

# THÈSE

*Présentée*

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG I

*pour obtenir*

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG I

Spécialité Mathématiques

*par*

**Patrick MARTINEZ**

Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

*Stabilisation de systèmes distribués semilinéaires :*

*domaines presque étoilés*

*et inégalités intégrales généralisées*

Soutenue le 9 Décembre 1998 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Vilmos KOMORNIK	Directeur	Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg I
Mme Fatiha ALABAU	Rapporteur	Professeur, Université Louis Pasteur Strasbourg I
M. Mohand MOUSSAOUI	Rapporteur	Professeur, École Centrale de Lyon
M. Enrike ZUAZUA	Rapporteur	Professeur, Universidad Complutense, Madrid
M. Alain HARAUX		Directeur de recherche, CNRS, Paris VI
M. Marius TUCSNAK		Professeur, Université Henri Poincaré Nancy I

## Table des Matières

INTRODUCTION	5
<b>Partie 1. QUELQUES INÉGALITÉS INTÉGRALES</b>	21
Chapitre 1. RAPPEL DE QUELQUES INÉGALITÉS INTÉGRALES FONDAMENTALES	25
1. Un résultat de décroissance exponentielle	25
2. Un résultat de décroissance polynomiale	26
Chapitre 2. DE NOUVELLES INÉGALITÉS INTÉGRALES	29
1. Premiers résultats	29
2. Perturbation du second membre par une fonction exponentielle	31
3. Perturbation du second membre par une fonction polynomiale	36
4. Généralisation	38
<b>Partie 2. STABILISATION UNIFORME DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS DES DOMAINES PRESQUE ÉTOILÉS</b>	39
Chapitre 3. INTRODUCTION	41
Chapitre 4. DOMAINES PRESQUE ÉTOILÉS : DÉFINITIONS ET EXEMPLES	45
1. Définition	45
2. Perturbation d'un domaine étoilé	46
3. Cas des domaines plans : utilisation des fonctions holomorphes	47
4. Application : exemple d'un domaine presque étoilé non étoilé	49
5. Contre-exemple : la couronne	52
6. Exemple en dimension supérieure	54
Chapitre 5. STABILISATION FRONTIÈRE DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE PRESQUE ÉTOILÉ RÉGULIER	55
1. Théorème d'existence	56
2. Stabilisation uniforme sous un feedback particulier	56
3. Preuve du Théorème 5.3	57
Chapitre 6. STABILISATION FRONTIÈRE DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE POLYGONAL	63
1. Cas où $\Gamma_0 = \emptyset$	63
2. Cas où $\Gamma_0 \neq \emptyset$	65

Chapitre 7. APPLICATION : STABILISATION RAPIDE DANS DES DOMAINES PLANS PARTICULIERS : LES POLYGONES RÉGULIERS	67
1. Un résultat négatif : le cas de la boule	68
2. Le cas des polygones réguliers	69
3. Cas de la dimension d'espace 3.	80
Chapitre 8. STABILISATION UNIFORME DES ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS DES DOMAINES PRESQUE ÉTOILÉS	85
1. Problème étudié et principaux résultats	85
2. Preuve du Théorème 8.2	86
3. Contrôlabilité exacte des équations de Maxwell sur un domaine presque étoilé	90
Chapitre 9. STABILISATION DE L'ÉQUATION DES ONDES AVEC LA CONDITION DE NEUMANN AU BORD PAR UN FEEDBACK LOCALEMENT DISTRIBUÉ	91
1. Introduction	91
2. Résultat principal	93
3. Exemples de géométries admissibles	94
4. Preuve du Théorème 9.1	100
<b>Partie 3. STABILISATION UNIFORME DU SYSTÈME DE L'ÉLASTICITÉ RELATIF AUX CRISTAUX CUBIQUES</b>	107
Chapitre 10. INTRODUCTION	109
Chapitre 11. PRINCIPAUX RÉSULTATS	111
1. Problème considéré	111
2. Théorème d'existence et de régularité	111
3. Principal résultat de stabilisation	112
4. Contrôlabilité exacte et stabilisation exponentielle	114
Chapitre 12. PREUVE DU THÉORÈME D'EXISTENCE	115
Chapitre 13. PREUVE DU THÉORÈME DE STABILISATION	119
1. Identités fondamentales	119
2. Fin de la preuve du théorème	122
3. Preuve du théorème lorsque $g$ n'est plus supposée globalement lipschitzienne	128
Chapitre 14. PRINCIPE DE D.L. RUSSELL ET DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE DE L'ÉNERGIE	131
1. Preuve du Théorème 11.3	131
2. Résultat de décroissance exponentielle de l'énergie	133
<b>Partie 4. NOUVELLE MÉTHODE D'ESTIMATION DU TAUX DE DÉCROISSANCE POUR DES SYSTÈMES DISSIPATIFS</b>	137
Chapitre 15. INTRODUCTION	139

Chapitre 16. STABILISATION UNIFORME PAR UN FEEDBACK FRONTIÈRE NON LINÉAIRE	141
1. Résultat principal et exemples	141
2. Inégalité donnée par la méthode des multiplicateurs	145
3. Estimations sur le taux de décroissance de l'énergie	147
Chapitre 17. STABILISATION UNIFORME PAR UN FEEDBACK NON LINÉAIRE LOCALEMENT DISTRIBUÉ	153
1. Résultat principal et exemples	153
2. Application au système de l'élasticité	158
3. Inégalité donnée par la méthode des multiplicateurs par morceaux	159
4. Estimations sur le taux de décroissance de l'énergie	168
Chapitre 18. STABILITÉ EXPONENTIELLE DE L'ÉQUATION DES ONDES EN DIMENSION 2 PAR UN FEEDBACK MONOTONE FAIBLE	175
1. Introduction	175
2. Résultat principal et exemple	177
3. Inégalités fondamentales	179
4. Preuve du Théorème 18.2	181
5. Extension au cas des feedbacks localement distribués	183
Chapitre 19. STABILITÉ EXPONENTIELLE DE L'ÉQUATION DES ONDES PAR UN FEEDBACK NON MONOTONE FAIBLE	185
1. Introduction	186
2. Résultats principaux et exemples	187
3. Problème bien posé et estimations a priori	191
4. Preuve du Théorème 19.2 en dimension 2	196
5. Preuve du Théorème 19.2 en dimension $N \geq 3$	198
6. Extension au cas d'une force localement distribuée	200
Chapitre 20. TAUX DE DÉCROISSANCE DE L'ÉNERGIE LORSQUE LA DISSIPATION EST HAUTEMENT DÉGÉNÉRÉE AU BORD	203
1. Introduction	203
2. Résultat principal et exemples	205
3. Inégalités fondamentales	207
4. Preuve du théorème	208
Références	215



# INTRODUCTION

Cette thèse est consacrée à l'étude de divers problèmes concernant la *stabilisation de systèmes vibrants*. Étant donné un système vibrant (par exemple une corde), on mesure à tout instant  $t$  les vibrations à l'aide de l'énergie, qu'on note  $E(t)$ . On suppose que ce système est soumis à un terme d'amortissement, qui fait décroître l'énergie. Notre problème est de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie : étudier sa limite (c'est-à-dire déterminer si elle est nulle ou pas), et, si cette limite est nulle, donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro. Tout cela dépend des hypothèses sur le terme d'amortissement.

Divers aspects de ce problème ont été étudiés par de nombreux mathématiciens ces dernières années : sous diverses hypothèses sur le terme d'amortissement,

des propriétés de *stabilité asymptotique forte*, c'est-à-dire

$$E(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

ont été prouvées notamment par C. M. Dafermos, A. Haraux, J. E. Lagnese, I. Lasiecka, F. Conrad et M. Pierre, E. Zuazua;

des propriétés de *stabilisation uniforme*, c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq Cf(t),$$

où  $C$  est une fonction constante par rapport à  $t$  et qui dépend de la norme des données initiales, et  $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue décroissante qui satisfait

$$f(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

ont été démontrées pour des systèmes linéaires ou non linéaires, notamment par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch (en utilisant des techniques d'analyse micro-locale), par F. Alabau, F. Conrad, A. Haraux, V. Komornik, J. E. Lagnese, J.-L. Lions, M. Nakao, J.-P. Puel, M. Tucsnak, B. Rao, E. Zuazua (avec la méthode des multiplicateurs et la construction de fonctions de Lyapunov), M. A. Horn, I. Lasiecka, D. Tataru, R. Triggiani (en combinant les deux méthodes); les problèmes causés par des singularités du domaine (domaines polygonaux) ont plus particulièrement été étudiés par P. Grisvard et M. Moussaoui;

des propriétés de *stabilité asymptotique faible*, c'est-à-dire

$$(u(t), u'(t)) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty$$

dans un certain espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , ont aussi été obtenues, notamment par M. Slemrod, J. Vancostenoble.

Dans ce travail, on améliore sensiblement divers résultats antérieurs de stabilisation uniforme.

- Dans la Partie 1, on commence par rappeler les inégalités intégrales utilisées par A. Haraux et V. Komornik, et dont on se servira dans les Parties 2 et 3. On généralise ensuite ces inégalités dans plusieurs directions; ces nouvelles inégalités seront appliquées dans la Partie 4.
- Dans la Partie 2, on considère le système de l'équation des ondes stabilisé par un feedback frontière linéaire.
  - Dans un premier temps, à l'aide de multiplicateurs adaptés au domaine, on affaiblit les conditions géométriques sous lesquelles on peut montrer que l'énergie décroît exponentiellement avec un taux de décroissance explicite.
  - Ensuite, on utilise ce résultat pour améliorer le taux de décroissance dans des domaines polygonaux particuliers (les polygones réguliers).
  - Enfin, on utilise ces nouveaux multiplicateurs pour améliorer les résultats connus sur la stabilisation de l'équation des ondes avec la condition de Neumann sur le bord par un feedback localement distribué.
- Dans la Partie 3, on étudie le système d'élasticité relatif aux cristaux cubiques, qui n'est pas homogène isotrope. A l'aide d'un feedback frontière non linéaire bien choisi, on obtient des résultats de stabilisation uniforme.
- Dans la Partie 4, on introduit une nouvelle méthode permettant d'estimer le taux de décroissance de l'énergie pour des problèmes dissipatifs. Cette méthode est basée sur la construction de partitions du domaine dépendant du comportement du feedback en zéro, à l'infini, et éventuellement des données initiales, et sur la construction de fonctions poids reliées au comportement asymptotique du feedback. Elle permet d'améliorer plusieurs résultats antérieurs sur la stabilisation de l'équation des ondes par un feedback non linéaire de la forme  $g(u')$ , où  $g$  est une fonction non linéaire :
  - lorsque  $g$  est croissante et se comporte de manière linéaire à l'infini, on obtient un taux *explicite* de décroissance de l'énergie, sans supposer que  $g$  a une croissance polynomiale en zéro. On

complète ainsi des résultats antérieurs en obtenant la stabilisation uniforme de l'énergie avec un taux de décroissance explicite, pour une large classe de feedbacks pour lesquels la stabilisation uniforme était connue mais sans estimation explicite du taux.

- Ensuite, on considère une classe de feedbacks non monotones : en toute dimension, on montre que l'énergie tend vers zéro avec un taux de décroissance explicite. En particulier, on obtient des résultats nouveaux de stabilité forte.
- Enfin, on étudie un système linéaire pour lequel les conditions géométriques utilisées dans les cas précédents ne sont plus satisfaites; à l'aide d'une étude du comportement asymptotique du feedback au bord du domaine, on obtient encore une estimation du taux de décroissance de l'énergie.



## PARTIE 1

**Inégalités intégrales généralisées**

On commence par rappeler deux inégalités intégrales à A. Haraux et V. Komornik, dont on se servira dans les Parties 2 et 3. Puis on généralise ces inégalités dans plusieurs directions; ces nouveaux résultats seront utiles dans la Partie 4.

Dans les parties suivantes, on étudiera divers problèmes dissipatifs. Pour chaque système, on montrera que l'énergie vérifie une inégalité intégrale, et on en déduira une estimation de sa vitesse de convergence vers zéro.

Les premières estimations du taux de décroissance sont dues à G. Chen [12]. Elles reposent sur la théorie des semi-groupes.

Pour obtenir une meilleure estimation du taux de décroissance, et pour pouvoir étudier des problèmes non linéaires, A. Haraux et V. Komornik ont amélioré et généralisé cette méthode. Ils ont introduit des inégalités intégrales qui permettent d'obtenir de manière très efficace de très bonnes estimations de décroissance pour de nombreux problèmes linéaires ou non linéaires. En particulier, V. Komornik ([44], [46]) a obtenu des estimations *optimales* de décroissance concernant le problème de stabilisation uniforme par un feedback linéaire de l'équation des ondes ou du système de l'élasticité relatif à un matériau homogène isotrope. Par ailleurs, M. Aassila [1] a obtenu un résultat remarquable d'optimalité du taux de décroissance pour un problème non linéaire.

On utilisera ces inégalités dans les Parties 2 et 3 pour étudier le taux de décroissance de l'énergie d'un problème dissipatif linéaire, puis d'un problème non linéaire, sous certaines restrictions sur la croissance de la fonction  $g$  en zéro.

Toutefois, ces inégalités ne donnent pas de résultat lorsque la décroissance de l'énergie n'est pas assez forte (au moins polynomiale).

A l'aide de *fonctions poids*, on généralise ces inégalités intégrales dans plusieurs directions (Lemmes 2.1 à 2.7). Ces nouvelles inégalités permettent d'estimer la vitesse de convergence vers zéro, même lorsque celle-ci est arbitrairement lente. Elles seront très utiles dans la Partie 4, entre autres pour donner une estimation du taux de décroissance de l'énergie même lorsque le feedback n'a pas une croissance au moins polynomiale en zéro (hypothèse qui permet dans de nombreux cas de montrer que l'énergie décroît de manière polynomiale vers zéro).

## PARTIE 2

**Stabilisation frontière de l'équation des ondes  
dans des domaines presque étoilés**

On considère le système de l'équation des ondes dans un domaine borné  $\Omega$  avec la condition de Dirichlet sur une partie  $\Gamma_0$  du bord et la condition de Neumann sur l'autre partie  $\Gamma_1$  du bord. Ce système est soumis à un terme d'amortissement exercé sur la frontière, et représenté par une fonction linéaire de la vitesse :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u + au + \ell u' = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{cases}$$

où  $a$  et  $\ell$  sont des fonctions continues positives. On définit l'énergie de  $u$  par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'^2 + |\nabla u|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} au^2 ds.$$

On s'intéresse au problème de décroissance exponentielle de l'énergie des solutions, étudié par de nombreux auteurs depuis les travaux de D. L. Russell [69] : sous quelles conditions géométriques sur le domaine et sous quelles conditions sur  $a$  et  $\ell$  peut-on montrer que l'énergie décroît exponentiellement, et si possible donner une estimation explicite du taux de décroissance?

Deux méthodes complémentaires permettent de donner des réponses à ce problème.

Les *techniques d'analyse micro-locale* développées par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [8] donnent une condition nécessaire et suffisante portant sur la géométrie du domaine : il existe deux constantes strictement positives  $C$  et  $\omega$  telle que

$$(0.1) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq Ce^{-\omega t},$$

si la "condition géométrique des rayons optiques" est satisfaite. Cette condition est la suivante : il existe  $T > 0$  et  $\alpha > 0$  tel que tout rayon issu du bord et soumis aux lois de la réflexion de l'optique géométrique traverse la zone  $\{x \in \Gamma_1 : \ell(x) \geq \alpha\} \times [0, T]$ .

Cependant, ce résultat ne s'applique que si le domaine est assez régulier, et ne donne pas d'estimation sur les constantes  $C$  et  $\omega$ , qui permettent de mesurer le coût d'observabilité du système.

La *méthode des multiplicateurs*, développée par exemple par J. E. Lagnese [47], J.-L. Lions [54] ou V. Komornik [44], permet d'obtenir (0.1) de manière élémentaire et avec des constantes explicites  $C$  et  $\omega$  si le domaine  $\Omega$

est étoilé, et avec certaines constantes si  $\Omega$  vérifie des hypothèses géométriques un peu plus générales. Notons que cette méthode fournit parfois des estimations optimales, notamment lorsque le domaine  $\Omega$  est une boule et que  $a$  et  $\ell$  sont bien choisies voir V. Komornik [44]).

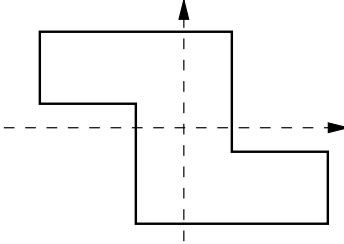
I. Lasiecka et R. Triggiani [52] ont obtenu des résultats intermédiaires en combinant ces deux méthodes : à l'aide de résultats de régularité cachée, ils ont prouvé (0. 1) sous des hypothèses géométriques très faibles et en simplifiant les preuves de [8], mais sans obtenir de constantes explicites. M. A. Horn [34] a obtenu des résultats semblables sur le système de l'élasticité.

On se propose d'affaiblir les conditions géométriques sous lesquelles on peut montrer la décroissance exponentielle de l'énergie à l'aide de la méthode des multiplicateurs. Pour cela, on introduit de *nouveaux multiplicateurs*, mieux adaptés à la géométrie du domaine, à partir de notions introduites par J. E. Lagnese [47] et B. V. Kapitov [41]. On définit une nouvelle classe de domaines :  $\Omega$  est *presque étoilé* s'il existe  $\phi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  vérifiant

$$(0. 2) \quad \begin{cases} \Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \lambda_1(\phi) > 0, \\ \partial_\nu\phi \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \partial_\nu\phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

où  $\lambda_1(\phi) := \inf\{\lambda_1(x), x \in \Omega\}$ ,  $\lambda_1(x)$  désignant la plus petite valeur propre de la matrice carrée symétrique réelle  $D^2\phi(x)$ . En particulier, tout domaine étoilé est presque étoilé : si  $\Omega$  est étoilé par rapport au point  $x^0$ , il suffit de choisir  $\phi(x) = \frac{1}{2N}|x - x^0|^2$ .

A l'aide de techniques d'analyse complexe, on construit de tels domaines: par exemple, le domaine représenté ci-dessous est presque étoilé sans être étoilé :



Ensuite, on montre que, si  $\Omega$  est presque étoilé, l'énergie décroît exponentiellement, avec un taux de décroissance explicite dépendant de la fonction  $\phi$  qui satisfait (0. 2) :

$$(0. 3) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega(\phi)t} \text{ avec } \omega(\phi) := \frac{\inf\{\frac{1}{3}, \lambda_1(\phi)\}}{2\|\nabla\phi\|_\infty}.$$

Enfin, on améliore des résultats antérieurs de stabilisation uniforme sur certains domaines étoilés particuliers : les polygones réguliers. Pour ces domaines, on détermine toute une famille de multiplicateurs  $\phi$  satisfaisant les

conditions requises pour l'obtention de (0. 3). On améliore alors l'estimation de décroissance exponentielle en optimisant le taux de décroissance  $\omega(\phi)$  sur la famille des multiplicateurs admissibles. Ceci donne lieu à l'étude d'un problème d'optimisation non classique. A l'aide de techniques d'analyse complexe, on construit pour chaque polygone régulier des multiplicateurs admissibles donnant une meilleure estimation du taux de décroissance de l'énergie. Par exemple pour le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon  $R$ , on améliore l'estimation de L. R. Tcheugoué Tébou [71]

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-t/3R},$$

pour obtenir, de manière théorique,

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-t/2,5R},$$

estimation que l'on améliore par des calculs numériques pour obtenir finalement

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-t/2,36R}.$$

On étudie ensuite de manière semblable le cas des polygones réguliers.

Cette méthode est présentée dans le cadre bien connu de l'équation des ondes, puis dans celui des équations de Maxwell. Toutefois, on peut aussi l'appliquer à des problèmes que les techniques d'analyse micro-locale ne permettent pas encore d'étudier, par exemple le problème de stabilisation non linéaire des plaques de Kirchhoff dans des domaines non étoilés. Elle permet aussi d'étendre les résultats de décroissance exponentielle de l'énergie de F. Alabau et V. Komornik [4], obtenus pour le système général de l'élasticité lorsque le domaine est une boule, à des domaines "proches" (en un certain sens) d'une boule (voir aussi les travaux de M. A. Horn [34], [35] pour l'étude du système de l'élasticité pour les matériaux homogènes isotropes).

Enfin, on utilisera cette méthode de multiplicateurs adaptés dans le Chapitre 9 pour répondre à une question soulevée par E. Zuazua concernant la stabilisation par un feedback localement distribué de l'équation des ondes avec la condition de Neumann au bord : à l'aide d'une méthode de multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu [56], on montre que l'énergie décroît exponentiellement même si le terme d'amortissement ne s'exerce pas sur un voisinage de tout le bord du domaine. Avec des techniques d'analyse complexe, on donne des exemples explicites de géométries admissibles.

Les résultats de cette partie ont été annoncés dans une note parue aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, et font l'objet d'un article accepté pour publication au *SIAM Journal on Control and Optimization*.

## PARTIE 3

**Stabilisation uniforme du système d'élasticité  
relatif aux cristaux cubiques**

On étudie le système d'élasticité relatif aux cristaux cubiques, stabilisé par un feedback frontière non linéaire.

Ce travail a été motivé par deux articles antérieurs de J. E. Lagnese [48] et [49] et un article de V. Komornik [46]. Dans le premier, J. E. Lagnese prouve des résultats de décroissance uniforme de l'énergie pour les solutions du système d'élasticité linéaire soumis à un feedback représenté par une fonction linéaire de la vitesse, sous certaines conditions techniques sur le tenseur d'élasticité. En particulier, ces résultats ne s'appliquent pas au cas linéaire homogène isotrope, pour lequel le tenseur d'élasticité dépend de *deux* paramètres, appelés *constantes de Lamé*.

Dans le second article, il obtient des estimations de décroissance uniforme de l'énergie pour des systèmes d'élasticité homogènes, isotropes, linéaires et bidimensionnels. Ces systèmes sont soumis à un feedback (représenté par une fonction éventuellement non linéaire) dépendant de la vitesse, mais modifié par un feedback linéaire artificiel.

V. Komornik a montré que la même estimation est valable, sans ce terme linéaire artificiel, pour les systèmes homogènes isotropes en dimension 2 et 3, soumis à une force qui dépend linéairement de la vitesse. Ses estimations sur le taux de décroissance de l'énergie sont même optimales lorsque le domaine est une boule de  $\mathbb{R}^3$ .

Le but de cette partie est d'étendre ces résultats au problème de stabilisation du système de l'élasticité relatif aux cristaux cubiques, et soumis à une force qui est une fonction non linéaire de la vitesse. Pour ces systèmes, le tenseur d'élasticité dépend de *trois* paramètres. En utilisant les notations de R. P. Feynman ([22]) :

$$C_{xxyy} = \lambda, \quad C_{xyxy} = 2\mu, \quad C_{xxxx} = \eta,$$

le terme général du tenseur d'élasticité s'écrit

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (\eta - \lambda - 2\mu)\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}.$$

Le cas homogène isotrope correspond au cas  $\eta = \lambda + 2\mu$ . Dans la suite, on suppose seulement que  $\eta > \lambda + \mu$  : d'après les valeurs numériques données par R. P. Feynman, cette hypothèse est physiquement vérifiée pour de nombreux cristaux, comme par exemple Fe, Al, le diamant, LiF, NaCl, KCl, Nabr, KI, AgCl...

En notant  $\gamma := \eta - (\lambda + 2\mu)$ , le système d'élasticité s'écrit

$$\begin{cases} u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i + a u_i + \ell g(u_i') = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0 \text{ et } u'(0) = u^1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On suppose que  $g$  est une fonction croissante qui vérifie

$$\begin{cases} c_1 |x|^p \leq |g(x)| \leq c_2 |x|^{\frac{1}{p}} \text{ si } |x| \leq 1, \\ c_3 |x| \leq |g(x)| \leq c_4 |x| \text{ si } |x| > 1, \end{cases}$$

avec  $p \geq 1$ . Sous certaines hypothèses géométriques, on montre que

$$\text{si } p = 1, \quad E(t) \leq E(0) e^{1-\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$\text{si } p > 1, \quad E(t) \leq C t^{-2/(p-1)}, \quad \forall t > 0.$$

Ensuite, grâce à un principe général de D. L. Russell [69], on déduit un résultat de contrôlabilité exacte. Puis, par l'intermédiaire de ce principe et d'une méthode introduite par W. Liu [58] dans le cadre d'un système de thermoélasticité, on retrouve une partie du résultat de décroissance exponentielle de l'énergie lorsque  $g$  est linéaire. Cette méthode ne donne pas de résultats nouveaux dans le cadre des cristaux cubiques, mais se révèle très efficace dans l'étude de la stabilisation uniforme du système général de l'élasticité.

Ce travail fait l'objet d'un article accepté pour publication au journal *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*.

## PARTIE 4

**Nouvelle méthode d'estimation du taux de décroissance  
pour des systèmes dissipatifs**

On considère des systèmes vibrants dissipatifs, par exemple l'équation des ondes soumise à un terme d'amortissement  $g(u')$  dépendant de la vitesse de manière non linéaire. On suppose que  $g(0) = 0$ .

**Lorsque  $g$  est croissante**, deux types de résultats sont connus

- des propriétés de *stabilisation forte* (par exemple A. Haraux [31], C. M. Dafermos [17], F. Conrad et M. Pierre [15]),
- des propriétés de *stabilisation uniforme* avec un taux de décroissance *explicite* lorsque  $g$  a une *croissance polynomiale en zéro* (par exemple M. Nakao [61], A. Haraux [29], E. Zuazua [79] et V. Komornik [44]). I. Lasiecka et D. Tataru [51] ont obtenu des résultats de stabilisation uniforme sans cette hypothèse de croissance polynomiale en zéro, mais sans obtenir un taux de décroissance réellement explicite.

**Lorsque  $g$  n'est pas monotone**, le problème est beaucoup plus délicat (notamment concernant l'existence et la régularité des solutions). Seuls semblent connus des propriétés de *stabilisation faible* (par exemple M. Slemrod [70], J. Vancostenoble [74]) et quelques résultats de *stabilisation forte* en dimension 1 (E. Feireils [20], M. Pierre et J. Vancostenoble [66]).

A l'aide des *inégalités intégrales généralisées* de la Partie 1, et en développant une méthode de *partition du domaine* dépendant du comportement de la fonction  $g$  en zéro et à l'infini, et parfois des données initiales, on améliore et on complète de façon sensible de nombreux résultats antérieurs. On obtient des résultats nouveaux dans le cas monotone et dans le cas non monotone.

**Chapitre 16 : Stabilisation frontière par un feedback monotone**

On considère le système

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u + a u + \ell g(u') = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \end{cases}$$

On suppose que  $g$  est strictement croissante, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $g(0) = 0$  et que  $g$  a un comportement linéaire à l'infini :

$$\forall |y| \geq 1, \quad \alpha|y| \leq |g(y)| \leq \beta|y|$$

avec  $\alpha > 0$ .

Lorsque  $g$  a une croissance au moins polynomiale en zéro :

$$\forall |y| \leq 1, \quad c|y|^p \leq |g(y)| \leq c'|y|,$$

avec  $p > 1$ ,  $c > 0$  et  $c' > 0$ , plusieurs auteurs (voir par exemple M. Nakao [61], A. Haraux [28], E. Zuazua [79], F. Conrad et al. [14], V. Komornik [44]) ont montré (par différentes méthodes) que l'énergie vérifie :

$$\forall |t| \geq 1, \quad E(t) \leq \frac{C}{t^{2/(p-1)}}.$$

Lorsque  $g$  n'a pas une croissance polynomiale, par exemple

$$\forall |y| \leq 1, \quad |g(y)| = e^{-1/|y|}$$

I. Lasiecka et D. Tataru [51] ont montré que l'énergie décroît plus vite qu'une certaine fonction  $S(t)$  :

$$\forall t \geq 1, \quad E(t) \leq S(t),$$

où  $S(t)$  est la solution de l'équation différentielle

$$S'(t) + q(S(t)) = 0,$$

$q$  étant une fonction dépendant de  $g$  par l'intermédiaire d'un certain algorithme.

A l'aide des inégalités intégrales établies dans la Partie 1, et d'une décomposition du domaine dépendant du comportement de  $g$  en zéro, on prouve le résultat plus explicite suivant : l'énergie décroît de manière uniforme vers zéro, avec un taux de décroissance *explicite* :

$$\forall t \geq 1, \quad E(t) \leq C \left( G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 \quad \text{où } G(y) = yg(y).$$

De plus, si la fonction  $H : x \mapsto \frac{g(x)}{x}$  vaut zéro en zéro et est croissante sur  $[0, \eta]$  pour un certain  $\eta > 0$ , alors on montre qu'en fait :

$$\forall t \geq 1, \quad E(t) \leq C \left( g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2.$$

En particulier, on obtient des estimations même si  $g$  n'a pas une croissance polynomiale en zéro. Ainsi, on voit que si  $g$  est impaire et tend *exponentiellement* vite vers zéro en zéro, par exemple

$$\forall y \in ]0, 1], \quad g(y) = e^{-1/y},$$

alors l'énergie décroît de manière *logarithmique* :

$$\forall t \geq 2, \quad E(t) \leq \frac{C}{(\ln t)^2}.$$

Ce travail fait l'objet d'un article soumis.

## Chapitre 17 : Stabilisation par un feedback monotone localement distribué

On considère le système

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{cases}$$



où  $g$  est une fonction croissante et  $a : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue positive, pouvant s'annuler sur  $\Omega$ .

D'une part, on *affaiblit les hypothèses géométriques* généralement utilisées sur la localisation  $a(\cdot)$  de la dissipation (à l'aide de la méthode de multiplicateurs par morceaux utilisée dans le Chapitre 9) D'autre part on *affaiblit*, par rapport au paragraphe précédent, les hypothèses portant sur le *comportement de  $g$  en zéro* (en ne supposant plus  $g$  dérivable en zéro). On obtient encore un résultat analogue au précédent. On obtient aussi le même type de résultats pour le système général de l'élasticité.

Ce travail fait l'objet d'un article accepté pour publication à la *Revista Matemática Complutense*.

### Chapitre 18 : Stabilisation interne par un feedback monotone faible

On considère le système

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + g(u') = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \end{cases}$$

On se restreint au cas des fonctions  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $g(0) = 0$ , et  $g'(0) \neq 0$ .

En *dimension 2*, lorsque  $g$  est *croissante, éventuellement bornée*, on montre que l'énergie des solutions fortes décroît *exponentiellement* vers zéro : étant donné  $(u^0, u^1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , il existe  $\omega > 0$  *dépendant de la norme des conditions initiales* dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

Ceci améliore des résultats antérieurs de V. Komornik [45] et M. Nakao [62], qui avaient donné des estimations polynomiales de décroissance. La preuve est basée sur une partition du domaine qui dépend des données initiales.

### Chapitre 19 : Stabilisation interne par un feedback non monotone

On considère le système précédent. On se restreint au cas des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $g(0) = 0$ , et  $g'(0) \neq 0$ .

Il existe très peu de résultats sur le comportement asymptotique de l'énergie dans le cadre non monotone. M. Slemrod [70] a montré des propriétés de stabilité asymptotique faible : si  $g$  est globalement lipschitzienne, alors

$$(u(t), u'(t)) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

J. Vancostenoble [74] a étendu dans plusieurs directions les résultats de M. Slemrod [70] (en supprimant l'hypothèse de croissance au plus linéaire de  $g$ , et en considérant des classes plus larges de feedbacks).

En dimension 1, E. Feireils [20], M. Pierre et J. Vancostenoble [66] ont montré des propriétés de stabilité forte :

$$E(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

mais leurs preuves sont basées sur la structure spécifique ou sur des propriétés de régularité qu'ont les solutions en dimension 1.

On voit assez facilement que les résultats du Chapitre 17 s'adapte au cas non monotone : lorsque  $g$  a un comportement linéaire à l'infini, l'énergie des solutions globales tend fortement vers zéro, et avec un taux de décroissance explicite. Par contre il est plus difficile d'adapter le résultat du Chapitre 18, relatif au feedbacks *faibles* à l'infini, dont la preuve est basée sur la régularité de la solution que confère la monotonie de  $g$ .

En dimension  $N \geq 2$ , on suppose que  $g$  est *non monotone* et satisfait

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & xg(x) \geq 0 \text{ et } g'(x) \geq -m, \\ \forall |x| \geq 1, & c_1 \frac{|x|}{(\ln(2+|x|))^k} \leq |g(x)| \leq |x|^q, \end{cases}$$

avec  $c_1 > 0, c_2 > 0, m \geq 0, q \geq 0$  et  $k \in [0, 1]$ . Sous ces hypothèses, on montre qu'il existe une constante  $\omega > 0$  dépendant de la norme des données initiales telle que l'énergie des solutions fortes décroît vers zéro avec un *taux de décroissance explicite* :

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0) e^{1+\omega} e^{-\omega(1+t)^{1-k}} \text{ si } k \in [0, 1[,$$

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq \frac{e E(0) 2^\omega}{(2+t)^\omega} \text{ si } k = 1.$$

En particulier, ceci donne des *résultats nouveaux de stabilisation forte* valables en toute dimension.

La preuve est basée sur une partition du domaine qui dépend des données initiales, et sur les inégalités de la Partie 1.

*Les Chapitres 18 et 19 ont été écrits en collaboration avec J. Vancostenoble (I.R.M.A.R. Université Rennes I et E.N.S. Cachan, Antenne de Bretagne) et font l'objet d'un article soumis.*

## Chapitre 20 : Stabilisation interne par une dissipation hautement dégénérée au bord

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)u' = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \end{cases}$$

On se place dans le cas où  $\Omega$  est la boule centrée en  $O$  et de rayon  $R$ . De plus, on suppose que  $a : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est régulière, positive, et s'annule au bord de  $\Omega$ .

D'après C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7], l'énergie des solutions ne décroît pas de manière exponentielle uniforme. M. Nakao [63] a montré que lorsque  $a$  tend vers zéro de manière *au plus polynomiale* au bord, alors l'énergie décroît de manière polynomiale.

Soit  $\varepsilon > 0$ . On ajoute l'hypothèse

$$\forall |x| \geq R - \varepsilon, \quad a(x) = \tilde{a}(|x|),$$

où  $\tilde{a} : [R - \varepsilon, R] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est décroissante et  $\tilde{a}(R) = 0$ .

On obtient alors un résultat de stabilisation uniforme même si  $\tilde{a}$  décroît vers zéro en  $R$  plus vite que tout polynôme. Par exemple, on montre que si  $a$  décroît exponentiellement vers zéro :

$$\forall |x| \in [R - \varepsilon, R[, \quad a(x) = e^{-1/(R-|x|)},$$

alors l'énergie décroît de manière *logarithmique* :

$$\forall t \geq 2, \quad E(t) \leq \frac{c}{(\ln t)^q},$$

où  $q$  est une constante strictement positive qui dépend de la régularité des conditions initiales.

La preuve repose sur la méthode précédemment décrite, et sur une étude du comportement asymptotique de la fonction  $a$  au bord.

Ce travail fait l'objet d'un article soumis.

## Publications

Les résultats suivants ont été publiés ou soumis :

concernant la Partie 2 :

- Uniform stabilization of the wave equation in almost star-shaped domains, *accepté pour publication au SIAM J. on Control and Optimization*.
- Stabilisation uniforme de l'équation des ondes dans des domaines presque étoilés, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math, t. 322, 1996, no. 4, 365-370*.

concernant la Partie 3 :

- Uniform stabilization of elastodynamic systems of cubic crystals by nonlinear feedbacks, *accepté pour publication au journal Nonlinear Analysis, TMA*.

concernant la Partie 4 :

- A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping, *accepté pour publication à la Revista Matemática Complutense*.
- A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, *article soumis*.
- Exponential stability for the wave equation with weak nonmonotone damping, en collaboration avec J. Vancostenoble, *article soumis*.
- Decay of solutions of the wave equation with a local highly degenerate dissipation, *article soumis*.



Partie 1

**QUELQUES INÉGALITÉS  
INTÉGRALES**

Dans cette partie, on rappelle d'abord des inégalités intégrales de A. Haraux et V. Komornik utiles dans les Parties 2 et 3, puis on généralise ces inégalités dans plusieurs directions.

Dans les parties suivantes, on étudiera divers problèmes dissipatifs. Pour chaque système, on montrera que l'énergie vérifie une inégalité intégrale, et on en déduira une estimation de sa vitesse de convergence vers zéro.

Les premières estimations du taux de décroissance sont dues à G. Chen [12]. Elles reposent sur la la théorie des semi-groupes : par exemple, considérons le système

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + u' = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \end{cases}$$

On définit l'énergie par

$$E(t) := \int_{\Omega} (u'^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

On voit facilement que  $E$  est décroissante car

$$E'(t) = - \int_{\Omega} u'^2 dx \leq 0.$$

D'autre part, on peut montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$\int_0^T E(t) dt \leq C E(0) + C \int_0^T \int_{\Omega} u'^2 dx = 2CE(0) - CE(T).$$

Comme  $E$  est décroissante,

$$TE(T) \leq \int_0^T E(t) dt,$$

on obtient donc que

$$E(T) \leq \frac{2C}{C+T} E(0) = kE(0).$$

Si  $T > C$ ,  $k < 1$ . Un argument classique de la théorie des semi-groupes permet alors d'affirmer que l'énergie décroît exponentiellement : soient  $t > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$nT \leq t < (n+1)T.$$

Alors

$$E(t) \leq E(nT) \leq kE((n-1)T) \leq k^n E(0) \leq k^{\frac{t}{T}-1} E(0).$$

Pour obtenir une meilleure estimation du taux de décroissance, et pour étudier des problèmes non linéaires, A. Haraux et V. Komornik ont amélioré et généralisé cette méthode. Ils ont introduit des inégalités intégrales qui permettent d'obtenir de manière très efficace de très bonnes estimations de décroissance pour de nombreux problèmes linéaires ou non linéaires. En particulier, V. Komornik [44], [46] a obtenu des estimations *optimales* de décroissance concernant le problème de stabilisation uniforme par un feedback linéaire de l'équation des ondes ou du système de l'élasticité relatif à

un matériau homogène isotrope. Par ailleurs, M. Aassila [1] a obtenu un résultat remarquable d'optimalité du taux de décroissance pour un problème non linéaire.

Toutefois, ces inégalités ne donnent pas de résultat lorsque la décroissance de l'énergie n'est pas assez forte (au moins polynomiale).

A l'aide de *fonctions poids*, on généralise ces inégalités intégrales dans plusieurs directions (Lemmes 2.1 à 2.7). Ces nouvelles inégalités permettent d'estimer la vitesse de convergence vers zéro, même lorsque celle-ci est arbitrairement lente. Elles seront très utiles dans la Partie 4, entre autres pour donner une estimation du taux de décroissance de l'énergie même lorsque le feedback n'a pas une croissance polynomiale en zéro (hypothèse qui permet dans de nombreux cas de montrer que l'énergie décroît de manière polynomiale vers zéro).





## RAPPEL DE QUELQUES INÉGALITÉS INTÉGRALES FONDAMENTALES

On commence par rappeler les inégalités utilisées par A. Haraux et V. Komornik, dont on se servira dans les Parties 2 et 3.

### 1. Un résultat de décroissance exponentielle

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs linéaires sont basés sur le lemme suivant, utilisé par A. Haraux [27] :

LEMME 1.1. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Soit  $\omega > 0$ . Supposons que  $E$  satisfait la relation*

$$(1.1) \quad \forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(t).$$

*Alors  $E$  vérifie l'estimation de décroissance suivante*

$$(1.2) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0) e^{1-\omega t}.$$

**Remarques.** 1. Comme  $E$  est décroissante, (1.2) est vraie si  $t \leq \frac{1}{\omega}$ . Il suffit donc de démontrer que (1.2) est vraie pour  $t \geq \frac{1}{\omega}$ .

2. L'estimation (1.2) est optimale (voir [44]).

*Preuve du Lemme 1.1.* Soit

$$h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau) d\tau.$$

$h$  est bien définie, décroissante, positive et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . D'après (1.1),  $h$  satisfait l'inéquation différentielle suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad h'(t) + \omega h(t) \leq 0.$$

Soit

$$(1.3) \quad T_0 := \sup\{t, h(t) > 0\}.$$

( $T_0$  vaut éventuellement  $+\infty$ .) Pour tout  $t < T_0$ , on a

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq -\omega,$$

donc

$$(1.4) \quad \forall 0 \leq t < T_0, \quad h(t) \leq h(0) e^{-\omega t} \leq \frac{1}{\omega} E(0) e^{-\omega t}.$$

Notons que, puisque  $h(t) = 0$  si  $t \geq T_0$ , cette relation reste vraie pour tout  $t$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $E$  est positive et décroissante, on déduit de la définition de  $h$  et de l'estimation précédente que

$$\forall t \geq \varepsilon, \quad E(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t E(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} h(t-\varepsilon) \leq \frac{1}{\omega \varepsilon} E(0) e^{\omega \varepsilon} e^{-\omega t}.$$

La meilleure constante  $\varepsilon$ , c'est-à-dire celle qui donne la plus petite valeur à la quantité  $\frac{e^{\omega \varepsilon}}{\omega \varepsilon}$ , est  $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$ . Ainsi

$$\forall t \geq \frac{1}{\omega}, \quad E(t) \leq E(0) e^{1-\omega t}.$$

Ceci achève la preuve du lemme 1.1. ■

## 2. Un résultat de décroissance polynomiale

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs non linéaires sont basés sur le lemme suivant, dû à V. Komornik [44] :

**LEMME 1.2.** *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe deux constantes  $\sigma$  et  $\omega$  strictement positives telles que  $E$  satisfait la relation*

$$(1.5) \quad \forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(0)^\sigma E(t).$$

Alors  $E$  vérifie l'estimation de décroissance suivante

$$(1.6) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0) \left( \frac{1+\sigma}{1+\omega \sigma t} \right)^{1/\sigma}.$$

**Remarques.** 1. Cette estimation est en fait optimale (voir [44]).

2. Comme  $E$  est décroissante, il suffit de démontrer que (1.6) est vraie pour  $t \geq \frac{1}{\omega}$ .

*Preuve du Lemme 1.2.* L'idée directrice est la même que précédemment. Par homogénéité, on peut supposer que  $E(0) = 1$ .

Soit

$$h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau.$$

$h$  est bien définie, décroissante, positive et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . D'après (1.5),  $h$  satisfait l'inéquation différentielle suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad -h' \geq (\omega h)^{1+\sigma}.$$

Soit  $T_0$  défini par (1.3). Alors

$$\forall t \in [0, T_0[, \quad (h^{-\sigma})' \geq \sigma \omega^{1+\sigma}.$$

On intègre cette relation pour obtenir que

$$\forall 0 \leq t < T_0, \quad h(t)^{-\sigma} - h(0)^{-\sigma} \geq \sigma \omega^{1+\sigma} t,$$

donc

$$(1.7) \quad \forall 0 \leq t < T_0, \quad h(t) \leq \left( h(0)^{-\sigma} + \sigma \omega^{1+\sigma} t \right)^{-1/\sigma},$$

Notons que cette relation reste évidemment vraie si  $t$  est supérieur ou égal à  $T_0$ . Comme

$$h(0) \leq \frac{1}{\omega} E(0)^{1+\sigma} = \frac{1}{\omega},$$

on peut majorer le second membre de (1.7) par

$$\left( h(0)^{-\sigma} + \sigma \omega^{1+\sigma} t \right)^{-1/\sigma} \leq \frac{1}{\omega} (1 + \omega \sigma t)^{-1/\sigma}.$$

Comme  $E$  est positive et décroissante, on déduit de la définition de  $h$  et de l'estimation précédente que

$$\begin{aligned} \forall s \geq 0, \quad E\left(\frac{1}{\omega} + (\sigma + 1)s\right)^{\sigma+1} &\leq \frac{1}{\frac{1}{\omega} + \sigma s} \int_s^{\frac{1}{\omega} + (\sigma+1)s} E(\tau)^{\sigma+1} d\tau \\ &\leq \frac{\omega}{1 + \omega \sigma s} h(s) \leq \frac{\omega}{1 + \omega \sigma s} \frac{1}{\omega} (1 + \omega \sigma s)^{-1/\sigma}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall s \geq 0, \quad E\left(\frac{1}{\omega} + (\sigma + 1)s\right) \leq \frac{1}{(1 + \omega \sigma s)^{1/\sigma}}.$$

Ceci donne l'estimation (1.6) en choisissant  $t := \frac{1}{\omega} + (\sigma + 1)s$ . ■

On note que si  $E$  est une fonction positive qui décroît "lentement" vers zéro, par exemple

$$E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad E(t) = \frac{1}{\ln(2+t)},$$

alors  $E$  ne peut pas satisfaire une des deux inégalités intégrales précédentes, car ces deux inégalités n'ont une chance de s'appliquer que si  $E$  est intégrable. C'est dans cette optique qu'on cherche à généraliser les Lemmes 1.1 et 1.2 : trouver des inégalités intégrales convenables qui permettent de donner une estimation de la vitesse de convergence vers zéro, même si celle-ci est arbitrairement lente.



## DE NOUVELLES INÉGALITÉS INTÉGRALES

### 1. Premiers résultats

#### 1.1. L'inégalité intégrale de base.

L'inégalité intégrale suivante permet de donner une estimation du taux de décroissance vers zéro même si celui-ci est faible. Elle est basée sur le Lemme 1.1 et sur un changement de variable :

LEMME 2.1. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction strictement croissante de classe  $C^1$  telle que*

$$(2.1) \quad \phi(0) = 0 \text{ et } \phi(t) \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

*Supposons qu'il existe  $\sigma \geq 0$  et  $\omega > 0$  tels que*

$$(2.2) \quad \forall S \geq 0, \int_S^{+\infty} E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E(0)^\sigma E(S).$$

*Alors  $E$  vérifie l'estimation de décroissance suivante :*

$$(2.3) \quad \text{si } \sigma = 0, \text{ alors } E(t) \leq E(0)e^{1-\omega\phi(t)}, \forall t \geq 0,$$

$$(2.4) \quad \text{si } \sigma > 0, \text{ alors } E(t) \leq E(0) \left( \frac{1+\sigma}{1+\omega\sigma\phi(t)} \right)^{1/\sigma}, \forall t \geq 0.$$

**Remarques.** 1. Le Lemme 2.1 est une généralisation des Lemmes 1.1 et 1.2 : il suffit de choisir  $\phi(t) = t$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Le Lemme 2.1 permet de donner une estimation de la vitesse de convergence vers zéro même si  $E$  converge très lentement vers zéro, la convergence de l'intégrale étant alors assurée par l'adjonction de la fonction  $\phi'$  convenablement choisie : par exemple, si  $E$  vérifie (2.2) avec

$$\phi(t) = \ln(\ln(3+t)) - \ln(\ln 3) \text{ et } \sigma = 0,$$

ou avec

$$\phi(t) = \ln(3+t) - \ln 3 \text{ et } \sigma > 0,$$

alors le Lemme 2.1 montre que  $E$  décroît de manière logarithmique : il existe  $c > 0$  tel que

$$E(t) \leq \frac{c E(0)}{(\ln(3+t))^\gamma},$$

avec  $\gamma = \omega$  si  $\sigma = 0$  et  $\gamma = 1/\sigma$  sinon.

3. Si  $\phi(0) \neq 0$ , il suffit de remplacer  $\phi(t)$  par  $\phi(t) - \phi(0)$  dans (2. 3) et (2. 4).

*Preuve du Lemme 2.1.* Par hypothèse,  $\phi$  définit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On note  $\phi^{-1}$  sa fonction inverse. Soit

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(\tau) = E(\phi^{-1}(\tau)).$$

$f$  est décroissante et  $f(0) = E(0)$ . Grâce au changement de variable défini par  $\tau = \phi(t)$ , on a

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq S < T < \infty : \int_{\phi(S)}^{\phi(T)} f(\tau)^{1+\sigma} d\tau &= \int_{\phi(S)}^{\phi(T)} E(\phi^{-1}(\tau))^{1+\sigma} d\tau \\ &= \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E(0)^\sigma E(S) = \frac{1}{\omega} f(0)^\sigma f(\phi(S)). \end{aligned}$$

Notons  $s := \phi(S)$ . En faisant tendre  $T$  vers l'infini, on voit que  $f$  vérifie :

$$\forall s \geq 0, \quad \int_s^{+\infty} f(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq \frac{1}{\omega} f(0)^\sigma f(s).$$

On applique alors le résultat du Lemme 1.1 si  $\sigma = 0$  et du Lemme 1.2 si  $\sigma > 0$  pour en déduire que

$$\text{si } \sigma = 0, \quad f(s) \leq f(0)e^{1-\omega s}, \quad \forall s \geq 0,$$

ou

$$\text{si } \sigma > 0, \quad f(s) \leq f(0) \left( \frac{1+\sigma}{1+\omega\sigma s} \right)^{1/\sigma}, \quad \forall s \geq 0.$$

(2. 3) and (2. 4) découlent du fait que  $E(t) = f(\phi(t))$ . ■

### 1.2. Conséquence.

On déduit du Lemme 2.1 le résultat suivant :

LEMME 2.2. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe  $\sigma > 0$ ,  $\sigma' \geq 0$  et  $c > 0$  tels que :*

$$(2. 5) \quad \forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq c \frac{E(0)^\sigma E(t)}{(1+t)^{\sigma'}}.$$

Alors il existe une constante  $C$  strictement positive telle que

$$(2. 6) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0) \frac{C}{(1+t)^{(1+\sigma')/\sigma}}.$$

*Preuve du Lemme 2.2.* Par homogénéité, on peut supposer  $E(0) = 1$ . Soit

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad g(t) = \frac{E(t)}{(1+t)^{\sigma'}}.$$

$g$  est décroissante et  $g(0) = 1$ . De plus  $g$  satisfait l'inéquation suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} g(\tau)^{1+\sigma} (1+\tau)^{\sigma'(1+\sigma)} d\tau \leq cg(t).$$

Alors on peut appliquer le Lemme 2.1 avec

$$\phi(t) = (1+t)^{\sigma'(1+\sigma)+1} - 1$$

et on en déduit qu'il existe une constante  $C > 0$  (qu'on peut aisément calculer) telle que

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{(\sigma'(1+\sigma)+1)/\sigma}} = \frac{C}{(1+t)^{\sigma'}(1+t)^{(1+\sigma')/\sigma}},$$

ce qui implique (2. 6). ■

Toutes les estimations précédentes portent sur des fonctions qui satisfont une certaine inéquation différentielle dont le second membre est constitué d'un seul terme. On va regarder ce qu'on obtient lorsque le second membre est constitué d'une somme de deux termes :

## 2. Perturbation du second membre par une fonction exponentielle

Le premier résultat est un résultat de décroissance exponentielle. On va en donner deux preuves : la première est basée sur la méthode utilisée pour démontrer les résultats précédents. La deuxième repose sur l'analyse qualitative de l'effet de la perturbation.

LEMME 2.3. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Soit  $\gamma \geq 1$ . Supposons qu'il existe  $\omega > 0$  tel que  $E$  satisfait*

$$(2. 7) \quad \forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^2 d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(t)^2 + \frac{1}{\omega} E(0)E(t)e^{-t^\gamma}.$$

Alors il existe une constante  $C_\gamma > 0$  telle que  $E$  vérifie l'estimation de décroissance suivante :

$$(2. 8) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq C_\gamma E(0) e^{-\omega(\gamma)t} \text{ avec } \omega(\gamma) := \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega}{\gamma + \omega}.$$

**Remarque.** En fait, l'estimation donnée par (2. 8) sur le taux de décroissance de  $E$  n'est pas optimale : si  $E$  satisfait (2. 7), on voit facilement à partir de la première preuve de (2. 8) que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_{\gamma,\varepsilon} > 0$  telle que

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq C_{\gamma,\varepsilon} E(0) e^{-\omega_\varepsilon t} \text{ avec } \omega_\varepsilon = \frac{\omega}{2} - \varepsilon.$$

*Première preuve du Lemme 2.3.* Soit

$$G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad G(t) := E(t)^2 + E(0)E(t)e^{-t^\gamma}.$$

$G$  est décroissante, positive et vérifie

$$\begin{aligned} \forall t \geq 1, \quad \int_t^{+\infty} G(\tau) d\tau &\leq \frac{1}{\omega} G(t) + E(0)E(t) \int_t^{+\infty} e^{-\tau^\gamma} d\tau \\ &\leq \frac{1}{\omega} G(t) + E(0)E(t) \int_{t^\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-y} dy \\ &\leq \frac{1}{\omega} G(t) + \frac{1}{\gamma} E(0)E(t)e^{-t^\gamma} \leq \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\gamma}\right) G(t) = \frac{\gamma + \omega}{\gamma\omega} G(t), \end{aligned}$$

car  $\gamma \geq 1$  et  $t \geq 1$ . Alors on déduit du Lemme 1.1 que :

$$\forall t \geq 1, \quad G(t) \leq G(1) e^{1 - \frac{\gamma\omega}{\gamma + \omega}(t-1)}.$$



Donc

$$\forall t \geq 1, \quad E(t) \leq C_\gamma E(1) e^{-\omega(\gamma)t} \leq C_\gamma E(0) e^{-\omega(\gamma)t}. \blacksquare$$

*Deuxième preuve du Lemme 2.3.* On raisonne dans le cas  $\gamma = 2$ ; l'étude est identique pour  $\gamma > 1$ . Cette preuve est basée sur une étude qualitative de l'influence des deux termes  $E(t)^2$  et  $E(t)e^{-t^2}$  sur la décroissance de  $E$ . Cette preuve donne une moins bonne estimation du taux de décroissance de  $E$  mais permet de mieux comprendre les interactions entre les effets des deux termes.

Commençons par remarquer que si

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^2 d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(t)^2,$$

alors, d'après le Lemme 1.1,  $E$  décroît exponentiellement :

$$E(t) \leq c E(0) e^{-\frac{\omega}{2}t}.$$

D'autre part, si  $E$  vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^2 d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(0) E(t) e^{-t^2},$$

alors on peut raisonner comme pour le Lemme 2.1 : soit

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) := E(t) e^{-t^2}$$

et

$$\forall t \geq 0, \quad \phi(t) := \int_1^t e^{2\tau^2} d\tau = \int_0^{t^2} e^{2u} \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

On voit que

$$\forall t \geq 1, \quad \phi(t) \geq \frac{e^{2t^2} - 1}{4t}.$$

il est clair que  $g$  est décroissante et vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} g(\tau)^2 \phi'(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\omega} g(0) g(t).$$

On déduit du Lemme 2.1 appliqué, avec  $\sigma = 1$ , et de la minoration de  $\phi$ , que :

$$\forall t \geq 1, \quad g(t) \leq \frac{cg(0)}{1 + \phi(t)} \leq cg(0) t e^{-2t^2}.$$

Ainsi  $E$  satisfait

$$\forall t \geq 1, \quad E(t) \leq cE(0) t e^{-t^2},$$

donc décroît bien plus vite que exponentiellement.

Supposons à présent que  $E$  satisfait

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^2 d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(t)^2 + \frac{1}{\omega} E(0) E(t) e^{-t^2}.$$

Soit  $\lambda > 0$ . On considère

$$(2.9) \quad E_1 : t \mapsto E(0) e^{-t^2} \quad \text{et} \quad E_2 : t \mapsto \sqrt{e} E(0) e^\lambda e^{-\frac{\omega}{4}t}.$$

On va montrer que si  $\lambda$  est assez grand, alors

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E_2(t).$$

On choisit  $\lambda$  tel que

$$4\lambda > \frac{1}{16}\omega^2.$$

En particulier, cela implique que le discriminant du polynôme de second degré  $t^2 - \frac{\omega}{4}t + \frac{1}{2} + \lambda$  est strictement négatif, donc

$$\forall t \geq 0, \quad -t^2 < \frac{1}{2} + \lambda - \frac{\omega}{4}t,$$

et on déduit que

$$\forall t \geq 0, \quad E_1(t) < E_2(t).$$

Comme  $E(0) = E_1(0)$ ,

$$E(t) < E_2(t) \text{ si } t \text{ est assez petit.}$$

Supposons qu'il existe  $t'_2 > 0$  tel que  $E(t'_2) = E_2(t'_2)$ . Soit

$$t_2 := \text{Min} \{t : E(t) = E_2(t)\} \text{ et } t_1 := \text{Max} \{t : t \leq t_2 \text{ et } E(t) \leq E_1(t)\}.$$

$t_1$  et  $t_2$  sont bien définis par compacité et, par construction, on a

$$\begin{aligned} E(t_1) &= E_1(t_1) \quad \text{et} \quad E(t_2) = E_2(t_2), \\ \forall t \in [t_1, t_2], \quad E_1(t) &\leq E(t) \leq E_2(t). \end{aligned}$$

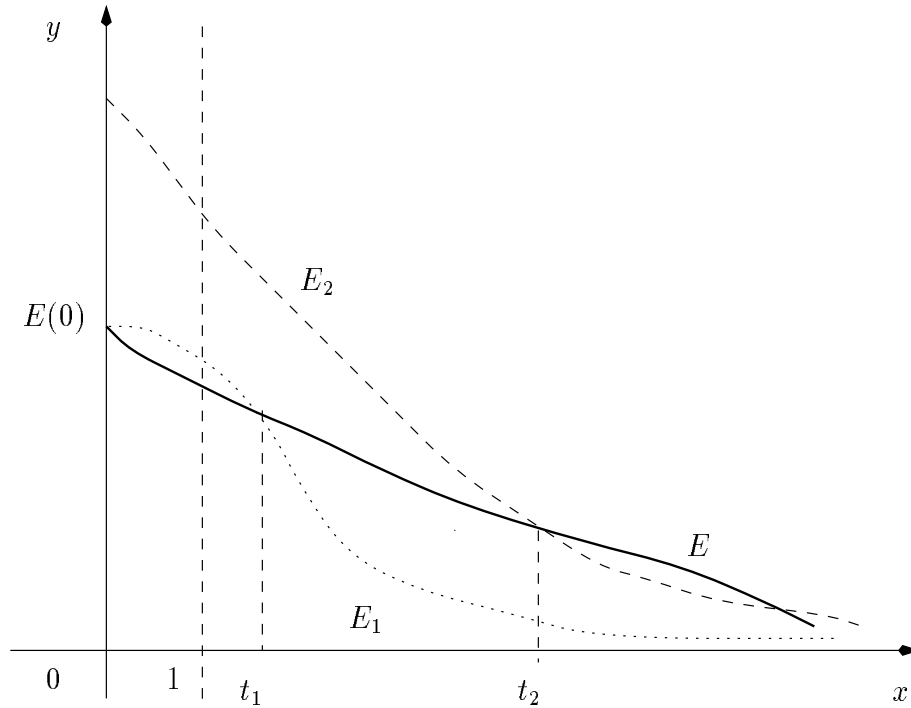


Fig. 1 : Allure de  $E_1$ ,  $E$  et  $E_2$ .

