

# Sommaire :

<b>1</b>	<b>Notions fondamentales sur la physique des semi-conducteurs</b>	<b>3</b>
1.1	Description d'un semi-conducteur . . . . .	3
1.1.1	Conductivité due aux impuretés . . . . .	7
1.1.2	La jonction PN . . . . .	8
1.2	Théorie de la conductivité électrique et équations de transport . . . . .	9
1.2.1	Dérive des électrons dans un champ électrique . . . . .	10
1.2.2	Mobilité . . . . .	12
1.2.3	Courant de dérive . . . . .	13
1.2.4	Courant de diffusion . . . . .	14
1.2.5	Equations de dérive-diffusion . . . . .	14
1.2.6	Equations de transport . . . . .	16
1.2.7	Quasi-Niveaux de Fermi . . . . .	19
1.2.8	Phénomènes de génération et de recombinaison . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Notions sur les équations de base des semi-conducteurs</b>	<b>25</b>
2.1	Notations et définitions . . . . .	25
2.1.1	Espaces fonctionnels . . . . .	26
2.2	Analyse mathématique des équations de dérive-diffusion . . . . .	27
2.2.1	Théorèmes d'existence et de régularité . . . . .	38
2.2.2	Unicité . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Analyse par perturbations singulières du modèle unipolaire de dérive-diffusion à potentiel donné</b>	<b>49</b>
3.1	Notions préliminaires sur les méthodes de perturbations singulières dans un cas linéaire . . . . .	49
3.1.1	Le problème abstrait . . . . .	49

3.1.2	Correcteurs d'ordre 0 . . . . .	51
3.1.3	Estimations avec les correcteurs d'ordre 0 . . . . .	52
3.1.4	Calcul des correcteurs . . . . .	53
3.2	Le modèle de dérive-diffusion unipolaire . . . . .	55
3.2.1	Développement asymptotique pour les équations de dérive-diffusion dans le cas de semi-conducteurs unipolaires . . . . .	57
3.2.2	Unicité des solutions du problème réduit . . . . .	62
3.2.3	Estimations uniformes . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Etude de l'unicité des solutions pour les équations de dérive-diffusion à potentiel donné dans le cas des potentiels non monotones</b>	<b>87</b>
4.1	Modèle mathématique . . . . .	87
4.2	Propriétés d'un semi-conducteur symétrique . . . . .	90
4.3	Résultats d'unicité dans le cas des diodes symétriques . . . . .	92
4.3.1	Cas de polarisation inverse (i.e. $V < 0$ ) . . . . .	94
4.3.2	Cas de polarisation directe (i.e. $0 < V$ ) . . . . .	106
4.4	Résultat d'unicité dans le cas de thyristors symétriques polarisés en inverse	110
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>119</b>

# Chapitre Premier

## Notions fondamentales sur la physique des semi-conducteurs

Ce chapitre est consacré, en majeure partie, à une récapitulation des notions fondamentales sur lesquelles s'appuie l'étude du comportement électrique des dispositifs semi-conducteurs. Nous donnons une brève description des propriétés physiques essentielles des cristaux semi-conducteurs : nature et origine des porteurs de charge, transport de charges, génération et recombinaison de porteurs, ainsi que la mise en équation décrivant ces propriétés.

### 1.1 Description d'un semi-conducteur

Les solides connus sous le nom de semi-conducteurs sont depuis les dernières décennies l'objet de très importantes recherches, ceci non seulement en raison de leur intérêt propre mais encore des applications de plus en plus nombreuses et fructueuses dont ils sont l'objet. Ces applications sont en effet innombrables : redresseurs, transistors, cellules photoélectriques, magnéto-mètre, photopiles solaires, reprographie, lasers...

L'objet de cette partie est une présentation aussi simple que possible des concepts de base permettant de comprendre et de traduire par des grandeurs mesurables, les propriétés des électrons dans les semi-conducteurs.

Entre 1920 et 1960 les bases des semi-conducteurs furent établies et on peut prendre cet acquis comme données initiales, sans autre préambule. Cependant comment ne pas rappeler, même sommairement, qu'il s'agit d'une des applications les plus spectaculaires de la mécanique quantique? Les repères significatifs de ces réflexions pourraient être les

Figure 1.1 : Représentation des bandes d'énergie dans l'espace réel.

suivants :

- . atome isolé puis passage au monocristal et aux bandes d'énergie,
- . bande d'énergie avec introduction des électrons et des trous, c'est-à-dire de charges “ mobiles ” positives et négatives, classement des matériaux en semi-conducteurs, métaux et isolants.
- . semi-conducteur de type N ou de type P, et modification volontaire de la résistivité, permanente ou réversible.
- . jonction entre métal et semi-conducteur, et jonction de différents semi-conducteurs entre eux.

Ces points forts sont destinés à rappeler les éléments qui ont servi à formaliser la théorie. L'application de la mécanique quantique à l'étude du comportement des électrons dans un solide fait apparaître que les niveaux d'énergie qui leur sont permis se groupent en “ bande ”. Pour les cristaux semi-conducteurs ou isolants, deux de ces bandes d'énergie jouent un rôle essentiel ; il s'agit de la bande de “ valence ” et de la bande de “ conduction ” qui sont séparées par une bande “ interdite ” dans laquelle, en principe, il n'y a pas d'état d'énergie permis (figure 1.1). Le niveau de Fermi ( $E_F$ ) représente l'énergie maximum des électrons à une température de 0 K. A cette même température, les bandes situées sous

le niveau de Fermi sont remplies. Le maximum de la bande de valence est noté  $E_V$ , et le minimum de la bande de conduction est noté  $E_C$ .  $E_V$  et  $E_C$  sont séparés par la bande interdite, de largeur  $E_g$ .

La figure 1.2 propose une image simple permettant de comprendre cette situation. Elle représente, de manière schématique, l'arrangement des atomes d'un cristal semi-conducteur typique tel que le Silicium par exemple ; tétravalent comme le carbone, ce matériau cristallise dans le système du diamant par établissement de liaisons covalentes entre atomes, ce qui assure à chacun d'eux une couche électronique périphérique stable de huit électrons. La bande de valence, comme son nom l'indique, groupe les niveaux d'énergie des électrons de valence, ceux-là mêmes qui assurent les liaisons entre atomes du cristal. La largeur  $E_g$  de la bande interdite (bandgap) représente l'énergie minimum nécessaire pour rompre l'une de ces liaisons ; lors de la rupture d'une liaison, l'électron correspondant devient libre de se déplacer dans le cristal et de participer à des mécanismes de conduction. Ce sont les états d'énergie offerts aux électrons libres que regroupe la bande de conduction.

Cependant, le passage d'électrons de l'état lié à l'état libre fait apparaître des lacunes électroniques ou " trous " auxquels on doit associer la charge élémentaire positive qui fait pendant à la charge négative de l'électron libre (figure 1.2). L'existence de ces lacunes, c'est-à-dire la présence, dans la bande de valence, d'états d'énergie non occupés, autorise le déplacement de proche en proche d'électrons de valence et le report concomitant de ces lacunes. Il est alors commode de raisonner comme si les trous représentaient, à côté des électrons libres, une autre catégorie de porteurs mobiles, de charge positive, également susceptibles de participer à des mécanismes de conduction.

On peut déjà pressentir que les populations de trous et d'électrons libres, et donc la résistivité d'un matériau cristallin exhibant ce schéma des bandes dépend fortement, pour une température donnée, de la valeur de  $E_g$ , sans préjuger cependant de l'importance d'autres paramètres. Il est ainsi permis, en pratique, de distinguer suivant la largeur de bande interdite les matériaux isolants ( $E_g > 3eV$ ) et les matériaux semi-conducteurs ( $E_g < 3eV$ ) quoique naturellement la frontière soit assez floue. A titre d'exemple, les largeurs de bande interdite des semi-conducteurs les plus importants pour les applications, Germanium, Silicium et Arséniure de Gallium, sont respectivement de 0,66 eV, 1,12 eV et 1,43 eV à 300 K ; les largeurs de bande interdite du Diamant (C) et de la Silice ( $SiO_2$ ), qui sont des isolants, sont respectivement de 5,47 eV et 8 eV à 300 K. Précisons que pour les métaux,

---

Figure 1.2 : Dopage d'un semi-conducteur (Si) consiste à augmenter ou à diminuer le nombre de porteurs libres.

les bandes d'énergie qui correspondent en ce cas aux bandes de valence et de conduction se recouvrent partiellement, ce qui permet aux électrons de ces bandes de participer directement aux mécanismes de conduction, sans le préalable d'un saut d'énergie  $E_g$  ; c'est à ce fait qu'on doit relier la forte conductibilité des métaux. Cette explication très sommaire de la nature et de l'origine des porteurs de charge dans un semi-conducteur ne doit pas laisser croire que les concentrations de trous et d'électrons libres dans un cristal sont égales. De nombreux facteurs, intérieurs ou extérieurs au cristal, peuvent changer considérablement les poids relatifs des deux populations. L'un de ces facteurs, des plus importants, est la présence dans le cristal, voulue ou non, de certains types d'impuretés. La compréhension des états quantiques liés à la présence d'impuretés est donc essentielle. La maîtrise de la concentration en impuretés choisies, le " dopage ", constitue l'outil principal dont dispose l'ingénieur pour les applications pratiques des semi-conducteurs.

### 1.1.1 Conductivité due aux impuretés

Certaines types d'impuretés et de défauts affectent considérablement les propriétés électriques des semi-conducteurs.

L'étude de l'influence des défauts ou des impuretés sur un solide est une tâche difficile. Tout dépend du type de défauts ou d'impuretés. En dehors de leur rôle de cibles diffusant les électrons, puisqu'elles brisent la périodicité du potentiel cristallin, les impuretés ont un rôle essentiel dans les semi-conducteurs : Dans un cristal de Silicium pur, à température ordinaire, qui contiendrait " naturellement ", c'est-à-dire thermiquement, une concentration relative de  $10^{-9}$  électrons libres par atome, la plupart des électrons libres proviendront en fait de la présence d'impuretés.

L'addition de Bore au Silicium, dans la proportion d'un atome de Bore par  $10^5$  atome de Silicium, augmente la conductivité du Silicium pur par un facteur de  $10^3$  à température ambiante. L'addition délibérée d'impuretés à un semi-conducteur est appelée dopage. Les atomes d'impuretés qui peuvent s'ioniser en fournissant un électron sont appelés donneurs ; ceux qui peuvent prendre des électrons à la bande de valence sont appelés accepteurs. Le but des différentes étapes de dopage est d'introduire des atomes d'impuretés en position substitutionnelle dans le cristal, car les impuretés en position interstitielle ne sont pas électriquement actives. Si un atome d'arsenic, par exemple, est substitué à un atome de Si, il va satisfaire les 4 liaisons électroniques avec ses voisins et présenter un électron surnuméraire, qui sera disponible pour la conduction. De façon semblable, un atome de bore substitutionnel va laisser une liaison insatisfaite. Dans ce cas, il manque un électron, ou, en d'autres termes, il y a création d'un trou, disponible pour la conduction.

La figure (1.3) représente une diode faite de deux types de semi-conducteurs obtenus par le même matériel. Le premier est appelé type P et le second type N. Un semi-conducteur contenant majoritairement des atomes donneurs d'électrons est dit " semi-conducteur de type N ", et la concentration en atomes donneurs est notée  $N_d$  (unité :  $cm^{-3}$ ). Un semi-conducteur contenant majoritairement des atomes accepteurs est dit " semi-conducteur de type P ", et la concentration en atomes accepteurs est notée  $N_a$  (unité :  $cm^{-3}$ ). Bien évidemment la concentration totale en impuretés est égale à la somme des concentrations des impuretés ionisées et non ionisées :  $N_d = N_d^+ + N_d^0$  et  $N_a = N_a^+ + N_a^0$

Les deux types N et P peuvent être fabriqués avec le même matériau en le dopant avec des impuretés donatrices pour avoir le type N et acceptrices pour avoir le type P.

Figure 1.3 : Jonction PN ; représentation symbolique de la diode.

### 1.1.2 La jonction PN

La jonction PN résulte de la juxtaposition d'un morceau de semi-conducteur de type P et d'un morceau de semi-conducteur de type N. Dans le cas où ces deux morceaux sont constitués du même matériel semi-conducteur, on parlera d'une homojonction. Dans le cas contraire, on obtient une hétérojonction. La jonction PN est un composant essentiel à la fois pour ses applications directes et parce que la compréhension de sa physique permet la compréhension du transistor à jonctions et de nombreux dispositifs.

La jonction PN simple forme ce que l'on appelle une diode. Il existe des diodes simples électroluminescentes (LED), et même des diodes laser. La combinaison de deux jonctions PN au sein d'un même dispositif permet de réaliser des transistors (transistors bipolaires ou MOS). Les transistors à effet de champ (JFET) contiennent une seule jonction PN. Les thyristors contiennent 3 jonctions PN, et les triacs en contiennent 5.

La diode à jonction PN offre la particularité de laisser passer le courant dans un seul sens. Si une tension positive est appliquée au morceau de semi-conducteur de type P, le courant passe. On dit alors que la jonction est passante ou polarisée en direct. Dans le cas inverse, le courant ne passe pas, et la diode est bloquée ou polarisée en inverse.

Considérons deux éléments semi-conducteurs en contact, l'un du type N et l'autre du type P (comme dans la figure 1.3). Du côté P de la jonction, il y a des trous libres et une concentration égale d'atomes d'impureté accepteurs ionisés (-) qui maintiennent la neutralité électrique. Du côté N il y a des électrons libres et un nombre égal d'atomes d'impureté donneurs ionisés (+). Les trous concentrés du côté P auraient tendance à diffuser pour



remplir uniformément le cristal. Il en est de même pour les électrons concentrés du côté N. Mais la diffusion supprimerait la neutralité électrique. Dès qu'un faible transport de charges a eu lieu par diffusion, il laisse du côté P un excès d'atomes accepteurs ionisés (-) et du côté N un excès d'atomes donneurs ionisés (+). Cette double couche de charge crée un champ électrique dirigé de N vers P qui empêche la diffusion et maintient la séparation des deux types de porteurs. A cause de cette double couche, le potentiel électrostatique varie brusquement dans la zone de la jonction.

Nous nous limiterons dans la suite à considérer une jonction dite abrupte. Elle est constituée d'un cristal semi-conducteur dans lequel la concentration en impuretés passe brutalement d'une concentration majoritaire de donneurs à une concentration majoritaire d'accepteurs. Bien entendu dans la réalité un tel système est impossible à réaliser et la transition entre la région N et la région P est plus ou moins graduelle, mais on peut souvent approximer un tel profil par un profil abrupt.

## 1.2 Théorie de la conductivité électrique et équations de transport

La description du comportement électrique local d'un cristal fait appel à un certain nombre de grandeurs telles que la température, les caractéristiques cristallines, les concentrations de porteurs, le potentiel électrostatique et bien d'autres encore qui toutes peuvent varier d'un point à un autre. La thermodynamique enseigne qu'à tout gradient de grandeurs de ce type ( grandeurs " intensives " dans la définition desquelles n'intervient pas la masse de cristal qu'on considère ) correspondent des flux de porteurs, c'est-à-dire des courants électriques, et un flux de chaleur. Dans tout ce qui suit cependant on admettra que peuvent être négligés les flux de chaleur et que les cristaux considérés sont isothermes. De plus, nous limiterons notre étude à des matériaux de caractéristiques cristallines homogènes et dans lesquels n'agissent que des gradients de potentiel et de concentration de porteurs. Dans ces conditions, deux mécanismes peuvent être à l'origine du déplacement des porteurs de charge, c'est-à-dire des courants : la conduction et la diffusion.

Figure 1.4 : Mouvement d'un électron : A : en l'absence de champ électrique ; B : en présence d'un champ électrique.

### 1.2.1 Dérive des électrons dans un champ électrique

L'interaction entre les électrons et les imperfections du réseau (défauts cristallins et phonons) peut être vue comme donnant lieu à une série de collisions, soumises aux lois de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, et dont la conséquence est une diffusion des électrons. La trajectoire d'un électron est donc une succession de lignes brisées. En l'absence de l'application d'une force extérieure, le déplacement moyen de l'électron est nul, car il subit une série de chocs aléatoires (cas A de la figure 1.4) s'annulant les uns les autres de façon statistique. En présence d'un champ électrique, par contre, on constate une dérive de l'électron dans la direction opposée au champ électrique (cas B de la figure 1.4). Pour obtenir l'expression de la densité de courant résultant de cette dérive, il convient de calculer la vitesse moyenne de dérive pour l'ensemble des électrons soumis à l'influence du champ électrique. L'analogie entre le mouvement des électrons dans le cristal avec celui des molécules d'un gaz ou d'un liquide permet d'introduire les deux hypothèses suivantes

- Chaque électron de la bande de conduction se propage librement dans le cristal pendant un temps moyen  $\tau_n$  avant de subir une collision. Ce temps, appelé " temps de relaxation " est de l'ordre de  $10^{-13}s$  à  $T = 300$  K, ce qui donne lieu à un libre

parcours moyen de l'ordre de 10 nm.

. La direction de l'électron après un choc est aléatoire. Les collisions sont donc isotropes.

Parmi l'ensemble des électrons de la bande de conduction, il y a  $n(t_0)$  électrons particuliers qui, à l'instant  $t_0$ , subissent une collision. Suivons l'évolution de ces électrons. A l'instant  $t > t_0$ , certains de ces électrons auront déjà subi de nouvelles collisions. Donc, à l'instant  $t$ , il n'y a plus que  $n(t)$  électrons dont la dernière collision remonte à l'instant  $t_0$ . Ce nombre  $n(t)$  diminue entre  $t$  et  $t + dt$  d'une quantité négative  $dn$  selon la loi suivante

$$dn = \frac{-1}{\tau_n} n(t) dt \quad (1.2.1)$$

où  $\tau_n$  est une constante de temps qui vaut le temps moyen entre deux collisions. En intégrant de  $t_0$  à  $t$ , on obtient la loi d'évolution de  $n(t)$

$$n(t) = n(t_0) \exp \left[ \frac{-(t - t_0)}{\tau_n} \right] \quad (1.2.2)$$

Etudions maintenant l'influence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  considéré comme constant par rapport au temps. L'équation du mouvement d'un électron quasi-libre de masse effective  $m_e^*$  est donnée par

$$m_e^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -q\mathbf{E} \quad (1.2.3)$$

En supposant que la masse effective de l'électron est isotrope, la vitesse au temps  $t$  d'un électron, n'ayant plus subi de collision depuis l'instant  $t_0$ , est donnée par

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) - \frac{1}{m_e^*} q\mathbf{E}(t - t_0) \quad (1.2.4)$$

Cette relation est valable pour les  $-dn$  ( $dn < 0$ ) électrons de la relation (1.2.1) qui subissent une collision entre  $t$  et  $t + dt$ , mais qui se sont propagés librement (sans collision) de  $t_0$  à  $t$ . Par intégration, on obtient, pour l'ensemble  $n(t_0)$ , la vitesse moyenne, c'est-à-dire la vitesse de dérive résultant du champ électrique appliqué

$$\mathbf{v}_{d,n} = \frac{1}{n(t_0)} \int_{n(t_0)}^0 \frac{-1}{m_e^*} q\mathbf{E}(t - t_0) (-dn) \quad (1.2.5)$$

puisque la valeur moyenne de  $\mathbf{v}(t_0)$  est nulle, d'après l'hypothèse initiale d'isotropie des collisions.

## 1.2.2 Mobilité

La mobilité est, par définition, la mesure de la vitesse d'entraînement par unité de champ électrique ; elle est positive, par définition, aussi bien pour les électrons que pour les trous, bien que leurs vitesses de déplacement soient opposées.

En utilisant (1.2.1) et (1.2.2), on peut convertir (1.2.5) en une intégrale sur le temps, ce qui donne

$$\mathbf{v}_{d,n} = -\frac{q}{m_e^*} \mathbf{E} \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} (t - t_0) e^{-(t-t_0)/\tau_n} dt \quad (1.2.6)$$

et comme

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} (t - t_0) e^{-(t-t_0)/\tau_n} dt = \tau_n \int_0^{\infty} \frac{t - t_0}{\tau_n} e^{-(t-t_0)/\tau_n} d\left(\frac{t - t_0}{\tau_n}\right) = \tau_n \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \tau_n$$

on obtient finalement

$$\mathbf{v}_{d,n} = -\frac{q\tau_n}{m_e^*} \mathbf{E} \equiv -\mu_n \mathbf{E} \quad (1.2.7)$$

où  $\mu_n$  est la **mobilité** des électrons dans la bande de conduction. L'unité de mobilité (vitesse divisée par un champ électrique) est le  $cm^2/volt.sec$ . La relation (1.2.7) permet de définir la mobilité comme

$$\mu_n = \frac{q\tau_n}{m_e^*} \quad (1.2.8)$$

La mobilité est donc proportionnelle au temps moyen de libre parcours des électrons et inversement proportionnelle à la masse effective de ces derniers dans la bande de conduction. Comme elle est proportionnelle au temps moyen de libre parcours, elle décroît en fonction de la température, de la concentration en défauts cristallins, et de la concentration en impuretés dopantes.

