beta_\psi(q) = \log_p G_\psi(q) + d_\psi(q_p).$$

Nous allons maintenant simplifier la forme de toutes ces expressions, en commençant par la fonction Γ_p de Coleman. Lorsque x est un élément de $\mathbb{Q}_p$ on posera $\langle x \rangle_p = \langle y \rangle$, où y est l'image de la classe de x par l'application $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$.

Lemme III.18 *Pour $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ on a $\log_p \Gamma_p(x) = G_p(x) - G_p(\langle x \rangle_p)$.*

Démonstration.— Les deux côtés de cette égalité étant continus il suffit de montrer qu'ils coïncident pour $x \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$, $v_p(x) < 0$. Comme $<x>$ diffère de x par une puissance de p et une racine de l'unité on voit sur la définition de Γ_p que $\log_p \Gamma_p(x+1) = \log_p x + \log_p \Gamma_p(x)$. D'autre part le point (i) de la proposition III.11 donne $G_p(x+1) = \log_p x + G_p(x)$. L'égalité $\langle x+1 \rangle_p = \langle x \rangle_p$ associée à une récurrence évidente montre alors qu'il suffit de prouver la formule pour $x \in \mathbb{Z}[p^{-1}] \cap]0, 1]$, $v_p(x) < 0$. Mais dans ce cas $\langle x \rangle_p = x$ donc $\Gamma_p(x) = 1$ et les deux membres de l'égalité sont nuls. $\square$

Lemme III.19 *Soient $r \in \mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$, $r \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ et $\psi \in W_p$.*

(i) $a_\psi(r) = G_p\langle 2r \rangle - 2G_p\langle r \rangle - G_p\langle 2\psi^{-1} r \rangle + 2G_p\langle \psi^{-1} r \rangle$;

(ii) $d_\psi(r) = -G_p\langle r \rangle + G_p\langle \psi^{-1} r \rangle$.

Démonstration.— Pour le point (i) on utilise la formule de duplication 2.10 de [4] avec $s = \langle r \rangle$. Sachant que $\langle k\langle r \rangle \rangle_p = \langle kr \rangle$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on obtient la formule

$$\begin{aligned} a_\psi(r) \quad = \quad & (2\langle r \rangle - 2\langle \psi^{-1} r \rangle) \log_p 2 \\ & + \log_p \Gamma_p\langle r \rangle + \log_p \Gamma_p(\langle r \rangle + 1/2) - \log_p \Gamma_p(2\langle r \rangle) \\ & - \log_p \Gamma_p\langle \psi^{-1} r \rangle - \log_p \Gamma_p(\langle \psi^{-1} r \rangle + 1/2) + \log_p \Gamma_p(2\langle \psi^{-1} r \rangle). \end{aligned}$$

D'autre part les égalités $\langle \langle r \rangle \rangle_p = \langle r \rangle$, $\langle \langle r \rangle + 1/2 \rangle_p = \langle r \rangle$ et $\langle 2\langle r \rangle \rangle_p = \langle 2r \rangle$ donnent les formules $\log_p \Gamma_p\langle r \rangle = 0$, $\log_p \Gamma_p(\langle r \rangle + 1/2) = G_p(\langle r \rangle + 1/2) - G_p\langle r \rangle$ et $\log_p \Gamma_p(2\langle r \rangle) = G_p(2\langle r \rangle) - G_p\langle 2r \rangle$. Enfin si l'on fait $m = 2$, $x = 2\langle r \rangle$ dans le point (iii) de la proposition III.11 on récupère l'égalité $G_p(\langle r \rangle + 1/2) - G_p(2\langle r \rangle) = (1/2 - 2\langle r \rangle) \log_p 2 - G_p\langle r \rangle$ d'où l'expression désirée pour $a_\psi(r)$.
Établissons le point (ii) et notons $f \geq 1$ l'ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/p^{-v_p(r)})^\times$. On remarque que $2^f \equiv 1 \pmod{p^{-v_p(r)}}$ et que $p^{-v_p(r)} r = 0$ dans $\mathbb{Z}[p^{-1}]/\mathbb{Z}$ donc pour $0 \leq i \leq f$ on a $2^{-i} r = 2^{f-i} r$. Cela donne la suite d'égalités