Comme  $E$  est décroissante,  $E(t_1) \geq E(t_2)$ . Cela implique que

$$e^{-t_1^2} \geq \sqrt{e} e^\lambda e^{-t_2 \frac{\omega}{4}},$$

donc

$$t_2 \geq \frac{4}{\omega} \left( t_1^2 + \frac{1}{2} + \lambda \right).$$

On vérifie facilement, à partir du choix de  $\lambda$  que

$$(2. 10) \quad \forall t \geq 0, \quad t^2 + \lambda > \frac{\omega}{4} t.$$

Ainsi, on a l'estimation

$$t_2 > t_1 + \frac{2}{\omega}.$$

D'autre part, on déduit de (2. 7) que

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^2 d\tau \leq \frac{2}{\omega} E(t)^2.$$

Les calculs effectués pour prouver le Lemme 1.1 montrent que

$$\forall t \in [t_1 + \frac{2}{\omega}, t_2], \quad E(t)^2 \leq E(t_1)^2 e^{1 - \frac{\omega}{2}(t-t_1)}.$$

En particulier

$$E_2(t_2) = E(t_2) \leq E(t_1) \sqrt{e} e^{-(t_2-t_1)\frac{\omega}{4}} = E_1(t_1) \sqrt{e} e^{-(t_2-t_1)\frac{\omega}{4}} :$$

Ceci implique que

$$\sqrt{e} E(0) e^\lambda e^{-\frac{\omega}{4}t_2} \leq E(0) e^{-t_1^2} \sqrt{e} e^{-(t_2-t_1)\frac{\omega}{4}},$$

donc

$$e^\lambda \leq e^{-t_1^2} e^{\frac{\omega}{4}t_1},$$

ce qui équivaut à

$$\lambda \leq -t_1^2 + \frac{\omega}{4}t_1.$$

Mais ceci est impossible d'après (2. 10). ■

On voit que l'exposant critique est  $\gamma = 1$ . Il semble naturel de penser que lorsque  $\gamma$  sera strictement inférieur à 1, c'est le terme  $E(t)e^{-t^\gamma}$  qui aura un effet prédominant sur l'autre. En effet, on a le résultat suivant :

LEMME 2.4. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Soit  $\gamma \in ]0, 1[$ . Supposons qu'il existe  $\omega > 0$  tel que  $E$  satisfait*

$$(2. 11) \quad \forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^2 d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(t)^2 + \frac{1}{\omega} E(0) E(t) e^{-t^\gamma}.$$

*Alors il existe  $c > 0$ ,  $C_\gamma > 0$  tels que  $E$  vérifie l'estimation de décroissance suivante :*

$$(2. 12) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t)^2 \leq C_\gamma E(0) e^{-ct^\gamma}.$$

Preuve du Lemme 2.4. Soit

$$G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad G(t) := E(t)^2 + E(0)E(t)e^{-t^\gamma}.$$

$G$  est décroissante, positive et vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} G(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\omega} G(t) + E(0)E(t) \int_t^{+\infty} e^{-\tau^\gamma} d\tau.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} e^{-\tau^\gamma} d\tau &= \int_{t^\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-y} dy \\ &= \left[ -\frac{1}{\gamma} y^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{-y} \right]_{t^\gamma}^{+\infty} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \int_{t^\gamma}^{+\infty} y^{\frac{1}{\gamma}-2} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\gamma} t^{1-\gamma} e^{-t^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \int_{t^\gamma}^{+\infty} y^{\frac{1}{\gamma}-2} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\gamma} t^{1-\gamma} e^{-t^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) t^{1-2\gamma} e^{-t^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \left( \frac{1}{\gamma} - 2 \right) \int_{t^\gamma}^{+\infty} y^{\frac{1}{\gamma}-3} e^{-y} dy. \end{aligned}$$

Par une récurrence évidente, on voit qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$\int_t^{+\infty} e^{-\tau^\gamma} d\tau \leq ct^{1-\gamma} e^{-t^\gamma}$$

On en déduit alors que

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} G(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\omega} G(t) + ct^{1-\gamma} G(t).$$

Soit

$$\phi(t) := \int_0^t \frac{d\tau}{\frac{1}{\omega} + c\tau^{1-\gamma}}.$$

On remarque que la divergence de l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1-\gamma}}$$

assure que  $\phi(t) \longrightarrow +\infty$  quand  $t \longrightarrow +\infty$ . De plus, comme on intègre des fonctions positives et que

$$\frac{1}{\frac{1}{\omega} + c\tau^{1-\gamma}} \sim \frac{1}{c\tau^{1-\gamma}} \text{ quand } t \longrightarrow +\infty,$$

on obtient par un résultat classique sur les équivalents de sommes partielles que

$$\phi(t) \sim \int_1^t \frac{d\tau}{c\tau^{1-\gamma}} \sim \frac{1}{c\gamma} \tau^\gamma \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Donc il existe  $c' > 0$  tel que

$$\forall t \geq 1, \quad \phi(t) \geq c' t^\gamma.$$

Soit

$$\forall t \geq 0, \quad h(t) := \int_t^{+\infty} G(\tau) d\tau.$$

$h$  est bien définie, de classe  $\mathcal{C}^1$ , décroissante, et vérifie :

$$\forall t \geq 0, \quad h(t) \leq -\frac{h'(t)}{\phi'(t)}.$$

Soit  $T_0 := \sup \{t \geq 0, h(t) > 0\}$ . Alors

$$\forall t \in [0, T_0[, \quad \frac{h'(t)}{h(t)} \leq -\phi'(t),$$

donc par intégration

$$\forall t \in [0, T_0[, \quad h(t) \leq h(0)e^{-\phi(t)}.$$

Cette relation reste évidemment vraie si  $t \geq T_0$ . Comme  $G$  est décroissante

$$\forall t \geq 1, G(t+1) \leq \int_t^{t+1} G(\tau) d\tau \leq h(t) \leq h(0)e^{-c't^\gamma}.$$

On en déduit le résultat en remarquant que

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq \sqrt{G(t)}. \blacksquare$$

Le résultat suivant est un résultat de décroissance polynomiale :

### 3. Perturbation du second membre par une fonction polynomiale

LEMME 2.5. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe  $\sigma > 0$ ,  $\sigma' > 0$  et  $c > 0$  tels que :*

$$(2.13) \quad \forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq cE(t)^{1+\sigma} + c\frac{1}{(1+t)^{\sigma'}}E(0)^\sigma E(t).$$

Alors il existe  $C > 0$  telle que

$$(2.14) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{(1+\sigma')/\sigma}}E(0).$$

*Preuve du Lemme 2.5.* L'idée principale de la démonstration est que le terme  $E(t)^{1+\sigma}$  a un effet négligeable par rapport au second terme sur la décroissance de  $E$ . En effet, sans le second terme, (2.13) implique que  $E$  décroît exponentiellement (d'après le Lemme 1.1), tandis que sans le premier terme, (2.13) implique que  $E$  décroît seulement polynomialement (d'après le Lemme 2.2).

On va prouver (2.14) par récurrence. Par homogénéité, on peut supposer que  $E(0) = 1$ . On note  $C$  diverses constantes qui dépendent de  $\sigma$ ,  $\sigma'$  et de  $c$ .

D'abord, on déduit de (2.13) que

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq CE(t).$$

Alors le Lemme 1.2 assure que

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{1/\sigma}}.$$

On réinjecte cette estimation dans (2. 13) pour en déduire que  $E$  vérifie

$$\int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq C \frac{E(t)}{1+t} + C \frac{E(t)}{(1+t)^{\sigma'}}.$$

Soit  $\sigma_1 = \inf\{1, \sigma'\}$ . Alors

$$\int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq C \frac{E(t)}{(1+t)^{\sigma_1}},$$

et d'après le Lemme 2.2 :

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{(1+\sigma_1)/\sigma}}.$$

Si  $\sigma' \leq 1$ , on obtient (2. 14). Sinon

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{2/\sigma}},$$

et on recommence jusqu'à obtenir l'exposant voulu : soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma \in [n, n+1]$ . On prouve par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ ,  $E$  satisfait :

$$(2. 15) \quad \forall t \geq 0, E(t) \leq \frac{C_k}{(1+t)^{(1+k)/\sigma}}.$$

On a prouvé (2. 15) pour  $k = 0$  et pour  $k = 1$  si  $n \geq 1$ . Supposons que  $n \geq 2$  et que (2. 15) est vraie pour un certain  $k < n$ . Alors on utilise (2. 15) pour déduire de (2. 13) que  $E$  satisfait :

$$\forall t \geq 0, \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq C \frac{E(t)}{(1+t)^{1+k}} + C \frac{E(t)}{(1+t)^{\sigma'}}.$$

Comme  $1+k \leq n \leq \sigma'$ , on a

$$\forall t \geq 0, \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq C \frac{E(t)}{(1+t)^{1+k}},$$

et on déduit du Lemme 2.2 que

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq \frac{C_k}{(1+t)^{(2+k)/\sigma}}.$$

Cela montre que

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq \frac{C_k}{(1+t)^{(n+1)/\sigma}},$$

et avec le même argument :

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq \frac{C_k}{(1+t)^{(\sigma'+1)/\sigma}}. \blacksquare$$

#### 4. Généralisation

Par changement de variable, on obtient les deux résultats suivants:

LEMME 2.6. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que*

$$(2.16) \quad \phi(0) = 0 \text{ et } \phi(t) \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

*Soit  $\gamma \geq 1$ . Supposons qu'il existe  $\omega > 0$  tel que  $E$  satisfait*

$$(2.17) \quad \forall t \geq 0, \int_t^{+\infty} E(\tau)^2 \phi'(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(t)^2 + \frac{1}{\omega} E(0) E(t) e^{-\phi(t)\gamma}.$$

*Alors il existe une constante  $C_\gamma > 0$  telle que  $E$  vérifie l'estimation de décroissance suivante :*

$$(2.18) \quad \forall t \geq 0, E(t) \leq C_\gamma E(0) e^{-\omega(\gamma)\phi(t)} \text{ avec } \omega(\gamma) := \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega}{\gamma + \omega}.$$

LEMME 2.7. *Soit  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue décroissante. Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que*

$$(2.19) \quad \phi(0) = 0 \text{ et } \phi(t) \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

*Supposons qu'il existe  $\sigma > 0$ ,  $\sigma' > 0$  et  $c > 0$  tels que*

$$(2.20) \quad \forall S \geq 0, \int_S^{+\infty} E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq cE(S)^{1+\sigma} + c \frac{1}{(1 + \phi(S))^{\sigma'}} E(0)^\sigma E(S).$$

*Alors il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $\sigma$ ,  $\sigma'$  et  $c$  telle que*

$$(2.21) \quad \forall t \geq 0, E(t) \leq \frac{C}{(1 + \phi(t))^{(1+\sigma')/\sigma}} E(0).$$

*Preuves des Lemmes 2.6 et 2.7. il suffit de considérer*

$$f(\tau) = E(\phi^{-1}(\tau))$$

et d'appliquer à  $f$  les résultats des Lemmes 2.3 et 2.5. ■

Partie 2

**STABILISATION UNIFORME  
DE L'ÉQUATION DES ONDES  
DANS DES DOMAINES  
PRESQUE ÉTOILÉS**





## INTRODUCTION

On considère le système de l'équation des ondes dans un domaine borné  $\Omega$  avec la condition de Dirichlet sur une partie  $\Gamma_0$  du bord et la condition de Neumann sur l'autre partie  $\Gamma_1$  du bord. Ce système est soumis à un terme d'amortissement exercé sur la frontière, et représenté par une fonction linéaire de la vitesse :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u + au + \ell u' = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{cases}$$

où  $a$  et  $\ell$  sont des fonctions continues positives. On définit l'énergie de  $u$  par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'^2 + |\nabla u|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} au^2 ds.$$

On s'intéresse au problème de décroissance exponentielle de l'énergie des solutions, étudié par de nombreux auteurs depuis les travaux de D. L. Russell [69] : sous quelles conditions géométriques sur le domaine et sous quelles conditions sur  $a$  et  $\ell$  peut-on montrer que l'énergie décroît exponentiellement, et si possible donner une estimation explicite du taux de décroissance?

Deux méthodes complémentaires permettent de donner des réponses à ce problème.

Les *techniques d'analyse micro-locale* développées par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [8] donnent une condition nécessaire et suffisante portant sur la géométrie du domaine : il existe deux constantes strictement positives  $C$  et  $\omega$  telle que

$$(3.1) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq Ce^{-\omega t},$$

si la "condition géométrique des rayons optiques" est satisfaite. Cette condition est la suivante : il existe  $T > 0$  et  $\alpha > 0$  tel que tout rayon issu du bord et soumis aux lois de la réflexion de l'optique géométrique traverse la zone  $\{x \in \Gamma_1 : \ell(x) \geq \alpha\} \times [0, T]$ .

Cependant, ce résultat ne s'applique que si le domaine est assez régulier, et ne donne pas d'estimation sur les constantes  $C$  et  $\omega$ , qui permettent de mesurer le coût d'observabilité du système.

La *méthode des multiplicateurs*, développée par exemple par J. E. Lagnese [47], J.-L. Lions [54] ou V. Komornik [44], permet d'obtenir (3. 1) de manière élémentaire et avec des constantes explicites  $C$  et  $\omega$  si le domaine  $\Omega$  est étoilé, et avec certaines constantes si  $\Omega$  vérifie des hypothèses géométriques un peu plus générales. Notons que cette méthode fournit parfois des estimations optimales, notamment lorsque le domaine  $\Omega$  est une boule et que  $a$  et  $\ell$  sont bien choisies voir V. Komornik [44]).

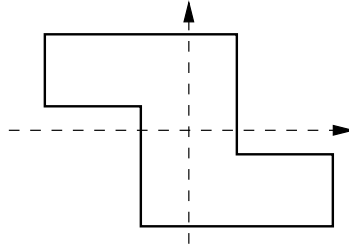
I. Lasiecka et R. Triggiani [52] ont obtenu des résultats intermédiaires en combinant ces deux méthodes : à l'aide de résultats de régularité cachée, ils ont prouvé (3. 1) sous des hypothèses géométriques très faibles et en simplifiant les preuves de [8], mais sans obtenir de constantes explicites. M. A. Horn [34] a obtenu des résultats semblables sur le système de l'élasticité.

On se propose d'affaiblir les conditions géométriques sous lesquelles on peut montrer la décroissance exponentielle de l'énergie à l'aide de la méthode des multiplicateurs. Pour cela, on introduit de *nouveaux multiplicateurs*, mieux adaptés à la géométrie du domaine, à partir de notions introduites par J. E. Lagnese [47] et B. V. Kapitov [41]. On définit une nouvelle classe de domaines :  $\Omega$  est *presque étoilé* s'il existe  $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$  vérifiant

$$(3. 2) \quad \begin{cases} \Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \lambda_1(\phi) > 0, \\ \partial_\nu\phi \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \partial_\nu\phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

où  $\lambda_1(\phi) := \inf\{\lambda_1(x), x \in \Omega\}$ ,  $\lambda_1(x)$  désignant la plus petite valeur propre de la matrice carrée symétrique réelle  $D^2\phi(x)$ . (En fait, on donnera une définition un peu plus générale des domaines presque étoilés, mais on étudiera surtout les fonctions  $\phi$  qui vérifient (3. 2).) En particulier, tout domaine étoilé est presque étoilé : si  $\Omega$  est étoilé par rapport au point  $x^0$ , il suffit de choisir  $\phi(x) = \frac{1}{2N}|x - x^0|^2$ .

A l'aide de techniques d'analyse complexe, on construit de tels domaines : par exemple, le domaine représenté ci-dessous est presque étoilé sans être étoilé:



Ensuite, on montre que, si  $\Omega$  est presque étoilé, l'énergie décroît exponentiellement, avec un taux de décroissance explicite dépendant de la fonction  $\phi$  qui satisfait (3. 2) :

$$(3. 3) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega(\phi)t} \text{ avec } \omega(\phi) := \frac{\inf\{\frac{1}{3}, \lambda_1(\phi)\}}{2\|\nabla\phi\|_\infty}.$$

Enfin, on améliore des résultats antérieurs de stabilisation uniforme sur certains domaines étoilés particuliers : les polygones réguliers. Pour ces domaines, on détermine toute une famille de multiplicateurs  $\phi$  satisfaisant les conditions requises pour l'obtention de (3. 3). On améliore alors l'estimation de décroissance exponentielle en optimisant le taux de décroissance  $\omega(\phi)$  sur la famille des multiplicateurs admissibles. Ceci donne lieu à l'étude d'un problème d'optimisation non classique. A l'aide de techniques d'analyse complexe, on construit pour chaque polygone régulier des multiplicateurs admissibles donnant une meilleure estimation du taux de décroissance de l'énergie. Par exemple pour le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon  $R$ , on améliore l'estimation de L. R. Tcheugoué Tébou [71]

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-t/3R},$$

pour obtenir, de manière théorique,

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-t/2,5R},$$

estimation que l'on améliore par des calculs numériques pour obtenir finalement

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-t/2,36R}.$$

On étudie ensuite de manière semblable le cas des polygones réguliers.

Cette méthode est présentée dans le cadre bien connu de l'équation des ondes, puis dans celui des équations de Maxwell. Toutefois, on peut aussi l'appliquer à des problèmes que les techniques d'analyse micro-locale ne permettent pas encore d'étudier, par exemple le problème de stabilisation non linéaire des plaques de Kirchhoff dans des domaines non étoilés. Elle permet aussi d'étendre les résultats de décroissance exponentielle de l'énergie de F. Alabau et V. Komornik [4], obtenus pour le système général de l'élasticité lorsque le domaine est une boule, à des domaines "proches" (en un certain sens) d'une boule (voir aussi les travaux de M. A. Horn [34] pour l'étude du système de l'élasticité pour les matériaux homogènes isotropes).

Enfin, on utilisera cette méthode de multiplicateurs adaptés dans le Chapitre 9 pour répondre à une question soulevée par E. Zuazua concernant la stabilisation par un feedback localement distribué de l'équation des ondes avec la condition de Neumann au bord : à l'aide d'une méthode de multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu [56], on montre que l'énergie décroît exponentiellement même si le terme d'amortissement ne s'exerce pas sur un voisinage de tout le bord du domaine. Avec des techniques d'analyse complexe, on donne des exemples explicites de géométries admissibles.



## DOMAINES PRESQUE ÉTOILÉS : DÉFINITIONS ET EXEMPLES

### 1. Définition

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition du bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ . On note  $\nu$  le vecteur normal extérieur à  $\Gamma$  et  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^N$ .

DÉFINITION .  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  est un domaine presque étoilé s'il existe  $\phi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  telle que :

$$(4. 1) \quad \text{Sup} \{ \Delta\phi(x) - 2\lambda_1(x), x \in \Omega \} < \text{Inf} \{ \Delta\phi(x), x \in \Omega \}$$

$$(4. 2) \quad \partial_\nu \phi \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0,$$

$$(4. 3) \quad \partial_\nu \phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

où  $\lambda_1(x)$  désigne la plus petite valeur propre de la matrice carrée symétrique réelle  $D^2\phi(x)$ .

En particulier,  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  est presque étoilé s'il existe  $\phi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  telle que :

$$(4. 4) \quad \Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega,$$

$$(4. 5) \quad \lambda_1(\phi) > 0,$$

$$(4. 6) \quad \partial_\nu \phi \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0,$$

$$(4. 7) \quad \partial_\nu \phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

où  $\lambda_1(\phi) := \inf_{x \in \Omega} \lambda_1(x)$ .

**Remarque.** J. E. Lagnese [47] et B. V. Kapitonov [41] ont introduit des notions semblables.

L'exemple le plus simple est le cas où  $\Omega$  est étoilé par rapport à  $x^0$ , et  $\Gamma_0 = \emptyset$ : alors la fonction

$$(4. 8) \quad \phi_0(x) = \frac{1}{2N} |x - x^0|^2$$

vérifie (4. 4)-(4. 7), donc  $(\Omega, \emptyset, \partial\Omega)$  est presque étoilé.

On commence par montrer que toute petite perturbation d'un domaine étoilé donne un domaine presque étoilé :

## 2. Perturbation d'un domaine étoilé

On va montrer que toute perturbation suffisamment petite de classe  $\mathcal{C}^2$  d'un domaine étoilé de classe  $\mathcal{C}^2$  donne un domaine presque étoilé.

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $\mathcal{C}^2$ , étoilé par rapport à  $x^1$ . On peut construire  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{x \in \mathbb{R}^N, f(x) = 0\} \\ |f(x)| &\longrightarrow +\infty \text{ quand } |x| \longrightarrow +\infty, \\ \forall x \in \Gamma, \nabla f(x) &\neq 0, \\ \forall x \in \Gamma, \left(x - x^1 |\nabla f(x)\right) &\geq 0, \end{aligned}$$

à l'aide de la distance signée à  $\Gamma$  par exemple.

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ . Considérons l'ensemble des points  $x_\varepsilon$  vérifiant

$$f(x_\varepsilon) + \varepsilon g(x_\varepsilon) = 0.$$

Soit

$$h : (x, \varepsilon) \mapsto f(x) + \varepsilon g(x).$$

$h$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$\nabla_x h(x, \varepsilon) = \nabla f(x) + \varepsilon \nabla g(x).$$

Ainsi, si  $x \in \Gamma$ ,  $h(x, 0) = 0$  et  $\nabla_x h(x, 0) \neq 0$ . On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites, et on en déduit que si  $\varepsilon$  est assez petit,  $x_\varepsilon$  est bien défini, et la fonction  $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon =: x(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de chaque point de  $\Gamma$ .

On appelle  $\Omega_\varepsilon$  le domaine borné ayant pour bord  $\Gamma_\varepsilon$  l'ensemble des points  $x_\varepsilon$ . Montrons que si  $\varepsilon$  est assez petit,  $(\Omega_\varepsilon, \emptyset, \Gamma_\varepsilon)$  est presque étoilé : soit  $c > 0$  et

$$\phi(x) = \frac{1}{2N} |x - x^1|^2 + \varepsilon c f(x).$$

Alors

$$\begin{aligned} \Delta \phi(x) &= 1 + \varepsilon c \Delta f(x), \\ \Delta \phi(x) - 2\lambda_1(x) &= 1 - \frac{2}{N} + \varepsilon c (\Delta f(x) - 2\lambda_1(f)(x)), \end{aligned}$$

où  $\lambda_1(f)(x)$  est la plus petite valeur propre de  $D^2 f(x)$ . Ainsi (4. 1) est satisfaite si  $\varepsilon c$  est assez petit.

On étudie ensuite la dérivée normale de  $\phi$  : si  $x_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} &\left( \nabla \phi(x_\varepsilon) | \nabla f(x_\varepsilon) + \varepsilon \nabla g(x_\varepsilon) \right) \\ &= \left( \frac{1}{N} (x_\varepsilon - x^1) + \varepsilon c \nabla f(x_\varepsilon) | \nabla f(x_\varepsilon) + \varepsilon \nabla g(x_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( x_\varepsilon - x^1 | \nabla f(x_\varepsilon) \right) + \varepsilon c \| \nabla f(x_\varepsilon) \|^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{N} \left( x_\varepsilon - x^1 | \nabla g(x_\varepsilon) \right) + \varepsilon^2 c \left( \nabla f(x_\varepsilon) | \nabla g(x_\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

On recouvre  $\Gamma$  par un nombre fini de voisinages  $V_{x_i}$  de points  $x_i \in \Gamma$  tels que  $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon = x(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $V_{x_i}$ . Alors il est facile de voir qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$\left| \frac{1}{N} \left( x_\varepsilon - x^1 | \nabla f(x_\varepsilon) \right) + \frac{\varepsilon}{N} \left( x_\varepsilon - x^1 | \nabla g(x_\varepsilon) \right) - \frac{1}{N} \left( x(0) - x^1 | \nabla f(x(0)) \right) \right| \leq M\varepsilon,$$

Comme  $x(0) \in \Gamma$ ,

$$(x(0) - x^1 | \nabla f(x(0))) \geq 0.$$

Donc il suffit de prendre  $c$  assez grand de telle sorte que

$$M \leq \frac{c}{4} \| \nabla f(x(0)) \|^2 \leq \frac{c}{2} \| \nabla f(x_\varepsilon) \|^2$$

si  $\varepsilon$  est assez petit. On en déduit (4. 3) si  $\varepsilon$  est assez petit.

Supposons maintenant que  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  est presque étoilé, et qu'il existe  $\phi$  vérifiant (4. 4)-(4. 7). Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^N$  et  $\phi_0$  définie par (4. 8). Soit  $P$  définie par

$$(4. 9) \quad P := \phi - \phi_0.$$

Alors  $P$  vérifie :

$$(4. 10) \quad \Delta P = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(4. 11) \quad \lambda_1(P) + \frac{1}{N} > 0,$$

$$(4. 12) \quad \partial_\nu P + \frac{1}{N} (x - x^0 | \nu(x)) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0,$$

$$(4. 13) \quad \partial_\nu P + \frac{1}{N} (x - x^0 | \nu(x)) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Réciproquement, s'il existe  $P \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  et  $x^0 \in \mathbb{R}^N$  tels que (4. 10)-(4. 13) ait lieu, alors  $\phi$  définie par (4. 9) vérifie (4. 4)-(4. 7).

Les problèmes (4. 4)-(4. 7) et (4. 10)-(4. 13) sont donc équivalents via (4. 9). On étudiera plus volontiers le problème (4. 10)-(4. 13), plus aisément manipulable que (4. 1)-(4. 3), pour savoir si le domaine en question est presque étoilé.

### 3. Cas des domaines plans : utilisation des fonctions holomorphes

On confondra le complexe  $z = x + iy$  et le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  ayant pour coordonnées dans le plan  $(x, y)$ .

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné connexe. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$ , et appartenant à  $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ . On note  $P$  sa partie réelle et  $Q$  sa partie imaginaire :

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$



En dérivant par rapport à  $x$  et à  $y$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \\ if'(z) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

On en déduit les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Par conséquent :

$$(4. 14) \quad \overline{f'(z)} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Ainsi le vecteur  $\nabla P(x, y)$  correspond au nombre complexe  $\overline{f'(z)}$ .

Intéressons-nous maintenant à la matrice hessienne de la fonction  $\phi$  définie par (4. 9) :

$$D^2\phi = \frac{1}{2}\text{Id} + D^2P.$$

On voit donc que :

$$(4. 15) \quad \lambda_1(\phi) = \frac{1}{2} + \lambda_1(P).$$

Reste à calculer  $\lambda_1(P)$ . Puisque  $P$  est harmonique et appartient à  $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ ,  $D^2P(x, y)$  est une matrice carrée symétrique réelle ayant deux valeurs propres réelles et opposées, notées  $\mu$  et  $-\mu$ .

$$\begin{aligned} -\mu^2 &= \det D^2P(x, y) \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ &= -\left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Or, par dérivation :

$$f''(z) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}.$$

Ainsi

$$-\mu^2 = -|f''(z)|^2.$$

On en déduit que

$$(4. 16) \quad \lambda_1(\phi) = \frac{1}{2} - \|f''\|_\infty,$$

où  $\|f''\|_\infty = \sup\{|f''(z)|, z \in \Omega\}$ .

Supposons que  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  est presque étoilé et qu'il existe  $\phi$  satisfaisant (4. 4)-(4. 7); on note  $P$  la fonction harmonique vérifiant (4. 9)-(4. 13). Si

$\Omega$  est simplement connexe, il existe une fonction holomorphe  $f$  ayant pour partie réelle  $P$ . La fonction  $f$  vérifie donc :

$$(4.17) \quad \|f''\|_{\infty} < \frac{1}{2},$$

$$(4.18) \quad \left(\overline{f'(z)}\right)\nu(z) + \frac{1}{2}(z - z_0)\nu(z) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0,$$

$$(4.19) \quad \left(\overline{f'(z)}\right)\nu(z) + \frac{1}{2}(z - z_0)\nu(z) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

$f''$  doit donc être suffisamment petite (condition (4.17)), mais  $f'$  doit être suffisamment grande pour pouvoir corriger éventuellement le défaut d'étoilement de  $\Omega$  (condition (4.19)). Ces deux conditions ne sont pas toujours compatibles. Dans le paragraphe suivant, on exhibe un exemple explicite de domaine presque étoilé non étoilé satisfaisant ces conditions.

#### 4. Application : exemple d'un domaine presque étoilé non étoilé

Le domaine suivant, avec  $\Gamma_1 = \Gamma$ , est un exemple de domaine non étoilé et presque étoilé.

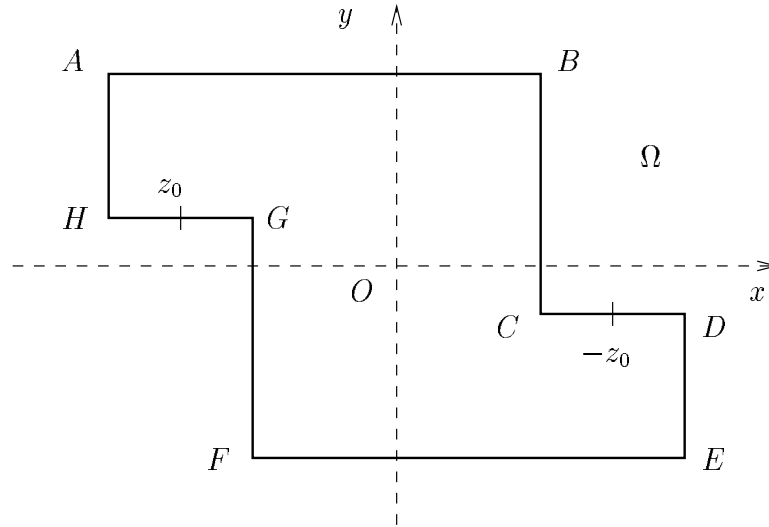


Fig. 2 - Domaine non étoilé presque étoilé

On note :

- $\rho := \min \{|z|, z \in \Gamma\}$ ,
- $R := \max \{|z|, z \in \Gamma\}$ ,
- $z_0$  le milieu du segment  $[GH]$ ,
- $L$  la longueur du segment  $[GH]$ .

Pour simplifier les calculs, on supposera que  $[CD]$  et  $[GH]$  sont symétriques par rapport à  $O$ .

PROPOSITION 4.1. *Soit  $\Omega$  le domaine polygonal  $ABCDEFGH$ . Si  $z_0, L, \rho, R$  vérifient :*

$$(4.20) \quad 0 < \operatorname{Im} z_0 < \frac{\rho}{R} \left( |z_0| - \frac{L}{2} \right),$$

alors  $(\Omega, \emptyset, \Gamma)$  est presque étoilé sans être étoilé.

**Remarque.** Cela fournit un exemple explicite de domaine presque étoilé non étoilé. On a choisi de présenter un exemple de domaine polygonal, sur lequel les calculs sont plus faciles à faire. Mais on peut ensuite arrondir les angles pour obtenir un domaine de classe  $\mathcal{C}^2$ .

*Preuve de la Proposition 4.1.* Commençons par montrer que  $\Omega$  n'est pas étoilé : si  $\Omega$  était étoilé, il existerait  $z_1$  tel que :

$$(4.21) \quad \left( z_0 - z_1 | \nu(z_0) \right) \geq 0,$$

$$(4.22) \quad \left( -z_0 - z_1 | \nu(-z_0) \right) \geq 0.$$

Or, grâce à la géométrie de  $\Omega$ ,  $\nu(-z_0) = -\nu(z_0)$ . Donc (4.22) s'écrit :

$$\left( z_0 + z_1 | \nu(z_0) \right) \geq 0,$$

et en ajoutant (4.21) et (4.22) :

$$2 \left( z_0 | \nu(z_0) \right) \geq 0,$$

ce qui est impossible si  $\text{Im } z_0 > 0$ .

Pour corriger le défaut d'étoilement, on perturbe  $\phi_0(z) = \frac{1}{4}|z|^2$  par une fonction harmonique suffisamment petite pour que (4.17) ait lieu, mais dont la dérivée normale corrigera  $\partial_\nu \phi_0$  là où celle-ci est strictement négative. Pour cela, on construit  $f$  holomorphe ainsi : soit  $\eta > 0$ ; on impose :

$$\overline{f'(z_0)} = -\eta i \text{ et } \overline{f'(-z_0)} = \eta i.$$

Pour ce faire, on peut choisir :

$$(4.23) \quad f(z) = \frac{1}{2} \eta i \frac{z^2}{z_0}.$$

On définit alors  $\phi$  par :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}|z|^2 + \text{Re } f(z).$$

A l'aide des résultats précédents :

$$\nabla \phi(x, y) = \frac{1}{2} z + \overline{f'(z)},$$

$$\lambda_1(\phi) = \frac{1}{2} - \|f''\|_\infty.$$

Or,

$$\|f''\|_\infty = \frac{\eta}{|z_0|}.$$

Cela nous donne une première condition nécessaire :

$$\frac{\eta}{|z_0|} < \frac{1}{2}.$$

Étudions maintenant  $\partial_\nu \phi$  sur  $[CD]$  et  $[GH]$ ; par symétrie, on se contente d'étudier sur  $[GH]$ , qu'on paramètre ainsi pour  $t$  variant dans  $[0, 1]$  :

$$z = t \left( z_0 + \frac{L}{2} \right) + (1-t) \left( z_0 - \frac{L}{2} \right) = z_0 + \left( t - \frac{1}{2} \right) L.$$

Alors à l'aide de ce paramétrage :

$$\begin{aligned}\partial_\nu \phi(z) &= -\frac{1}{2}\text{Im}z_0 + \overline{\left(\frac{\eta i}{z_0}(z_0 + (t - \frac{1}{2})L) - i\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\text{Im}z_0 - \text{Im}\left(\frac{\eta i}{z_0}(z_0 + (t - \frac{1}{2})L)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\text{Im}z_0 + \text{Im}\left(\eta i + \frac{\eta(t - \frac{1}{2})Li}{z_0}\right) \\ \partial_\nu \phi(z) &\geq \eta - \frac{1}{2}\text{Im}z_0 - \frac{\eta L}{2|z_0|}.\end{aligned}$$

On étudie ensuite  $\partial_\nu \phi$  sur les autres côtés :

$$\begin{aligned}\partial_\nu \phi(z) &= \frac{1}{2}(z|\nu(z)) + \overline{(f'(z)|\nu(z))} \\ &\geq \frac{1}{2}\rho - \eta \frac{R}{|z_0|}.\end{aligned}$$

Ceci nous amène les conditions suivantes :

$$(4.24) \quad \|f''\|_\infty = \frac{\eta}{|z_0|} < \frac{1}{2},$$

$$(4.25) \quad \eta - \frac{1}{2}\text{Im}z_0 - \frac{\eta L}{2\rho} \geq 0,$$

$$(4.26) \quad \rho - 2\eta \frac{R}{|z_0|} \geq 0.$$

(4.24) est automatiquement vérifiée dès lorsque (4.26) l'est.

Reste (4.25)-(4.26) :

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{L}{2\rho}\right)\eta &\geq \frac{1}{2}\text{Im}z_0, \\ \eta &\leq \frac{\rho}{2R}|z_0|.\end{aligned}$$

L'hypothèse (4.20) nous assure qu'on peut trouver  $\eta$  vérifiant (4.25)-(4.26).

Ainsi  $(\Omega, \emptyset, \Gamma)$  est presque étoilé sans être étoilé. ■

Je tiens à remercier B. Rao pour de fructueuses discussions qui ont conduit à la construction de cet exemple.

### 5. Contre-exemple : la couronne

On s'intéresse au problème de la couronne.

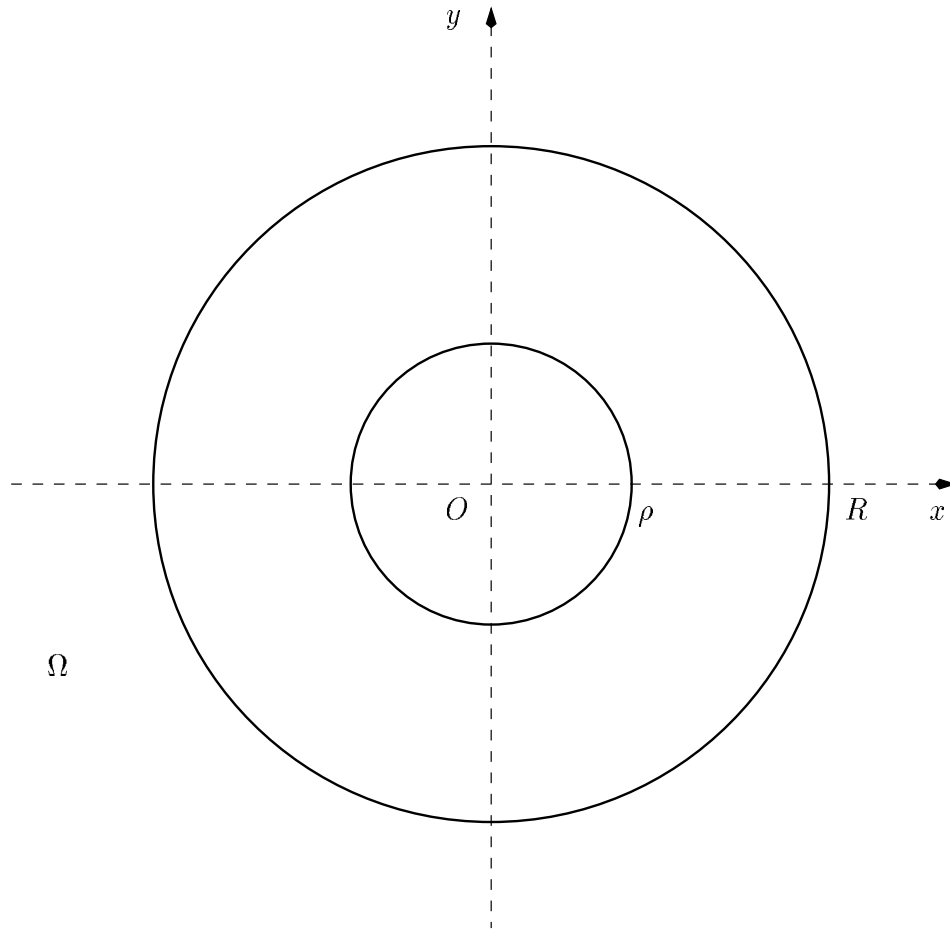


Fig. 3

Soient :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\rho &:= \{z : |z| = \rho\}, \\ \mathcal{C}_R &:= \{z : |z| = R\}. \end{aligned}$$

Il est clair que si on impose la condition

$$\Gamma_0 = \mathcal{C}_\rho \text{ et } \Gamma_1 = \mathcal{C}_R,$$

alors la fonction  $\phi(z) = \frac{1}{4}|z|^2$  vérifie (4. 4)-(4. 7). Donc  $(\Omega, \mathcal{C}_\rho, \mathcal{C}_R)$  est presque étoilé.

Que se passe-t-il si on impose que  $\Gamma_0 = \emptyset$  ?

**PROPOSITION 4.2.** *Soit  $\Omega$  la couronne  $\{z : \rho < |z| < R\}$  et  $\Gamma_1 = \Gamma$ . Alors  $(\Omega, \emptyset, \Gamma)$  n'est pas presque étoilé.*

**Remarque.** Cela montre les limites de cette classe de domaines. En effet, considérons le problème

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_\rho, \\ \partial_\nu u + au + u' = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_R, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{cases}$$

Le résultat de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [8] s'applique et assure que l'énergie de la solution décroît exponentiellement vers zéro. Par contre on ne pourra pas appliquer le Théorème 5.3, parce que ce domaine ne satisfait pas les hypothèses géométriques requises.

*Preuve de la Proposition 4.2.* Supposons qu'il existe une fonction  $\phi$  satisfaisant (4.1)-(4.3). Compte-tenu des symétries du domaine, on peut supposer que  $\phi$  est radiale. On note  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ . Soit

$$\psi(r) = \phi(x, y).$$

On va calculer  $\Delta\phi$  et  $\lambda_1(x, y)$  en fonction des dérivées de  $\psi$  :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \psi'(r) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \psi'(r).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \frac{\psi'(r)}{r} + \frac{x^2}{r} \left( \frac{\psi''(r)}{r} - \frac{\psi'(r)}{r^2} \right) = \frac{x^2}{r^2} \psi''(r) + \frac{y^2}{r^3} \psi'(r), \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= \frac{\psi'(r)}{r} + \frac{y^2}{r} \left( \frac{\psi''(r)}{r} - \frac{\psi'(r)}{r^2} \right) = \frac{y^2}{r^2} \psi''(r) + \frac{x^2}{r^3} \psi'(r), \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} &= \frac{xy}{r} \left( \frac{\psi''(r)}{r} - \frac{\psi'(r)}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi la matrice hessienne de  $\phi$  s'écrit

$$D^2\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{r^2} \psi''(r) + \frac{y^2}{r^3} \psi'(r) & \frac{xy}{r} \left( \frac{\psi''(r)}{r} - \frac{\psi'(r)}{r^2} \right) \\ \frac{xy}{r} \left( \frac{\psi''(r)}{r} - \frac{\psi'(r)}{r^2} \right) & \frac{y^2}{r^2} \psi''(r) + \frac{x^2}{r^3} \psi'(r) \end{pmatrix}$$

On retrouve la formule

$$\Delta\phi = \psi''(r) + \frac{\psi'(r)}{r}.$$

D'autre part, un simple calcul montre que le déterminant de  $D^2\phi(x, y)$  vaut

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{r^5} \psi'(r) \psi''(r) + \frac{y^4}{r^5} \psi'(r) \psi''(r) + 2 \frac{x^2 y^2}{r^5} \psi'(r) \psi''(r) \\ = \frac{(x^2 + y^2)^2}{r^5} \psi'(r) \psi''(r) = \psi''(r) \frac{\psi'(r)}{r}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que les deux valeurs propres de  $D^2\phi(x, y)$  sont

$$\psi''(r) \quad \text{et} \quad \frac{\psi'(r)}{r}.$$

Ainsi, en notant  $\lambda_2(x, y)$  l'autre valeur propre de  $D^2\phi(x, y)$ , on a la relation

$$\Delta\phi(x, y) - 2\lambda_1(x, y) = \lambda_2(x, y) - \lambda_1(x, y) = \left| \psi''(r) - \frac{\psi'(r)}{r} \right|.$$

On peut alors réécrire le système (4. 1)-(4. 3) sous la forme

$$(4. 27) \quad \sup \left\{ \left| \psi''(r) - \frac{\psi'(r)}{r} \right|, r \in [\rho, R] \right\} < \inf \left\{ \psi''(r) + \frac{\psi'(r)}{r}, r \in [\rho, R] \right\},$$

$$(4. 28) \quad \psi'(R) \geq 0,$$

$$(4. 29) \quad \psi'(\rho) \leq 0.$$

De (4. 28) et (4. 29), on tire que  $\psi'$  s'annule sur  $[\rho, R]$ . Soit  $r_0$  tel que  $\psi'(r_0) = 0$ . Alors, on tire de (4. 27) que

$$\begin{aligned} |\psi''(r_0)| &\leq \sup \left\{ \left| \psi''(r) - \frac{\psi'(r)}{r} \right|, r \in [\rho, R] \right\} \\ &< \inf \left\{ \psi''(r) + \frac{\psi'(r)}{r}, r \in [\rho, R] \right\} \leq \psi''(r_0), \end{aligned}$$

d'où la contradiction. ■

### 6. Exemple en dimension supérieure

L'étude se fait de la même façon : on corrige le défaut d'étoilement par le gradient d'une fonction harmonique.

On peut ainsi montrer sans peine que le domaine suivant est non étoilé et presque étoilé.

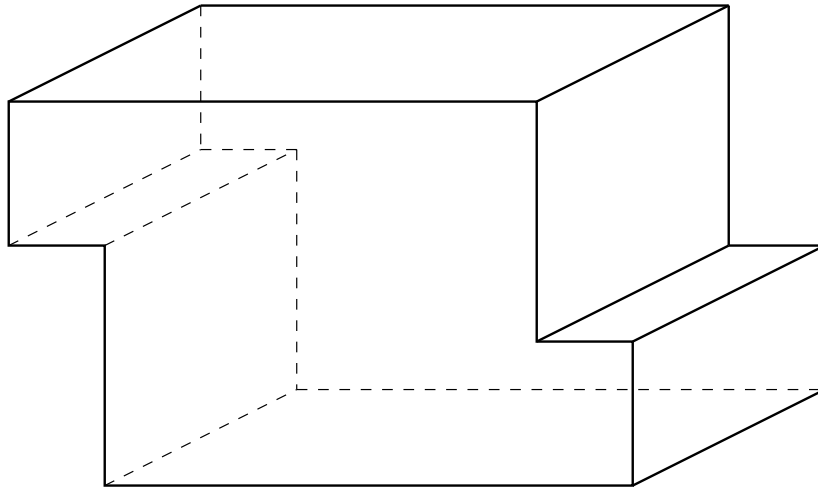


Fig. 4 - Domaine presque étoilé

**STABILISATION FRONTIÈRE DE  
L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN  
DOMAINE PRESQUE ÉTOILÉ RÉGULIER**

Soit  $\Omega$  est ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On note  $\nu$  le vecteur normal extérieur au bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ . On suppose que la partition du bord  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  vérifie

$$(5. 1) \quad \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset.$$

On suppose que  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  est presque étoilé. On s'intéresse au problème de décroissance rapide de l'énergie des solutions de l'équation des ondes stabilisée par un feedback frontière, problème déjà étudié notamment par V. Komornik et E. Zuazua [42], V. Komornik [43], L. R. Tcheugoué Tébou [71].

Soient

$$(5. 2) \quad q \text{ une fonction positive et bornée sur } \Omega,$$

$$(5. 3) \quad a \text{ et } \ell \text{ deux fonctions positives de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Gamma_1.$$

On supposera

$$(5. 4) \quad q \neq 0 \text{ ou } \Gamma_0 \neq \emptyset \text{ ou } a \neq 0.$$

On note de manière usuelle  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ . Soit  $(u_0, u_1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On considère le problème d'évolution suivant :

$$(5. 5) \quad u'' - \Delta u + qu = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(5. 6) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(5. 7) \quad \partial_\nu u + au + \ell u' = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(5. 8) \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1.$$

On va montrer que, moyennant des choix particuliers de fonctions  $a$  et  $\ell$ , l'énergie décroît uniformément vers 0 si  $\Omega$  est presque étoilé, et que dans le cas de certains domaines dont la géométrie est connue, on peut améliorer le taux de décroissance de l'énergie en choisissant judicieusement la fonction  $\phi$  vérifiant (4. 4)-(4. 7).



### 1. Théorème d'existence

THÉORÈME 5.1. *On suppose que (5. 1)-(5. 4) sont réalisées. Alors, étant donné le couple de données initiales  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , le problème (5. 5)-(5. 8) admet une solution unique vérifiant :*

$$(5. 9) \quad u \in C\left(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)\right).$$

*u sera appelée solution faible du problème (5. 5)-(5. 8). L'énergie  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  de la solution u définie par :*

$$(5. 10) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 + qu^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} au^2 ds$$

*est décroissante au cours du temps.*

THÉORÈME 5.2. *Si en plus de (5. 1)-(5. 4), on suppose que  $(u^0, u^1)$  vérifie :*

$$(5. 11) \quad \begin{cases} (u^0, u^1) \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \\ \partial_\nu u^0 + au^0 + \ell u^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

*alors la solution u possède la régularité suivante :*

$$(5. 12) \quad \begin{cases} u \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)\right), & u' \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)\right), \\ u'' \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)\right). \end{cases}$$

*Dans ce cas, u sera appelée solution forte du problème (5. 5)-(5. 8).*

La preuve de ces deux théorèmes est classique (voir par exemple [44]).

### 2. Stabilisation uniforme sous un feedback particulier

THÉORÈME 5.3. *Soit  $\Omega$  un domaine borné dans  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^2$ . Supposons que  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  est presque étoilé, et supposons qu'il existe  $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$  vérifiant (4. 4)-(4. 7). On définit*

$$(5. 13) \quad C := \max\left(\frac{2}{3}, 1 - \lambda_1(\phi)\right), \text{ et } Q_1 := \|\sqrt{q}\nabla\phi\|_\infty.$$

*On suppose*

$$(5. 14) \quad C + Q_1 < 1.$$

*Soit :*

$$(5. 15) \quad \omega := \frac{1 - C - Q_1}{2\|\nabla\phi\|_\infty}.$$

*On définit les fonctions a et  $\ell$  par :*

$$(5. 16) \quad a = \frac{C}{2\|\nabla\phi\|_\infty^2} \partial_\nu \phi \text{ et } \ell = \frac{1}{\|\nabla\phi\|_\infty} \partial_\nu \phi.$$

*Soit  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Alors, l'énergie de la solution faible associée u vérifie l'estimation suivante :*

$$(5. 17) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

**Remarques.** 1. Si  $\phi$  satisfait seulement (4. 1)-(4. 3), l'estimation (5. 17) de décroissance exponentielle (5. 17) demeure vraie. La seule différence provient de la valeur de  $C$ .

2. On montrera après la preuve du théorème comment obtenir un résultat de stabilisation uniforme sous des conditions moins restrictives sur  $a$  et  $\ell$ .

### 3. Preuve du Théorème 5.3

La démonstration de ce théorème est basée sur la méthode des multiplificateurs. On commencera par prouver l'estimation (5. 17) pour des données initiales régulières, c'est-à-dire vérifiant (5. 11) et on conclura avec un argument de densité. Lorsqu'on considère des données initiales régulières, la validité des calculs est acquise à l'aide de la régularité de la solution  $u$  donnée par le Théorème 5.2. On omettra de préciser les éléments différentiels dans les calculs.

#### 3.1. Inégalités fondamentales.

LEMME 5.1. *Soit  $(u^0, u^1)$  vérifiant (5. 11). La solution de (5. 5)-(5. 8) vérifie :*

$$(5. 18) \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty, \quad E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} \ell u'^2 ds dt.$$

*Preuve du Lemme 5.1.* On multiplie (5. 5) par  $u'$  et on intègre par parties.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} u'(u'' - \Delta u + qu) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 + qu^2 \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Gamma} u' \partial_{\nu} u \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 + qu^2 + \int_{\Gamma_1} au^2 \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Gamma_1} \ell u'^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Le résultat fondamental prouvant le Théorème 5.3 est obtenu par la méthode des multiplificateurs. Soient  $c$  une constante,  $(u^0, u^1)$  vérifiant (5. 11) et  $u$  la solution de (5. 5)-(5. 8). On définit

$$M(u) = 2\nabla\phi \cdot \nabla u + cu.$$

LEMME 5.2. *Soient  $(u^0, u^1)$  vérifiant (5. 11) et  $0 \leq S < T < +\infty$ . Alors :*

$$\begin{aligned} (5. 19) \quad & \int_S^T \int_{\Gamma_1} -(au + \ell u') M(u) + \partial_{\nu}\phi(u'^2 - |\nabla u|^2) ds dt \\ & + \int_S^T \int_{\Gamma_0} (\partial_{\nu}u)^2 \partial_{\nu}\phi ds dt = \left[ \int_{\Omega} u' M(u) dx \right]_S^T \\ & + \int_S^T \int_{\Omega} (1-c)(u'^2 - |\nabla u|^2) + qu M(u) + 2(D^2\phi \cdot \nabla u |\nabla u|) dx dt \end{aligned}$$

*Preuve du Lemme 5.2.* On multiplie l'équation (5. 5) par  $M(u)$  et on intègre par parties sur  $\Omega \times [S, T]$ .

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S^T \int_{\Omega} (u'' - \Delta u + qu)M(u), \\
&= \left[ \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega} u' (2\nabla\phi \cdot \nabla u' + cu') - \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} u M(u) \\
&\quad + \int_S^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (2\nabla\phi \cdot \nabla u + cu) + \int_S^T \int_{\Omega} quM(u) \\
&= \left[ \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u M(u) - \int_S^T \int_{\Gamma_0} 2(\partial_{\nu} u)^2 \partial_{\nu} \phi + \int_S^T \int_{\Omega} quM(u) \\
&\quad - \int_S^T \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla(u'^2) + cu'^2 + \int_S^T \int_{\Omega} c|\nabla u|^2 + 2\partial_i u \partial_i (\partial_j \phi \partial_j u) \\
&= \left[ \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u M(u) - \int_S^T \int_{\Gamma_0} 2(\partial_{\nu} u)^2 \partial_{\nu} \phi + \int_S^T \int_{\Omega} quM(u) \\
&\quad - \int_S^T \int_{\Gamma} u'^2 \partial_{\nu} \phi + \int_S^T \int_{\Omega} u'^2 - c(u'^2 - |\nabla u|^2) + 2(D^2(\phi) \cdot \nabla u |\nabla u) + \nabla\phi \cdot \nabla(|\nabla u|^2).
\end{aligned}$$

Donc, en faisant passer les intégrales sur le bord dans le membre de gauche:

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_{\Gamma_0} (\partial_{\nu} u)^2 \partial_{\nu} \phi + \int_S^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u M(u) + \partial_{\nu} \phi (u'^2 - |\nabla u|^2) \\
&= \left[ \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T + \int_S^T (1-c)(u'^2 - |\nabla u|^2) + 2(D^2\phi \cdot \nabla u |\nabla u) + quM(u). \blacksquare
\end{aligned}$$

**Remarque.** On a plusieurs fois utilisé le fait que, puisque  $u = 0$  sur  $\Gamma_0$ ,

$$\nabla u = (\partial_{\nu} u)\nu \text{ sur } \Gamma_0.$$

### 3.2. Fin de la preuve du théorème.

On va commencer par estimer les termes du membre de gauche de (5. 19).

LEMME 5.3. *Soient  $(u^0, u^1)$  vérifiant (5. 11) et  $c \in \mathbb{R}_+$ . On définit  $a$  et  $\ell$  par :*

$$(5. 20) \quad a = \frac{c}{2\|\nabla\phi\|_{\infty}^2} \partial_{\nu} \phi \text{ et } \ell = \frac{1}{\|\nabla\phi\|_{\infty}} \partial_{\nu} \phi.$$

Alors la solution forte  $u$  de (5. 5)-(5. 8) satisfait :

$$\begin{aligned}
(5. 21) \quad &\int_S^T \int_{\Gamma_0} (\partial_{\nu} u)^2 \partial_{\nu} \phi \, ds \, dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} -(au + \ell u') M(u) + \partial_{\nu} \phi (u'^2 - |\nabla u|^2) \, ds \, dt \\
&\leq 2\|\nabla\phi\|_{\infty} (E(S) - E(T)) - \frac{c}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} au^2 \, ds \, dt.
\end{aligned}$$

*Preuve du Lemme 5.3.* Grâce à (4. 6)

$$\int_S^T \int_{\Gamma_0} (\partial_\nu u)^2 \partial_\nu \phi \leq 0.$$

D'après (5. 20),  $a$  et  $\ell$  sont de la forme :

$$a = \alpha \partial_\nu \phi \text{ et } \ell = \lambda \partial_\nu \phi.$$

Alors :

$$\begin{aligned} & -(au + \ell u')(2\nabla\phi \cdot \nabla u + cu) + \partial_\nu \phi (u'^2 - |\nabla u|^2) \\ & \leq \partial_\nu \phi \left( \|\nabla\phi\|_\infty^2 (\alpha u + \lambda u')^2 + |\nabla u|^2 - c\alpha u^2 - c\lambda u u' + u'^2 - |\nabla u|^2 \right) \\ & \leq \partial_\nu \phi \left( (1 + \lambda^2 \|\nabla\phi\|_\infty^2) u'^2 + (\alpha^2 \|\nabla\phi\|_\infty^2 - c\alpha) u^2 + (2\alpha\lambda \|\nabla\phi\|_\infty^2 - c\lambda) u u' \right). \end{aligned}$$

A l'aide des choix donnés par (5. 20) et en utilisant (5. 18), on en déduit (5. 21). ■

LEMME 5.4.

$$(5. 22) \quad \left| \int_\Omega u' M(u) dx \right| \leq 2 \|\nabla\phi\|_\infty E(t) \quad \text{si } c \in [0, 2].$$

*Preuve du Lemme 5.4.*

$$\begin{aligned} \int_\Omega (M(u))^2 &= \int_\Omega (2\nabla\phi \cdot \nabla u + cu)^2 \\ &= \int_\Omega (2\nabla\phi \cdot \nabla u)^2 + c^2 u^2 + 2c \nabla\phi \cdot \nabla(u^2) \\ &= \int_\Omega (2\nabla\phi \cdot \nabla u)^2 + c^2 u^2 + 2c \int_\Gamma \partial_\nu \phi u^2 - \int_\Omega 2cu^2 \\ &= \int_\Omega (2\nabla\phi \cdot \nabla u)^2 + c(c-2)u^2 + 2c \int_{\Gamma_1} \partial_\nu \phi u^2. \end{aligned}$$

Comme par la suite on choisira  $c$  dans  $[0, 1]$ , on peut se contenter d'étudier le cas  $c \in [0, 2]$ . Ainsi :

$$\int_\Omega M(u)^2 \leq \int_\Omega (2\nabla\phi \cdot \nabla u)^2 + 2c \int_{\Gamma_1} \partial_\nu \phi u^2.$$

Soit  $d$  un réel non-nul. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u' M(u) \right| &\leq \left( \int_\Omega u'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega M(u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{d^2}{2} \int_\Omega u'^2 + \frac{1}{2d^2} \int_\Omega (2\nabla\phi \cdot \nabla u)^2 + \frac{c}{d^2} \int_{\Gamma_1} \partial_\nu \phi u^2 \\ &\leq \text{Sup} \left( d^2, \frac{4\|\nabla\phi\|_\infty^2}{d^2} \right) \left( \frac{1}{2} \int_\Omega u'^2 + |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \partial_\nu \phi u^2 \right). \end{aligned}$$

En choisissant  $d^2$  tel que

$$d^2 = \frac{4\|\nabla\phi\|_\infty^2}{d^2},$$

on obtient :

$$\left| \int_{\Omega} u' M(u) \right| \leq 2 \|\nabla \phi\|_{\infty} E(t). \blacksquare$$

A l'aide des estimations (5. 21) et (5. 22), (5. 19) devient :

$$(5. 23) \quad \int_S^T \int_{\Omega} (1-c)(u'^2 - |\nabla u|^2) + 2(D^2\phi \cdot \nabla u |\nabla u) + quM(u) \\ + \frac{c}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} au^2 \leq 4\|\nabla \phi\|_{\infty} E(S).$$

En utilisant (4. 5), on obtient :

$$(5. 24) \quad \int_S^T \int_{\Omega} (1-c)u'^2 + (2\lambda_1(\phi) - (1-c))|\nabla u|^2 + cqu^2 + 2qu\nabla\phi \cdot \nabla u \\ + \frac{c}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_1} au^2 \leq 4\|\nabla \phi\|_{\infty} E(S).$$

Reste à examiner le dernier terme du membre de gauche de (5. 23) :

LEMME 5.5.

$$(5. 25) \quad \left| \int_{\Omega} 2qu\nabla\phi \cdot \nabla u \right| \leq 2\|\sqrt{q}\nabla\phi\|_{\infty} E(t) = 2Q_1 E(t).$$

*Preuve du Lemme 5.5.* On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz comme précédemment. Soit  $\beta > 0$  :

$$\left| \int_{\Omega} qu\nabla\phi \cdot \nabla u \right| \leq \left( \int_{\Omega} qu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} (\sqrt{q}\nabla\phi \cdot \nabla u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega} qu^2 + \frac{\|\sqrt{q}\nabla\phi\|_{\infty}^2}{2\beta^2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

En choisissant  $\beta^2 = \|\sqrt{q}\nabla\phi\|_{\infty}$ , on obtient le résultat voulu.  $\blacksquare$

On obtient alors :

$$(5. 26) \quad 2\left(\inf\left\{1-c, 2\lambda_1(\phi) - (1-c), c, \frac{c}{2}\right\} - Q_1\right) \int_S^T E \leq 4\|\nabla\phi\|_{\infty} E(S)$$

Une simple étude graphique montre que la constante  $c$  donnant le meilleur résultat, c'est-à-dire le plus grand coefficient de  $\int_S^T E(\tau) d\tau$  dans (5. 26), est la valeur donnée par (5. 14) :

$$c = C := \max\left(\frac{2}{3}, 1 - \lambda_1(\phi)\right).$$

Alors, (5. 26) devient :

$$2(1 - C - Q_1) \int_S^T E \leq 4\|\nabla\phi\|_{\infty} E(S),$$

et, à condition que  $1 - C - Q_1 > 0$  :

$$(5. 27) \quad \int_S^T E \leq \frac{2\|\nabla\phi\|_{\infty}}{1 - C - Q_1} E(S) = \frac{1}{\omega} E(S).$$

En faisant tendre  $T$  vers  $+\infty$ , on voit que l'énergie  $E$  est une fonction positive décroissante qui vérifie :

$$\forall S \geq 0, \quad \int_S^{+\infty} E \leq \frac{1}{\omega} E(S).$$

On conclut à l'aide de l'inégalité intégrale donnée par le Lemme 1.1 que

$$(5. 28) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

Ceci prouve donc l'estimation annoncée dans le Théorème 5.3 pour les solutions à données initiales régulières.

**Remarque.** Lorsque  $\phi$  satisfait seulement les conditions plus faibles (4. 1)-(4. 3), il faut simplement remplacer le coefficient  $(1 - c)$  par  $(\Delta\phi - c)$  dans (5. 23). L'hypothèse (4. 1) permet alors de choisir une constante  $c$  telle que (5. 27) soit vraie.

On prouve à l'aide d'un argument de densité que cette estimation reste vraie pour toute solution faible  $u$  : soit  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , et  $u$  la solution faible associée. Le sous-espace vectoriel formé par les couples  $(v^0, v^1)$  vérifiant (5. 11) est dense dans l'espace d'énergie  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On en déduit qu'il existe une suite  $(u_n^0, u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  qui converge dans l'espace d'énergie vers  $(u^0, u^1)$ . Soit  $u_n$  la solution forte du problème (5. 5)-(5. 8) associée à la donnée initiale  $(u_n^0, u_n^1)$ . A  $n$  fixé, on peut utiliser l'estimation (5. 28) :

$$(5. 29) \quad \forall t \geq 0, \quad E(u_n)(t) \leq E(u_n)(0)e^{1-\omega t}.$$

Or, par construction, la suite  $(u_n^0, u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :

$$(5. 30) \quad E(u_n)(0) = \|(u_n^0, u_n^1)\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \longrightarrow E(u)(0) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, en utilisant la décroissance de l'énergie du problème linéaire :

$$E(u_n - u)(t) \leq E(u_n - u)(0);$$

on en déduit que :

$$(5. 31) \quad \forall t \geq 0, E(u_n)(t) \longrightarrow E(u)(t) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, en passant à la limite en  $n$  à  $t$  fixé dans (5. 29), on obtient :

$$(5. 32) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 5.3. ■

### 3.3. Stabilisation uniforme sous des conditions plus générales.

Soit  $\Omega$  un domaine presque étoilé de classe  $\mathcal{C}^2$  et soit  $\phi$  vérifiant (4. 4)-(4. 7). On suppose que les conditions suivantes sont réalisées :

$$(5. 33) \quad \min_{\Gamma_1} \partial_\nu \phi > 0,$$

$$(5. 34) \quad \min_{\Gamma_1} a > 0,$$

$$(5. 35) \quad \min_{\Gamma_1} \ell > 0.$$

THÉORÈME 5.4. *Sous les hypothèses (5. 14), (5. 33)-(5. 35), il existe deux constantes strictement positives  $C$  et  $\omega$  telles que, pour tout couple de données initiales  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , la solution faible associée vérifie l'estimation :*

$$(5. 36) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq CE(0)e^{1-\omega t}.$$

*Preuve du Théorème 5.4.* On travaille dans un premier temps sur des données initiales régulières, puis on conclut par densité. Grâce à (5. 33)-(5. 35), on peut écrire  $a$  et  $\ell$  sous la forme

$$(5. 37) \quad a = \alpha \partial_\nu \phi \text{ et } \ell = \lambda \partial_\nu \phi.$$

On utilise alors l'identité (5. 19) pour obtenir :

$$\begin{aligned} 2(1 - c - Q_1) \int_S^T E &\leq 4\|\nabla \phi\|_\infty E(S) \\ &+ \int_S^T \int_{\Gamma_1} \left( -(\alpha u + \lambda u') 2\nabla \phi \cdot \nabla u + u'^2 - |\nabla u|^2 \right) \partial_\nu \phi + c' a u^2. \end{aligned}$$

On voit sans peine qu'il existe une constante positive  $C$  telle que

$$(5. 38) \quad 2(1 - c - Q_1) \int_S^T E \leq 4\|\nabla \phi\|_\infty E(S) + C \int_S^T \int_{\Gamma_1} u^2 + u'^2.$$

De (5. 18), on tire que

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} u'^2 \leq CE(S).$$

Enfin, on utilise un résultat de F. Conrad et B. Rao [16] pour estimer le terme qui reste :

LEMME 5.6.  $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0$ , la solution faible de (5. 5)-(5. 8) vérifie :

$$(5. 39) \quad 0 \leq S < T < +\infty, \int_S^T \int_{\Gamma_1} u^2 \leq \frac{C}{\varepsilon} E(S) + \varepsilon \int_S^T E.$$

(on adaptera leur méthode dans les Parties 3 et 4 pour d'autres problèmes)

Alors, en choisissant  $\varepsilon$  assez petit, on aboutit à une estimation du type (5. 27), d'où le résultat (5. 36). ■

## STABILISATION FRONTIÈRE DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE POLYGONAL

L'intérêt de l'étude de la validité des résultats précédents sur un domaine polygonal presque étoilé est double : en premier lieu, pour connaître l'influence des singularités provenant des coins sur les résultats précédents, et ensuite pour pouvoir effectuer des estimations sur le taux de décroissance de l'énergie dans des domaines dont la géométrie permet de faire des calculs explicites.