De façon similaire, on peut étudier le mouvement des trous libres de la bande de valence. On trouve alors

$$\mathbf{v}_{d,p} = \frac{q\tau_p}{m_h^*} \mathbf{E} \equiv \mu_p \mathbf{E} \quad (1.2.9)$$

où  $\mu_p$  est la mobilité des trous dans la bande de valence. On a donc

$$\mu_p = \frac{q\tau_p}{m_h^*} \quad (1.2.10)$$

La mobilité varie en fonction des interactions entre les électrons et les phonons et les impuretés. Une analyse plus fouillée permettrait de montrer que la mobilité dans le réseau cristallin varie de la façon suivante en fonction de la température

$$\mu_r = T^{-3/2} \quad (1.2.11)$$

et en fonction de la concentration en impuretés ionisées, de concentration  $N$

$$\mu_i = \frac{T^{3/2}}{N} \quad (1.2.12)$$

Pour le cas général, si l'on considère les influences cumulées du réseau et des impuretés, on a

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_r} + \frac{1}{\mu_i} \quad (1.2.13)$$

### 1.2.3 Courant de dérive

La densité de courant de dérive des électrons dans la bande de conduction, et dont la concentration vaut  $n$ , est donnée par  $\mathbf{J}_n = -qn\mathbf{v}_{d,n}$  ou encore, via (1.2.7)

$$\mathbf{J}_n = -qn\mathbf{v}_{d,n} = q\mu_n n\mathbf{E} \quad (1.2.14)$$

De façon similaire, la densité de courant de dérive des trous dans la bande de valence, et dont la concentration vaut  $p$ , est donnée par  $\mathbf{J}_p = qp\mathbf{v}_{d,p}$  ou encore, via (1.2.9)

$$\mathbf{J}_p = qp\mathbf{v}_{d,p} = q\mu_p p\mathbf{E} \quad (1.2.15)$$

La conductivité et la résistivité d'un semi-conducteur dopé de façon homogène sont donc données par

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) \text{ et } \rho = \frac{1}{\sigma} \quad (1.2.16)$$

On s'aperçoit que l'on peut faire varier de 6 ordres de grandeur la résistivité des semi-conducteurs par la simple adjonction d'impuretés (d'où le nom de semi-conducteurs). Ces résistivités varient de  $10^{-3}$  à  $10^4 \Omega.cm$ . A titre de comparaison, la résistivité des métaux est de l'ordre de  $10^{-6} \Omega.cm$ , et celle des isolants est de l'ordre de  $10^8 \Omega.cm$ .

### 1.2.4 Courant de diffusion

Considérons un morceau de semi-conducteur dans lequel, pour une raison quelconque, il existe un gradient de la concentration en électrons. Par analogie avec la diffusion dans les gaz ou les liquides, on admet aisément que les électrons vont diffuser depuis la région où leur concentration est la plus grande vers la région où leur concentration est la plus faible. Le flux d'électrons  $\mathbf{F}_n$  engendré par ce phénomène de diffusion est proportionnel au gradient de concentration en électrons. Ce flux, multiplié par la charge  $-q$ , donne la **densité de courant de diffusion** des électrons

$$\mathbf{F}_n = -D_n \nabla n \implies \mathbf{J}_n = -q\mathbf{F}_n = qD_n \nabla n \quad (1.2.17)$$

De façon similaire, dans la cas d'un gradient de concentration de trous, on obtient la densité de courant de diffusion des trous, qui portent chacun une charge  $+q$

$$\mathbf{F}_p = -D_p \nabla p \implies \mathbf{J}_p = +q\mathbf{F}_p = -qD_p \nabla p \quad (1.2.18)$$

Les coefficients  $D_n$  et  $D_p$  sont appelés **coefficients de diffusion** des électrons et des trous et représentent la " fluidité " avec laquelle les porteurs peuvent diffuser dans la cristal.

### 1.2.5 Equations de dérive-diffusion

On peut à présent établir les **équations de dérive-diffusion**, qui s'obtiennent en écrivant la somme du courant de dérive des trous (1.2.15) et du courant de diffusion des trous (1.2.18), ainsi que la somme du courant de dérive des électrons (1.2.14) et du courant de diffusion des électrons (1.2.17)

$$\mathbf{J}_p = q\mu_p p \mathbf{E} - qD_p \nabla p \quad (1.2.19)$$

et

$$\mathbf{J}_n = q\mu_n n \mathbf{E} + qD_n \nabla n \quad (1.2.20)$$

La densité de courant totale circulant dans le semi-conducteur est, bien évidemment, donnée par la somme des deux expressions précédentes

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_p \quad (1.2.21)$$

## Relations d'Einstein

Considérons à présent un morceau de semi-conducteur dopé de façon inhomogène (cas unidimensionnel, pour simplifier). La concentration en atomes donneurs est égale à  $N_d(x)$ . La présence d'un gradient de concentration d'électrons va engendrer un courant de diffusion d'électrons, puisque les électrons diffusent vers la zone de plus faible dopage. Ces électrons laissent toutefois " derrière eux " les impuretés ionisées dont ils sont issus. Il se crée donc une charge positive là où se trouvent ces impuretés ionisées. Rappelons que ces impuretés occupent des positions fixes dans le réseau cristallin, et sont donc immobiles. La séparation entre les électrons et leur site " d'origine " donne donc naissance à un champ électrique  $\mathbf{E}_0(x) = -d\phi_0(x)/dx$  " de rappel " qui tend à faire revenir les électrons vers leurs positions initiales ( $\phi_0(x)$  : **potentiel interne**).

À l'équilibre thermodynamique, et en l'absence de champ électrique extérieur appliqué à la structure, le courant d'électrons dans le semi-conducteur est nul

$$\mathbf{J}_n = q\mu_n n \mathbf{E}_0 + qD_n \frac{dn}{dx} = 0 \quad (1.2.22)$$

Puisque la concentration en électrons est donnée par :  $n(x) = n_0 \exp\left[\frac{q\phi_0(x)}{kT}\right]$  où  $n_0$  est la concentration en électrons dans la région de référence,  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température ambiante. De plus comme  $\mathbf{E}_0 = -d\phi_0/dx$ , on obtient

$$\begin{aligned} q\mu_n n \frac{d\phi_0}{dx} &= qD_n \frac{dn}{dx} \\ \Downarrow \\ q\mu_n n_0 \exp\left[\frac{q\phi_0(x)}{kT}\right] \frac{d\phi_0}{dx} &= qD_n \frac{dn}{d\phi_0} \frac{d\phi_0}{dx} = qD_n \frac{q}{kT} n_0 \exp\left[\frac{q\phi_0(x)}{kT}\right] \frac{d\phi_0}{dx} \\ \Downarrow \\ D_n &= \frac{kT}{q} \mu_n \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

De façon similaire, on obtient pour les trous

$$D_p = \frac{kT}{q} \mu_p \quad (1.2.24)$$

Les relations (1.2.23) et (1.2.24) sont appelées " **relations d'Einstein** " et elles relient les mobilités aux coefficients de diffusion. La quantité  $u_T = kT/q$  a la dimension d'une tension et est appelée " **tension thermique** ". Elle vaut 25,6 mV à  $T = 300$  K.

## 1.2.6 Equations de transport

Nous retiendrons ici les expressions de  $\mathbf{J}_n$  et  $\mathbf{J}_p$  données par la statistique de Boltzmann. Néanmoins il est important de savoir qu'il existe des modèles plus complexes, notamment ceux fournis par la statistique de Fermi.

En utilisant la statistique de Boltzmann, on montre que les densités de courant d'électrons et de trous sont données par les **équations de dérive-diffusion**

$$\mathbf{J}_p = q\mu_p p \mathbf{E} - qD_p \nabla p \quad (1.2.25)$$

et

$$\mathbf{J}_n = q\mu_n n \mathbf{E} + qD_n \nabla n \quad (1.2.26)$$

Le déplacement des porteurs libres peut entraîner la création d'une charge d'espace locale, qui est liée au potentiel interne dans le semi-conducteur par l'**équation de Poisson**

$$\Delta\phi(x, y, z) = \nabla \cdot (\nabla\phi(x, y, z)) = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_s} = -\frac{q}{\varepsilon_s} (p - n + N_d^+ - N_a^-)$$

où  $\varepsilon_s$  est la permittivité du semi-conducteur, et  $\rho$  est la densité locale de charge d'espace. Si tous les atomes donneurs et accepteurs sont ionisés, ce qui est le cas à température ambiante, on a donc  $N_a^- = N_a$  et  $N_d^+ = N_d$ . La relation précédente peut donc s'écrire

$$\Delta\phi(x, y, z) = -\frac{q}{\varepsilon_s} (p - n + N_d - N_a) \quad (1.2.27)$$

Si l'on tient compte du **courant de déplacement** provenant d'une variation en fonction du temps des forces extérieures appliquées, on peut également écrire

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_p + \varepsilon_s \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2.28)$$

Il reste à trouver les équations qui décrivent l'évolution de la concentration des porteurs libres, et qui sont appelées "équations de continuité" pour les électrons et les trous. En effet, la concentration locale d'un type de porteurs peut varier en fonction du temps pour trois raisons

- Les forces extérieures appliquées peuvent entraîner une divergence des densités de porteurs et, par conséquent, une modification locale de la concentration en porteurs.



- La largeur de la bande interdite d'un semi-conducteur est suffisamment faible pour permettre la transition directe d'électrons et de trous entre les bandes de conduction et de valence, ou entre ces bandes et des niveaux électroniques, créés par des défauts ou des impuretés, situés à l'intérieur de la bande interdite. Ces transitions, dénommées phénomènes de génération et de recombinaison, ne seront pas étudiés ici. Notons cependant  $U_n$  et  $U_p$  les taux nets de diminution de la concentration locale en électrons et en trous en fonction du temps, résultant de ces phénomènes de génération et de recombinaison.
- Une source extérieure de génération de porteurs peut provoquer une augmentation de la concentration locale en électrons ou en trous, et ce d'après un taux  $G_n$  de génération d'électrons et un taux  $G_p$  de génération de trous. Un exemple de génération de porteurs par une source externe est la création de paires électrons-trous dans une cellule solaire sous l'influence de la lumière.

Afin d'établir l'équation de continuité des électrons basées sur les considérations précédentes, isolons une tranche de semi-conducteur de longueur  $dx$ , de section  $A$  et parcourue par une densité de courant  $\mathbf{J}_n(x)$ .

La variation du nombre d'électrons dans l'élément de volume  $A dx$  est donnée par le nombre d'électrons entrant, moins le nombre d'électrons sortant, moins le nombre d'électrons se recombinant, plus le nombre d'électrons générés, ou encore

$$A \frac{\partial n}{\partial t} dx = A \left( \frac{\mathbf{J}_n(x)}{-q} - \frac{\mathbf{J}_n(x+dx)}{-q} \right) + A(G_n - U_n)dx \quad (1.2.29)$$

On peut développer  $\mathbf{J}_n(x+dx)$  en série, ce qui donne  $\mathbf{J}_n(x+dx) = \mathbf{J}_n(x) + \frac{\partial \mathbf{J}_n(x)}{\partial x} dx + \dots$

On obtient ainsi l'équation de continuité des électrons

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial \mathbf{J}_n(x)}{\partial x} + (G_n - U_n) \quad (1.2.30)$$

De façon similaire, on obtient pour les trous

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial \mathbf{J}_p(x)}{\partial x} + (G_p - U_p) \quad (1.2.31)$$

En introduisant une quantité  $R_n = U_n - G_n$  (resp.  $R_p = U_p - G_p$ ) appelée taux de génération-recombinaison d'électrons (resp. de trous) et en élargissant les équations (1.2.30)-(1.2.31) au cas tridimensionnel, on obtient finalement les **équations de continuité** pour

Figure 1.5 : Continuité du nombre d'électrons dans un élément  $dx$  de semi-conducteur.

les électrons et les trous

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J}_n - R_n \quad (1.2.32)$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J}_p - R_p \quad (1.2.33)$$

L'ensemble des équations précédentes (dérive-diffusion, Poisson, courant de déplacement et continuité) permettent d'étudier tous les phénomènes se produisant dans les semi-conducteurs et de calculer les propriétés des dispositifs fabriqués à l'aide de ces matériaux (diodes, cellules solaires, transistors,...).

A la surface du cristal semi-conducteur, l'interruption de la périodicité cristalline, la présence de contaminants ou d'un contact métallique, etc., engendrent un taux de recombinaison surfacique différent de  $U$ . Ce taux de recombinaison surfacique est noté par le symbole  $S$ .

En utilisant un raisonnement semblable à celui suivi dans les expressions (1.2.29) à (1.2.33), on obtient les équations suivantes

$$A \frac{\partial n(x_0)}{\partial t} = A \frac{J_n(x_0)}{-q} - AS_n \longrightarrow \frac{\partial n(x_0)}{\partial t} = \frac{J_n(x_0)}{-q} - S_n \quad (1.2.34)$$

pour les électrons, et

$$A \frac{\partial p(x_0)}{\partial t} = A \frac{J_p(x_0)}{q} - AS_p \longrightarrow \frac{\partial p(x_0)}{\partial t} = \frac{J_p(x_0)}{q} - S_p \quad (1.2.35)$$

pour les trous.

Figure 1.6 : Continuité du nombre d'électrons au voisinage d'un interface.

### Remarque

Un semi-conducteur est dit “ intrinsèque ” lorsqu'il est à l'état pur. Dans ce cas, à tout électron se trouvant dans la bande de conduction correspond un trou dans la bande de valence. Dans ce cas, on a que

$$p = n = n_i$$

et

$$E_F = E_i = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \left( \frac{m_h^*}{m_e^*} \right)$$

Ou encore, si  $m_e^* = m_h^*$  (approximation couramment utilisée)

$$E_i = \frac{E_C + E_V}{2}$$

Cette relation montre que le niveau de Fermi se trouve au milieu de la bande interdite  $n_i$  représente la concentration intrinsèque en porteurs dans le semi-conducteur, et n'est fonction que de la température et de la nature du matériau semi-conducteur.

### 1.2.7 Quasi-Niveaux de Fermi

A l'équilibre thermodynamique, et en l'absence de forces extérieures appliquées, les concentrations d'équilibre en porteurs dans un semi-conducteur sont directement liées au

potentiel interne d'équilibre par les relations suivantes, appelées **relations de Boltzmann**

$$n(x, y, z) = n_i \exp \left[ \frac{q(-E_F + E_{i0})}{kT} \right] \exp \left[ \frac{q\phi_0(x, y, z)}{kT} \right] \quad (1.2.36)$$

$$p(x, y, z) = n_i \exp \left[ \frac{q(E_F - E_{i0})}{kT} \right] \exp \left[ \frac{-q\phi_0(x, y, z)}{kT} \right] \quad (1.2.37)$$

et

$$p(x, y, z).n(x, y, z) = n_i^2(T) \quad (1.2.38)$$

Toujours à l'équilibre thermodynamique, le niveau de Fermi  $E_F$  est constant et est le même pour les électrons et les trous.  $E_{i0}$  est par définition la valeur de  $E_i$  au point particulier où  $\phi_0 = 0$ . L'unique équation à résoudre est celle de Poisson (1.2.27), qui donne la répartition du potentiel interne en fonction des conditions aux limites.

Par contre, dans le cas général, il n'existe plus de relation simple entre le potentiel interne  $\phi(x, y, z, t)$  et les concentrations de porteurs  $n(x, y, z, t)$  et  $p(x, y, z, t)$ . On peut cependant maintenir formellement les relations de Boltzmann par l'introduction de quasi-niveaux de Fermi (*imref*, en anglais, ce qui signifie " *imaginary reference* " et a la particularité de n'être rien d'autre que le mot *fermi*, écrit à l'envers). Il y a un quasi-niveau de Fermi pour les électrons,  $E_{Fn}(x, y, z, t)$  et un pour les trous,  $E_{Fp}(x, y, z, t)$ . On peut donc écrire

$$n(x, y, z, t) = n_i \exp \left[ \frac{q(-E_{Fn}(x, y, z, t) + E_{i0})}{kT} \right] \exp \left[ \frac{q\phi(x, y, z, t)}{kT} \right] \quad (1.2.39)$$

$$p(x, y, z, t) = n_i \exp \left[ \frac{q(E_{Fp}(x, y, z, t) - E_{i0})}{kT} \right] \exp \left[ \frac{-q\phi(x, y, z, t)}{kT} \right] \quad (1.2.40)$$

et

$$p(x, y, z, t).n(x, y, z, t) = n_i^2(T) \exp \left[ \frac{q(-E_{Fn}(x, y, z, t) + E_{Fp}(x, y, z, t))}{kT} \right] \quad (1.2.41)$$

L'interprétation physique de l'introduction des quasi-niveaux de Fermi est la suivante. La densité de courant d'électrons s'écrit (1.2.26)

$$\mathbf{J}_n = q\mu_n n \mathbf{E} + qD_n \nabla n \quad (1.2.42)$$

Par l'équation (1.2.39), on a que

$$\begin{aligned}\nabla n &= n_i \exp \left[ \frac{q(-E_{Fn} + E_{i0})}{kT} \right] \exp \left[ \frac{q\phi}{kT} \right] \frac{q}{kT} (-\nabla E_{Fn} + \nabla \phi) \\ &= \frac{nq}{kT} (-\nabla E_{Fn} + \nabla \phi)\end{aligned}\quad (1.2.43)$$

En introduisant (1.2.43) dans (1.2.42), on trouve

$$\mathbf{J}_n = q\mu_n n \mathbf{E} + qD_n \frac{nq}{kT} (-\nabla E_{Fn} + \nabla \phi) \quad (1.2.44)$$

ou, en utilisant  $D_n = \frac{kT}{q} \mu_n$

$$\mathbf{J}_n = -nq\mu_n \nabla E_{Fn} \quad (1.2.45)$$

De même, pour les trous, on trouve que

$$\mathbf{J}_p = -pq\mu_p \nabla E_{Fp} \quad (1.2.46)$$

Ces deux relations montrent que, dans le cas général, **le courant n'est pas lié au gradient du potentiel interne  $\phi_0$ , mais au gradient des quasi-niveaux de Fermi**. On retrouve toutefois que, dans le cas de l'équilibre thermodynamique, et en l'absence de forces externes appliquées,  $E_{Fn} = E_{Fp} = E_F = \text{constante}$ , et donc que  $J_n = J_p = 0$ , et  $n.p = n_i^2$ .

## 1.2.8 Phénomènes de génération et de recombinaison

On a vu qu'à toute température différente de 0 K, il existe une certaine quantité d'électrons dans la bande de conduction et un certain nombre de trous dans la bande de valence. Dans ces conditions, un électron libre peut perdre de l'énergie (il cesse alors d'être un électron libre de circuler dans le cristal) et venir occuper une place vacante (occupée par un trou) dans la bande de valence. On parle alors d'un **phénomène de recombinaison**.

De même, un électron peut se détacher d'un atome (si une énergie suffisante lui est fournie) et passer de la bande de valence à la bande de conduction, où il devient un électron libre. Ce faisant, il donne naissance à un trou libre dans la bande de valence. On parle alors d'un **phénomène de génération** (d'une paire électron-trou).

A l'équilibre thermodynamique, la génération et la recombinaison se compensent, et les concentrations d'équilibre en électrons et en trous restent constantes. On peut, cependant, par une influence extérieure telle que l'illumination par de la lumière, accentuer le

phénomène de génération, et atteindre des situations hors équilibre.

Les phénomènes physiques qui se produisent lors d'un événement de recombinaison peuvent être très différents

- . La recombinaison radiative (l'énergie libérée par la recombinaison est émise sous la forme d'un photon).
- . La recombinaison Auger (l'énergie libérée par la recombinaison sert à exciter un autre électron (ou un trou) libre vers une énergie supérieure). On définit le taux de génération-recombinaison d'**Auger** par

$$R_{AU} = (C_n^{AU} + C_p^{AU})(np - n_i^2)$$

où  $C_n^{AU}$ ,  $C_p^{AU}$  sont des coefficients évalués par expérimentation et  $n_i$  la concentration intrinsèque du semi-conducteur [15].

- . L'énergie libérée par la recombinaison est émise sous la forme d'un photon (échauffement du cristal).

Parallèlement aux phénomènes de recombinaison directe (bande à bande), un électron libre peut se recombiner avec un trou libre par l'intermédiaire de "centres de recombinaison" se trouvant dans la bande interdite. Ces centres agissent comme une sorte de catalyseur en favorisant la mise en présence d'électrons et de trous. Ce type de recombinaison est beaucoup plus probable que la recombinaison directe dans les semi-conducteurs à bande interdite indirecte (Si, Ge, ...). Le calcul du taux de recombinaison associé à ces centres fait l'objet de la théorie de **Shockley-Read-Hall**.

$$R_{SRH} = \frac{np - n_i^2}{\tau_p(n + n_i) + \tau_n(p + n_i)}$$

où  $\tau_n$  et  $\tau_p$  sont respectivement les durées de vie des électrons et de trous.

### Génération par champ électrique intense

Dans un matériau semi-conducteur soumis à un champ électrique supérieur à environ  $10^5 V.cm^{-1}$ , les porteurs libres sont tellement accélérés qu'ils peuvent se comporter comme des radiations ionisantes et créer des paires électron-trou.

Les porteurs créés sont à leur tour accélérés et vont engendrer d'autres paires : c'est le

phénomène d'**avalanche**. On caractérise l'efficacité de cette création par un **coefficient d'ionisation**  $\alpha$  ( $cm^{-1}$ ).

$$R_I = -\alpha_n \frac{|J_n|}{q} - \alpha_p \frac{|J_p|}{q}$$

Une expression pour  $\alpha_n, \alpha_p$  est de la forme [24, 34, 37]

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} a \exp\left(-\frac{b}{|\xi|}\right) & \text{si } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0, \\ 0 & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives.

On peut également introduire à sa guise toute une gamme de modèles pour  $R$  permettant d'introduire d'autres phénomènes que ceux décrits ci-dessus (phénomènes optiques ou de surface) [14, 37]. Et suivant les dispositifs qu'on considère, on peut négliger certains termes qui apparaissent dans la formule  $R = R_{SRH} + R_{AU} - R_I$  définissant le taux de génération-recombinaison.





## Chapitre 2

# Notions sur les équations de base des semi-conducteurs

Nous décrivons brièvement dans ce chapitre les résultats essentiels d'existence, d'estimations a priori, de régularité, d'unicité et de non unicité sous diverses conditions pour les équations de base des semi-conducteurs à l'état stationnaire. La plus grande partie a été démontrée et publiée pour l'essentiel dans les travaux cités dans la bibliographie.