$$\begin{aligned} (2^f - 1) d_\psi(r) \quad &= \quad \sum_{i=0}^{f-1} 2^{f-i-1} a_\psi(2^i r) \\ &= \quad \sum_{i=0}^{f-1} 2^{f-i-1} (G_p\langle 2^{i+1} r \rangle - G_p\langle 2^{i+1} \psi^{-1} r \rangle) \\ & \qquad - \sum_{i=0}^{f-1} 2^{f-i} (G_p\langle 2^i r \rangle - G_p\langle 2^i \psi^{-1} r \rangle) \\ &= \quad G_p\langle 2^f r \rangle - G_p\langle 2^f \psi^{-1} r \rangle - 2^f (G_p\langle r \rangle - G_p\langle \psi^{-1} r \rangle) \\ &= \quad (1 - 2^f)(G_p\langle r \rangle - G_p\langle \psi^{-1} r \rangle) \end{aligned}$$

et le lemme est prouvé. $\square$

Lorsque $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\psi \in W_p$ nous poserons $\Omega^0(\psi, r) = 0$, $\Omega^1(\psi, r) = -\log_p \Gamma_p\langle r\rangle$ si $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ et $\Omega^0(\psi, r) = \Omega^1(\psi, r) = -G_p\langle r\rangle + G_p\langle \psi^{-1} r\rangle$ si $r \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$. Le principal résultat de ce paragraphe est donné par la

Proposition III.20 *On suppose $p \geq 5$. Soient $\psi \in W_p$ de degré $i \in \{0, 1\}$ et $q = (r, s, t) \in I$. Alors*

$$\log_p \beta_\psi(q) = \Omega^i(\psi, q).$$

Démonstration.— Nous allons d'abord supposer ψ de degré 1 ; sous cette hypothèse le cas $q \in I_0$ découle simplement du lemme III.16. Si $q \in I_2$ on calcule

$$\begin{aligned}\log_p G_\psi(r) + d_\psi(r_p) &= -\log_p \Gamma_p\langle r\rangle + \log_p \Gamma_p\langle \psi^{-1} r\rangle - G_p\langle r_p\rangle + G_p\langle \psi^{-1} r_p\rangle \\ &= -G_p\langle r\rangle + G_p\langle\langle r\rangle\rangle_p + G_p\langle \psi^{-1} r\rangle - G_p\langle\langle \psi^{-1} r\rangle\rangle_p \\ &\quad -G_p\langle r_p\rangle + G_p\langle \psi^{-1} r_p\rangle\end{aligned}$$

Maintenant donnons-nous $g \in \mathscr{G}$ et convenons de désigner par $\dot{x}$ l'image de $x \in \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On peut écrire $\langle gr\rangle = u + v$ avec $u \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ et $v \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$. On a alors $r = g^{-1}\dot{u} + g^{-1}\dot{v}$ avec $\langle g^{-1}\dot{u}\rangle \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ et $\langle g^{-1}\dot{v}\rangle \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ donc $r_p = g^{-1}\dot{u}$ et finalement $\langle\langle gr\rangle\rangle_p = \langle \dot{u}\rangle = \langle gr_p\rangle$. En appliquant ceci avec $g = 1$ et $g = \psi^{-1}$ on obtient $\log_p G_\psi(r) + d_\psi(r_p) = \Omega^1(\psi, r)$ et le lemme III.17 permet de conclure. Supposons maintenant $q \in I_1$ et par exemple $r \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$ et $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$, ce qui oblige $s \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$. Le calcul précédent donne $\log_p \beta_\psi(q) = \Omega^1(\psi, r) + \Omega^1(\psi, s) + \Omega^1(\psi, t) - d_\psi(r_p) - d_\psi(s_p)$. Par ailleurs $r + s + t = 0$ donc on peut écrire $\langle s\rangle = -\langle r\rangle + u$ avec $u \in \mathbb{Z}_p$ et par conséquent $s_p = -r_p \neq 0$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Tout ceci implique