### 1. Cas où $\Gamma_0 = \emptyset$

Soit  $\Omega$  un domaine polygonal sans fissure. Le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$  est constitué par la réunion de segments de droite notés  $\Gamma_j$ . On suppose qu'il existe  $\phi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  telle que :

$$(6. 1) \quad \Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega,$$

$$(6. 2) \quad \lambda_1(\phi) > 0,$$

$$(6. 3) \quad \partial_\nu\phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma.$$

On s'intéresse au problème :

$$(6. 4) \quad u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(6. 5) \quad \partial_\nu u + au + \ell u' = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+,$$

$$(6. 6) \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1.$$

Soit  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Alors, d'après les résultats de P. Grisvard [24], le problème (6. 4)-(6. 5) admet une unique solution faible  $u$  :

$$(6. 7) \quad u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$$

Mais des singularités apparaissent aux coins, empêchant  $u$  d'avoir la régularité  $H^2(\Omega)$ , même si les conditions initiales sont régulières. En fait, la régularité de  $u$  est fonction de la mesure des angles non convexes. Toutefois, le résultat de stabilisation uniforme obtenu dans le Théorème 5.3 demeure valable :



THÉORÈME 6.1. *Soient*

$$(6. 8) \quad C := \max\left(\frac{2}{3}, 1 - \lambda_1(\phi)\right) \quad \text{et} \quad \omega := \frac{1 - C}{2\|\nabla\phi\|_\infty}$$

*On choisit :*

$$(6. 9) \quad a = \frac{C}{2\|\nabla\phi\|_\infty^2} \partial_\nu \phi \quad \text{et} \quad \ell = \frac{1}{\|\nabla\phi\|_\infty} \partial_\nu \phi$$

*L'énergie de la solution faible associée  $u$  vérifie l'estimation suivante :*

$$(6. 10) \quad \forall t \geq 0, E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}$$

*Preuve du Théorème 6.1.* Le résultat crucial pour la démonstration du Théorème 6.1 est la validité de l'identité (5. 19). P. Grisvard [24] a travaillé sur le système équation des ondes avec condition au bord de type Neumann homogène, et a montré que l'identité (5. 19) demeure valable si  $u$  vérifie (6. 4) et possède la régularité suivante :

$$(6. 11) \quad \exists s_0 > \frac{3}{2} \text{ tel que } u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^{s_0}(\Omega)).$$

En fait, dans notre cas, il suffit que la solution du problème stationnaire

$$(6. 12) \quad -\Delta v = f \in L^2(\Omega),$$

$$(6. 13) \quad \partial_\nu v + av = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

vérifie :

$$(6. 14) \quad \exists s_0 > \frac{3}{2} \text{ tel que } v \in H^{s_0}(\Omega).$$

PROPOSITION 6.1. *Soit  $\Omega$  un domaine ouvert polygonal sans fissure et borné. Soit  $a$  une fonction positive non nulle sur  $\Gamma$  appartenant à  $\mathcal{C}^1(\Gamma)$ . Alors il existe  $s_0 > \frac{3}{2}$  tel que la solution  $v$  du problème (6. 12)-(6. 13) vérifie:*

$$(6. 15) \quad v \in H^{s_0}(\Omega).$$

*Preuve de la Proposition 6.1.* En considérant la forme bilinéaire symétrique définie sur  $H^1(\Omega)^2$  par :

$$B(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma auv,$$

on montre aisément l'existence d'une solution faible du problème (6. 12)-(6. 13) dans  $H^1(\Omega)$ . (On utilise de manière cruciale la compacité de l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , et la continuité de l'application trace.)

Soit  $v$  la solution faible. Alors

$$av \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

En utilisant la surjectivité de l'application :

$$H^2(\Omega) \longrightarrow \prod_j H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j),$$

$$w \mapsto (\partial_{\nu_j} w)_j,$$

on en déduit qu'il existe  $w_1 \in H^2(\Omega)$  tel que :

$$(6. 16) \quad \partial_{\nu_j} w = -av \text{ sur chaque côté } \Gamma_j .$$

On considère alors la solution  $w_2$  du problème :

$$(6.17) \quad -\Delta w_2 = f + \Delta w_1 \in L^2(\Omega),$$

$$(6.18) \quad \partial_\nu w_2 = 0.$$

D'après P. Grisvard [24], il existe  $s_0 > \frac{3}{2}$  tel que  $w_2 \in H^{s_0}(\Omega)$ . Mais alors, la fonction  $w = v - (w_1 + w_2)$  est élément de  $H^1(\Omega)$  et vérifie :

$$(6.19) \quad \Delta w = 0,$$

$$(6.20) \quad \partial_\nu w = 0,$$

Ce système n'admet pour solution  $H^1$  que les fonctions constantes. Par conséquent,  $v$  appartient à  $H^{s_0}(\Omega)$ . ■

## 2. Cas où $\Gamma_0 \neq \emptyset$

On considère le problème où  $\Omega$  est polygonal sans fissure, son bord étant partitionné en  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ . On supposera que chaque côté fait partie soit de  $\Gamma_0$  soit de  $\Gamma_1$ .

PROPOSITION 6.2. *Soit  $v$  la solution du problème stationnaire :*

$$(6.21) \quad -\Delta v = f \in L^2(\Omega),$$

$$(6.22) \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_0,$$

$$(6.23) \quad \partial_\nu v + av = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

*On suppose que  $a$  est une fonction positive non nulle appartenant à  $C^1(\Omega)$ . De plus, on suppose que les angles où il y a changement de condition aux limites (c'est-à-dire d'un côté on est sur  $\Gamma_0$  et de l'autre sur  $\Gamma_1$ ) sont convexes, c'est-à-dire leur mesure est strictement inférieure à  $\pi$ . Alors il existe  $s_0 > \frac{3}{2}$  tel que  $v$  appartient à  $H^{s_0}(\Omega)$ .*

La preuve est analogue à celle du cas  $\Gamma_0 = \emptyset$ . On en déduit alors le résultat suivant :

THÉORÈME 6.2. *Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal sans fissure et borné. Soit  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition du bord. On suppose que chaque côté appartient soit à  $\Gamma_0$ , soit à  $\Gamma_1$ , et que les angles de changements de condition aux limites sont strictement convexes. On suppose que  $\Omega$  est presque étoilé. On définit  $a$  et  $\ell$  par (5.16). Alors l'énergie de la solution  $u$  du problème (5.5)-(5.8) vérifie l'estimation :*

$$(6.24) \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t},$$

$\omega$  étant déterminé par (5.15).

**Remarque.** Dans le cas d'un ouvert régulier dont la partition du bord  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  vérifie :

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \emptyset,$$

l'identité (5.19) se transforme en une inégalité qui demeure suffisante pour obtenir le résultat de décroissance uniforme de l'énergie (voir P. Grisvard [24] ou M. Moussaoui [60]).



## CHAPITRE 7

### APPLICATION : STABILISATION RAPIDE DANS DES DOMAINES PLANS PARTICULIERS : LES POLYGONES RÉGULIERS

Soit  $\Omega$  un domaine plan de classe  $\mathcal{C}^2$  ou polygonal sans fissure. On suppose que :

$$(7. 1) \quad \Gamma_0 = \emptyset,$$

$$(7. 2) \quad q = 0.$$

On suppose que  $(\Omega, \emptyset, \Gamma)$  est presque étoilé, et qu'il existe  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overline{\Omega}$  vérifiant :

$$(7. 3) \quad \Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega,$$

$$(7. 4) \quad \lambda_1(\phi) > 0,$$

$$(7. 5) \quad \partial_\nu\phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Soient  $a$  et  $\ell$  les fonctions définies sur  $\Gamma$  par (5. 16). Soit  $(u^0, u^1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On considère le problème d'évolution suivant :

$$(7. 6) \quad u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(7. 7) \quad \partial_\nu u + au + \ell u' = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+,$$

$$(7. 8) \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.$$

On est dans les conditions d'application du Théorème 5.3 : l'énergie de la solution faible  $u$  de (7. 6)-(7. 8) vérifie l'estimation :

$$(7. 9) \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t},$$

$\omega$  étant déterminé à l'aide de la fonction  $\phi$  :

$$(7. 10) \quad \omega = \frac{\inf\{\frac{1}{3}, \lambda_1(\phi)\}}{2\|\nabla\phi\|_\infty}.$$

En particulier, si  $\Omega$  est étoilé par rapport à un point  $x^0$ , alors la fonction

$$\phi_0(x) = \frac{1}{4}|x - x^0|^2$$

vérifie (7. 3)-(7. 5) et permet de retrouver le résultat de Tcheugoué-Tébou [71] :

$$(7. 11) \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{3R(x^0)}} \text{ avec } R(x^0) := \sup_{x \in \Omega} |x - x^0|.$$

Si le domaine  $\Omega$  possède plusieurs fonctions  $\phi$  satisfaisant (7. 3)-(7. 5), on peut essayer d'*optimiser* le taux de décroissance sur l'ensemble des fonctions  $\phi$  admissibles. En particulier, si  $\Omega$  est étoilé, on connaît déjà une fonction  $\phi$  admissible, il reste donc à voir si on peut en trouver d'autres qui améliorent le taux de décroissance. On va voir que c'est impossible dans le cas de la boule, mais que par contre on peut y arriver lorsque le domaine présente des "angles". L'idée sera de perturber  $\phi_0$  par des fonctions harmoniques adaptées au domaine considéré.

### 1. Un résultat négatif : le cas de la boule

PROPOSITION 7.1. *Soit  $\Omega$  la boule de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Alors l'estimation (7. 11) ne peut être améliorée à l'aide du Théorème 5.3.*

*Preuve de la Proposition 7.1.* En effet, soit  $\phi$  vérifiant (7. 3)-(7. 5), et  $P$  défini par :

$$P(x) = \phi(x) - \frac{1}{4}|x|^2.$$

$P$  est une fonction harmonique de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overline{\Omega}$ . Alors,

$$\int_{\Gamma} \partial_{\nu} P = \int_{\Omega} \Delta P = 0.$$

On en déduit que

- ou  $\partial_{\nu} P$  est nulle sur  $\Gamma$ , auquel cas  $P$  est constante, et on retrouve l'estimation (7. 11) avec le meilleur choix possible :  $x^0 = O$ .
- ou il existe un point  $x^1$  de  $\Gamma$  tel que  $\partial_{\nu} P(x^1) > 0$ , ce qui signifie que  $\nabla P(x^1)$  est sortant :

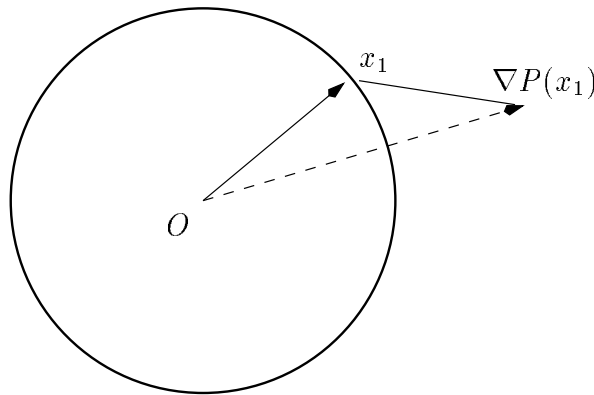


Fig. 5

Alors,

$$\|\nabla\phi\|_\infty \geq \|\nabla\phi(x^1)\| = \left\| \frac{x^1}{2} + \nabla P(x^1) \right\| \geq \frac{R}{2}$$

Par conséquent

$$\omega = \frac{\inf\{\frac{1}{3}, \lambda_1(\phi)\}}{2\|\nabla\phi\|_\infty} \leq \frac{1}{3R}. \blacksquare$$

**Remarque.** Il ne semble pas non plus possible d'améliorer le taux de décroissance de l'énergie en utilisant des fonctions  $\phi$  vérifiant les conditions plus générales (4. 1)-(4. 3).

## 2. Le cas des polygones réguliers

On se place à présent dans le cas où  $\Omega$  est un polygone régulier. On va montrer le résultat suivant :

**THÉORÈME 7.1.** *Soit  $\Omega$  le polygone régulier à  $n$  côtés inscrit dans le cercle centré en  $O$  et de rayon  $R$ . Grâce à un choix convenable de fonction  $\phi$ , et en choisissant le feedback défini par (5. 16), les solutions faibles du problème (7. 6)-(7. 8) vérifient l'estimation :*

$$(7. 12) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{\rho_n}}.$$

avec

$$(7. 13) \quad \rho_n = \left(3 - \frac{1}{n-1}\right)R \text{ si } 3 \leq n \leq 8,$$

$$(7. 14) \quad \rho_n = (3 - 6\varepsilon_n)R, \text{ avec } \varepsilon_n = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{1 + (\cos \frac{\pi}{n})^{n-1}} \simeq \frac{\pi^2}{8n^2} \text{ si } n \geq 9.$$

De plus dans le cas du triangle équilatéral ( $n = 3$ ), on peut améliorer ce résultat pour obtenir

$$(7. 15) \quad \rho_3 \leq 2,36R \text{ si } n = 3.$$

**Remarques.** 1. Le choix de la fonction  $\phi$  sera explicité au cours de la preuve.

2. Un principe général de D.L. Russell [69] montre que les résultats de stabilisation uniforme (7. 13)-(7. 15) impliquent des résultats de contrôlabilité exacte du système associé en temps  $T > \rho_n$ . En particulier pour le triangle équilatéral, on obtient  $T > \rho_3 \geq 2R > R\sqrt{3}$ . Donc cette méthode n'est pas assez puissante pour retrouver des résultats connus (contrôlabilité en temps  $T > 2R$ ), et encore moins des résultats semblables à ceux trouvés dans des domaines analytiques par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [8].

3. Il serait intéressant de savoir s'il existe une fonction  $\phi$  donnant des résultats optimaux, et si c'est possible de la trouver.

*Preuve du Théorème 7.1.* Soit  $\Omega$  un polygone régulier à  $n$  côtés. Quitte à faire un changement de repère, on peut supposer que les sommets de  $\Omega$  sont les points d'affixe  $Re \frac{2ik\pi}{n}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . La preuve du Théorème 7.1 découle immédiatement de l'estimation donnée par le Théorème 5.3, à l'aide

d'un choix judicieux de fonction  $\phi$  : en effet, étant donné que le feedback est défini par (5. 16) :

$$a = \frac{\sup\{\frac{2}{3}, 1 - \lambda_1(\phi)\}}{2\|\nabla\phi\|_\infty^2} \partial_\nu \phi \text{ et } \ell = \frac{1}{\|\nabla\phi\|_\infty} \partial_\nu \phi,$$

l'énergie des solutions vérifie :

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t} \text{ avec } \omega(\phi) = \frac{\inf\{\frac{1}{3}, \lambda_1(\phi)\}}{2\|\nabla\phi\|_\infty}.$$

Le but est de trouver  $\phi$  de telle sorte que  $\omega(\phi)$  soit le plus grand possible. Pour ce faire, on écrit  $\phi$  comme perturbation par une fonction harmonique  $P$  de  $\phi_0(x) = \frac{1}{4}|x|^2$ . A l'évidence, il faut que  $\nabla P$  soit rentrant aux points où  $\nabla\phi$  atteint son maximum, dans le but de diminuer  $\|\nabla\phi\|_\infty$ . Par exemple, pour le triangle équilatéral, on cherchera  $P$  telle que le champ de vecteurs  $\nabla P$  ait cette allure :

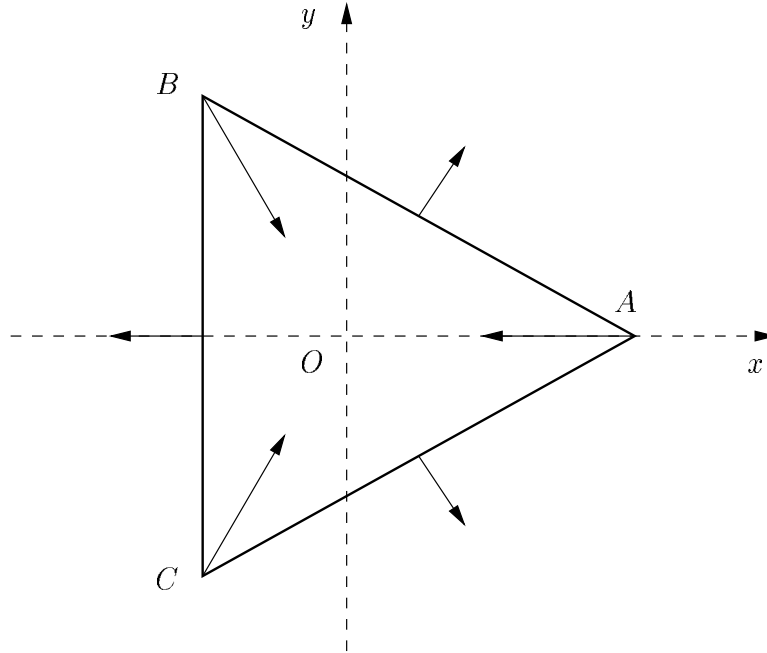


Fig. 6- Allure du champs de vecteurs  $\nabla P$  sur  $\Gamma$

On commence par étudier quelques propriétés préliminaires.

### 2.1. Quelques propriétés générales de $\phi$ .

**LEMME 7.1.** *Soit  $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$  vérifiant  $\lambda_1(\phi) > 0$ . Alors,  $\|\nabla\phi\|$  atteint sa borne supérieure uniquement sur le bord de  $\Omega$ .*

*Preuve du Lemme 7.1.* Un argument classique de continuité nous dit que  $\|\nabla\phi\|$  est borné et atteint sa borne supérieure sur  $\overline{\Omega}$ . Supposons que  $\|\nabla\phi\|_\infty$

soit atteinte en un point intérieur, noté  $z_1 = (x_1, y_1)$ . Alors, comme  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 (x_1, y_1) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 (x_1, y_1) \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 (x_1, y_1) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 (x_1, y_1) \right) &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$D^2\phi \cdot \nabla\phi(x_1, y_1) = 0.$$

Or, la matrice  $D^2\phi$  est inversible en tout point. Donc, le vecteur  $\nabla\phi$  est nul en  $(x_1, y_1)$ , donc partout sur  $\Omega$ , compte-tenu de la définition de  $z_1$ , ce qui contredit le fait que  $D^2\phi$  n'est jamais la matrice nulle. ■

LEMME 7.2. *Parmi les fonctions  $\phi$  vérifiant (7. 3)-(7. 5), et*

$$(7. 16) \quad \nabla\phi(O) = 0,$$

*la fonction  $\phi$  donnant le meilleur taux de décroissance vérifiera la condition supplémentaire :*

$$(7. 17) \quad \lambda_1(\phi) \geq \frac{1}{3}.$$

**Remarque.** On verra par la suite que la condition (7. 16) est une conséquence directe des symétries du domaine.

*Preuve du Lemme 7.2.* Soit  $\phi$  vérifiant (7. 3)-(7. 5) et (7. 16). Comme d'habitude, on note  $P = \phi - \frac{1}{4}|z|^2$ . Comme  $\Omega$  est simplement connexe, il existe  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  ayant pour partie réelle  $P$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note :

$$(7. 18) \quad \phi_\varepsilon = \phi_0 + \varepsilon P.$$

Alors

$$(7. 19) \quad \lambda_1(\phi_\varepsilon) = \frac{1}{2} - \|\varepsilon f''\|_\infty.$$

Supposons  $\lambda_1(\phi) < \frac{1}{3}$ . Soit  $\varepsilon$  tel que  $\lambda_1(\phi_\varepsilon) = \frac{1}{3}$ .  $\phi_\varepsilon$  vérifie alors (7. 3), (7. 4), (7. 16) et (7. 17). Supposons qu'elle vérifie aussi (7. 5). On va montrer que

$$(7. 20) \quad \omega(\phi_\varepsilon) = \frac{1}{6\|\nabla\phi_\varepsilon\|_\infty} \geq \omega(\phi) = \frac{\lambda_1(\phi)}{2\|\nabla\phi\|_\infty}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_0 + P = \phi_0 + \varepsilon P + (1 - \varepsilon)P = \phi_\varepsilon + (1 - \varepsilon)P, \\ \nabla\phi(z) &= \nabla\phi_\varepsilon(z) + (1 - \varepsilon)\overline{f'(z)}.\end{aligned}$$

Or,

$$f'(z) - f'(0) = z \int_0^1 f''(tz) dt.$$

Comme  $\overline{f'(0)} = \nabla P(O) = 0$  :

$$|f'(z)| \leq R\|f''\|_\infty$$



On en déduit :

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi\|_\infty &\geq \|\nabla\phi_\varepsilon\|_\infty - (1-\varepsilon)\|f'\|_\infty, \\ \lambda_1(\phi) &= \frac{1}{2} - \|f''\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon\|f''\|_\infty - (1-\varepsilon)\|f''\|_\infty = \frac{1}{3} - (1-\varepsilon)\|f''\|_\infty. \end{aligned}$$

Alors :

$$(7. 21) \quad \frac{2\|\nabla\phi\|_\infty}{\lambda_1(\phi)} \geq 2 \frac{\|\nabla\phi_\varepsilon\|_\infty - (1-\varepsilon)R\|f''\|_\infty}{\frac{1}{3} - (1-\varepsilon)\|f''\|_\infty}.$$

En remarquant que

$$M := \frac{\|\nabla\phi_\varepsilon\|_\infty}{R} \geq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{R}\|\nabla P\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\|f''\|_\infty = \frac{1}{3},$$

(7. 21) devient :

$$\frac{2\|\nabla\phi\|_\infty}{\lambda_1(\phi)} \geq 2R \frac{M - (1-\varepsilon)\|f''\|_\infty}{\frac{1}{3} - (1-\varepsilon)\|f''\|_\infty}.$$

Or, la fonction  $t \mapsto \frac{M-t}{\frac{1}{3}-t}$  est monotone croissante dès lors que  $M \geq \frac{1}{3}$ . On en déduit :

$$\frac{2\|\nabla\phi\|_\infty}{\lambda_1(\phi)} \geq 2R \frac{M}{\frac{1}{3}} = 6\|\nabla\phi_\varepsilon\|_\infty. \blacksquare$$

**Remarque.** La même démonstration dit aussi que :

$$6\|\nabla\phi\|_\infty \geq 6\frac{R}{3} = 2R \text{ si } \lambda_1(\phi) \geq \frac{1}{3}$$

On n'obtiendra donc jamais de taux de décroissance meilleur que  $2R$  avec un feedback de ce type. Un principe de D.L. Russell [69] montre que la stabilisation uniforme entraîne la contrôlabilité exacte du système associé, mais l'application de ce principe à notre problème nous fournit un temps minimal moins bon que  $2R$ , celui obtenu directement en appliquant la méthode H.U.M. de J.-L. Lions [54].

On s'intéresse maintenant à la dérivée normale de  $\phi$  sur le bord :

**LEMME 7.3.** *Soit  $\phi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  vérifiant (7. 3), (7. 16) et (7. 17); alors  $\phi$  satisfait automatiquement la condition (7. 5) :  $\partial_\nu\phi \geq 0$  sur le bord.*

*Preuve du Lemme 7.3.* On note  $z_k = Re^{2ik\pi/n}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , et  $\nu_k$  le vecteur unitaire normal sortant de  $\Omega$  au côté  $]z_k, z_{k+1}[$ .

$$(7. 22) \quad \nu_k = \frac{(z_{k+1} - z_k)}{|z_{k+1} - z_k|} e^{-i\pi/2}.$$

Le long du segment  $]z_k, z_{k+1}[$ , la dérivée normale de  $\phi$  vaut :

$$\begin{aligned}\partial_\nu \phi(z) &= \left( \frac{z}{2} + \overline{f'(z)} | \nu_k \right) \\ &= \left( \frac{z}{2} | \nu_k \right) + \left( \overline{f'(z)} | \nu_k \right) \\ &= \left( \frac{z_k}{2} | \nu_k \right) + \left( \overline{f'(z)} | \nu_k \right) \\ &\geq \frac{R}{2} \cos \frac{\pi}{n} - R \|f''\|_\infty.\end{aligned}$$

Or

$$\cos \frac{\pi}{n} \geq \cos \frac{\pi}{3} \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|f''\|_\infty = \frac{1}{2} - \lambda_1(\phi) \leq \frac{1}{6}.$$

On en déduit la positivité de  $\partial_\nu \phi$  sur chaque segment  $]z_k, z_{k+1}[$ . ■

Optimiser sur la famille de fonctions  $\phi$  admissibles nous amène donc à étudier le problème d'optimisation suivant : trouver  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  telle que :

$$(7.23) \quad \begin{cases} \|f''\|_\infty \leq \frac{1}{6}, \\ 6 \|\nabla \phi\|_\infty \text{ le plus petit possible.} \end{cases}$$

## 2.2. Quelques propriétés générales de $f$ .

Plaçons-nous d'abord dans le cas du triangle équilatéral :

LEMME 7.4. *si  $n = 3$ , on peut se contenter de chercher  $f$  sous la forme :*

$$(7.24) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{3k} z^{3k}.$$

*Preuve du Lemme 7.4.* Ce lemme a une signification géométrique simple : on se contentera d'examiner les fonctions harmoniques  $P$  dont le gradient en chaque sommet  $S$  est colinéaire au vecteur  $\overline{OS}$ .

On donnera deux preuves de ce lemme, l'une analytique, et l'autre géométrique (cf paragraphe suivant), mais l'idée directrice est la même : c'est la symétrie du domaine qui apporte la réponse. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overline{\Omega}$ , dont la série entière a un rayon de convergence strictement supérieur à  $R$ .

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

On définit pour  $i = 0, 1, 2$

$$(7.25) \quad g_i(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{3k+i} z^{3k+i}.$$

On va montrer que  $g_0$  est meilleure que  $f$  pour notre problème, c'est-à-dire, si  $\phi$  (respectivement  $\psi_0$ ) désigne la fonction associée à  $f$  (respectivement à

$g_0$ ), alors :

$$(7. 26) \quad \begin{cases} \|g_0''\|_\infty \leq \|f''\|_\infty, \\ \|\nabla\psi_0\|_\infty \leq \|\nabla\phi\|_\infty. \end{cases}$$

En effet,  $|g_0''|$  est continue sur  $\overline{\Omega}$  donc est bornée et atteint sa borne supérieure sur  $\overline{\Omega}$ . D'après le principe du maximum, les points de maximum se trouvent sur le bord. Soit  $z_0$  un point de maximum de  $g''$ . Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir :

$$(7. 27) \quad \begin{cases} |f''(z_0)| < |g_0''(z_0)|, \\ |f''(z_0 e^{2i\pi/3})| < |g_0''(z_0 e^{2i\pi/3})|, \\ |f''(z_0 e^{-2i\pi/3})| < |g_0''(z_0 e^{-2i\pi/3})|. \end{cases}$$

Soit  $\beta_i := g_i''(z_0)$ . Comme  $f = g_0 + g_1 + g_2$ , le système (7. 27) peut être écrit

$$(7. 28) \quad \begin{cases} |\beta_0 + \beta_1 + \beta_2| < |\beta_0|, \\ |\beta_0 e^{-4i\pi/3} + \beta_1 e^{-2i\pi/3} + \beta_2| < |\beta_0 e^{-4i\pi/3}|, \\ |\beta_0 e^{4i\pi/3} + \beta_1 e^{2i\pi/3} + \beta_2| < |\beta_0 e^{4i\pi/3}|. \end{cases}$$

Si  $\beta_0 = 0$ , la contradiction est claire. Sinon, on définit :

$$\gamma_1 := \frac{\beta_1}{\beta_0} \quad \text{et} \quad \gamma_2 := \frac{\beta_2}{\beta_0}.$$

En divisant chaque équation par  $|\beta_0|$ , le système (7. 28) devient :

$$(7. 29) \quad \begin{cases} |1 + \gamma_1 + \gamma_2| < 1, \\ |1 + \gamma_1 e^{2i\pi/3} + \gamma_2 e^{-2i\pi/3}| < 1, \\ |1 + \gamma_1 e^{-2i\pi/3} + \gamma_2 e^{2i\pi/3}| < 1. \end{cases}$$

Or, cela est absurde :

$$\begin{aligned} |1 + \gamma_1 + \gamma_2|^2 + |1 + \gamma_1 e^{2i\pi/3} + \gamma_2 e^{-2i\pi/3}|^2 + |1 + \gamma_1 e^{-2i\pi/3} + \gamma_2 e^{2i\pi/3}|^2 \\ = 3(1 + |\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2) \geq 3 \end{aligned}$$

Donc

$$\|g_0''\|_\infty \leq \|f''\|_\infty.$$

On réalise exactement la même étude sur  $\|\nabla\psi_0\|_\infty$  et  $\|\nabla\phi\|_\infty$  : on suppose qu'il existe  $z_1$  un point de maximum de  $\|\nabla\psi_0\|_\infty$  tel que :

$$(7. 30) \quad \begin{cases} \|\nabla\phi(z_1)\| < \|\nabla\psi_0(z_1)\|, \\ \|\nabla\phi(z_1 e^{2i\pi/3})\| < \|\nabla\psi_0(z_1 e^{2i\pi/3})\|, \\ \|\nabla\phi(z_1 e^{-2i\pi/3})\| < \|\nabla\psi_0(z_1 e^{-2i\pi/3})\|. \end{cases}$$

En notant

$$\begin{cases} \delta_0 := \sum_{k=0}^{+\infty} 3k a_{3k} z_1^{3k-1} + \frac{1}{2} \overline{z_1}, \\ \delta_1 := \sum_{k=0}^{+\infty} (3k+1) a_{3k+1} z_1^{3k}, \\ \delta_2 := \sum_{k=0}^{+\infty} (3k+2) a_{3k+2} z_1^{3k+1}, \end{cases}$$

on retrouve un système de la forme (7. 28). ■

De la même manière, si  $\Omega$  est le polygone régulier à  $n$  côtés, il convient de rechercher  $f$  sous la forme :

$$(7.31) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{kn} z^{kn}.$$

### 2.3. Calculs explicites : première étude.

Au vu des résultats précédents, on va commencer par étudier ce que nous donne la fonction  $f$  :

$$(7.32) \quad f(z) = a_n z^n.$$

Pour que  $\nabla P$  soit rentrant aux sommets, il convient de prendre  $a_n$  de la forme :

$$a_n = -\varepsilon \frac{1}{n R^{n-2}},$$

avec  $\varepsilon > 0$ . Cela nous donne alors les relations :

$$(7.33) \quad \nabla \phi(z) = \frac{z}{2} - \varepsilon \frac{\bar{z}^{n-1}}{R^{n-2}},$$

$$(7.34) \quad \lambda_1(\phi) = \frac{1}{2} - \varepsilon(n-1).$$

D'après le Lemme 7.2, on prendra  $\varepsilon \in [0, \frac{1}{6(n-1)}]$ . De plus, la relation

$$|\nabla \phi(z)| = |\nabla \phi(z e^{2i\pi/n})|$$

nous permet de restreindre l'étude de  $\|\nabla \phi\|_\infty$  à n'importe quel côté du polygone.

- Si  $n$  est impair,  $n = 2n' + 1$ , les calculs seront plus simples si on étudie sur le segment vertical  $I_{n'} := [R e^{2in'\pi/n}, R e^{2i(n'+1)\pi/n}]$ .
- Dans le cas où  $n$  est pair, on effectuera au préalable une rotation d'angle  $\frac{\pi}{n}$  sur le domaine, de manière à ce qu'il présente un côté vertical.

On commence par traiter le cas  $n$  impair. Soit  $z \in I_{n'}$  :

$$z = R \cos \frac{2\pi n'}{n} + iy, \quad y \in [-R \sin \frac{2\pi n'}{n}, R \sin \frac{2\pi n'}{n}].$$

On notera :

$$(7.35) \quad \rho := R \cos \frac{2\pi n'}{n} = -R \cos \frac{\pi}{n},$$

$$(7.36) \quad Y := y^2,$$

$$(7.37) \quad Y_{\max} := \left( R \sin \frac{2\pi n'}{n} \right)^2 = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

A l'aide de ces notations, on peut écrire sur  $I_{n'}$  :

$$\begin{aligned} \|\nabla \phi(z)\|^2 &= \frac{1}{4}(\rho^2 + Y) - \frac{\varepsilon \rho}{R^{n-2}} \sum_{q=0}^{n'} C_n^{2q} (-1)^q \rho^{n-2q-1} Y^q \\ &\quad + \left( \frac{\varepsilon}{R^{n-2}} \right)^2 (\rho^2 + Y)^{n-1}. \end{aligned}$$

On note  $F_\varepsilon(Y)$  la fonction ainsi obtenue. Le but étant de calculer  $\|\nabla\phi\|_\infty$ , on va étudier les variations de  $F_\varepsilon$ . Montrons que  $F_\varepsilon$  est convexe sur  $[0, Y_{\max}]$ :

$$F_\varepsilon''(Y) = -\frac{\varepsilon\rho}{R^{n-2}} \sum_{q=0}^{n'} q(q-1)C_n^{2q}(-1)^q \rho^{n-2q-1} Y^{q-2} \\ + (n-1)(n-2) \left(\frac{\varepsilon}{R^{n-2}}\right)^2 (\rho^2 + Y)^{n-3}.$$

- si  $n' \leq 2$ ,  $F_\varepsilon''$  est clairement positive.
- si  $n' \geq 3$ , on groupe les termes deux par deux; il suffit alors de montrer que  $J_q$  est positif ou nul,  $J_q$  étant défini pour tout  $q$  pair par :

$$J_q := q(q-1)C_n^{2q}(-1)^q \rho^{n-2q-1} Y^{q-2} + (q+1)qC_n^{2q+2}(-1)^{(q+1)} \rho^{n-2q-3} Y^{q-1}.$$

$F_\varepsilon''$  s'écrira alors comme la somme de termes positifs.

$$J_{2k}(Y) = 2k\rho^{n-4k-3}Y^{2k-2} \left( (2k-1)C_n^{4k}\rho^2 - (2k+1)C_n^{4k+2}Y \right) \\ = \frac{n!2k\rho^{n-1-4k-2}Y^{2k-2}}{(4k)!(n-4k-2)!} \left( \frac{2k-1}{(n-4k)(n-4k-1)}\rho^2 - \frac{2k+1}{(4k+2)(4k+1)}Y \right).$$

$J_{2k}(Y)$  est du même signe que  $V_{2k}(Y) := \left( \frac{2k-1}{(n-4k)(n-4k-1)}\rho^2 - \frac{2k+1}{(4k+2)(4k+1)}Y \right)$ .

Or la suite  $\left( \frac{2k-1}{(n-4k)(n-4k-1)} \right)_k$  est croissante, tandis que  $\left( \frac{1}{2(4k+1)} \right)_k$  est décroissante. On en déduit :

$$V_{2k}(Y) \geq V_2(Y_{\max}) = \frac{1}{(n-4)(n-5)}\rho^2 - \frac{1}{10}Y_{\max} \\ \geq \left( \frac{10}{(n-4)(n-5)} - \tan^2 \frac{\pi}{n} \right) \frac{\rho^2}{10}.$$

Comme, pour tout  $n \geq 7$ ,

$$\tan^2 \frac{\pi}{n} \leq \frac{10}{(n-4)(n-5)},$$

on en déduit que  $F_\varepsilon''$  est positive, donc que  $F_\varepsilon$  est convexe. Ainsi :

$$\|F_\varepsilon\|_\infty = \sup\{F_\varepsilon(0), F_\varepsilon(Y_{\max})\}.$$

Maintenant que l'on connaît le comportement de la fonction  $F_\varepsilon$  à  $\varepsilon$  fixé, il nous reste à choisir  $\varepsilon$  de telle sorte que  $\|F_\varepsilon\|_\infty$  soit le plus petit possible. Pour cela, on va regarder comment se comporte  $\|F_\varepsilon\|_\infty$  en fonction de  $\varepsilon$ .

$$F_\varepsilon(0) = \left( \frac{1}{2}\rho - \varepsilon \frac{\rho^{n-1}}{R^{n-2}} \right)^2 \text{ croît quand } \varepsilon \text{ croît, car } \rho < 0;$$

$$F_\varepsilon(Y_{\max}) = |\nabla\phi(Re^{\frac{2i\pi n'}{n}})|^2 = |\nabla\phi(R)|^2 = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 R^2 \text{ décroît quand } \varepsilon \text{ croît.}$$

Pour minimiser  $\|\nabla\phi\|_\infty$ , on choisira donc si possible  $\varepsilon$  tel que :

$$F_\varepsilon(0) = F_\varepsilon(Y_{\max}),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{n} + \varepsilon \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

ce qui nous donne la valeur annoncée dans le Théorème 7.1 :

$$\varepsilon = \varepsilon_n := \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{1 + (\cos \frac{\pi}{n})^{n-1}}.$$

(Dans le cas  $n$  pair, on commence par effectuer une rotation d'angle  $\frac{\pi}{n}$  sur le domaine, de manière à pouvoir travailler sur un côté vertical. Les résultats sont alors identiques.) Toutefois, encore faut-il vérifier que cette valeur est dans l'intervalle dans lequel on cherche a priori  $\varepsilon : [0, \frac{1}{6(n-1)}]$ . En calculant les valeurs numériques, on se rend compte que

- si  $n \leq 8$ ,  $\varepsilon_n > \frac{1}{6(n-1)}$ , la meilleure valeur de  $\varepsilon$  est donc  $\frac{1}{6(n-1)}$ ; alors :

$$\omega(\phi) = 6\|\nabla\phi\|_\infty = 6|\nabla\phi(R)| = (3 - \frac{1}{n-1})R;$$

- si  $n \geq 9$ ,  $\varepsilon_n \leq \frac{1}{6(n-1)}$ , alors la meilleure valeur de  $\varepsilon$  est  $\varepsilon_n$  et :

$$\omega(\phi) = (3 - 6\varepsilon_n)R. \blacksquare$$

#### 2.4. Calculs explicites : deuxième étude.

Dans le cas du triangle équilatéral, on peut pousser un peu plus loin les calculs explicites, et travailler avec des perturbations de la forme :

$$(7.38) \quad f(z) = az^3 + bz^6 \quad \text{et} \quad P(z) = \operatorname{Re} f(z).$$

On impose la relation :

$$(7.39) \quad \nabla P(R) = (-R, 0) \quad \text{i.e.} \quad 3aR^2 + 6bR^5 = -R,$$

de telle sorte que, si  $\phi(z) = \frac{1}{4}|z|^2 + \varepsilon f(z)$ , alors :

$$|\nabla\phi(A)| = (\frac{1}{2} - \varepsilon)R.$$

Commençons par étudier  $\|f''\|_\infty$ .

Rappelons que le cas étudié dans le paragraphe précédent était celui de :

$$aR = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad b = 0,$$

et on obtenait :

$$\|f''\|_\infty = |f''(R)| = 2.$$

Or, plus  $\|f''\|_\infty$  est petite, plus on pourra choisir  $\varepsilon$  grand, et donc augmenter le rôle de la perturbation. Dans le cas étudié à présent :

$$|f''(R)| = |6aR + 30bR^4| = 5 + 9aR.$$

On choisira donc  $aR \leq -\frac{1}{3}$ , et par suite  $b \geq 0$ , dans le but de diminuer  $\|f''\|_\infty$ . Soit  $\alpha := -5\frac{b}{a} \geq 0$ .

$$\begin{aligned} f''(z) &= 6az(1 - \alpha z^3), \\ |f''(z)|^2 &= (6a)^2(x^2 + y^2) \left(1 - 2\alpha(x^3 - 3xy^2) + \alpha^2(x^2 + y^2)^3\right). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on se place sur le côté vertical; on note  $\rho = -\frac{R}{2}$  et  $Y = y^2$ . On définit :

$$G(Y) := (\rho^2 + Y) \left( 1 - 2\alpha\rho(\rho^2 - 3Y) + \alpha^2(\rho^2 + Y)^3 \right)$$

$$\frac{d^2G}{dY^2}(Y) = 12\alpha \left( -\frac{R}{2} + \alpha(\rho^2 + Y)^2 \right)$$

On obtient le tableau de variations suivant :

Y	0	$Y_{\max} = \frac{3R^2}{4}$
$\frac{d^2G}{dY^2}$	$G''(0) = 12\alpha \left( -\frac{R}{2} + \alpha\frac{R^4}{16} \right)$	$G''(Y_{\max}) = 12\alpha \left( -\frac{R}{2} + \alpha R^4 \right)$

Premier cas :  $\alpha R^3 \leq \frac{1}{2}$ . Alors  $G''(Y_{\max}) \leq 0$ , et donc  $G'$  est décroissante :

Y	0	$Y_{\max} = \frac{3R^2}{4}$
$\frac{dG}{dY}$	$G'(0) = (2\alpha\rho^3 + 1)^2 \geq 0$	$G'(Y_{\max}) = (\alpha R^3 - 1)(4\alpha R^3 - 1)$

Les résultats vont donc dépendre de la position de  $\alpha$  par rapport à  $\frac{1}{4}$ .

- si  $\alpha R^3 \leq \frac{1}{4}$ ,  $G$  est croissante, et donc  $\|f''\|_{\infty} = |f''(R)|$ . En particulier, pour  $\alpha R^3 = \frac{1}{4}$ , c'est-à-dire :

$$\text{pour } aR = -\frac{10}{27} \text{ et } bR^4 = \frac{1}{54}, \text{ on obtient } \|f''\|_{\infty} = \frac{5}{3}.$$

- si  $\alpha R^3 \in \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$  : le graphe de  $G$  a l'allure suivante :

Y	0	$Y_{\max} = \frac{3R^2}{4}$
G		

On voit alors numériquement que la plus petite valeur de  $\|f''\|_{\infty}$  est obtenue pour

$$aR \simeq -0,4 \text{ et } bR^3 \simeq 0,033;$$

et alors :

$$\|f''\|_{\infty} \simeq 1,56.$$

A l'aide de ces valeurs, on étudie les variations de

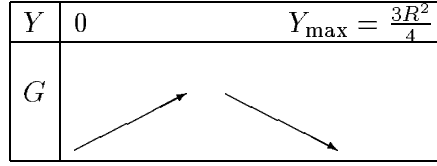
$$|\nabla\phi(z)|^2, \text{ avec } \nabla\phi(z) = \frac{z}{2} + \varepsilon\overline{f'(z)}.$$

On voit aisément que  $|\nabla\phi|^2$  est une fonction croissante de  $Y$  sur  $\left[0, \frac{3R^2}{4}\right]$ ; on en déduit que :

$$6\|\nabla\phi\|_{\infty} = 6|\nabla\phi(R)| = 6\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)R \leq 2,36R.$$

ce qui donne l'estimation (7. 15) annoncée.

Deuxième cas : si  $\alpha R^3 \geq \frac{1}{2}$ , le graphe de  $G$  a l'allure suivante :



et les résultats sont moins bons. (Le rôle de la perturbation devient trop important.)

Pour terminer, voici ce que donne l'étude numérique :

$\alpha R^3$	$aR$	$\ f''\ _\infty$	$6\ \nabla\phi\ _\infty$
0,25	-0,370	1,666	2,400 R
0,3	-0,379	1,61	2,379 R
0,42	-0,400	1,562	2,359 R
0,43	-0,402	1,5617	2,359 R
0,44	-0,404	1,5618	2,36 R
0,45	-0,406	1,562	2,36 R
0,47	-0,41	1,564	2,361 R
0,5	-0,416	1,57	2,363 R
0,55	-0,43	1,58	2,367 R
0,6	-0,44	1,60	2,375 R
0,65	-0,45	1,63	2,386 R

**2.5. Remarques sur les calculs précédents.**

Quand on trace le graphe de  $|\nabla\phi|^2$  sur  $[0, Y_{\max}]$ , dans les trois cas étudiés i.e.

1.  $f(z) = 0$ ,
2.  $f(z) = az^3$ ,
3.  $f(z) = az^3 + bz^6$ ,

on se rend compte que l'effet de la perturbation tend à "aplatir" le graphe de  $|\nabla\phi|^2$  :

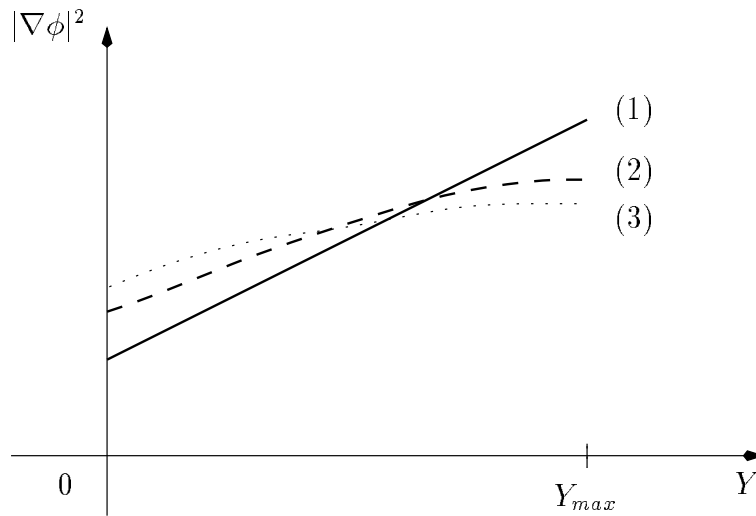


Fig. 7- Allure de  $|\nabla\phi|^2$  dans les 3 cas étudiés



Existe-il une méthode pour trouver la meilleure fonction holomorphe  $f$ , celle qui donne le résultat optimal? Les deux études précédentes ne nous permettent pas d'entrevoir une façon de la construire.

### 3. Cas de la dimension d'espace 3.

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , avec  $N \geq 3$ , ayant un bord  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . D'après le Théorème 5.3, si  $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$  est presque étoilé et sous certaines conditions sur le feedback, on obtient la stabilisation uniforme des solutions de l'équation des ondes sur  $\Omega$ . On se place dans le cas :

$$(7.40) \quad \Gamma_0 = \emptyset,$$

$$(7.41) \quad q = 0.$$

On suppose que  $(\Omega, \emptyset, \Gamma)$  est presque étoilé. Soit  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overline{\Omega}$  vérifiant :

$$(7.42) \quad \Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega,$$

$$(7.43) \quad \lambda_1(\phi) > 0,$$

$$(7.44) \quad \partial_\nu\phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Pour tout  $x \in \Omega$ ,  $D^2\phi(x)$  est une matrice carrée symétrique réelle possédant  $N$  valeurs propres supérieures ou égales à  $\lambda_1(\phi)$  et de somme 1. On en déduit que :

$$\lambda_1(\phi) \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{3}.$$

Dans le cas où  $\Omega$  est étoilé, peut-on espérer effectuer un travail similaire à celui fait sur les polygones réguliers, sur le triangle équilatéral par exemple, où, à l'aide de fonctions  $\phi$  adaptées à la géométrie du domaine, on a réussi à augmenter le taux de décroissance de l'énergie? Bien qu'il soit toujours possible de corriger  $\nabla\phi_0$  par le gradient d'une fonction harmonique si le domaine présente des angles (un tétraèdre par exemple), une difficulté d'ordre technique interdit d'améliorer les résultats : en dimension 2, le Lemme 7.2 montrait la nécessité de la relation  $\lambda_1(\phi) \geq \frac{1}{3}$ . Mais en dimension  $N \geq 3$ ,

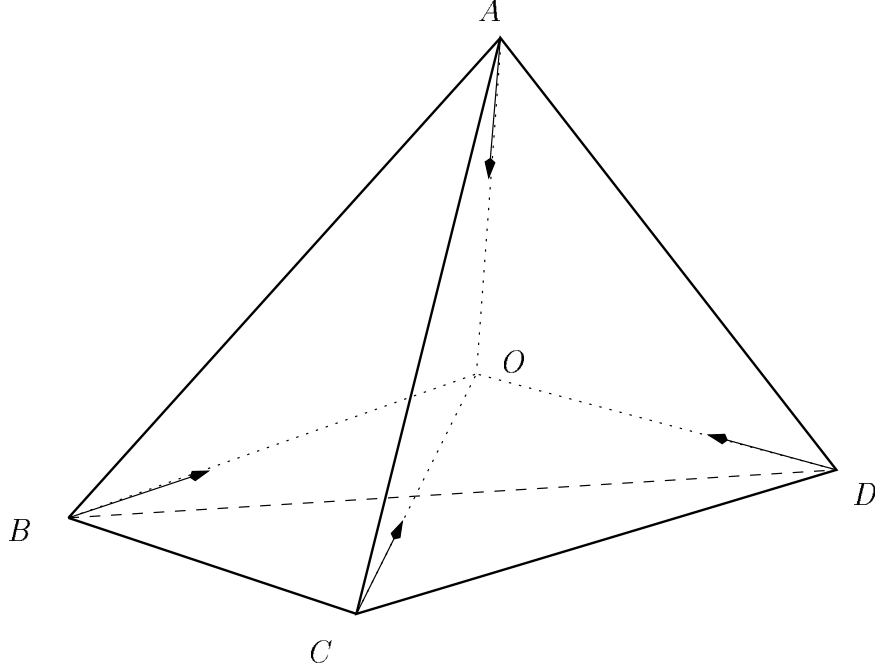
$$N\lambda_1(\phi) \leq \Delta\phi = 1 \text{ donc } \lambda_1(\phi) \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{3}.$$

Pour simplifier, on va se placer dans le cas où  $\Omega$  est le tétraèdre régulier  $ABCD$  (voir la Figure 8).

**PROPOSITION 7.2.** *Soit  $\Omega$  le tétraèdre régulier  $ABCD$  centré en  $O$ . soit  $\phi$  vérifiant (7.42)-(7.44). Alors :*

$$(7.45) \quad \omega(\phi) = \frac{\lambda_1(\phi)}{2\|\nabla\phi\|_\infty} \leq \frac{1}{2R}.$$

**Remarque.** La Proposition 7.2 assure qu'on ne peut pas améliorer le taux de décroissance de l'énergie en dimension 3 avec des fonctions  $\phi$  vérifiant (7.42)-(7.44). Des perturbations de  $\phi_0(x) := \frac{1}{6}|x|^2$  vérifiant les conditions plus générales (4.1)-(4.3) semblent ne pas donner de taux de décroissance meilleur non plus.

Fig. 8- Comportement du champs de vecteurs  $\nabla P$  sur le bord du tétraèdre

*Preuve de la Proposition 7.2.* Soit

$$(7.46) \quad \phi_0(x) = \frac{1}{6}|x|^2 \text{ et } P = \phi - \phi_0.$$

On sait que :

$$\lambda_1(\phi) = \frac{1}{3} + \lambda_1(P) \leq \frac{1}{3} = \lambda_1(\phi_0).$$

Si l'on veut que

$$(7.47) \quad 2 \frac{\|\nabla\phi\|_\infty}{\lambda_1(\phi)} < 2 \frac{\|\nabla\phi_0\|_\infty}{\lambda_1(\phi_0)} = 2R,$$

il faut donc que  $\nabla P$  soit rentrant aux points où  $\|\nabla\phi_0\|$  est maximal, c'est-à-dire aux sommets. Compte-tenu des symétries du domaine, on verra par la suite que l'on peut supposer que  $P$  est de la forme :

$$(7.48) \quad P = \varepsilon \tilde{P},$$

avec  $\varepsilon > 0$  et  $\tilde{P}$  harmonique sur  $\Omega$  et vérifiant :

$$(7.49) \quad \nabla \tilde{P}(S) = -\overrightarrow{OS} \text{ pour tout sommet } S.$$

Supposons pour l'instant que  $P$  est de cette forme. Alors :

$$(7.50) \quad \|\nabla\phi\|_\infty \geq \|\nabla\phi(S)\| = \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)R.$$

Si (7.47) est réalisée,  $\tilde{P}$  vérifie :

$$(7.51) \quad 2R \frac{\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)}{\frac{1}{3} + \varepsilon \lambda_1(\tilde{P})} < 2R,$$

donc

$$1 + \lambda_1(\tilde{P}) > 0.$$

Or, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel,

$$\forall x \in \Omega : \nabla \tilde{P}(x) - \nabla \tilde{P}(O) = \int_0^1 D^2 \tilde{P}(tx) \cdot x dt.$$

On définit la matrice symétrique

$$(7.52) \quad T(x) = D^2 \tilde{P}(x) + \text{Id}_N.$$

Comme sa plus petite valeur propre vaut  $\lambda_1(\tilde{P}) + 1$ ,  $T(x)$  est définie positive. On peut alors écrire :

$$\forall x \in \Omega : \nabla \tilde{P}(x) = \nabla \tilde{P}(O) + \int_0^1 T(tx) \cdot x dt - x.$$

Donc, si  $S$  est l'un des sommets :

$$\nabla \tilde{P}(O) + \int_0^1 T(t\overrightarrow{OS}) \cdot \overrightarrow{OS} dt = 0.$$

En effectuant le produit scalaire par  $\overrightarrow{OS}$  et en ajoutant les quatre identités obtenues, on en déduit :

$$\left( \nabla \tilde{P}(O) | \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \right) + \sum_{S=A,B,C,D} \int_0^1 \left( T(t\overrightarrow{OS}) \cdot \overrightarrow{OS} | \overrightarrow{OS} \right) dt = 0.$$

Mais  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$ . Comme les fonctions

$$t \in [0, 1] \mapsto \left( T(t\overrightarrow{OS}) \cdot \overrightarrow{OS} | \overrightarrow{OS} \right)$$

sont positives, continues et non nulles, on aboutit à une contradiction. ■

Montrons maintenant que l'hypothèse (7.49) est justifiée : (7.49) est l'analogie en dimension 3 du Lemme 7.4, dont on avait fait une preuve analytique. Pour simplifier, on va faire une preuve géométrique du Lemme 7.4, preuve qui peut s'adapter en dimension 3.

*Preuve géométrique du lemme 7.4.* Soit  $\phi$  vérifiant (7.42)-(7.44) sur le triangle équilatéral  $\Omega$  de sommets  $R, Re^{2i\pi/3}, Re^{4i\pi/3}$ . On va utiliser les symétries du domaine pour construire  $\tilde{\phi}$  vérifiant (7.42)-(7.44) sur  $\Omega$  et en plus :

$$(7.53) \quad \nabla \tilde{\phi}(S) = -\overrightarrow{OS} \text{ pour tout sommet } S,$$

$$(7.54) \quad \|\nabla \tilde{\phi}\|_\infty \leq \|\nabla \phi\|_\infty,$$

$$(7.55) \quad \lambda_1(\tilde{\phi}) \geq \lambda_1(\phi).$$

On considère d'abord :

$$(7.56) \quad \phi_1(z) = \frac{1}{3} \left( \phi(z) + \phi(ze^{2i\pi/3}) + \phi(ze^{4i\pi/3}) \right).$$

Alors :

$$(7. 57) \quad \phi_1 = \phi_0 + P_1,$$

$$(7. 58) \quad \text{avec } P_1(z) = \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left( f(z) + f(ze^{2i\pi/3}) + f(ze^{4i\pi/3}) \right) = \operatorname{Re} f_1(z).$$

où  $f$  est la fonction holomorphe de partie réelle  $P = \phi - \frac{1}{4}|z|^2$ . On en déduit que  $P_1$  est harmonique, et donc que  $\phi_1$  vérifie (7. 42). D'autre part, il est clair que

$$\|f_1''\|_\infty \leq \|f''\|_\infty,$$

donc

$$(7. 59) \quad \lambda_1(\phi_1) \geq \lambda_1(\phi) > 0.$$

Enfin, on s'intéresse à  $\partial_\nu \phi_1$  :

$$\begin{aligned} \left( \nabla \phi_1(z) | \nu(z) \right) &= \frac{1}{3} \left[ \left( \nabla \phi(z) | \nu(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \nabla (\phi(ze^{2i\pi/3})) | \nu(z) \right) + \left( \nabla (\phi(ze^{4i\pi/3})) | \nu(z) \right) \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\nabla (\phi(ze^{2i\pi/3})) = r_{-2\pi/3} \cdot \nabla \phi(ze^{2i\pi/3})$$

où  $r_{-2\pi/3}$  désigne la rotation d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$ . On en déduit :

$$(7. 60) \quad \partial_\nu \phi_1(z) = \frac{1}{3} \left( \partial_\nu \phi(z) + \partial_\nu \phi(ze^{2i\pi/3}) + \partial_\nu \phi(ze^{4i\pi/3}) \right)$$

Donc,  $\phi_1$  satisfait (7. 42)-(7. 44), et (7. 55). Mais  $\phi_1$  ne satisfait pas encore (7. 53). Pour cela, on définit :

$$(7. 61) \quad \phi_2(z) = \phi_1(\bar{z}).$$

Clairement,

$$\Delta \phi_2 = \Delta \phi_1 = 1.$$

Et même mieux : en tout point  $z \in \Omega$ , la matrice  $D^2 \phi_2(z)$  possède la même trace et le même déterminant que  $D^2 \phi_1(\bar{z})$ . Ces deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres. Donc :

$$\lambda_1(\phi_2) = \lambda_1(\phi_1).$$

D'autre part,  $\phi_2$  vérifie :

$$\phi_2(z) = \phi_2(ze^{2i\pi/3}).$$

Il suffit donc d'étudier la dérivée normale de  $\phi_2$  sur l'un des côtés. On choisit le côté vertical :

$$\partial_\nu \phi_2(z) = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, -y) = \partial_\nu \phi_1(\bar{z}) \geq 0.$$

Pour conclure, on considère la moyenne de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , que l'on appelle  $\tilde{\phi}$ .  $\tilde{\phi}$  satisfait clairement (7. 42) et (7. 44). De plus, soit  $Y \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \left( D^2 \tilde{\phi}(z).Y|Y \right) &= \frac{1}{2} \left[ \left( D^2 \phi_1(z).Y|Y \right) + \left( D^2 \phi_2(z).Y|Y \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \lambda_1(\phi_1) \|Y\|^2 + \lambda_1(\phi_2) \|Y\|^2 \right) \\ &\geq \lambda_1(\phi) \|Y\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lambda_1(\tilde{\phi}) \geq \lambda_1(\phi) > 0.$$

D'autre part :

$$(7. 62) \quad \nabla \tilde{\phi}(A) = \frac{1}{2} \left( \nabla \phi_1(A) + \nabla \phi_2(A) \right) = \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(R, 0), 0 \right).$$

Donc  $\nabla \tilde{\phi}(A)$  est colinéaire à  $\overrightarrow{OA}$ . Il en est de même pour les autres sommets  $B$  et  $C$ . Enfin, il est clair que :

$$\|\nabla \tilde{\phi}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \left( \|\nabla \phi_1\|_\infty + \|\nabla \phi_2\|_\infty \right) = \|\nabla \phi_1\|_\infty \leq \|\nabla \phi\|_\infty. \blacksquare$$

Cette preuve géométrique du Lemme 7.4 s'adapte au cas de la dimension 3 en effectuant de manière similaire des moyennes, et en utilisant les symétries du domaine.

La méthode qui consiste à corriger la fonction  $\phi_0$  par des fonctions harmoniques adéquates ne donne donc aucun résultat en dimensions strictement supérieures à 2 quant à l'amélioration du taux de décroissance de l'énergie, comme semblait le suggérer le résultat du Lemme 7.2.

## STABILISATION UNIFORME DES ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS DES DOMAINES PRESQUE ÉTOILÉS

On étend des résultats de V. Komornik [44] concernant la stabilisation uniforme des équations de Maxwell aux cas de domaines presque étoilés de dimension 3. La condition essentielle ne sera plus :  $\lambda_1(\phi) > 0$  comme pour l'équation des ondes, mais :  $\lambda_1(\phi) > \frac{1}{4}$ . En imitant les études réalisées dans le premier chapitre, on peut aisément construire des domaines admissibles non étoilés. B. V. Kapitov [41] a déjà obtenu des résultats de stabilisation uniforme dans une classe d'ouverts non étoilés.