Précisons tout d'abord les notations que nous utiliserons par la suite.

### 2.1 Notations et définitions

$\Omega$  : ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$

$\partial\Omega$  : frontière de  $\Omega$

$\nu$  : normale extérieure à  $\partial\Omega$

$\Gamma$  : courbe (n=2) ou surface (n=3)

$\alpha$  : multi-indice,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{N}$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $\alpha$  étant un multi-indice

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$[f]_\Gamma$  : saut de  $f$  à travers  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  étant une courbe (ou surface) séparant  $\Omega$  en deux ouverts  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ , i.e.  $\Omega = \Omega_+ \cup \Gamma \cup \Omega_-$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  : produit scalaire dans la dualité

$q$  = exposant conjugué de  $p$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

### 2.1.1 Espaces fonctionnels

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\partial\Omega$ .

$L^p(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega, \int_\Omega |u|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty\}$

L'espace  $L^p(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{0,p} = \left( \int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}$$

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega, \exists C / |u(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}$ .

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{0,\infty} = \sup_{\text{ess}} |u(x)|$$

$\mathcal{C}(\Omega)$  est l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$ .

$\mathcal{C}_c(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions continues à support compact dans  $\Omega$ .

$\mathcal{C}^k(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$ , ( $k$  entier  $\geq 0$ )

On pose  $\mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$  et  $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\Omega)$ .

$\mathcal{C}_B^k(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  telle que  $D^\alpha u, \forall \alpha, |\alpha| \leq k$  est bornée sur  $\Omega$ .

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions  $u \in \mathcal{C}_B^k(\Omega)$  telle que pour chaque multi-indice  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq k$ )  $D^\alpha u$  est uniformément continue sur  $\Omega$ .

Nous rappelons la définition des espaces de Sobolev utiles pour la suite de l'étude.

Soient  $k$  un entier et soit  $p$  un réel avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . On définit

$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\gamma f \in L^p(\Omega), \forall \gamma, |\gamma| \leq k\}$

On munit cet espace de la norme suivante

$$\|f\|_{k,p} = \sum_{0 \leq |\gamma| \leq k} \|D^\gamma f\|_{0,p}$$

L'espace  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$  est muni de la norme  $\| \cdot \|_{k,2}$

La semi-norme sur  $H^1(\Omega)$  sera notée par

$$| u |_{1,2} = \left( \int_{\Omega} | \nabla u |^2 dx \right)^{1/2}$$

## 2.2 Analyse mathématique des équations de dérive-diffusion

Considérons un semi-conducteur dopé de façon homogène, soumis à une génération en volume continue  $G$  de paires électrons-trous par transition directe de la bande de valence vers la bande de conduction :  $G = G_n = G_p$ .

Supposons que la recombinaison s'effectue par une transition directe de la bande de conduction vers la bande de valence :  $U = U_n = U_p$ .

Si l'on récapitule la forme habituelle des équations utilisées pour décrire le comportement électrique des dispositifs à semi-conducteurs, on obtient, pour des matériaux uniformes et isotropes, à température constante, le système d'équations suivant introduit par **Van-Roosbroeck** [38]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s \Delta \phi = q(n - p - C) \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_n - q \frac{\partial n}{\partial t} = qR \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_p + q \frac{\partial p}{\partial t} = -qR \\ \mathbf{J}_n = q(D_n \nabla n - \mu_n n \nabla \phi) \\ \mathbf{J}_p = -q(D_p \nabla p + \mu_p p \nabla \phi) \end{array} \right. \quad x \in \Omega \quad (2.2.1)$$

où  $C = N_d - N_a$  et  $R = U_n - G_n = U_p - G_p$

On rappelle que  $D_n = \frac{kT}{q} \mu_n$  et  $D_p = \frac{kT}{q} \mu_p$ . Ces relations appelées "**relation d'Einstein**" relie les mobilités aux coefficients de diffusion. La quantité  $u_T = kT/q$  a la dimension d'une tension est appelée "**tension thermique**".

Rappelons l'interprétation des équations (2.2.1)

- . La première exprime les phénomènes électrostatiques présents dans le dispositif (équation de Poisson).
- . La seconde est l'équation de continuité des électrons.

- . La troisième est l'équation de continuité des trous.
- . La quatrième exprime la densité de courant d'électrons.
- . La cinquième, enfin, exprime la densité de courant de trous.

### Remarques

- . Le système (2.2.1) est le système des équations de base décrivant le comportement électrique dans un semi-conducteur.
- . Pour les transistors MOS, la seule équation à résoudre dans la zone oxyde est l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ n = p = 0 \end{cases} \quad x \in \Omega_{ox} \quad (2.2.2)$$

- . Le système est assujéti à des conditions aux limites sur le bord du dispositif et à des conditions de transmission aux interfaces oxyde semi-conducteur que nous expliciterons par la suite.
- . Le modèle (2.2.1) peut être simplifié suivant les dispositifs à étudier. Comme exemple, nous allons voir dans le Chapitre 3 l'étude d'un semi-conducteur unipolaire où un seul type de porteurs intervient dans le transport de charges.
- . Il existe d'autres modèles qui généralisent le modèle dérive-diffusion. Le plus proche est le modèle **hydrodynamique** qui consiste à rajouter pour les électrons (et/ou les trous, mais souvent seulement pour les porteurs majoritaires) une équation d'énergie, ce qui se traduit par l'introduction d'une variable supplémentaire, la température de charge, différente de la température du réseau.
- . Le modèle **cinétique** est l'approche la plus rigoureuse, son utilisation est devenue de plus en plus demandée par les industriels. Ceci est dû à la nouvelle génération des dispositifs électroniques, les circuits intégrés à très grande échelle (VLSI). Ce modèle est basé sur la résolution directe de l'équation de Boltzmann pour chaque type de charge (électrons et trous)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla_x f - \frac{q}{m} E \cdot \nabla_u f = S \quad (2.2.3)$$

où  $f = f(x, u, t)$  est la fonction de distribution,  $u$  est la vitesse de groupe,  $E$  est le champ électrique (indépendant de  $u$ ),  $m$  la masse effective de charge et  $S$  le terme de collision.

### Conditions aux limites

Nous allons décrire l'ensemble des conditions aux limites qui sont usuellement associées au système d'équations décrivant le comportement électrique des semi-conducteurs. Elles sont de quatre sortes

- **Contacts ohmiques** : Tout dispositif à jonctions doit être raccordé à un circuit extérieur. Il y a donc nécessité de mettre en place des contacts électriques sur différentes régions semi-conductrices. Ces contacts, généralement métalliques, sont des hétérojonctions et font apparaître eux aussi des zones de charge d'espace.

Mathématiquement, le caractère "ohmique" d'un contact s'exprime par deux relations. Tout d'abord  $np = n_i^2$  au contact puisque les concentrations de porteurs sont pratiquement celles de l'équilibre thermodynamique. En outre, on suppose qu'il y a neutralité électrique  $n - p - C = 0$ .

On en déduit les relations suivantes, quelle que soit la tension appliquée

$$n = \frac{C + (C^2 + 4n_i^2)^{1/2}}{2}$$

$$p = \frac{-C + (C^2 + 4n_i^2)^{1/2}}{2}$$

On suppose que le contact est soumis à un potentiel  $u_A(t)$  uniforme en espace, appelé potentiel appliqué. Le potentiel  $\phi$  sur ce contact, est la somme de  $u_A(t)$  et du potentiel propre dû au dopage dans l'environnement de ce contact

$$\phi = u_A + \phi_i.$$

où  $\phi_i$  est appelé potentiel intrinsèque du semi-conducteur. Il est pris de manière à ce que, lorsqu'aucun potentiel n'est appliqué ( $u_A = 0$ ), la structure soit en équilibre thermodynamique et donc qu'aucun courant ne traverse. Dans la statistique de Boltzmann, le potentiel intrinsèque est exprimé sous cette forme

$$\phi_i = u_T \log \left( \frac{C + (C^2 + 4n_i^2)^{1/2}}{2n_i} \right)$$

Les conditions aux limites aux contacts ohmiques sont donc des conditions de Dirichlet non homogènes sur  $\phi$ ,  $n$  et  $p$ .

- . **Contacts MOS** : Ils se situent au niveau de l'oxyde. Une tension externe  $U_M$  est appliquée au contact, soit  $\phi = U_M$ .
- . **Bords isolants** : Ils matérialisent les contacts entre le semi-conducteur et l'isolant. Cela se traduit par une condition de Neumann homogène :  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \mathbf{J}_n \cdot \nu = \mathbf{J}_p \cdot \nu = 0$  et donc aussi  $\frac{\partial n}{\partial \nu} = \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0$ . Où  $\nu$  est la normale unitaire extérieure au bord isolant.
- . **Contacts de Schottky** : Les contacts métal-semi-conducteur ont été les premiers parmi les dispositifs à l'état solide à être effectivement utilisés dans des applications de redressement. Pendant longtemps supplantés par les dispositifs à homojonction, les contacts redresseurs dits communément contacts Schottky bénéficient actuellement d'un regain d'intérêt, les progrès de la technologie permettant de mieux exploiter leurs possibilités. La théorie de ces contacts est encore en évolution. On a les relations suivantes

$$\begin{cases} \phi = \phi_{bi} - \phi_S + u_S(t) \\ \frac{\partial \mathbf{J}_n}{\partial \nu} = -qv_n \left( n - \frac{C + (C^2 + 4n_i^2)^{1/2}}{2} e^{-\phi_S} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{J}_p}{\partial \nu} = qv_p \left( p - \frac{-C + (C^2 + 4n_i^2)^{1/2}}{2} e^{\phi_S} \right) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

où  $u_S(t)$  désigne le potentiel appliqué au contact,  $\phi_S$  la hauteur de barrière métal-semi-conducteur,  $v_n$  et  $v_p$  sont respectivement les vitesses de recombinaison thermique des électrons et des trous, au contact.

## Régimes de fonctionnement

Dans cette partie nous allons expliciter pour chaque régime de fonctionnement le système d'équations décrivant le comportement électrique dans un semi-conducteur.

- . **Régime d'équilibre** : On dit qu'un dispositif est à l'équilibre thermodynamique lorsque les potentiels appliqués aux différents contacts sont nuls. Cet état correspond à des densités de courant de porteurs nulles  $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_p = 0$ . Le système d'équations

(2.2.1) se réduit à la seule équation de Poisson non linéaire

$$\varepsilon_s \Delta \phi = q(n - p - C)$$

où  $p$  et  $n$  sont des fonctions de la variable  $\phi$  dépendant de la statistique utilisée (Maxwell-Boltzmann, ou Fermi-Dirac). Dans le cas de la statistique de Boltzmann  $n = n_i e^{\phi/u_T}$  et  $p = n_i e^{-\phi/u_T}$ , donc l'équation de Poisson devient

$$\varepsilon_s \Delta \phi = q \left( n_i e^{\phi/u_T} - n_i e^{-\phi/u_T} - C \right)$$

- **Régime statique (ou stationnaire)** : Ce régime est obtenu en supposant qu'il n'y a pas de variation des densités de porteurs au cours du temps. On a alors

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

On considère désormais pour toute la suite de cette thèse le problème stationnaire correspondant au système total (2.2.1)-(2.2.2), soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s \Delta \phi = q(n - p - C) \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_n = qR \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_p = -qR \\ \mathbf{J}_n = q(D_n \nabla n - \mu_n n \nabla \phi) \\ \mathbf{J}_p = -q(D_p \nabla p + \mu_p p \nabla \phi) \end{array} \right. \quad x \in \Omega \quad (2.2.5)$$

Pour les transistors MOS dans l'oxyde

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \\ n = p = 0 \end{array} \right. \quad x \in \Omega_{ox} \quad (2.2.6)$$

Nous allons maintenant décrire la géométrie et les données du problème.

### Exemples de semi-conducteurs

- **Le transistor MOS** : Le transistor MOS est le dispositif le plus employé de nos jours dans l'industrie des circuits intégrés. C'est grâce à lui que l'informatique et les applications digitales " grand public " ont pris l'essor que nous connaissons aujourd'hui. Les transistors MOS sont également utilisés dans certaines applications

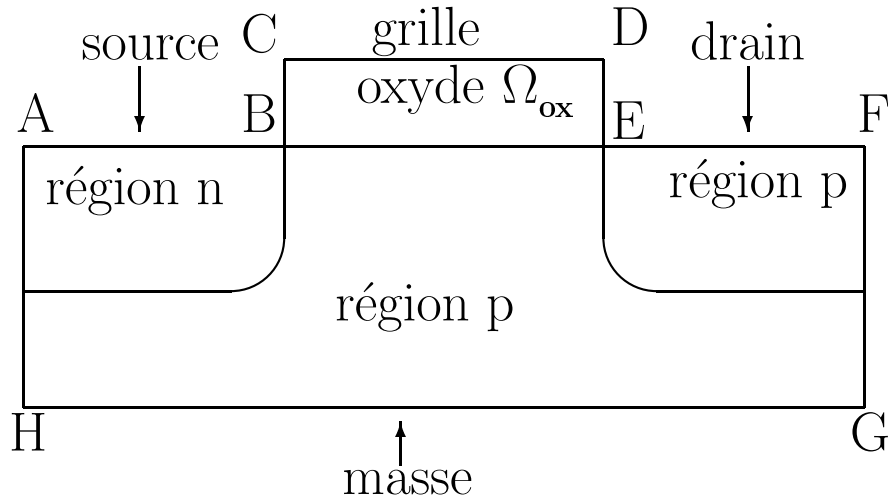


Figure 2.1 : Coupe transversale d'un transistor MOS.

analogiques (amplificateurs, convertisseurs analogiques-numériques, filtres, etc). Il existe deux types de transistors MOS : le transistor à canal N, dans lequel le passage du courant est constitué par un transport d'électrons, et le transistor à canal P, dans lequel le passage du courant est constitué par un transport de trous. Dans le cas d'un circuit utilisant exclusivement des transistors à canaux N, on parlera d'une technologie nMOS. Dans le cas d'un circuit utilisant exclusivement des transistors à canaux P, on parlera d'une technologie pMOS. La technologie la plus prolifique à l'heure actuelle est la technologie CMOS (*Complementary MOS*, MOS complémentaire) utilisant des transistors MOS des deux types.

Au système total (2.2.1)-(2.2.2) sont associées les conditions aux limites suivantes : à la source, au drain et à la masse on a des contacts ohmiques. AH, FG, CB, DE sont des bords isolants. La grille est un contact MOS.

On a de plus les conditions de transmission suivantes sur BE

$$[\phi]_{BE} = 0 \text{ (saut de } \phi \text{ à travers BE)}$$

$$\left[ \varepsilon_T \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right]_{BE} = 0$$

où  $\nu$  est la normale extérieure à BE, pointant vers  $\Omega_{ox}$  par exemple et où

$$\varepsilon_T = \begin{cases} \varepsilon_{ox} & \text{dans } \Omega_{ox} \\ \varepsilon_s & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$



Figure 2.2 : Diode bidimensionnelle.

- **La diode** : La première caractéristique d'une diode est qu'il n'y a pas d'oxyde. On ne considère donc que (2.2.1). Par ailleurs, dans le cas d'une diode, le semi-conducteur est composé de deux régions (matérialisées par  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ) séparées par une courbe  $\Gamma$  appelée jonction. Si  $\Omega_1$  est une région N (resp. P) fortement dopée et  $\Omega_2$  une région N (resp. P) faiblement dopée, la diode est désignée sous le nom de jonction  $NN^+$  (resp.  $PP^+$ ). Si  $\Omega_1$  est une région N,  $\Omega_2$  une région P, la diode est appelée jonction PN. Les conditions aux limites associées au système (2.2.1) sont :  $\Gamma_3, \Gamma_4$  sont des contacts ohmiques et  $\Gamma_1, \Gamma_2$  sont des bords isolants (cf. figure 2.2).
- **Le thyristor** : Les thyristors sont des dispositifs de puissance utilisés pour le contrôle de courants élevées (jusqu'à ... 1000 A ...) et de tensions élevées (... 10 kV ...), ce qui signifie que ces dispositifs peuvent manipuler des puissances considérables. Il s'agit donc de dispositifs de taille importante (plusieurs dizaines de centimètres carrés) montés sur d'impressionnants refroidisseurs.

Le thyristor est constitué d'une structure PNPN et contient donc trois jonctions PN. Le dispositif comporte également trois contacts : l'anode (A), la cathode (K) et la gâchette (G). Le courant principal " de puissance " circule entre l'anode et la cathode, tandis que le contrôle du passage de ce courant est effectué par la gâchette. En régime de fonctionnement normal, la cathode est polarisée négativement par rapport à l'anode. En régime de fonctionnement inverse, la cathode est polarisée positivement par rapport à l'anode. La première constatation à faire au sujet du thyristor est que, en l'absence de tension appliquée à la gâchette, il existe toujours

Figure 2.3 : Coupe transversale d'un thyristor.

au moins une jonction bloquée dans la structure. Quand  $V_{AK} > 0$  (régime normal), la jonction entre la base  $n_1$  et la base  $p_2$  est bloquée, et quand  $V_{AK} < 0$  (régime inverse), les jonctions entre la base  $n_1$  et l'anode et entre la base  $p_2$  et la cathode sont bloquées. En pratique, la quasi-totalité de la chute de tension entre l'anode et la cathode est reprise dans la base  $n_1$  lorsque  $V_{AK} > 0$ . On s'arrange donc pour réaliser une base  $n_1$  épaisse (plusieurs centaines de microns) et faiblement dopée, de façon à pouvoir y obtenir des tensions de claquage élevées. La jonction  $J_3$  ne supporte pas de fortes tensions inverses à cause des dopages relativement élevés de la base  $p_2$  et de la cathode  $n_2$ .

Si l'on applique des tensions élevées ( $V_{AK} > 0$ ) entre l'anode et la cathode du thyristor, le dispositif subit à un certain moment un phénomène d'amorçage.

### Les paramètres

- .  $\varepsilon_s$  : permittivité du semi-conducteur
- .  $\varepsilon_{ox}$  : permittivité de l'oxyde
- .  $q$  : charge de l'électron
- .  $C$  désigne le dopage ou encore la concentration d'impuretés ionisées du semi-conducteur; c'est l'une de ses caractéristiques principales.
- .  $\mu_n, \mu_p$  sont respectivement les coefficients de mobilité des électrons et de trous. Dans la réalité physique ces coefficients dépendent du champ électrique et de la variable

d'espace. On a bien sûr  $\mu_n > 0$  et  $\mu_p > 0$ .

- $d_n, d_p$  sont les coefficients de diffusion des électrons et des trous, on suppose que la relation d'Einstein est valide.
- $R$  est le taux de génération-recombinaison. Il a un effet régulateur, sa tendance étant de ramener le semi-conducteur à l'état d'équilibre (pour plus de détails, on renvoie à la première partie de cette thèse (cf. Chapitre I)).

### Choix des inconnues

- **Les variables**  $(\phi, n, p)$  : Si l'on choisit les variables  $(\phi, n, p)$  qui sont, en fait, des variables dépendantes, les équations de continuité du système (2.2.5) apparaissent sous une forme linéaire par rapport à  $n$  et  $p$  respectivement lorsque on suppose que  $\mu_n, \mu_p$  et  $R$  sont constants. Il semble alors attractif, d'un point de vue mathématique, de prendre  $(\phi, n, p)$  comme inconnues. Cependant, l'interprétation physique des variables  $n$  et  $p$  comme étant des concentrations des charges dans le dispositif, montre que  $n$  et  $p$  doivent être positives. Mais, il est très difficile sous cette forme d'obtenir des estimations a priori sur  $n$  et  $p$  en appliquant un principe du maximum et d'assurer la positivité de ces quantités. Nous allons donc maintenant introduire d'autres variables qui seront utiles par la suite pour l'analyse mathématique.

- **Les variables**  $(\phi, E_{Fn}, E_{Fp})$  : On choisit  $E_{i0} = 0$  dans les équations (1.2.39) et (1.2.40), on définit alors les quasi-niveaux de Fermi des électrons et des trous (uniquement dans le semi-conducteur)  $E_{Fn}$  et  $E_{Fp}$  par les relations suivantes :  $n = n_i e^{\frac{\phi - E_{Fn}}{u_T}}$   
et  $p = n_i e^{\frac{E_{Fp} - \phi}{u_T}}$

On peut réécrire alors le système (2.2.5) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s \Delta \phi = q \left( n_i e^{\frac{\phi - E_{Fn}}{u_T}} - n_i e^{\frac{E_{Fp} - \phi}{u_T}} - C \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_n = qR \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_p = -qR \quad x \in \Omega \\ \mathbf{J}_n = -qn_i \mu_n e^{\frac{\phi - E_{Fn}}{u_T}} \nabla E_{Fn} \\ \mathbf{J}_p = -qn_i \mu_p e^{\frac{E_{Fp} - \phi}{u_T}} \nabla E_{Fp} \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

Les conditions aux limites aux contacts ohmiques deviennent :  $E_{Fn} = u_A$ ,  $E_{Fp} = u_A$  et restent inchangées pour  $\phi$ . Les conditions aux limites aux bords isolants deviennent :  $\frac{\partial E_{Fn}}{\partial \nu} = 0$ ,  $\frac{\partial E_{Fp}}{\partial \nu} = 0$ .

L'avantage de cette formulation est que les variables  $E_{Fn}$ ,  $E_{Fp}$  sont aussi des potentiels et sont quantitativement du même ordre que  $\phi$ . De plus le terme de convection est absorbé.

Le principal inconvénient est que avec ces variables les équations de continuité deviennent non linéaires par rapport à  $E_{Fn}$  et  $E_{Fp}$  respectivement.