$$d_\psi(r_p) = -G_p(1 - \langle s_p\rangle) + G_p(1 - \langle \psi^{-1} s_p\rangle) = G_p\langle s_p\rangle - G_p\langle \psi^{-1} s_p\rangle = -d_\psi(s_p)$$

et la formule voulue en découle. Étudions enfin le cas où ψ est de degré 0 et désignons par ϕ_p un élément de W_p de degré 1. En utilisant la formule 1.5.1 de [4] obtient l'égalité $\beta_{\psi\phi_p}(\phi_p q) = \beta_\psi(q)\beta_{\phi_p}(\phi_p q)$. Comme $\deg(\psi\phi_p) = \deg(\phi_p) = 1$ le cas $i = 1$ s'applique et il suffit de remarquer que $\Omega^0(\psi, r) = \Omega^1(\psi\phi_p, \phi_p r) - \Omega^1(\phi_p, \phi_p r)$ pour avoir le résultat désiré. $\square$

§3. Calculs finaux.

Dans ce paragraphe on fera l'hypothèse $p \geq 5$. Pour déterminer les valeurs de ht sur les fonctions $a^0_{E_\eta, \tau_q, \Phi_\eta}$ correspondant aux courbes de Fermat, nous devons non seulement avoir à notre disposition le calcul des matrices de Frobenius mais aussi celui des valuations ℓ-adiques des formes propres. Pour exprimer celui-ci associons à tout nombre premier ℓ un Frobenius $\phi_\ell \in \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$ et notons $v_\ell \colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_-$ l'application $r \mapsto \min(v_\ell(\langle r\rangle), 0)$. Introduisons également $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} = \{r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, v_\ell(r) = 0\}$, qui n'est autre que l'ensemble des $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ admettant un représentant dont le dénominateur est premier à ℓ. Lorsque $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ nous poserons encore $r_{(d)} = r \prod_{\ell | d} \ell^{-v_\ell(r)}$ puis

$$\delta_\ell(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \\ (\ell - 1)^{-1}\ell^{v_\ell(r)+1} & \text{si} \quad r \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_\ell(r) = a_r(1)v_\ell(r) - \delta_\ell(r)a^*_{r_{(\ell)}}(\phi_\ell).$$

Lemme III.21 (Colmez [7]) *Pour $\ell > 2$ on a $v_\ell(\omega_q) = V_\ell(q)$.*

Ceci se prouve en réutilisant les calculs de Coleman du paragraphe précédent. Le fait que ceux-ci ne soient pas démontrés pour $p = 2$ explique la condition $\ell > 2$. C'est aussi pour cela que nos résultats ne seront vrais que modulo $\mathbb{Q}\log_p 2$, même si dans ce qui suit cette restriction n'est pas toujours explicitement signalée pour des raisons de confort d'écriture. Nous ferons également la convention suivante : lorsque ψ est un élément de W_p on notera $ht_\psi : \mathscr{CM}^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ le morphisme $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéaire obtenu en restreignant à $\mathscr{CM}^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ l'application $\mathscr{CM}^{0}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]} \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{FM}}$, $a \mapsto ht(\psi a - a^\psi)$. Remarquons que $ht_\psi(1) = \psi(ht(1)) - ht(1) = 0$ puisque sur la définition de ht il est clair que $ht(1) = 0$.

Considérons un caractère d'Artin irréductible impair de degré 1, autrement dit un morphisme de groupes continu $\chi : \mathscr{G} \to \mathbb{C}^\times$ vérifiant $\chi(c) = -1$. Soit $d \geq 3$ le conducteur de χ, c'est-à-dire le plus petit entier tel que χ se factorise à travers $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_d)/\mathbb{Q})$. On sait que χ est non ramifié en p si et seulement si p est premier à d. En outre l'isomorphisme naturel $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_d)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/d)^\times$ permet d'associer à χ un caractère de Dirichlet primitif, renoté χ pour simplifier. On a alors $Z_p(\chi) = L'_p(\chi, 0)/L(\chi, 0)$ où les fonctions L du membre de droite sont de Kubota-Leopoldt au numérateur et de Dirichlet au dénominateur.