### 1. Problème étudié et principaux résultats

On considère le problème :

$$\begin{aligned}
 (8. 1) \quad & E' = \text{rot } H \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\
 (8. 2) \quad & H' = -\text{rot } E \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\
 (8. 3) \quad & \text{div } E = \text{div } H = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\
 (8. 4) \quad & \nu \times (E \times \nu + H) = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\
 (8. 5) \quad & E(0) = E^0, H(0) = H^0 \text{ dans } \Omega.
 \end{aligned}$$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant : il existe  $\phi$  appartenant à  $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  telle que :

$$(8. 6) \quad \begin{cases} \Delta \phi = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \lambda_1(\phi) > \frac{1}{4}, \\ \partial_\nu \phi > 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On notera  $\nu$  le vecteur unitaire normal sortant de  $\Gamma$ . Comme de coutume dans l'étude des équations de Maxwell, on introduit l'espace d'énergie :

$$\mathcal{H} = \{(E, H) \in L^2(\Omega)^6, \text{div } E = \text{div } H = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

C'est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit de la norme :

$$\|(E, H)\|_{\mathcal{H}} = \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ (E, H) &\mapsto \mathcal{A}(E, H) = (-\operatorname{rot} H, \operatorname{rot} E), \\ \text{avec } \mathcal{D}(\mathcal{A}) &:= \{(E, H) \in H^1(\Omega)^6 \cap \mathcal{H}, \nu \times (E \times \nu + H) = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \end{aligned}$$

Le problème (8. 1)-(8. 5) peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} (E, H)' + \mathcal{A}(E, H) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \\ (E, H)(0) = (E^0, H^0). \end{cases}$$

D'après H. Barucq et B. Hanouzet [9],  $\mathcal{A}$  est maximal monotone sur  $\mathcal{H}$ . En appliquant le théorème de Hille-Yosida, on obtient le théorème d'existence suivant :

**THÉORÈME 8.1.** 1. *Pour tout élément  $(E^0, H^0)$  de  $\mathcal{H}$ , il existe une unique solution faible*

$$(8. 7) \quad (E, H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H});$$

2. *Pour tout élément  $(E^0, H^0)$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , il existe une unique solution forte*

$$(8. 8) \quad (E, H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)^6) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^6).$$

On définit l'énergie des solutions par :

$$(8. 9) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |E(t)|^2 + |H(t)|^2 dx = \|(E, H)\|_{\mathcal{H}}^2(t).$$

**THÉORÈME 8.2.** *Soit  $(E^0, H^0) \in \mathcal{H}$ . L'énergie de la solution associée vérifie l'estimation suivante :*

$$(8. 10) \quad \forall t \geq 0, \quad \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) e^{1-\omega t} \text{ avec } \omega := \frac{4\lambda_1(\phi) - 1}{R(\phi) + \|\nabla\phi\|_{\infty}},$$

où

$$R(\phi) = \sup_{\Gamma} \frac{\|\nabla\phi\|_{\infty}^2}{\partial_{\nu}\phi}.$$

## 2. Preuve du Théorème 8.2

### 2.1. Identités fondamentales.

On va se contenter de prouver cette estimation pour des données initiales régulières  $(E^0, H^0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . On conclura en utilisant la densité de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{H}$ . La régularité des solutions donnée par la seconde partie du Théorème 8.1 montre la validité des calculs. On commence par montrer que l'énergie est décroissante :

**LEMME 8.1.** *Pour  $0 < S < T < +\infty$ , on a*

$$(8. 11) \quad \mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \int_{\Gamma} |E_{\tau}|^2 ds dt = \int_S^T \int_{\Gamma} |H_{\tau}|^2 ds dt,$$

où  $E_{\tau}$  et  $H_{\tau}$  désignent la composante tangentielle de  $E$  et  $H$ .

*Preuve du Lemme 8.1.* Grâce à la définition de l'énergie et la régularité des solutions :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(t) &= \int_{\Omega} E_1 E_1' + E_2 E_2' + E_3 E_3' + H_1 H_1' + H_2 H_2' + H_3 H_3' \\ &= \int_{\Omega} E \cdot \operatorname{rot} H - H \cdot \operatorname{rot} E \\ &= \int_{\Gamma} \nu \cdot (H \times E).\end{aligned}$$

On décompose  $E$  et  $H$  en partie tangentielle et partie normale :

$$E = E_{\tau} + E_{\nu} \text{ et } H = H_{\tau} + H_{\nu}.$$

En reportant cette décomposition dans la condition au bord (8. 4), on obtient :

$$(8. 12) \quad E_{\tau} = H_{\tau} \times \nu.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\nu \cdot (H \times E) &= \nu \cdot (H_{\tau} \times E_{\tau} + H_{\tau} \times E_{\nu} + H_{\nu} \times E_{\tau}) \\ &= \nu \cdot (H_{\tau} \times E_{\tau}) \\ &= -\nu \cdot (H_{\tau} \times \nu \times H_{\tau}) \\ &= -|H_{\tau}|^2 = -|E_{\tau}|^2.\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

L'outil principal pour la démonstration du Théorème 8.2 va être l'identité suivante :

LEMME 8.2.

$$(8. 13) \quad \begin{aligned}& \int_S^T \int_{\Gamma} (|E|^2 + |H|^2) \partial_{\nu} \phi \, ds \, dt + 2 \left[ \int_{\Omega} (E \times H) \cdot \nabla \phi \, dx \right]_S^T \\ & - 2 \int_S^T \int_{\Gamma} (H \cdot \nabla \phi)(H \cdot \nu) + (E \cdot \nabla \phi)(E \cdot \nu) \, ds \, dt \\ & = \int_S^T \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2 - 2(D^2 \phi \cdot E|E) - 2(D^2 \phi \cdot H|H) \, dx \, dt.\end{aligned}$$

*Preuve du Lemme 8.2.* On va obtenir cette identité par la méthode des multiplicateurs. Soit  $\phi$  vérifiant (8. 6).

$$\begin{aligned}2(E_1 H_2 \phi, 3)' &= 2(H_{3,2} - H_{2,3}) H_2 \phi, 3 + 2(E_{3,1} - E_{1,3}) E_1 \phi, 3 \\ &= 2H_{3,2} H_2 \phi, 3 + 2E_{3,1} E_1 \phi, 3 - (H_2^2)_{,3} \phi, 3 - (E_1^2)_{,3} \phi, 3; \\ 2(E_2 H_1 \phi, 3)' &= -2H_{3,1} H_1 \phi, 3 - 2E_{3,2} E_2 \phi, 3 (H_1^2)_{,3} \phi, 3 + (E_2^2)_{,3} \phi, 3.\end{aligned}$$

En intégrant leur différence sur  $\Omega \times [S, T]$ , on obtient :

$$\begin{aligned}2 \left[ \int_{\Omega} (E_1 H_2 - E_2 H_1) \phi, 3 \right]_S^T &= \int_S^T \int_{\Omega} -(H_1^2 + H_2^2 + E_1^2 + E_2^2)_{,3} \phi, 3 \\ & \quad + 2(H_{3,2} H_2 + H_{3,1} H_1 + E_{3,1} E_1 + E_{3,2} E_2) \phi, 3\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= - \int_S^T \int_{\Gamma} (H_1^2 + H_2^2 + E_1^2 + E_2^2) \phi_{,3} \nu_3 + \int_S^T \int_{\Omega} (H_1^2 + H_2^2 + E_1^2 + E_2^2) \phi_{,3,3} \\
&\quad + 2 \int_S^T \int_{\Gamma} H_3 H_2 \phi_{,3} \nu_2 + H_3 H_1 \phi_{,3} \nu_1 + E_3 E_1 \phi_{,3} \nu_1 + E_3 E_2 \phi_{,3} \nu_2 \\
&\quad - 2 \int_S^T \int_{\Omega} H_3 H_{2,2} \phi_{,3} + H_3 H_2 \phi_{,3,2} + H_3 H_{1,1} \phi_{,3} + H_3 H_1 \phi_{,3,1} \\
&\quad \quad - 2 \int_S^T \int_{\Omega} E_3 E_{1,1} \phi_{,3} + E_3 E_1 \phi_{,3,1} + E_3 E_{2,2} \phi_{,3} + E_3 E_2 \phi_{,3,2}.
\end{aligned}$$

Or  $\operatorname{div} E = \operatorname{div} H = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned}
-2 \int_{\Omega} (E_{1,1} + E_{2,2}) E_3 \phi_{,3} &= 2 \int_{\Omega} E_{3,3} E_3 \phi_{,3} = \int_{\Omega} (E_3^2)_{,3} \phi_{,3} \\
&= \int_{\Gamma} E_3^2 \phi_{,3} \nu_3 - \int_{\Omega} E_3^2 \phi_{,3,3}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
&2 \left[ \int_{\Omega} (E_1 H_2 - E_2 H_1) \phi_{,3} \right]_S^T \\
&\quad = - \int_S^T \int_{\Gamma} (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \phi_{,3} \nu_3 \\
&\quad \quad + 2 \int_S^T \int_{\Gamma} \phi_{,3} \nu_2 (H_2 H_3 + E_2 E_3) + \phi_{,3} \nu_1 (H_1 H_3 + E_1 E_3) \\
&\quad + 2 \int_S^T \int_{\Gamma} (H_3^2 + E_3^2) \phi_{,3} \nu_3 + \int_S^T \int_{\Omega} (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \phi_{,3,3} \\
&\quad - 2 \int_S^T \int_{\Omega} H_3 H_2 \phi_{,3,2} + H_3 H_1 \phi_{,3,1} + E_3 E_1 \phi_{,3,1} + E_3 E_2 \phi_{,3,2} + H_3^2 \phi_{,3,3} + E_3^2 \phi_{,3,3}
\end{aligned}$$

Deux identités analogues sont obtenues en faisant permuter cycliquement les indices 1, 2, 3. En ajoutant ces 3 identités, on obtient :

$$\begin{aligned}
2 \left[ \int_{\Omega} (E \times H) \cdot \nabla \phi \right]_S^T &= - \int_S^T \int_{\Gamma} (|E|^2 + |H|^2) \partial_{\nu} \phi \\
&\quad + 2 \int_S^T \int_{\Gamma} (H \cdot \nabla \phi) (H \cdot \nu) + (E \cdot \nabla \phi) (E \cdot \nu) \\
&\quad + \int_S^T \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2 - 2 \left( D^2 \phi \cdot E |E \right) - 2 \left( D^2 \phi \cdot H |H \right),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du Lemme 8.2. ■

### 2.2. Fin de la preuve du Théorème 8.2.

On va estimer les divers termes de (8. 13) :

LEMME 8.3.

$$\begin{aligned}
(8. 14) \quad \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2 - 2 \left( D^2 \phi \cdot E |E \right) - 2 \left( D^2 \phi \cdot H |H \right) \\
\geq (4\lambda_1(\phi) - 1) \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2.
\end{aligned}$$

*Preuve du Lemme 8.3.* Soit  $x \in \Omega$ .  $D^2\phi(x)$  une matrice carrée symétrique réelle définie positive. Soient  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$ ,  $\lambda_3(x)$  ses trois valeurs propres rangées par ordre croissant. Elles sont supérieures à  $\lambda_1(\phi)$ , et de somme 1 (car  $\phi$  satisfait (8. 6)). Alors :

$$\left( D^2\phi(x) \cdot E(x) |E(x)| \right) \leq \lambda_3(x) |E(x)|^2 \leq (1 - 2\lambda_1(\phi)) |E(x)|^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2 - 2(D^2\phi \cdot E|E) - 2(D^2\phi \cdot H|H) \\ \geq \left( 1 - 2(1 - 2\lambda_1(\phi)) \right) \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2 \\ \geq (4\lambda_1(\phi) - 1) \int_{\Omega} |E|^2 + |H|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 8.4.

$$(8. 15) \quad (|E|^2 + |H|^2)\partial_{\nu}\phi - 2(E \cdot \nabla\phi)(E \cdot \nu) - 2(H \cdot \nabla\phi)(H \cdot \nu) \\ \leq \frac{\|\nabla\phi\|^2}{\partial_{\nu}\phi} (|E_{\tau}|^2 + |H_{\tau}|^2).$$

*Preuve du Lemme 8.4.* Pour établir (8. 15), on utilise la condition au bord (8. 4) exprimée sous la forme (8. 12) :

$$E_{\tau} = H_{\tau} \times \nu.$$

En utilisant la décomposition en partie tangentielle et partie normale :

$$\begin{aligned} (|E|^2 + |H|^2)\partial_{\nu}\phi - 2(E \cdot \nabla\phi)(E \cdot \nu) - 2(H \cdot \nabla\phi)(H \cdot \nu) \\ = (|E_{\tau}|^2 + |E_{\nu}|^2 + |H_{\tau}|^2 + |H_{\nu}|^2)\partial_{\nu}\phi \\ - 2E_{\nu}(\nabla\phi_{\tau} \cdot E_{\tau} + \nabla\phi_{\nu}E_{\nu}) - 2H_{\nu}(\nabla\phi_{\tau} \cdot H_{\tau} + \nabla\phi_{\nu}H_{\nu}) \\ = (|E_{\tau}|^2 + |H_{\tau}|^2)\partial_{\nu}\phi - (|E_{\nu}|^2 + |H_{\nu}|^2)\partial_{\nu}\phi \\ - 2E_{\nu}\nabla\phi_{\tau} \cdot E_{\tau} - 2H_{\nu}\nabla\phi_{\tau} \cdot H_{\tau}. \end{aligned}$$

Mais on peut majorer les derniers termes par :

$$|2E_{\nu}\nabla\phi_{\tau} \cdot E_{\tau}| \leq \partial_{\nu}\phi |E_{\nu}|^2 + \frac{|\nabla\phi_{\tau}|^2}{\partial_{\nu}\phi} |E_{\tau}|^2.$$

Alors en reportant cette majoration, on obtient :

$$\begin{aligned} (|E|^2 + |H|^2)\partial_{\nu}\phi - 2(E \cdot \nabla\phi)(E \cdot \nu) - 2(H \cdot \nabla\phi)(H \cdot \nu) \\ \leq (|E_{\tau}|^2 + |H_{\tau}|^2) \left( \partial_{\nu}\phi + \frac{|\nabla\phi_{\tau}|^2}{\partial_{\nu}\phi} \right) \\ \leq (|E_{\tau}|^2 + |H_{\tau}|^2) \frac{\|\nabla\phi\|^2}{\partial_{\nu}\phi}. \blacksquare \end{aligned}$$

Ces estimations vont permettre de démontrer le Théorème 8.2 : définissons

$$(8. 16) \quad R(\phi) = \sup_{\Gamma} \frac{\|\nabla\phi\|^2}{\partial_{\nu}\phi}.$$

A l'aide de (8. 11) et des estimations (8. 14) et (8. 15), l'identité (8. 13) devient :

$$\begin{aligned} 2(4\lambda_1(\phi) - 1) \int_S^T \mathcal{E} &\leq \int_S^T \int_\Gamma \frac{\|\nabla\phi\|^2}{\partial_\nu\phi} (|E_\tau|^2 + |H_\tau|^2) + 2\|\nabla\phi\|_\infty (\mathcal{E}(S) + \mathcal{E}(T)) \\ &\leq 2R(\phi) (\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T)) + 2\|\nabla\phi\|_\infty (\mathcal{E}(S) + \mathcal{E}(T)). \end{aligned}$$

Or nécessairement :

$$R(\phi) \geq \|\nabla\phi\|_\infty;$$

donc :

$$(8. 17) \quad (4\lambda_1(\phi) - 1) \int_S^T \mathcal{E} \leq (R(\phi) + \|\nabla\phi\|_\infty) \mathcal{E}(S).$$

Le Lemme 1.1 donne alors l'estimation (8. 10). ■

### 3. Contrôlabilité exacte des équations de Maxwell sur un domaine presque étoilé

Les résultats précédents permettent d'affaiblir les conditions géométriques des résultats de V. Komornik [44] concernant la contrôlabilité exacte du système suivant :

$$(8. 18) \quad E' = \text{rot } H \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

$$(8. 19) \quad H' = -\text{rot } E \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

$$(8. 20) \quad \text{div } E = \text{div } H = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

$$(8. 21) \quad \nu \times H = J \text{ sur } \Gamma \times ]0, T[,$$

$$(8. 22) \quad E(0) = E^0, H(0) = H^0 \text{ dans } \Omega.$$

THÉORÈME 8.3. *Soit  $\Omega$  un domaine de classe  $\mathcal{C}^2$ , tel qu'il existe  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  vérifiant :*

$$(8. 23) \quad \begin{cases} \Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \lambda_1(\phi) > \frac{1}{4}, \\ \partial_\nu\phi \geq 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

*Soit*

$$(8. 24) \quad T > T_0 := \frac{R(\phi) + \|\nabla\phi\|_\infty}{4\lambda_1(\phi) - 1}.$$

*Alors, pour tout  $(E^0, H^0), (E^1, H^1) \in \mathcal{H}$ , il existe*

$$(8. 25) \quad J \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)^3)$$

*vérifiant*

$$(8. 26) \quad J \cdot \nu = 0 \text{ presque partout sur } \Gamma,$$

*et telle que la solution du système (8. 18)-(8. 22) vérifie :*

$$(8. 27) \quad E(T) = E^1, \text{ et } H(T) = H^1.$$

La preuve découle directement de l'application du principe de D. L. Russell [69]. On reviendra sur ce principe dans la Partie 3.

**STABILISATION DE L'ÉQUATION DES  
ONDES AVEC LA CONDITION DE NEUMANN  
AU BORD PAR UN FEEDBACK  
LOCALEMENT DISTRIBUÉ**

On considère le système de l'équation des ondes avec la condition de Neumann au bord, soumis à un terme d'amortissement localement distribuée dans le domaine. Ce terme d'amortissement est représenté par une fonction linéaire de la vitesse. Lorsque la dissipation est effective sur un voisinage de tout le bord, E. Zuazua a montré que l'énergie décroît exponentiellement.

A l'aide d'une méthode de multiplicateurs par morceaux, introduite par K. Liu, on montre le même type de résultats sous des conditions géométriques plus faibles. On donne des exemples explicites dans deux cas : lorsque le domaine est un polygone, et lorsque le domaine est un disque. La preuve est basée sur la construction de multiplicateurs adaptés aux conditions géométriques.

**1. Introduction**

Soit  $\Omega$  un domaine borné dans  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Le problème de la stabilisation de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet au bord à l'aide d'un feedback localement distribué a été étudié par de nombreux auteurs. Considérons le problème

$$(9.1) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)u' = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \end{cases}$$

Soient  $\alpha > 0$  et

$$(9.2) \quad \omega := \{x \in \Omega, a(x) > \alpha\}.$$

On définit l'énergie du système par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'^2 + |\nabla u|^2) dx$$

Il est facile de voir que si  $\omega = \Omega$ , l'énergie décroît exponentiellement. E. Zuazua [78] a montré cela reste vrai sous des conditions géométriques beaucoup plus faibles : il suffit que  $\omega$  contienne un voisinage de la partie du bord

$\Gamma(x^0)$  de  $\Omega$  définie par

$$(9.3) \quad \Gamma(x^0) := \{x \in \partial\Omega, (x - x^0) \cdot \nu(x) \geq 0\},$$

où  $x^0 \in \mathbb{R}^N$  et  $\nu(x)$  désigne le vecteur unitaire normal sortant en  $x \in \partial\Omega$ . Sa méthode est basée sur la construction d'un multiplicateur bien choisi, et s'adapte au cas plus général d'une équation des ondes semilinéaire :

$$(9.4) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)u' + f(u) = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \end{cases}$$

Récemment, K. Liu [56] a étudié l'observabilité d'une classe d'équations aux dérivées partielles. Il a étendu les résultats de E. Zuazua [76] en affaiblissant les conditions géométriques sur la région d'observation : en utilisant une méthode de multiplicateurs par morceaux, il a obtenu des conditions géométriques très générales et facilement vérifiables. K. Liu et M. Yamamoto [57] ont adapté cette méthode et des résultats d'analyse non harmonique développés par V. Komornik [44] pour établir l'observabilité du système de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet au bord sous les mêmes conditions géométriques et avec des estimations très précises sur la durée minimale  $T$  au delà de laquelle le système est observable. (on reviendra dans la Partie 4 sur ce problème.)

D'un autre côté, C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7] ont prouvé que si  $\Omega$  et  $a$  sont analytiques, l'énergie des solutions de (9.1) décroît exponentiellement si et seulement si  $\omega$  satisfait la "condition géométrique des rayons optiques" : il existe  $T > 0$  tel que tout rayon suivant les lois de réflexion de l'optique géométrique intersecte l'ensemble  $\omega \times (0, T)$ . Leur preuve est basée sur des techniques d'analyse micro-locale, et ne s'adapte pas au problème semilinéaire (9.4).

Considérons à présent le problème de l'équation des ondes avec la condition de Neumann au bord :

$$(9.5) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)u' + qu = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1 \end{cases}$$

où  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction positive non nulle. On définit l'énergie par

$$(9.6) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'^2 + |\nabla u|^2 + qu^2) dx.$$

La méthode employée par E. Zuazua [78] permet de prouver que l'énergie décroît exponentiellement si  $\omega$  contient un voisinage de *tout le bord* de  $\Omega$ , mais ne donne aucun résultat si  $\omega$  contient seulement un voisinage d'une partie du bord de  $\Omega$ .

Le résultat de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7] s'applique encore au problème (9.5) lorsque le domaine et la fonction  $a$  sont suffisamment régulières, mais ne s'applique plus si on remplace le terme  $qu$  par  $f(u)$ .

En adaptant cette méthode de multiplicateurs par morceaux aux problèmes posés par la condition de Neumann sur le bord, on donne des conditions géométriques suffisantes sous lesquelles on peut montrer la décroissance exponentielle de l'énergie pour les solutions de (9. 5). On donne ensuite des exemples d'application, en construisant explicitement des multiplicateurs adaptés au domaine considéré. Cela donne une réponse à une question soulevée par E. Zuazua dans [78].

## 2. Résultat principal

Soit  $\Omega$  un domaine borné dans  $\mathbb{R}^N$ , et  $\omega$  un sous-domaine de  $\Omega$ . Soient  $a, q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions continues positives. On suppose que  $x \mapsto a(x)q(x)$  n'est pas identiquement nulle. On considère le problème de l'équation des ondes avec la condition de Neumann au bord, soumis à un terme d'amortissement représenté par une fonction linéaire de la vitesse :

$$(9. 7) \quad u'' - \Delta u + a(x)u' + a(x)q(x)u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(9. 8) \quad \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(9. 9) \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1.$$

Comme d'habitude, on définit l'énergie par

$$(9. 10) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( u'^2 + |\nabla u|^2 + aq u^2 \right) dx.$$

On utilisera les notations suivantes :

- $x \cdot y$  représente le produit scalaire euclidien de  $x$  par  $y$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,
- si  $\Omega_j \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine Lipschitz,  $\nu_j$  représente le vecteur unitaire normal sortant au bord  $\partial\Omega_j$ ,
- si  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$  et  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $d(x, \mathcal{O}) = \inf_{y \in \mathcal{O}} |x - y|$ , et  $\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{O}) := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \mathcal{O}) < \varepsilon\}$ .

**Hypothèses géométriques :** on suppose satisfaites les conditions suivantes sur  $\Omega$  et  $\omega$  :

- $\Omega$  est convexe ou de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ . (Alors il existe une solution unique  $u(t)$  au problème (9. 7)-(9. 9) qui possède la régularité

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^{s_0}(\Omega))$$

avec un certain  $s_0 > \frac{3}{2}$ , suffisante pour justifier les calculs effectués par la suite.)

- il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta > 0$ , des sous-domaines  $\Omega_j \subset \Omega$ ,  $1 \leq j \leq J$ , ayant un bord Lipschitz  $\partial\Omega_j$ , des fonctions associées  $\phi_j \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_j})$  et des constantes  $\mu_j$  telles que

$$(9. 11) \quad \begin{cases} \Delta\phi_j(x) - \mu_j \geq \eta \text{ dans } \Omega_j, \\ 2\lambda_{1,j}(x) - \Delta\phi_j(x) + \mu_j \geq \eta \text{ dans } \Omega_j, \end{cases}$$

où  $\lambda_{1,j}(x)$  représente la plus petite valeur propre de la matrice symétrique  $D^2\phi_j(x)$ .

De plus on suppose que

$$(9.12) \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

$$(9.13) \quad \omega \supset \Omega \cap \mathcal{N}_\varepsilon \left[ \cup_j \Gamma_j^1(\phi_j) \cup \left( \Omega \setminus \cup_j \Omega_j \right) \right],$$

où

$$(9.14) \quad \Gamma_j^1(\phi_j) := \{x \in \partial\Omega_j : \partial_{\nu_j} \phi_j(x) \neq 0\}.$$

On a alors le résultat suivant

**THÉORÈME 9.1.** *Supposons les hypothèses (9.11)-(9.13) satisfaites. Supposons que  $a$  est minorée par une constante strictement positive  $\alpha$  sur  $\omega$  :*

$$(9.15) \quad a(x) \geq \alpha > 0 \text{ sur } \omega.$$

*Alors l'énergie décroît exponentiellement : il existe des constantes  $C, \gamma > 0$  telles que*

$$(9.16) \quad E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}.$$

**Remarque.** Le cas où  $\omega$  contient un voisinage de tout le bord (traité par E. Zuazua [78]) correspond au cas où on a un seul sous-domaine  $\Omega_1$  égal à  $\Omega$ , et on choisit

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2N}|x - x^0|^2, \quad \mu_1 = 1 - \frac{1}{N}, \quad \eta = \frac{1}{N}.$$

Dans le paragraphe suivant, on donne des exemples d'application du théorème, dans lesquels les conditions géométriques (9.11)-(9.13) sont satisfaites : on traite d'abord dans le cas d'un polygone, et ensuite le cas (plus difficile) du disque.

### 3. Exemples de géométries admissibles

Si  $\omega$  est un voisinage de tout le bord, il suffit de choisir un seul sous-domaine  $\Omega_1$ , égal à  $\Omega$ . On fixe  $x_1 \in \mathbb{R}^N$  et on considère

$$(9.17) \quad \phi_1(x) = \frac{1}{2N}|x - x_1|^2.$$

Alors

$$\forall x \in \Omega_1, \quad \Delta\phi_1(x) = 1 \text{ et } \lambda_{1,1}(x) = \frac{1}{N}.$$

On voit qu'en choisissant

$$\mu_1 = 1 - \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{1}{N},$$

(9.11)-(9.13) sont satisfaites.

Si  $a$  est nulle sur une partie d'intérieur non vide du bord  $\gamma$ ,  $\omega$  n'est pas un voisinage de tout le bord. On va essayer de construire  $\phi$  telle que sa dérivée normale soit nulle sur  $\gamma$  :

$$(9.18) \quad \begin{cases} \Delta\phi(x) - \mu \geq \eta \text{ dans } \tilde{\Omega}, \\ 2\lambda_1(x) - \Delta\phi(x) + \mu \geq \eta \text{ dans } \tilde{\Omega}, \\ \partial_\nu \phi = 0 \text{ sur } \gamma, \end{cases}$$

où  $\tilde{\Omega}$  est un sous-domaine de  $\Omega$  tel que

$$\partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega = \gamma.$$

En particulier, les conditions (9. 11)-(9. 13) sont satisfaites si les conditions suivantes, plus facilement manipulables, le sont : il existe des sous-domaines  $\Omega_j \subset \Omega, 1 \leq j \leq J$  avec un bord  $\partial\Omega_j$  Lipschitz et des fonctions  $\phi_j \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_j})$  telles que

$$(9. 19) \quad \begin{cases} \Delta\phi_j(x) = 1 \text{ dans } \Omega_j, \\ \lambda_1(\phi_j) := \inf \{\lambda_{1,j}(x), x \in \Omega_j\} > 0 \\ \partial_\nu\phi_j = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors il suffit de choisir

$$\mu_j = 1 - \lambda_1(\phi_j) \text{ on } \Omega_j.$$

Cette remarque permet de donner un exemple simple :

### 3.1. Le cas d'un polyèdre.

Soit  $\Omega$  un polyèdre dans  $\mathbb{R}^N$ . On note  $(C_j)_{1 \leq j \leq K}$  les faces de  $\Omega$  et on fixe un point  $x_j$  à l'intérieur de chaque face. Soit  $\mathcal{O}_j$  un voisinage de  $x_j$  dans  $\mathbb{R}^N$  tel que  $\Omega_j := \mathcal{O}_j \cap \Omega$ , soit un domaine Lipschitz qui vérifie :

$$(\partial\Omega_j \cap \partial\Omega) \subset C_j.$$

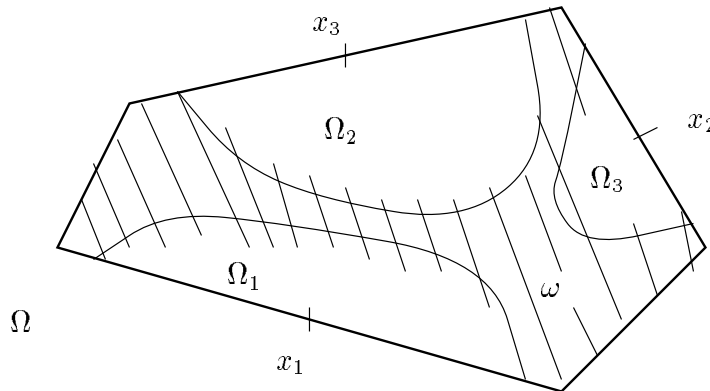


Fig. 9 : Domaine polygonal admissible

( $\omega$  est représenté par la partie hachurée)

Il suffit alors de définir

$$\phi_j(x) = \frac{1}{2N} |x - x_j|^2.$$

(9. 19) est satisfait grâce au choix de  $x_j$  :

$$\partial_\nu\phi_j(x) = \frac{1}{N} (x - x_j | \nu(x)) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega.$$



Toutefois, il faut noter que ces fonctions  $\phi_j$  ne peuvent être utilisées que dans des géométries très spéciales (comme un polyèdre), mais en général, on ne peut pas trouver un point  $x_j$  qui est tel que

$$(x - x_j) \cdot \nu(x) = 0 \text{ sur une partie de } \partial\Omega,$$

par exemple si  $\Omega$  est une boule.

**3.2. Le cas du disque.**

Si  $\Omega$  est un disque dans  $\mathbb{R}^2$ , il est impossible de trouver  $x_j \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$(x - x_j) \cdot \nu(x) = 0 \text{ sur une partie du bord de } \partial\Omega.$$

Il semble aussi difficile de trouver des fonctions  $\phi_j$  qui vérifient (9. 19) (l'hypothèse sur le laplacien et celle sur la dérivée normale semblent difficilement conciliables).

Soit  $\Omega$  le disque  $\mathcal{D}(O, R)$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Comme  $\Omega$  est simplement connexe, le théorème d'uniformisation de Riemann (voir par exemple W. Rudin [68]) assure qu'il existe une bijection holomorphe entre  $\mathcal{D}(O, R)$  et le demi-plan  $\mathcal{P} := \{\text{Re } z < 0\}$  : par exemple, l'application

$$(9. 20) \quad z \in \mathcal{D}(O, R) \mapsto \frac{z - R}{z + R} \in \mathcal{P}$$

en est une. Soit

$$\psi : Z \in \mathcal{P} \mapsto \frac{1}{4}|Z|^2$$

$\psi$  vérifie

$$(9. 21) \quad \begin{cases} \Delta\psi = 1 \text{ dans } \mathcal{P}, \\ \lambda_1(\psi) = \frac{1}{2}, \\ \partial_\nu\psi = \frac{1}{2}z \cdot \nu(z) = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{P}. \end{cases}$$

Ceci nous amène à considérer

$$(9. 22) \quad \phi : z \in \mathcal{D}(O, R) \mapsto \left| \frac{z - R}{z + R} \right|^2.$$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 9.1. Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $\Omega_1$  défini par

$$(9. 23) \quad \Omega_1 := \{(x, y) \in \Omega : (x - R)^2 + y^2 < \frac{1 - \varepsilon}{256}((x + R)^2 + y^2)^4\}.$$

Alors il existe  $\mu_1$  tel que  $(\phi, \mu_1, \Omega_1)$  satisfait (9. 11) avec un certain  $\eta > 0$ .

**Remarque.**  $\Omega_1$  est un voisinage du point  $(R, 0)$ , dont on déterminera explicitement deux sous-parties (voir Figure 10).

*Preuve de la Proposition 9.1.* Pour simplifier les calculs, on effectue une translation : supposons que  $\Omega$  est le disque  $\mathcal{D}(R, R)$ ; on définit

$$(9. 24) \quad \Phi : z \in \mathcal{D}(R, R) \mapsto \left| \frac{z - 2R}{z} \right|^2.$$

On note

$$\text{Re } z = x \text{ et } \text{Im } z = y.$$

Des calculs faciles montrent que

$$\Delta\Phi(x, y) = 4\partial\bar{\partial}\Phi(z) = \frac{16R^2}{|z|^4},$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y) &= 4R\frac{x^2 - 2Rx - y^2}{|z|^4} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, y) &= 8Ry\frac{x - R}{|z|^4}.\end{aligned}$$

On a alors la propriété désirée : comme

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \text{ i.e. } x^2 + y^2 = 2Rx \text{ sur } \partial\Omega,$$

on a

$$\begin{aligned}\partial_\nu\Phi(x, y) &= 4(x - R)\frac{x^2 - 2Rx - y^2}{|z|^4} + 8Ry^2\frac{x - R}{|z|^4} \\ &= 4(x - R)\frac{-2y^2}{|z|^4} + 8Ry^2\frac{x - R}{|z|^4} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Ensuite on calcule la matrice hessienne de  $\Phi$  :

$$D^2\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{8R}{|z|^4} \left( 3x - R - \frac{4x^2(x-R)}{|z|^2} \right) & \frac{8R}{|z|^4} \left( y - \frac{4xy(x-R)}{|z|^2} \right) \\ \frac{8R}{|z|^4} \left( y - \frac{4xy(x-R)}{|z|^2} \right) & \frac{8R}{|z|^4} \left( x - R - \frac{4y^2(x-R)}{|z|^2} \right) \end{pmatrix}$$

Sa plus petite valeur propre est

$$\lambda_1(z) = \frac{8R}{|z|^4} \left( R - \sqrt{(x - 2R)^2 + y^2} \right).$$

Si (9. 11) est satisfait sur un sous-domaine  $\Omega_1$ , on peut trouver  $\mu_1$  tel que

$$(9. 25) \quad \begin{cases} \mu_1 \leq \frac{16R^2}{|z|^4} - \eta \text{ dans } \Omega_1, \\ \mu_1 \geq \frac{16R^2}{|z|^4} - \frac{16R}{|z|^4} \left( R - \sqrt{(x - 2R)^2 + y^2} \right) + \eta \text{ dans } \Omega_1. \end{cases}$$

Ceci équivaut à dire que

$$(9. 26) \quad \sup_{\Omega_1} \frac{16R}{|z|^4} \sqrt{(x - 2R)^2 + y^2} < \inf_{\Omega_1} \frac{16R^2}{|z|^4}.$$

Ceci est clairement possible au voisinage du point  $(2R, 0)$  (où la quantité du membre de gauche est nulle). Il reste à trouver le plus grand sous-domaine  $\Omega_1$  sur lequel on a cette propriété. On voit que

$$\inf_{\Omega} \frac{16R^2}{|z|^4} = \frac{16R^2}{(2R)^4} = \frac{1}{R^2}.$$

Donc on veut que

$$(9. 27) \quad \sup_{\Omega_1} \frac{1}{|z|^4} \sqrt{(x - 2R)^2 + y^2} < \frac{1}{16R^3}.$$

On définit  $\Omega_1$  pour que cette propriété soit satisfaite. Pour en savoir un peu plus, on se place sur le cercle centré en  $O$  et de rayon  $\rho < 2R$  :

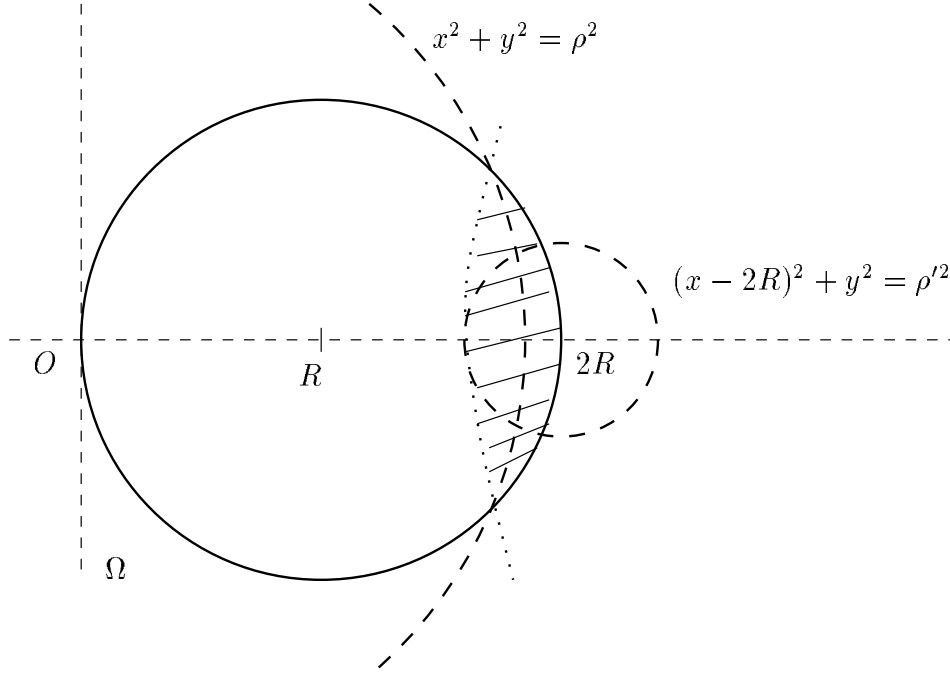


Fig. 10 : Graphe de  $\Omega_1$  (partie hachurée)

Les deux cercles  $\mathcal{D}(R, R)$  et  $\mathcal{D}(2R, R)$  s'intersectent aux points  $(\frac{3}{2}R, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}R)$ , qui ont pour module  $R\sqrt{3}$ . Ainsi, si  $R\sqrt{3} < \rho < 2R$ ,

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{1}{|z|^4} \sqrt{(x - 2R)^2 + y^2}, (x, y) \in \Omega \cap \mathcal{C}(O, \rho) \right\} \\ = \frac{1}{\rho^4} \sup \left\{ \sqrt{(x - 2R)^2 + y^2}, (x, y) \in \Omega \cap \mathcal{C}(O, \rho) \right\} \end{aligned}$$

est atteint aux points d'intersection du cercle  $\mathcal{C}(O, \rho)$  avec  $\Omega$ , dont on calcule facilement les coordonnées :

$$\begin{cases} (x - R)^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = \rho^2, \end{cases}$$

ce qui donne

$$x = \frac{\rho^2}{2R} \text{ et } y = \pm\sqrt{\rho^2 - x^2}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\rho^4} \sup \left\{ \sqrt{(x - 2R)^2 + y^2}, ((x, y) \in \Omega \cap \mathcal{C}(O, \rho)) \right\} = \frac{\sqrt{4R^2 - \rho^2}}{\rho^4}.$$

Cette quantité vaut 0 quand  $\rho = 2R$ , et est croissante quand  $\rho$  décroît. On vérifie numériquement que lorsque  $\rho = 1,86R$ , on a

$$\frac{\sqrt{4R^2 - \rho^2}}{\rho^4} < \frac{1}{16R^3}.$$

Ainsi la zone

$$\{z \in \Omega : |z| \geq 1,86R\}$$

satisfait les conditions géométriques requises.

Si on se place sur le cercle  $\mathcal{C}(2R, \rho')$ , on voit que

$$\sup \left\{ \frac{1}{|z|^4} \sqrt{(x-2R)^2 + y^2}, (x, y) \in \Omega \cap \mathcal{C}(2R, \rho') \right\} = \frac{\rho'}{(2R - \rho')^4},$$

et

$$\frac{\rho'}{(2R - \rho')^4} < \frac{1}{16R^3} \text{ si } \rho' \leq \frac{2}{5}R.$$

Ainsi la zone

$$\{z \in \Omega : |z - 2R| \geq \frac{2}{5}R\}$$

satisfait aussi les conditions géométriques requises. ■

**Remarque.** La Proposition 9.1 implique que si  $a$  est minorée par  $\alpha > 0$  sur la partie hachurée du disque suivant (Fig. 11), alors les conditions géométriques du Théorème 9.1 sont satisfaites, et donc l'énergie des solutions décroît exponentiellement vers zéro.

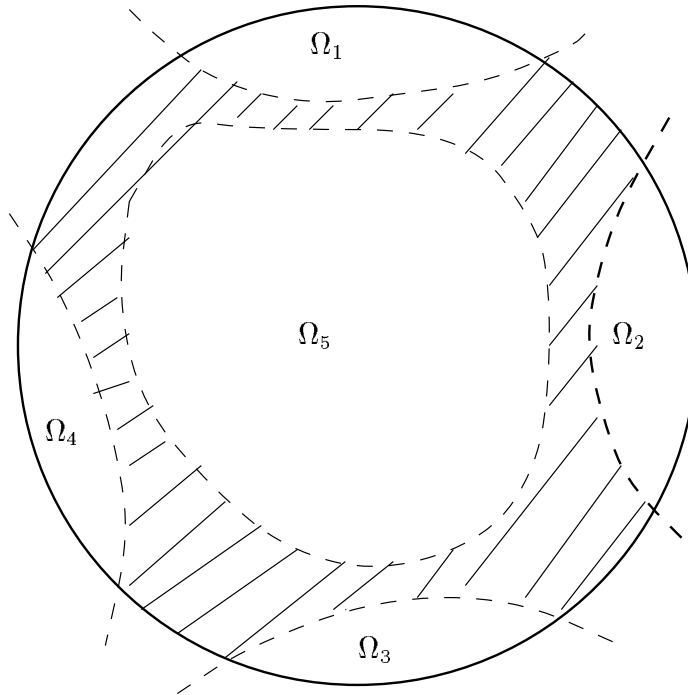


Fig. 11. Domaine admissible

#### 4. Preuve du Théorème 9.1

On commence par vérifier que le problème (9. 7)-(9. 9) est dissipatif :

LEMME 9.1.

$$(9. 28) \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty, \quad E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Omega} a(x) u'^2 \, dx \, dt.$$

*Preuve du Lemme 9.1.* On multiplie (9. 10) par  $u'$  et on intègre par partie sur  $\Omega \times [S, T]$  :

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega} -a u'^2 &= \int_S^T \int_{\Omega} u' (u'' - \Delta u + a q u) \\ &= \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 + a q u^2 \right]_S^T = E(T) - E(S). \blacksquare \end{aligned}$$

#### 4.1. La méthode des multiplicateurs par morceaux.

LEMME 9.2. *Soit  $\mathcal{O} \subset \Omega$  un domaine Lipschitz.*

*Soit  $h : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $0 \leq S < T < +\infty$ . Alors on a l'identité suivante :*

$$(9. 29) \quad \begin{aligned} \int_S^T \int_{\partial \mathcal{O}} 2 \partial_{\nu} u h \cdot \nabla u + (h \cdot \nu) (u'^2 - |\nabla u|^2) \\ = \left[ \int_{\mathcal{O}} 2 u' h \cdot \nabla u \right]_S^T + \int_S^T \int_{\mathcal{O}} 2 a (u' + q u) h \cdot \nabla u \\ + \int_S^T \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{div} h) (u'^2 - |\nabla u|^2) + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

**Remarque.** Les intégrations par partie qui conduisent à (9. 29) sont habituellement faites si  $\mathcal{O}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et restent valables si  $\mathcal{O}$  est seulement Lipschitz grâce aux résultats de P. Grisvard [23].

*Preuve du Lemme 9.2.* Cette identité est donné par la méthode des multiplicateurs : on intègre par partie l'expression suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\mathcal{O}} 2 h \cdot \nabla u (u'' - \Delta u + a(u' + q u)) \\ &= \left[ \int_{\mathcal{O}} 2 u' h \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \int_{\mathcal{O}} 2 u' h \cdot \nabla u' \\ &\quad - \int_S^T \int_{\partial \mathcal{O}} 2 \partial_{\nu} u h \cdot \nabla u + \int_S^T \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla (2 h \cdot \nabla u) + 2 a (u' + q u) h \cdot \nabla u, \\ &= \left[ \int_{\mathcal{O}} 2 u' h \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \int_{\partial \mathcal{O}} 2 \partial_{\nu} u h \cdot \nabla u + h \cdot \nu u'^2 \\ &\quad + \int_S^T \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{div} h) u'^2 + 2 \sum_{i,k} \left( \partial_i h_k \partial_i u \partial_k u + h_k \partial_i u \partial_{i,k}^2 u \right) + 2 a (u' + q u) h \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \int_{\partial\mathcal{O}} 2\partial_\nu u h \cdot \nabla u + h \cdot \nu (u'^2 - |\nabla u|^2) \\
&+ \int_S^T \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{div} h) (u'^2 - |\nabla u|^2) + 2 \sum_{i,k} \partial_i h_k \partial_i u \partial_k u + 2a(u' + qu) h \cdot \nabla u.
\end{aligned}$$

Ainsi, en mettant toutes les intégrales de bord dans le membre de gauche, on obtient (9. 29). ■

Le principal problème est d'estimer, et plus précisément de majorer, les intégrales de bord dans (9. 29). On utilisera l'identité (9. 29) sur chaque sous-domaine  $\Omega_j$ . Dans le cas de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet sur le bord, K. Liu [56] a construit un champ de vecteurs qui permet facilement de l'estimer : sur la partie  $\partial\Omega \cap \{m \cdot \nu \leq 0\}$ , la condition de Dirichlet  $u = 0$  permet de montrer que l'intégrale correspondante est négative, et sur l'autre partie du bord  $h$  est nul. (On détaillera plus cette partie dans le Chapitre 17.)

Pour le cas de l'équation des ondes avec la condition de Neumann sur le bord, ce type de construction suffit encore lorsque  $\omega$  contient un voisinage de tout le bord de  $\Omega$ . Dans le cas contraire, il faut raffiner la construction : soit  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ ; on définit pour  $i = 0$  à 2 :

$$(9. 30) \quad Q_i = \mathcal{N}_{\varepsilon_i} \left[ \cup_j \Gamma_j^1(\phi_j) \cup \left( \Omega \setminus \cup_j \Omega_j \right) \right].$$

Comme  $(\overline{\Omega_j} \setminus Q_1) \cap \overline{Q_0} = \emptyset$ , on peut construire une fonction  $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$(9. 31) \quad \begin{cases} 0 \leq \psi_j \leq 1, \\ \psi_j = 1 \text{ sur } \overline{\Omega_j} \setminus Q_1, \\ \psi_j = 0 \text{ sur } Q_0. \end{cases}$$

On utilise l'identité (9. 29) avec  $\mathcal{O} := \Omega_j$  et  $h = h_j(x) := \psi_j(x) \nabla \phi_j(x)$  :

$$\begin{aligned}
(9. 32) \quad &\int_S^T \int_{\partial\Omega_j} 2\partial_\nu u \psi_j \nabla \phi_j \cdot \nabla u + (\psi_j \nabla \phi_j \cdot \nu_j) (u'^2 - |\nabla u|^2) \\
&= \left[ \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j \nabla \phi_j \cdot \nabla u \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega_j} 2a(u' + qu) \psi_j \nabla \phi_j \cdot \nabla u \\
&+ \int_S^T \int_{\Omega_j} (\operatorname{div} \psi_j \nabla \phi_j) (u'^2 - |\nabla u|^2) + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial(\psi_j \nabla \phi_j)_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Pour commencer, on étudie l'intégrale de bord dans (9. 32). Par construction

$$\psi_j(x) \partial_\nu \phi_j(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega_j.$$

Le deuxième terme de l'intégrale de bord est donc nul. D'autre part, le premier terme est nul sur  $\partial\Omega_j \cap \partial\Omega$  grâce à la condition de Neumann. Comme  $\psi_j = 0$  sur  $\partial\Omega_j \setminus \partial\Omega$ , on voit que l'intégrale de bord de (9. 32) est nulle.

On déduit alors de la définition de  $\psi_j$  et de (9. 32) que :

$$\begin{aligned}
(9. 33) \quad & \sum_j \left[ \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j \nabla \phi_j \cdot \nabla u \right]_S^T + \sum_j \int_S^T \int_{\Omega_j} 2a(u' + qu) \psi_j \nabla \phi_j \cdot \nabla u \\
& + \sum_j \int_S^T \int_{\Omega_j \setminus Q_1} \Delta \phi_j (u'^2 - |\nabla u|^2) + 2(D^2 \phi_j \cdot \nabla u |\nabla u|) \\
= & - \sum_j \int_S^T \int_{\Omega_j \cap Q_1} (\operatorname{div}(\psi_j \nabla \phi_j)) (u'^2 - |\nabla u|^2) + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial(\psi_j \nabla \phi_j)_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \\
& \leq C \sum_j \int_S^T \int_{\Omega_j \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 \leq C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

(Remarque :  $\cup_j(\Omega_j \setminus Q_1) = \Omega \setminus Q_1$ .)

Soit  $\mu : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  constante sur les sous-domaines  $\Omega_j$  :

$$\mu(x) = \mu_j \text{ sur } \Omega_j.$$

En multipliant (9. 7) par  $\mu u$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
(9. 34) \quad & \int_S^T \int_{\Omega} -\mu u a(u' + qu) = \int_S^T \int_{\Omega} \mu u (u'' - \Delta u) \\
& = \left[ \int_{\Omega} \mu u u' \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} \mu (-u'^2 + |\nabla u|^2) + u \nabla u \cdot \nabla \mu.
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} h(x) := \psi_j(x) \nabla \phi_j(x) \text{ si } x \in \Omega_j, \\ h(x) := 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus \cup_j \Omega_j, \end{cases}$$

et

$$(9. 35) \quad M(u) := 2h \cdot \nabla u + \mu u.$$

On ajoute (9. 34) à (9. 33) pour obtenir

$$\begin{aligned}
(9. 36) \quad & \left[ \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} a(u' + qu) M(u) \\
& + \sum_j \int_S^T \int_{\Omega_j \setminus Q_1} (\Delta \phi_j - \mu) u'^2 + (\mu - \Delta \phi_j) |\nabla u|^2 + 2(D^2 \phi_j \cdot \nabla u |\nabla u|) \\
& \leq C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 + u^2.
\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que  $\nabla \mu = 0$  sur  $\Omega \setminus Q_1$ .)

On déduit alors de (9. 11) que

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} a(u' + qu) M(u) \\
& + \eta \int_S^T \int_{\Omega \setminus Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 \leq C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 + u^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$(9.37) \quad 2\eta \int_S^T E \leq - \left[ \int_\Omega u' M(u) \right]_S^T - \int_S^T \int_\Omega a(u' + qu) M(u) \\ + C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 + u^2 + \eta \int_S^T \int_\Omega a qu^2.$$

C'est l'inégalité fondamentale pour prouver (9.16).

#### 4.2. Estimation des termes du second membre de (9.37).

Il est clair que

$$(9.38) \quad \left| \int_\Omega u' M(u) dx \right| \leq C_1 E(t).$$

D'autre part

LEMME 9.3. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que, pour tout  $\delta > 0$ , on a*

$$(9.39) \quad \left| \int_S^T \int_\Omega a(u' + qu) M(u) dx dt \right| \\ \leq \frac{C}{\delta} \int_S^T \int_\Omega a u'^2 + a u^2 dx dt + \delta \int_S^T E dt$$

*Preuve du Lemme 9.3.* Soit  $\delta > 0$ .

$$\left| \int_S^T \int_\Omega a(u' + qu) M(u) \right| \leq \int_S^T \int_\Omega \frac{\delta}{2} M(u)^2 + \frac{c}{2\delta} (a u'^2 + q a u^2). \blacksquare$$

À l'aide des estimations (9.38) et (9.39), on déduit de (9.37) que, si  $\delta$  est assez petit, il existe une constante strictement positive  $C$  telle que

$$(9.40) \quad \int_S^T E dt \leq C E(S) + C \int_S^T \int_\Omega a qu^2 \\ + C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 dx dt \\ \leq C E(S) + C \int_S^T \int_\Omega a qu^2 + C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} |\nabla u|^2 dx dt,$$

en utilisant le fait que  $a(x) \geq \alpha > 0$  sur  $\Omega \cap Q_1$ .

Il reste à estimer le dernier terme de (9.40) :

LEMME 9.4. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que, pour tout  $\delta > 0$  :*

$$(9.41) \quad \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} |\nabla u|^2 dx dt \leq C E(S) + C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_2} u'^2 + u^2 dx dt.$$

*Preuve du Lemme 9.4.* Puisque  $\overline{\mathbb{R}^n \setminus Q_2} \cap \overline{Q_1} = \emptyset$ , on peut construire  $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui possède les propriétés suivantes

$$\begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1, \\ \xi = 1 \text{ sur } Q_1, \\ \xi = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus Q_2. \end{cases}$$



On multiplie (9. 7) par  $\xi u$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega} -\xi u a(u' + qu) &= \int_S^T \int_{\Omega} \xi u (u'' - \Delta u) \\ &= \left[ \int_{\Omega} \xi u u' \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} -\xi u'^2 + \nabla u \cdot \nabla(\xi u), \\ &= \left[ \int_{\Omega} \xi u u' \right]_S^T + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega} \xi (|\nabla u|^2 - u'^2) - \frac{1}{2} u^2 \Delta \xi. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_1} |\nabla u|^2 \\ \leq - \left[ \int_{\Omega} \xi u u' \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} -\xi u a(u' + qu) + \xi u'^2 + \frac{1}{2} u^2 \Delta \xi \\ \leq CE(S) + C \int_S^T \int_{\Omega \cap Q_2} u'^2 + u^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Pour finir, on adapte une méthode introduite par F. Conrad et B. Rao [16] pour estimer le dernier terme de (9. 41) :

LEMME 9.5. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que, pour tout  $\eta > 0$  :*

$$(9. 42) \quad \int_S^T \int_{\Omega} a u^2 dx dt \leq CE(S) + \frac{C}{\eta} \int_S^T \int_{\Omega} a u'^2 dx dt + \eta \int_S^T E dt.$$

*Preuve du Lemme 9.5.* Soit  $t$  fixé. On considère la solution  $z$  du problème elliptique suivant

$$(9. 43) \quad -\Delta z + aqz = au \text{ dans } \Omega,$$

$$(9. 44) \quad \partial_\nu z = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On multiplie (9. 43) par  $z$  pour en déduire que

$$\int_{\Omega} |\nabla z|^2 + aqz^2 = \int_{\Omega} auz.$$

Comme  $x \mapsto a(x)q(x)$  n'est pas la fonction nulle, il existe  $c > 0$  tel que

$$\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_{\Omega} |\nabla z|^2 + aqz^2.$$

Ainsi avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(9. 45) \quad \int_{\Omega} z^2 \leq c \int_{\Omega} a u^2.$$

D'autre part, en dérivant par rapport à  $t$ , on voit que  $z'$  est solution du problème

$$(9. 46) \quad -\Delta z' + aqz' = au' \text{ dans } \Omega,$$

$$(9. 47) \quad \partial_\nu z' = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Donc on en déduit que

$$(9.48) \quad \int_{\Omega} z'^2 \leq c \int_{\Omega} au'^2$$

Ensuite on multiplie (9.7) par  $z$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} z(u'' - \Delta u + au' + aqu) \\ &= \left[ \int_{\Omega} zu' \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega} z'u' - \int_S^T \int_{\Omega} u\Delta z + \int_S^T \int_{\Omega} az(u' + qu) \\ &= \left[ \int_{\Omega} zu' \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega} z'u' \\ &\quad + \int_S^T \int_{\Omega} au^2 - aquz + \int_S^T \int_{\Omega} az(u' + qu) \end{aligned}$$

Ainsi

$$(9.49) \quad \int_S^T \int_{\Omega} au^2 = - \left[ \int_{\Omega} zu' \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} z'u' - \int_S^T \int_{\Omega} azu'.$$

D'abord on remarque que

$$\left| \int_{\Omega} zu' \right| \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u'\|_{L^2(\Omega)} \leq cE(t).$$

On majore ensuite le second terme :

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T \int_{\Omega} z'u' \right| &\leq c \int_S^T \left( \int_{\Omega} au'^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} u'^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{\eta} \int_S^T \int_{\Omega} au'^2 + c\eta \int_S^T \int_{\Omega} u'^2 \leq \frac{c}{\eta} E(S) + 2c\eta \int_S^T E. \end{aligned}$$

Enfin, on estime le dernier terme de la même manière :

$$\left| \int_S^T \int_{\Omega} azu' \right| \leq c \int_S^T \left( \int_{\Omega} u^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} au'^2 \right)^{1/2} \leq c\eta \int_S^T E + \frac{c}{\eta} E(S).$$

On déduit de (9.49) et des trois dernières estimations la validité de (9.42).  $\blacksquare$

### 4.3. Fin de la preuve du Théorème 9.1.

En utilisant (9.41) et ensuite (9.42), on déduit de (9.40) que

$$\int_S^T E \leq \frac{C}{\eta} E(S) + \eta \int_S^T E.$$

En prenant  $\eta$  assez petit, et en faisant tendre  $T$  vers l'infini, on obtient que

$$(9.50) \quad \int_S^{\infty} E \leq CE(S),$$

et on conclut à l'aide du Lemme 1.1.  $\blacksquare$



Partie 3

STABILISATION UNIFORME  
DU SYSTÈME DE  
L'ÉLASTICITÉ RELATIF AUX  
CRISTAUX CUBIQUES



## INTRODUCTION

On étudie le système d'élasticité relatif aux cristaux cubiques, stabilisé par un feedback frontière non linéaire.

Ce travail a été motivé par deux articles antérieurs de J. E. Lagnese [48] et [49] et un article de V. Komornik [46]. Dans le premier, J. E. Lagnese prouve des résultats de décroissance uniforme de l'énergie pour les solutions du système d'élasticité linéaire soumis à un feedback représenté par une fonction linéaire de la vitesse, sous certaines conditions techniques sur le tenseur d'élasticité. En particulier, ces résultats ne s'appliquent pas au cas linéaire homogène isotrope, pour lequel le tenseur d'élasticité dépend de *deux* paramètres, appelés *constantes de Lamé*.

Dans le second article, il obtient des estimations de décroissance uniforme de l'énergie pour des systèmes d'élasticité homogènes, isotropes, linéaires et bidimensionnels. Ces systèmes sont soumis à un feedback (représenté par une fonction éventuellement non linéaire) dépendant de la vitesse, mais modifié par un feedback linéaire artificiel.

V. Komornik a montré que la même estimation est valable, sans ce terme linéaire artificiel, pour les systèmes homogènes isotropes en dimension 2 et 3, soumis à une force qui dépend linéairement de la vitesse. Ses estimations sur le taux de décroissance de l'énergie sont même optimales lorsque le domaine est une boule de  $\mathbb{R}^3$ .

Le but de cette partie est d'étendre ces résultats au problème de stabilisation du système de l'élasticité relatif aux cristaux cubiques, et soumis à une force qui est une fonction non linéaire de la vitesse. Pour ces systèmes, le tenseur d'élasticité dépend de *trois* paramètres. En utilisant les notations de R. P. Feynman ([22]) :

$$C_{xyyy} = \lambda, \quad C_{xyxy} = 2\mu, \quad C_{xxxx} = \eta,$$

le terme général du tenseur d'élasticité s'écrit

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (\eta - \lambda - 2\mu)\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}.$$

Le cas homogène isotrope correspond au cas  $\eta = \lambda + 2\mu$ . Dans la suite, on suppose seulement que  $\eta > \lambda + \mu$  : d'après les valeurs numériques données par R. P. Feynman, cette hypothèse est physiquement vérifiée pour de

nombreux cristaux, comme par exemple Fe, Al, le diamant, LiF, NaCl, KCl, NaBr, KI, AgCl...

En notant  $\gamma := \eta - (\lambda + 2\mu)$ , le système d'élasticité s'écrit

$$\begin{cases} u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i + a u_i + \ell g(u_i') = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0 \text{ et } u'(0) = u^1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On suppose que  $g$  est une fonction croissante qui vérifie

$$\begin{cases} c_1 |x|^p \leq |g(x)| \leq c_2 |x|^{\frac{1}{p}} \text{ si } |x| \leq 1, \\ c_3 |x| \leq |g(x)| \leq c_4 |x| \text{ si } |x| > 1, \end{cases}$$

avec  $p \geq 1$ . Sous certaines hypothèses géométriques, on montre que

$$\text{si } p = 1, \quad E(t) \leq E(0) e^{1-\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$\text{si } p > 1, \quad E(t) \leq C t^{-2/(p-1)}, \quad \forall t > 0.$$

Ensuite, grâce à un principe général de D. L. Russell [69], on déduit un résultat de contrôlabilité exacte. Puis, par l'intermédiaire de ce principe et d'une méthode introduite par W. Liu [58] dans le cadre d'un système de thermoélasticité, on retrouve une partie du résultat de décroissance exponentielle de l'énergie lorsque  $g$  est linéaire. Cette méthode ne donne pas de résultats nouveaux dans le cadre des cristaux cubiques, mais se révèle très efficace dans l'étude de la stabilisation uniforme du système général de l'élasticité.