- **Les variables**  $(\phi, u, v)$  : On définit les variables de Slotboom (uniquement dans le semi-conducteur)  $u$  et  $v$  par les relations suivantes :  $u = e^{-\frac{E_{Fn}}{u_T}}$ ,  $v = e^{\frac{E_{Fp}}{u_T}}$ .

Le système (2.2.5) se réécrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s \Delta \phi = q(n_i e^{\frac{\phi}{u_T}} u - n_i e^{\frac{-\phi}{u_T}} v - C) \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_n = qR \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_p = -qR \quad x \in \Omega \\ \mathbf{J}_n = qn_i \mu_n u_T e^{\frac{\phi}{u_T}} \nabla u \\ \mathbf{J}_p = -qn_i \mu_p u_T e^{\frac{-\phi}{u_T}} \nabla v \end{array} \right. \quad (2.2.8)$$

Les conditions aux limites aux contacts ohmiques deviennent :  $u = e^{-\frac{u_A}{u_T}}$ ,  $v = e^{\frac{u_A}{u_T}}$ .

Les conditions aux limites aux bords isolants deviennent :  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ .

Les variables  $(\phi, u, v)$  sont en général très adaptées à l'analyse mathématique.

## Normalisation

Beaucoup de paramètres interviennent dans le système (2.2.5), il est difficile alors de contrôler leurs influences respectives en conservant ce système sous forme non normalisée.

Les avantages d'une normalisation sont de faire intervenir

- des variables adimensionnalisées
- des variables du même ordre de grandeur.

Différentes normalisations pour les équations de base des semi-conducteurs ont été introduites. Nous conserverons pour la suite de cette thèse la normalisation introduite par Vasileva et al [39, 40].

On introduit les grandeurs de référence suivantes pour la normalisation

$$l = O(\text{diam}(\Omega))$$

$$\bar{\mu} = O(\tilde{\mu}) \text{ où } \tilde{\mu} = \max \left( \sup_{\Omega} \mu_n(x), \sup_{\Omega} \mu_p(x) \right)$$

$$\bar{C} = \sup_{\Omega} |C(x)|$$

On a alors les quantités adimensionnalisées suivantes

• On normalise les variables d'espace par  $l : x^* = \frac{x}{l}$

• les variables correspondant à des potentiels par  $u_T : \phi^* = \frac{\phi}{u_T}, E_{Fn}^* = \frac{E_{Fn}}{u_T}$  et  $E_{Fp}^* = \frac{E_{Fp}}{u_T}$

• les concentrations par  $\bar{C} : N(x) = \frac{C(x)}{\bar{C}}$  où  $x \in \Omega, n^* = \frac{n}{\bar{C}}$  et  $p^* = \frac{p}{\bar{C}}$

• la permittivité par  $\frac{ql^2\bar{C}}{u_T} : \varepsilon = \frac{\varepsilon_s u_T}{ql^2\bar{C}}$

• les mobilités  $\mu_n$  et  $\mu_p$  par  $\bar{\mu}$  et  $R$  par  $\frac{u_T\bar{C}\bar{\mu}}{l^2} : R^* = \frac{Rl^2}{u_T\bar{C}\bar{\mu}}$

Pour ne pas alourdir les notations, les quantités normalisées seront notées par les mêmes symboles que précédemment.

$\lambda = \left(\frac{\varepsilon u_T}{q\bar{C}}\right)^{1/2}$  désigne la longueur de Debye du semiconducteur.

On pose :  $\sqrt{\varepsilon} = \frac{\lambda}{l}$  et  $\delta^2 = \frac{n_i}{\bar{C}}$ .

Le système (2.2.5) se réécrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \Delta \phi = n - p - N \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_n = R \\ \nabla \cdot \mathbf{J}_p = -R \\ \mathbf{J}_n = \mu_n (\nabla n - n \nabla \phi) \\ \mathbf{J}_p = -\mu_p (\nabla p + p \nabla \phi) \end{array} \right. \quad (2.2.9)$$

où le taux de génération-recombinaison ainsi que les conditions aux limites sont exprimés en fonction des variables normalisées. Les conditions aux limites de type bords isolants et de type transmission entre le semi-conducteur et l'oxyde restent inchangées.

Les conditions aux limites aux contacts ohmiques deviennent

$$n = \frac{1}{2} \left( N + (N^2 + 4\delta^4)^{1/2} \right), \quad p = \frac{1}{2} \left( -N + (N^2 + 4\delta^4)^{1/2} \right) \text{ et } \phi = \phi_{bi} + u_A,$$

où  $u_A$  est le potentiel appliqué normalisé au contact et  $\phi_{bi}$  le potentiel interne normalisé au contact, soit :  $\phi_{bi} = \log \left( \frac{N + (N^2 + 4\delta^4)^{1/2}}{2\delta^2} \right)$ .

Les variables de Slotboom  $u$  et  $v$  restent inchangées par la normalisation. Les quasi-niveaux de Fermi qui correspondent à des potentiels sont normalisés par  $u_T$ . Les relations entre les différentes variables normalisées sont

$$n = \delta^2 e^{\phi} u, \quad p = \delta^2 e^{-\phi} v, \quad u = e^{-E_{Fn}}, \quad v = e^{E_{Fp}}$$

$$\mathbf{J}_n = \delta^2 \mu_n e^{\phi} \nabla u = -\delta^2 \mu_n e^{\phi - E_{Fn}} \nabla E_{Fn}, \quad \mathbf{J}_p = -\delta^2 \mu_p e^{-\phi} \nabla v = -\delta^2 \mu_p e^{E_{Fp} - \phi} \nabla E_{Fp}$$

### 2.2.1 Théorèmes d'existence et de régularité

Le problème de l'existence de solutions pour des dispositifs multi-dimensionnels et pour des modèles physiques plus complexes (incluant par exemple des phénomènes de génération-recombinaison, ...) est compris dans une large mesure et de nombreux résultats existent dans ce domaine (e.g. [24, 28, 30, 32, 33] et les références incluses). Les méthodes classiquement employées pour obtenir ces résultats sont soit des méthodes de point fixe soit des méthodes basées sur la théorie des opérateurs pseudo-monotones.

Pour être précis, soit  $\Omega$  un domaine rectangulaire de bords  $\partial\Omega$  tel que  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ ,

où  $\Gamma_D = \bigcup_{k=1}^r \mathcal{C}_k$  où les  $\mathcal{C}_k$  désignent les contacts ohmiques avec  $\mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_l = \emptyset$  pour  $k \neq l$ ,

et  $\Gamma_N = \bigcup_{l=1}^s \Gamma_{Nl}$  où les  $\Gamma_{Nl}$  sont les bords isolants avec  $\Gamma_{Nl} \cap \Gamma_{Nk} = \emptyset$  pour  $l \neq k$ .

Sur  $\Gamma_N$  on a les conditions aux limites suivantes sur  $(\phi, u, v)$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu}, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.2.10)$$

Sur  $\Gamma_D$  on a les conditions aux limites suivantes sur  $(\phi, u, v)$

$$\begin{cases} \phi|_{C_k} = \phi_{bi}|_{C_k} + U_k \\ u = e^{-U_k} \\ v = e^{U_k} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r \quad (2.2.11)$$

où  $U_k$  désigne le potentiel appliqué normalisé au contact ohmique  $C_k$  et  $\phi_{bi}$  le potentiel intrinsèque normalisé, soit

$$\phi_{bi} = \log \left( \frac{N + (N^2 + 4\delta^4)^{1/2}}{2\delta^2} \right).$$

On pose  $(\phi_D, u_D, v_D) = (\phi|_{\Gamma_D}, u|_{\Gamma_D}, v|_{\Gamma_D})$ .

On note encore par  $\phi_D, u_D, v_D$  un relèvement dans  $H^1(\Omega)$  des conditions aux bords à  $\Omega$  tout entier (on suppose que les données aux bords admettent un tel relèvement).

Dans toute la suite  $\Gamma$  désignera la jonction du semi-conducteur. Nous distinguerons, en gros, deux types de problèmes.

### Premier type. - Cas de non ionisation par impact

On considère le système normalisé, en variables  $(\phi, u, v)$ , soit

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta \phi = \delta^2 e^\phi u - \delta^2 e^{-\phi} v - N \\ \nabla \cdot (\mu_n e^\phi \nabla u) = \frac{R}{\delta^2} \stackrel{\text{déf}}{=} S \\ \nabla \cdot (\mu_p e^{-\phi} \nabla v) = \frac{R}{\delta^2} \stackrel{\text{déf}}{=} S \quad x \in \Omega \\ + \text{ les conditions aux limites (2.2.10) sur } \Gamma_N \\ + \text{ les conditions aux limites (2.2.11) sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (2.2.12)$$

On n'admettra que les solutions du système (2.2.12) pour lesquelles  $u$  et  $v$  sont strictement positives.

**Théorème 2.1** *On fait les hypothèses suivantes sur la géométrie et les données du problème*

.  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) de classe  $\mathcal{C}^{0,1}$  et la mesure (au sens de Lebesgue) dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  de  $\Gamma_D$  est positive.

. les conditions aux limites sur  $\phi$ ,  $u$  et  $v$ , ainsi que leurs relèvements à  $\Omega$  vérifient

$$(\phi_D, u_D, v_D) \in (L^\infty(\Gamma_D))^3 \text{ et } (\phi_D, u_D, v_D) \in (H^1(\Omega))^3.$$

On suppose de plus qu'il existe une constante  $u_+ \geq 0$  telle que

$$e^{-u_+} \leq \inf_{\Gamma_D} u_D, \inf_{\Gamma_D} v_D \leq \sup_{\Gamma_D} u_D, \sup_{\Gamma_D} v_D \leq e^{u_+}$$

.  $N \in L^\infty(\Omega)$

.  $S$  vérifie

$$S = F(x, \phi, u, v)(uv - 1) \text{ où}$$

$$\star F(x, \dots, \dots) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times (]0, +\infty[)^2) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\star F(x, \phi, u, v) \geq 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R} \times ([0, +\infty[)^2$$

$$\star \forall K \text{ borné de } \mathbb{R} \times ([0, +\infty[)^2, \exists M_K \text{ telle que}$$

$$\| D_{(\phi, u, v)} F(\cdot, \phi, u, v) \|_{0, \infty} + \| F(\cdot, \phi, u, v) \|_{0, \infty} \leq M_K, \quad \forall (\phi, u, v) \in K$$

. Les mobilités  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  vérifient

$$\star \mu_n = \mu_n(x, \nabla \phi), \mu_p = \mu_p(x, \nabla \phi)$$

$$\star \exists \mu_- > 0, \mu_+ > 0 \text{ tels que}$$

$$\mu_- \leq \mu_n \leq \mu_+$$

$$\mu_- \leq \mu_p \leq \mu_+ \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^n$$

$$\star | \mu_n(x, y_1) - \mu_n(x, y_2) | + | \mu_p(x, y_1) - \mu_p(x, y_2) | \leq L | y_1 - y_2 | \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le problème (2.2.12) admet une solution faible  $(\phi, u, v)$  dans  $(H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^3$  qui vérifie les estimations a priori suivantes

$$e^{-u_+} \leq u, v \leq e^{u_+} \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega \quad (2.2.13)$$

$$\tilde{\phi}_- \leq \phi \leq \tilde{\phi}_+ \quad (2.2.14)$$

où

$$\tilde{\phi}_- = \min \left( \inf_{\Gamma_D} \phi_D, \ln \left( \frac{N_- + \sqrt{N_-^2 + 4\delta^4}}{2\delta^2} \right) - u_+ \right)$$

$$\tilde{\phi}_+ = \max \left( \sup_{\Gamma_D} \phi_D, \ln \left( \frac{N_+ + \sqrt{N_+^2 + 4\delta^4}}{2\delta^2} \right) + u_+ \right)$$



avec

$$N_- = \inf_{\Omega} N(x) \quad \text{et} \quad N_+ = \sup_{\Omega} N(x).$$

### Démonstration (grandes lignes)

Soit  $K = \{(u, v) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), e^{-u+} \leq u, v \leq e^{u+} \text{ p.p dans } \Omega\}$ .

On vérifie d'abord aisément que  $K$  est un convexe fermé borné de  $(L^2(\Omega))^2$ . Etant donné  $(u, v) \in K$ , on définit  $\phi$  solution faible associée à  $(u, v)$  du problème suivant

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta \phi = \delta^2 e^{\phi} u - \delta^2 e^{-\phi} v - N \\ \phi|_{\Gamma_D} = \phi_D, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \nu}|_{\Gamma_N} = 0 \end{cases} \quad (2.2.15)$$

Utilisant une méthode de point fixe (théorème de Leray-Schauder) et la monotonie de l'application qui à  $\phi$  associe  $(\delta^2 e^{\phi} u - \delta^2 e^{-\phi} v - N)$ , on montre que le problème (2.2.15) admet une solution unique dans  $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  qui vérifie l'estimation (2.2.14).

On associe alors à  $\phi$  le couple  $(\bar{u}, \bar{v})$  solutions des problèmes suivants, découplés et semi-linéaires en  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  respectivement.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mu_n e^{\phi} \nabla \bar{u}) = F(x, \phi, u, v)(\bar{u}v - 1) \\ \bar{u}|_{\Gamma_D} = u_D|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}|_{\Gamma_N} = 0 \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mu_p e^{-\phi} \nabla \bar{v}) = F(x, \phi, u, v)(u\bar{v} - 1) \\ \bar{v}|_{\Gamma_D} = v_D|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}|_{\Gamma_N} = 0 \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Il est facile de vérifier que (2.2.16) et (2.2.17) admettent une solution unique  $(\bar{u}, \bar{v})$  dans  $(H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$  satisfaisant l'estimation (2.2.13).

On a donc

$$\begin{aligned} K \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \longrightarrow K \\ (u, v) &\longmapsto \phi \longmapsto (\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

On définit l'opérateur de point fixe par  $T(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ . On montre que  $T$  est un opérateur compact et continu de  $K$  dans  $K$ . On en déduit l'existence d'un point fixe de  $T$  en appliquant le théorème de Schauder.

**Théorème 2.2** *Supposons que les hypothèses du théorème précédent soient satisfaites et qu'en plus, on ait*

★  $(\phi_D, u_D, v_D) \in H^2(\Omega)$  et vérifient

$$\left(\frac{\partial \phi_D}{\partial \nu}\right) |_{\Gamma_N} = \left(\frac{\partial u_D}{\partial \nu}\right) |_{\Gamma_N} = \left(\frac{\partial v_D}{\partial \nu}\right) |_{\Gamma_N} = 0$$

★ Les mobilités ne dépendent plus que de la variable d'espace  $x$  et sont dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$

★  $\Omega, \Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  sont tels que la solution de

$$\begin{cases} \Delta w = f & \text{dans } \Omega \\ w |_{\Gamma_D} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} |_{\Gamma_N} = 0 \end{cases}$$

vérifie

$$\|w\|_{2,q} \leq c \|f\|_{0,q} \quad \forall f \in L^q(\Omega) \quad \text{pour } q = 2 \quad \text{et } q = 3/2.$$

Alors toute solution faible  $(\phi, u, v)$  appartenant à  $(H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^3$  est aussi dans  $(H^2(\Omega))^3$ .

Pour la démonstration de ces théorèmes nous renvoyons le lecteur aux travaux de Markowich [24], ainsi qu'aux bibliographies de cet ouvrage.

### Deuxième type. - Cas de l'ionisation par impact

A ce jour, les résultats restent très limités lorsque l'on considère le taux de génération donné par l'ionisation par chocs. La difficulté provient du fait que l'on ne peut appliquer un principe du maximum sur les deux équations de continuité. Dans [23], Markowich a obtenu un résultat d'existence pour une diode mono-dimensionnelle en polarisation inverse. Plus récemment, Frehse et Naumann [16] ont établi le résultat suivant qui permet de prouver l'existence de la solution où diverses contraintes sont combinées.

Considérons le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta \phi = n - p - N \\ -\nabla \cdot (\mu_n (\nabla n - n \nabla \phi)) = S \\ \nabla \cdot (-\mu_p (\nabla p + p \nabla \phi)) = S & \text{dans } \Omega \\ n = n_D, \quad p = p_D, \quad \phi = \phi_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \mathbf{J}_n \cdot \nu = \mathbf{J}_p \cdot \nu = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.2.18)$$

et on suppose que

- (i)  $N \in L^6(\Omega)$
- (ii)  $n_D, p_D \in W^{1,6}(\Omega)$ ,  $n_D, p_D \geq 0$  pour presque tout  $x$  de  $\Omega$   
 $\phi_D \in W^{1,3}(\Omega)$ .
- (iii)  $S$  est de la forme

$$S = r(n, p)(1 - np) + \alpha_n(\nabla\phi) |\mathbf{J}_n| + \alpha_p(\nabla\phi) |\mathbf{J}_p|$$

avec

$$\begin{cases} r \in \mathcal{C}([0, +\infty) \times [0, +\infty)) \\ \rho_0(s+t) \leq r(s, t) \leq \rho_1(1+s+t) \quad \forall s, t \in [0, +\infty[ \\ (0 < \rho_0 \leq \rho_1 < +\infty, \quad \rho_i = \text{constante.} \quad (i = 0, 1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \\ 0 \leq \alpha_j(\xi) \leq \alpha_{0,j} = \text{constante.} < +\infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n (j = n, p) \end{cases}$$

Alors on a

**Théorème 2.3** *Soit un domaine  $\Omega$  vérifiant les mêmes conditions que dans le théorème 2.1 et supposons les conditions (i)-(iii) vérifiées. Alors, le système (2.2.18) admet une solution faible  $(\phi, n, p)$  telle que*

$$0 \leq n, p \leq k = \text{constante} < +\infty \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega.$$

## 2.2.2 Unicité

Nous nous intéressons dans cette section à l'analyse de l'unicité des solutions des modèles dérive-diffusion. Les questions relatives à l'unicité (resp. multiplicité) des solutions sont encore mal comprises du point de vue de l'analyse mathématique. Notons que les résultats d'unicité relatifs au système (2.2.9) sont fortement liés aux données du problème : dopage, mobilités, taux de génération-recombinaison. Pour chacune de ces données, on peut exhiber différents cas ou modèles pour lesquels des solutions multiples ont été obtenues : Dans le cas mono-dimensionnel plusieurs exemples numériques de solutions multiples existent (e.g. [29, 32, 36]). Dans [32] Rubinstein considère le problème réduit associé (obtenu

comme limite singulière du problème à potentiel donné en faisant  $\varepsilon = 0$ ). Il obtient numériquement et en utilisant le théorème de Newton-Kantorovich des solutions multiples dans le cas d'un thyristor polarisé en direct. Dans [36] (aussi [35]) Steinruck élargit l'étude de Rubinstein au cas de termes de génération-recombinaison non nuls. Il obtient une équation de bifurcation formelle pour le problème réduit et donne plusieurs exemples numériques de multiplicité (aussi [26]).

Dans [11] Alabau obtient une méthode constructive au sens où elle donne un algorithme explicite pour construire des exemples de dopage et des valeurs du paramètre de bifurcation (qui est la différence de potentiel appliqué) pour lesquels il y a multiplicité, on donne ici le théorème dans le cas des thyristors.

**Théorème 2.4** *Il existe une partition  $\mathcal{P}_3 = (a_i)_{0 \leq i \leq 4}$  de  $\Omega$  en sous-intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$ ,  $N_{|[a_i, a_{i+1}]|} = N_i \in \mathbb{R}^*$  vérifiant  $N_i N_{i+1} < 0 \forall i \in \{0, 1, 2\}$  et  $\delta_0 > 0$  tels que l'on ait la propriété suivante*

*Pour tout  $\delta \in [0, \delta_0]$ , il existe  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(N, \delta, \mathcal{P}_3) > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ , il existe  $(V_{-, \varepsilon}, V_{+, \varepsilon}) \in \mathbb{R}^\pm \times \mathbb{R}^\pm$ ,  $V_{-, \varepsilon} < V_{+, \varepsilon}$  tels que le système à potentiel donné noté  $(VD)_{\overline{V}, \varepsilon}$  a au moins trois solutions dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2$  pour tout  $\overline{V} \in (V_{-, \varepsilon}, V_{+, \varepsilon})$ .*

Ces résultats sont basés sur une analyse asymptotique des équations à courant donné (avec obtention d'estimations uniformes d'erreur asymptotique) et sur une analyse du problème réduit (au sens de la théorie des perturbations singulières).

Néanmoins dans le cas où le semi-conducteur est dans un état voisin de l'équilibre certains résultats d'unicité sont connus (Markowich [24] et Mock [30]). Dans [30] Mock a démontré l'unicité des solutions pour des différences de potentiel suffisamment petites (i.e. au voisinage de l'équilibre) dans le cas multi-dimensionnel avec un terme de génération-recombinaison nul.

**Théorème 2.5** *On fait les hypothèses suivantes*

- $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) de classe  $\mathcal{C}^{0,1}$  et la mesure (au sens de Lebesgue) dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  de  $\Gamma_D$  est positive.
- $(u_D, v_D) \in (H^2(\Omega))^2$  et  $\frac{\partial u_D}{\partial \nu} |_{\Gamma_N} = \frac{\partial v_D}{\partial \nu} |_{\Gamma_N} = 0$ .
- si  $n = 2$ , alors
  - ★  $\phi_D \in H^2(\Omega)$ ,  $\frac{\partial \phi_D}{\partial \nu} |_{\Gamma_N} = 0$  et

★ La solution de

$$-\Delta\psi = f, \psi|_{\Gamma_D} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\Gamma_N} = 0$$

vérifie

$$\|\psi\|_{2,l} \leq C \|f\|_{0,l} \quad \text{pour } l = 2$$

• si  $n = 3$ , alors

$$\star \phi_D \in W^{2,p}(\Omega) \text{ avec } p = \frac{4n}{8-n} \text{ et } \frac{\partial\phi_D}{\partial\nu}|_{\Gamma_N} = 0$$

★ La solution de

$$-\Delta\psi = f, \psi|_{\Gamma_D} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\Gamma_N} = 0$$

vérifie

$$\|\psi\|_{2,l} \leq C \|f\|_{0,l} \quad \text{avec } l = 2 \text{ où } p = \frac{4n}{8-n}.$$

Alors, si  $\|u_D\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)}$  et  $\|v_D\|_{H^{3/2}(\Gamma_D)}$  sont suffisamment petits, le système (2.2.12) (avec  $R = 0$ ) admet une solution unique dans  $(H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (H^1(\Omega))^2$ .