Lemme III.22 *Dans $\mathscr{CM}^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ on a la décomposition*

$$\chi = -\frac{1}{L(\overline{\chi}, 0)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) a_{x/d}.$$

Démonstration.— Partons de la formule

$$L(\chi, 0) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \chi(x) \Big(\frac{1}{2} - \Big\langle \frac{x}{d} \Big\rangle \Big)$$

valable pour tout caractère de Dirichlet modulo d. Remplaçons χ par son conjugué $\overline{\chi}$, donnons-nous un élément $g \in \mathscr{G}$ d'image c dans $(\mathbb{Z}/d)^\times$ et effectuons le changement de variables $x \mapsto cx$. On tombe sur l'égalité

$$L(\overline{\chi}, 0) = -\overline{\chi}(g) \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) a_{x/d}(g)$$

où l'on rappelle que pour $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la fonction $a_r : \mathscr{G} \to \mathbb{Q}$ est définie par $g \mapsto \langle gr \rangle - 1/2$, et le résultat voulu en découle. $\square$

Proposition III.23 *Soit ψ un élément de W_p de degré $i \in \{0, 1\}$. Alors modulo $\mathbb{Q}\log_p 2$ on a*

$$\begin{aligned} ht_\psi(\chi) &= \frac{1}{2L(\overline{\chi}, 0)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) \Big[\Omega^i(\psi, \psi x/d) - \Omega^i(\psi, -\psi x/d) \\ &\quad + \sum_{\ell < \infty} \Big\{ V_\ell(\psi x/d) - V_\ell(x/d) - V_\ell(-\psi x/d) + V_\ell(-x/d) \Big\} \log_p \ell \Big]. \end{aligned}$$

Démonstration.— Traitons en premier lieu le cas où d n'est pas une puissance de 2. Pour $x \in (\mathbb{Z}/d)^\times$ et $j \in \mathbb{N}$ l'élément $2^j x/d$ n'est pas nul dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et nous pouvons poser $q_{j,x} = (2^j x/d, 2^j x/d, -2^{j+1}x/d) \in I$. D'autre part en notant $k = v_2(d) \in \mathbb{N}$ il existe un entier $n \geq 1$ tel que $2^{n+k} \equiv 2^k \pmod{d}$ donc dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on a l'égalité $2^{n+k}x/d = 2^k x/d$. En utilisant le fait que $b_{q_{j,x}} = 2a_{2^j x/d} - a_{2^{j+1}x/d}$ on trouve alors la formule

$$a_{x/d} = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-1-j} b_{q_{j,x}} + \frac{1}{1 - 2^{-n}} \sum_{j=k}^{n+k-1} 2^{-1-j} b_{q_{j,x}}.$$

Au vu du lemme précédent nous avons donc

$$ht_\psi(\chi) = -\frac{1}{L(\overline{\chi},0)} \sum_{x\in(\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x)P_x$$

où l'on a posé

$$P_x = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-1-j} ht_\psi(b_{q_{j,x}}) + \frac{1}{1-2^{-n}} \sum_{j=k}^{n+k-1} 2^{-1-j} ht_\psi(b_{q_{j,x}}).$$

Fixons-nous un élément x de $(\mathbb{Z}/d)^\times$, notons $q_j = q_{j,x}$ et soit η_j la classe de q_j sous l'action de $\mathscr{G}$. Le nombre $Q_j = ht_\psi(b_{q_j}) = -ht_\psi(a^0_{E_{\eta_j},\tau_{q_j},\Phi_{\eta_j}})$ se calcule à l'aide des lemmes II.18 et III.21 et en se souvenant qu'il existe une base propre de $H^1_{\mathrm{dR}}(J_{\eta_j}/\mathbb{Q})$ définie sur $\mathbb{Q}$: on trouve alors

$$2Q_j = -\Omega^i(\psi,\psi q_j) + \Omega^i(\psi,-\psi q_j) + \sum_{\ell<\infty}\Big[V_\ell(q_j) - V_\ell(\psi q_j) - V_\ell(-q_j) + V_\ell(-\psi q_j)\Big]\log_p \ell.$$