## PRINCIPAUX RÉSULTATS

### 1. Problème considéré

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On note  $\Gamma$  le bord de  $\Omega$  et  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  le vecteur unitaire normal sortant du bord. Soit  $\Gamma_0, \Gamma_1$  une partition du bord  $\Gamma$  telle que

$$(11.1) \quad \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset.$$

Soient  $\lambda, \mu, \eta$  trois réels strictement positifs. On note  $\gamma = \eta - \lambda - 2\mu$ . Soient  $a, \ell : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $a$  n'est pas identiquement nulle si  $\Gamma_0 = \emptyset$ .

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, croissante et s'annulant en zéro et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq c(1 + |x|)$$

avec  $c > 0$ .

On considère le système ( $\mathcal{P}$ ) suivant, où  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ ,  $i$  variant de 1 à  $N$  :

$$(11.2) \quad u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(11.3) \quad u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(11.4)$$

$$\mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i + a u_i + \ell g(u_i') = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(11.5) \quad u_i(0) = u_i^0 \text{ et } u_i'(0) = u_i^1 \text{ dans } \Omega.$$

### 2. Théorème d'existence et de régularité

L'existence et la régularité des solutions découle d'un résultat standard de théorie des opérateurs maximaux monotones :

**THÉORÈME 11.1.** *Supposons que  $\eta > \lambda + \mu$ .*



1. *Étant donné  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^N$ , le problème  $(\mathcal{P})$  admet une unique solution faible*

$$(11. 6) \quad u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^N).$$

*De plus, l'application  $(u^0, u^1) \mapsto u$  est continue par rapport à ces topologies, et l'énergie de  $u$ , définie par*

$$(11. 7) \quad E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 + \gamma \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} a u^2$$

*est une fonction décroissante.*

2. *De plus, si  $g$  est globalement lipschitzienne, et si  $u^0$  et  $u^1$  vérifient pour tout  $i$  :*

$$(11. 8) \quad \begin{cases} u^0 \in H^2(\Omega)^N \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N, u^1 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N, \\ \mu \partial_\nu u_i^0 + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u^0 \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \nu_i + a u_i^0 + \ell g(u_i^1) = 0, \end{cases}$$

*alors la solution  $u$  du problème  $(\mathcal{P})$  possède la propriété de régularité plus forte suivante :*

$$(11. 9) \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)^N),$$

$$(11. 10) \quad u' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N),$$

$$(11. 11) \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^N).$$

*Dans ce cas  $u$  sera appelée solution forte du problème  $(\mathcal{P})$ .*

### 3. Principal résultat de stabilisation

Du fait que  $x g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , le problème  $(\mathcal{P})$  est dissipatif. Grâce à un choix convenable du feedback, et sous certaines hypothèses, on va montrer que les solutions de  $(\mathcal{P})$  tendent vers zéro uniformément, avec une estimation précise du taux de décroissance.

On suppose satisfaites les hypothèses suivantes :

- on se restreint au cas  $N \geq 3$  (on indiquera comment modifier la preuve si  $N = 2$ ).
- soit  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , et  $m(x) := x - x_0$ ; on suppose que

$$(11. 12) \quad m(x) \cdot \nu(x) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

$$(11. 13) \quad m(x) \cdot \nu(x) \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

Soit  $R = \sup_{x \in \Omega} |m(x)|$ .

- on suppose que  $\lambda, \mu, \eta$  vérifient

$$(11. 14) \quad \eta > \lambda + \mu \quad (\text{i.e. } \mu + \gamma > 0 \text{ avec } \gamma := \eta - \lambda - 2\mu).$$

(Le cas homogène isotrope correspond à  $\eta = \lambda + 2\mu$ ).

Soit

$$(11. 15) \quad \xi := \inf\{\mu, \mu + \gamma\} = \inf\{\mu, \eta - \lambda - \mu\}.$$

Soient  $\alpha, \beta : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions continues et strictement positives; on définit les fonctions  $a$  et  $\ell$  par la formule

$$(11. 16) \quad a := \alpha(x)m \cdot \nu \text{ et } \ell := \beta(x)m \cdot \nu.$$

On a alors le résultat suivant

THÉORÈME 11.2. *Supposons satisfaites (11. 12)-(11. 14).*

1. *Supposons qu'il existe  $p > 1$  et quatre constantes strictement positives  $c_1, c_2, c_3, c_4$  telles que*

$$(11. 17) \quad c_1|x|^p \leq |g(x)| \leq c_2|x|^{\frac{1}{p}} \text{ si } |x| \leq 1,$$

$$(11. 18) \quad c_3|x| \leq |g(x)| \leq c_4|x| \text{ si } |x| > 1.$$

*Alors étant donné  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^N$ , la solution de (P) satisfait l'estimation*

$$(11. 19) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq Ct^{-2/(p-1)}$$

*où  $C$  est une constante dépendant seulement de l'énergie initiale  $E(0)$  (et de manière continue ).*

2. *S'il existe deux constantes strictement positives  $c$  and  $c'$  telles que*

$$(11. 20) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad c|x| \leq |g(x)| \leq c'|x|,$$

*Alors il existe  $\omega > 0$  tel que toute solution faible de (P) satisfait l'estimation*

$$(11. 21) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

*De plus, si on définit  $a$  et  $\ell$  par*

$$(11. 22) \quad a = \tilde{a} := \frac{N-1}{2R^2}\xi m \cdot \nu \text{ et } \ell = \tilde{\ell} := \frac{\sqrt{\xi}}{Rc'}m \cdot \nu,$$

*alors l'énergie de toute solution faible de (P) satisfait l'estimation*

$$(11. 23) \quad \forall t \geq 0 \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{c}{c+c'}\frac{\sqrt{\xi}}{R}t}.$$

**Remarque.** 1. On prouvera le Théorème 11.2 sous l'hypothèse supplémentaire

$g$  globalement lipschitzienne.

Cela permettra de travailler avec des solutions fortes, pour lesquelles les calculs seront justifiés par la régularité donnée par (11. 9)-(11. 11). On éliminera cette hypothèse par la suite.

2. On pourrait montrer un résultat semblable en supposant  $\Omega$  presque étoilé.

3. Le système est homogène isotrope quand  $\gamma = 0$ . Lorsque  $g(x) = x$ , (11. 23) donne l'estimation

$$\forall t \geq 0 \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{\sqrt{\mu}}{2R}t}.$$

V. Komornik a montré que cete estimation est *optimale* si  $\Omega$  est une boule de  $\mathbb{R}^3$ . Cette propriété est étroitement reliée à la plus petite vitesse de propagation dans le matériau. On ne sait pas si l'estimation (11. 23) est optimale dans le cas des cristaux cubiques.

#### 4. Contrôlabilité exacte et stabilisation exponentielle

En appliquant un principe de D.L. Russell [69], on déduit du Théorème 11.2 le résultat de contrôlabilité exacte suivant :

**THÉORÈME 11.3.** *Soit  $N \geq 3$  et  $T > 2R/\sqrt{\xi}$ . Étant donné  $(y^0, y^1)$  et  $(y_T^0, y_T^1)$  arbitrairement dans l'espace d'énergie  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , il existe une fonction  $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$  telle que la solution  $y$  du problème*

$$(11.24) \quad y_i'' - \mu \Delta y_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} y) - \gamma \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T),$$

$$(11.25) \quad y_i = 0 \text{ on } \Gamma_0,$$

$$(11.26) \quad \mu \partial_\nu y_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y) \nu_i + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \nu_i = v_i \text{ sur } \Gamma_1,$$

$$(11.27) \quad y(0) = y_i^0 \text{ et } y'(0) = y_i^1 \text{ dans } \Omega$$

satisfait la condition

$$y(T) = y_T^0 \text{ et } y'(T) = y_T^1 \text{ dans } \Omega.$$

Ce théorème découle du résultat de décroissance exponentielle (11.23).

Une méthode récemment introduite par W. Liu [58], dans le cadre d'un système de thermoélasticité (relatif à un matériau homogène isotrope), permet de retrouver le résultat de décroissance exponentielle (11.21) dans le cas linéaire (i.e. lorsque  $g(x) = x$  pour tout  $x$ ). On note que l'estimation de décroissance exponentielle (11.23) se démontre directement, sans argument de compacité, lorsque  $a$  et  $\ell$  ont les valeurs particulières  $\tilde{a}$  et  $\tilde{\ell}$ . Par contre, on a besoin d'arguments techniques supplémentaires pour prouver (11.21) (voir Lemme 13.6). A partir du résultat précédent de contrôlabilité exacte, de sa preuve et de l'estimation (11.23), on peut éviter de démontrer le Lemme 13.6, pour obtenir le résultat suivant:

**THÉORÈME 11.4.** *Soient  $a$  et  $\ell$  définies par la formule (11.16). On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x$ . Alors il existe  $\omega > 0$  tel que toute solution faible de (P) satisfait l'estimation*

$$(11.28) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

**Remarques.** La preuve de ce théorème n'est pas constructive et ne permet pas d'avoir une estimation de  $\omega$ . La méthode de W. Liu ne permet pas d'améliorer dans notre cas les résultats de décroissance exponentielle de l'énergie. Par contre, elle est très utile dans l'étude de la stabilisation du système général linéaire de l'élasticité : F. Alabau et V. Komornik [4] ont prouvé que l'énergie décroît exponentiellement lorsque  $a$  est assez petit (et lorsque le domaine est une boule); la méthode de W. Liu permet de s'affranchir de la condition "a petit" et d'obtenir un résultat pour toute valeur positive de  $a$  (voir aussi A. Guesmia [26]).

## PREUVE DU THÉORÈME D'EXISTENCE

Le principe va être de se ramener à un problème écrit sous la forme

$$U' + \mathcal{A}U = 0$$

et ensuite d'utiliser le théorème de Hille-Yosida. On note  $H$  l'espace  $L^2(\Omega)^N$  muni du produit scalaire habituel

$$(12. 1) \quad \|v\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \int_{\Omega} v^2 = \int_{\Omega} v_i v_i.$$

(on utilise la convention des indices répétés.)

On note  $V$  l'espace

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N = \{v \in H^1(\Omega)^N : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

muni de la structure euclidienne définie par :

$$(12. 2) \quad \|v\|_V^2 = \int_{\Omega} \mu |\nabla v|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} v)^2 + \gamma \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \int_{\Gamma_1} a v^2.$$

(On notera  $v_{i,j} := \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .)

L'hypothèse  $\mu + \gamma > 0$  nous assure que  $\|\cdot\|_V$  définit bien une norme euclidienne sur  $V$ , équivalente à la structure euclidienne classique. On notera  $(\cdot|\cdot)_V$  le produit scalaire associé à  $\|\cdot\|_V$ . Soit  $A$  l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V' \\ v &\mapsto Av : \quad \forall w \in V, \langle Av, w \rangle_{V',V} = (v|w)_V. \end{aligned}$$

Soit  $B$  l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} B : V &\rightarrow V' \\ v &\mapsto Bv : \quad \forall w \in V, \langle Bv, w \rangle_{V',V} = \int_{\Gamma_1} \ell g(v) w. \end{aligned}$$

$B$  est bien défini et continu, en vertu de l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$ .

Supposons  $u$  solution de (11. 2)-(11. 5). Soit  $v \in V$ . On multiplie (11. 2) par  $v_i$ , on intègre par parties sur  $\Omega$  pour obtenir une formulation

faible du problème :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left( u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) v_i \\ &= \int_{\Omega} u_i'' v_i + \mu \nabla u_i \nabla v_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i \right) v_i. \end{aligned}$$

En sommant sur  $i$ , on voit apparaître :

$$(12. 3) \quad \langle u'' + Au + Bu', v \rangle_{V', V} = 0 \quad \forall v \in V.$$

Soient

$$(12. 4) \quad U = (U_1, U_2) := (u, u')$$

et  $\mathcal{A}$  l'opérateur défini par

$$(12. 5) \quad \mathcal{A}U := (-U_2, AU_1 + BU_2).$$

Alors le problème  $(\mathcal{P})$  se réécrit :

$$(12. 6) \quad \begin{cases} U' + \mathcal{A}U = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ U(0) = (u^0, u^1) \end{cases}$$

On remarque que si  $u$  est solution suffisamment régulière de (11. 2)-(11. 5), alors  $U$  et  $\mathcal{A}U$  sont éléments de  $V \times H$ . Ceci nous amène à définir:

$$(12. 7) \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in V \times V : AU_1 + BU_2 \in H\}$$

et à *définir* les solutions faibles de  $(\mathcal{P})$  comme la projection sur la première composante des solutions de (12. 6). Cette définition est justifiée par le fait que :

PROPOSITION 12.1.  $\mathcal{A}$  est un opérateur maximal monotone de  $V \times H$ .

*Preuve de la Proposition 12.1.* On commence par montrer que  $\mathcal{A}$  est un opérateur monotone. soit  $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Alors

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}U - \mathcal{A}V | U - V)_{V \times H} \\ &= (V_2 - U_2 | U_1 - V_1)_V + (AU_1 - AV_1 + BU_2 - BV_2 | U_2 - V_2)_H \\ &= (V_2 - U_2 | U_1)_V + \langle AU_1 + BU_2 | U_2 \rangle_{V', V} \\ &= -(U_2 | U_1 - V_1)_V + \langle AU_1 - AV_1 + BU_2 - BV_2 | U_2 - V_2 \rangle_{V', V} \\ &= \langle BU_2 - BV_2 | U_2 - V_2 \rangle_{V', V}. \end{aligned}$$

Donc

$$(12. 8) \quad (\mathcal{A}U - \mathcal{A}V | U - V)_{V \times H} = \int_{\Gamma_1} \ell(g(U_2) - g(V_2))(U_2 - V_2) \geq 0.$$

$\mathcal{A}$  est donc monotone.

Étudions maintenant le caractère maximal de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Cela revient à étudier la surjectivité de l'opérateur  $I + \mathcal{A}$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  sur  $V \times H$ .

Soit  $W \in V \times H$ . Supposons qu'il existe  $U = (U_1, U_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  tel que

$$(I + \mathcal{A})(U) = W,$$

c'est-à-dire :

$$(12. 9) \quad U_1 - U_2 = W_1$$

$$(12. 10) \quad U_2 + AU_1 + BU_2 = W_2$$

Alors  $U_1 = W_1 + U_2$ , et en reportant dans (12. 10), on voit que  $U_2$  satisfait

$$(12. 11) \quad U_2 + AU_2 + BU_2 = W_2 - AW_1.$$

Cela revient donc à étudier la surjectivité de l'opérateur :

$$I + A + B : V \longrightarrow V'$$

Supposons que cet opérateur est surjectif; alors comme  $W_1$  et  $W_2$  sont dans  $V$ ,  $W_2 - AW_1 \in V'$ , il existera  $U_2 \in V$  tel que (12. 11) soit vérifiée, et on utilisera (12. 9) pour définir  $U_1$ . Montrons donc la surjectivité de l'opérateur :

LEMME 12.1. *L'opérateur  $I + A + B : V \longrightarrow V'$  est surjectif.*

*Preuve du Lemme 12.1.* On utilise le théorème de Minty-Browder (voir par exemple J.-L. Lions [55], p. 171-173) pour prouver la surjectivité de  $V$  sur  $V'$  de  $I + A + B$  :

- $I + A + B$  est monotone : soit  $v \in V$  :

$$(12. 12) \quad \langle (I + A + B)v, v \rangle_{V',V} = \|v\|_H^2 + (v | v)_V + \langle Bv, v \rangle_{V',V} \geq 0.$$

- $I + A + B$  satisfait :

$$(12. 13) \quad \frac{\langle (I + A + B)v, v \rangle_{V',V}}{\|v\|_V} \longrightarrow \infty \text{ lorsque } \|v\|_V \longrightarrow \infty$$

En effet, d'après (12. 12), en utilisant la positivité de la fonction  $\ell$ , on voit que :

$$(12. 14) \quad \langle (I + A + B)v, v \rangle_{V',V} \geq \|v\|_V^2$$

En remarquant que  $I + A + B$  est continu de  $V$  dans  $V'$ , on conclut à l'aide du théorème de Minty-Browder que  $I + A + B$  est surjectif de  $V$  dans  $V'$ . ■

Le Lemme 12.1 permet donc de finir la preuve de la Proposition 12.1. Le théorème de Hille-Yosida permet alors de prouver l'existence de solutions faibles de (12. 6), et par suite de solutions faibles de  $(\mathcal{P})$  satisfaisant (11. 6).

On en déduit que l'énergie d'une solution est décroissante, car  $E(u) = \frac{1}{2}\|U\|_{V \times H}^2$ . ■

Soient  $u^0, u^1 \in V$  vérifiant (11. 8). On peut prouver (voir [44]) que lorsque  $g$  est globalement lipschitzienne, les ensembles  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  et

$$\mathcal{D}_0 := \{(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega)^N \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^N :$$

$$\mu \partial_\nu u_i^0 + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u^0 \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \nu_i + a u_i^0 + \ell u_i^1 = 0, \text{ pour } i = 1 \cdots N\}$$

coïncident (en fait  $\mathcal{D}_0$  est inclus dans  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  et on a l'égalité si  $g$  est globalement lipschitzienne). Il est clair aussi que  $\mathcal{D}_0$  est dense dans  $V \times H$ .

Pour prouver (11. 9)-(11. 11), il suffit de prouver que :

$$(12. 15) \quad Au^0 + Bu^1 \in H.$$

Dans ce cas-là,  $(u^0, u^1)$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , et (11. 9)-(11. 11) résultent de la partie du théorème de Hille-Yosida concernant les solutions fortes. Prouver (12. 15) revient à montrer qu'il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$(12. 16) \quad \forall w \in V, \quad |\langle Au^0 + Bu^1, w \rangle_{V',V}| \leq C \|w\|_H.$$

Soit  $w \in V$

$$\begin{aligned} \langle Au^0 + Bu^1, w \rangle_{V',V} &= \int_{\Omega} \mu \nabla u_i^0 \nabla w_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u^0 \operatorname{div} w + \gamma u_{i,i}^0 w_{i,i} \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \ell u^1 w + a u^0 w \\ &= \int_{\Omega} -(\mu \Delta u_i^0 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u^0) + \gamma \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_i^2}) w_i \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} (\mu \partial_\nu u_i^0 + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u^0 \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} \nu_i + a u_i^0 + \ell u_i^1) w_i \end{aligned}$$

L'hypothèse de régularité montre la validité des calculs précédents, et la condition sur le bord (11. 8) assure que l'intégrale sur  $\Gamma_1$  est nulle.

Ainsi

$$(12. 17) \quad |\langle Au^0 + Bu^1, w \rangle_{V',V}| \leq C \|u^0\|_{H^2} \|w\|_H$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 11.1. ■

## PREUVE DU THÉORÈME DE STABILISATION

On va prouver le Théorème 11.2 lorsque  $g$  est globalement lipschitzienne. On montrera dans le dernier paragraphe comment éliminer cette hypothèse.

Supposons donc  $g$  globalement lipschitzienne. Il suffit alors de prouver les estimations (11. 19), (11. 21) et (11. 23) pour les solutions fortes : on déduit alors le résultat pour les solutions faibles à l'aide d'un argument de densité. On supposera donc que  $u$  est une solution forte de  $(\mathcal{P})$ ; la régularité de  $u$  donnée par (11. 9)-(11. 11) permet alors de justifier tous les calculs.

### 1. Identités fondamentales

La preuve est basée sur une identité (Lemme 13.2) donnée par la méthode des multiplicateurs.

On vérifie d'abord que l'énergie est décroissante, et on donne l'expression de  $E'$  :

LEMME 13.1.

$$(13. 1) \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty, E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} \ell u_i' g(u_i') ds dt.$$

**Remarque.** (13. 1) implique que  $E$  est localement absolument continue, et par conséquent elle est dérivable presque partout et

$$E' = - \int_{\Gamma_1} \ell u_i' g(u_i') ds.$$

Cette formule sera essentielle dans la suite.

*Preuve du Lemme 13.1.* On multiplie l'équation (11. 2) par  $u_i'$ , et on intègre par partie sur  $\Omega \times [S, T]$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} u_i' \left( u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) \\ &= \int_S^T \int_{\Omega} u_i' u_i'' + \mu \nabla u_i' \cdot \nabla u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \\ &\quad - \int_S^T \int_{\Gamma} u_i' \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i \right) \end{aligned}$$



On déduit de (11. 3) que  $u'_i = 0$  sur  $\Gamma_0$  ; grâce à (11. 4) on obtient :

$$0 = \int_S^T \int_{\Omega} u'_i u''_i + \mu \nabla u'_i \cdot \nabla u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \\ + \int_S^T \int_{\Gamma_1} a u_i u'_i + \ell u'_i g(u'_i),$$

donc

$$0 = \int_S^T \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left( u'^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 + \gamma \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right) \\ + \int_S^T \int_{\Gamma_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} a u^2 \right) + \ell u'_i g(u'_i). \blacksquare$$

Pour simplifier les calculs, on considère le vecteur  $M(u) \in \mathbb{R}^N$  ayant pour composantes

$$(13. 2) \quad M(u)_i = M(u_i) := 2m_k u_{i,k} + (n-1)u_i$$

(en utilisant la convention des indices répétés).

Supposons que  $g$  vérifie (11. 17) and (11. 18). (Si  $g$  vérifie (11. 20), il suffit de prendre  $p = 1$  dans les calculs suivants.) L'identité fondamentale pour prouver le Théorème 11.2 est la suivante :

LEMME 13.2. *Pour tout  $0 \leq S < T < +\infty$ , on a*

$$(13. 3) \quad 2 \int_S^T E(t)^{\frac{p+1}{2}} dt = \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_{\Omega} u' \cdot M(u) dx dt \\ + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} \left( \mu \partial_{\nu} u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) \cdot M(u_i) + a u^2 ds dt \\ + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 \right) ds dt \\ - \left[ E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} u' \cdot M(u) dx \right]_S^T.$$

*Preuve du Lemme 13.2.* D'abord on multiplie (11. 2) par  $2m \cdot \nabla u_i = 2m_k u_{i,k}$  (en utilisant la convention des indices répétés), et on intègre sur  $\Omega$ , ensuite on multiplie le résultat par  $E^{\frac{p-1}{2}}$  et on intègre par partie sur  $[S, T]$  :

$$0 = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} \left( u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) 2m_k u_{i,k} \\ = \left[ E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} 2u'_i m_k u_{i,k} \right]_S^T - \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_{\Omega} 2m_k u_{i,k} u'_i \\ + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} -2u'_i m_k u'_{i,k} + \mu \nabla u_i \cdot \nabla (2m_k u_{i,k}) \\ + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \frac{\partial}{\partial x_i} (2m_k u_{i,k}) + \gamma u_{i,i} \frac{\partial}{\partial x_i} (2m_k u_{i,k}) \\ - \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} \left( \mu \partial_{\nu} u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) 2m_k u_{i,k}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& - \left[ E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} 2u_i' m_k u_{i,k} \right]_S^T \\
& \quad + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} \left( \mu \partial_{\nu} u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) 2m_k u_{i,k} \\
& \quad = -\frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_{\Omega} 2m_k u_{i,k} u_i' \\
& \quad + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} -m_k (u_i'^2)_{,k} + \mu u_{i,j} 2m_{k,j} u_{i,k} + \mu u_{i,j} 2m_k u_{i,k,j} \\
& \quad + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) (2m_{k,i} u_{i,k} + 2m_k u_{i,k,i}) + \gamma u_{i,i} (2m_{k,i} u_{i,k} + 2m_k u_{i,k,i}) \\
& \quad = -\frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_{\Omega} 2m_k u_{i,k} u_i' \\
& \quad + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} N u'^2 + 2\mu u_{i,j} u_{i,j} + \mu m_k (u_{i,j}^2)_{,k} + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) 2u_{i,i} \\
& \quad + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} (\lambda + \mu) m_k (\operatorname{div} u)^2_{,k} + 2\gamma u_{i,i} u_{i,i} + \gamma m_k (u_{i,i}^2)_{,k} \\
& \quad \quad \quad - \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} m_k \nu_k u_i' u_i'.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
(13. 4) \quad & - \left[ E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} 2u_i' m_k u_{i,k} \right]_S^T \\
& \quad + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} \left( \mu \partial_{\nu} u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) 2m_k u_{i,k} \\
& = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} N u'^2 + (2-N) \mu |\nabla u|^2 + (2-N) (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 + (2-N) \gamma u_{i,i}^2 \\
& \quad - \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 \right) m \cdot \nu \\
& \quad \quad \quad - \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_{\Omega} 2m_k u_{i,k} u_i'.
\end{aligned}$$

Ensuite on multiplie (11. 2) par  $u_i$  et on intègre par partie sur  $\Omega \times [S, T]$ .  
Comme

$$0 = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} \left( u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) u_i,$$

on a

$$\begin{aligned}
(13. 5) \quad & - \left[ E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} u' u \right]_S^T + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} \left( \mu \partial_{\nu} u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) u_i \\
& = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} -u'^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 + \gamma u_{i,i}^2 \\
& \quad \quad \quad - \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_{\Omega} u_i u_i'.
\end{aligned}$$

En multipliant (13. 5) par  $N - 1$  et en ajoutant à (13. 4), on obtient (13. 3). ■

## 2. Fin de la preuve du théorème

On estime les termes du membre de droite de (13. 3) en utilisant les conditions de bord sur  $\Gamma_0$  et sur  $\Gamma_1$ .

LEMME 13.3. *On a*

$$(13. 6) \quad \int_{\Gamma_0} m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 \right) ds \\ + \int_{\Gamma_0} \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) \cdot M(u_i) + a u^2 ds \leq 0$$

*Preuve du Lemme 13.3.* Sur  $\Gamma_0$  on a  $u_i = 0$ . Donc

$$\nabla u_i = (\partial_\nu u_i) \nu \quad \text{i.e.} \quad u_{i,k} = (\partial_\nu u_i) \nu_k$$

et

$$M(u_i) = 2m_k u_{i,k} = 2m_k (\partial_\nu u_i) \nu_k = 2(\partial_\nu u_i) m \cdot \nu.$$

donc

$$M(u_i) \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) \\ + m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 \right) \\ = m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 + 2\mu (\partial_\nu u_i)^2 \right. \\ \left. + 2(\lambda + \mu)(\operatorname{div} u) \partial_\nu u_i \nu_i + 2\gamma u_{i,i} \partial_\nu u_i \nu_i \right) \\ = m \cdot \nu \left( u'^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u)^2 + \gamma u_{i,i}^2 \right).$$

Comme  $m \cdot \nu \leq 0$  sur  $\Gamma_0$ , on en déduit (13. 6). ■

Ensuite on étudie la partie sur  $\Gamma_1$ . On distinguera trois cas :

### 2.1. Premier cas.

Supposons que  $g$  satisfait (11. 20) et que  $a$  et  $\ell$  sont définis par (11. 22).

On étudie attentivement ce cas pour prouver (11. 23). Ensuite on indiquera comment modifier la preuve lorsque  $a$  et  $\ell$  sont seulement donnés par (11. 16). On a le résultat suivant :

LEMME 13.4.

$$(13. 7) \quad \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 \right) ds \\ + \int_{\Gamma_1} \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) \cdot M(u_i) + \bar{a} u^2 ds \\ \leq \frac{2R c'}{\sqrt{\xi} c} \int_{\Gamma_1} \tilde{\ell} u_i' g(u_i') ds.$$

*Preuve du Lemme 13.4.* Soient

$$\tilde{\alpha} := \frac{\tilde{a}}{m \cdot \nu} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta} := \frac{\tilde{\ell}}{m \cdot \nu}.$$

En utilisant (11. 4) et (11. 22) on a

$$\begin{aligned} & m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 \right) \\ & \quad + \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) \cdot M(u_i) + \tilde{a} u^2 \\ & = m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 + \tilde{\alpha} u^2 \right. \\ & \quad \left. - (2m_k u_{i,k} + (N-1)u_i)(\tilde{\alpha} u_i + \tilde{\beta} g(u_i')) \right) \\ & = m \cdot \nu \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 + \tilde{\alpha} u^2 \right. \\ & \quad \left. - \tilde{\alpha} (N-1) u^2 - \tilde{\beta} (N-1) u_i g(u_i') - 2m_k u_{i,k} (\tilde{\alpha} u_i + \tilde{\beta} g(u_i')) \right) \\ & \leq m \cdot \nu \left( u'^2 - \xi |\nabla u|^2 + \tilde{\alpha} u^2 - \tilde{\alpha} (N-1) u^2 \right. \\ & \quad \left. - \tilde{\beta} (N-1) u_i g(u_i') + \xi |\nabla u|^2 + \frac{R^2}{\xi} (\tilde{\alpha} u_i + \tilde{\beta} g(u_i'))^2 \right) \\ & \leq m \cdot \nu \left( \left( 1 + \frac{R^2 \tilde{\beta}^2 c'^2}{\xi} \right) u'^2 + (\tilde{\alpha} (2-N) + \frac{R^2 \tilde{\alpha}^2}{\xi}) u^2 \right. \\ & \quad \left. + (-\tilde{\beta} (N-1) + \frac{2R^2 \tilde{\alpha} \tilde{\beta}}{\xi}) u_i g(u_i') \right). \end{aligned}$$

Grâce au choix

$$\tilde{\alpha} := \frac{(N-1)\xi}{2R^2}$$

le coefficient de  $u_i g(u_i')$  est nul, et celui de  $u^2$  est  $\tilde{\alpha} \frac{3-n}{2} \leq 0$ . Donc comme

$$\tilde{\beta} := \frac{\sqrt{\xi}}{Rc'},$$

le coefficient de  $u'^2$  vaut :

$$2 m \cdot \nu = \frac{2Rc'}{\sqrt{\xi}} \tilde{\beta} m \cdot \nu = \frac{2Rc'}{\sqrt{\xi}} \ell.$$

Comme  $g(x) \geq cx$ , on obtient (13. 7). ■

Enfin, on étudie la dernière partie de (13. 3).

LEMME 13.5. *On a*

$$(13. 8) \quad \left| \int_{\Omega} u' \cdot M(u) dx \right| \leq \frac{2R}{\sqrt{\xi}} E(t).$$

*Preuve du Lemme 13.5.* On a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( 2m_k u_{i,k} + (N-1)u_i \right)^2 \\
&= \int_{\Omega} (2m_k u_{i,k})^2 + (N-1)^2 u_i^2 + 2(N-1)m_k (u_i^2)_{,k} \\
&= \int_{\Omega} (2m_k u_{i,k})^2 + (N-1)^2 u_i^2 - 2N(N-1)u_i^2 + \int_{\Gamma} 2(N-1)m \cdot \nu u_i^2 \\
&\leq 4R^2 \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 + \frac{4R^2}{\xi} \int_{\Gamma} \tilde{a} u_i^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} u' \cdot M(u) \right| &\leq \left( \int_{\Omega} u'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |M(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{R}{\sqrt{\xi}} \int_{\Omega} u'^2 + \frac{R\sqrt{\xi}}{\mu} \int_{\Omega} \mu |\nabla u|^2 + \frac{R}{\sqrt{\xi}} \int_{\Gamma_1} \tilde{a} u^2 \leq \frac{2R}{\sqrt{\xi}} E(t).
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du Lemme 13.5. ■

À l'aide des différentes estimations (13. 6), (13. 7) et (13. 8), et en choisissant  $p = 1$ , (13. 3) devient

$$2 \int_S^T E(\tau) d\tau \leq \frac{2R}{\sqrt{\xi}} E(S) + \frac{2R}{\sqrt{\xi}} E(T) + \frac{c'}{c} \frac{2R}{\sqrt{\xi}} E(S) - \frac{c'}{c} \frac{2R}{\sqrt{\xi}} E(T).$$

En faisant tendre  $T$  vers l'infini on obtient donc que

$$(13. 9) \quad \int_S^{+\infty} E(\tau) d\tau \leq \frac{c+c'}{c} \frac{R}{\sqrt{\xi}} E(S).$$

Comme  $E$  est décroissante, on applique le Lemme 1.1 pour conclure que

$$(13. 10) \quad \forall S \geq 0, \quad E(S) \leq E(0) e^{1 - \frac{c}{c+c'} \frac{\sqrt{\xi}}{R} S}.$$

## 2.2. Deuxième cas.

Supposons à présent que  $g$  satisfait (11. 20) et que  $a$  et  $\ell$  sont définis par (11. 16).

Dans ce cas, les résultats sont légèrement différents. Il est facile de voir qu'il existe une constante  $C$  positive telle que

$$\begin{aligned}
(13. 11) \quad & \int_{\Gamma_1} \left( u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u)^2 - \gamma u_{i,i}^2 \right) m \cdot \nu \\
& + \int_{\Gamma_1} \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \nu_i + \gamma u_{i,i} \nu_i \right) \cdot M(u_i) + a u^2 \\
& \leq C \int_{\Gamma_1} \ell u_i' g(u_i') + a u_i u_i
\end{aligned}$$

et

$$(13. 12) \quad \left| \int_{\Omega} u' \cdot M(u) \right| \leq C E(t).$$

Alors, en utilisant les estimations (13. 6), (13. 11) et (13. 12), (13. 3) devient

$$(13.13) \quad 2 \int_S^T E(\tau) d\tau \leq 2CE(S) + C \int_S^T \int_{\Gamma_1} au^2.$$

On conclut en montrant le résultat suivant, adapté de la méthode de F. Conrad et B. Rao [16] utilisée au cours du Chapitre 9 :

LEMME 13.6. *Il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$(13.14) \quad \int_S^T \int_{\Gamma_1} au^2 ds dt \leq \frac{C}{\varepsilon} E(S) + \varepsilon \int_S^T E(\tau) dt$$

On remarque que la preuve du Lemme 13.6 permet de conclure : en utilisant (13.14) avec  $\varepsilon$  assez petit, on obtient à l'aide de (13.13) une inégalité semblable à (13.9); on peut alors achever la preuve de la même manière.

*Preuve du Lemme 13.6.* Pour chaque  $t \geq 0$  fixé, on note  $z(t)$  la solution du problème

$$\begin{cases} \mu \Delta z_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} z) + \gamma \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ z = u(t) \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Grâce aux résultats de P. G. Ciarlet [13] ou R. Dautray et J.-L. Lions [18], on voit que ce problème est elliptique. Alors les résultats de régularité elliptique assure que

$$(13.15) \quad \|z\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|u\|_{L^2(\Gamma)^N} \leq C\sqrt{E}.$$

On applique ce résultat avec  $u'$  à la place de  $u$  pour obtenir que

$$(13.16) \quad \|z'\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|u'\|_{L^2(\Gamma)^N} \leq C\sqrt{|E'|}.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left( \mu \Delta z_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} z) + \gamma \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i^2} \right) (u_i - z_i) \\ &= \int_{\Gamma} \left( \mu \partial_{\nu} z_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} z) \nu_i + \gamma \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \nu_i \right) (u_i - z_i) \\ &\quad - \int_{\Omega} \mu \nabla z_i \cdot \nabla (u_i - z_i) + (\lambda + \mu) \operatorname{div} z \operatorname{div} (u - z) + \gamma \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \frac{\partial (u_i - z_i)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} \mu \nabla z_i \cdot \nabla u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} z \operatorname{div} u + \gamma \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \geq 0.$$

Alors, comme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} z_i \left( u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) \\ &= \left[ \int_{\Omega} z_i u_i' \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} -z_i' u_i' + \mu \nabla z_i \cdot \nabla u_i + (\lambda + \mu) \operatorname{div} z \operatorname{div} u + \gamma \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ &\quad - \int_S^T \int_{\Gamma} z_i \left( \mu \partial_{\nu} u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i \right), \end{aligned}$$

on déduit de la condition au bord (11. 4) que

$$(13. 17) \quad \int_S^T \int_{\Gamma} au^2 \leq - \left[ \int_{\Omega} z_i u_i' \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} z_i' u_i' - \int_S^T \int_{\Gamma_1} \ell u_i g(u_i').$$

On peut majorer le membre de droite de cette inégalité ainsi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} z_i u_i' \right| &\leq \|z\|_{L^2(\Omega)^N} \|u'\|_{L^2(\Omega)^N} \leq CE(t), \\ \left| \int_S^T \int_{\Omega} z_i' u_i' \right| &\leq \int_S^T \|z'\|_{L^2(\Omega)^N} \|u'\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq \int_S^T C \sqrt{|E'|} \sqrt{E} \\ &\leq \frac{C}{2} \int_S^T \varepsilon E + \frac{1}{\varepsilon} |E'| \\ &\leq \frac{C}{2} \varepsilon \int_S^T E + \frac{C}{2\varepsilon} E(S). \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T \int_{\Gamma_1} \ell u_i g(u_i') \right| &\leq \int_S^T c' \|u\|_{L^2(\Gamma)^N} \|u'\|_{L^2(\Gamma)^N} \\ &\leq C \int_S^T \sqrt{E} \sqrt{|E'|}. \end{aligned}$$

En substituant ces inégalités dans (13. 17), on obtient (13. 14). ■

Considérons à présent le cas réellement non linéaire :

### 2.3. Troisième cas.

Supposons à présent que  $g$  satisfait (11. 17), (11. 18), et  $a, \ell$  sont définis par (11. 16).

La plus grosse partie du travail est déjà faite; en utilisant (13. 6), (13. 11), et (13. 12), il est facile de voir qu'il existe  $C > 0$  telle que (13. 3) donne l'estimation

$$(13. 18) \quad 2 \int_S^T E(\tau)^{\frac{p+1}{2}} d\tau \leq C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} |E'| + CE(S) \\ + C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu (u_i'^2 + g(u_i')^2 + u_i^2).$$

Le premier terme du membre de droite de (13. 18) est facile à estimer :

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} |E'| \leq cE(S)^{\frac{p+1}{2}} \leq cE(S).$$

Le dernier terme  $\int_S^T E^{(p-1)/2} \int_{\Gamma_1} au^2$  peut être traité de la même manière que dans (13. 14) : en considérant

$$0 = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} z_i \left( u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right),$$

on voit que

$$\begin{aligned} \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} au^2 &\leq - \left[ E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} z_i u_i' \right]_S^T + \frac{p-1}{2} \int_S^T E' E^{\frac{p-3}{2}} \int_{\Omega} z_i u_i' \\ &\quad + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} z_i' u_i' - \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_1} \ell u_i g(u_i'), \end{aligned}$$

et on peut estimer les termes de la même manière que précédemment pour montrer que

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma} au^2 \leq \frac{c}{\varepsilon} E(S)^{\frac{p+1}{2}} + \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_1} g(u_i')^2 + \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}.$$

En prenant  $\varepsilon$  assez petit, on voit donc que

$$(13. 19) \quad \int_S^T E(\tau)^{\frac{p+1}{2}} d\tau \leq CE(S) + C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu (u_i'^2 + g(u_i')^2).$$

Pour estimer le dernier terme du membre de droite de (13. 19), on a besoin de distinguer les ensembles  $|u'| \leq 1$  et  $|u'| \geq 1$ . Soient

$$(13. 20) \quad \Gamma_{2,i} := \{x \in \Gamma_1 : |u_i'(x)| \leq 1\} \text{ et } \Gamma_{3,i} := \{x \in \Gamma_1 : |u_i'(x)| > 1\}.$$

On étudie d'abord la partie sur  $\Gamma_{3,i}$  :

$$\begin{aligned} \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_{3,i}} m \cdot \nu (u_i'^2 + g(u_i')^2) &\leq (1 + c_4) \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_{3,i}} m \cdot \nu u_i'^2 \\ &\leq C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_{3,i}} \ell u_i' g(u_i') \\ &\leq C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} |E'| \leq C' E^{\frac{p+1}{2}}(S). \end{aligned}$$

Ensuite on étudie la partie sur  $\Gamma_{2,i}$ . Pour  $t \in [-1, 1]$ , en utilisant (11. 17), on a

$$\begin{aligned} t^2 &\leq C \left( tg(t) \right)^{\frac{2}{p+1}}, \\ g(t)^2 &\leq C \left( tg(t) \right)^{\frac{2}{p+1}}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{2,i}} m \cdot \nu (u_i'^2 + g(u_i')^2) &\leq C \int_{\Gamma_{2,i}} m \cdot \nu (u_i' g(u_i'))^{\frac{2}{p+1}} \\ &\leq C \left( \int_{\Gamma_{2,i}} m \cdot \nu u_i' g(u_i') \right)^{\frac{2}{p+1}}. \end{aligned}$$



On conclut à l'aide de l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_{2,i}} m \cdot \nu (u_i'^2 + g(u_i')^2) &\leq C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} |E'|^{\frac{2}{p+1}} \\ &\leq \int_S^T \varepsilon E^{\frac{p+1}{2}} - c(\varepsilon) E' \leq \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}} + c(\varepsilon) E(S). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $T$  vers l'infini, on déduit de ces estimations qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$(13. 21) \quad \int_S^{+\infty} E^{\frac{p+1}{2}} \leq CE(S).$$

On conclut en appliquant le Lemme 1.2 que

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq C(E(0))t^{\frac{-2}{p-1}}.$$

(où  $C$  une fonction continue de  $E(0)$ .) ■

Comme l'énergie est décroissante, un argument de densité donne les estimations du Théorème 11.2 lorsque  $g$  est globalement lipschitzienne.

**Remarque.** Si  $N = 2$ , les calculs sont presque les mêmes; seules les estimations du taux de décroissance sont légèrement différentes : par exemple, si  $g(x) = x$ , avec  $a$  et  $\ell$  définis par (11. 22), on obtient

$$\forall t \geq 0 \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{\sqrt{a}}{4R}t}$$

(avec la méthode de la Partie 2, on pourrait améliorer ce taux...)

### 3. Preuve du théorème lorsque $g$ n'est plus supposée globalement lipschitzienne

Il suffit d'appliquer une méthode générale utilisée par V. Komornik [44]: supposons que  $g$  est continue, croissante, s'annule en zéro, et vérifie

$$\begin{aligned} c_1|x|^p \leq |g(x)| \leq c_2|x|^{1/p} \text{ si } |x| \leq 1 \\ c_3|x| \leq |g(x)| \leq c_4|x| \text{ si } |x| \geq 1. \end{aligned}$$

On commence par construire une suite de fonctions  $g_k$  continues, croissantes, s'annulant en zéro, *globalement lipschitziennes*, et qui, de surcroît, satisfont :

$$(13. 22) \quad c'_1|x|^p \leq |g_k(x)| \leq c'_2|x|^{1/p} \text{ si } |x| \leq 1$$

$$(13. 23) \quad c'_3|x| \leq |g_k(x)| \leq c'_4|x| \text{ si } |x| \geq 1$$

$$(13. 24) \quad g_k(x) \longrightarrow g(x) \text{ quand } k \longrightarrow +\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

où  $c'_1, c'_2, c'_3, c'_4$  sont des constantes *indépendantes* de  $k$ .

Pour cela il suffit de considérer

$$(13. 25) \quad g_k(x) := g\left(\left(\text{Id}_{\mathbb{R}} + \frac{1}{k}g\right)^{-1}(x)\right).$$

On vérifie alors que (13. 22)-(13. 23) sont satisfaites avec des constantes  $c'_1, c'_2, c'_3, c'_4$  qui dépendent uniquement de  $c_1, c_2, c_3, c_4$  et de  $p$ .

On peut alors appliquer le Théorème 11.2 au problème  $(\mathcal{P}_k)$  obtenu en remplaçant  $g$  par  $g_k$  dans  $(\mathcal{P})$ . Soit  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On note  $u$  la solution du problème  $(\mathcal{P})$  et  $u_k$  la solution du problème  $(\mathcal{P}_k)$ . Le Théorème 11.2, nous dit que

$$\forall t \geq 0, \quad E(u_k)(t) \leq Ct^{-2/(p-1)},$$

où  $C$  est une constante dépendant uniquement de la norme de  $(u^0, u^1)$  dans  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , et des constantes  $c'_1, c'_2, c'_3$  et  $c'_4$ , donc est indépendante de  $k$ . Pour conclure, il suffit de montrer que la suite  $(u_k(t), u'_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  converge dans  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  vers  $(u(t), u'(t))$ . On montre cette propriété à l'aide du théorème suivant : (voir par exemple V. Barbu [6], Prop. 4.2.1. et Théorème 4.2.1.) :

**THÉORÈME 13.1.** *Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On suppose que*

$$(I + \mathcal{A}_k)^{-1}W \longrightarrow (I + \mathcal{A})^{-1}W \text{ dans } \mathcal{H} \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

pour tout  $W \in \mathcal{H}$ . Soient  $U^0, U_k^0$  des éléments de  $\mathcal{H}$  tels que

$$U_k^0 \longrightarrow U^0 \text{ dans } \mathcal{H} \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.$$

Soit  $U$  la solution de

$$U' + \mathcal{A}U = 0 \text{ dans } \mathbb{R}, \quad U(0) = U^0.$$

et  $U_k$  la solution de

$$U'_k + \mathcal{A}_k U_k = 0 \text{ dans } \mathbb{R}, \quad U_k(0) = U_k^0.$$

Alors

$$U_k(t) \longrightarrow U(t) \text{ dans } \mathcal{H} \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Pour pouvoir conclure, il suffit donc de montrer que

$$(I + \mathcal{A}_k)^{-1}W \longrightarrow (I + \mathcal{A})^{-1}W \text{ dans } \mathcal{H} \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

pour tout  $W = (W_1, W_2) \in \mathcal{H}$ , où  $\mathcal{A}_k$  désigne le générateur du semi-groupe associé au problème  $(\mathcal{P}_k)$ . Soit  $(U_1, U_2)$  et  $(U_1^k, U_2^k)$  les éléments de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  tels que

$$(I + \mathcal{A})^{-1}W = (U_1, U_2) \text{ et } (I + \mathcal{A}_k)^{-1}W = (U_1^k, U_2^k).$$

Par définition,

$$W_1 = U_1 - U_2 = U_1^k - U_2^k,$$

$$W_2 = U_2 + AU_1 + BU_2 = U_2^k + AU_1^k + B_k U_2^k$$

(où  $B_k$  désigne l'opérateur analogue à  $B$  correspondant à la fonction  $g_k$ ). On veut donc montrer que

$$U_1^k \longrightarrow U_1 \text{ dans } H_{\Gamma_0}^1(\Omega),$$

$$U_2^k \longrightarrow U_2 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Or

$$U_1^k - U_1 = U_2^k - U_2.$$

Tout revient donc à prouver que

$$U_2^k \longrightarrow U_2 \text{ dans } H_{\Gamma_0}^1(\Omega).$$

Pour cela on considère

$$\langle (I + A + B_k)(U_2^k - U_2), U_2^k - U_2 \rangle_{V',V} = \langle (B - B_k)U_2, U_2^k - U_2 \rangle_{V',V}.$$

On a remarqué dans la preuve du Lemme 12.1 sur la surjectivité de l'opérateur  $I + A + B$  que

$$\langle (I + A + B_k)(U_2^k - U_2), U_2^k - U_2 \rangle_{V',V} \geq \|U_2^k - U_2\|_V^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|U_2^k - U_2\|_V^2 &\leq \int_{\Gamma_1} \ell(g(U_2) - g_k(U_2))(U_2^k - U_2) \\ &\leq \left( \int_{\Gamma_1} |g(U_2) - g_k(U_2)|^2 \right)^{1/2} \|U_2^k - U_2\|_V. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|U_2^k - U_2\|_V \leq \left( \int_{\Gamma_1} |g(U_2) - g_k(U_2)|^2 \right)^{1/2}.$$

On conclut à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\begin{aligned} g(U_2) - g_k(U_2) &\longrightarrow 0 \text{ presque partout quand } k \longrightarrow +\infty, \\ |g(U_2) - g_k(U_2)|^2 &\leq \left( c(2 + 2|U_2|) \right)^2. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure la preuve du Théorème 11.2 en éliminant l'hypothèse  $g$  globalement lipschitzienne. ■

## PRINCIPE DE D.L. RUSSELL ET DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE DE L'ÉNERGIE

### 1. Preuve du Théorème 11.3

La preuve du Théorème 11.3 découle d'un principe de D. L. Russell, qui établit un lien entre la stabilisation exponentielle et la contrôlabilité exacte. Soit  $(y^0, y^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , et  $y$  la solution de (11. 24)-(11. 27). Soient  $T_0 := 2R/\sqrt{\xi}$  et  $T > T_0$ . On remarque que, par linéarité, il suffit de montrer qu'on peut amener la solution  $(y(t), y'(t))$  à l'état de repos  $(0, 0)$  en temps  $T$ .

**Premier cas.** On raisonne d'abord si  $a$  est défini par

$$a = \tilde{a} := \frac{N-1}{2R^2} \xi m \cdot \nu.$$

On choisit  $\ell = \tilde{\ell}$ .

Soit  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . On considère la solution  $u$  du problème

$$\begin{cases} u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i + \tilde{a} u_i + \tilde{\ell} u_i' = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ u(0) = u^0 \text{ et } u'(0) = u^1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Soit  $z$  la solution de

$$\begin{cases} z_i'' - \mu \Delta z_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} z) - \gamma \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ z_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu z_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} z) \nu_i + \gamma \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \nu_i + \tilde{a} z_i + \tilde{\ell} z_i' = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ z(0) = -u(T) \text{ et } z'(0) = u'(T) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On considère alors

$$\begin{aligned} y(t) &:= u(t) + z(T-t), \\ v(t) &:= -\tilde{\ell}(u'(t) + z'(T-t)). \end{aligned}$$

Alors  $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$  et  $y$  vérifie :

$$\begin{cases} y_i'' - \mu \Delta y_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} y) - \gamma \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ y_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu y_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y) \nu_i + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \nu_i + \tilde{a} y_i = v_i \text{ sur } \Gamma_1, \\ y(0) = u^0 + z(T) \text{ et } y'(0) = u^1 - z'(T) \text{ dans } \Omega, \\ y(T) = 0 \text{ et } y'(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Il suffit donc de vérifier que l'application linéaire  $\mathcal{L}$  définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ \mathcal{L}(u^0, u^1) &:= (u^0 + z(T), u^1 - z'(T)) \end{aligned}$$

est bijective. On peut décomposer  $\mathcal{L}$  sous la forme  $\operatorname{Id} - \mathcal{K}$ , où  $\mathcal{K}$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ \mathcal{K}(u^0, u^1) &:= (-z(T), z'(T)). \end{aligned}$$

on va montrer que  $\|\mathcal{K}\| < 1$ , ce qui assure que  $\operatorname{Id} - \mathcal{K}$  est un opérateur inversible, d'inverse

$$(\operatorname{Id} - \mathcal{K})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{K}^n.$$

Pour cela, on utilise deux fois l'estimation (11. 23) (une fois pour  $u$ , une fois pour  $z$ ) avec  $g(x) = x$ , donc  $c = c' = 1$  :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(u^0, u^1)\|^2 &= \|(-z(T), z'(T))\|^2 = \|(z(T), z'(T))\|^2 \\ &= 2E(z)(T) \leq 2E(z)(0) e^{1-T/T_0} = \|(-u(T), u'(T))\|^2 e^{1-T/T_0} \\ &= \|(u(T), u'(T))\|^2 e^{1-T/T_0} = 2E(u)(T) e^{1-T/T_0} \\ &\leq 2E(u)(0) e^{1-T/T_0} e^{1-T/T_0} \leq \|(u^0, u^1)\|^2 e^{2(1-T/T_0)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\mathcal{K}\|^2 \leq e^{2(1-T/T_0)} < 1 \text{ car } T > T_0. \blacksquare$$

**Dans le cas général :** on ne suppose plus que  $a = \tilde{a}$ . Soient  $T > T_0$ ,  $(y^0, y^1)$  et  $(y_T^0, y_T^1)$ . On vient de montrer qu'alors il existe  $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$  tel que la solution  $y$  du problème

$$\begin{cases} y_i'' - \mu \Delta y_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} y) - \gamma \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ y_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu y_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y) \nu_i + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \nu_i + \tilde{a} y_i = v_i \text{ sur } \Gamma_1, \\ y(0) = y^0 \text{ et } y'(0) = y^1 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

satisfait

$$y(T) = y_T^0 \text{ et } y'(T) = y_T^1.$$

On en déduit que  $y$  vérifie aussi

$$\begin{cases} y_i'' - \mu \Delta y_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} y) - \gamma \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ y_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu y_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y) \nu_i + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \nu_i + a y_i = (a - \tilde{a}) y_i + v_i \text{ sur } \Gamma_1, \\ y(0) = y^0 \text{ et } y'(0) = y^1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Comme  $(a - \tilde{a})y + v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , le nouveau contrôle satisfait la régularité voulue. La preuve du Théorème 11.3 est donc achevée.

## 2. Résultat de décroissance exponentielle de l'énergie

On peut alors, à partir de la preuve du résultat de contrôlabilité exacte précédent, retrouver la partie 2 du Théorème 11.2 sans passer par la démonstration du Lemme 13.6. Le raisonnement suivant est adapté d'une méthode introduite par W. Liu [58] pour obtenir des résultats de décroissance exponentielle pour un système de thermoélasticité.

Soient  $a$  et  $\ell$  définis par (11. 16). Toujours avec les mêmes notations, on a prouvé, de manière directe, que lorsque  $a = \tilde{a}$ , l'énergie des solutions du problème ( $\mathcal{P}$ ) décroît exponentiellement (la meilleure estimation du taux étant obtenue lorsque  $\ell = \tilde{\ell}$ ).

A présent, on ne suppose plus que  $a = \tilde{a}$ . On considère la solution  $u$  de

$$(14. 1) \quad \begin{cases} u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i + a u_i + \ell u_i' = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ u(0) = u^0 \text{ et } u'(0) = u^1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Soit  $y$  vérifiant

$$(14. 2) \quad \begin{cases} y_i'' - \mu \Delta y_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} y) - \gamma \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ y_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu y_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y) \nu_i + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \nu_i + \tilde{a} y_i = v_i \text{ sur } \Gamma_1, \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ y(T) = u(T) \text{ et } y'(T) = u'(T) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

A l'aide du principe de Russell, on peut construire  $y$  en considérant la solution  $z$  de :

$$(14. 3) \quad \begin{cases} z_i'' - \mu \Delta z_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} z) - \gamma \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ z_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu z_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} z) \nu_i + \gamma \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \nu_i + \tilde{a} z_i + \ell z_i' = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ z(0) = z^0 \text{ et } z'(0) = -z^1 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

et la solution  $w$  de :

$$(14. 4) \quad \begin{cases} w_i'' - \mu \Delta w_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} w) - \gamma \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ w_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \mu \partial_\nu w_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} w) \nu_i + \gamma \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \nu_i + \tilde{a} w_i + \ell w_i' = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ w(0) = z(T) \text{ et } w'(0) = -z'(T) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors on voit que

$$\begin{aligned} y(t) &:= w(t) - z(T - t), \\ v(t) &:= -\ell w' + \ell z'(T - t) \end{aligned}$$

vérifient (14. 2). Il suffit de bien choisir  $(z^0, z^1)$  pour avoir les conditions finales requises sur  $y$ , ce qui est possible en inversant un certain opérateur, d'après l'étude réalisée au paragraphe précédent.

On calcule alors la quantité

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega y_i' \left( u_i'' - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) - \gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) \\ &\quad + u_i' \left( y_i'' - \mu \Delta y_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} y) - \gamma \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} \right) \\ &= \left[ \int_\Omega y' \cdot u' + \mu \nabla y \cdot \nabla u + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y)(\operatorname{div} u) + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right]_0^T \\ &\quad - \int_0^T \int_\Gamma y_i' \left( \mu \partial_\nu u_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} u) \nu_i + \gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \nu_i \right) \\ &\quad + u_i' \left( \mu \partial_\nu y_i + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y) \nu_i + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \nu_i \right) \\ &= \left[ \int_\Omega y' \cdot u' + \mu \nabla y \cdot \nabla u + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y)(\operatorname{div} u) + \gamma \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right]_0^T \\ &\quad + \int_0^T \int_\Gamma y' \cdot (au + \ell u') + u' \cdot (ay - ay + \tilde{a}y - v) \\ &= 2E_a(u, T) + \int_0^T \int_\Gamma u' \cdot (\tilde{a}y - ay - v + \ell y'), \end{aligned}$$

où  $E_a(u, T)$  désigne l'énergie de  $u$  à l'instant  $T$  (l'indice  $a$  est là pour rappeler que  $a$  intervient dans la définition de l'énergie de  $u$ ). Ainsi

$$2E_a(u, T) = - \int_0^T \int_\Gamma u' \cdot (\tilde{a}y - ay - v + \ell y') \, ds \, dt.$$

Supposons démontré le lemme suivant

LEMME 14.1. *Il existe  $C > 0$  tel que*

$$(14. 5) \quad \int_0^T \int_\Gamma m \cdot \nu (y^2 + y'^2 + \frac{v^2}{m \cdot \nu^2}) \, ds \, dt \leq CE_a(u, T).$$

Si (14. 5) est satisfaite, alors

$$\begin{aligned} 4E_a(u, T)^2 &\leq \left( \int_0^T \int_{\Gamma_1} \sqrt{m \cdot \nu} u' \cdot \left( \sqrt{m \cdot \nu} (\bar{\alpha}y - \alpha y - \frac{v}{m \cdot \nu} + \ell y') \right) \right)^2 \\ &\leq c \left( \int_0^T \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu u'^2 \right) \left( \int_0^T \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu (y^2 + y'^2 + \frac{v^2}{m \cdot \nu^2}) \right) \\ &\leq \frac{c}{\min \beta} (E_a(u, 0) - E_a(u, T)) (CE_a(u, T)). \end{aligned}$$

Ainsi il existe  $C' > 0$  tel que

$$E_a(u, T) \leq \frac{C'}{C' + 4} E_a(u, 0).$$

Un résultat classique de théorie des semi-groupes assure alors que  $t \mapsto E_a(u, t)$  décroît exponentiellement. Il suffit donc de prouver le Lemme 14.1:

*Preuve du Lemme 14.1.* Par construction, on voit que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma} m \cdot \nu y'^2 &\leq \int_0^T \int_{\Gamma} m \cdot \nu (w'^2 + z'^2) \\ &\leq \frac{1}{\min \beta} \int_0^T \int_{\Gamma} \ell (w'^2 + z'^2) \\ &= \frac{1}{\min \beta} (E_{\bar{a}}(w, 0) - E_{\bar{a}}(w, T) + E_{\bar{a}}(z, 0) - E_{\bar{a}}(z, T)) \\ &= \frac{1}{\min \beta} (E_{\bar{a}}(z, 0) - E_{\bar{a}}(w, T)) \leq \frac{1}{\min \beta} E_{\bar{a}}(z, 0). \end{aligned}$$

Or par construction,  $(z^0, z^1)$  est obtenu à partir de  $(u(T), u'(T))$  par l'inversion d'un opérateur inversible :

$$(u(T), u'(T)) = (y(T), y'(T)) = (w(T) - z^0, w'(T) - z^1) = (\text{Id} - \mathcal{K}')(z^0, z^1),$$

où  $\mathcal{K}'$  est un opérateur de norme strictement plus petite que 1. Donc

$$\|(z^0, z^1)\| \leq c \|(u(T), u'(T))\|,$$

et, grâce à l'équivalence des normes correspondant à  $a$  et  $\bar{a}$  dans  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , on voit que

$$E_{\bar{a}}(z, 0) \leq cE_{\bar{a}}(u, T) \leq c'E_a(u, T).$$

De même,

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \frac{v^2}{m \cdot \nu} \leq c \int_0^T \int_{\Gamma} m \cdot \nu (w'^2 + z'^2) \leq cE_{\bar{a}}(z, 0) \leq cE_a(u, T).$$

Enfin

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma} m \cdot \nu y^2 &\leq c \int_0^T \|y\|_{H^1}^2 \leq c \int_0^T \|z\|_{H^1}^2 + \|w\|_{H^1}^2 \\ &\leq cT(E_{\bar{a}}(z, 0) + E_{\bar{a}}(w, 0)) \leq cTE_a(u, T). \blacksquare \end{aligned}$$





Partie 4

**NOUVELLE MÉTHODE  
D'ESTIMATION  
DU TAUX DE DÉCROISSANCE  
POUR DES SYSTÈMES  
DISSIPATIFS**



## INTRODUCTION

On considère l'équation des ondes soumise à un terme d'amortissement. Cet amortissement est une force représentée par une fonction non linéaire croissante de la vitesse  $g(u')$ . Supposons par exemple qu'elle soit exercée de manière locale sur le domaine :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{cases}$$

où  $g$  est une fonction continue, s'annulant en zéro. On définit l'énergie par

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 dx.$$

Formellement, on a la formule

$$E'(t) = - \int_{\Omega} a(x)u' g(u') dx.$$

On supposera donc de plus

$$xg(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

cette hypothèse assure la décroissance de l'énergie.