La démonstration de ce théorème est basée d'une part sur une propriété de monotonie de l'opérateur  $H$  défini de la manière suivante  $H(\phi) = \delta^2 e^{\phi} u - \delta^2 e^{-\phi} v - N$ , et d'autre part sur les théorèmes d'injections de Sobolev.

Markowich [24] a étendu ce résultat en un résultat d'unicité locale dans le cas d'un terme de génération-recombinaison non nul et sans ionisation par impact.

On considère le système (2.2.12). On rappelle que  $U_k$  désigne le potentiel appliqué au contact  $C_k$  (cf. (2.2.11)). On note par  $\lambda$  le vecteur  $(U_1, \dots, U_r)$  et par  $|\lambda|$  le  $\max_{1 \leq k \leq r} |U_k|$ . Pour alléger les notations on notera par 0 l'élément nul de  $\mathbb{R}^r$ . On désigne par  $(\phi_e, 1, 1)$  la solution correspondant à l'équilibre (i.e.  $\lambda = 0$ ) où  $\phi_e$  désigne la solution de l'équation de Poisson non linéaire.

**Théorème 2.6** *On fait les hypothèses suivantes*

- $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) de classe  $\mathcal{C}^{0,1}$  et la mesure (au sens de Lebesgue) dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  de  $\Gamma_D$  est positive.
- $N \in L^\infty(\Omega)$
- Les mobilités ne dépendent plus que de la variable d'espace  $x$  et sont dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$

.  $\Omega$ ,  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  sont tels que la solution de

$$\begin{cases} \Delta w = f & \text{dans } \Omega \\ w|_{\Gamma_D} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Gamma_N} = 0 \end{cases}$$

vérifie

$$\|w\|_{2,q} \leq c \|f\|_{0,q} \quad \forall f \in L^q(\Omega) \quad \text{pour } q = 2 \quad \text{et } q = 3/2.$$

.  $\Gamma_N$  est composé de segments de classe  $\mathcal{C}^2$ .

.  $S$  vérifie

$$S = F(x, \phi, u, v)(uv - 1) \text{ où}$$

$$\star F(x, \dots) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times (]0, +\infty[)^2) \quad \forall x \in \Omega$$

$\star \partial^\alpha F(\cdot, \phi, u, v) \in L^\infty(\Omega)$  uniformément pour  $(\phi, u, v)$  variant dans des sous-domaines bornés de  $\mathbb{R} \times [0, +\infty[^2$  et pour tout multiindice  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq 2$ )

$\star$  et, ou bien il existe  $\omega_- > 0$ ,  $\omega_+ > 0$  tels que

$$0 \leq \omega_- \leq F(x, \phi_e(x), 1, 1) \leq \omega_+ \quad \forall x \in \Omega$$

$\star$  ou bien  $F(x, \phi_e(x), 1, 1) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

. La fonction qui à  $\lambda$  associe  $(\phi_D(\lambda), u_D(\lambda), v_D(\lambda))$  est de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  de  $\mathbb{R}^r$  à valeurs dans  $(H^2(\Omega))^3$ .

Alors, pour  $\alpha > 0$  suffisamment petit, le problème (2.2.12) admet dans un voisinage dans  $H^2(\Omega)$  de  $(\phi_e, 1, 1)$  une solution unique  $(\phi(\lambda), u(\lambda), v(\lambda))$  pour  $|\lambda| \leq \alpha$ . De plus, la fonction qui à  $\lambda$  associe  $(\phi(\lambda), u(\lambda), v(\lambda))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\{\lambda \in \mathbb{R}^r, |\lambda| < \alpha\}$  à valeurs dans  $(H^2(\Omega))^3$ .

**Remarque 2.1** la démonstration de Markowich est basée sur le théorème des fonctions implicites, ce qui explique le caractère local des résultats obtenus.

Dans ce type de résultat il y a unicité sans restriction sur le dopage alors que dans le cas général si l'on souhaite obtenir des résultats d'unicité en dehors d'un voisinage de

l'équilibre il est nécessaire de faire des hypothèses restrictives sur le dopage  $N$ .

Brezzi et al. [13] ont montré un résultat d'unicité de ce type dans le cas d'une diode polarisée en inverse. Leur méthode est basée sur une technique de perturbation singulière et permet d'obtenir l'unicité pour des potentiels variant dans un large intervalle borné contenant 0.

Plus récemment, Alabau [9] a obtenu des résultats d'unicité pour différents types de semi-conducteurs à jonctions multiples, sous une hypothèse de monotonie sur le potentiel électrostatique.

L'objet du Chapitre 4 est d'établir de nouveaux résultats d'unicité dans des cas particuliers importants d'une diode et d'un thyristor symétriques, valables même pour des potentiels non monotones.





## Chapitre 3

# Analyse par perturbations singulières du modèle unipolaire de dérive-diffusion à potentiel donné

Le travail de ce Chapitre a été fait en collaboration avec F. Alabau et M. Moussaoui [12]. L'objet de cette partie est l'obtention d'estimations de l'erreur asymptotique, i.e. entre la solution et le terme d'ordre 0 du développement sans restriction a priori sur les potentiels appliqués.

### 3.1 Notions préliminaires sur les méthodes de perturbations singulières dans un cas linéaire

#### 3.1.1 Le problème abstrait

On se donne

→ deux espaces de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$ , avec

$$\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}_2$$

l'injection de  $\mathbb{H}_1$  dans  $\mathbb{H}_2$  étant continue et on suppose que  $\mathbb{H}_1$  est dense dans  $\mathbb{H}_2$ . On désigne par  $\|\cdot\|_1$  (resp.  $\|\cdot\|_2$ ) la norme dans  $\mathbb{H}_1$  (resp.  $\mathbb{H}_2$ ).

→ deux formes bilinéaires  $a$  et  $b$  continues respectivement sur  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$ . On suppose que

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{H}_1 \tag{3.1.1}$$

$$a(v, v) + \|v\|_2^2 \geq \alpha \|v\|_1^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in \mathbb{H}_1 \quad (3.1.2)$$

$$b(v, v) \geq \beta \|v\|_2^2, \quad \beta > 0, \quad \forall v \in \mathbb{H}_2. \quad (3.1.3)$$

Nous considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} \text{pour } \varepsilon > 0, \text{ trouver } u_\varepsilon \in E \text{ avec} \\ \varepsilon a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in E \end{cases} \quad (3.1.4)$$

où  $E$  est un sous-espace vectoriel fermé non vide de  $\mathbb{H}_1$  et où  $f \in \mathbb{H}'_2$ .

D'après les résultats de J. -L. Lions [20] sur les problèmes aux limites pour les opérateurs elliptiques, nous savons que le problème (3.1.4) admet une solution unique pour  $\varepsilon$  assez petit.

Le problème limite associé à (3.1.4) est obtenu en faisant formellement  $\varepsilon = 0$  dans (3.1.4). Sous l'hypothèse (3.1.3), le théorème de Lax- Milgram assure l'existence et l'unicité de  $u$  solution du problème limite dans  $\mathbb{H}_2$ .

Le but est maintenant de décrire le comportement de la solution  $u_\varepsilon$  lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro.

On introduit

$$\overline{E} = \text{adhérence de } E \text{ dans } \mathbb{H}_2.$$

D'après (3.1.3), il existe alors un élément  $u$  et un seul tel que

$$\begin{cases} u \in \overline{E} \\ b(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \overline{E} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Dans [20] J. -L. Lions a établi le résultat de convergence suivant

**Théorème 3.1** *Supposons que les données  $a(u, v)$  et  $b(u, v)$  vérifient les hypothèses (3.1.1)-(3.1.3). Alors si  $u_\varepsilon$  (resp.  $u$ ) désignant la solution de (3.1.4) (resp. de (3.1.5)), on a*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans } \mathbb{H}_2 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

et

$$\varepsilon^{1/2} \|u_\varepsilon\|_1 \leq C.$$

Faisons tout de suite la remarque suivante : si l'on suppose  $f$  suffisamment régulière pour que la solution  $u$  de (3.1.5) soit dans  $\mathbb{H}_1$ , alors en général on n'a pas la convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u$  dans  $\mathbb{H}_1$  ; c'est la difficulté de la couche limite.

## Un exemple type

Soit  $\Omega$  un ouvert borné (pour fixer les idées) de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  régulière. On prend  $\mathbb{H}_1 = H^1(\Omega)$ ,  $\mathbb{H}_2 = L^2(\Omega)$ ,  $E = H_0^1(\Omega)$  et on définit  $a(u, v)$  et  $b(u, v)$  par

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega), \\ b(u, v) &= \int_{\Omega} uv \, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

On est dans les conditions (3.1.1)-(3.1.3) et le problème limite se réduit à l'équation

$$u = f \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Si donc l'on fait sur  $f$  une hypothèse de régularité, par exemple  $f \in H^1(\Omega) = \mathbb{H}_1$ , alors  $u \in \mathbb{H}_1$ , mais  $u \notin E$ . Donc  $u_\varepsilon$  ne converge pas vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Mais, on a convergence à l'intérieur, c'est-à-dire si l'on suppose que  $f \in H^1(\Theta)$ ,  $\forall \Theta$  ouvert avec  $\bar{\Theta} \subset \Omega$  alors  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $H^1(\Theta)$ .

L'exemple ci-dessus montre que la frontière  $\Gamma$  joue un rôle particulier : il y a perte de conditions aux limites dans le passage à la limite et donc convergence "moins régulière" au voisinage de  $\Gamma$  que dans l'intérieur. Il y a un phénomène de couche limite au voisinage de  $\Gamma$ , c'est-à-dire création d'une zone localement autour de  $\Gamma$  à l'intérieur de laquelle  $u_\varepsilon$  varie fortement pour passer de la valeur  $u_\varepsilon \sim f$  (à l'intérieur) à la valeur 0 au bord. D'où le problème : par quoi faut-il "corriger" la différence  $u_\varepsilon - u$  de manière à ce que, pour la nouvelle différence, disons,  $u_\varepsilon - u - \theta_\varepsilon$ , la convergence vers 0 soit "meilleure", par exemple ait lieu dans  $\mathbb{H}_1$ ?

Naturellement, il faut préciser ce problème :  $\theta_\varepsilon = u_\varepsilon - u$  donne une "correction". On cherche en fait à définir des correcteurs  $\theta_\varepsilon$  qui soient

- Concentrés au voisinage de la surface (pour  $n = 3$ ) où apparaissent les couches limites (en l'occurrence  $\Gamma$  dans l'exemple précédent).
- "aisément" calculables.

### 3.1.2 Correcteurs d'ordre 0

**Définition 3.1** On reprend l'équation "générale"

$$\varepsilon a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in E, \quad u_\varepsilon \in E$$

et l'on fait l'hypothèse

$$\overline{E} = \mathbb{H}_2. \quad (3.1.6)$$

Alors le problème limite est

$$b(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{H}_2.$$

On fait l'hypothèse

$$u \in \mathbb{H}_1. \quad (3.1.7)$$

On se donne des éléments  $g_{\varepsilon 1}$  et  $g_{\varepsilon 2}$  de  $\mathbb{H}'_1$  et  $\mathbb{H}'_2$  respectivement qui vérifient

$$|\langle g_{\varepsilon 1}, v \rangle| \leq \phi_1(\varepsilon) \|v\|_1 \quad \forall v \in E, \quad 0 \leq \phi_1(\varepsilon) \leq C \quad (3.1.8)$$

$$|\langle g_{\varepsilon 2}, v \rangle| \leq \phi_2(\varepsilon) \|v\|_2 \quad \forall v \in E, \quad 0 \leq \phi_2(\varepsilon) \leq C. \quad (3.1.9)$$

On dira que  $\theta_\varepsilon$  est un correcteur d'ordre 0 pour le problème (3.1.4) si

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon \in E - u \\ \varepsilon a(\theta_\varepsilon, v) + b(\theta_\varepsilon, v) = \langle \varepsilon g_{\varepsilon 1} + \sqrt{\varepsilon} g_{\varepsilon 2}, v \rangle \quad \forall v \in E \end{cases} \quad (3.1.10)$$

**Remarque 3.1** L'équation (3.1.10) admet une solution unique une fois  $g_{\varepsilon 1}$  et  $g_{\varepsilon 2}$  choisis, ce qui peut être fait d'une infinité de manières. En fait les  $g_{\varepsilon i}$  seront choisis dans les exemples de manière à rendre les calculs les moins compliqués possibles.

### 3.1.3 Estimations avec les correcteurs d'ordre 0

J. -L. Lions [20] a montré que les  $\theta_\varepsilon$  ainsi définis permettent d'avoir une convergence plus précise.

**Théorème 3.2** On fait les hypothèses du théorème 3.1. On suppose en outre que (3.1.6)-(3.1.10) ont lieu. Alors

$$u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbb{H}_1 \quad \text{faible}$$

$$\|u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)\|_2 \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

**Théorème 3.3** *Sous les conditions d'applications du théorème 3.2 et sous les hypothèses supplémentaires suivantes*

$$|\langle g_{\varepsilon 1}, v \rangle| \rightarrow 0 \text{ uniformément pour } v \in E, \|v\|_1 \leq 1$$

et

$$|\langle g_{\varepsilon 2}, v \rangle| \rightarrow 0 \text{ uniformément pour } v \in E, \|v\|_2 \leq 1.$$

On a

$$u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{H}_1 \text{ fort}$$

$$\varepsilon^{-1/2} (u_\varepsilon - (u + \theta_\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{H}_2 \text{ fort.}$$

Le problème est maintenant de donner des procédés de calcul de correcteurs. C'est l'objet de la Section suivante.

### 3.1.4 Calcul des correcteurs

Pour le calcul d'un correcteur, l'idée est de ne conserver que les dérivations normales pour définir une fonction dont on vérifie ensuite qu'elle satisfait aux conditions des correcteurs. Soit  $\Gamma$  la surface (une courbe pour  $n = 2$ , un point pour  $n = 1$ ) au voisinage de laquelle apparaissent des couches limites. Cette surface peut être aussi bien une partie de  $\partial\Omega$ , que  $\partial\Omega$  tout entier ou encore une surface "intérieure" à  $\Gamma$ . On se place dans le cas de l'exemple type. Alors on a

**Lemme 3.1** *Soit  $M$  une fonction  $\in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  telle que*

$$M = 1 \text{ sur } \Gamma. \tag{3.1.11}$$

*Si  $\theta_\varepsilon$  est un correcteur, alors  $M\theta_\varepsilon$  est aussi un correcteur.*

Il suffit donc de prendre  $M$  à support dans un voisinage arbitrairement petit (fixé une fois pour toutes) de  $\Gamma$  et vérifiant (3.1.11). On peut par conséquent se placer dans un voisinage  $V$  de  $\Gamma$  arbitrairement petit. On choisit  $V$  suffisamment petit de manière à ce que pour  $x \in V$ , la projection orthogonale de  $x$  sur  $\Gamma$  notée  $s(x)$  soit unique. On pose pour  $x \in V$

$$t(x) = d(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} d(x, y)$$

$f(x, y)$  devient  $f(t, s)$  et on pose

$$f(0, s) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow s \\ (x,y) \in \Omega}} f(x, y) \quad \text{avec } s \in \Gamma \quad (\text{si la limite existe}).$$

L'équation définissant alors le correcteur est une équation différentielle où  $s$  joue le rôle de paramètre. Dans l'exemple type, cela conduit à définir  $\theta_\varepsilon$  par

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial^2 \theta_\varepsilon}{\partial t^2}(t, s) + \theta_\varepsilon(t, s) = 0 & \text{sur } V \\ (\theta_\varepsilon + u)(0, s) = 0 & \text{à } s \text{ fixé} \\ \theta_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial V - \Gamma \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\theta_\varepsilon(t, s) = \alpha(s)e^{t/\sqrt{\varepsilon}} + \beta(s)e^{-t/\sqrt{\varepsilon}}$$

Où  $\alpha(s)$  et  $\beta(s)$  sont déterminés par les conditions aux limites sur  $\partial V$ .

Un "correcteur"  $\theta_\varepsilon$  est défini a priori en supprimant les dérivées tangentielles (et il faut vérifier ensuite que l'on a bien construit ainsi un correcteur). Ceci correspond en fait à un développement asymptotique à deux échelles de  $u_\varepsilon$  : l'échelle "lente" de la variable  $x$  en dehors d'un voisinage de  $\Gamma$  et une échelle "rapide" en  $t/\sqrt{\varepsilon}$  dans un voisinage de  $\Gamma$ . Les développements asymptotiques interviennent couramment dans la résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles de la physique mathématique. L'application de la méthode des perturbations donne généralement une solution formellement sous la forme d'une série du type

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left( u_i(x) + \theta_i \left( \frac{t(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, s(x) \right) \right) (\sqrt{\varepsilon})^i$$

où les  $u_i$  sont solutions de problèmes réduits d'ordre  $i$  (ce sont de "bonnes approximations" de  $u_\varepsilon$  en dehors d'un voisinage de  $\Gamma$ ) et les  $\theta_i$  sont des correcteurs d'ordre  $i$  (ils viennent corriger les  $u_i$  dans un voisinage de  $\Gamma$  et on leur impose par exemple de décroître exponentiellement loin de  $\Gamma$ ). On substitue alors cette série dans l'équation satisfaite par  $u_\varepsilon$  et une fois les dérivations exprimées en coordonnées  $(t, s)$ , on suppose que  $\tau = t/\sqrt{\varepsilon}$  est une variable indépendante de  $t$  et de  $\varepsilon$ , on identifie alors par puissance de  $\varepsilon$  : cela revient effectivement à ne conserver que les dérivations normales pour définir le correcteur, les  $g_{\varepsilon i}$  comprenant, en particulier les dérivées tangentielles.

## 3.2 Le modèle de dérive-diffusion unipolaire

Dans toute cette Section,  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  et on suppose que

**(H1)** Seuls les porteurs de type  $n$  sont considérés i.e. on considère un semi-conducteur unipolaire à charge  $n$  ; donc absence de trous  $p$ .

**(H2)** Le semi-conducteur est en régime stationnaire.

**(H3)** Le domaine du dispositif est homogène, c'est-à-dire le dopage est uniforme.

**(H4)** Les taux de génération-recombinaison sont négligeables.

**(H5)** La permittivité est constante.

Sous ces hypothèses, un modèle approprié dit modèle de dérive-diffusion unipolaire a été étudié par Mock [30] puis par Kerkhoven [19].

Dans [30] Mock a démontré l'unicité des solutions pour les équations de dérive-diffusion à potentiel donné pour des différences de potentiel suffisamment petites (i.e. au voisinage de l'équilibre) dans le cas multi-dimensionnel avec un terme de génération-recombinaison nul. Cependant dans [19] Kerkhoven démontre l'existence et l'unicité des solutions pour le modèle à courant donné dans le cas où  $|I|$  est suffisamment petit, c'est-à-dire dans un voisinage de l'équilibre électrique.

Sous forme normalisée le système modélisant le transport des électrons dans un semi-conducteur s'écrit

$$\varepsilon \Delta \phi_\varepsilon = \delta^2 (e^{\phi_\varepsilon} u_\varepsilon - e^{-\phi_\varepsilon}) - N \text{ dans } \Omega, \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \cdot (e^{\phi_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (3.2.2)$$

Les conditions aux limites sont de type mêlé et sont données par

$$(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon) = (\phi_D, u_D) \text{ sur } \Gamma_D, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \quad (3.2.4)$$

où  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N$  étant de mesure nulle par rapport à la mesure de  $\partial\Omega$ .

Les inconnues sont les fonctions  $\phi_\varepsilon$ ,  $u_\varepsilon$  qui représentent respectivement le potentiel électrostatique et la variable de Slotboom. Les constantes strictement positives  $\varepsilon$  et  $\delta$  et la

fonction  $N$ , appelée dopage, sont des caractéristiques physique du semi-conducteur. Dans la suite on suppose que  $\delta$  est fixé et que  $\varepsilon \ll 1$ . Les données au bord  $\phi_D, u_D$  dépendent d'un paramètre vectoriel qui représente les potentiels appliqués aux différents contacts ohmiques.

On suppose dans toute la suite de ce Chapitre que  $\phi_D$  et  $u_D$  vérifient

**(H6)**  $\exists \beta_- > 0, \beta_+ > 0$  indépendantes de  $\varepsilon$  et telles que  $\beta_- \leq u_D \leq \beta_+$  sur  $\Gamma_D$ ,

et

**(H7)**  $\phi_D, u_D$  admettent des relèvements  $\phi^*, u^*$  dans  $W^{2,p_0}(\Omega)$  vérifiant  $\frac{\partial \phi^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$  sur  $\Gamma_N$ ,

pour un certain  $p_0 > 2$  qui sera précisé ultérieurement. On s'intéresse dans ce travail à l'analyse par perturbations singulières du système (3.2.1)-(3.2.4) pour  $\varepsilon$  voisin de zéro. On note  $(\mathcal{P}\mathcal{U})_\varepsilon$  le système formé par (3.2.1)-(3.2.4). On rappelle que pour  $N \in L^\infty(\Omega)$ , le problème  $(\mathcal{P}\mathcal{U})_\varepsilon$  admet au moins une solution dans  $(H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$ , notée  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  et vérifiant

$$\phi_- \leq \phi_\varepsilon \leq \phi_+, \quad \beta_- \leq u_\varepsilon \leq \beta_+ \text{ dans } \Omega, \quad (3.2.5)$$

où  $\phi_-, \phi_+, \beta_-, \beta_+$  sont des constantes indépendantes de  $\varepsilon$  ( $\beta_-$  et  $\beta_+$  étant données dans (H6)).