Maintenant on a

$$\Omega^i(\psi,\psi q_j) = 2\Omega^i(\psi,\psi 2^j x/d) - \Omega^i(\psi,\psi 2^{j+1}x/d)$$

et

$$V_\ell(q_j) = 2V_\ell(2^j x/d) - V_\ell(2^{j+1}x/d)$$

donc

$$\begin{aligned} 2P_x \;&=\; -\Omega^i(\psi,\psi x/d) + \Omega^i(\psi,-\psi x/d) \\ &\quad + \sum_{\ell<\infty}\Big[V_\ell(x/d) - V_\ell(\psi x/d) - V_\ell(-x/d) + V_\ell(-\psi x/d)\Big]\log_p \ell \end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. Supposons maintenant que $d = 2^m$ où m est un entier ≥ 2. Pour tout $x \in (\mathbb{Z}/d)^\times$ on peut écrire

$$a_{x/d} = 2^{-m+1} a_{2^{m-1}x/d} + \sum_{j=0}^{m-2} 2^{-1-j} b_{q_{j,x}} = \sum_{j=0}^{m-2} 2^{-1-j} b_{q_{j,x}}$$

car $a_{1/2} = 0$. Les calculs ci-dessus sont encore valables mais pour pouvoir conclure il faut établir la nullité de

$$-\Omega^i(\psi,\psi 1/2) + \Omega^i(\psi,-\psi 1/2) + \sum_{\ell<\infty}\Big[V_\ell(1/2) - V_\ell(\psi 1/2) - V_\ell(-1/2) + V_\ell(-\psi 1/2)\Big]\log_p \ell.$$

Or ceci découle simplement des égalités $1/2 = -1/2 = \psi 1/2 = -\psi 1/2$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de relier ht et Z_p dans le cas abélien.

Proposition III.24 *Soient $\chi : \mathscr{G} \to \mathbb{C}^\times$ un caractère continu et $\psi \in W_p$ de degré 0 ou 1. Modulo $\mathbb{Q}\log_p 2$ on a la formule*

$$ht_\psi(\chi) = \begin{cases} (1-\chi(\psi))L'_p(\overline{\chi},0)/L(\overline{\chi},0) & \text{si } \deg\psi = 0 \text{ ou } \chi \text{ ramifié en } p \\ -\chi(\psi)L'_p(\overline{\chi},0)/L(\overline{\chi},0) & \text{si } \deg\psi = 1 \text{ et } \chi \text{ non ramifié en } p. \end{cases}$$

Démonstration.— Si χ est le caractère trivial la formule découle de $ht_\psi(\chi) = Z_p(\chi) = 0$. Supposons maintenant $\chi \neq 1$ et notons $d \geq 3$ son conducteur. Nous allons d'abord transformer l'expression de $ht_\psi(\chi)$ donnée par la proposition III.23. Grâce aux formules $\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) = (-1)^{l(z)}$ et $G_p(x) + G_p(1-x) = 0$ on voit que $\Omega^i(\psi, -r) = -\Omega^i(\psi, r)$ dès que $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ n'est pas nul. De même $v_\ell(-r) = v_\ell(r)$, $\delta_\ell(-r) = \delta_\ell(r)$, $(-r)_{(\ell)} = -r_{(\ell)}$ et $a_{-r} = -a_r$. Ainsi $V_\ell(-r) = -V_\ell(r)$ si $r_{(\ell)} \neq 0$ et $V_\ell(-r) = -V_\ell(r) - \delta_\ell(r)$ si $r_{(\ell)} = 0$. Dans tous les cas de figure

$$V_\ell(x/d) - V_\ell(\psi x/d) - V_\ell(-x/d) + V_\ell(-\psi x/d) = 2[V_\ell(x/d) - V_\ell(\psi x/d)]$$

pour $x \in (\mathbb{Z}/d)^\times$ et ce nombre est nul si ℓ ne divise pas d donc

$$ht_\psi(\chi) = \frac{1}{L(\overline{\chi}, 0)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) \Big[\Omega^i(\psi, \psi x/d) + \sum_{\ell | d} \Big\{V_\ell(\psi x/d) - V_\ell(x/d)\Big\} \log_p \ell\Big].$$