**Lorsque  $g$  est croissante**, deux types de résultats sont connus :

- des résultats de *stabilisation forte* (par exemple C. M. Dafermos [17], A. Haraux [31]), qui montrent que, si  $a$  est non nulle, et si  $g$  vérifie certaines hypothèses de croissance, l'énergie tend vers zéro à l'infini. La preuve est basée sur le principe d'invariance de LaSalle.
- des résultats de *stabilisation uniforme*, avec un *taux de décroissance explicite* (par exemple M. Nakao [61], A. Haraux [29], E. Zuazua [79], F. Conrad et al. [14], V. Komornik [44]) sous des conditions géométriques plus restrictives sur  $a$  et lorsque  $g$  a une croissance polynômiale en zéro. La preuve de tels résultats est basée sur la croissance polynômiale de  $g$  en zéro (comme dans la Partie 3).
- des résultats intermédiaires d'I. Lasiecka et D. Tataru [51], qui sous des hypothèses géométriques affaiblies, ont montré des résultats de décroissance uniforme de l'énergie même si  $g$  n'a pas une croissance

polynômiale en zéro, mais en n'obtenant pas tout à fait de taux explicite de décroissance.

**Lorsque  $g$  n'est pas monotone**, le problème est beaucoup plus complexe, notamment pour l'existence et la régularité de la solution. Seuls semblent connus des résultats de *stabilisation faible* (par exemple M. Slemrod [70], J. Vancostenoble [74]), et quelques résultats de *stabilisation forte*, mais uniquement en dimension 1 (E. Feireils [20], M. Pierre et J. Vancostenoble [66]). Ces résultats de E. Feireils [20] sont basés sur la des propriétés de régularité de la solution, et ceux de M. Pierre et J. Vancostenoble [66] sont basés sur la structure particulière des solutions en dimension 1.

En développant la méthode de partition du domaine utilisée dans la Partie 3, et à l'aide des nouvelles inégalités intégrales obtenues dans la Partie 1, on va améliorer plusieurs résultats antérieurs sur la stabilisation de l'équation des ondes par un feedback non linéaire :

**lorsque  $g$  est croissante :**

- on obtient encore un taux de décroissance explicite même si  $g$  ne vérifie pas l'hypothèse de croissance polynômiale en zéro. Le Chapitre 16 est consacré à l'étude du problème frontière, et le suivant à l'étude du problème de stabilisation par un feedback localement distribué.
- dans le Chapitre 18, on étudie le cadre plus spécifique de la dimension 2; si  $g'(0) \neq 0$ , on prouve que l'énergie des solutions fortes décroît exponentiellement vers zéro, même si  $g$  n'a pas une croissance linéaire à l'infini ( $g$  étant éventuellement bornée).
- dans le Chapitre 20, on étudie le taux de décroissance de l'énergie des solution du système linéaire ( $g(x) = x$  pour tout  $x$ ) lorsque les conditions géométriques portant sur  $a$  et utilisées précédemment ne sont plus satisfaites.

**lorsque  $g$  appartient à une certaine classe de fonctions non monotones**, on montre, en toute dimension, que l'énergie tend vers zéro avec un taux explicite de décroissance. En particulier cela implique des résultats nouveaux de stabilité forte.

*Les Chapitres 18 et 19 ont été écrits en collaboration avec J. Vancostenoble (I.R.M.A.R. Université Rennes I et E.N.S. Cachan, Antenne de Bretagne).*

## STABILISATION UNIFORME PAR UN FEEDBACK FRONTIÈRE NON LINÉAIRE

On considère l'équation des ondes soumise à un terme d'amortissement. Cet amortissement est une force exercée sur la frontière, et représentée par une fonction non linéaire croissante de la vitesse  $g(u')$ .

Plusieurs auteurs ont obtenu des estimations précises de décroissance de l'énergie lorsque  $g$  a une croissance polynomiale en zéro (voir par exemple M. Nakao [61], A. Haraux [28], E. Zuazua [79], F. Conrad et al. [14], V. Komornik [44]). Ils ont montré qu'alors, sous certaines hypothèses géométriques, l'énergie décroît vers zéro de manière polynomiale.

Dans le cadre plus général d'une équation des ondes semilinéaire, et sans supposer que  $g$  a une croissance polynomiale en zéro, I. Lasiecka et D. Tataru [51] ont obtenu des résultats de stabilisation uniforme, mais sans avoir une estimation explicite du taux de décroissance de l'énergie.

A l'aide des nouvelles inégalités intégrales établies dans la Partie 1, on obtient une estimation explicite du taux de décroissance même si  $g$  ne satisfait pas l'hypothèse de croissance polynomiale en zéro. Par exemple, on montre que si  $g$  tend exponentiellement vite vers zéro en zéro, l'énergie décroît vers zéro de manière logarithmique. La preuve repose sur une partition du domaine dépendant du comportement de  $g$  en zéro.

### 1. Résultat principal et exemples

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $\mathcal{C}^2$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  une partition de son bord  $\Gamma$ . On note  $\nu$  le vecteur unitaire normal sortant au bord. Soit  $x_0$  fixé dans  $\mathbb{R}^N$ . On définit

$$m(x) = x - x_0.$$

On s'intéresse à l'estimation de décroissance de l'énergie des solutions du système suivant :

$$(16. 1) \quad u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(16. 2) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(16. 3) \quad \partial_\nu u + m \cdot \nu g(u') = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(16. 4) \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1.$$

On se restreint aux hypothèses suivantes :

$$(16. 5) \quad \Gamma_0 \neq \emptyset \text{ et } \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset,$$

$$(16. 6) \quad m \cdot \nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } m \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Supposons que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^1$ . Supposons de plus que  $g$  est globalement lipschitzienne et que  $g(0) = g'(0) = 0$ . Pour simplifier, on va aussi supposer que  $g$  est impaire (cela permet de ne pas avoir à distinguer le cas où  $g$  tend beaucoup plus vite vers zéro d'un côté de zéro que de l'autre). (Une plus large classe de fonctions  $g$  est considérée dans [59]).

Soient

$$(16. 7) \quad G(y) = yg(y) \text{ et } H(x) = \frac{g(y)}{y}.$$

On remarque que  $H(0) = 0$ . Comme d'habitude, on définit

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

L'existence et la régularité de la solution  $u$  sont données par le résultat classique suivant

THÉORÈME 16.1. *Supposons (16. 5)-(16. 6) vérifiées.*

1. *Étant donné  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , le problème (16. 1)-(16. 4) admet une unique solution satisfaisant*

$$(16. 8) \quad u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)).$$

*L'énergie de la solution  $u$  définie par*

$$(16. 9) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 + |\nabla u|^2 dx$$

*est décroissante.*

2. *Étant donné  $(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  satisfaisant*

$$(16. 10) \quad \partial_{\nu} u^0 + m \cdot \nu g(u^1) = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

*la solution de (16. 1)-(16. 4) possède la régularité supplémentaire suivante:*

$$(16. 11) \quad u \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)), \quad u' \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+, H_{\Gamma_0}^1(\Omega)),$$

$$(16. 12) \quad \text{et } u'' \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)).$$

Plusieurs auteurs ont obtenu des estimations précises de décroissance de l'énergie lorsque  $g$  a une croissance au moins polynomiale en zéro. Ils ont montré qu'alors l'énergie décroît vers zéro de manière polynomiale : si  $g$  vérifie

$$\forall y \in [-1, 1], |g(y)| \geq c|y|^p,$$

avec  $p > 1$  et  $c > 0$ , et croît de manière linéaire à l'infini,

$$\forall |y| \geq 1, c'|y| \leq |g(y)| \leq C|y|,$$

avec  $c' > 0$ , alors

$$\forall t \leq 1, E(t) \leq \frac{C}{t^{2/(p-1)}},$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $E(0)$ . Leur démonstrations s'appuient sur la méthode des multiplicateurs et nécessitent certaines hypothèses géométriques (domaine étoilé) et sur l'inégalité de Hölder pour conclure (comme dans la Partie 3). De tels résultats ont été obtenus par M. Nakao [61] et A. Haraux [28] dans le cas de feedback interne, par E. Zuazua [79], F. Conrad et al. [14], V. Komornik [44] dans le cas de feedback frontière sous diverses hypothèses et par différentes méthodes.

I. Lasiecka et D. Tataru [51] ont étudié le cas plus général d'une équation des ondes semiliéaire amortie par une fonction non linéaire de la vitesse agissant sur une partie du bord. Sans aucune condition géométrique, ils ont montré que l'énergie décroît plus vite que la solution d'une certaine équation différentielle :

$$\forall t \geq T_0, E(t) \leq S(t - T_0)E(0),$$

où  $S$  est la solution de

$$S'(t) + q(S(t)) = 0,$$

$q$  étant une fonction croissante dépendant de  $g$  à travers l'algorithme suivant:

$$\begin{cases} h(yg(y)) \geq y^2 + g(y)^2 \text{ et } h \text{ est concave,} \\ p = (cId + h)^{-1}, \\ q = Id - (Id + p)^{-1}. \end{cases}$$

Leur preuve s'appuie sur des résultats de régularité cachée, obtenus par des techniques d'analyse micro-locale, et sur la construction d'une certaine fonction concave, permettant de généraliser la méthode développée par les auteurs précédents. Lorsque  $g$  a une croissance au moins polynomiale en zéro, ils retrouvent l'estimation classique. Si on considère par exemple

$$\forall y \in ]0, 1], g(y) = e^{-1/y},$$

alors à l'aide de plusieurs développements asymptotiques, leur résultat montre que

$$\forall t \leq T_0, E(t) \leq \frac{C}{(\ln t)^2}.$$

On se propose d'obtenir des estimations explicites du taux de décroissance quand on ne fait pas l'hypothèse que  $g$  a une croissance au moins polynomiale en zéro. Cela requiert le développement de nouveaux outils. Notre méthode sera basée sur les nouvelles inégalités intégrales établies dans la Partie 2, et sur une partition du domaine qui dépend du comportement asymptotique de  $g$  en zéro. La preuve repose sur la construction d'une fonction poids dont le comportement à l'infini est relié au comportement de  $g$  en zéro. On montre le résultat plus explicite suivant :

**THÉORÈME 16.2.** *Supposons (16. 5)-(16. 6) vérifiées. Supposons qu'il existe une constante strictement positive  $C_1$  telle que*

$$(16. 13) \quad \forall |y| \geq 1, |g(y)| \geq C_1|y|.$$



Alors étant donné  $(u^0, u^1) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , la solution  $u$  de (16. 1)-(16. 4) satisfait l'estimation

$$(16. 14) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq C \left( G^{-1} \left( \frac{1}{t} \right) \right)^2,$$

où  $C$  est une constante qui dépend seulement de l'énergie initiale  $E(0)$  (et de manière continue), et  $G^{-1}$  désigne la fonction inverse de  $G$ .

De plus si  $H$  est une fonction croissante sur  $[0, \eta]$  pour un certain  $\eta > 0$ , alors en fait

$$(16. 15) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq C \left( g^{-1} \left( \frac{1}{t} \right) \right)^2,$$

où  $C$  est une constante qui dépend seulement de l'énergie initiale  $E(0)$  (et de manière continue).

Soit  $g$  une fonction impaire, croissante, de classe  $\mathcal{C}^1$  et ayant une croissance linéaire à l'infini:

**Exemple 1.** si

$$g(x) = e^{-1/y^p} \text{ pour } 0 < y < 1$$

avec  $p > 0$ , alors (16. 15) donne l'estimation suivante

$$E(t) \leq \frac{C}{(\ln t)^{2/p}}.$$

**Exemple 2.** si

$$g(x) = e^{-e^{1/y}} \text{ pour } 0 < y < 1,$$

alors (16. 15) donne l'estimation suivante

$$E(t) \leq \frac{C}{(\ln(\ln t))^2}.$$

**Exemple 3.** si

$$g(x) = y^p \text{ pour } 0 < y < 1$$

avec  $p > 1$ , alors (16. 15) donne l'estimation suivante

$$E(t) \leq C t^{-2/p};$$

on peut prouver aussi l'estimation meilleure suivante :

$$E(t) \leq C_\varepsilon t^{\frac{-2}{p-1} + \varepsilon},$$

ce qui est arbitrairement proche de l'estimation trouvée par E. Zuazua [79]:

$$(16. 16) \quad E(t) \leq C t^{\frac{-2}{p-1}}.$$

Toutefois, nous ne sommes pas arrivés à retrouver l'estimation (16. 16).

**Remarque.** En ce qui concerne l'Exemple 1 et l'Exemple 2, on retrouve la même estimation que celle trouvée par I. Lasiecka et D. Tataru [51].

## 2. Inégalité donnée par la méthode des multiplicateurs

On remarque d'abord qu'il est suffisant de prouver (16. 14) (ou (16. 15)) pour des conditions initiales  $(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  satisfaisant (16. 10). Ensuite, un argument standard de densité donne le résultat (16. 14) (ou (16. 15)) pour toute donnée initiale dans  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Soit  $(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  satisfaisant (16. 10). La régularité de la solution  $u$  de (16. 1)-(16. 4) donnée par (16. 11)-(16. 12) permet de justifier tous les calculs suivants.

Commençons par vérifier que le problème est dissipatif :

LEMME 16.1. *La fonction  $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est décroissante, localement absolument continue et*

$$(16. 17) \quad E'(t) = - \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu u' g(u') ds.$$

*Preuve du Lemme 16.1.* Ceci est un résultat bien connu. On multiplie (16. 1) par  $u'$  et on intègre par partie sur  $\Omega \times [S, T]$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} u'(u'' - \Delta u) = \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Gamma} u' \partial_{\nu} u \\ &= E(T) - E(S) + \int_S^T \int_{\Gamma} m \cdot \nu u' g(u'). \blacksquare \end{aligned}$$

L'identité suivante sera fondamentale dans la preuve du Théorème 16.2. Elle est donnée par la méthode des multiplicateurs.

LEMME 16.2. *Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Soient  $0 \leq S < T < +\infty$ . Pour simplifier les expressions, on note*

$$(16. 18) \quad M(u) = 2m \cdot \nabla u + (N - 1)u.$$

*Alors on a l'identité suivante :*

$$(16. 19) \quad \begin{aligned} 2 \int_S^T E^2 \phi' dt &= \int_S^T E \phi' \int_{\Gamma} M(u) \partial_{\nu} u + m \cdot \nu (u'^2 - |\nabla u|^2) ds dt \\ &+ \int_S^T (E' \phi' + E \phi'') \int_{\Omega} u' M(u) dx dt - \left[ E \phi' \int_{\Omega} u' M(u) dx \right]_S^T. \end{aligned}$$

**Remarque.** Cette identité est très classique lorsque  $\phi(t) = t$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Preuve du Lemme 16.2.* On intègre par partie l'expression

$$0 = \int_S^T E(t) \phi'(t) \left( \int_{\Omega} M(u) (u'' - \Delta u) dx \right) dt$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ E \phi' \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T - \int_S^T (E' \phi' + E \phi'') \int_{\Omega} u' M(u) \\ &\quad - \int_S^T E \phi' \int_{\Omega} 2u' m \cdot \nabla u' + (N - 1)u'^2 \\ &\quad - \int_S^T E \phi' \int_{\Gamma} M(u) \partial_{\nu} u + \int_S^T E \phi' \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (2m \cdot \nabla u) + (N - 1)|\nabla u|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ E\phi' \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T - \int_S^T \left( E'\phi' + E\phi'' \right) \int_{\Omega} u' M(u) \\
&\quad - \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma} m \cdot \nu u'^2 + \int_S^T E\phi' \int_{\Omega} (\operatorname{div} m) u'^2 - (N-1) u'^2 \\
&\quad - \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma} M(u) \partial_{\nu} u + \int_S^T E\phi' \int_{\Omega} m \cdot \nabla (|\nabla u|^2) + (N+1) |\nabla u|^2 \\
&= \left[ E\phi' \int_{\Omega} u' M(u) \right]_S^T - \int_S^T \left( E'\phi' + E\phi'' \right) \int_{\Omega} u' M(u) \\
&\quad - \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma} M(u) \partial_{\nu} u + m \cdot \nu (u'^2 - |\nabla u|^2) \\
&\quad\quad\quad + \int_S^T E\phi' \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2. \blacksquare
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\phi$  est une fonction concave strictement croissante. En particulier  $\phi'$  est positive et décroissante, donc bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . On note  $C$  le maximum de  $\phi'$  sur  $\mathbb{R}_+$ . À partir de (16. 19) on montre l'inégalité suivante :

LEMME 16.3. *Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $0 \leq S < T$ :*

$$(16. 20) \quad \int_S^T E(t)^2 \phi'(t) dt \leq cE(S)^2 + c \int_S^T E(t) \phi'(t) \left( \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu u'^2 ds \right) dt.$$

*Preuve du Lemme 16.3.* Il est clair qu'il existe  $c > 0$  telle que

$$(16. 21) \quad \left| \int_{\Omega} u' M(u) \right| \leq c E(t).$$

Donc

$$(16. 22) \quad \left| E(t) \phi'(t) \int_{\Omega} u' M(u) \right| \leq c C E(t)^2.$$

Comme  $E$  est décroissante et  $\phi$  est concave :

$$(16. 23) \quad \left| \int_S^T E'\phi' \int_{\Omega} u' M(u) \right| \leq c C \int_S^T -E'(t) E(t) dt \leq \frac{cC}{2} E(S)^2,$$

et

$$(16. 24) \quad \left| \int_S^T E\phi'' \int_{\Omega} u' M(u) \right| \leq c \int_S^T E(t)^2 (-\phi''(t)) dt \leq c E(S)^2 \phi'(S).$$

Étudions à présent l'intégrale de bord : comme on a déjà vu dans la Partie 3:

$$\begin{aligned}
(16. 25) \quad &\int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_0} \partial_{\nu} u M(u) + m \cdot \nu (u'^2 - |\nabla u|^2) \\
&= \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_0} m \cdot \nu (\partial_{\nu} u)^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (16. 26) \quad & \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u M(u) + m \cdot \nu (u'^2 - |\nabla u|^2) \\
 &= \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu \left( -2g(u') m \cdot \nabla u - (N-1)ug(u') + u'^2 - |\nabla u|^2 \right) \\
 &\leq \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu \left( u'^2 + g(u')^2 \right) + \varepsilon \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_1} u^2 \\
 &\leq c' \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu u'^2 + \int_S^T E^2 \phi',
 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que  $g$  est globalement lipschitzienne et que  $g(0) = 0$ . L'inégalité (16. 20) découle de (16. 19) et des estimations (16. 22)-(16. 26). ■

### 3. Estimations sur le taux de décroissance de l'énergie

Lorsque  $g$  a une croissance polynomiale en 0, le dernier terme de (16. 20) peut être estimé à l'aide de l'inégalité de Hölder (comme dans la Partie 3, Chapitre 13). Mais quand on ne fait plus cette hypothèse sur la croissance de  $g$  en 0, on ne peut plus appliquer le même raisonnement. I. Lasiecka et D. Tataru [51] ont réussi à généraliser cette méthode, mais sans obtenir d'estimation vraiment explicite. L'information dont on a besoin sur la croissance de  $g$  sera contenue dans le comportement de  $\phi$  à l'infini. La fonction  $\phi$  sera choisie avec soin de façon à pouvoir appliquer les résultats du Lemme 2.7.

#### 3.1. Première estimation.

Par hypothèse,  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $g(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , donc  $g$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (en fait on n'utilisera que le fait que  $g$  est bijective au voisinage de 0).

Supposons maintenant que  $\phi$  est une fonction concave strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que

$$(16. 27) \quad \phi(t) \rightarrow +\infty \text{ et } \phi'(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

(par exemple  $t \mapsto \ln(1+t)$ ). Considérons

$$(16. 28) \quad h(t) = g^{-1}(\phi'(t)).$$

$h$  est une fonction positive décroissante et vérifie

$$h(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Pour  $t \geq 1$ , on définit

$$(16. 29) \quad \Gamma_{1,1}^t := \{x \in \Gamma_1 : |u'| \leq h(t)\},$$

$$(16. 30) \quad \Gamma_{1,2}^t := \{x \in \Gamma_1 : h(t) < |u'| \leq h(1)\},$$

$$(16. 31) \quad \Gamma_{1,3}^t := \{x \in \Gamma_1 : |u'| > h(1)\}.$$

Cette partition de  $\Gamma_1$  généralise la partition généralement utilisée :

$$\Gamma_1 := \{x \in \Gamma_1 : |u'| \leq 1\} \cup \{x \in \Gamma_1 : |u'| > 1\}.$$

Elle va nous permettre d'estimer le membre de droite de (16. 20). Soit  $S \geq 1$ ; on va estimer pour  $i$  variant de 1 à 3 le terme

$$\int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_{1,i}^t} m \cdot \nu u'^2 ds dt.$$

**Étude de la partie sur  $\Gamma_{1,3}^t$  :**

Comme

$$g(y) \geq C'_1 y \text{ si } y \geq h(1),$$

on a

(16. 32)

$$\begin{aligned} \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_{1,3}^t} m \cdot \nu u'^2 ds dt &\leq \frac{1}{C'_1} \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_{1,3}^t} m \cdot \nu u' g(u') ds dt \\ &\leq \frac{C}{C'_1} \int_S^T E(-E') dt \leq \frac{C}{2C'_1} E(S)^2. \end{aligned}$$

**Étude de la partie sur  $\Gamma_{1,2}^t$  :**

Comme  $g$  est croissante, si  $x \in \Gamma_{1,2}^t$ , alors

$$\phi'(t) = g(h(t)) \leq |g(u')|.$$

Donc

$$\begin{aligned} (16. 33) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_{1,2}^t} m \cdot \nu u'^2 ds dt &\leq \int_S^T E \int_{\Gamma_{1,2}^t} m \cdot \nu |g(u')| u'^2 ds dt \\ &\leq h(1) \int_S^T E \int_{\Gamma_{1,2}^t} m \cdot \nu u' g(u') ds dt \leq \frac{h(1)}{2} E(S)^2. \end{aligned}$$

**Étude de la partie sur  $\Gamma_{1,1}^t$  :**

$$\begin{aligned} (16. 34) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\Gamma_{1,1}^t} m \cdot \nu u'^2 ds dt &\leq c \int_S^T E(t)\phi'(t) \left( \int_{\Gamma_{1,1}^t} h(t)^2 ds \right) dt \\ &\leq c|\Gamma|E(S) \int_S^T \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Supposons pour l'instant que  $\phi$  possède la propriété supplémentaire suivante :

$$(16. 35) \quad \int_1^\infty \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt \text{ converge.}$$

Cette propriété est étroitement liée à la croissance de  $g$  au voisinage de 0 et à la vitesse de convergence de  $\phi'$  à l'infini. En effet, comme on a imposé à  $\phi$  de tendre vers l'infini à l'infini, l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \phi'(t) dt$$

diverge. Le choix de  $\phi$  est donc assez délicat.

Si  $\phi$  possède cette propriété, on déduit de (16. 20) et des estimations (16. 32)-(16. 34) qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$(16. 36) \quad \forall 1 \leq S < T, \int_S^T E(t)^2 \phi'(t) dt \leq cE(S).$$

Ceci nous donne une première estimation du taux de décroissance de  $E$  : on peut appliquer le Lemme 2.1 avec  $\sigma = 1$  et on en déduit qu'il existe  $C > 0$  dépendant de  $E(0)$  telle que

$$(16. 37) \quad \forall t \geq 1, E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)}.$$

Le problème est donc de trouver une fonction strictement croissante  $\phi$  satisfaisant les conditions suivantes :

$$(16. 38) \quad \phi \text{ est concave et } \phi(t) \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

$$(16. 39) \quad \phi'(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

$$(16. 40) \quad \int_1^{+\infty} \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt \text{ converge,}$$

et ensuite d'estimer la croissance de  $\phi$  à l'infini, pour pouvoir prouver (16. 14). Si une telle fonction existe, on peut supposer que  $\phi(1) = 1$ . A l'aide du changement de variable défini par

$$\tau = \phi(t)$$

on voit que

$$(16. 41) \quad \int_1^{+\infty} \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt = \int_1^{+\infty} \left( g^{-1}(\phi'(\phi^{-1}(\tau))) \right)^2 d\tau \\ = \int_1^{+\infty} \left( g^{-1} \left( \frac{1}{(\phi^{-1})'(\tau)} \right) \right)^2 d\tau.$$

Définissons la fonction  $\psi$  par

$$(16. 42) \quad \forall t \geq 1, \psi(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{g(\frac{1}{\tau})} d\tau.$$

$\psi$  est une fonction strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^2$ , et

$$\psi'(t) = \frac{1}{g(\frac{1}{t})} \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\psi(t) \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

et

$$\int_1^{+\infty} \left( g^{-1} \left( \frac{1}{\psi'(\tau)} \right) \right)^2 d\tau = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\tau^2} d\tau < +\infty.$$

De plus  $\psi'$  est croissante, donc  $\psi$  est une fonction convexe. Vérifions qu'alors  $\psi^{-1}$  est concave : en dérivant deux fois l'expression

$$\psi(\psi^{-1}(\tau)) = \tau,$$

on voit que

$$(\psi^{-1})''(\tau) = -\frac{\psi''(\psi^{-1}(\tau))\left((\psi^{-1})'(\tau)\right)^2}{\psi'(\psi^{-1}(\tau))} = -\frac{\psi''(\psi^{-1}(\tau))}{\left(\psi'(\psi^{-1}(\tau))\right)^3} \leq 0.$$

Il est alors naturel d'essayer de définir  $\phi$  par

$$(16. 43) \quad \forall t \geq 1, \quad \phi(t) = \psi^{-1}(t).$$

$\phi$  est une fonction strictement croissante, concave, et de classe  $\mathcal{C}^2$ , qui satisfie toutes les hypothèses que nous avons faites au cours de nos calculs : (16. 38) et (16. 40) sont automatiquement vérifiées, (16. 39) l'est aussi car

$$\phi'(t) = \frac{1}{\psi'(\phi(t))} = g\left(\frac{1}{\phi(t)}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

On note aussi que  $\phi(1) = 1$  car  $\psi(1) = 1$ . (Notons qu'on peut prolonger  $\phi$  de manière  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, +\infty[$ ; si  $\phi'(1) = g(1) < 1$ , on peut toujours s'arranger pour que le prolongement soit concave sur  $[0, +\infty[$ ; sinon, on définit  $\phi$  comme précédemment sur  $[\eta, +\infty[$ , avec  $\eta$  tel que  $g(\eta) < 1$ , et on prolonge de manière concave sur  $[0, +\infty[$ .)

Ainsi, on a explicitement construit une fonction  $\phi$  qui satisfait toutes les propriétés requises. Grâce à ce choix spécial, on obtient en utilisant (16. 20), puis les estimations (16. 32)-(16. 34) :

$$(16. 44) \quad \int_S^T E(t)^2 \phi'(t) dt \leq cE(S)^2 + cE(S) \int_{\phi(S)}^{+\infty} \left(g^{-1}\left(\frac{1}{(\phi^{-1})'(\tau)}\right)\right)^2 d\tau \\ \leq cE(S)^2 + cE(S) \int_{\phi(S)}^{+\infty} \frac{1}{\tau^2} d\tau = cE(S)^2 + c\frac{E(S)}{\phi(S)}.$$

On peut alors appliquer le Lemme 2.7 avec  $\sigma = \sigma' = 1$  pour en déduire que

$$(16. 45) \quad E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^2}.$$

Il reste à estimer la croissance de  $\phi$  à l'infini, plus précisément, à minorer  $\phi$  par une fonction tendant vers l'infini à l'infini. Ceci revient à majorer la fonction  $\phi^{-1} = \psi$ . Soit  $\tau_0$  tel que

$$g\left(\frac{1}{\tau_0}\right) \leq 1.$$

Comme  $g$  est croissante, on a

$$(16. 46) \quad \forall \tau \geq \tau_0, \quad \psi(\tau) \leq 1 + (\tau - 1) \frac{1}{g\left(\frac{1}{\tau}\right)} \leq \tau \frac{1}{g\left(\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{1}{G\left(\frac{1}{\tau}\right)},$$

donc

$$(16. 47) \quad \tau \leq \phi\left(\frac{1}{G\left(\frac{1}{\tau}\right)}\right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{\phi(t)} \leq \frac{1}{\tau} \text{ avec } t := \frac{1}{G\left(\frac{1}{\tau}\right)},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\phi(t)} \leq G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ceci complète la preuve de (16. 14). ■

**Remarque.** Dans le cadre des Exemples 1 et 2, (16. 14) donne déjà l'estimation annoncée. Par contre, dans le cadre de l'exemple 3, si

$$g(x) = y^p \text{ pour } 0 < y < 1$$

avec  $p > 1$ , on a

$$G(y) = y^{p+1} \text{ pour } 0 < y < 1$$

et alors (16. 14) donne l'estimation suivante

$$E(t) \leq C t^{-\frac{2}{p+1}}.$$

Cette estimation est assez loin de l'estimation (16. 16). C'est dans ce but qu'on va chercher à raffiner les estimations obtenues précédemment.

### 3.2. Estimation améliorée sur le taux de décroissance de l'énergie.

Lorsque  $H$  est une fonction *croissante*, valant zéro en zéro, (ce qui est le cas pour tous les exemples proposés), définissons plutôt la fonction  $h(t)$  par

$$(16. 48) \quad h(t) = H^{-1}(\phi'(t)).$$

Comme sur  $\Gamma_{1,2}^t$

$$\phi'(t)u'^2 \leq |H(u')|u'^2 = u'g(u'),$$

le même raisonnement est valable. Alors, avec

$$(16. 49) \quad \phi^{-1}(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{H(\frac{1}{\tau})} d\tau,$$

on voit que

$$E(t) \leq C \left(g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2,$$

ce qui représente une meilleure estimation que (16. 14).

Ceci achève la preuve du Théorème 16.2. ■

### 3.3. Estimation améliorée lorsque $g$ a une croissance polynomiale en zéro.

Si  $g(y) = y^p$  avec  $p > 1$  sur  $(0, 1)$ , alors  $H(x) = y^{p-1}$  sur  $(0, 1)$ . Ainsi  $H$  est croissante et  $H(0) = 0$ . L'estimation (16. 15) donne alors le résultat suivant :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{2/p}}.$$

C'est encore assez loin de ce qu'a prouvé E. Zuazua dans le cadre du contrôle frontière :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{2/(p-1)}}.$$



(Cette estimation avait déjà été établie auparavant dans le cadre d'un contrôle interne à croissance polynomiale en zéro par M. Nakao [61] et A. Haraux [28].)

On peut toutefois améliorer notre estimation. On va montrer qu'on peut obtenir une estimation aussi proche que l'on veut de (16. 16). Toutefois, nous ne sommes pas arrivés à retrouver cette estimation grâce à cette méthode.

Fixons

$$n \geq 1.$$

On définit

$$\phi_n(t) = t^{1/(1+n(p-1))} \text{ si } t \geq 1.$$

$\phi_n$  est choisie de telle sorte que

$$H^{-1}\left(\frac{1}{(\phi_n^{-1})'(r)}\right) = \frac{1}{r^n}.$$

De plus, il est clair que  $\phi_n$  est une fonction concave qui vérifie (16. 27). Alors on déduit de (16. 20) que  $E$  satisfait

$$(16. 50) \quad \int_S^T E(t)^2 \phi_n'(t) dt \leq cE(S)^2 + CE(S) \int_S^T \phi_n'(t) \left(H^{-1}(\phi_n'(t))\right)^2 dt \\ \leq cE(S)^2 + CE(S) \int_{\phi_n(S)}^{\phi_n(T)} \frac{1}{\tau^{2n}} d\tau \leq cE(S)^2 + \frac{C}{n} \frac{E(S)}{\phi_n(S)^{2n-1}}.$$

On peut alors appliquer le Lemme 2.7 avec  $\sigma = 1$  and  $\sigma' = 2n - 1$  pour en déduire que

$$(16. 51) \quad E(t) \leq \frac{C_n}{\phi_n(t)^{2n}} = C_n t^{\frac{-2n}{n(p-1)+1}}.$$

En choisissant  $n$  assez grand, on obtient une estimation arbitrairement proche de celle voulue. ■

## STABILISATION UNIFORME PAR UN FEEDBACK NON LINÉAIRE LOCALEMENT DISTRIBUÉ

On considère le système de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet au bord, soumis à un terme d'amortissement. Cet amortissement est une force exercée sur une partie de  $\Omega$ , et représentée par une fonction  $\rho(x, u')$ , dépendant de la position du point considéré et de la vitesse de l'onde en ce point, par exemple  $\rho(x, u') := a(x)g(u')$  où  $a$  est une fonction positive continue sur  $\overline{\Omega}$  et  $g$  une fonction non linéaire.

Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs lorsque le sous-domaine  $\omega := \{x, a(x) \geq \alpha > 0\}$  est un voisinage du bord de  $\Omega$  ou au moins un voisinage d'une certaine partie du bord de  $\Omega$  : dans le cas linéaire où  $g(x) = x$  pour tout  $x$ , E. Zuazua [78] a montré que l'énergie décroît exponentiellement. M. Nakao [64] a étendu ces résultats au cas où  $g$  a une croissance polynomiale en zéro, et a montré qu'alors l'énergie décroît polynomialement.

On améliore ces résultats dans deux directions : d'une part, à l'aide de la méthode de multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu (utilisée dans le Chapitre 9), on affaiblit les hypothèses géométriques sur la localisation de la dissipation. D'autre part, à l'aide de la méthode utilisée précédemment pour étudier le problème de la stabilisation frontière, on obtient une estimation explicite du taux de décroissance sans imposer l'hypothèse de croissance polynomiale de  $\rho$  en zéro. Par rapport au chapitre précédent, on affaiblit aussi les hypothèses sur le comportement de  $\rho(x, \cdot)$  en zéro, en ne supposant plus que cette fonction est dérivable en zéro. La preuve est basée sur une double partition du domaine dépendant du comportement de  $g$  en zéro et sur les inégalités intégrales établies dans la Partie 1.

### 1. Résultat principal et exemples

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $\mathcal{C}^2$  dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\omega$  une partie de  $\Omega$ . On note  $\nu$  le vecteur unitaire normal sortant au bord. Soit  $\rho : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On s'intéresse à l'estimation du taux de décroissance

de l'énergie des solutions du système suivant :

$$(17. 1) \quad u'' - \Delta u + \rho(x, u') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(17. 2) \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(17. 3) \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1.$$

Comme d'habitude, on définit l'énergie de la solution  $u$  par :

$$(17. 4) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( u'^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

C. M. Dafermos [17] et A. Haraux [31] ont étudié la stabilité asymptotique forte de ce système, sous des hypothèses de croissance sur la fonction  $\rho(x, \cdot)$ . M. Aassila [2] a étendu certains de leurs résultats en obtenant des résultats de stabilité forte sans hypothèse de monotonie et sur des domaines de mesure finie (au lieu de borné) lorsque le terme d'amortissement est uniformément distribué dans le domaine :  $\rho(x, \cdot) \equiv \rho(\cdot)$ .

Quand le feedback dépend de manière linéaire de la vitesse, c'est-à-dire

$$\rho(x, u') = a(x)u',$$

E. Zuazua [78] a prouvé que l'énergie décroît exponentiellement si la région où la dissipation est effective, c'est-à-dire où  $a(x) \geq \alpha > 0$ , contient un voisinage de  $\partial\Omega$  ou au moins un voisinage de

$$\Gamma(x^0) := \{x \in \partial\Omega, (x - x^0) \cdot \nu(x) \geq 0\}.$$

Sa preuve est basée sur la méthode des multiplicateurs et sur un argument de compacité.

D'autre part, C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7] ont obtenu une condition nécessaire et suffisante en utilisant des techniques d'analyse microlocale : l'énergie décroît exponentiellement si et seulement si la région où la dissipation est effective satisfait la "condition géométrique des rayons optiques".

M. Nakao a étendu les résultats de E. Zuazua [78] en étudiant le cas des dissipations linéaires dégénérées (c'est-à-dire qui tendent vers zéro au bord) ([63]), et ensuite le cas des dissipations non linéaires ([64]), sous l'hypothèse habituelle que la fonction  $\rho(x, \cdot)$  a une croissance polynomiale en zéro.

L. R. Tcheougoué Tébou [72] a simplifié les preuves de M. Nakao [64].

Dans la suite, on combine la méthode présentée dans le paragraphe précédent et la technique de multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu [56] et utilisée dans le Chapitre 9 pour améliorer les résultats de stabilisation par un feedback localement distribué.

On utilisera les notations suivantes :

- $x \cdot y$  représente le produit scalaire euclidien de  $x$  par  $y$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,
- si  $\Omega_j \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine lipschitz,  $\nu_j$  représente le vecteur unitaire normal sortant au bord  $\partial\Omega_j$  de  $\Omega_j$ ,
- si  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$  et  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $d(x, \mathcal{O}) = \inf_{y \in \mathcal{O}} |x - y|$ , et  $\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{O}) := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \mathcal{O}) < \varepsilon\}$ .

On effectue les hypothèses suivantes :

**Hyp. 1 : sur le comportement du terme d'amortissement :** on suppose que  $\rho : (x, v) \mapsto \rho(x, v)$  appartient à  $\mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  et est croissante en  $v$ . De plus, on suppose qu'il existe une fonction positive et bornée  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction impaire strictement croissante  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$(17. 5) \quad a(x)|v| \leq |\rho(x, v)| \leq Ca(x)|v| \text{ si } |v| \geq 1,$$

$$(17. 6) \quad a(x)g(|v|) \leq |\rho(x, v)| \leq Ca(x)g^{-1}(|v|) \text{ si } |v| \leq 1,$$

où  $g^{-1}$  représente la fonction inverse de  $g$  et  $C$  est une constante positive. On note

$$(17. 7) \quad G(v) = vg(v) \text{ and } H(v) = \frac{g(v)}{v}.$$

On remarque que  $G$  est continue, strictement croissante sur  $[0, 1]$  et  $G(0) = 0$ ;  $H$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $H(0) = g'(0)$ . M. Nakao [64] a traité le cas où  $g(v) = v^p$ , avec  $p > 1$ .

**Hyp. 2 : sur la localisation du terme d'amortissement :** on suppose satisfaites les conditions géométriques suivantes sur  $\Omega$  et  $\omega$  comme dans Liu [56] : il existe  $\varepsilon > 0$ , des sous-domaines  $\Omega_j \subset \Omega$ ,  $1 \leq j \leq J$  ayant un bord Lipschitz  $\partial\Omega_j$  et des points  $x_j \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$(17. 8) \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

$$(17. 9) \quad \omega \supset \Omega \cap \mathcal{N}_\varepsilon \left[ \bigcup_j \Gamma_j(x_j) \cup \left( \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j \right) \right],$$

$$(17. 10) \quad \text{où } \Gamma_j(x_j) := \{x \in \partial\Omega_j : (x - x_j) \cdot \nu_j(x) > 0\}.$$

Le cas traité par E. Zuazua [78] correspond au cas où on a uniquement un seul sous-domaine  $\Omega_1$  coïncidant avec  $\Omega$ . On note  $m_j(x) = x - x_j$ .

L'existence et la régularité de la solution  $u$  de (17. 1)-(17. 3) sont données par la Proposition classique suivante (voir par exemple A. Haraux [30]):

**PROPOSITION 17.1.** *Supposons que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que l'Hypothèse 1 est satisfaite. Alors*

1. *étant donné  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , le problème (17. 1)-(17. 3) admet une unique solution  $u(t)$  vérifiant :*

$$(17. 11) \quad u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)).$$

2. *Si de plus  $(u^0, u^1) \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , alors la solution  $u(t)$  de (17. 1)-(17. 3) vérifie :*

$$(17. 12) \quad u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega)).$$

On a alors le résultat suivant :

**THÉORÈME 17.1.** *Supposons que  $a \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  et est minorée sur  $\omega$  par une certaine constante strictement positive  $\alpha > 0$  :*

$$(17. 13) \quad \forall x \in \omega, \quad a(x) \geq \alpha > 0.$$

*Si Hyp. 1 et Hyp. 2 sont satisfaites, alors :*

1. dans le cas le plus simple où  $g(v) = v$ , l'énergie décroît exponentiellement il existe une constante  $\gamma = \gamma(\Omega, \omega, \alpha, \Omega_j, x_j) > 0$  telle que, étant donné  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , l'énergie de la solution  $u$  de (17. 1)-(17. 3) satisfait l'estimation suivante :

$$(17. 14) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\gamma t}.$$

2. Dans le cas général, l'énergie de la solution  $u$  de (17. 1)-(17. 3) décroît comme

$$(17. 15) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq C \left( G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2,$$

où  $C$  dépend seulement de l'énergie initiale  $E(0)$  (et de manière continue).

3. De plus si  $H$  est une fonction croissante sur  $[0, \eta]$  pour un certain  $\eta > 0$ , et que  $H(0) = 0$ , alors en fait

$$(17. 16) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq C \left( g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2,$$

où  $C$  dépend seulement de l'énergie initiale  $E(0)$  (et de manière continue).

**Remarques.** 1. La Partie 1 du Théorème 17.1 affaiblit les conditions géométriques sur la localisation de la dissipation supposées par E. Zuazua [78]. Il n'est pas difficile de construire une fonction  $a$  qui satisfait (17. 13) sans vérifier la condition

$$a(x) \geq \alpha \text{ on } \Gamma(x^0).$$

Par exemple si  $\Omega$  est la boule ouverte dans  $\mathbb{R}^2$  centrée en  $O$  et de rayon  $R$ , et  $a$  est une fonction continue minorée sur la partie hachurée de la Figure 12. Si les points  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont bien choisis ( $x_1$  et  $x_2$  doivent être choisis assez loin sur les axes), on voit que

$$(x - x_i) \cdot \nu(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i.$$

Alors (17. 8)-(17. 10) sont satisfaites si  $\omega$  est un voisinage de la partie hachurée. (voir K. Liu [56] pour d'autres exemples).

La preuve est basée sur la méthode de multiplicateurs par morceaux introduite par K. Liu [56] et donne une estimation explicite de la constante  $\gamma$ .

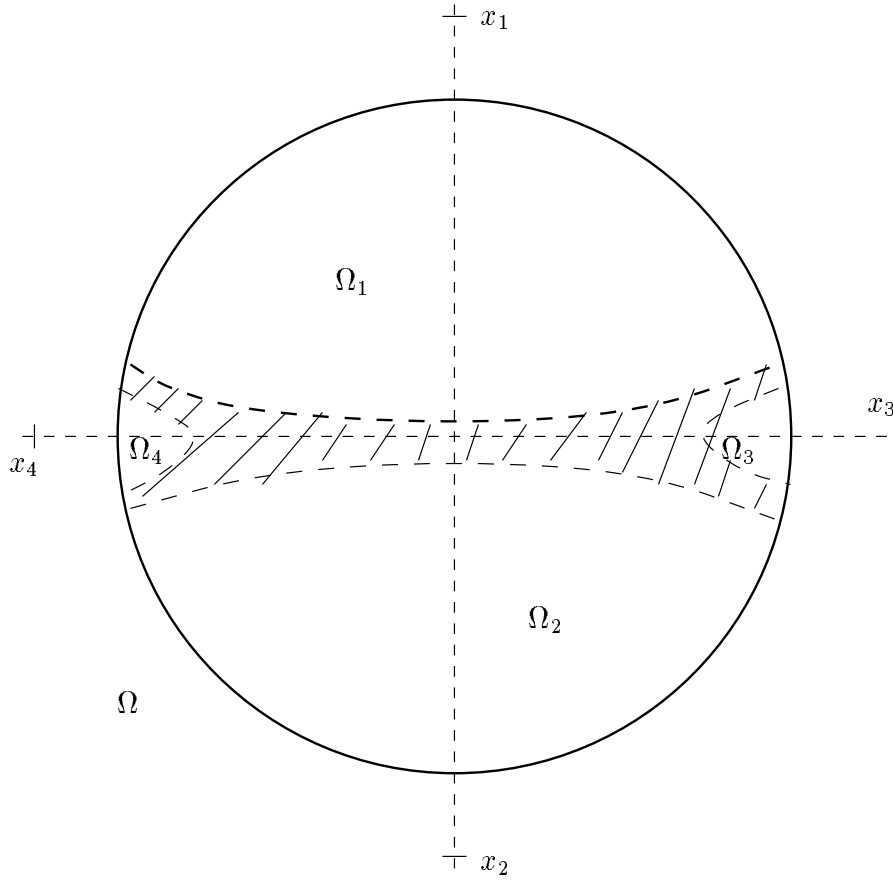


Fig. 12

2. Les Parties 2 and 3 du Théorème 17.1 améliorent le résultat de M. Nakao [64] dans deux directions : on affaiblit la condition géométrique et on ne suppose plus que  $g$  a une croissance polynomiale en zéro. En ce qui concerne les exemples du chapitre précédent (cas frontière), on obtient les mêmes estimations. D'autre part, on ne suppose plus que  $\rho(x, \cdot)$  est dérivable en zéro comme dans la partie précédente. On peut donner de nouveaux exemples :

**Exemple 1.** Le résultat s'applique pour des termes d'amortissement de la forme

$$\rho(x, v) = a(x) \left( \frac{-1}{\ln v} \right), \forall v \in ]0, \frac{1}{2}[,$$

(qui est une fonction qui tend très lentement vers zéro en zéro.) Alors, on applique le Théorème 17.1 avec

$$g(v) = a(x) e^{-1/v} \text{ si } 0 < v < \frac{1}{\ln 2},$$

et (17. 16) donne l'estimation

$$E(t) \leq \frac{C}{(\ln t)^2}.$$

**Exemple 2.** Si

$$\rho(x, v) = a(x) \frac{1}{\ln(-\ln v)} \text{ pour } 0 < v < \frac{1}{e^2},$$

alors (17. 16) donne l'estimation

$$E(t) \leq \frac{C}{(\ln(\ln t))^2}.$$

**Exemple 3.** Si

$$\rho(x, v) = a(x)v^{1/p} \text{ if } 0 < v < 1$$

avec  $p > 1$ , on prouve que

$$E(t) \leq C_\varepsilon t^{\frac{-2}{p-1} + \varepsilon},$$

ce qui représente une estimation arbitrairement proche de celle trouvée par M. Nakao [64] :

$$E(t) \leq Ct^{\frac{-2}{p-1}}.$$

On peut étudier de la même manière le problème de stabilisation du système général de l'élasticité par un feedback non linéaire localement distribué. Contrairement au cas frontière (pour lequel le problème de stabilisation par un feedback frontière non linéaire est encore ouvert), on obtient des résultats semblables :

## 2. Application au système de l'élasticité

Soit  $(a_{ijkl})$  un tenseur ayant la propriété de symétrie suivante

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

(tous les indices vont de 1 à  $N$ ), satisfaisant la condition d'ellipticité suivante (avec un certain  $\beta > 0$ ) :

$$a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq \beta \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

pour tout tenseur *symétrique*  $\varepsilon_{ij}$ . Dans tout ce paragraphe, on utilise la convention de sommation des indices répétés.

Soit  $\Omega$  domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^2$ . Étant donnée une fonction  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_N(x))$ , on note

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\xi_{i,j} + \xi_{j,i}) \text{ et } \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

où  $\xi_{i,j} = \partial \xi_i / \partial x_j$ .

On considère le problème

$$(17. 17) \quad \xi_i'' - \sigma_{ij,j} + \rho(x, \xi_i) = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+$$

$$(17. 18) \quad \xi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+$$

$$(17. 19) \quad \xi(0) = \xi^0, \xi'(0) = \xi^1.$$

On définit l'énergie par

$$E(t) = \int_{\Omega} \xi'_i \xi'_i + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx.$$

Supposons satisfaites les conditions (17. 5)-(17. 10). On a alors le résultat suivant :

**THÉORÈME 17.2.** *Supposons que  $a \in C^0(\overline{\Omega})$  et est minorée par une constante strictement positive  $\alpha$  sur  $\omega$  :*

$$(17. 20) \quad \forall x \in \omega, \quad a(x) \geq \alpha > 0.$$

*Si Hyp. 1 and Hyp. 2, sont satisfaites, alors*

*1. dans le cas le plus simple où  $g(v) = v$ , l'énergie décroît exponentiellement il existe une constante  $\gamma = \gamma(\Omega, \omega, \alpha, \Omega_j, x_j) > 0$  telle que, étant donné  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , l'énergie de la solution  $u$  de (17. 17)-(17. 19) satisfait l'estimation suivante :*

$$(17. 21) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\gamma t}.$$

*2. Dans le cas général, l'énergie de la solution  $\xi$  de (17. 1)-(17. 3) décroît comme*

$$(17. 22) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq C \left( G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2,$$

*où  $C$  dépend seulement de l'énergie initiale  $E(0)$  (et de manière continue).*

*3. De plus si  $H$  est une fonction croissante et que  $H(0) = 0$ , alors*

$$(17. 23) \quad \forall t > 0, \quad E(t) \leq C \left( g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2,$$

*où  $C$  dépend seulement de l'énergie initiale  $E(0)$  (et de manière continue).*

La preuve du Théorème 17.2 est semblable à la preuve du Théorème 17.1.

### 3. Inégalité donnée par la méthode des multiplicateurs par morceaux

Comme précédemment, on travaillera sur des solutions fortes, pour lesquelles les calculs sont justifiés. Un raisonnement par densité permet de conclure.

On commence par vérifier que le problème (17. 1)-(17. 3) est dissipatif:

LEMME 17.1.

$$(17. 24) \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty, \quad E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Omega} u' \rho(x, u') dx dt.$$

*Preuve du Lemme 17.1.* On multiplie (17. 1) par  $u'$  et on intègre par partie sur  $\Omega \times [S, T]$  :

$$\begin{aligned} - \int_S^T \int_{\Omega} u' \rho(x, u') &= \int_S^T \int_{\Omega} u' (u'' - \Delta u) \\ &= \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 \right]_S^T = E(T) - E(S). \blacksquare \end{aligned}$$

La preuve du Théorème 17.1 est basée sur l'inégalité suivante :



PROPOSITION 17.2. *Supposons satisfaite l'Hypothèse 2.*

Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement croissante, concave et de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $\sigma \geq 0$ .

Il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, étant donné  $(u^0, u^1) \in (H^2(\Omega) \cup H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ , la solution  $u(t)$  de (17. 1)-(17. 3) satisfait

$$(17. 25) \quad \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' d\tau \leq C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\omega u'^2 dx d\tau \\ + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \rho(x, u')^2 dx d\tau + CE(S)^{1+\sigma}.$$

**Remarques.** 1. La preuve de (17. 25) est basée sur des techniques de multiplicateurs; la constante  $C$  est explicite.

2. Quand  $\phi'(t) = 1$ , (17. 25) est classique. E. Zuazua [78], M. Nakao [64] et L.R. Tcheugoué Tébou [72] l'ont prouvé sous différentes hypothèses sur le terme  $\rho(x, \cdot)$  et quand  $\omega$  contient un voisinage de  $\Gamma(x^0)$ ; K. Liu et M. Yamamoto [57] l'ont prouvé sous Hyp. 2 quand  $\rho(x, u') \equiv 0$  et  $\sigma = 0$ .

Dans les calculs prouvant (17. 25), on omet d'écrire les éléments différentiels, pour simplifier les expressions. Toutes les constantes  $C$  seront explicites.

### 3.1. La méthode des multiplicateurs par morceaux.

LEMME 17.2. *Soit  $\mathcal{O} \subset \Omega$  un domaine Lipschitz.*

Soit  $h : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $0 \leq S < T < +\infty$  et  $\sigma \geq 0$ . Alors on a l'identité suivante :

$$(17. 26) \quad \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial\mathcal{O}} 2\partial_\nu u h \cdot \nabla u + (h \cdot \nu)(u'^2 - |\nabla u|^2) \\ = \left[ E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \\ + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{div} h)(u'^2 - |\nabla u|^2) + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2\rho(x, u') h \cdot \nabla u.$$

**Remarque.** Les intégrations par partie qui conduisent à (17. 26) sont habituellement faites si  $\mathcal{O}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et restent valables si  $\mathcal{O}$  est seulement Lipschitz grâce aux résultats de P. Grisvard [23].

*Preuve du Lemme 17.2.* Cette identité est donné par la méthode des multiplicateurs : on intègre par partie l'expression suivante :

$$0 = \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} 2h \cdot \nabla u (u'' - \Delta u + \rho(x, u')) \\ = \left[ E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \\ - \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u' - \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial\mathcal{O}} 2\partial_\nu u h \cdot \nabla u \\ + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla (2h \cdot \nabla u) + 2\rho(x, u') h \cdot \nabla u,$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \\
&\quad - \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial \mathcal{O}} 2\partial_\nu u h \cdot \nabla u + h \cdot \nu u'^2 + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{div} h) u'^2 \\
&\quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} 2 \sum_{i,k} \left( \partial_i h_k \partial_i u \partial_k u + h_k \partial_i u \partial_{i,k}^2 u \right) + 2\rho(x, u') h \cdot \nabla u, \\
&= \left[ E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\mathcal{O}} 2u'h \cdot \nabla u \\
&\quad - \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial \mathcal{O}} 2\partial_\nu u h \cdot \nabla u + h \cdot \nu (u'^2 - |\nabla u|^2) \\
&+ \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\mathcal{O}} (\operatorname{div} h) (u'^2 - |\nabla u|^2) + 2 \sum_{i,k} \partial_i h_k \partial_i u \partial_k u + 2\rho(x, u') h \cdot \nabla u
\end{aligned}$$

Ainsi, en mettant toutes les intégrales de bord dans le membre de gauche, on obtient (17. 26). ■

Le principal problème est d'estimer, et plus précisément de majorer, les intégrales de bord dans (17. 26). Habituellement, ce genre d'identité est utilisé avec  $\mathcal{O} = \Omega$ ; alors, un champ de vecteurs  $h$  bien choisi permet d'estimer les intégrales de bord en utilisant les conditions sur le bord : on majore facilement sur  $\{u = 0\} \cap \{m \cdot \nu \leq 0\}$ , et on choisit  $h$  égal à zéro sur l'autre partie du bord.

Dans notre cas, on utilisera l'identité (17. 26) sur chaque sous-domaine  $\Omega_j$ . Pour éviter les problèmes donnés par le manque d'information sur les valeurs de  $u$  sur chaque  $\partial\Omega_j$ , Liu [56] a construit un champ de vecteurs  $h_j$  qui permet d'utiliser la même stratégie qu'auparavant : l'une de ces propriétés est d'être égal à zéro sur  $(\partial\Omega_j \setminus \partial\Omega) \cup \Gamma_j(x_j)$ . On décrit la construction de  $h_j$  : soit  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ ; on définit pour  $i = 0$  à 2 :

$$(17. 27) \quad Q_i = \mathcal{N}_{\varepsilon_i} \left[ \cup_j \Gamma_j(x_j) \cup \left( \Omega \setminus \cup_j \Omega_j \right) \right].$$

Comme  $(\overline{\Omega_j} \setminus Q_1) \cap \overline{Q_0} = \emptyset$ , on peut construire une fonction  $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui vérifie :

$$(17. 28) \quad 0 \leq \psi_j \leq 1,$$

$$(17. 29) \quad \psi_j = 1 \text{ sur } \overline{\Omega_j} \setminus Q_1,$$

$$(17. 30) \quad \psi_j = 0 \text{ sur } Q_0.$$

On utilise l'identité (17. 26) avec  $\mathcal{O} := \Omega_j$  et  $h = h_j(x) := \psi_j(x)m_j(x)$  :

$$\begin{aligned}
(17. 31) \quad & \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial\Omega_j} 2\partial_\nu u \psi_j m_j \cdot \nabla u + (\psi_j m_j \cdot \nu)(u'^2 - |\nabla u|^2) \\
& = \left[ E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j m_j \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j m_j \cdot \nabla u \\
& \quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j} (\operatorname{div} \psi_j m_j)(u'^2 - |\nabla u|^2) \\
& \quad + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial(\psi_j m_j)_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2\rho(x, u') \psi_j m_j \cdot \nabla u.
\end{aligned}$$

Pour commencer, on étudie l'intégrale de bord dans (17. 31). Par construction,  $\psi_j = 0$  en dehors de  $((\partial\Omega_j \setminus \Gamma_j(x_j)) \cap \partial\Omega)$ . Donc, il faut seulement tenir compte de la partie sur  $((\partial\Omega_j \setminus \Gamma_j(x_j)) \cap \partial\Omega)$ . Mais sur cette partie,  $u = 0$ , donc  $u' = 0$  et  $\nabla u = (\partial_\nu u)\nu = (\partial_{\nu_j} u)\nu_j$ . On en déduit que l'intégrale de bord dans (17. 31) est égale à

$$\begin{aligned}
& \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{((\partial\Omega_j \setminus \Gamma_j(x_j)) \cap \partial\Omega)} 2\partial_{\nu_j} u \psi_j m_j \cdot \nabla u + (\psi_j m_j \cdot \nu_j)(u'^2 - |\nabla u|^2) \\
& \quad = \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{((\partial\Omega_j \setminus \Gamma_j(x_j)) \cap \partial\Omega)} \psi_j (m_j \cdot \nu_j) (\partial_{\nu_j} u)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (17. 30), on déduit de (17. 31) que pour chaque indice  $j$

$$\begin{aligned}
& \left[ E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j m_j \cdot \nabla u \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j m_j \cdot \nabla u \\
& \quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j \setminus Q_0} (\operatorname{div} \psi_j m_j)(u'^2 - |\nabla u|^2) \\
& \quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j \setminus Q_0} 2 \sum_{i,k} \frac{\partial(\psi_j m_j)_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2\rho(x, u') \psi_j m_j \cdot \nabla u \leq 0.
\end{aligned}$$

Grâce à (17. 29), on a

$$\begin{aligned}
(17. 32) \quad & \sum_j \left[ E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j m_j \cdot \nabla u \right]_S^T \\
& - \sum_j \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\Omega_j} 2u' \psi_j m_j \cdot \nabla u \\
& + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j \setminus Q_1} N u'^2 + (2 - N) |\nabla u|^2 \\
& + \sum_j \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j} 2\rho(x, u') \psi_j m_j \cdot \nabla u \\
\leq & - \sum_j \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j \cap Q_1} (\operatorname{div} \psi_j m_j) (u'^2 - |\nabla u|^2) + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial(\psi_j m_j)_k}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \\
\leq & C \sum_j \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 \leq C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

où  $C = C(\varphi, m)$  est une constante positive qui dépend de  $\varphi_j$  et  $m_j$ . (Remarque :  $\cup_j (\Omega_j \setminus Q_1) = \Omega \setminus Q_1$ .)

Comme d'habitude, on obtient une autre identité remarquable en multipliant (17. 1) par  $(N - 1)u$  :

$$(N - 1) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega} u (u'' - \Delta u + \rho(x, u')) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
(17. 33) \quad & (N - 1) \left[ E^\sigma \phi' \int_{\Omega} u u' \right]_S^T - (N - 1) \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_{\Omega} u u' \\
& + (N - 1) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - u'^2 + u \rho(x, u') = 0.
\end{aligned}$$

On note

$$\begin{cases} h(x) := \psi_j(x) m_j(x) \text{ si } x \in \Omega_j, \\ h(x) := 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus \cup_j \Omega_j, \end{cases}$$

et

$$(17. 34) \quad M(u) := 2h \cdot \nabla u + (N - 1)u.$$

On additionne (17. 33) à (17. 32) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \left[ E^\sigma \phi' \int_{\Omega} M(u) u' \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \left( \int_{\Omega} M(u) u' \right) \\
& + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega} M(u) \rho(x, u') + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega_j \setminus Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 \\
& \leq C' \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$(17. 35) \quad 2 \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' \leq (C' + 1) \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 \\ - \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega M(u) u' \right]_S^T + \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \left( \int_\Omega M(u) u' \right) \\ - \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega M(u) \rho(x, u').$$

C'est l'inégalité clé pour prouver (17. 25). On commence par estimer les différents termes du membre de droite.