Pour simplifier, et mieux dégager les idées fondamentales, nous envisageons le cas où le dispositif est matérialisé par l'ouvert  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  avec  $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  où  $\Gamma_0 = \{0\} \times (0, 1)$  et  $\Gamma_1 = \{1\} \times (0, 1)$ . D'autre part on suppose que

**(H8)**  $\delta^2 (e^{\phi_D} u_D - e^{-\phi_D}) - N = 0$  sur  $\Gamma_1$ ,

et

**(H9)**  $N \in W^{2,p_0}(\Omega)$  et  $\frac{\partial N}{\partial y}(0, y) = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = 1$ .

L'hypothèse simplificatrice (H8), consiste à supposer que la condition d'électro-neutralité n'est satisfaite que sur  $\Gamma_1$ .

Le problème  $(\mathcal{P}\mathcal{U})_\varepsilon$  est un problème de perturbations singulières puisque le problème limite formel

$$\begin{aligned} 0 &= \delta^2 (e^{\phi_0} u_0 - e^{-\phi_0}) - N \text{ dans } \Omega \\ \nabla \cdot (e^{\phi_0} \nabla u_0) &= 0 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$



admet une solution ne vérifiant pas a priori les conditions au bord sur  $\Gamma_0$ .

Dans [24], un développement asymptotique formel des solutions est proposé. Ce développement inclut des termes correcteurs au voisinage des surfaces de discontinuité de  $N$ , et éventuellement au voisinage de  $\Gamma_D$  si la condition d'électro-neutralité

$$\delta^2 \left( e^{\phi_D} u_D - e^{-\phi_D} \right) - N = 0,$$

n'est pas vérifiée sur  $\Gamma_D$ .

### 3.2.1 Développement asymptotique pour les équations de dérive-diffusion dans le cas de semi-conducteurs unipolaires

On se propose d'étudier, la limite des solutions  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  du système  $(\mathcal{PU})_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ . Auparavant, on procède comme dans l'article de Markowich [22] ; on cherche  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  sous forme d'un développement asymptotique, soit

$$\begin{pmatrix} \phi_\varepsilon(x, y) \\ u_\varepsilon(x, y) \end{pmatrix} \simeq \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \phi_i(x, y) + \hat{\phi}_i(\tau(x), y)M(x) \\ u_i(x, y) + \hat{u}_i(\tau(x), y)M(x) \end{pmatrix} (\sqrt{\varepsilon})^i \quad (3.2.6)$$

où  $\tau(x, y) = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$  est la composante rapide, par rapport à  $y$  la composante lente.  $M$  est une fonction de troncature de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x \leq \alpha/2 \\ 0 & \text{pour } \alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

avec  $\alpha \in (0, 1)$  suffisamment petit donné.

Les fonctions  $(\phi_i, u_i)$  sont appelées solutions réduites d'ordre  $i$ , elles sont indépendantes de  $\varepsilon$ . Les fonctions  $\hat{\phi}_i, \hat{u}_i$  sont appelées correcteurs ou encore couche limite d'ordre  $i$ , elles sont définies sur  $(0, \infty) \times \Gamma_0$  et on leur impose ainsi qu'à leurs dérivées de décroître exponentiellement lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ .

En remplaçant formellement  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  par leurs développements asymptotiques donnés par (3.2.6) dans les expressions (3.2.1)-(3.2.2) et en identifiant terme à terme par puissance de  $\varepsilon$ , on obtient les problèmes suivants à résoudre.

**A) Le problème limite ou encore problème réduit d'ordre 0.** Le problème réduit est obtenu (sous forme faible) à partir de  $(\mathcal{PU})_\varepsilon$  en faisant  $\varepsilon = 0$  dans (3.2.1)

$$0 = \delta^2 \left( e^{\phi_0} u_0 - e^{-\phi_0} \right) - N \text{ dans } \Omega \quad (3.2.7)$$

$$\nabla \cdot (e^{\phi_0} \nabla u_0) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (3.2.8)$$

auquel nous associerons les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$  suivantes

$$u_0 = u_D > 0 \text{ sur } \Gamma_D \quad (3.2.9)$$

$$\phi_0 = \phi_D \text{ sur } \Gamma_1 \quad (3.2.10)$$

où

$$\phi_0 = \log \left\{ \frac{N + \sqrt{N^2 + 4u_0^* \delta^4}}{2u_0^* \delta^2} \right\} \text{ sur } \Gamma_0 \text{ où } u_0^* = u_0|_{\Gamma_0} \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \nu} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \quad (3.2.12)$$

Par la suite, on notera  $(\phi_0, u_0)$  par  $(\phi, u)$ . On rappelle que pour  $N \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ , le problème réduit (3.2.7)-(3.2.12) qui sera désigné dans ce qui suit par  $(\mathcal{PRU})$  admet au moins une solution  $(\phi, u)$  dans  $L^\infty(\Omega) \times (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$  ; de plus cette solution vérifie (3.2.5) (voir [22]).

**Remarque 3.2** *Henry et al. [18] ont montré que (3.2.11)-(3.2.12) sont les conditions aux limites associées au problème réduit.*

**B) Le problème de couche limite d'ordre 0.** En évaluant les termes d'ordre  $\varepsilon^{-1}$  dans l'équation de continuité des électrons (3.2.2), on obtient

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \tau^2}(\tau, y) + \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \tau}(\tau, y) \cdot \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \tau}(\tau, y) = 0.$$

Alors, on a  $\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \tau}(\tau, y) = \alpha(y)e^{-\hat{\phi}_0(\tau, y)}$  et par conséquent en utilisant la décroissance exponentielle de  $\hat{u}_0$  et de  $\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \tau}(\tau, y)$  lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , on en déduit que  $\hat{u}_0 \equiv 0$ . Autrement dit  $u$  n'admet pas de couche limite d'ordre 0.

En évaluant les termes d'ordre  $\varepsilon^{-1/2}$  dans l'équation de continuité des électrons (3.2.2), on obtient ( $\hat{\phi}_0$  et  $\hat{u}_1$  étant remplacés respectivement par  $\hat{\phi}$  et  $\hat{u}$ )

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \tau^2}(\tau, y) + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(\tau, y) \cdot \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau}(\tau, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) \right) = 0 \quad \forall \tau > 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau}(\tau, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y)(e^{-\hat{\phi}(\tau, y)} - 1) \quad \forall \tau > 0. \quad (3.2.13)$$

Le terme de couche limite d'ordre 0 pour  $\hat{\phi}$  s'obtient en évaluant les termes d'ordre 1 dans l'équation de Poisson (3.2.1), on obtient alors

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \tau^2}(\tau, y) = \delta^2 \left( e^{\phi(0,y) + \hat{\phi}(\tau,y)} u(0, y) - e^{-\phi(0,y) - \hat{\phi}(\tau,y)} \right) - N(0, y) \quad \forall \tau > 0. \quad (3.2.14)$$

Il reste à obtenir les conditions aux limites associées au problème de couche limite. On utilise pour cela les conditions aux limites de  $\phi_\varepsilon$  dans le développement asymptotique pour  $\phi_\varepsilon$  et on identifie par puissance de  $\varepsilon$ , d'où

$$\hat{\phi}(0, y) = \phi_D(0, y) - \log \left\{ \frac{N + \sqrt{N^2 + 4u_0^* \delta^4}}{2u_0^* \delta^2} \right\}. \quad (3.2.15)$$

D'autre part la décroissance exponentielle imposée à  $\hat{\phi}$  implique

$$\hat{\phi}(\infty, y) = 0, \text{ pour } 0 \leq y \leq 1. \quad (3.2.16)$$

Rappelons que si  $N \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  alors pour une solution faible donnée  $(\phi, u)$  du problème réduit  $(\mathcal{PRU})$ , le problème de couche limite d'ordre zéro (3.2.14)-(3.2.16) admet une solution unique  $\hat{\phi}$ , monotone par rapport à  $\tau$  pour tout  $y \in (0, 1)$ . De plus  $\tau \rightarrow \frac{\partial^p \hat{\phi}}{\partial \tau^p}(\tau, y)$  décroît exponentiellement lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$  et  $p \geq 0$  (voir [24]).

On suppose que  $R = 0$  et que  $\mu_n, \mu_p$  sont des constantes strictement positives. On considère le système normalisé (2.2.12), en variables  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ . On rappelle que l'existence de solutions pour le problème réduit et le problème de couche limite (d'ordre zéro) est démontré dans [24]. La convergence dans  $(L^2(\Omega))^3$  de sous suites de solutions de (2.2.12) vers des solutions du problème réduit est établie dans [18]. Des estimations uniformes d'erreur asymptotique ont été obtenues dans le cas uni-dimensionnel et au voisinage de l'équilibre dans [2] (voir aussi [3, 24]) et sous des hypothèses restrictives sur  $N$  (cas d'une diode symétrique) dans [4, 25]. Dans le cas multi-dimensionnel, des estimations d'erreur dans  $L^\infty(\Omega)$  ont été obtenues uniquement dans le cas de l'équilibre ([2, 24]). Dans ce cas, le système (2.2.12) se réduit à l'équation de Poisson non linéaire suivante

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta \phi_\varepsilon & = \delta^2 e^{\phi_\varepsilon} - \delta^2 e^{-\phi_\varepsilon} - N(x), & x \in \Omega \\ \phi_\varepsilon |_{\Gamma_D} & = \phi_{bi} |_{\Gamma_D} \\ \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu} |_{\Gamma_N} & = 0 \end{cases} \quad (3.2.17)$$

où  $\phi_{bi}(x) = \log \left( \frac{N(x) + (N^2(x) + 4\delta^4)^{1/2}}{2\delta^2} \right)$ .

On fait les hypothèses suivantes

.  $\partial\Omega$  est lipschitzienne et  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux, et la mesure (au sens de Lebesgue) dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  de  $\Gamma_D$  est strictement positive.

. La jonction  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et que  $\bar{\Gamma}$  intersecte  $\partial\Omega$  en deux points  $s_1$  et  $s_2$  qui sont à une distance strictement positive de  $\Gamma_D$ . Il existe deux sphères de rayon  $\omega$  centrées en  $s_1$  et  $s_2$  à l'intérieur desquelles  $\Gamma$  et  $\partial\Omega$  sont perpendiculaires.

.  $N$  est constante par sous-domaine, c'est-à-dire

$$N = \begin{cases} N_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ N_2 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

où  $N_1$  et  $N_2$  sont des constantes vérifiant  $N_1 \neq N_2$ .

On reprend les notations précédentes.  $M$  est maintenant une fonction sur  $\mathbb{R}$  donnée par

$$M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}] \\ 0 & \text{pour } \omega \leq |t|. \end{cases}$$

Comme la solution  $\hat{\phi}\left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, s\right)$  du problème de couche limite est définie sur une "bande" ouverte  $S_\omega(\Gamma)$  autour de  $\Gamma$ , on introduit la fonction  $\hat{\phi}_\Omega\left(\frac{t(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, s(x)\right)$  définie sur  $\Omega$  par

$$\hat{\phi}_\Omega\left(\frac{t(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, s(x)\right) := \begin{cases} \hat{\phi}\left(\frac{t(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, s(x)\right) M(t(x)), & x \in S_\omega(\Gamma) \\ 0, & x \notin S_\omega(\Gamma). \end{cases}$$

**Remarque 3.3**  $t(x)$  désigne la distance orientée de  $x$  à  $\Gamma$  et  $s(x)$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $\Gamma$ .

Markowich a démontré le résultat suivant

**Théorème 3.4** *On suppose que  $N$ ,  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  et  $\Gamma$  vérifient les hypothèses mentionnées ci-dessus. Alors l'unique solution  $\phi_\varepsilon = \phi_\varepsilon$  du problème (3.2.17) vérifie*

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi_{bi}(x) + \hat{\phi}_\Omega\left(\frac{t(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, s(x)\right) + O\left(\sqrt{\varepsilon} |\log(\delta)|^{5/2}\right)$$

uniformément pour  $x \in \Omega$ , pourvu que  $\sqrt{\varepsilon}$  et  $\sqrt{\varepsilon} |\log(\delta)|^{5/2}$  soient suffisamment petits.

Plus récemment, le résultat suivant de F. Alabau et M. Moussaoui [10] complète des travaux antérieurs de F. Alabau, et donne dans le cas multi-dimensionnel des estimations d'erreur asymptotique dans  $L^2(\Omega)$  valables au voisinage de l'équilibre et dans le cas de couche limite interne.

On se place dans le cas où  $n = 2$  et on pose  $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$ ,  $\Omega_+ = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\Omega_- = (-1, 0) \times (0, 1)$  et  $\Gamma = \{0\} \times (0, 1)$ .

**Théorème 3.5** *On fait les hypothèses suivantes*

- .  $\exists \beta_- > 0, \beta_+ > 0$  indépendantes de  $\varepsilon$  et telles que  $\beta_- \leq u_D, v_D \leq \beta_+$  sur  $\Gamma_D$ .
- .  $\phi_D, u_D, v_D$  admettent des relèvements  $\phi^*, u^*, v^*$  dans  $W^{2,p_0}(\Omega)$  vérifiant  $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial v^*}{\partial \nu} = 0$  sur  $\Gamma_N$ , pour un certain  $p_0 > 2$ .
- .  $\delta^2 (e^{\phi_D} u_D - e^{-\phi_D} v_D) - N = 0$  sur  $\Gamma_D$ .
- .  $N|_{\Omega_i} \in W^{2,p_0}(\Omega_i)$  pour  $i = \pm$ .
- .  $\frac{\partial N}{\partial \nu} = 0$  dans un voisinage dans  $(\Gamma_N)$  de  $\Gamma \cap \Gamma_N$ .

Alors il existe deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $\varepsilon$  telles que si  $u^*$  et  $v^*$  vérifient

$$\| \nabla u^* \|_{0,\infty} + \| \nabla v^* \|_{0,\infty} + \| \nabla \partial_y u^* \|_{0,p_0} + \| \nabla \partial_y v^* \|_{0,p_0} \leq C_1$$

alors pour tout  $p \geq 2$  on a les estimations suivantes

$$\| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,2} + \| u_\varepsilon - u \|_{0,2} + \| v_\varepsilon - v \|_{0,2} \leq C_2 p \varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}},$$

$$\| u_\varepsilon - u \|_{1,2} + \| v_\varepsilon - v \|_{1,2} \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur le résultat de régularité  $W^{1,p_0}$  de Meyers [27] pour les opérateurs de type divergence (ceci pour un certain  $p_0 > 2$ ), sur un résultat de monotonie uniforme par rapport à  $\varepsilon$  et sur l'unicité des solutions du problème réduit pour de faibles différences de potentiel appliqué.

Notre but est de décrire le comportement de la solution  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  lorsque le paramètre ( $\varepsilon > 0$ ) tend vers zéro. Il s'agit là d'un problème de perturbation singulière pour lequel

une “couche limite” se forme au voisinage du bord  $\partial\Omega$ .

Le résultat principal consiste d’une part à établir des résultats de convergence uniforme, et d’autre part la convergence dans  $L^2(\Omega)$  de l’erreur asymptotique (i.e. de la différence entre les solutions et le premier terme du développement asymptotique) ceci sans restriction sur la différence de potentiel appliqué.

Ce travail est basé essentiellement sur un résultat d’unicité des solutions du problème réduit, couplé avec des techniques variationnelles. Ces résultats étendent des résultats antérieurs de Markowich (86), Henry et al. (89), Alabau et al. (96).

L’unicité des solutions du problème réduit sans restriction sur les potentiels appliqués explique en partie pourquoi on peut obtenir une telle estimation sans restriction sur le potentiel appliqué, contrairement au cas bipolaire.

### 3.2.2 Unicité des solutions du problème réduit

Comme nous l’avons rappelé auparavant, l’existence de solutions pour le problème réduit ( $\mathcal{PRU}$ ) est démontrée dans [22]. Mais ce problème dans le cas général (modèle bipolaire) n’admet pas une solution unique. Le résultat suivant est fondamental ; il montre que dans le cas de semi-conducteurs unipolaires le problème réduit admet une solution unique.

**Théorème 3.6** *On fait les hypothèses (H6)-(H8) et de plus  $N \in W^{2,p_0}(\Omega)$ . Alors il existe  $(\phi, u) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$  unique solution du problème réduit ( $\mathcal{PRU}$ ). De plus cette solution  $(\phi, u)$  appartient à  $W^{2,p_0}(\Omega)$  et si  $N \in W^{2,\infty}(\Omega)$ , on a  $\Delta\phi \in L^\infty(\Omega)$ .*

#### Démonstration

D’après l’égalité (3.2.7) on a  $\phi = \log \left\{ \frac{N + \sqrt{N^2 + 4u\delta^4}}{2u\delta^2} \right\}$ . Il résulte par conséquent du théorème de régularité prouvé dans [10] (voir théorème 2) que toute solution faible  $(\phi, u)$  du problème réduit ( $\mathcal{PRU}$ ) est dans  $(W^{2,p_0}(\Omega))^2$ .

Supposons maintenant qu’il existe deux solutions faibles  $(\phi_1, u_1), (\phi_2, u_2)$  du système ( $\mathcal{PRU}$ ) et soit  $\phi = \phi_1 - \phi_2$ .

Par le changement de variable  $n_i = \delta^2 e^{\phi_i} u_i$ ,  $p_i = \delta^2 e^{-\phi_i}$  pour  $i=1,2$  on obtient

$$n_1 - n_2 = \delta^2 (e^{-\phi_1} - e^{-\phi_2}) \quad (3.2.18)$$

En utilisant (3.2.8) on en déduit que  $n_1 - n_2$  est une solution faible du problème suivant

$$\Delta(n_1 - n_2) = \nabla \cdot ((n_1 - n_2)\nabla\phi_1) + \nabla \cdot (n_2\nabla(\phi_1 - \phi_2)) \quad (3.2.19)$$

Reportant (3.2.18) dans (3.2.19), il vient

$$\delta^2 \nabla. \left( e^{\phi_1} \nabla \left( e^{-2\phi_1} \frac{1 - e^\phi}{\phi} \right) \right) = \nabla. (n_2 \nabla \phi) \quad (3.2.20)$$

Nous introduisons ensuite deux fonctions  $\beta$  et  $g$  définies par

$$\beta(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

et

$$g(x, y) = e^{-2\phi_1(x, y)} \cdot \beta(\phi(x, y)) \quad (3.2.21)$$

D'après ce qui précède, on a  $\phi_1, \phi_2 \in L^\infty(\Omega)$ , et grâce à la positivité de  $\beta$ , on en déduit qu'il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que  $g(x, y) \geq \lambda$  pour tout  $(x, y) \in \Omega$ .

En combinant (3.2.20) et (3.2.21), il vient

$$\delta^2 \nabla. (e^{\phi_1} \nabla (g\phi)) + \nabla. (n_2 \nabla \phi) = 0 \quad (3.2.22)$$

On multiplie l'équation (3.2.22) par  $h \in H^2(\Omega)$  telle que  $h = 0$  sur  $\Gamma_D$  et  $\frac{\partial h}{\partial \nu} = 0$  sur  $\Gamma_N$ . Intégrant par parties, il vient

$$\int_{\Omega} \phi \left( \delta^2 g \nabla. (e^{\phi_1} \nabla h) + \nabla. (n_2 \nabla h) \right) dx dy = 0 \quad (3.2.23)$$

Introduisant  $k$  solution du problème suivant

$$\begin{cases} \delta^2 g \nabla. (e^{\phi_1} \nabla k) + \nabla. (n_2 \nabla k) = \phi & \text{dans } \Omega, \\ k = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial k}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.2.24)$$

En posant  $a = \delta^2 g e^{\phi_1} + n_2$  et  $b = \delta^2 g e^{\phi_1} \nabla \phi_1 + \nabla n_2$ , le problème (3.2.24) revient à chercher  $k$  tel que

$$\begin{cases} \nabla. (a \nabla k) + (b - \nabla a) \cdot \nabla k = \phi & \text{dans } \Omega, \\ k = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial k}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Comme  $\phi, u \in W^{2,p_0}(\Omega)$  il en résulte que  $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et  $b \in (C(\bar{\Omega}))^2$ . De plus, on a  $a \geq \alpha > 0$ . Par conséquent en appliquant les résultats de Trudinger [17] nous voyons que

le problème (3.2.25) admet une unique solution  $k$ .

On applique (3.2.23) à  $k$  au lieu de  $h$ . Il vient  $\|\phi\|_{L^2(\Omega)} = 0$  et grâce à (3.2.18) on obtient  $\phi_1 = \phi_2$  et  $u_1 = u_2$ .

On en conclut que le problème réduit ( $\mathcal{PRU}$ ) admet une solution unique.

Montrons maintenant que  $\Delta\phi \in L^\infty(\Omega)$  si  $N \in W^{2,\infty}(\Omega)$ . Grâce à l'équation (3.2.7), on a

$$\Delta N(x, y) = \Delta \left( \delta^2(e^{\phi(x,y)}u(x, y) - e^{-\phi(x,y)}) \right) \text{ dans } \Omega$$

D'où il résulte que sur  $\Omega$ , on a

$$\delta^2(e^{\phi}u + e^{-\phi})\Delta\phi = \Delta N - \delta^2 e^{\phi}\Delta u - 2\delta^2 e^{\phi}\nabla\phi \cdot \nabla u - \delta^2(e^{\phi}u - e^{-\phi})|\nabla\phi|^2 \quad (3.2.26)$$

D'autre part, on déduit de (3.2.8) que

$$\Delta u = -\nabla\phi \cdot \nabla u \text{ dans } \Omega \quad (3.2.27)$$

Enfin en combinant (3.2.26) et (3.2.27), il vient

$$\delta^2(e^{\phi}u + e^{-\phi})\Delta\phi = \Delta N - \delta^2 e^{\phi}\Delta u - \delta^2(e^{\phi}u - e^{-\phi})|\nabla\phi|^2 \text{ sur } \Omega \quad (3.2.28)$$

Grâce aux hypothèses du théorème 3.6 on sait que  $\phi, u \in W^{2,p_0}(\Omega)$ . Comme  $W^{2,p_0}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$  avec injection continue car  $p_0 > 2$ , on obtient finalement que le second membre de la relation (3.2.28) est dans  $L^\infty(\Omega)$ . Ceci termine la démonstration du théorème.