Fixons-nous un facteur premier ℓ de d et posons $n = v_\ell(d) \geq 1$. On peut écrire

$$\sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) V_\ell(x/d) = R + S$$

où l'on a posé

$$R = n \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) \Big(\frac{1}{2} - \Big\langle \frac{x}{d} \Big\rangle\Big) = nL(\overline{\chi}, 0)$$

et

$$S = -(\ell - 1)^{-1} \ell^{1-n} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) a^*_{\ell^n x/d}(\phi_\ell).$$

Or l'élément $\ell^n x/d$ de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est déterminé par l'image de x par la surjection canonique $(\mathbb{Z}/d)^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^{-n}d)^\times$; comme χ est primitif en tant que caractère de Dirichlet modulo d nous déduisons de tout ceci $S = 0$ et finalement

$$ht_\psi(\chi) = (\chi(\psi) - 1) \log_p d + \frac{1}{L(\overline{\chi}, 0)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) \Omega^i(\psi, \psi x/d).$$

Désignons par i le degré de ψ et étudions les trois cas possibles.

Premier cas : $i = 0$ et $(p, d) = 1$. On a $\Omega^0(\psi, \psi x/d) = 0$ et $\chi(\psi) = 1$ puisque χ est non ramifié en p. Par conséquent $ht_\psi(\chi) = 0$ et le résultat voulu en découle.

Deuxième cas : $i = 1$ et $(p, d) = 1$. L'élément de Frobenius de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_d)/\mathbb{Q})$ est la restriction de ψ donc $\chi(\psi) = \chi(p)$ et $\Omega^1(\psi, \psi x/d) = -\log_p \Gamma_p\langle px/d\rangle$. On dispose ainsi de l'égalité

$$\overline{\chi}(p) ht_\psi(\chi) = (1 - \overline{\chi}(p)) \log_p d - \frac{1}{L(\overline{\chi}, 0)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) \log_p \Gamma_p \langle x/d \rangle$$

et, d'autre part, le lemme III.13 fournit

$$\frac{L_p'(\overline{\chi}, 0)}{L(\overline{\chi}, 0)} = (\overline{\chi}(p) - 1) \log_p d + \frac{1}{L(\overline{\chi}, 0)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) \log_p \Gamma_p \langle x/d \rangle$$

car $L_p(\overline{\chi}, 0) = (1 - \overline{\chi}(p)) L(\overline{\chi}, 0)$. La formule désirée est alors évidente.

Troisième cas : $p|d$. On a $\Omega^i(\psi, \psi x/d) = -G_p(\psi x/d) + G_p(x/d)$ et $L_p(\overline{\chi}, 0) = L(\overline{\chi}, 0)$. Ainsi

$$ht_\psi(\chi) = (\chi(\psi) - 1)\log_p d + \frac{1-\chi(\psi)}{L(\overline{\chi}, 0)} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/d)^\times} \overline{\chi}(x) G_p\langle x/d\rangle$$

et le lemme III.13 permet de conclure. □

Corollaire III.25 *La conjecture III.4 est vraie modulo $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \log_p 2$ si V est de degré 1.*

Démonstration.— Nous allons d'abord établir que pour $\psi \in W_p$ de degré 0 ou 1 on a dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ la formule (modulo $\mathbb{Q}\log_p 2$)

$$ht_\psi(\chi) + \deg(\psi)\delta(\overline{\chi}) = (1 - \chi(\psi))\hat{Z}_p(\overline{\chi}),$$