### 3.2. Estimations des divers termes du membre de droite (17. 35).

Soit  $\phi$  une fonction croissante, concave et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

LEMME 17.3. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que*

$$(17. 36) \quad \left| E^\sigma \phi' \int_\Omega M(u) u' dx \right| \leq C E(t)^{1+\sigma}.$$

*Preuve du Lemme 17.3.* D'une part,  $\phi'$  est positive et décroissante donc bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . D'autre part, il existe  $c > 0$  tel que

$$\left| \int_\Omega M(u) u' dx \right| \leq c' E(t).$$

On en déduit (17. 36). ■

LEMME 17.4. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que*

$$(17. 37) \quad \left| \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \left( \int_\Omega M(u) u' dx \right) dt \right| \leq C E(S)^{1+\sigma}.$$

*Preuve du Lemme 17.4.* On utilise le fait que  $\phi$  est concave et que  $E$  est décroissante :

$$\left| \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \left( \int_\Omega M(u) u' dx \right) \right| \\ \leq c \int_S^T -E'(\tau) E(\tau)^\sigma dt + c E(S)^{1+\sigma} \int_S^T -\phi''(\tau) dt \\ \leq \frac{c}{1+\sigma} E(S)^{1+\sigma} + c \phi'(S) E(S)^{1+\sigma}. \blacksquare$$

LEMME 17.5. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que, pour tout  $\delta > 0$ , on a*

$$(17. 38) \quad \left| \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega M(u) \rho(x, u') dx dt \right| \\ \leq \frac{C}{\delta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \rho(x, u')^2 dx dt + \delta \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt.$$

*Preuve du Lemme 17.5.* Soit  $\delta > 0$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega M(u) \rho(x, u') \right| &\leq \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \frac{\delta}{2} M(u)^2 + \frac{1}{2\delta} \rho(x, u')^2 \\ &\leq \frac{c\delta}{2} \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' + \frac{1}{2\delta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \rho(x, u')^2. \blacksquare \end{aligned}$$

A l'aide des estimations (17. 36)-(17. 38), on déduit de (17. 35) que, si  $\delta$  est assez petit, il existe une constante strictement positive  $C$  telle que

$$(17. 39) \quad \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt \leq CE(S)^{1+\sigma} + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \rho(x, u')^2 dx dt \\ + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_1} u'^2 + |\nabla u|^2 dx dt.$$

Il reste à estimer le dernier terme :

LEMME 17.6. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que, pour tout  $\delta > 0$  :*

$$(17. 40) \quad \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_1} |\nabla u|^2 dx dt \leq CE(S)^{1+\sigma} \\ + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_2} u'^2 + \rho(x, u')^2 + u^2 dx dt.$$

*Preuve du Lemme 17.6.* Puisque  $\overline{\mathbb{R}^n \setminus Q_2} \cap \overline{Q_1} = \emptyset$ , on peut construire  $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui ait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1, \\ \xi = 1 \text{ on } Q_1, \\ \xi = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus Q_2. \end{cases}$$

On multiplie (17. 1) par  $\xi u$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega -\xi u \rho(x, u') &= \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \xi u (u'' - \Delta u) \\ &= \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega \xi u u' \right]_S^T - \int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega \xi u u' \\ &\quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega -\xi u'^2 + \nabla u \cdot \nabla(\xi u), \\ &= \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega \xi u u' \right]_S^T - \int_S^T (\sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'') \int_\Omega \xi u u' \\ &\quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \xi (|\nabla u|^2 - u'^2) - \frac{1}{2} u^2 \Delta \xi. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_1} |\nabla u|^2 \\
& \leq - \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega \xi u u' \right]_S^T + \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_\Omega \xi u u' \\
& \quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega -\xi u \rho(x, u') + \xi u'^2 + \frac{1}{2} u^2 \Delta \xi \\
& \leq C E(S)^{1+\sigma} + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_2} \rho(x, u')^2 + u'^2 + u^2. \blacksquare
\end{aligned}$$

Pour finir, on estime le dernier terme à l'aide de la méthode de F. Conrad et B. Rao [16] (déjà utilisée précédemment) :

LEMME 17.7. *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle que, pour tout  $\eta > 0$  :*

$$\begin{aligned}
(17.41) \quad & \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\Omega \cap Q_2} u^2 dx dt \leq C E(S)^{1+\sigma} + \eta \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt \\
& \quad + \frac{C}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \rho(x, u')^2 dx dt + \frac{C}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\omega u'^2 dx dt.
\end{aligned}$$

*Preuve du Lemme 17.7.* Puisque  $\overline{\mathbb{R}^n \setminus \omega} \cap \overline{Q_2} = \emptyset$ , on peut construire  $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui ait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} 0 \leq \beta \leq 1, \\ \beta = 1 \text{ sur } Q_2, \\ \beta = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \omega. \end{cases}$$

Soit  $t$  fixé. On considère la solution  $z$  du problème elliptique suivant :

$$(17.42) \quad \Delta z = \beta(x)u \text{ dans } \Omega,$$

$$(17.43) \quad z = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On multiplie (17.42) par  $z$  pour en déduire qu'il existe  $c > 0$  tel que :

$$\int_\Omega |\nabla z|^2 = - \int_\Omega \beta u z \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc

$$(17.44) \quad \|z\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'autre part, en dérivant par rapport à  $t$ , on voit que  $z'$  est solution du problème :

$$(17.45) \quad \Delta z' = \beta(x)u' \text{ dans } \Omega,$$

$$(17.46) \quad z' = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On en déduit que

$$(17.47) \quad \int_\Omega z'^2 \leq c \int_\Omega \beta u'^2.$$

Ensuite on multiplie (17. 1) par  $z$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z (u'' - \Delta u + \rho(x, u')) \\ &= \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega z u' \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_\Omega z u' \\ &\quad + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega -z' u' - u \Delta z + z \rho(x, u'). \end{aligned}$$

Donc

$$(17. 48) \quad \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \beta u^2 = \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega z u' \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_\Omega z u' + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega -z' u' + z \rho(x, u').$$

D'abord, on remarque que

$$\left| \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega z u' \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_\Omega z u' \right| \leq c E(S)^{1+\sigma}.$$

Ensuite, fixons  $\eta > 0$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z' u' \right| &\leq \int_S^T E^\sigma \phi' c \left( \int_\Omega \beta u'^2 \right)^{1/2} \left( \int_\Omega u'^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{2\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \beta u'^2 + \frac{c\eta}{2} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u'^2 \\ &\leq \frac{c}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\omega u'^2 + c\eta \int_S^T E^{1+\sigma} \phi'. \end{aligned}$$

Enfin, le dernier terme peut être étudié de la même manière :

$$\left| \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega z \rho(x, u') \right| \leq \frac{c}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \rho(x, u')^2 + \eta c \int_S^T E^{1+\sigma} \phi'.$$

On déduit (17. 41) de (17. 48) et des trois dernières majorations. ■

### 3.3. Fin de la preuve de la Proposition 17.2.

À présent, on peut achever la preuve de la Proposition 17.2 : grâce à (17. 40) et ensuite à (17. 41), on déduit de (17. 39) qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt &\leq C E(S)^{1+\sigma} + \frac{C}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \rho(x, u')^2 dx dt \\ &\quad + \frac{C}{\eta} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\omega u'^2 dx dt + \eta \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant  $\eta < 1$ , on obtient (17. 25). ■



#### 4. Estimations sur le taux de décroissance de l'énergie

On va chercher à appliquer la même stratégie que lors du chapitre précédent.

##### 4.1. Décroissance exponentielle de l'énergie si $g(v) = v$ .

Supposons que

$$\forall x \in \Omega, v \in \mathbb{R}, a(x)|v| \leq |\rho(x, v)| \leq Ca(x)|v|.$$

Montrons alors que l'énergie décroît exponentiellement : comme  $a(x) \geq \alpha > 0$  sur  $\omega$ , on déduit de la Proposition 17.2 que

$$(17. 49) \quad \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt \leq CE^{1+\sigma}(S) + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega au'^2 dx dt \\ \leq CE^{1+\sigma}(S) + C \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u' \rho(x, u') dx dt.$$

Prenons  $\phi(t) = t$  et  $\sigma = 0$ ; on déduit alors de (17. 49) et de (17. 24) que

$$(17. 50) \quad \int_S^T E(\tau) dt \leq CE(S) + C \int_S^T \int_\Omega u' \rho(x, u') dx dt = 2CE(S).$$

Alors le Lemme 1.1 permet d'affirmer que

$$(17. 51) \quad E(t) \leq E(0)e^{1-t/(2C)}.$$

Ceci conclut la preuve de la première partie du Théorème 17.1. ■

##### 4.2. Estimation sur le taux de décroissance : preuve de (17. 15).

Soit  $g$  la fonction impaire, strictement croissante, de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que l'Hypothèse 1 est satisfaite. Fixons  $\sigma = 1$ . Supposons que  $\phi$  est une fonction strictement croissante, concave, de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que

$$(17. 52) \quad \phi(t) \rightarrow +\infty \text{ et } \phi'(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

On va estimer les termes du membre de droite de (17. 25) dans la but d'appliquer le Lemme 2.7 : on étudie d'abord

$$\int_S^T E\phi' \int_\omega u'^2 dx dt$$

On a l'estimation suivante :

LEMME 17.8. *Il existe  $C > 0$  tel que*

$$(17. 53) \quad \int_S^T E\phi' \int_\omega u'^2 dx dt \leq CE(S)^2 + CE(S) \int_S^T \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

*Preuve du Lemme 17.8.* C'est la même que lors du chapitre précédent : on introduit

$$(17. 54) \quad h(t) = g^{-1}(\phi'(t)).$$

$h$  est positive décroissante et

$$h(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Pour  $t \geq 1$ , on définit

$$(17. 55) \quad \Omega_{1,1}^t := \{x \in \Omega : |u'| \leq h(t)\},$$

$$(17. 56) \quad \Omega_{1,2}^t := \{x \in \Omega : h(t) < |u'| \leq h(1)\},$$

$$(17. 57) \quad \Omega_{1,3}^t := \{x \in \Omega : |u'| > h(1)\}.$$

Soit  $S \geq 1$ ; On étudie d'abord la partie sur  $\Omega_{1,3}^t$ . Comme lors de l'étude du cas frontière, on voit que d'après (17. 5)-(17. 6), il existe  $c > 0$  tel que

$$|\rho(x, v)| \geq c a(x)|v| \text{ si } |v| \geq h(1).$$

En effet,

$$\frac{|\rho(x, v)|}{|v|} \geq a(x) \text{ si } |v| \geq 1,$$

et, si  $h(1) \leq 1$ ,

$$\frac{|\rho(x, v)|}{|v|} \geq a(x) \frac{g(|v|)}{|v|} \geq c a(x) \text{ si } |v| \in [h(1), 1].$$

Donc

$$(17. 58) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{1,3}^t} a u'^2 dx dt \leq \frac{1}{c} \int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{1,3}^t} u' \rho(x, u') dx dt \\ \leq \frac{\phi'(S)}{c} \int_S^T E(-E') \leq CE(S)^2.$$

Ensuite on étudie la partie sur  $\Omega_{1,2}^t$  : comme  $g$  est croissante, si  $x \in \Omega_{1,2}^t$ , alors

$$\phi'(t) = g(h(t)) \leq |g(u')|.$$

Comme

$$a(x) u'^2 |g(u')| \leq u'^2 |\rho(x, u')| \leq u' \rho(x, u') \text{ si } |u'| \leq 1,$$

et, si  $h(1) \geq 1$ ,

$$\frac{u' \rho(x, u')}{u'^2 |g(u')|} \geq \frac{a(x)}{|g(u')|} \geq \frac{a(x)}{g(h(1))} \text{ si } |u'| \in [1, h(1)],$$

on a

$$(17. 59) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{1,2}^t} a u'^2 dx dt \leq \int_S^T E \int_{\Omega_{1,2}^t} a |g(u')| u'^2 dx dt \\ \leq C \int_S^T E \int_{\Omega_{1,2}^t} u' \rho(x, u') dx dt \leq CE(S)^2.$$

Enfin, on étudie la partie sur  $\Omega_{1,1}^t$  :

$$(17. 60) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{1,1}^t} a u'^2 dx dt \leq c \int_S^T E(t)\phi'(t) \left( \int_{\Omega_{1,1}^t} h(t)^2 dx \right) dt \\ \leq c|\Omega|E(S) \int_S^T \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

Comme  $a(x) \geq \alpha > 0$  sur  $\omega$ , on additionne (17. 58)-(17. 60) pour conclure. ■

Ensuite on cherche à estimer le terme

$$\int_S^T E\phi' \int_{\Omega} \rho(x, u')^2 dx dt :$$

LEMME 17.9. *Il existe  $C > 0$  tel que*

(17. 61)

$$\int_S^T E\phi' \int_{\Omega} \rho(x, u')^2 dx dt \leq C E(S)^2 + C E(S) \int_S^T \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

*Preuve du Lemme 17.9.* On suit la même stratégie : on fixe  $t \geq 1$  et on définit

$$(17. 62) \quad \Omega_{2,1}^t := \{x \in \Omega : |u'| \leq \phi'(t)\},$$

$$(17. 63) \quad \Omega_{2,2}^t := \{x \in \Omega : \phi'(t) < |u'| \leq \phi'(1)\},$$

$$(17. 64) \quad \Omega_{2,3}^t := \{x \in \Omega : |u'| > \phi'(1)\}.$$

Grâce à cette partition de  $\Omega$ , on voit facilement que

$$(17. 65) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{2,3}^t} \rho(x, u')^2 dx dt \leq C \int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{2,3}^t} u' \rho(x, u') dx dt \\ \leq C \int_S^T E(-E') \leq C E(S)^2.$$

Ensuite on étudie la partie sur  $\Omega_{2,2}^t$  : par définition, si  $x \in \Omega_{2,2}^t$ , on a

$$(17. 66) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{2,2}^t} \rho(x, u')^2 dx dt \leq \int_S^T E \int_{\Omega_{2,2}^t} |u'| \rho(x, u')^2 dx dt \\ \leq C \int_S^T E \int_{\Omega_{2,2}^t} u' \rho(x, u') dx dt \leq C E(S)^2.$$

Enfin, on étudie la partie sur  $\Omega_{2,1}^t$  :

(17. 67)

$$\int_S^T E\phi' \int_{\Omega_{2,1}^t} \rho(x, u')^2 dx dt \leq c \int_S^T E(t)\phi'(t) \left( \int_{\Omega_{2,1}^t} \left( g^{-1}(|u'|) \right)^2 dx \right) dt \\ \leq c|\Omega|E(S) \int_S^T \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

Il suffit d'ajouter (17. 65), (17. 66) et (17. 67) pour conclure.

(Remarque : si  $\phi'(1) \neq 1$ , on répète les arguments utilisés pour prouver (17. 58)-(17. 60).) ■

On est alors ramené au même problème que celui étudié au chapitre précédent : si  $\phi$  possède la propriété suivante :

$$(17. 68) \quad \int_1^{\infty} \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt \text{ converge,}$$

alors on déduit de (17. 25) et des estimations (17. 53) et (17. 61) qu'il existe  $C > 0$  telle que

(17. 69)

$$\forall 1 \leq S < T, \int_S^T E(t)^2 \phi'(t) dt \leq CE(S)^2 + CE(S) \int_S^\infty \phi'(t) \left( g^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

On conclut alors de la même manière :  $\phi$  défini par

$$\phi := \psi^{-1} \text{ avec } \forall t \geq 1, \psi(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{g(\frac{1}{\tau})} d\tau,$$

satisfait toutes les conditions requises, et alors

$$\int_S^T E(t)^2 \phi'(t) dt \leq CE(S)^2 + C \frac{E(S)}{\phi(S)}.$$

on applique le Lemme 2.7 avec  $\sigma = \sigma' = 1$  pour en déduire que

$$E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^2},$$

et on voit facilement que

$$\frac{1}{\phi(t)} \leq \frac{1}{\tau} = G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$

La preuve de (17. 15) est achevée. ■

### 4.3. Meilleures estimations sur le taux de décroissance.

Supposons que  $H(0) = 0$  et que  $H$  est croissante sur  $[0, \eta]$  pour un certain  $\eta > 0$ . Soit  $T_1$  tel que

$$\forall t \geq T_1, H\left(\frac{1}{t}\right) \leq \eta.$$

Soit  $T_2 = \sup\{T_1, \frac{1}{\eta}\}$ . Supposons que  $\phi$  est une fonction strictement croissante et concave telle que

$$\forall t \geq T_2, \phi'(t) \leq \eta \text{ et } \phi'(t) \leq H(\eta)$$

et aussi telle que

$$\phi'(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Alors on définit

$$(17. 70) \quad \forall t \geq T_2, \tilde{h}(t) = H^{-1}(\phi'(t));$$

Comme  $H$  est croissante sur  $[0, \eta]$ ,  $\tilde{h}$  est une fonction décroissante qui vérifie

$$\forall t \geq T_2, \tilde{h}(t) \leq \eta$$

et

$$\tilde{h}(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Pour tout  $t \geq T_2$ , on définit

$$(17. 71) \quad \tilde{\Omega}_{1,1}^t := \{x \in \Omega : |u'| \leq \tilde{h}(t)\},$$

$$(17. 72) \quad \tilde{\Omega}_{1,2}^t := \{x \in \Omega : \tilde{h}(t) < |u'| \leq \tilde{h}(T_2)\},$$

$$(17. 73) \quad \tilde{\Omega}_{1,3}^t := \{x \in \Omega : |u'| > \tilde{h}(T_2)\}.$$

Soit  $T > S \geq T_2$ . Il est facile de vérifier que

$$(17. 74) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,3}^t} m \cdot \nu u'^2 ds dt \leq c \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,3}^t} m \cdot \nu u' \rho(u') ds dt \\ \leq c \int_S^T E(-E') \leq c E(S)^2.$$

Comme  $H$  est croissante sur  $[0, \eta]$ , pour tout  $x \in \tilde{\Omega}_{1,2}^t$ , on a

$$\phi'(t)u'^2 = H(\tilde{h}(t))u'^2 \leq |H(u')|u'^2 = u'g(u') \leq u'\rho(u').$$

Alors

$$(17. 75) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,2}^t} m \cdot \nu u'^2 ds dt \\ \leq \int_S^T E \int_{\tilde{\Omega}_{1,2}^t} m \cdot \nu u' \rho(u') ds dt \leq \frac{1}{2}E(S)^2.$$

Enfin, on a

$$(17. 76) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,1}^t} m \cdot \nu u'^2 ds dt \leq c \int_S^T E(t)\phi'(t) \left( \int_{\tilde{\Omega}_{1,1}^t} \tilde{h}(t)^2 ds \right) dt \\ \leq cE(S) \int_S^T \phi'(t) \left( H^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

Ainsi, on obtient que

$$(17. 77) \quad \forall T_2 \leq S < T < \infty : \int_S^T E\phi' \int_{\Omega} m \cdot \nu u'^2 ds dt \\ \leq cE(S)^2 + cE(S) \int_S^T \phi'(t) \left( H^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

De façon similaire, pour tout  $t \geq T_2$ , on définit

$$(17. 78) \quad \tilde{\Omega}_{1,4}^t := \{x \in \Omega : g^{-1}(|u'|) \leq \tilde{h}(t)\},$$

$$(17. 79) \quad \tilde{\Omega}_{1,5}^t := \{x \in \Omega : \tilde{h}(t) < g^{-1}(|u'|) \leq \tilde{h}(T_2)\},$$

$$(17. 80) \quad \tilde{\Omega}_{1,6}^t := \{x \in \Omega : g^{-1}(|u'|) > \tilde{h}(T_2)\}.$$

Soit  $T > S \geq T_2$ . Alors

$$(17. 81) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,6}^t} m \cdot \nu \rho(u')^2 ds dt \leq c \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,6}^t} m \cdot \nu u' \rho(u') ds dt \\ \leq c \int_S^T E(-E') \leq c E(S)^2.$$

Comme  $H$  est croissante sur  $[0, \eta]$ , pour tout  $x \in \tilde{\Omega}_{1,5}^t$ , on a

$$\phi'(t) = H(\tilde{h}(t)) \leq H(g^{-1}(|u'|)) = \frac{|u'|}{g^{-1}(|u'|)}.$$

Donc

$$(17. 82) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,5}^t} m \cdot \nu \rho(u')^2 ds dt \leq \int_S^T E \int_{\tilde{\Omega}_{1,5}^t} m \cdot \nu \frac{|u'|}{g^{-1}(|u'|)} \rho(u')^2 ds dt$$

$$\leq \int_S^T E \int_{\tilde{\Omega}_{1,5}^t} m \cdot \nu u' \rho(u') ds dt \leq \frac{1}{2}E(S)^2.$$

Enfin on a

$$(17. 83) \quad \int_S^T E\phi' \int_{\tilde{\Omega}_{1,4}^t} m \cdot \nu \rho(u')^2 ds dt \leq c \int_S^T E(t)\phi'(t) \left( \int_{\tilde{\Omega}_{1,4}^t} g^{-1}(|u'|)^2 ds \right) dt$$

$$\leq cE(S) \int_S^T \phi'(t) \left( H^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

Ainsi, on obtient que

$$(17. 84) \quad \forall T_2 \leq S < T < \infty : \int_S^T E\phi' \int_{\Omega} m \cdot \nu \rho(u')^2 ds dt$$

$$\leq cE(S)^2 + cE(S) \int_S^T \phi'(t) \left( H^{-1}(\phi'(t)) \right)^2 dt.$$

Définissons alors

$$(17. 85) \quad \forall t \geq T_2, \tilde{\phi}^{-1}(t) = T_2 + \int_{T_2}^t \frac{1}{H(\frac{1}{\tau})} d\tau.$$

Ainsi

$$\forall t \geq T_2, \tilde{\phi}(t) \geq T_2 \geq \frac{1}{\eta},$$

donc

$$\forall t \geq T_2, \tilde{\phi}'(t) = H\left(\frac{1}{\tilde{\phi}(t)}\right) \leq H(\eta),$$

et

$$\forall t \geq T_2, \tilde{\phi}'(t) \leq \tilde{\phi}'(T_2) = H\left(\frac{1}{\phi(T_2)}\right) = H\left(\frac{1}{T_2}\right) \leq H\left(\frac{1}{T_1}\right) \leq \eta.$$

On en déduit que  $\tilde{\phi}$  satisfait toutes les propriétés requises. Comme

$$\forall y \in [0, 1], g(y) \leq y \text{ i.e. } H(y) \leq 1,$$

on voit que

$$\tilde{\phi}^{-1}(t) \leq T_2 + \frac{t - T_2}{H(\frac{1}{t})} \leq \frac{t}{H(\frac{1}{t})} = \frac{1}{g(\frac{1}{t})}.$$

Ainsi

$$\forall t \geq T_2, E(t) \leq C \frac{1}{\tilde{\phi}(t)^2} \leq C \left( g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2.$$

Ceci conclut la preuve du Théorème 17.1. ■

Le cas polynomial se traite absolument de la même manière.



## STABILITÉ EXPONENTIELLE DE L'ÉQUATION DES ONDES EN DIMENSION 2 PAR UN FEEDBACK MONOTONE FAIBLE

On considère le système de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet au bord stabilisé par un terme d'amortissement. Cet amortissement est une force exercée sur  $\Omega$ , et représentée par une fonction non linéaire  $g(u')$ , dépendant de la vitesse de l'onde en ce point.

Si  $g$  est *croissante* (éventuellement bornée), et si  $g'(0) \neq 0$ , on prouve que l'énergie des solutions fortes décroît *exponentiellement* vers zéro. Cela améliore des résultats antérieurs de V. Komornik et de M. Nakao. La preuve est basée sur une partition du domaine qui dépend de la norme des conditions initiales.

*Ce travail, ainsi que celui du chapitre suivant a été réalisé en collaboration avec J. Vancostenoble.*

### 1. Introduction

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, croissante et qui s'annule en zéro.

On considère le système de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet au bord. Un contrôle est exercé au moyen d'une force qui est représentée par une fonction non linéaire  $g$  de la vitesse. Le système considéré est le suivant :

$$(18.1) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + g(u') = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{cases}$$

avec  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Comme d'habitude, on définit l'énergie du système par

$$(18.2) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( u'^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

On suppose que  $g$  est croissante (éventuellement bornée) et on s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie. On rappelle quelques résultats connus sur cette question :



C. M. Dafermos [17] et A. Haraux [31] ont prouvé la stabilité asymptotique forte pour ce problème, c'est-à-dire :

$$E(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Leur preuve est basée sur la compacité des trajectoires dans l'espace d'énergie et sur le principe d'invariance de LaSalle.

M. Aassila [2] a étendu certains de leur résultats sur une classe de domaines non bornés (pour lesquels le principe de LaSalle ne peut plus être appliqué).

F. Conrad et M. Pierre [15] ont obtenu aussi des résultats de stabilité asymptotique forte dans un cadre abstrait.

De plus, quand on a la propriété supplémentaire

$$(18. 3) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \alpha|y| \leq |g(y)| \leq \beta|y|$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes strictement positive, on voit facilement que l'énergie décroît exponentiellement vers zéro.

V. Komornik [45] et M. Nakao [62] ont étendu certains résultats de A. Haraux et E. Zuazua [33], de F. Conrad, J. Leblond and J.P. Marmorat [14] et de E. Zuazua [77] en étudiant par différentes méthodes le cas de feedback qui ont une croissance polynomiale en zéro et à l'infini. En dimension  $N \geq 2$ , ils ont prouvé que l'énergie décroît polynomialement vers zéro avec une estimation explicite du taux de décroissance, même si la dissipation est *faible* à l'infini, ce qui signifie quand

$$\frac{g(y)}{y} \longrightarrow 0 \text{ quand } |y| \longrightarrow +\infty.$$

En particulier, M. Nakao [62] a considéré le cas de la fonction croissante

$$(18. 4) \quad g(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

qui a des limites finies à l'infini. En dimension 1 d'espace, il a remarqué que l'énergie des solutions fortes décroît exponentiellement; en dimension 2, il a prouvé qu'elle décroît plus vite que  $t^{-m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E(t) \leq \frac{C(m)}{t^m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N},$$

où  $C(m)$  est une constante qui dépend de la norme des données initiales dans  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ; en dimension  $N \geq 3$ , il a prouvé qu'elle décroît polynomialement.

Dans les deux cas, leurs preuves sont basées sur le fait que les trajectoires sont bornées dans  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , et sur le théorème de Gagliardo-Nirenberg.

On combine les idées de M. Nakao et de V. Komornik avec la méthode de partition du domaine, utilisée lors des chapitres précédents, pour étudier le cas des dissipations faibles. En dimension 2, on prouve que si  $g$  est croissante (éventuellement bornée), le comportement de  $g$  à l'infini n'a pas d'effet réel sur le taux de décroissance de l'énergie des solutions fortes : si  $g'(0) \neq 0$  (par exemple dans le cas (18. 4)), on montre que l'énergie décroît

exponentiellement vers zéro, le taux de décroissance dépendant de la norme des données initiales dans  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

## 2. Résultat principal et exemple

L'existence et la régularité de la solution  $u$  de (18. 1) sont données par un résultat de A. Haraux [32], améliorant des résultats antérieurs de J.-L. Lions et W. Strauss [53] et de H. Brézis [10] :

THÉORÈME 18.1. *Supposons que  $\Omega$  est de classe  $C^2$ .*

1. *étant donné  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  le problème (18. 1) admet une unique solution  $u(t)$  vérifiant :*

$$(18. 5) \quad u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)).$$

2. *Si de plus  $(u^0, u^1) \in \mathcal{Z}$  où*

$$(18. 6) \quad \mathcal{Z} := \{(u^0, u^1) \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ et } g(u^1) \in L^2(\Omega)\},$$

*alors la solution  $u(t)$  de (18. 1) possède les propriétés suivantes :*

$$(18. 7) \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$(18. 8) \quad u' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)),$$

$$(18. 9) \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)),$$

$$(18. 10) \quad g(u') \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)).$$

*De plus, la fonction*

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\Omega} |\Delta u(t, x)|^2 + |\nabla u'(t, x)|^2 dx$$

*est décroissante.*

On notera

$$(18. 11) \quad C(u^0, u^1) := \int_{\Omega} |\Delta u^0(t, x)|^2 + |\nabla u^1(t, x)|^2 dx$$

### 2.1. Résultat principal.

Notre principal résultat concerne l'estimation du taux de décroissance :

THÉORÈME 18.2. *Supposons que  $N = 2$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante de classe  $C^1$  telle que  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) \neq 0$  et*

$$(18. 12) \quad \forall |y| \geq 1, \quad |g(y)| \leq c|y|^q$$

*avec  $c \geq 0$  et  $q \geq 0$ .*

*Étant donné  $(u^0, u^1) \in \mathcal{Z}$ , l'énergie de la solution  $u(t)$  de (18. 1) décroît exponentiellement vers zéro : il existe une constante explicite  $\omega$ , dépendant de  $C(u^0, u^1)$  telle que*

$$(18. 13) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

**Remarques.** 1. Le Théorème 18.2 améliore des résultats antérieurs de [45] et de [62] qui ont montré que l'énergie décroît plus vite que  $t^{-m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

2. En fait, la faiblesse de la fonction  $g$  à l'infini n'a pas d'effet réel sur la décroissance de l'énergie des solutions *fortes* : on trouve la même estimation sur l'énergie que si  $g$  avait une croissance linéaire :

$$\alpha|y| \leq |g(y)| \leq \beta|y| \text{ pour tout } y,$$

avec un certain  $\alpha > 0$ . La seule différence provient du fait que le taux de décroissance dépend de  $C(u^0, u^1)$ .

**Exemple.** On considère la fonction bornée

$$g(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R};$$

on a  $g'(0) = 1$ . Alors (18. 13) donne l'estimation

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t},$$

et on voit dans la preuve du Théorème 18.2 que

$$\omega = \frac{c}{1 + \sqrt{C(u^0, u^1)}},$$

où  $c$  est une constante qui dépend uniquement de  $\Omega$ . Le théorème ne permet donc pas d'obtenir une estimation de décroissance exponentielle de l'énergie pour les solutions faibles.

## 2.2. Extensions.

1. Notre méthode n'est pas spécifique au cas de la dimension  $N = 2$  : en dimension  $N \geq 3$ , elle permet de retrouver les résultats de V. Komornik et de M. Nakao (à  $\varepsilon$  près, pour tout  $\varepsilon > 0$ ), et même d'améliorer leurs estimations pour toute une classe de fonctions : dans le chapitre suivant, on montre que si

$$(18. 14) \quad \forall |y| \geq 1, \quad c_1 \frac{|y|}{(\ln(2 + |y|))^k} \leq |g(y)| \leq |y|^q,$$

avec  $c_1 > 0, c_2 > 0, m \geq 0, q \in [0, \frac{N+2}{\max(0, N-2)}]$  et  $k \in [0, 1]$ , alors l'énergie de la solution vérifie :

$$(18. 15) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq CE(0) e^{-\omega(1+t)^{1-k}},$$

où  $\omega$  dépend de la norme des données initiales. (En dimension 3, ce résultat demeure vrai pour tout  $q \geq 0$ .)

2. En appliquant la méthode décrite dans les chapitres précédents, on peut obtenir des estimations en éliminant l'hypothèse  $g'(0) \neq 0$ .

3. On peut étendre les résultats du Théorème 18.2 au cas d'une force exercée seulement sur une partie de  $\Omega$ . On considère l'équation

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

où  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, positive et telle que, par exemple, le région où  $a(x) \geq \alpha > 0$ , contient un voisinage de  $\partial\Omega$ , ou les conditions géométriques plus générales énoncées dans l'Hypothèse 2, dans le Chapitre 17.

### 3. Inégalités fondamentales

#### 3.1. Décroissance de l'énergie.

On considère seulement les solutions fortes, dont la régularité permet de justifier les calculs suivants; pour simplifier les expressions, on omettra d'écrire les éléments différentiels. On notera  $c$  toutes les diverses constantes qui dépendent seulement de la structure du problème  $(\Omega, g)$  et  $C$  qui dépendent aussi de la norme des données initiales dans  $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ .

On vérifie d'abord que l'énergie est décroissante :

LEMME 18.1.

(18. 16)

$$\forall 0 \leq S < T < +\infty, \quad E(T) - E(S) = - \int_S^T \int_{\Omega} u' g(u') \, dx \, dt \leq 0.$$

**Remarque.** Comme  $xg(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , cela implique que l'énergie est décroissante, localement absolument continue et

$$E'(t) = - \int_{\Omega} u' g(u') \, dx \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+.$$

#### 3.2. Inégalité donnée par la méthode des multiplicateurs.

LEMME 18.2. *Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  telle que  $g'(0) \neq 0$  et*

$$\forall |y| \geq 1, |g(y)| \leq c|y|^q \quad \text{avec } q \geq 1.$$

*Alors, il existe  $c > 0$  qui dépend de  $\Omega$  tel que, étant donné  $(u^0, u^1) \in \mathcal{Z}$ , la solution  $u(t)$  de (5)-(5) satisfait*

$$(18. 17) \quad \int_S^T E(t) \, dt \leq cE(S) + c \int_S^T \int_{\Omega} u'^2 \, dx \, dt.$$

**Remarque.** Le résultat du Lemme 18.2 est a fortiori vrai si pour tout  $|y| \geq 1$ ,  $|g(y)| \leq c|y|^q$  avec  $q \in [0, 1]$  (en particulier si  $g$  est bornée).

*Preuve du Lemme 18.2.* Lorsque le terme d'amortissement est uniformément distribué dans le domaine, la preuve du Lemme 18.2 est assez simple et ne nécessite pas tous les arguments techniques utilisés dans le Chapitre 17. On donne la preuve d'un résultat analogue au Lemme 18.2 lorsque le feedback est localement distribué dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

On intègre par partie l'expression suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} u (u'' - \Delta u + g(u')) \\ &= \left[ \int_{\Omega} u u' \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega} u'^2 - \int_S^T \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu u + \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + u g(u') \\ &= \left[ \int_{\Omega} u u' \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} -2u'^2 + u'^2 + |\nabla u|^2 + u g(u'). \end{aligned}$$

Donc

$$(18. 18) \quad 2 \int_S^T E = - \left[ \int_\Omega u u' \right]_S^T + \int_S^T \int_\Omega 2u'^2 - u g(u').$$

On note que

$$\left| \int_\Omega u u' dx \right| \leq cE(t).$$

Il reste à estimer le dernier terme de (18. 18) :

LEMME 18.3. *Il existe  $c > 0$  dépendant de  $\Omega$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$(18. 19) \quad \int_S^T \int_\Omega u g(u') dx dt \leq \frac{c}{\varepsilon} E(S) + \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T \int_\Omega u'^2 dx dt + \varepsilon \int_S^T E dt$$

*Preuve du Lemme 18.3.* Il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$|g(y)| \leq \lambda|y| \quad \text{si } |y| \leq 1.$$

Soit  $\eta > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{|u'| \leq 1} u g(u') dx dt &\leq \int_S^T \int_{|u'| \leq 1} \frac{\eta}{2} u^2 + \frac{1}{2\eta} g(u')^2 \\ &\leq \frac{c\eta}{2} \int_S^T E + \int_S^T \int_{|u'| \leq 1} \frac{1}{2\eta} g(u')^2 \\ &\leq \frac{c\eta}{2} \int_S^T E + \int_S^T \int_\Omega \frac{\lambda^2}{2\eta} u'^2. \end{aligned}$$

On étudie ensuite la partie sur  $|u'| > 1$  : comme on travaille en dimension 2,

$$H^1(\Omega) \subset L^{q+1}(\Omega),$$

pour tout  $q \geq 1$ . Ainsi

$$\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{E}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T \int_{|u'| > 1} u g(u') dx dt \right| &\leq \int_S^T \left( \int_\Omega |u|^{q+1} \right)^{1/(q+1)} \left( \int_{|u'| > 1} |g(u')|^{(q+1)/q} \right)^{q/(q+1)} \\ &\leq c \int_S^T E^{1/2} \left( \int_{|u'| > 1} u' g(u') \right)^{q/(q+1)} \leq c \int_S^T E^{1/2} (-E')^{q/(q+1)} \\ &\leq c\eta^{q+1} \int_S^T E^{(q+1)/2} + \frac{c}{\eta^{(q+1)/q}} \int_S^T (-E') \\ &\leq c\eta^{q+1} E(S)^{(q-1)/2} \int_S^T E + \frac{c}{\eta^{(q+1)/q}} E(S). \end{aligned}$$

Alors on obtient (18. 19) en choisissant  $\eta$  assez petit. ■

On déduit des dernières estimations que

$$2 \int_S^T E(t) dt \leq cE(S) + \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T \int_{\Omega} u'^2 dx dt + \varepsilon \int_S^T E(t) dt.$$

On obtient (18. 17) en choisissant  $\varepsilon$  assez petit. ■

#### 4. Preuve du Théorème 18.2

On rappelle l'inégalité fondamentale donnée par le Lemme 18.2 :

$$\int_S^T E(t) dt \leq cE(S) + c \int_S^T \int_{\Omega} u'^2 dx dt.$$

Notre but est d'estimer

$$\int_S^T \int_{\Omega} u'^2 dx dt.$$

Soient  $R > 0$  et  $t \geq 0$  fixés. On définit alors

$$(18. 20) \quad \Omega_1^t := \{x \in \Omega : |u'| \leq R\},$$

$$(18. 21) \quad \Omega_2^t := \{x \in \Omega : R < |u'|\}.$$

**Remarque.** V. Komornik [45] a utilisé cette partition de  $\Omega$  avec  $R = 1$ , et obtenu une estimation polynomiale du taux de décroissance. On choisira  $R$  dépendant de la norme des données initiales. Un choix convenable de  $R$  nous donnera une estimation exponentielle du taux de décroissance.

D'abord on étudie la partie sur  $\Omega_2^t$ . Pour pouvoir estimer le terme

$$\int_{\Omega_2^t} u'^2 dx dt,$$

on aura besoin d'utiliser la régularité de  $u$  et les injections de Sobolev. On rappelle l'inégalité d'interpolation :

LEMME 18.4. (*Gagliardo-Nirenberg*)

Soit  $1 \leq r < p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq p$  et  $m \geq 0$ . Alors l'inégalité

$$(18. 22) \quad \|v\|_p \leq c \|D^m v\|_q^\theta \|v\|_r^{1-\theta} \text{ pour } v \in W^{m,q} \cap L^r$$

est valable avec  $c > 0$  et

$$(18. 23) \quad \theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{m}{N} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^{-1}$$

à condition que  $0 < \theta \leq 1$  ( $0 < \theta < 1$  si  $p = \infty$  et  $mq = N$ ).

(ici  $\|\cdot\|_p$  désigne la norme usuelle de  $L^p(\Omega)$ .)

Comme conséquence directe, on obtient qu'en dimension  $N = 2$ , il existe une constante positive  $c$  qui dépend de  $\Omega$  telle que

$$(18. 24) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^3(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/3} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{2/3}$$

(on a utilisé (18. 22) avec  $p = 3$ ,  $m = 1$ ,  $q = r = 2$ ,  $N = 2$  et  $\theta = \frac{1}{3}$ .)

Par définition de du sous-domaine  $\Omega_2^t$ , on a :

$$\int_{\Omega_2^t} u'^2 dx \leq \frac{1}{R} \int_{\Omega_2^t} |u'|^3 dx \leq \frac{1}{R} \|u'\|_{L^3(\Omega)}^3.$$

Alors, puisque  $u$  est une solution forte, on peut appliquer (18. 24) à  $v = u'$  pour obtenir que

$$\|u'\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq c\|u'\|_{H^1(\Omega)}\|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c\|u'\|_{H^1(\Omega)}E(t)$$

En conséquence,

$$(18. 25) \quad \int_{\Omega_2^t} u'^2 dx \leq \frac{c}{R}\|u'\|_{H^1(\Omega)}E(t).$$

Grâce à la définition de  $C(u^0, u^1)$  (voir (18. 11)) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|u'\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{C(u^0, u^1)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_S^T E dt &\leq cE(S) + c \int_S^T \int_{\Omega} u'^2 dx dt \\ &\leq cE(S) + c \int_S^T \int_{\Omega_1^t} u'^2 dx dt + \frac{c}{R} \int_S^T \|u'\|_{H^1(\Omega)}E(t) dx dt \\ &\leq cE(S) + c \int_S^T \int_{\Omega_1^t} u'^2 dx dt + \frac{c}{R} \sqrt{C(u^0, u^1)} \int_S^T E(t) dx dt \end{aligned}$$

On choisit alors  $R > 0$  tel que

$$(18. 26) \quad \frac{c}{R} \sqrt{C(u^0, u^1)} \leq \frac{1}{2}.$$

$R$  étant ainsi choisi, on voit que

$$\frac{1}{2} \int_S^T E dt \leq cE(S) + c \int_S^T \int_{\Omega_1^t} u'^2 dx dt.$$

Ensuite on étudie la partie sur  $\Omega_1^t$  : comme  $g'(0) \neq 0$ , on peut choisir  $r > 0$  tel que

$$\forall y \in [-r, r], \quad |g(y)| \geq \alpha_1|y|,$$

avec un certain  $\alpha_1 > 0$ . Alors soit

$$\alpha_2 := \inf \left\{ \left| \frac{g(y)}{y} \right| : r \leq |y| \leq R \right\} > 0.$$

Avec  $\alpha := \min(\alpha_1, \alpha_2)$ , on a

$$|g(y)| \geq \alpha|y| \quad \text{si } |y| \leq R.$$

Donc

$$(18. 27) \quad \begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega_1^t} u'^2 dx dt &= \int_S^T \int_{\Omega_1^t} u'g(u') \frac{u'}{g(u')} dx dt \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_S^T \int_{\Omega_1^t} u'g(u') dx dt = \frac{1}{\alpha}(E(S) - E(T)). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$(18. 28) \quad \frac{1}{2} \int_S^T E(t) dt \leq cE(S) + \frac{c}{\alpha}(E(S) - E(T)) \leq (c + \frac{c}{\alpha})E(S).$$

En faisant tendre  $T$  vers l'infini, on voit que

$$(18. 29) \quad \int_S^{+\infty} E(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E(S)$$

avec  $\frac{1}{\omega} = 2c(1 + \frac{1}{\alpha})$ . Puisque  $E$  est positive et décroissante, on peut appliquer le Lemme 1.1 qui nous dit que

$$(18. 30) \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

La preuve du Théorème 18.2 est achevée. ■

### 5. Extension au cas des feedbacks localement distribués

Soit  $a : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue positive. On s'intéresse au problème

$$\begin{aligned} u'' - \Delta u + a(x)g(u') &= 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) &= u^0, u'(0) = u^1. \end{aligned}$$

Supposons que la localisation de la dissipation  $a$  satisfait les conditions géométriques, énoncées dans l'Hypothèse 2 du Chapitre 17. La méthode de multiplicateurs par morceaux utilisée donne que

$$\int_S^T E \leq c E(S) + c \int_S^T \int_{\Omega} a(x)u'^2 + \int_S^T \int_{\Omega} a(x)\tilde{M}(u)g(u'),$$

avec

$$\tilde{M}(u) := 2h \cdot \nabla u + cu + c'z(u),$$

où  $h$ ,  $c$  et  $c'$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$ , et  $z(u)$  est la solution du problème elliptique

$$\begin{cases} \Delta z = \beta(x)u \text{ dans } \Omega, \\ z = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\tilde{M}(u) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)).$$

Grâce au Lemme 18.4, on a

$$\|\nabla u\|_p \leq c \|D^2 v\|_2^\theta \|\nabla u\|_2^{1-\theta}$$

avec  $c > 0$  et

$$\theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^{-1} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) = 1 - \frac{2}{p}$$

Comme  $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))$ , on en déduit que

$$\|\nabla u\|_{q+1} \leq CE(t)^{(1-\theta)/2} = CE(t)^{1/(q+1)}.$$



On peut alors montrer, de manière semblable, que le résultat du Lemme 18.3 reste valable :

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{|u'| \leq 1} a(x) \tilde{M}(u) g(u') dx dt &\leq \int_S^T \int_{|u'| \leq 1} \frac{\eta}{2} a(x) |\tilde{M}(u)|^2 + \frac{1}{2\eta} a(x) g(u')^2 \\ &\leq \frac{c\eta}{2} \int_S^T E + \int_S^T \int_{\Omega} \frac{\lambda^2}{2\eta} a(x) u'^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{|u'| > 1} a(x) \tilde{M}(u) g(u') dx dt &\leq c \int_S^T \left( \int_{\Omega} |\tilde{M}(u)|^{q+1} \right)^{1/(q+1)} \left( \int_{|u'| > 1} |g(u')|^{(q+1)/q} \right)^{q/(q+1)} \\ &\leq C \int_S^T E^{1/(q+1)} \left( \int_{|u'| > 1} u' g(u') \right)^{q/(q+1)} \leq C \int_S^T E^{1/(q+1)} (-E')^{q/(q+1)} \\ &\leq C\eta^{q+1} \int_S^T E + \frac{C}{\eta^{(q+1)/q}} \int_S^T (-E') \\ &\leq C\eta^{q+1} \int_S^T E + \frac{C}{\eta^{(q+1)/q}} E(S). \end{aligned}$$

Ainsi,

(18. 31)

$$\int_S^T \int_{\Omega} a(x) \tilde{M}(u) g(u') dx dt \leq CE(S) + \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T \int_{\Omega} a(x) u'^2 dx dt + \varepsilon \int_S^T E dt,$$

et donc

$$(18. 32) \quad \int_S^T E dt \leq CE(S) + \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T \int_{\Omega} a(x) u'^2 dx dt + \varepsilon \int_S^T E dt.$$

La seule différence notable avec le cas des dissipations uniformément distribuées dans  $\Omega$  ( $a(x) \equiv 1$ ) est que le coefficient  $C$  de  $E(S)$  dépend à présent de la norme des données initiales, ce qui n'était pas le cas dans le Lemme 18.3.

La suite de la preuve du Théorème 18.2 est alors identique.

## STABILITÉ EXPONENTIELLE DE L'ÉQUATION DES ONDES PAR UN FEEDBACK NON MONOTONE FAIBLE

On considère le système de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet au bord stabilisé par un terme d'amortissement, étudié dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, on suppose que l'amortissement est une force uniformément exercée sur  $\Omega$ , et représentée par une fonction non linéaire et *non monotone* de la vitesse.

Lorsque la fonction  $g$  a un comportement linéaire à l'infini :

$$\forall |y| \geq 1, \quad c|y| \leq |g(y)| \leq c'|y|,$$

avec  $c > 0$ , les démonstrations des résultats du Chapitre 18 demeurent valables, à condition que la solution existe et soit suffisamment régulière.

Par contre, lorsque la dissipation est *faible* à l'infini, seuls semblent connus des résultats de stabilisation *forte* pour ce système en dimension d'espace 1, et de stabilisation *faible* en dimension supérieure.

Les résultats du chapitre précédent sont basés sur le fait que  $u'$  est *bornée* dans  $H_0^1(\Omega)$ ; cette propriété est une conséquence directe de l'hypothèse de monotonie de  $g$ .

On considère une certaine classe de fonctions non monotones. En développant la méthode utilisée dans le chapitre précédent, on montre que l'énergie des solutions fortes décroît vers zéro avec une *estimation explicite (exponentielle) du taux de décroissance*. En particulier, cela implique des résultats nouveaux de stabilité asymptotique forte.

*Ce chapitre, ainsi que le précédent, a été écrit en collaboration avec J. Vancostenoble.*

### 1. Introduction

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^N$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue s'annulant en zéro. On considère le système suivant :

$$(19. 1) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + g(u') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{cases}$$

avec  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Comme d'habitude, on définit l'énergie du système par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

On a rappelé dans le chapitre précédent les résultats de stabilisation forte et de stabilisation uniforme connus lorsque  $g$  est croissante.

Lorsque  $g$  est *non monotone*, peu de résultats semblent connus. Supposons que

$$yg(y) \geq 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R},$$

ce qui implique que l'énergie est décroissante et que les trajectoires sont bornées dans l'espace d'énergie. A notre connaissance, les trajectoires ne sont pas compactes en général. Or tous les résultats de stabilité asymptotique forte (C. M. Dafermos [17] ou A. Haraux [31], F. Conrad et M. Pierre [15] dans un cadre abstrait) sont basées sur cette compacité, ainsi que les résultats de stabilisation uniforme (V. Komornik [45], M. Nakao [62], et ceux du chapitre précédent). Toutefois, on remarque quand même que si  $g$  vérifie

$$(19. 2) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \alpha|y| \leq |g(y)| \leq \beta|y|$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes strictement positives, et si le problème est *bien posé*, alors l'énergie décroît exponentiellement vers zéro.

Quand (19. 2) est remplacée par une hypothèse plus faible, les preuves de [45], de [62] ainsi que celles du chapitre précédent ne peuvent pas être étendues au cas non monotone, car on ne sait plus montrer que les solutions fortes sont bornées dans  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , estimation fournie par la croissance de  $g$ . Sous cette hypothèse supplémentaire, M. Aassila [3] a obtenu des résultats de stabilisation uniforme.

Si  $g$  est globalement lipschitzienne, M. Slemrod [70] a prouvé des résultats de stabilité asymptotique *faible* pour le problème (19. 1), c'est-à-dire,

$$(u(t), u'(t)) \rightharpoonup (0, 0)$$

faiblement dans  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , quand  $t$  tend vers l'infini. J. Vancostenoble [74] a prouvé que ce résultat est encore vrai pour les solutions globales de (19. 1), même si  $g$  n'est pas globalement lipschitzienne.

Il existe aussi des résultats de stabilité asymptotique forte, mais uniquement en dimension d'espace 1 (basés sur la structure des solutions et les propriétés de stabilité asymptotique faible, ou sur des propriétés de bornitude que possède la solution en dimension 1), par exemple E. Feireisl [20]

pour l'équation des ondes en dimension 1 avec un contrôle interne, E. Feireisl et G. O Dowd [21] pour un modèle de pont roulant, J. Vancostenoble et M. Pierre [66] pour l'équation des ondes en dimension 1 avec un contrôle frontière, J. Vancostenoble [75] pour certains systèmes hybrides (pont roulant et modèle SCOLE).

On considère les fonctions non monotones  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifient

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) &\geq -m, \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad c_1 \frac{|y|}{\left(\ln(2 + |y|)\right)^k} &\leq |g(y)| \leq c_2 |y|^q, \end{aligned}$$

avec  $c_1 > 0, c_2 > 0, m \geq 0, 0 \leq q \leq \frac{N+2}{N-2}$  et  $k \in [0, 1]$ . On prouve d'abord que le problème (19. 1) est bien posé et on estime la norme des solutions fortes dans  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Ensuite on montre que l'énergie des solutions fortes décroît vers zéro avec une *estimation explicite du taux de décroissance*. En particulier, ceci implique des résultats nouveaux de stabilité forte. La preuve est basée sur la méthode utilisée dans les chapitres précédents, qui permet de compenser le fait que les solutions fortes ne sont, a priori, pas bornées dans  $H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , et sur l'inégalité intégrale donnée par le Lemme 2.3.

## 2. Résultats principaux et exemples

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On considère le système suivant

$$(19. 3) \quad u'' - \Delta u + g(u') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(19. 4) \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(19. 5) \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1,$$

où  $(u^0, u^1)$  est donné dans  $\tilde{\mathcal{Z}}$ , qui est la partie de  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  définie par

$$(19. 6) \quad \tilde{\mathcal{Z}} := \{(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), -\Delta u + g(v) \in L^2(\Omega)\}.$$

On notera

$$(19. 7) \quad C(u^0, u^1) := \|-\Delta u^0 + g(u^1)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Comme d'habitude, on définit l'énergie de la solution  $u$  (sous réserve que tout soit bien défini) par

$$(19. 8) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( u'^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

### 2.1. Résultats d'existence et de régularité.

Supposons que  $g$  soit une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui satisfait

$$(19. 9) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad yg(y) \geq 0,$$

$$(19. 10) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) \geq -m,$$

avec  $m \geq 0$ . Alors l'existence et la régularité de la solution  $u$  de (19. 3)-(19. 5) sont données par le résultat suivant :

THÉORÈME 19.1. (i) *Supposons satisfaite (19. 10). Alors le problème (19. 3)-(19. 5) est bien posé : pour tout  $(u^0, u^1) \in \tilde{\mathcal{Z}}$  tel que  $-\Delta u^0 + g(u^1) \in L^2(\Omega)$ , il existe une unique solution forte  $u(t)$  satisfaisant*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (u(t), u'(t)) \in \tilde{\mathcal{Z}},$$

et, pour tout  $T > 0$ ,

$$(u(\cdot), u'(\cdot)) \in W^{1,\infty}([0, T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

(ii) *De plus, si on suppose aussi satisfaite (19. 9), alors on a l'estimation d'énergie suivante :*

$$(19. 11) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et donc

$$(u(\cdot), u'(\cdot)) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

(iii) *On a aussi l'estimation suivante :*

(19. 12)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|-\Delta u(t) + g(u'(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C(u^0, u^1) e^{2mt}.$$

**Remarque.** Dans le cas où  $g$  est croissante ( $m = 0$ ), le Théorème 19.1 redonne un résultat classique d'existence et de régularité de la théorie des opérateurs maximaux monotones. En particulier, la partie (iii) implique

$$(19. 13) \quad u' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)).$$

Cette estimation est obtenue uniquement lorsque  $g$  est croissante. C'est sur elle que sont basées les preuves de V. Komornik [45], M. Nakao [62] et celle du chapitre précédent.

**Remarque.** Dans le cas classique

$$(19. 14) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq \beta|y|,$$

il est facile de vérifier que le Théorème 19.1 implique que, pour tout  $(u^0, u^1) \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (u(t), u'(t)) \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \left( \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) e^{2mt}.$$

### 2.2. Stabilité exponentielle pour une classe de fonctions non monotones.

Supposons que  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  qui vérifie

$$(19.15) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad yg(y) \geq 0,$$

$$(19.16) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad g'(y) \geq -m,$$

$$(19.17) \quad \forall |y| \geq 1, \quad c_1 \frac{|y|}{(\ln(2 + |y|))^k} \leq |g(y)| \leq |y|^q,$$

avec  $c_1 > 0, c_2 > 0, m \geq 0, q \geq 0$  et  $k \in [0, 1]$ .

**THÉORÈME 19.2.** 1. *Supposons que  $N = 2$  et soit  $g$  une fonction satisfaisant (19.15)-(19.17) telle que  $g'(0) \neq 0$ .*

*Étant donné  $(u^0, u^1) \in \tilde{\mathcal{Z}}$ , il existe une constante positive (explicite)  $\omega$ , dépendant de  $C(u^0, u^1)$  telle que l'énergie de la solution  $u(t)$  de (19.3)-(19.5) vérifie l'estimation suivante :*

$$(19.18) \quad \text{si } k \in [0, 1[, \quad E(t) \leq E(0) e^{1+\omega} e^{-\omega(1+t)^{1-k}}, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(19.19) \quad \text{si } k = 1, \quad E(t) \leq \frac{e E(0) 2^\omega}{(2+t)^\omega}, \quad \forall t \geq 0.$$

2. *En dimension  $N \geq 3$ , les estimations (19.18) et (19.19) restent valables à condition que  $1 \leq q \leq \frac{N+2}{N-2}$ .*

**Remarque.** Le Théorème 19.2 implique des résultats nouveaux de stabilité asymptotique forte : l'énergie des solutions fortes décroît vers zéro, avec une estimation explicite du taux de décroissance.

**Exemple.** Le Théorème 19.2 peut être appliqué en toute dimension à la fonction impaire  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\forall y \geq 0, \quad g(y) = \left( \sin(\theta(y)) \right)^2 y (\ln(y+2))^q + \left( \cos(\theta(y)) \right)^2 \frac{y}{(\ln(y+2))^k},$$

avec  $q \in [0, 1], k \in [0, 1]$  et

$$\theta(y) = (\ln(y+2))^{1-q} \quad \text{si } q \in [0, 1[,$$

$$\theta(y) = \ln(\ln(y+2)) \quad \text{si } q = 1.$$

$g$  est choisie de telle sorte que, pour tout  $y$ ,

$$g(y) \in [y (\ln(y+2))^q, \frac{y}{(\ln(y+2))^k}],$$

et va "sinusoïdalement" de la courbe  $y \mapsto y (\ln(y+2))^q$  à la courbe  $y \mapsto y (\ln(y+2))^{-k}$ . Alors  $g$  satisfait les hypothèses requises : en effet, le calcul de  $g'$  donne :

$$\begin{aligned} g'(y) &= \theta'(y) \sin(2\theta(y)) \left( y (\ln(y+2))^q - \frac{y}{(\ln(y+2))^k} \right) \\ &\quad + \left( \sin(\theta(y)) \right)^2 \left( (\ln(y+2))^q + q \frac{y}{y+2} (\ln(y+2))^{q-1} \right) \\ &\quad + \left( \cos(\theta(y)) \right)^2 \left( (\ln(y+2))^{-k} - k \frac{y}{y+2} (\ln(y+2))^{-k-1} \right). \end{aligned}$$

Soit  $q \in [0, 1[$ . Comme on a choisi  $\theta$  telle que

$$\theta'(y) = (1 - q) \frac{1}{(y + 2)(\ln(y + 2))^q},$$

on voit que :

$$\begin{aligned} g'(y) &= (1 - q) \sin(2\theta(y)) \left( \frac{y}{y + 2} - \frac{y}{(y + 2)(\ln(y + 2))^{k+q}} \right) \\ &\quad + \left( \sin(\theta(y)) \right)^2 \left( (\ln(y + 2))^q + q \frac{y}{y + 2} (\ln(y + 2))^{q-1} \right) \\ &\quad + \left( \cos(\theta(y)) \right)^2 \left( (\ln(y + 2))^{-k} - k \frac{y}{y + 2} (\ln(y + 2))^{-k-1} \right), \end{aligned}$$

Donc  $g'$  s'écrit

$$g'(y) = (1 - q) \sin(2\theta(y)) + (1 + \varepsilon(y)) \left( \sin(\theta(y)) \right)^2 (\ln(y + 2))^q + \varepsilon(y),$$

avec  $\varepsilon(y) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow +\infty$ . Donc  $g'$  est bornée si  $q = 0$  et seulement minorée si  $q > 0$ . De plus, comme  $\theta$  est strictement croissante et tend vers l'infini à l'infini,  $g$  n'est pas monotone. Par exemple, lorsque  $q = 0$  :

$$\begin{aligned} g'(y) &= \sin(2\theta(y)) + \left( \sin(\theta(y)) \right)^2 + \varepsilon(y) \\ &= \sin(\theta(y)) \left( 2 \cos(\theta(y)) + \sin(\theta(y)) \right) + \varepsilon(y), \end{aligned}$$

et la fonction  $\theta \mapsto \sin \theta (2 \cos \theta + \sin \theta)$  est strictement négative sur tous les intervalles  $]-\frac{\pi}{3} + 2n\pi, -\frac{\pi}{6} + 2n\pi]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Alors, si  $k = \frac{1}{2}$ , l'énergie des solutions fortes décroît comme

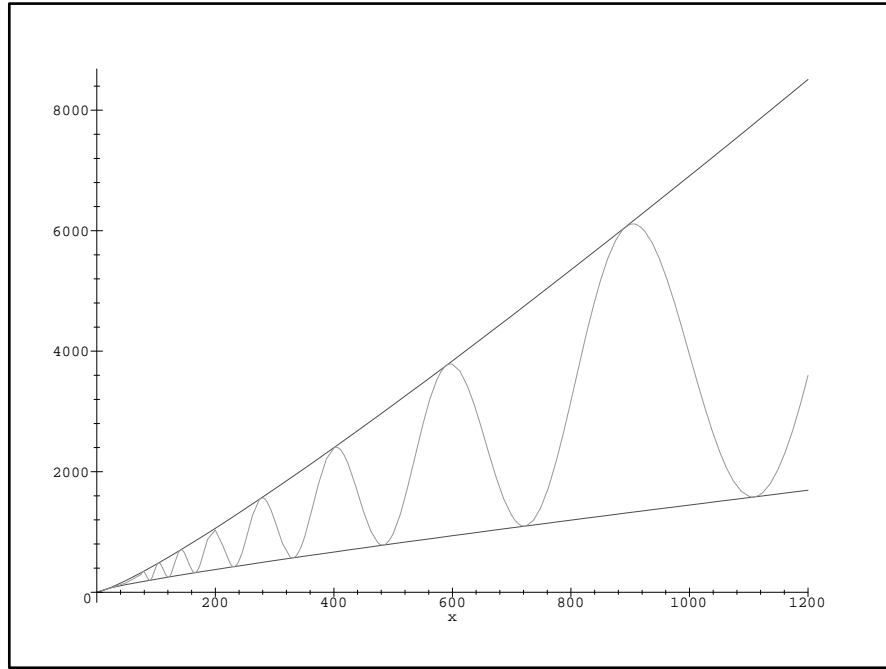
$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq C E(0) e^{-\omega \sqrt{t}},$$

( $C$  et  $\omega$  dépendant de  $C(u^0, u^1)$ ).

Par exemple, pour

$$\begin{aligned} g(y) &= \left( \sin(50 \ln(\ln(y + 2))) \right)^2 y \ln(y + 2) \\ &\quad + 10 \left( \cos(50 \ln(\ln(y + 2))) \right)^2 \frac{y}{\ln(y + 2)}, \end{aligned}$$

le graphe de  $g$  est



### 2.3. Commentaires et extensions.

1. Si  $N \leq 3$  et si  $g$  est croissante ( $m = 0$ ) et satisfait (19. 17) avec  $k \in ]0, 1[$ , le résultat demeure valable pour tout  $q \geq 1$ . Ce résultat de décroissance exponentielle améliore des résultats antérieurs de M. Nakao [62] et V. Komornik [45]

2. En appliquant la méthode décrite dans les chapitres antérieurs, on pourrait éliminer l'hypothèse  $g'(0) \neq 0$  et on obtiendrait encore des estimations précises du taux de décroissance.

3. On peut étendre les résultats du Théorème 19.2 au cas d'une force exercée seulement sur une partie de  $\Omega$ . On considère l'équation

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

où  $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, positive telle que la région  $a(x) \geq \alpha > 0$  satisfait des hypothèses géométriques usuelles. Alors, si  $g$  vérifie (19. 17) avec  $q = 1$ , les résultats du Théorème 19.2 demeurent vrais.

4. Tous les résultats précédents restent vrais si l'on remplace l'hypothèse "  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  " par "  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 \neq y_2, \frac{g(y_1) - g(y_2)}{y_1 - y_2} \geq -m,$$

et  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de 0 et  $g'(0) \neq 0$  ".