### 3.2.3 Estimations uniformes

Dans toute la suite  $C$  désignera une constante indépendante de  $\varepsilon$  et nous utiliserons les notations suivantes

$$S_\varepsilon(x, y) = n_\varepsilon(x, y) + p_\varepsilon(x, y), \quad D_\varepsilon(x, y) = n_\varepsilon(x, y) - p_\varepsilon(x, y),$$

$$S(x, y) = n(x, y) + p(x, y), \quad D(x, y) = n(x, y) - p(x, y),$$

$$\hat{D}_\varepsilon(x, y) = \delta^2 \left( e^{\phi(0,y) + \hat{\phi}_\varepsilon(x,y)} u(0, y) - e^{-\phi(0,y) - \hat{\phi}_\varepsilon(x,y)} \right),$$

$$\psi_\varepsilon(x, y) = \phi(x, y) + M(x)\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (3.2.29)$$

$$\hat{\phi}_\varepsilon(x, y) = \hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y), \quad \hat{D}_\varepsilon(x, y) = \hat{D}(x\varepsilon^{-1/2}, y). \quad (3.2.30)$$



On définit  $\tilde{u}_\varepsilon$  solution de l'équation de continuité (3.2.2) où  $\phi_\varepsilon$  est remplacée par  $\psi_\varepsilon$ , associées aux conditions aux limites correspondantes, soit

$$\begin{cases} \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla \tilde{u}_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{u}_\varepsilon = u_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.2.31)$$

On pose alors

$$\tilde{S}_\varepsilon(x, y) = \tilde{n}_\varepsilon(x, y) + \tilde{p}_\varepsilon(x, y), \quad \tilde{D}_\varepsilon(x, y) = \tilde{n}_\varepsilon(x, y) - \tilde{p}_\varepsilon(x, y),$$

où  $\tilde{n}_\varepsilon = \delta^2 e^{\psi_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon$  et  $\tilde{p}_\varepsilon = \delta^2 e^{-\psi_\varepsilon}$ .

L'objet de ce Chapitre est d'aboutir au résultat suivant

**Théorème 3.7** *Supposons les hypothèses (H6)-(H9) vérifiées et supposons en outre que  $N \in W^{2,\infty}(\Omega)$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,2} \leq C \varepsilon^{1/8} | \ln \varepsilon | .$$

La démonstration de ce théorème, s'appuie sur une série de lemmes auxiliaires. Nous énonçons tout d'abord le

**Lemme 3.2** *On fait les hypothèses du théorème 3.7. Soit  $(\phi, u) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$  l'unique solution du problème réduit. Alors*

*$u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon$  converge fortement dans  $L^\infty(\Omega)$  vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

### Démonstration

Le résultat de régularité prouvé par Meyer dans [27] appliqué aux équations (3.2.2) et (3.2.31) assure qu'il existe un nombre  $p_0 > 2$ , qui ne dépend que de  $\Omega$ ,  $\phi_-$  et  $\phi_+$ , tel que

$$\| \nabla u_\varepsilon \|_{L^{p_0}(\Omega)}, \| \nabla \tilde{u}_\varepsilon \|_{L^{p_0}(\Omega)} \leq C. \quad (3.2.32)$$

D'autre part, en soustrayant l'équation de continuité satisfaite par  $\tilde{u}_\varepsilon$  à celle satisfaite par  $u$ , on obtient

$$\begin{cases} \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla (\tilde{u}_\varepsilon - u)) = -\nabla \cdot ((e^{\psi_\varepsilon} - e^\phi) \nabla u) \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{u}_\varepsilon - u = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial (\tilde{u}_\varepsilon - u)}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Introduisant la solution  $z_\varepsilon$  du problème suivant

$$\begin{cases} \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla z_\varepsilon) = \tilde{u}_\varepsilon - u \text{ dans } \Omega, \\ z_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.2.34)$$

Multipliant l'équation (3.2.33) par  $z_\varepsilon$ , il vient après des intégrations par parties

$$\| \tilde{u}_\varepsilon - u \|_{0,2}^2 = \int_{\Omega} (e^{\psi_\varepsilon} - e^\phi) \nabla u \cdot \nabla z_\varepsilon \, dx dy$$

Appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\| \tilde{u}_\varepsilon - u \|_{0,2}^2 \leq \| \nabla u \|_{0,\infty} \| \psi_\varepsilon - \phi \|_{0,q} \| \nabla z_\varepsilon \|_{0,p},$$

pour tout  $p \geq 2$  et où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

D'après (3.2.29) et en faisant le changement de variable  $\tau = x\varepsilon^{-1/2}$  dans l'intégrale

$\| \psi_\varepsilon - \phi \|_{0,q}$ , on obtient alors une estimation de la forme

$$\| \tilde{u}_\varepsilon - u \|_{0,2}^2 \leq C \varepsilon^{1/2-1/2p} \| \nabla z_\varepsilon \|_{0,p} \quad \forall p \geq 2.$$

Appliquant le lemme 2 prouvé dans [10] à la solution  $z_\varepsilon$  du problème (3.2.34), il vient

$$\| \tilde{u}_\varepsilon - u \|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \quad \forall p \geq 2. \quad (3.2.35)$$

Rappelons (Henry-Bento Louro [18]) que pour toute suite de solutions  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  du problème  $(\mathcal{P}\mathcal{U})_\varepsilon$ , il existe une sous-suite extraite encore notée  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$  qui converge vers  $(\phi, u)$  dans  $(L^2(\Omega))^2$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro ( $(\phi, u)$  étant la solution faible du problème réduit  $(\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{U})$ ).

Grâce à l'inégalité (3.2.32) et aux théorèmes d'injection de Sobolev, on a, après au besoin extraction d'une sous-suite

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon &= u' \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ fort,} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{u}_\varepsilon &= u^* \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ fort,} \end{aligned}$$

D'après l'unicité de la solution du problème réduit  $(\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{U})$ , on a  $u' = u$ . Comme d'autre part  $\tilde{u}_\varepsilon \rightarrow u^*$  dans  $L^\infty(\Omega)$  fort si  $\varepsilon \rightarrow 0$  et grâce à l'inégalité (3.2.35), on a  $u = u^*$ .

Utilisant l'inégalité  $\| u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon \|_{0,\infty} \leq \| u_\varepsilon - u \|_{0,\infty} + \| u - \tilde{u}_\varepsilon \|_{0,\infty}$ , on obtient, après au besoin extraction d'une sous-suite,

$$u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ fort.}$$

En appliquant le théorème 3.6, on voit que ce résultat demeure valable pour toute la suite  $(\phi_\varepsilon, u_\varepsilon)$ .

**Lemme 3.3** *Supposons remplies toutes les conditions du théorème 3.7. Alors on a*

- (1)  $\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^\infty(\Omega)$  fort si  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,
- (2)  $\|\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2} \leq C$ .

### Démonstration

On s'inspire des techniques développées par Henry et Louro ([18, 21]).

On vérifie que la fonction  $\psi_\varepsilon$  définie par (3.2.29) est une solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta\psi_\varepsilon = \delta^2 (e^{-\psi_\varepsilon} - \tilde{u}_\varepsilon e^{\psi_\varepsilon}) + N + g_\varepsilon \text{ dans } \Omega, \\ \psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon \text{ sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.2.36)$$

où  $g_\varepsilon$  est donnée par

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x, y) &= -\varepsilon\Delta\phi(x, y) - \varepsilon\hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \cdot \frac{d^2M}{dx^2} - 2\varepsilon^{1/2} \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\tau}(x\varepsilon^{-1/2}, y) \cdot \frac{dM}{dx} - \varepsilon \frac{\partial^2\hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y^2}(x, y) \cdot M(x) \\ &\quad - \left( \delta^2 (e^{\phi(0,y)+\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)} u(0, y) - e^{-\phi(0,y)-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)}) - N(0, y) \right) M(x) \\ &\quad + \left( \delta^2 (e^{\psi_\varepsilon(x,y)} \tilde{u}_\varepsilon(x, y) - e^{-\psi_\varepsilon(x,y)}) - N(x, y) \right). \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $G_\varepsilon$  une solution faible de l'équation.

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta G_\varepsilon = \delta^2 (e^{-\phi-G_\varepsilon} - u_\varepsilon e^{\phi+G_\varepsilon}) + N \text{ dans } \Omega \\ G_\varepsilon = G_D = \phi_\varepsilon - \phi \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.2.38)$$

D'après (3.2.5) et grâce au principe du maximum faible, il est classique que le problème (3.2.38) (problème elliptique semi-linéaire) admet une solution faible unique  $G_\varepsilon$  bornée dans  $L^\infty(\Omega)$  par une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Si l'on pose  $\varphi_\varepsilon = \psi_\varepsilon - \phi - G_\varepsilon$  alors on a

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta\varphi_\varepsilon - \varepsilon\Delta\phi + \delta^2 e^{\psi_\varepsilon} (\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon) - g_\varepsilon = -\delta^2 e^{\psi_\varepsilon} u_\varepsilon (1 - e^{-\varphi_\varepsilon}) - \delta^2 e^{-\psi_\varepsilon} (e^{\varphi_\varepsilon} - 1) \text{ dans } \Omega \\ \varphi_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.2.39)$$

En multipliant (3.2.39) par  $\varphi_\varepsilon^{2p+1}$  pour  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} & \delta^2 \int_{\Omega} e^{\psi_\varepsilon} u_\varepsilon (1 - e^{-\varphi_\varepsilon}) \varphi_\varepsilon^{2p+1} dx dy + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} (e^{\varphi_\varepsilon} - 1) \varphi_\varepsilon^{2p+1} dx dy \\ & = \\ & -(2p+1)\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 \varphi_\varepsilon^{2p} dx dy + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta \phi \cdot \varphi_\varepsilon^{2p+1} dx dy \\ & - \delta^2 \int_{\Omega} e^{\psi_\varepsilon} (\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon) \varphi_\varepsilon^{2p+1} dx dy + \int_{\Omega} g_\varepsilon \varphi_\varepsilon^{2p+1} dx dy \end{aligned}$$

Les fonctions  $e^{\psi_\varepsilon} u_\varepsilon$  et  $e^{-\psi_\varepsilon}$  étant uniformément bornées indépendamment de  $\varepsilon$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} C \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)}^{2p+2} + (2p+1)\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 \cdot \varphi_\varepsilon^{2p} dx dy & \leq \varepsilon \|\Delta \phi\|_{L^{2p+2}(\Omega)} \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)}^{2p+1} \\ & + C \|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)}^{2p+1} \\ & + C \|g_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)}^{2p+1} \end{aligned}$$

d'où

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)} \leq C \left( \varepsilon \|\Delta \phi\|_{L^{2p+2}(\Omega)} + \|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \quad (3.2.40)$$

D'autre part,  $g_\varepsilon$  peut s'écrire sous la forme

$$g_\varepsilon = R_{1\varepsilon} + R_{2\varepsilon} + \delta^2 e^{\psi_\varepsilon} (\tilde{u}_\varepsilon - u),$$

où

$$R_{1\varepsilon} = -\varepsilon \hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} - 2\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(x\varepsilon^{-1/2}, y) \cdot \frac{dM}{dx} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y^2}(x, y) \cdot M(x) - \varepsilon \Delta \phi, \quad (3.2.41)$$

et

$$\begin{aligned} R_{2\varepsilon}(x, y) = & - \left( \delta^2 \left( e^{\phi(0, y) + \hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} u(0, y) - e^{-\phi(0, y) - \hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} \right) - N(0, y) \right) M(x) \\ & + \delta^2 \left( e^{\psi_\varepsilon(x, y)} u(x, y) - e^{-\psi_\varepsilon(x, y)} - e^{\phi(x, y)} u(x, y) + e^{-\phi(x, y)} \right). \end{aligned}$$

On peut aisément montrer que  $R_{1\varepsilon} \rightarrow 0$  dans  $L^\infty(\Omega)$  fort si  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Montrons maintenant que  $R_{2\varepsilon} \rightarrow 0$  dans  $L^\infty(\Omega)$  fort si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Comme sur  $[0, \frac{\alpha}{2}]$ ,  $M = 1$ . Nous voyons que

$$R_{2\varepsilon} = \delta^2 \left( e^{\phi(x, y)} u(x, y) - e^{\phi(0, y)} u(0, y) \right) \left( e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} - 1 \right) - \delta^2 \left( e^{-\phi(x, y)} - e^{-\phi(0, y)} \right) \left( e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} - 1 \right)$$

D'après le théorème 3.6, on sait que  $\phi, u \in W^{2,p_0}(\Omega)$ . De plus, puisque  $p_0 > 2$ , on en déduit alors que  $\phi, u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ .

Appliquant l'inégalité de Hardy sur  $[0, \frac{\alpha}{2}]$ , il vient

$$\begin{aligned} |R_{2\varepsilon}| &\leq \delta^2 |e^{\phi(x,y)}u(x,y) - e^{\phi(0,y)}u(0,y)| |e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)} - 1| \\ &\quad + \delta^2 |e^{-\phi(x,y)} - e^{-\phi(0,y)}| |e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)} - 1| \end{aligned}$$

$$|R_{2\varepsilon}| \leq \delta^2 \left( \|\nabla(e^\phi u)\|_{L^\infty(\Omega_i)} \cdot |x\varepsilon^{-1/2}(e^{\hat{\phi}} - 1)| \varepsilon^{1/2} + \|\nabla(e^{-\phi})\|_{L^\infty(\Omega_i)} \cdot |x\varepsilon^{-1/2}(e^{-\hat{\phi}} - 1)| \varepsilon^{1/2} \right)$$

Or puisque  $\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}(e^{\hat{\phi}} - 1)$  et  $\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}(e^{-\hat{\phi}} - 1)$  sont uniformément bornées indépendamment de  $\varepsilon$  dans  $L^\infty$ , on obtient

$$\|R_{2\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C \varepsilon^{1/2},$$

où  $\Omega_i = (0, \frac{\alpha}{2}] \times (0, 1)$ . Sur  $\Omega - \Omega_i$ , on réécrit  $R_{2\varepsilon}$  sous la forme suivante

$$\begin{aligned} R_{2\varepsilon}(x,y) &= -\delta^2 e^{\phi(x,y)}u(x,y) \left(1 - e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)M(x)} + (e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)} - 1)M(x)\right) \\ &\quad - \delta^2 \left(e^{\phi(0,y)}u(0,y) - e^{\phi(x,y)}u(x,y)\right) (e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)} - 1)M(x) \\ &\quad + \delta^2 e^{-\phi(x,y)} \left(1 - e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)M(x)} + (e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)} - 1)M(x)\right) \\ &\quad - \delta^2 (e^{-\phi(x,y)} - e^{-\phi(0,y)}) (e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2},y)} - 1)M(x) \end{aligned}$$

D'où en utilisant la décroissance exponentielle de  $\hat{\phi}$  ainsi que ses dérivées lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , on obtient

$$R_{2\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ fort.}$$

D'autre part, lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , on a  $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)} \rightarrow \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$ . De plus le théorème 3.6 assure que  $\Delta\phi \in L^\infty(\Omega)$ , et par suite,  $\|\Delta\phi\|_{L^{2p+2}(\Omega)} \rightarrow \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$  (Adams [1]).

D'après (3.2.40), on a

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left( \varepsilon \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \quad (3.2.42)$$

Ceci entraîne d'après le lemme 3.2 que

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ fort.} \quad (3.2.43)$$

Considérons enfin la fonction  $w_\varepsilon = \phi_\varepsilon - \phi - G_\varepsilon$ , il vient

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta w_\varepsilon + \varepsilon \Delta \phi = n_\varepsilon (1 - e^{-w_\varepsilon}) + \delta^2 e^{-\phi_\varepsilon} (e^{w_\varepsilon} - 1) \text{ dans } \Omega \\ w_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.2.44)$$

Multipliant l'équation (3.2.44) par  $w_\varepsilon^{2p+1}$  pour  $p \in \mathbb{N}$ , il vient après des intégrations par parties

$$\begin{aligned} & \delta^2 \int_{\Omega} e^{\phi_\varepsilon} u_\varepsilon (1 - e^{-w_\varepsilon}) w_\varepsilon^{2p+1} dx dy + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-\phi_\varepsilon} (e^{w_\varepsilon} - 1) w_\varepsilon^{2p+1} dx dy \\ & = \\ & -(2p+1)\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla w_\varepsilon|^2 w_\varepsilon^{2p} dx dy + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta \phi \cdot w_\varepsilon^{2p+1} dx dy \end{aligned}$$

En reprenant ensuite les mêmes raisonnements et estimations que plus haut dans la démonstration de l'inégalité (3.2.42), nous arrivons à l'inégalité

$$\begin{aligned} C \|w_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)}^{2p+2} + (2p+1)\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla w_\varepsilon|^2 \cdot w_\varepsilon^{2p} dx dy & \leq \varepsilon \int_{\Omega} \Delta \phi \cdot w_\varepsilon^{2p+1} dx dy \\ & \leq \varepsilon \|\Delta \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|w_\varepsilon\|_{L^{2p+1}(\Omega)}^{2p+1}, \end{aligned}$$

soit

$$\|w_\varepsilon\|_{L^{2p+2}(\Omega)} \leq C \varepsilon$$

où  $C$  est indépendante de  $p$ .

D'où il résulte que

$$\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \varepsilon, \quad (3.2.45)$$

soit

$$w_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ fort.} \quad (3.2.46)$$

Enfin en combinant (3.2.43) et (3.2.46) ; il vient

$$\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ fort,}$$

ce qui achève la preuve du point (1). Pour le point (2), on a d'après (3.2.44),

$$\begin{aligned} & \varepsilon \|\nabla w_\varepsilon\|_{0,2}^2 + \int_{\Omega} n_\varepsilon (1 - e^{-w_\varepsilon}) w_\varepsilon dx dy + \int_{\Omega} p_\varepsilon (e^{w_\varepsilon} - 1) w_\varepsilon dx dy \\ & = \\ & -\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla w_\varepsilon dx dy \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Comme  $w_\varepsilon$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ , on a grâce à la positivité de  $n_\varepsilon = \delta^2 e^{\phi_\varepsilon} u_\varepsilon$  et de  $p_\varepsilon = \delta^2 e^{-\phi_\varepsilon}$ ,

$$\varepsilon \|\nabla w_\varepsilon\|_{0,2}^2 + C \|w_\varepsilon\|_{0,2}^2 \leq \varepsilon \|\nabla \phi\|_{0,2} \cdot \|\nabla w_\varepsilon\|_{0,2}$$

D'où il résulte que

$$\|w_\varepsilon\|_{0,2} \leq C\varepsilon^{1/2} \quad \text{et} \quad \|\nabla w_\varepsilon\|_{0,2} \leq C$$

On peut donc extraire une sous-suite, encore notée  $w_\varepsilon$ , telle que

$$w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega) \quad \text{faible.}$$

Par ailleurs, en utilisant (3.2.47), on a

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_{0,2}^2 \leq -\varepsilon \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla w_\varepsilon \, dx dy$$

D'où l'on déduit, que

$$w_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega) \quad \text{fort.} \quad (3.2.48)$$

D'autre part, on vérifie que  $\varphi_\varepsilon(x, y) = M(x)\hat{\phi}_\varepsilon(x, y) - G_\varepsilon(x, y)$  est une solution faible de l'équation

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta \varphi_\varepsilon + \delta^2 \left( u_\varepsilon e^{\phi+M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} (1 - e^{-\varphi_\varepsilon}) + e^{-\phi-M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} (e^{\varphi_\varepsilon} - 1) \right) \\ = \\ -\delta^2 (u - u_\varepsilon) e^{\phi+M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} + \tilde{g}_\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

où  $\tilde{g}_\varepsilon$  est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\varepsilon(x, y) &= -\varepsilon \hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} - 2\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(x\varepsilon^{-1/2}, y) \cdot \frac{dM}{dx} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y^2}(x, y) \cdot M(x) - N(x, y) \\ &\quad + N(0, y)M(x) - n(0, y)M(x)e^{\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} + p(0, y)M(x)e^{-\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} \\ &\quad + n(x, y)e^{M(x)\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} - p(x, y)e^{-M(x)\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)}. \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

Tout revient donc à établir la convergence faible dans  $H^1(\Omega)$  de  $\varphi_\varepsilon$  vers 0. Pour cela, on introduit la fonction  $\rho_\varepsilon$  définie par

$$u_\varepsilon e^{\phi+M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} (1 - e^{-\rho_\varepsilon}) + e^{-\phi-M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} (e^{\rho_\varepsilon} - 1) = -(u - u_\varepsilon) e^{\phi+M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon}. \quad (3.2.51)$$

Nous savions que

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega) \quad \text{faible.}$$

Ceci entraîne que

$$(u - u_\varepsilon) e^{\phi + M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Or puisque  $u_\varepsilon e^{\phi + M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon}$  et  $e^{-\phi - M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon}$  sont minorées par une constante positive indépendante de  $\varepsilon$  et comme  $e^{\rho_\varepsilon} - 1$  et  $1 - e^{-\rho_\varepsilon}$  sont de même signe, on en déduit que

$$e^{\rho_\varepsilon} - 1 \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

D'autre part

$$\|\rho_\varepsilon\|_{0,\infty} \leq C$$

Donc

$$\rho_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Si maintenant on applique le gradient à l'égalité vérifiée par  $\rho_\varepsilon$ , il est aisé, de voir que tous les autres termes hormis les termes

$(u_\varepsilon e^{\phi + M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} e^{-\rho_\varepsilon} + e^{-\phi - M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} e^{\rho_\varepsilon}) \nabla \rho_\varepsilon$ ,  $(u_\varepsilon e^{\phi + M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} (1 - e^{-\rho_\varepsilon}) - e^{-\phi - M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} (e^{\rho_\varepsilon} - 1)) \nabla (M \hat{\phi}_\varepsilon)$  et  $(u - u_\varepsilon) e^{\phi + M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} \nabla (M \hat{\phi}_\varepsilon)$  sont bornés dans  $(L^2(\Omega))^2$  uniformément en  $\varepsilon$ .