où $\delta: \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est la composée de $\log w_p: \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ et de la flèche naturelle $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. Si la restriction de χ à $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est triviale, cela découle simplement de la proposition III.7 avec $q = \psi - \mathrm{id}$. Supposons maintenant $\chi|_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}} \neq 1$, ce qui implique $m_{(p)}(\overline{\chi}) = 0$ donc $\delta(\overline{\chi}) = 0$. Nous allons montrer que la proposition III.24 permet de conclure en traitant d'abord le cas χ ramifié en p. On a alors $r(\overline{\chi}, T) = 1$ donc $L_p'(\overline{\chi}, 0)/L(\overline{\chi}, 0) = \hat{Z}_p(\overline{\chi})$ et on a gagné. Si χ est non ramifié et si $\deg(\psi) = 0$ alors $1 - \chi(\psi) = 0$ donc $ht_\psi(\chi) = 0$ et le résultat est atteint. Il reste à traiter le cas χ non ramifié et $\deg(\psi) = 1$, ce qui implique $r(\overline{\chi}, T) = 1 - \overline{\chi}(\psi)T$. On a alors $L_p'(\overline{\chi}, 0)/L(\overline{\chi}, 0) = (1 - \overline{\chi}(\psi))\hat{Z}_p(\overline{\chi})$ et la formule voulue en découle. Par $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéarité on en déduit dans $\mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^+$ la formule (modulo $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \log_p 2$)

$$ht(\psi a - a^\psi) + \deg(\psi)\log w_p(a^*) = \hat{Z}_p(a^* - (a^\psi)^*)$$

pour $\psi \in W_p$ de degré 0 ou 1 et $a \in \mathscr{C}\mathscr{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}}$. Nous allons montrer que cette égalité est vraie pour tout ψ en introduisant

$$f(\psi, a) = ht(\psi a - a^\psi) + \deg(\psi)\log w_p(a^*) \quad \text{et} \quad g(\psi, a) = \hat{Z}_p(a^* - (a^\psi)^*).$$

Pour $\psi, \phi \in W_p$ on calcule

$$f(\phi\psi, a) = \phi(ht(\psi a - a^\psi)) + ht(\phi a^\psi - a^{\psi\phi}) + [\deg(\phi) + \deg(\psi)]\log w_p(a^*).$$

Or $\log w_p(a^*)$ appartient à $\mathbb{Q}_p$ donc

$$\phi(f(\psi, a)) = \phi(ht(\psi a - a^\psi)) + \deg(\psi)\log w_p(a^*)$$

et

$$f(\phi, a^\psi) = ht(\phi a^\psi - a^{\psi\phi}) + \deg(\phi)\log w_p(a^*).$$

En mettant tous ces résultats ensemble on obtient l'égalité $f(\phi\psi, a) = \phi(f(\psi, a)) + f(\phi, a^\psi)$. D'autre part il est clair que $g(\phi\psi, a) = g(\psi, a) + g(\phi, a^\psi)$ et comme $g(\psi, a) \in \mathbb{Q}_p$ cela se réécrit $g(\phi\psi, a) = \phi(g(\psi, a)) + g(\phi, a^\psi)$. Un argument de récurrence, basé sur le fait que f et g coïncident en degré 0 et 1, assure alors $f(\psi, a) = g(\psi, a)$ dès que $\deg(\psi) \geq 0$. En outre $f(\mathrm{id}, a) = g(\mathrm{id}, a) = 0$ donc $f(\psi, a) = -\psi(f(\psi^{-1}, a^\psi))$, $g(\psi, a) = -\psi(g(\psi^{-1}, a^\psi))$ et on en déduit $f = g$. De nouveau par $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$-linéarité ceci entraîne dans $\mathbb{B}_{\mathrm{FM}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ la formule

$$ht(\psi\chi - \chi(\psi)\chi) + \deg(\psi)\log w_p(\overline{\chi}) = (1 - \chi(\psi))Z_p(\overline{\chi})$$

pour tout $\psi \in W_p$ et tout caractère de Dirichlet χ. Donnons-nous enfin un élément $q = \sum_\psi a_\psi \psi$ de $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}[W_p]$ vérifiant $\rho(q) = 0$, c'est-à-dire $\sum_\psi a_\psi \chi(\psi) = 0$. On peut écrire

$$\begin{aligned} ht(q\chi) &= ht\left(\sum_\psi a_\psi \psi\chi\right) \\ &= ht\left[\sum_\psi a_\psi(\psi\chi - \chi(\psi)\chi)\right] \\ &= \sum_\psi a_\psi \left[-\deg(\psi)\log w_p(\overline{\chi}) + (1-\chi(\psi))Z_p(\overline{\chi})\right] \\ &= -q'(1)\log w_p(\overline{\chi}) + q(1)Z_p(\overline{\chi}) \end{aligned}$$

et cela conclut la preuve. □

Bibliographie

[1] G. W. Anderson. Logarithmic Derivatives of Dirichlet L-functions and the Periods of Abelian Varieties. *Compositio Mathematica*, 45:315 – 332, 1982.