## 3. Problème bien posé et estimations a priori

### 3.1. Problème bien posé.



En notant  $v = u'$ , on peut écrire (19. 3)-(19. 5) sous la forme

$$(19. 20) \quad \begin{cases} u' - v = 0, \\ v' - \Delta u + g(v) = 0, \\ u(0) = u^0, \\ v(0) = u^1. \end{cases}$$

On introduit l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et on écrit (19. 20) comme étant l'équation d'évolution d'ordre un dans  $\mathcal{H}$  pour le vecteur  $U(t) = (u(t), v(t))$  :

$$(19. 21) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathcal{L}U(t) = 0, \\ U(0) = (u^0, u^1). \end{cases}$$

On note  $\tilde{g}$  la fonction croissante

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(y) = g(y) + my.$$

Soit  $\mathcal{A}$  l'opérateur non linéaire défini par

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mid -\Delta u + \tilde{g}(v) \in L^2(\Omega)\}, \\ \forall (u, v) \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}(u, v) = \left( -v, -\Delta u + \tilde{g}(v) \right). \end{cases}$$

$\mathcal{A}$  est un opérateur maximal monotone dans  $\mathcal{H}$ , (voir A. Haraux [30], Théorème 45, p. 90). (Remarque :  $D(\mathcal{A}) = \tilde{\mathcal{Z}}$ )

Alors on définit  $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  par

$$\forall (u, v) \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{L}(u, v) = \left( 0, -mv \right).$$

$\mathcal{L}$  est clairement lipschitzien.

On peut alors appliquer le théorème suivant sur les perturbations lipschitziennes d'un opérateur maximal monotone :

**THÉORÈME 19.3.** (*H. Brézis [11], Théorème 3.17 et Remarque 3.14*)

*Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert,  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur maximal monotone et  $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur lipschitzien.*

*Alors pour tout  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , il existe une unique  $U : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$  telle que :*

$$\begin{aligned} U(0) &= U_0, \\ \forall t \geq 0, \quad U(t) &\in D(\mathcal{A}), \\ \forall T > 0, \quad U(\cdot) &\in W^{1,\infty}((0, T); \mathcal{H}), \\ \frac{dU}{dt}(t) + \mathcal{A}U(t) + \mathcal{L}U(t) &= 0 \quad p.p. \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Ceci prouve la première partie du Théorème 19.1. ■

### 3.2. Estimations a priori.

Comme on ne considère que les solutions fortes, les résultats de régularité obtenus permettent de justifier les calculs suivants, dans lesquels on n'écrira pas les éléments différentiels pour simplifier les expressions. On notera  $c$

toutes les constantes qui dépendent seulement de la structure du problème  $(\Omega, g)$  et  $C$  toutes les constantes qui dépendent aussi de

$$\| -\Delta u^0 + g(u^1) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u^1 \|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

D'abord on vérifie que l'énergie est décroissante :

LEMME 19.1. *Supposons satisfaites (19. 9) et (19. 10). Alors*

$$(19. 22) \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty, E(T) - E(S) = - \int_S^T \int_{\Omega} u' g(u') dx dt \leq 0.$$

**Remarque.** Comme  $yg(y) \geq 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , il s'ensuit que l'énergie est décroissante, localement absolument continue et

$$E'(t) = - \int_{\Omega} u' g(u') dx \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+.$$

*Preuve du Lemme 19.1.* On multiplie (19. 3) par  $u'$  et on intègre par partie sur  $\Omega \times [S, T]$  :

$$\begin{aligned} - \int_S^T \int_{\Omega} u' g(u') &= \int_S^T \int_{\Omega} u' (u'' - \Delta u) \\ &= \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 \right]_S^T = E(T) - E(S). \blacksquare \end{aligned}$$

Cela prouve la partie (ii) du Théorème 19.1.

Ensuite on prouve la partie (iii) du Théorème 19.1 :

LEMME 19.2. *Supposons (19. 10) satisfaite. Alors*

$$(19. 23) \quad \forall t \geq 0, \| -\Delta u(t) + g(u'(t)) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u'(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C(u^0, u^1) e^{2mt}.$$

*Preuve du Lemme 19.2.* On note  $v := u'$ . En dérivant (19. 3)-(19. 5) par rapport au temps, on voit que  $v$  vérifie

$$(19. 24) \quad v'' - \Delta v + g'(v) v' = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(19. 25) \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(19. 26) \quad v(0) = u^1, v'(0) = \Delta u^0 - g(u^1).$$

On multiplie (19. 24) par  $v'$  et on intègre par partie sur  $\Omega \times [S, T]$  :

$$- \int_0^t \int_{\Omega} g'(v) v'^2 = \int_0^t \int_{\Omega} v' (v'' - \Delta v) = \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} v'^2 + |\nabla v|^2 \right]_0^t.$$

Donc

$$\left[ \int_{\Omega} u''^2 + |\nabla u'|^2 \right]_0^t \leq 2m \int_S^T \int_{\Omega} u''^2 dx d\tau,$$

i.e.

$$\begin{aligned} \| -\Delta u(t) + g(u'(t)) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u'(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \leq C(u^0, u^1) + 2m \int_S^T \| -\Delta u(\tau) + g(u'(\tau)) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

On applique alors le lemme de Gronwall pour obtenir (19. 23).  $\blacksquare$

### 3.3. Inégalité donnée par la méthode des multiplicateurs.

LEMME 19.3. *On suppose satisfaite (19. 10). Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $\mathcal{C}^2$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante, concave, de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $\sigma \geq 0$ . Soit  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui vérifie  $g'(0) \neq 0$  et*

$$\forall |y| \geq 1, |g(y)| \leq c|y|^q \quad \text{avec} \quad 1 \leq q \leq \frac{N+2}{\max(0, N-2)}.$$

Étant donné  $(u^0, u^1) \in \tilde{\mathcal{Z}}$ , il existe  $c > 0$  qui dépend de  $\Omega$  tel que la solution  $u(t)$  de (19. 3)-(19. 5) vérifie

$$(19. 27) \quad \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq cE(S)^{1+\sigma} + c \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \int_\Omega u'^2 dx dt.$$

**Remarque.** Si  $g$  est croissante, et si  $N \geq 3$ , (19. 27) demeure vraie pour tout  $q \geq 1$ .

*Preuve du Lemme 19.3.* Elle est identique à la preuve du Lemme 18.2. Il faut seulement tenir compte du terme supplémentaire  $E(t)^\sigma \phi'(t)$ , qui sera essentiel dans la suite. On intègre par partie l'expression suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u (u'' - \Delta u + g(u')) \\ &= \left[ \int_\Omega (E^\sigma \phi' u) u' \right]_S^T - \int_S^T \int_\Omega (E^\sigma \phi' u)' u' \\ &\quad - \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu u + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega |\nabla u|^2 + u g(u') \\ &= \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega u u' \right]_S^T - \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_\Omega u u' \\ &\quad - \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega 2u'^2 + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u'^2 + |\nabla u|^2 + u g(u'). \end{aligned}$$

Donc

$$(19. 28) \quad 2 \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' = - \left[ E^\sigma \phi' \int_\Omega u u' \right]_S^T \\ + \int_S^T \left( \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' + E^\sigma \phi'' \right) \int_\Omega u u' + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega 2u'^2 - u g(u').$$

Comme  $\phi'$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , on a

$$\left| E^\sigma \phi'(t) \int_\Omega u u' dx \right| \leq cE(t)^{1+\sigma},$$

et

$$\left| \int_S^T \sigma E' E^{\sigma-1} \phi' \int_\Omega u u' dx dt \right| \leq cE(S)^{1+\sigma}.$$

D'autre part  $\phi''$  est négative, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_S^T E^\sigma \phi'' \int_\Omega u u' dx dt \right| &\leq cE(S)^{1+\sigma} \int_S^T -\phi''(t) dt \\ &\leq cE(S)^{1+\sigma} \phi'(S) \leq cE(S)^{1+\sigma}. \end{aligned}$$

Il reste à estimer le dernier terme de (19. 28) :

LEMME 19.4. *Il existe  $c > 0$  dépendant de  $\Omega$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$  :*

$$(19. 29) \quad \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u g(u') dx dt \leq cE(S)^{1+\sigma} + \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega u'^2 dx dt + \varepsilon \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' dt$$

*Preuve du Lemme 19.4.* Soit  $\lambda > 0$  tel que

$$|g(y)| \leq \lambda|y| \quad \text{si } |y| \leq 1.$$

Soit  $\eta > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{|u'| \leq 1} u g(u') dx dt &\leq \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{|u'| \leq 1} \frac{\eta}{2} u^2 + \frac{1}{2\eta} g(u')^2 \\ &\leq \frac{c\eta}{2} \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{|u'| \leq 1} \frac{1}{2\eta} g(u')^2 \\ &\leq \frac{c\eta}{2} \int_S^T E^{1+\sigma} \phi' + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \frac{\lambda^2}{2\eta} u'^2. \end{aligned}$$

Ensuite on regarde la partie sur  $|u'| > 1$  : comme  $q \leq \frac{N+2}{\max(0, N-2)}$ ,

$$H^1(\Omega) \subset L^{q+1}(\Omega),$$

et donc

$$\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{E}.$$

(Dans le cas  $m = 0$ , on suppose  $N \leq 3$ , et  $q \geq 1$ ; on utilise que  $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$  et que  $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))$ .)

Alors

$$\begin{aligned}
& \int_S^T E^\sigma \phi' \int_{|u'|>1} u g(u') dx dt \\
& \leq \int_S^T E^\sigma \phi' \left( \int_\Omega |u|^{q+1} \right)^{1/(q+1)} \left( \int_{|u'|>1} |g(u')|^{(q+1)/q} \right)^{q/(q+1)} \\
& \leq c \int_S^T E^{\sigma+\frac{1}{2}} \phi' \left( \int_{|u'|>1} u' g(u') \right)^{q/(q+1)} \leq c \int_S^T \phi' E^{\sigma+\frac{1}{2}} (-E')^{q/(q+1)} \\
& \leq c \int_S^T \phi' \left( E^{\sigma+\frac{1}{2}-\frac{q\sigma}{q+1}} \right) \left( (-E')^{q/(q+1)} E^{\frac{q\sigma}{q+1}} \right) \\
& \leq c \eta^{q+1} \int_S^T \phi' E^{(q+1)(\sigma+\frac{1}{2}-\frac{q\sigma}{q+1})} + \frac{c}{\eta^{(q+1)/q}} \int_S^T \phi' (-E' E^\sigma) \\
& \leq c \eta^{q+1} E(0)^{(q-1)/2} \int_S^T \phi' E^{1+\sigma} + \frac{c}{\eta^{(q+1)/q}} E(S)^{1+\sigma}.
\end{aligned}$$

On obtient (19. 29) en choisissant  $\eta$  assez petit. ■

On déduit des trois dernières estimations que

$$\begin{aligned}
2 \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt & \leq c E(S)^{1+\sigma} \\
& + \frac{c}{\varepsilon} \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \int_\Omega u'^2 dx dt + \varepsilon \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt.
\end{aligned}$$

On obtient (19. 27) en choisissant  $\varepsilon$  assez petit. ■

#### 4. Preuve du Théorème 19.2 en dimension 2

La preuve du Théorème 19.2 en dimension 2 est basée sur la remarque suivante : lorsque  $g$  est croissante, on a montré dans le chapitre précédent que l'énergie décroît de manière exponentielle. Cette preuve repose non pas sur le fait que  $g$  est croissante, mais plutôt sur la *régularité* fournie par la croissance de  $g$ , plus précisément sur le fait que

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)).$$

Lorsque  $g$  est non monotone, on utilise la même stratégie, mais il faut tenir compte de la seule estimation dont on dispose sur  $u'$  : l'estimation de croissance exponentielle fournie par le Lemme 19.2. Cette croissance sera absorbée par des choix convenables de  $\phi$ ,  $R$ , et grâce à l'hypothèse (19. 17) sur le comportement de  $g$  à l'infini.

Le Lemme 19.3, appliqué avec  $\sigma = 0$ , nous donne que

$$(19. 30) \quad \int_S^T E(t) \phi'(t) dt \leq c E(S) + c \int_S^T \phi'(t) \int_\Omega u'^2 dx dt.$$

Notre but est d'estimer

$$\int_S^T \phi'(t) \int_\Omega u'^2 dx dt.$$

Soit  $R_0 \geq 1$ . On définit

$$(19.31) \quad \forall t \geq 0, \quad R(t) = R_0 e^{mt},$$

et

$$(19.32) \quad \forall t \geq 0, \quad \phi(t) = (1+t)^{1-k} - 1 \quad \text{si } k \in [0, 1),$$

$$(19.33) \quad \forall t \geq 0, \quad \phi(t) = \ln(2+t) - \ln 2 \quad \text{si } k = 1.$$

On remarque que  $\phi$  est une fonction croissante, concave, de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  (et  $\phi(0) = 0$ ).

Soit  $t \geq 0$  fixé. On considère la partition suivante de  $\Omega$  :

$$(19.34) \quad \Omega_0^t := \{x \in \Omega : |u'| \leq R_0\},$$

$$(19.35) \quad \Omega_1^t := \{x \in \Omega : R_0 < |u'| \leq R(t)\},$$

$$(19.36) \quad \Omega_2^t := \{x \in \Omega : R(t) < |u'|\}.$$

Cette partition généralise celle que nous avons construite dans le cas monotone : si  $m = 0$ ,  $R(t) = R_0$  et  $\Omega_1^t = \emptyset$ . Comme dans le cas monotone,  $R_0$  dépendra de  $C(u^0, u^1)$ .

On étudie d'abord la partie sur  $\Omega_2^t$ . On a montré dans le chapitre précédent que

$$(19.37) \quad \int_{\Omega_2^t} u^2 dx \leq \frac{c}{R(t)} \|u'\|_{H^1(\Omega)} E(t).$$

En utilisant l'estimation donnée par le Lemme 19.2, on obtient

$$(19.38) \quad \int_{\Omega_2^t} u^2 dx \leq \frac{c}{R(t)} \sqrt{C(u^0, u^1)} e^{mt} E(t) = \frac{c}{R_0} \sqrt{C(u^0, u^1)} E(t).$$

Ensuite on étudie d'abord la partie sur  $\Omega_1^t$  :

$$(19.39) \quad \begin{aligned} \int_S^T \phi'(t) \int_{\Omega_1^t} u^2 dx dt &= \int_S^T \phi'(t) \int_{\Omega_1^t} u' g(u') \frac{u'}{g(u')} dx dt \\ &\leq c \int_S^T \phi'(t) \int_{\Omega_1^t} u' g(u') (\ln(2 + |u'|))^k dx dt \\ &\leq c \int_S^T \phi'(t) (\ln(2 + R(t)))^k \int_{\Omega_1^t} u' g(u') dx dt. \end{aligned}$$

On remarque que grâce aux définitions de  $R$  et  $\phi$ , la fonction  $t \mapsto \phi'(t) (\ln(2 + R(t)))^k$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  : si  $k \in [0, 1[$ ,

$$\forall t \geq 0, \quad \phi'(t) (\ln(2 + R(t)))^k = (1-k)(1+t)^{-k} (\ln(2 + R_0 e^{mt}))^k \leq M,$$

et si  $k = 1$ ,

$$\forall t \geq 0, \quad \phi'(t) (\ln(2 + R(t))) \leq \frac{1}{2+t} (\ln(2 + R_0 e^{mt})) \leq M.$$

Donc

$$(19. 40) \quad \int_S^T \phi'(t) \int_{\Omega_1^t} u'^2 dx dt \\ \leq \int_S^T \phi'(t) (\ln(2 + R(t)))^k \int_{\Omega_1^t} u'g(u') dx dt \leq ME(S).$$

Enfin, on étudie la partie sur  $\Omega_0^t$  : comme  $g'(0) \neq 0$ , on a

$$|g(v)| \geq \alpha|v| \quad \text{if } |v| \leq R_0$$

pour un certain  $\alpha > 0$ . Ainsi

$$(19. 41) \quad \int_S^T \phi'(t) \int_{\Omega_0^t} u'^2 dx dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_S^T \phi'(t) \int_{\Omega_0^t} u'g(u') dx dt \\ \leq \frac{\phi'(S)}{\alpha} E(S) \leq cE(S).$$

On déduit alors de l'inégalité (19. 27) et des estimations (19. 38), (19. 40) et (19. 41) que

$$\int_S^T E(t)\phi'(t) dt \leq 2cE(S) + ME(S) + \frac{c}{R_0} \sqrt{C(u^0, u^1)} \int_S^T E(t)\phi'(t) dt.$$

Soit  $R_0$  défini par

$$R_0 := \text{Max} \{1, 2c\sqrt{C(u^0, u^1)}\}.$$

Alors

$$\frac{1}{2} \int_S^T E(t)\phi'(t) dt \leq CE(S).$$

(Remarque : le coefficient  $C$  de  $E(S)$  dépend de  $R_0$ , donc dépend de  $C(u^0, u^1)$ .)

En faisant tendre  $T$  vers l'infini, on obtient

$$(19. 42) \quad \forall S \geq 0, \quad \int_S^{+\infty} E(t)\phi'(t) dt \leq CE(S).$$

On peut alors appliquer le Lemme 2.1 avec  $\sigma = 0$ . On obtient que

$$(19. 43) \quad \forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega\phi(t)}.$$

La preuve du Théorème 19.2 en dimension 2 est achevée. ■

### 5. Preuve du Théorème 19.2 en dimension $N \geq 3$

Quand  $N \geq 3$ , on ne peut pas absorber le terme sur  $\Omega_2^t$  comme on l'a fait précédemment. La preuve sera alors basée sur le Lemme 2.3.

Supposons que  $g$  vérifie (19. 15)-(19. 17). Avec  $\sigma = 1$ , le Lemme 19.3 donne que

$$(19. 44) \quad \int_S^T E(t)^2 \phi'(t) dt \leq cE(S)^2 + c \int_S^T E(t)\phi'(t) \int_{\Omega} u'^2 dx dt.$$

On utilise la même stratégie qu'en dimension 2 : on définit

$$(19. 45) \quad \forall t \geq 0, \quad R(t) = R_0 e^{\gamma t},$$

avec  $\gamma > 0$  (qu'on choisira plus loin), et

$$(19. 46) \quad \forall t \geq 0, \quad \phi(t) = (1+t)^{1-k} - 1 \quad \text{si } k \in ]0, 1[.$$

Considérons la partition de  $\Omega$  définie par (19. 34)-(19. 36), où  $R(t)$  est donné par (19. 45).

D'abord on étudie la partie sur  $\Omega_2^t$ . Soit  $p = \frac{N+2}{4} > 1$  et  $q'$  son exposant conjugué :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2^t} u'^2 dx &= \int_{\Omega_2^t} u'^{1/p} u'^{2-1/p} dx \leq \left( \int_{\Omega_2^t} |u'| \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega_2^t} |u'|^{q'(2-1/p)} \right)^{1/q'} \\ &\leq \left( \frac{1}{R(t)} \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega_2^t} u'^2 \right)^{1/p} \|u'\|_{(2p-1)/(p-1)}^{(2p-1)/p}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega_2^t} u'^2 dx \leq \left( \frac{1}{R(t)} \right)^{1/(p-1)} \|u'\|_{(2p-1)/(p-1)}^{(2p-1)/(p-1)}$$

On utilise les injections de Sobolev ( Lemme 18.4 ) pour obtenir

$$\|u'\|_{(2p-1)/(p-1)} \leq c \|u'\|_{H^1}^\theta \|u'\|_2^{1-\theta} \leq C e^{\theta m t} E(t)^{(1-\theta)/2}$$

avec

$$\theta = \frac{N}{2} \frac{1}{2p-1} = 1,$$

et  $C$  dépendant de  $C(u^0, u^1)$ . Donc

$$(19. 47) \quad \|u'\|_{2N/(N+2)}^{2N/(N+2)} \leq C e^{\frac{2Nm}{N+2}t}.$$

(Remarque : on aurait obtenu une meilleure estimation en choisissant un  $p$  plus grand, mais cela ne change que la valeur des constantes, et pas l'estimation du comportement asymptotique de l'énergie.) Soit  $\gamma$  tel que

$$\frac{2Nm}{N+2} - \frac{\gamma}{p-1} = -1.$$

Alors

$$\begin{aligned} (19. 48) \quad \int_S^T E(t) \phi'(t) \int_{\Omega_2^t} u'^2 dx dt &\leq C \int_S^T E(t) \phi'(t) \frac{e^{2Nmt/(N+2)}}{\left(R(t)\right)^{1/(p-1)}} dt \\ &\leq CE(S) \int_S^T e^{-t} dt \leq CE(S) e^{-S}. \end{aligned}$$



Ensuite on étudie la partie sur  $\Omega_1^t$  : comme la fonction  $t \mapsto \phi'(t)(\ln(2 + R(t)))^k$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , on a

$$\int_S^T E(t)\phi'(t) \int_{\Omega_1^t} u'^2 dx dt \leq ME(S)^2,$$

et, comme précédemment,

$$\int_S^T E(t)\phi'(t) \int_{\Omega_0^t} u'^2 dx dt \leq cE(S)^2,$$

Donc

$$(19. 49) \quad \forall S \geq 0, \quad \int_S^T E(t)^2 \phi'(t) dt \leq cE(S)^2 + CE(S)e^{-S}.$$

A l'aide du changement de variable défini par  $\tau = \phi(t)$  et le changement de fonction  $F(\tau) := E(t)$ , on obtient

$$\forall S \geq 0, \quad \int_{\phi(S)}^{\phi(T)} F(\tau)^2 d\tau \leq cF(\phi(S))^2 + CF(\phi(S))e^{-S}.$$

La fonction décroissante  $F$  satisfait donc, si  $k \in [0, 1)$ ,

$$(19. 50) \quad \forall y \geq 1, \quad \int_y^{+\infty} F(\tau)^2 d\tau \leq cF(y)^2 + CF(y)e^{-\phi^{-1}(y)} \\ \leq cF(y)^2 + CF(y)e^{-y^{1/(1-k)}},$$

et, si  $k = 1$ ,

$$\forall y \geq 1, \quad \int_y^{+\infty} F(\tau)^2 d\tau \leq cF(y)^2 + CF(y)e^{-e^y} \leq cF(y)^2 + CF(y)e^{-y^2}.$$

On déduit à l'aide du Lemme 2.3 que  $F$  décroît exponentiellement, et comme  $E(t) = F(\phi(t))$ , on voit que :

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq C_k E(0) e^{-\omega\phi(t)},$$

(avec  $\omega$  dépendant de  $C$ ). ■

## 6. Extension au cas d'une force localement distribuée

Soit  $a : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue positive. On s'intéresse au problème

$$\begin{aligned} u'' - \Delta u + a(x)g(u') &= 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) &= u^0, u'(0) = u^1. \end{aligned}$$

Le Théorème d'existence 19.1 est encore valable pour ce problème. Comme dans le chapitre précédent, on voit que la preuve du Théorème 19.2 repose sur le Lemme 19.3 donné par la méthode des multiplicateurs. Si  $a$  satisfait les

conditions géométriques données par K. Liu, la méthode des multiplicateurs par morceaux montre que (19. 27) est remplacée par

$$\int_S^T E^{1+\sigma} \phi' \leq c E(S) + c \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega a(x) u'^2 + \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega a(x) \tilde{M}(u) g(u'),$$

$$\tilde{M}(u) := 2h \cdot \nabla u + cu + c'z(u),$$

où  $h$ ,  $c$  et  $c'$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$ , et  $z(u)$  est la solution du problème elliptique

$$\begin{cases} \Delta z = \beta(x)u \text{ dans } \Omega, \\ z = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le seul terme qui pose problème par rapport à la preuve du Lemme 19.3 est

$$\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega 2a(x)h \cdot \nabla u g(u').$$

Sous l'hypothèse

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq c|y|,$$

on majore facilement ce terme :

$$\int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega 2a(x)h \cdot \nabla u g(u') \leq \int_S^T E^\sigma \phi' \int_\Omega \varepsilon |\nabla u|^2 + c a(x) u'^2.$$

On montre donc une inégalité semblable à celle du Lemme 19.3 :

$$\int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq cE(S)^{1+\sigma} + c \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \int_\Omega a(x) u'^2 dx dt;$$

la preuve du Théorème 19.2 est alors inchangée.



## TAUX DE DÉCROISSANCE DE L'ÉNERGIE LORSQUE LA DISSIPATION EST HAUTEMENT DÉGÉNÉRÉE AU BORD

On considère le système de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet sur le bord, stabilisé par un terme d'amortissement linéaire, du type  $a(x)u'$ . Lorsque la fonction  $a$  est nulle sur le bord du domaine, les conditions géométriques utilisées dans les chapitres précédents ne sont plus satisfaites. Un résultat de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch assure même que, si le domaine est une boule, l'énergie ne décroît pas exponentiellement.

On se place dans le cas où le domaine est une boule. De plus on suppose que  $a$  est régulière, positive et s'annule au bord du domaine.

M. Nakao a montré que, si  $a$  tend vers zéro de manière *au plus polynomiale* au bord, alors l'énergie des solutions régulières décroît de manière polynomiale.

On suppose que  $a$  satisfait en plus

$$\forall |x| \geq R - \varepsilon, \quad a(x) = \tilde{a}(|x|),$$

pour un certain  $\varepsilon > 0$ , où  $\tilde{a} : [R - \varepsilon, R] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est positive, décroissante et satisfait  $\tilde{a}(0) = 0$ .

A l'aide d'une partition convenable du domaine, et des inégalités intégrales généralisées de la Partie 1, on obtient une estimation explicite du taux de décroissance de l'énergie même si  $\tilde{a}$  décroît plus vite en  $R$  vers zéro que tout polynôme. On montre ainsi, par exemple, que si  $a$  tend vers zéro de manière exponentielle au bord, l'énergie des solutions régulières décroît de manière logarithmique.

### 1. Introduction

Soit  $\Omega$  un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $a : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive continue. On s'intéresse à la décroissance de l'énergie des solutions du système

$$(20.1) \quad u'' - \Delta u + a(x)u' = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(20.2) \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(20.3) \quad u(0) = u^0, u'(0) = u^1,$$

Comme d'habitude, on définit l'énergie de la solution  $u$  par

$$(20. 4) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u'^2 + |\nabla u|^2 dx.$$

C. M. Dafermos [17] et A. Haraux [31], ont montré des résultats de stabilité asymptotique forte lorsque  $a$  n'est pas identiquement nulle : s'il existe  $x_0 \in \Omega$  tel que  $a(x_0) > 0$ , alors l'énergie des solutions tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Leur preuve est basée sur le principe d'invariance de LaSalle.

Si  $a$  est minorée par  $\alpha$  sur  $\Omega$ , on voit facilement que l'énergie de la solution décroît exponentiellement vers zéro : il existe deux constantes strictement positives  $C$  et  $\lambda$  telles que

$$(20. 5) \quad E(t) \leq CE(O)e^{-\lambda t}$$

pour toute donnée initiale  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

E. Zuazua [78] a prouvé que ce résultat reste valable si  $a(x) \geq \alpha > 0$  seulement sur un voisinage  $\omega$  de  $\Gamma(x_0)$ , où  $\Gamma(x_0)$  est la partie du bord définie par

$$(20. 6) \quad \Gamma(x_0) := \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\},$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  et  $\nu(x)$  est la normale unitaire sortante de  $\partial\Omega$  au point  $x \in \partial\Omega$ . Dans le Chapitre 17, on a montré que ce résultat reste valable sous des conditions géométriques affaiblies. Dans ces deux cas, les preuves sont basées sur la technique des multiplicateurs.

D'un autre côté, C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7] ont étudié ce problème par des techniques d'analyse micro-locale et ont obtenu une condition nécessaire et suffisante : l'énergie décroît exponentiellement si et seulement si la région  $\{a(x) \geq \alpha > 0\}$  vérifie la "condition géométrique des rayons optiques". Cette condition n'est pas satisfaite lorsque le domaine est une boule et la fonction  $a$  est nulle sur le bord : pour tout  $\alpha > 0$ , la région  $\{a(x) < \frac{\alpha}{2}\}$  contient un voisinage du bord de la boule. Le rayon optique qui parcourt le polygone régulier à  $n$  côtés reste alors dans cette zone au cours du temps, pourvu que  $n$  soit choisi assez grand. Ainsi, il ne rencontre jamais la zone  $\{a(x) \geq \alpha\}$ . Ceci assure que l'énergie ne peut pas décroître uniformément exponentiellement vers zéro.

M. Nakao [63] a étendu les résultats de E. Zuazua [78] en étudiant le cas d'une dissipation linéaire *dégénérée au bord*, c'est-à-dire en supposant que la fonction  $a$  s'annule sur une partie du bord. Il a montré le résultat suivant : soit  $m > \frac{N}{2}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ; on suppose que  $\omega$  est un voisinage de  $\Gamma(x_0)$ . On considère des données initiales  $(u^0, u^1) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$  satisfaisant la condition de compatibilité d'ordre  $m$  associée au problème (20. 1)-(20. 3), de telle sorte que la solution de ce problème soit régulière. Alors si  $a$  appartient à  $C^{m-1}(\overline{\Omega})$ , et satisfait

$$(20. 7) \quad \int_{\omega} \frac{1}{a(x)^p} dx < \infty$$

pour un certain  $p \in (0, 1)$ , l'énergie décroît polynomialement :

$$(20. 8) \quad E(t) \leq C(\|u^0\|_{H_{m+1}} + \|u^1\|_{H_m})t^{-2mp/N}.$$

Dans ce chapitre, on étudie le taux de décroissance des solutions de (20. 1)-(20. 3) lorsque (20. 7) n'est pas vérifiée. Pour simplifier, on suppose que le domaine  $\Omega$  est la boule centrée en  $O$  et de rayon  $R$  et que  $a$  est une fonction radiale sur  $\{x : |x| \geq \frac{R}{2}\}$ , positive, décroissante le long de tous les demi-rayons, et qui s'annule au bord. Dans ce cas, (20. 7) équivaut à dire que  $a$  décroît vers zéro de manière au plus polynomiale. A l'aide d'une partition convenable du domaine, et des inégalités intégrales généralisées de la Partie 1, on élimine l'hypothèse de décroissance polynomiale au bord, et on obtient une estimation explicite du taux de décroissance de l'énergie.

Par exemple, si

$$a(x) = e^{-1/(R-|x|)} \text{ pour tout } x \text{ tel que } |x| \geq \frac{R}{2},$$

alors on montre que l'énergie décroît de manière logarithmique :

$$E(t) \leq \frac{C}{(\ln t)^{2m/N}},$$

pour toute condition initiale  $(u^0, u^1) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$  qui satisfait la condition de compatibilité d'ordre  $m$ .

## 2. Résultat principal et exemples

Soit  $\Omega$  un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $a : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction positive régulière. L'existence et la régularité de la solution  $u$  de (20. 1)-(20. 3) sont données par le résultat classique suivant : (voir par exemple A. Pazy [65], M. Ikawa [40]) :

**DÉFINITION .** *La condition initiale  $(u^0, u^1) \in H^{m+1} \times H^m$  satisfait la condition de compatibilité d'ordre  $m$  associée au problème (20. 1)-(20. 3) si*

$$(20. 9) \quad u^k \in H^{m+1-k} \cap H_0^1 \text{ pour } k = 0, 1, \dots, m \text{ et } u^{m+1} \in L^2,$$

où la suite  $(u^k)_k$  est définie par récurrence à partir de  $(u^0, u^1)$  par la formule:

$$u^{k+2} = \Delta u^k - a(x)u^{k+1}.$$

**PROPOSITION 20.1.** *Soit  $m \geq 1$  un entier naturel. Supposons que  $a \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$  et  $(u^0, u^1)$  satisfait la condition de compatibilité d'ordre  $m$  associée à (20. 1)-(20. 3). Alors il existe une unique solution  $u(t)$  du problème (20. 1)-(20. 3) telle que :*

$$(20. 10) \quad u \in X_m = \bigcap_{k=0}^m C^k(\mathbb{R}_+, H^{m+1-k} \cap H_0^1) \cap C^{m+1}(\mathbb{R}_+, L^2),$$

et l'application linéaire

$$(20. 11) \quad (u^0, u^1) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \longrightarrow u \in X_m$$

est continue par rapport à ces topologies.

Supposons à présent que  $\Omega$  est la boule de  $\mathbb{R}^N$  centrée en  $O$  et de rayon  $R$ . Supposons que

$$(20.12) \quad \forall |x| \geq \frac{R}{2}, \quad a(x) = \tilde{a}(|x|),$$

où  $\tilde{a} : [\frac{R}{2}, R] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction positive, strictement décroissante, et telle que  $\tilde{a}(R) = 0$ . (On pourrait remplacer  $\frac{R}{2}$  par n'importe quel  $R - \varepsilon$ ; on a choisi  $\frac{R}{2}$  pour fixer les idées.)

On définit

$$(20.13) \quad \forall r \in [0, \frac{R}{2}], \quad b(r) = \tilde{a}(R - r) \text{ et } B(r) = rb(r).$$

On note que  $B$  est continue sur  $[0, \frac{R}{2}]$ , strictement croissante et  $B(0) = 0$ .

Dans ce cas, le résultat de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [7] assure que l'énergie ne peut pas décroître exponentiellement vers zéro.

Notre résultat principal est le suivant

**THÉORÈME 20.1.** *Soit  $m > \frac{N}{2}$ . Supposons que  $a$  est une fonction appartenant à  $C^{m-1}(\overline{\Omega})$  et telle que  $\tilde{a}$  définie par (20.12) soit nulle en  $R$  et vérifie la condition suivante : il existe  $p > 0$  et  $C > 0$  tels que*

$$(20.14) \quad \forall \rho \in (0, \frac{R}{2}), \quad \int_{\rho}^{\frac{R}{2}} \frac{1}{b(r)^p} dr \leq C \frac{\rho}{b(\rho)^p}.$$

Alors si  $(u^0, u^1)$  satisfait la condition de compatibilité d'ordre  $m$ , il existe  $C > 0$  qui dépend de la norme des données initiales dans  $H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$  tel que la solution  $u$  de (20.1)-(20.3) vérifie

$$(20.15) \quad E(t) \leq C \left( B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{2m/N}.$$

**Remarques. 1.** (20.14) est satisfaite lorsque  $\tilde{a}$  décroît assez vite vers zéro. Un cas particulier est lorsqu'il existe un entier  $n \geq 2$  et  $p > 0$  tels que

$$\forall r \in [0, \frac{R}{2n}], \quad b(r) \leq nr^{1/p}b(nr).$$

En effet, si  $\rho \in (0, \frac{R}{2n})$  :

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R \frac{1}{b(r)^p} dr &= \int_{\rho}^{n\rho} \frac{1}{b(r)^p} dr + \int_{n\rho}^R \frac{1}{b(r)^p} dr \\ &\leq \frac{n\rho}{b(\rho)^p} + \frac{R - n\rho}{b(n\rho)^p} \leq \frac{n\rho}{b(\rho)^p} + \frac{Rn^p\rho}{b(\rho)^p} = \frac{C\rho}{b(\rho)^p}. \end{aligned}$$

(20.14) est aussi satisfaite si

$$b(r) = r^k \text{ avec } k > 0,$$

si  $pk > 1$ .

(20.14) n'est plus satisfaite si  $\tilde{a}$  décroît trop lentement vers zéro en  $R$ , par exemple si,

$$b(r) = \frac{1}{|\ln r|},$$

mais dans ce cas, le résultat de M. Nakao [63] peut-être appliqué.

2. Par exemple si au voisinage de zéro

$$b(r) = r^q e^{-1/r^k} \text{ avec } k > 0,$$

alors

$$\frac{b(r)}{n r^{1/p} b(nr)} = \frac{r^q e^{-1/r^k}}{n^{1+q} r^{1/p} r^q e^{-1/(n^k r^k)}} = n^{-1-q} r^{-1/p} e^{(-1+(1/n^k))r^{-k}} \leq 1$$

dans un voisinage de zéro dès que  $n^k > 1$  et pour tout  $p > 0$ .  
Dans ce cas on obtient

$$E(t) \leq \frac{C}{(\ln t)^{2m/(Nk)}}.$$

3. L'estimation (20. 15) signifie que le taux de décroissance de l'énergie dépend de la dégénérescence de la fonction  $a$ , c'est-à-dire de la vitesse de convergence vers zéro au bord, aussi bien que de la régularité de la solution elle-même. Mais il semble que la dégénérescence a un effet plus important que celui de la régularité sur le taux de décroissance : par exemple si  $a$  décroît exponentiellement vers zéro (voir Remarque 3), l'énergie semble décroître seulement de manière logarithmique, quelle que soit la régularité des données initiales.

4. On peut obtenir (20. 15) sous des hypothèses moins strictes sur  $\Omega$  et sur  $a$  : ce qui est réellement important est le comportement asymptotique de  $a$  près du bord de  $\Omega$  (ou seulement sur une partie du bord).

### 3. Inégalités fondamentales

Soit  $(u^0, u^1) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)$  satisfaisant la condition de compatibilité d'ordre  $m$ . Alors la régularité donnée par (20. 10) justifie tous les calculs suivants

On rappelle l'expression de  $E'$  :

LEMME 20.1.

$$(20. 16) \quad \forall t > 0, \quad E'(t) = - \int_{\Omega} a(x) u'^2 dx.$$

Soient  $\sigma \geq 0$ , et  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante, concave de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Soit  $\omega := \{x : |x| \geq \frac{R}{2}\}$ . On a alors l'inégalité suivante

LEMME 20.2. *Il existe  $c > 0$  tel que*

$$(20. 17) \quad \forall 0 \leq S < T < \infty, \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq C E(S)^{1+\sigma} \\ + C \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \left( \int_{\omega} u'^2 dx \right) dt.$$

On a prouvé cette inégalité dans la Proposition 17.2, Chapitre 17 (sous des conditions plus faibles sur  $\omega$ ).



#### 4. Preuve du théorème

Dans son article, M. Nakao [63] suppose qu'il existe  $p > 0$  tel que

$$\int_{\omega} \frac{1}{a(x)^p} dx \text{ converge.}$$

Alors le dernier terme de (20. 17) (avec  $\phi(t) = t$ )

$$\int_S^T E^\sigma \left( \int_{\omega} u'^2 dx \right) dt$$

est estimé en utilisant l'inégalité de Jensen et le théorème de Gagliardo-Nirenberg.

Mais si

$$\tilde{a}(r) = e^{-1/(R-r)} \text{ pour } r \in \left[ \frac{R}{2}, R \right],$$

(20. 7) n'est plus satisfaite : pour tout  $p > 0$ ,

$$\int_{\frac{R}{2}}^{\rho} \frac{1}{\tilde{a}(r)^p} dr \rightarrow +\infty \text{ quand } \rho \rightarrow R.$$

L'idée est donc d'*approcher* la fonction  $\tilde{a} := \tilde{a}(r)$  par une fonction  $\alpha := \alpha(r, t)$  telle que (20. 7) soit satisfaite pour  $\alpha(r, t)$  pour chaque  $t$ , et de dominer l'explosion de ce terme quand  $t$  tend vers l'infini par le terme  $\phi'(t)$ .

##### 4.1. Une première estimation donnée par l'approximation de $\tilde{a}$ .

Soit  $\rho : t \mapsto \rho(t)$  une fonction décroissante tendant vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. La fonction  $\rho$  sera choisie convenablement plus tard. Soit  $T_0$  tel que  $\rho(T_0) \leq \frac{R}{2}$ . On travaillera dans toute la suite sur l'intervalle de temps  $[T_0, +\infty[$ .

On définit alors la fonction  $\alpha$  par

$$(20. 18) \quad \begin{cases} \tilde{\alpha}(r, t) := \tilde{a}(r) \text{ si } \frac{R}{2} \leq r \leq R - \rho(t), \\ \tilde{\alpha}(r, t) := \tilde{a}(R - \rho(t)) \text{ si } r \geq R - \rho(t). \end{cases}$$

On définit

$$\forall |x| \geq \frac{R}{2}, \quad \alpha(x, t) := \tilde{\alpha}(|x|, t).$$

Comme conséquence des injections de Sobolev, on sait que  $H^m(\Omega)$  est inclus dans  $L^\infty(\Omega)$  si  $m$  est assez grand :

LEMME 20.3. (Gagliardo-Nirenberg) Si  $m > \frac{N}{2}$ , il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $v \in H^m(\Omega)$  on a

$$(20. 19) \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^m(\Omega)}^\theta \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta}, \text{ avec } \theta = \frac{N}{2m}.$$

Grâce à (20. 10) et à (20. 11), on peut appliquer (20. 19) à  $u'$  et on en déduit que

$$(20. 20) \quad \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq c \|u'\|_{H^m(\Omega)}^{2\theta} \|u'\|_{L^2(\Omega)}^{2(1-\theta)} \leq c_m \|(u^0, u^1)\|_{H^{m+1} \times H^m}^{2\theta} E(t)^{1-\theta}.$$

Soit  $p > 0$  tel que (20. 14) soit vérifiée. Alors en utilisant l'inégalité de Jensen et (20. 20) comme le fait M. Nakao [63], on peut estimer le dernier terme de (20. 17) comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \left( \int_\omega u'^2 dx \right) dt \\
& \leq \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \left( \int_\omega \frac{1}{\alpha(x,t)} u'^2 \alpha(x,t) dx \right) dt \\
& \leq \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \left( \int_\omega \frac{1}{\alpha(x,t)^{p+1}} \alpha(x,t) dx \right)^{1/(p+1)} \\
& \quad \left( \int_\omega u'^{2(p+1)/p} \alpha(x,t) dx \right)^{p/(p+1)} dt \\
& \leq \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t)^{1/(p+1)} \left( \phi'(t)^p \int_\omega \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx \right)^{1/(p+1)} \\
& \quad \left( \int_\omega u'^2 \alpha(x,t) dx \right)^{p/(p+1)} \|u'(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{2/(p+1)} dt \\
& \leq C_m \int_S^T E(t)^{\sigma+(1-\theta)/(p+1)} \phi'(t)^{1/(p+1)} \\
& \quad \left( \phi'(t)^p \int_\omega \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx \right)^{1/(p+1)} \left( \int_\omega \alpha(x,t) u'^2 dx \right)^{p/(p+1)} dt.
\end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, on introduit

$$(20. 21) \quad \xi(t) = \phi'(t) \left( \int_\omega \frac{1}{\alpha(x,t)^p} dx \right)^{1/p}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . On applique l'inégalité de Young pour obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
(20. 22) \quad & \int_S^T E(t)^\sigma \phi'(t) \left( \int_\omega u'^2 dx \right) dt \\
& \leq C_m \int_S^T E(t)^{\sigma+(1-\theta)/(p+1)} \phi'(t)^{1/(p+1)} \xi(t)^{p/(p+1)} \left( \int_\omega \alpha(x,t) u'^2 dx \right)^{p/(p+1)} dt \\
& \leq C_m \int_S^T E(t)^{\sigma+(1-\theta)/(p+1)} \phi'(t)^{1/(p+1)} \left( \xi(t) \int_\omega \alpha(x,t) u'^2 dx \right)^{p/(p+1)} dt \\
& \leq C_m \int_S^T \frac{\varepsilon}{p+1} E(t)^{\sigma(p+1)+(1-\theta)} \phi'(t) dt \\
& \quad + C_m \int_S^T \frac{p}{(p+1)\varepsilon^{1/p}} \left( \xi(t) \int_\omega \alpha(x,t) u'^2 dx \right) dt.
\end{aligned}$$

Soit  $\sigma$  tel que

$$(20. 23) \quad \sigma(p+1) + (1-\theta) = \sigma + 1 \text{ i.e. } \sigma = \frac{\theta}{p} = \frac{2m}{Np}.$$

On déduit alors de (20. 17) et de (20. 22) que si  $\varepsilon$  est assez petit, il existe une constante  $C$  positive telle que

$$(20. 24) \quad \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq CE(S)^{1+\sigma} + C \int_S^T \xi(t) \left( \int_{\omega} \alpha(x, t) u'^2 dx \right) dt.$$

Dans le paragraphe suivant, on montre comment estimer le dernier terme de (20. 24) en choisissant précisément les fonctions  $\rho$  et  $\phi$ .

#### 4.2. Le choix de la fonction $\rho$ .

Supposons que  $\phi$  est une fonction strictement croissante, concave, de classe  $C^2$  telle que

$$(20. 25) \quad \phi(t) \longrightarrow +\infty \text{ et } \phi'(t) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

On prouve d'abord l'estimation suivante

LEMME 20.4. *Si  $b$  satisfait (20. 14) alors il existe  $C > 0$  tel que*

$$(20. 26) \quad \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{1}{\tilde{\alpha}(r, t)^p} dr \leq C \frac{\rho(t)}{b(\rho(t))^p}.$$

*Preuve du Lemme 20.4.* Si  $b$  satisfait (20. 14) alors

$$\begin{aligned} \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{1}{\tilde{\alpha}(r, t)^p} dr &= \int_{\frac{R}{2}}^{R-\rho(t)} \frac{1}{\tilde{\alpha}(r, t)^p} dr + \int_{R-\rho(t)}^R \frac{1}{\tilde{\alpha}(r, t)^p} dr \\ &= \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \frac{1}{b(r)^p} dr + \int_{R-\rho(t)}^R \frac{1}{b(\rho(t))^p} dr \leq \frac{C\rho(t)}{b(\rho(t))^p} + \frac{\rho(t)}{b(\rho(t))^p}. \blacksquare \end{aligned}$$

En utilisant (20. 26), on peut estimer  $\xi$  par

$$\xi(t) \leq C\phi'(t) \frac{\rho(t)^{1/p}}{b(\rho(t))}.$$

Comme  $b$  est strictement croissante au voisinage de zéro, on définit  $\rho$  par la formule

$$(20. 27) \quad \rho(t) = b^{-1}(\phi'(t)).$$

On remarque que comme  $b$  est croissante et  $\phi'$  est décroissante,  $\rho$  est aussi décroissante. Grâce à cette définition, on voit que

$$(20. 28) \quad \xi(t) \leq C\rho(t)^{1/p},$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \alpha(x, t) u'^2 dx &= \int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R-\rho(t)} \alpha(x, t) u'^2 dx + \int_{|x| > R-\rho(t)} \alpha(x, t) u'^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} a(x) u'^2 dx + \int_{|x| > R-\rho(t)} \tilde{a}(R-\rho(t)) u'^2 dx \\ &\leq -E'(t) + b(\rho(t))E(t) = -E'(t) + \phi'(t)E(t). \end{aligned}$$

On déduit alors de (20. 24) que

$$(20. 29) \quad \begin{aligned} \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt &\leq CE(S)^{1+\sigma} + C \int_S^T \xi(t) \left( -E'(t) + \phi'(t)E(t) \right) dt \\ &\leq CE(S)^{1+\sigma} + C\rho(S)^{1/p}E(S) + CE(S) \int_S^T \rho(t)^{1/p} \phi'(t) dt. \end{aligned}$$

Dans le paragraphe suivant, on montre comment définir la fonction  $\phi$  de telle sorte que

$$\int_1^{+\infty} \rho(t)^{1/p} \phi'(t) dt \text{ converge.}$$

### 4.3. Le choix de la fonction $\phi$ .

Soit  $p' > 1 + p$  et

$$T_1 := \left( \frac{2}{R} \right)^{1/p'}.$$

On définit

$$(20. 30) \quad \forall t \geq T_1, \quad \psi(t) = T_1 + \int_{T_1}^t \frac{1}{b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right)} d\tau.$$

Il est facile de vérifier que  $\psi$  est une fonction strictement croissante, convexe, de classe  $\mathcal{C}^2$  qui vérifie

$$\psi(t) \rightarrow +\infty \text{ et } \psi'(t) = \frac{1}{b\left(\frac{1}{t^{p'}}\right)} \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Définissons alors

$$(20. 31) \quad \forall t \geq T_1, \quad \phi(t) = \psi^{-1}(t).$$

Alors  $\phi$  est une fonction strictement croissante, concave, de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$\phi(t) \rightarrow +\infty \text{ et } \phi'(\psi(t)) = \frac{1}{\psi'(t)} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Donc  $\phi$  possède toutes les propriétés que nous avons utilisées pour en déduire (20. 17) et (20. 29).

Soit  $T_0 \geq T_1$  tel que  $\rho(t) = b^{-1}(\phi'(t)) \leq \frac{R}{2}$  pour tout  $t \geq T_0$ . Avec le changement de variable défini par

$$\tau = \phi(t)$$

on voit que

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{+\infty} \rho(t)^{1/p} \phi'(t) dt &= \int_{T_0}^{+\infty} \left( b^{-1}(\phi'(t)) \right)^{1/p} \phi'(t) dt \\ &= \int_{\phi(T_0)}^{+\infty} \left( b^{-1}(\phi'(\psi(\tau))) \right)^{1/p} d\tau = \int_{\phi(T_0)}^{+\infty} \left( b^{-1}\left(\frac{1}{\psi'(\tau)}\right) \right)^{1/p} d\tau \\ &= \int_{\phi(T_0)}^{+\infty} \frac{1}{\tau^{p'/p}} d\tau, \end{aligned}$$

et la dernière intégrale converge parce que  $p' > p$ .

#### 4.4. Dernières estimations.

Un simple calcul donne

$$\phi'(t) = \frac{1}{\psi'(\phi(t))} = b\left(\frac{1}{\phi(t)^{p'}}\right).$$

Donc

$$(20. 32) \quad \rho(t) = b^{-1}(\phi'(t)) = \frac{1}{\phi(t)^{p'}}.$$

on peut alors conclure : en revenant à (20. 29) on voit que pour tout  $T_0 \leq S < T$  :

$$(20. 33) \quad \int_S^T E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq CE(S)^{1+\sigma} + C \frac{E(S)}{\phi(S)^{p'/p}} + C \frac{E(S)}{\phi(S)^{(p'/p)-1}}$$

$$(20. 34) \quad \leq CE(S)^{1+\sigma} + C \frac{E(S)}{\phi(S)^{(p'/p)-1}}.$$

On applique l'inégalité intégrale donnée dans le Lemme 2.7 avec  $\sigma = 1$  et  $\sigma' = \frac{p'}{p} - 1$  pour en déduire qu'il existe une constante  $C$  dépendant de  $E(T_0)$  (de manière continue) telle que

$$(20. 35) \quad \forall t \geq T_0, E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^{p'/(p\sigma)}} = \frac{C}{\phi(t)^{p'/\theta}}.$$

Il reste à estimer la croissance de  $\phi$ . Cela revient à majorer la fonction  $\phi^{-1} = \psi$ . Soit  $T_2 \geq T_0$  tel que

$$\forall \tau \geq T_2, \quad b\left(\frac{1}{\tau^{p'}}\right) \leq 1.$$

Comme  $p' \geq 1$ ,

$$(20. 36) \quad \forall \tau \geq T_2, \psi(\tau) \leq 1 + (\tau - 1) \frac{1}{b(\frac{1}{\tau^{p'}})} \leq \tau^{p'} \frac{1}{b(\frac{1}{\tau^{p'}})} = \frac{1}{B(\frac{1}{\tau^{p'}})}.$$

Donc

$$(20. 37) \quad \frac{1}{\phi(t)} \leq \frac{1}{\tau}$$

avec

$$t = \frac{1}{B(\frac{1}{\tau^{p'}})} \text{ i.e. } \frac{1}{\tau^{p'}} = B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Donc

$$(20. 38) \quad E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^{p'/\theta}} \leq C \left(B^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{1/\theta} \text{ avec } \theta = \frac{N}{2m}.$$

La preuve de (20. 15) est achevée. ■

**Remarque.** Si

$$b(r) = r^k$$

cette méthode redonne le résultat de M. Nakao [63] :

$$E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^{p'/\theta}} \leq \frac{C}{t^q} \text{ avec } q = \frac{p'}{(1 + p'k)\theta},$$

et il suffit de prendre  $p'$  assez grand pour avoir une estimation du taux de décroissance proche de  $t^{-1/k\theta}$ .



## Références

- [1] M. AASSILA, *On a quasilinear wave equation with strong damping*, Funkcial. Ekvac. 41 (1998), 67-78.
- [2] M. AASSILA, *A new approach of strong stabilization of distributed systems*, Differential Integral Equations, 11 (1998), 369-376.
- [3] M. AASSILA, *Decay estimates for the wave equation with a nonlinear nonmonotone weak damping*, Appl. Anal., to appear.
- [4] F. ALABAU and V. KOMORNIK, *Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems*, SIAM J. Control Optim., to appear.
- [5] J. M. BALL and M. SLEMROD, *Feedback stabilization of distributed semilinear control systems*, Appl. Math. Optim. 5 (1979), 169-179.
- [6] V. BARBU, *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems*, Academic Press, New York, 1993.
- [7] C. BARDOS, G. LEBEAU and J. RAUCH, *Un exemple d'utilisation des notions de propagation pour le contrôle et la stabilisation des problèmes hyperboliques*, the proceedings of the workshop on non linear hyperbolic equations in applied sciences (edited by N. Bellono), Rendiconti del Seminario Matematico, Università'e Politecnico Torino (Fascicolo Speciale 1988), 11-31.
- [8] C. BARDOS, G. LEBEAU and J. RAUCH, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim. 30 (1992), 1024-1065.
- [9] H. BARUCQ et B. HANOUCZET, *Etude asymptotique du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbantes de Silver-Müller II*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 316 (1993), 547-552.
- [10] H. BRÉZIS, *Problèmes unilatéraux*, J. Math Pures Appl. 51 (1972), 1-168.
- [11] H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Pub. Comp.- Amsterdam, 1973.
- [12] G. CHEN *Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain*, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 249-274.
- [13] P. G. CIARLET, *Mathematical elasticity, Vol. 1 : Three-dimensional elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [14] F. CONRAD, J. LEBLOND and J. P. MARMORAT, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback*, Proc. of the Fifth IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, Perpignan, June 1989, 101-116.
- [15] F. CONRAD and M. PIERRE, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedbacks*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 11, 1994, n° 5, 485-515.
- [16] F. CONRAD and B. RAO, *Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback*, Asymptot Anal. 7, 1993, 159-177.
- [17] C. M. DAFERMOS, *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations*, in "Non-linear Evolution Equations", M.G. Crandall Ed., Academic Press, New York, 1978, 103-123.
- [18] R. DAUTRAY and J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul scientifique pour les sciences et les techniques*, Tome 1, Chapitre 7, Masson, Paris, 1988.



- [19] A. FAVINI, M. A. HORN, I. LASIECKA and D. TATARU, *Global existence, uniqueness and regularity of solutions to a von Karman system with nonlinear boundary dissipation*, Differential and Integral Equations 9 (1996), 267-294.
- [20] E. FEIREILS, *Strong decay for wave equations with nonlinear nonmonotone damping*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, vol. 21, 1993, no. 1, 49-63.
- [21] E. FEIREILS et G. O'DOWD, *Stabilisation d'un système hybride par un feedback non linéaire non monotone*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math 326 (1998), 323-327.
- [22] R. P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON and M. SANDS, *The Feynman's Lectures on Physics*, Vol. 2, Chapter 39, Addison Wesley, 1964.
- [23] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and studies in Math., 24, Pitman, Boston, 1985.
- [24] P. GRISVARD, *Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités*, J. Math. Pures Appl. 68 (1989), 215-259.
- [25] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Research in Applied Mathematics, 22. Masson, Paris; Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [26] A. GUESMIA, article en préparation.
- [27] A. HARAUX, *Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques*, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique No. 78011 (1978), Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [28] A. HARAUX, *Comportement à l'infini pour une équation des ondes non linéaire dissipative*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 287 (1978), 507-509.
- [29] A. HARAUX, *Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires*, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique No. 78010 (1978), Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [30] A. HARAUX, *Nonlinear evolution equations*, Lecture Notes in Mathematics 841, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1981.
- [31] A. HARAUX, *Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations* J. Differential Equations, 59 (1985), 145-154.
- [32] A. HARAUX, *Semilinear hyperbolic problems in bounded domains*, *Mathematical reports*, J. Dieudonné editor, Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, 1987.
- [33] A. HARAUX and E. ZUAZUA, *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 100 (1988), No 2, 191-206.
- [34] M. A. HORN, *Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity*, J. Math. Anal. Appl., 223 (1998), 126-150.
- [35] M. A. HORN, *Stabilization of the dynamic system of elasticity by nonlinear boundary feedback*, submitted.
- [36] M. A. HORN, *Remarks on robustness of stability with respect to thickness of elastic structures*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, to appear.
- [37] M. A. HORN and I. LASIECKA, *Nonlinear boundary stabilization of parallelly connected Kirchhoff plates*, Dynamics and Control 6 (1996), 263-292.
- [38] M. A. HORN and I. LASIECKA, *Global stabilization of a dynamic von Krmn plate with nonlinear boundary feedback*, Applied Mathematics and Optimization 31 (1995), 57-84.
- [39] M. A. HORN and C. Mc MILLAN, *Robustness of stability properties with respect to thickness for cylindrical shells*, in preparation.
- [40] M. IKAWA, *Mixed problems for hyperbolic equations of second order*, J. Math. Soc. Japan 20, 1968, 580-608.
- [41] B. V. KAPITONOV, *Stabilization and exact boundary controllability for Maxwell's equations*, SIAM J. Control Optim. 32 (1994), No. 2, 408-420.
- [42] V. KOMORNIK and E. ZUAZUA, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, J. Maths Pures Appl. 69 (1990), 33-54.

- [43] V. KOMORNIK, *Rapid boundary stabilization of the wave equation*, SIAM J. Control Optim. 29 (1991), 197-208.
- [44] V. KOMORNIK, *Exact Controllability and Stabilization*. RAM : Research in Applied Mathematics. Masson, Paris; John Wiley, Ltd., Chichester, 1994.
- [45] V. KOMORNIK, *Decay estimates for the wave equation with internal damping*, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 118 (1994), 253-266.
- [46] V. KOMORNIK, *Boundary stabilization of isotropic elasticity systems*, Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New-York 174 (1995), 135-146.
- [47] J. E. LAGNESE, *Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation*, J. Differential Equations 50 (1983), 163-182.
- [48] J. E. LAGNESE, *Boundary stabilization of linear elastodynamic systems*, SIAM J. Control Optim. 21 (1983), 968-984.
- [49] J. E. LAGNESE, *Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary*, Nonlinear Anal. 16 (1991), 35-54.
- [50] J. E. LAGNESE and J.-L. LIONS, *Modelling analysis and control of thin plates*, Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], 6. Masson, Paris, 1988.
- [51] I. LASIECKA and D. TATARU, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, Lectures Notes in Pure and Applied Maths 142 (1993), Dekker, New York.
- [52] I. LASIECKA and R. TRIGGIANI, *Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions*, Appl. Math. Optim. 25 (1992), 189-224.
- [53] J.-L. LIONS and W.A. STRAUSS, *Some nonlinear evolution equations*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), p.43-96.
- [54] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués*, Vol.1, Masson, Paris, 1988.
- [55] J.-L. LIONS, *Quelque méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [56] K. LIU, *Locally distributed control and damping for the conservative systems*, SIAM J. Control Optim. 35 (1997), No.5, 1997.
- [57] K. LIU and M. YAMAMOTO, *On observation time duration for exact internal observability by the piecewise multiplier method*, preprint of the University of Tokyo, 1997.
- [58] W. LIU, *Partial exact controllability and exponential stability in higher-dimensional linear thermoelasticity*, Esaim : Control, Opt. and Calc. of Var., Vol. 3 (1998), 23-48.
- [59] P. MARTINEZ, *A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems*, soumis.
- [60] M. MOUSSAOUI, *Singularités des solutions du problème mêlé, contrôlabilité exacte et stabilisation frontière*, ESAIM Proceedings 1 (1996), 157-168.
- [61] M. NAKAO, *Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with a nonlinear dissipative term*, J. Math. Anal. Appl., 58 (1977), 336-343.
- [62] M. NAKAO, *Energy decay for the wave equation with a nonlinear weak dissipation*, Differential Integral Equations, Vol. 8 (1995), No. 3, p. 681-688.
- [63] M. NAKAO, *Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation*, Israel J. Math. 95, 1996, 25-42.
- [64] M. NAKAO, *Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation*, Math. Ann. 305 (1996), No.3, 403-417.
- [65] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

- [66] M. PIERRE and J. VANCOSTENOBLE, *Strong asymptotic stability for one-dimensional wave equations with nonlinear and nonmonotone feedbacks*, en préparation.
- [67] J.-P. PUEL and M. TUCSNAK, *Boundary stabilization for the von Kármán equations*, SIAM J. Control Optim. 33 (1995), no. 1, 255–273.
- [68] W. RUDIN, *Real and complex analysis*. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [69] D. L. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions*, SIAM Rev. 20 (1978), 639-739.
- [70] M. SLEMROD, *Weak asymptotic decay via a “relaxed invariance principle” for a wave equation with nonlinear, nonmonotone damping*, Proc. of Royal Soc. Edimburgh, 113A (1989), 87-97.
- [71] L. R. TCHEUGOUÉ TÉBOU, *On the stabilization of the wave and linear elasticity equations in dimension 2*, Panamer. Math. J. 1 (1996), p. 41-55.
- [72] L. R. TCHEUGOUÉ TÉBOU, *Estimations d’énergie pour l’équation des ondes avec un amortissement non linéaire localisé*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 325 (1997), 1175-1179.
- [73] M. TUCSNAK, *Boundary stabilization for the stretched string equation*, Differential Integral Equations 6 (1993), no. 4, 925–935.
- [74] J. VANCOSTENOBLE, *Weak asymptotic stability of second order evolution equations by nonlinear and nonmonotone feedbacks*, SIAM Journal on Math. Analysis, to appear.
- [75] J. VANCOSTENOBLE, en préparation.
- [76] E. ZUAZUA, Chap. 7 dans J.-L. Lions [54].
- [77] E. ZUAZUA, *Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems*, Asympt. Anal. 1 (1988), 2, 161-185.
- [78] E. ZUAZUA, *Exponential decay for the semi-linear wave-equation with locally distributed damping*, Comm. P.D.E. 15 (1990), 205-235.
- [79] E. ZUAZUA, *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*, SIAM J. Control and Optim. 28 (1990), 466-478.