[2] P. Berthelot and A. Ogus. F-isocrystals and de Rham cohomology. *Invent. Math.*, 72:159 – 199, 1983.

[3] R. F. Coleman. The Gross-Koblitz Formula. In *Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry*, number 12 in Advanced Studies in Pure Mathematics. North-Holland, 1987.

[4] R. F. Coleman. On the Frobenius Matrices of Fermat Curves. In *p-adic Analysis*, number 1454 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1989.

[5] R. F. Coleman and W. Mac Callum. Stable Reduction of Fermat Curves and Local Components of Jacobi Sum Hecke Characters. *J. reine angew. Math.*, 385:41 – 101, 1988.

[6] P. Colmez. Périodes des variétés abéliennes de type CM. *Preprint*, 1988.

[7] P. Colmez. Périodes des variétés abéliennes multiplication complexe. *Annals of Mathematics*, 138:625 – 683, 1993.

[8] J. Diamond. The p-adic log gamma function and p-adic Euler constant. *Trans. Am. Math. Soc*, 233:321 – 337, 1977.

[9] G. Faltings. p-adic Hodge theory. *Journal of the AMS*, 1:255–299, 1988.

[10] G. Faltings. Crystalline cohomology and p-adic étale cohomology. In *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, pages 25 – 80. John Hopkins Univ. Press, 1989.

[11] J.-M. Fontaine. *Groupes p-divisibles sur les corps locaux.* Number 47 – 48 in Astrisque. Soc. Math. Fr., 1977.

[12] J.-M. Fontaine. Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Annals of Mathematics*, 115:529 – 577, 1982.

[13] J.-M. Fontaine. Le corps des priodes p-adiques. In *Priodes p-adiques*, number 223 in Astrisque, pages 59 – 101, 1994.

[14] R. Gillard. Relations monomiales entre priodes p-adiques. *Inventiones Mathematicae*, 93:355 – 381, 1988.

[15] A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Pub. Maths. I.H.E.S*, 00:351 – 359, 1965.

[16] T. Honda. Isogeny classes of abelian varieties over finite fields. *J. Math. Soc. Japan*, 20:83 – 95, 1968.

[17] N. Koblitz. *p-adic Analysis: A Short Course on Recent Work*. Number 46 in London Math. Lecture Notes. Cambridge University Press, 1980.

[18] S. Lang. *Cyclotomic Fields 1 & 2*. Number 121 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1990.

[19] Y. Morita. A p-adic analogue of the Γ-function. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A*, 22:255 – 266, 1975.

[20] A. Ogus. A p-adic Analogue of the Chowla-Selberg Formula. In *p-adic Analysis*, number 1454 in Lecture Notes in Mathematics, pages 319 – 341. Springer-Verlag, 1989.

[21] J.-P. Serre and J. Tate. Good reduction of abelian varieties. *Annals of Mathematics*, 88:492 – 517, 1968.

[22] G. Shimura. Automorphic forms and the periods of abelian varieties. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 31:561 – 592, 1979.

[23] T. Shintani. On evaluation of zeta-functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A*, 23:393 – 417, 1976.

[24] C. L. Siegel. Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen. *Nachr. Akad. Wiss. Götingen*, pages 7 – 38, 1968.

[25] J. Tate. p-divisible groups. In *Driebergen conference on local fields*. Springer Verlag, 1966.

[26] J. Tate. *Les Conjectures de Stark sur les Fonctions* L *d'Artin en* $s = 0$. Number 47 in Progress in Math. Birkhäuser, 1984.

[27] J.-P. Wintenberger. Théorème de comparaison p-adique pour les schémas abéliens. *Astérisque*, 223:349 – 397, 1994.