Prenons par exemple le terme  $(u - u_\varepsilon) e^{\phi + M \cdot \hat{\phi}_\varepsilon} \nabla (M \hat{\phi}_\varepsilon)$ , on a

$$(u - u_\varepsilon) \nabla \left( M(x) \hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \right) = (u - u_\varepsilon)(x, y) \left( M(x) \frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial x}(x, y) + \hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \cdot \frac{dM}{dx} \quad M(x) \frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y}(x, y) \right)^T$$

Comme  $M \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $H^1(\Omega)$  faible, il résulte que

$$(u - u_\varepsilon) \cdot M \cdot \frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

$$(u - u_\varepsilon) \cdot \hat{\phi}_\varepsilon \cdot \frac{dM}{dx} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

D'autre part

$$\left| (u - u_\varepsilon)(x, y) \cdot M(x) \cdot \frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial x}(x, y) \right| \leq \left| \frac{(u - u_\varepsilon)(x, y)}{x} \cdot x \cdot \frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial x}(x, y) \right|$$

Comme  $u_\varepsilon = u$  sur  $\Gamma_D$ , appliquant l'inégalité de Hardy, on a

$$\left\| \frac{(u - u_\varepsilon)(x, y)}{x} \right\|_{0,2} \leq C \|\nabla(u - u_\varepsilon)\|_{0,2} \leq C.$$



Par conséquent  $(u - u_\varepsilon)e^{\phi+M.\hat{\phi}_\varepsilon}\nabla(M\hat{\phi}_\varepsilon)$  est bornée dans  $(L^2(\Omega))^2$ .

Reprenant l'égalité satisfaite par  $\rho_\varepsilon$  et en utilisant le fait que  $u_\varepsilon e^{\phi+M.\hat{\phi}_\varepsilon}(1 - e^{-\rho_\varepsilon})$  et  $e^{-\phi-M.\hat{\phi}_\varepsilon}(e^{\rho_\varepsilon} - 1)$  sont de même signe, on obtient

$$u_\varepsilon e^{\phi+M.\hat{\phi}_\varepsilon} |1 - e^{-\rho_\varepsilon}|, e^{-\phi-M.\hat{\phi}_\varepsilon} |1 - e^{\rho_\varepsilon}| \leq C |u - u_\varepsilon|.$$

Donc  $u_\varepsilon e^{\phi+M.\hat{\phi}_\varepsilon}(1 - e^{-\rho_\varepsilon})\nabla(M.\hat{\phi}_\varepsilon)$  et  $e^{-\phi-M.\hat{\phi}_\varepsilon}(e^{\rho_\varepsilon} - 1)\nabla(M.\hat{\phi}_\varepsilon)$  sont bornées dans  $(L^2(\Omega))^2$  uniformément en  $\varepsilon$ .

Par ailleurs, le coefficient de  $\nabla\rho_\varepsilon : u_\varepsilon e^{\phi+M.\hat{\phi}_\varepsilon} e^{-\rho_\varepsilon} + e^{-\phi-M.\hat{\phi}_\varepsilon} e^{\rho_\varepsilon}$  est minoré par une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ , il s'ensuit que

$$\|\rho_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C. \quad (3.2.52)$$

En soustrayant l'équation satisfaite par  $\varphi_\varepsilon$  à celle satisfaite par  $\rho_\varepsilon$  multipliée par  $\delta^2$ , on obtient

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta(\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon) + \delta^2 u_\varepsilon e^{\phi+M.\hat{\phi}_\varepsilon}(e^{-\rho_\varepsilon} - e^{-\varphi_\varepsilon}) - \delta^2 e^{-\phi-M.\hat{\phi}_\varepsilon}(e^{\rho_\varepsilon} - e^{\varphi_\varepsilon}) = \tilde{g}_\varepsilon + \varepsilon\Delta\rho_\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial(\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon)}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.2.53)$$

En multipliant l'équation (3.2.53) par  $\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\nabla(\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon)\|_{0,2}^2 + C \|\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon\|_{0,2}^2 &\leq \varepsilon \|\nabla\rho_\varepsilon\|_{0,2} \cdot \|\nabla(\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon)\|_{0,2} \\ &+ \|\tilde{g}_\varepsilon\|_{0,2} \cdot \|\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon\|_{0,2} \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Reste maintenant à établir

**Lemme 3.4** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.7, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que l'on ait*

$$\|\tilde{g}_\varepsilon\|_{0,2} \leq C \varepsilon^{3/4}.$$

### Démonstration

L'égalité (3.2.50) peut s'écrire

$$\tilde{g}_\varepsilon(x, y) = -\varepsilon\hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} - 2\varepsilon^{1/2} \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\tau}(x\varepsilon^{-1/2}, y) \cdot \frac{dM}{dx} - \varepsilon \frac{\partial^2\hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y^2}(x, y) \cdot M(x) - \tilde{j}_\varepsilon(x, y)$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_\varepsilon(x, y) &= -N(0, y)M(x) + n(0, y)M(x)e^{\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} + N(x, y) \\
&\quad - p(0, y)M(x)e^{-\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} + p(x, y)e^{-\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)M(x)} - n(x, y)e^{\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)M(x)} \\
&= (p(x, y) - p(0, y)M(x)) \left( e^{-\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)M(x)} - 1 \right) - (n(x, y) - n(0, y)M(x)) \left( e^{\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)M(x)} - 1 \right) \\
&\quad + p(0, y)M(x) \left( e^{-\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)M(x)} - e^{-\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} \right) - n(0, y)M(x) \left( e^{\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)M(x)} - e^{\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} \right)
\end{aligned}$$

Puisque  $M \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $p \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$  on peut majorer  $p(x, y) - p(0, y)M(x) = (p(x, y) - p(0, y))M(x) + p(x, y)(1 - M(x))$  par  $Cx$

D'autre part puisque  $\hat{\phi}_\varepsilon$  est uniformément bornée, on en déduit que

$$|e^{-M(x)\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} - 1| \leq C |\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)|$$

et

$$|e^{-M(x)\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)} - e^{-\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)}| \leq C |\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)| |M(x) - 1| \leq Cx |\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)|.$$

Par un raisonnement analogue pour les autres termes, il est aisé de voir que

$$|\tilde{j}_\varepsilon(x, y)| \leq Cx |\hat{\phi}_\varepsilon(x, y)|.$$

Donc, en faisant le changement de variable  $\tau = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ , on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \tilde{j}_\varepsilon^2(x, y) dx dy &\leq C \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=1} x^2 \hat{\phi}_\varepsilon^2(x, y) dx dy \\
&\leq C \int_{y=0}^{y=1} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon \tau^2 \hat{\phi}^2(\tau, y) \sqrt{\varepsilon} d\tau dy \\
&\leq C\varepsilon^{3/2} \int_{y=0}^{y=1} \int_0^\infty \tau^2 \hat{\phi}^2(\tau, y) d\tau dy \\
&\leq C\varepsilon^{3/2}
\end{aligned}$$

D'une façon analogue on démontre que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial x}(x, y) \right)^2 dx dy &= \int_{y=0}^{y=1} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^{-1} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(\tau, y) \right)^2 \varepsilon^{1/2} d\tau dy \\
&\leq \varepsilon^{-1/2} \int_{y=0}^{y=1} \int_0^\infty \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(\tau, y) \right)^2 d\tau dy \\
&\leq C\varepsilon^{-1/2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dM}{dx} \right\|_{0,2} \leq C\varepsilon^{3/4}$$

et le lemme 3.4 est ainsi démontré.

De (3.2.54) et du lemme 3.4 il découle

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\nabla(\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon)\|_{0,2}^2 + C \|\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon\|_{0,2}^2 &\leq \varepsilon \|\nabla\rho_\varepsilon\|_{0,2} \cdot \|\nabla(\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon)\|_{0,2} \\ &+ C\varepsilon^{3/4} \cdot \|\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon\|_{0,2} \end{aligned}$$

Donc on a  $\|\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon\|_{0,2} \leq C\varepsilon^{1/2}$  et  $\|\nabla(\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon)\|_{0,2} \leq C$ .

D'où l'on déduit que  $\|\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ . De plus d'après (3.2.52) on obtient que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

On peut donc extraire une sous-suite, encore notée  $\varphi_\varepsilon$ , telle que

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

(On note que  $\varphi_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  entraîne que  $\rho_\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\varphi_\varepsilon - \rho_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  fort).

Ceci termine la démonstration du lemme 3.3.

On poursuit maintenant la démonstration du théorème 3.7 en établissant

**Lemme 3.5** *Soit  $g_\varepsilon(x, y)$  la fonction vérifiant l'équation (3.2.37), pour laquelle les conditions du théorème 3.7 sont supposées remplies. Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\|g_\varepsilon\|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \quad \forall p \geq 2.$$

### Démonstration

Posant

$$j_{1\varepsilon}(x, y) = -\varepsilon \Delta \phi(x, y) - \varepsilon \hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} - 2\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(x\varepsilon^{-1/2}, y) \cdot \frac{dM}{dx} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y^2}(x, y) \cdot M(x)$$

D'autre part,  $(\phi, u)$  étant la solution du problème réduit ( $\mathcal{PRU}$ ), il vient

$$N(x, y) = \delta^2 \left( e^{\phi(x,y)} u(x, y) - e^{-\phi(x,y)} \right)$$

Par conséquent  $g_\varepsilon(x, y)$  vérifie

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x, y) &= j_{1\varepsilon}(x, y) - \delta^2 M(x) \left[ e^{\phi(0,y)} u(0, y) \left( e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} - 1 \right) - e^{-\phi(0,y)} \left( e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} - 1 \right) \right] \\ &+ \delta^2 \left( e^{\psi_\varepsilon(x,y)} \tilde{u}_\varepsilon(x, y) - e^{-\psi_\varepsilon(x,y)} - e^{\phi(x,y)} u(x, y) + e^{-\phi(x,y)} \right) \end{aligned}$$

Soit

$$g_\varepsilon(x, y) = j_{1\varepsilon}(x, y) + j_{2\varepsilon}(x, y) + j_{3\varepsilon}(x, y),$$

où

$$\begin{aligned} j_{2\varepsilon}(x, y) &= -\delta^2 M(x) \left[ e^{\phi(0,y)} u(0, y) \left( e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} - 1 \right) - e^{-\phi(0,y)} \left( e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} - 1 \right) \right] \\ &+ \delta^2 e^{\phi(x,y)} u(x, y) \left( e^{\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)M(x)} - 1 \right) - \delta^2 e^{-\phi(x,y)} \left( e^{-\hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)M(x)} - 1 \right) \end{aligned}$$

et

$$j_{3\varepsilon}(x, y) = \delta^2 e^{\psi_\varepsilon(x,y)} (\tilde{u}_\varepsilon(x, y) - u(x, y))$$

Pour estimer  $\| j_{2\varepsilon} \|_{0,2}$ , le raisonnement est tout à fait analogue à celui du lemme 3.3 pour majorer le terme  $R_{2\varepsilon}$ . (On applique l'inégalité de Hardy sur  $[0, \frac{Q}{2}]$  et on utilise la décroissance exponentielle de  $\hat{\phi}$  ainsi que ses dérivées lorsque  $\tau \rightarrow \infty$  sur  $[\frac{Q}{2}, 1]$ ). D'où l'on déduit

$$\| j_{2\varepsilon} \|_{0,2} \leq C \varepsilon^{3/4}.$$

D'autre part, d'après le lemme 6 ([10]), on a

$$\| j_{3\varepsilon} \|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \quad \forall p \geq 2.$$

Enfin en faisant le changement de variable  $\tau = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ , en utilisant la décroissance exponentielle de  $\hat{\phi}$  ainsi que ses dérivées lorsque  $\tau \rightarrow \infty$  et puisque  $\Delta\phi \in L^2(\Omega)$  on a

$$\| j_{1\varepsilon} \|_{0,2} \leq C \varepsilon^{3/4}.$$

On en déduit après regroupement des termes l'estimation suivante

$$\| g_\varepsilon \|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \quad \forall p \geq 2.$$

**Lemme 3.6** *Supposons vérifiées les conditions du théorème 3.7. Alors on a les estimations suivantes*

$$\varepsilon^{1/2+1/2p} \| \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \|_{0,2} \leq C p \quad \forall p \geq 2$$

$$\| D_\varepsilon - \tilde{D}_\varepsilon \|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \quad \forall p \geq 2$$

### Démonstration

D'après (3.2.1) et (3.2.36), on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) &= \delta^2 \left( e^{\phi_\varepsilon(x,y)} u_\varepsilon(x, y) - e^{-\phi_\varepsilon(x,y)} + e^{-\psi_\varepsilon(x,y)} - e^{\psi_\varepsilon(x,y)} \tilde{u}_\varepsilon(x, y) \right) \\ &+ g_\varepsilon(x, y) \end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Utilisant (3.2.7) et (3.2.37) on en déduit aussitôt que

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) &= \delta^2 \left( e^{\phi_\varepsilon(x, y)} u_\varepsilon(x, y) - e^{-\phi_\varepsilon(x, y)} + e^{-\phi(x, y)} - e^{\phi(x, y)} u(x, y) \right) \\ &- \varepsilon \Delta \phi(x, y) - \varepsilon \hat{\phi}_\varepsilon(x, y) \cdot \frac{d^2 M}{dx^2} - 2\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \tau}(x\varepsilon^{-1/2}, y) \cdot \frac{dM}{dx} - \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{\phi}_\varepsilon}{\partial y^2}(x, y) \cdot M(x) \\ &- \left[ \delta^2 \left( e^{\phi(0, y) + \hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} u(0, y) - e^{-\phi(0, y) - \hat{\phi}(x\varepsilon^{-1/2}, y)} \right) - N(0, y) \right] M(x) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\varepsilon \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) = (D_\varepsilon(x, y) - D(x, y)) - M(x) \left( \hat{D}_\varepsilon(x, y) - D(0, y) \right) + R_{1\varepsilon}(x, y)$$

où  $R_{1\varepsilon}$  est donnée par (3.2.41)

ou encore

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) &= \left( D_\varepsilon(x, y) - \tilde{D}_\varepsilon(x, y) \right) + \left( \tilde{D}_\varepsilon(x, y) - D(x, y) - M(x) \left( \hat{D}_\varepsilon(x, y) - D(0, y) \right) \right) \\ &+ R_{1\varepsilon}(x, y) \end{aligned}$$

Nous multiplions cette équation par  $\Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)$ , et intégrons par parties, il vient

$$\varepsilon \|\Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2}^2 = I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon} + I_{3\varepsilon}, \quad (3.2.56)$$

où

$$I_{1\varepsilon}(x, y) = \int_{\Omega} \left( D_\varepsilon(x, y) - \tilde{D}_\varepsilon(x, y) \right) \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) dx dy,$$

$$I_{2\varepsilon}(x, y) = \int_{\Omega} \left( \tilde{D}_\varepsilon(x, y) - D(x, y) - M(x) \left( \hat{D}_\varepsilon(x, y) - D(0, y) \right) \right) \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) dx dy,$$

$$\text{et } I_{3\varepsilon}(x, y) = \int_{\Omega} R_{1\varepsilon}(x, y) \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) dx dy.$$

D'autre part,

$$\nabla \cdot \left( \nabla \left( D_\varepsilon(x, y) - \tilde{D}_\varepsilon(x, y) \right) \right) = \nabla \cdot \left( S_\varepsilon(x, y) \nabla \phi_\varepsilon(x, y) - \tilde{S}_\varepsilon(x, y) \nabla \psi_\varepsilon(x, y) \right)$$

et donc,

$$\begin{aligned} I_{1\varepsilon}(x, y) &= - \int_{\Omega} \nabla \left( D_\varepsilon(x, y) - \tilde{D}_\varepsilon(x, y) \right) \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \left( S_\varepsilon(x, y) \nabla \phi_\varepsilon(x, y) - \tilde{S}_\varepsilon(x, y) \nabla \psi_\varepsilon(x, y) \right) \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \left( S_\varepsilon(x, y) - \tilde{S}_\varepsilon(x, y) \right) \nabla \psi_\varepsilon(x, y) \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) dx dy \\ &- \int_{\Omega} S_\varepsilon(x, y) \left| \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) \right|^2 dx dy \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.2.56) nous obtenons

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2}^2 + \int_{\Omega} S_\varepsilon |\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)|^2 dx dy &= - \int_{\Omega} (S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy \\ &+ I_{2\varepsilon} + I_{3\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

Or, par un simple calcul nous avons

$$\begin{aligned} |I_{3\varepsilon}| &\leq \|R_{1\varepsilon}\|_{0,2} \cdot \|\Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2} \\ &\leq C \varepsilon \|\Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2} \end{aligned}$$

Pour majorer l'intégrale  $I_{2\varepsilon}$ , nous remarquons tout d'abord que

$$\left(\tilde{D}_\varepsilon(x, y) - D(x, y)\right) - M(x) \left(\hat{D}_\varepsilon(x, y) - D(0, y)\right) = j_{2\varepsilon}(x, y) + j_{3\varepsilon}(x, y),$$

où les fonctions  $j_{2\varepsilon}(x, y)$  et  $j_{3\varepsilon}(x, y)$  sont données dans la démonstration du lemme 3.5.

D'où nous tirons

$$|I_{2\varepsilon}| \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \|\Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2}$$

Considérons maintenant l'intégrale  $R_{3\varepsilon} = \int_{\Omega} (S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy$ .

Rappelons que  $n_\varepsilon = \delta^2 e^{\phi_\varepsilon} u_\varepsilon$ ,  $p_\varepsilon = \delta^2 e^{-\phi_\varepsilon}$ ,  $\tilde{n}_\varepsilon = \delta^2 e^{\psi_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon$ ,  $\tilde{p}_\varepsilon = \delta^2 e^{-\psi_\varepsilon}$  et  $n = \delta^2 e^\phi u$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} R_{3\varepsilon} &= \int_{\Omega} (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy + \int_{\Omega} (p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \left( (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) e^{-\psi_\varepsilon} \right) e^{\psi_\varepsilon} \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy + \int_{\Omega} \left( (p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) e^{\psi_\varepsilon} \right) e^{-\psi_\varepsilon} \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy \\ &= \int_{\Omega} e^{\psi_\varepsilon} \frac{(n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) e^{-\psi_\varepsilon}}{x} x \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy + \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} \frac{(p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) e^{\psi_\varepsilon}}{x} x \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) dx dy \end{aligned}$$

Puisque  $\|x \nabla \psi_\varepsilon\|_{0,\infty} \leq C$ , on obtient

$$|R_{3\varepsilon}| \leq C \|\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2} \left( \left\| \frac{(n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) e^{-\psi_\varepsilon}}{x} \right\|_{0,2} + \left\| \frac{(p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) e^{\psi_\varepsilon}}{x} \right\|_{0,2} \right)$$

Appliquant l'inégalité de Hardy, il vient

$$|R_{3\varepsilon}| \leq C \|\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2} \left( \|\nabla \left( (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) e^{-\psi_\varepsilon} \right)\|_{0,2} + \|\nabla \left( (p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) e^{\psi_\varepsilon} \right)\|_{0,2} \right)$$

D'autre part, comme

$$\nabla \cdot (\nabla(n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon)) = \nabla \cdot (n_\varepsilon \nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) + (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon),$$

il vient

$$\nabla \cdot \left( e^{\psi_\varepsilon} \nabla \left( e^{-\psi_\varepsilon} (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) \right) \right) = \nabla \cdot (n_\varepsilon \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)) \quad (3.2.58)$$

En multipliant cette équation par  $e^{-\psi_\varepsilon} (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon)$  on obtient

$$\| \nabla \left( (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) e^{-\psi_\varepsilon} \right) \|_{0,2} \leq C \| \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \|_{0,2}$$

D'une façon analogue, on a

$$\| \nabla \left( (p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) e^{\psi_\varepsilon} \right) \|_{0,2} \leq C \| \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \|_{0,2}$$

et par conséquent

$$| R_{3\varepsilon} | \leq C \| \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \|_{0,2}^2$$

Enfin en combinant ce résultat et le lemme 3.3, on déduit grâce à l'équation (3.2.57) que

$$\varepsilon^{1/2+1/2p} \| \Delta (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \|_{0,2} \leq C p \quad \forall p \geq 2.$$

D'autre part nous réécrivons l'équation (3.2.55) sous la forme suivante

$$\varepsilon \Delta (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x, y) = (D_\varepsilon - \tilde{D}_\varepsilon)(x, y) + g_\varepsilon(x, y)$$

Par conséquent

$$\| D_\varepsilon - \tilde{D}_\varepsilon \|_{0,2} \leq \varepsilon \| \Delta (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \|_{0,2} + \| g_\varepsilon \|_{0,2}$$

Le lemme 3.5 permet de conclure que

$$\| D_\varepsilon - \tilde{D}_\varepsilon \|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \quad \forall p \geq 2.$$

### Fin de la démonstration du théorème 3.7.

D'après (3.2.55), on a

$$\varepsilon \Delta (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) = (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) - (p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) + g_\varepsilon \quad (3.2.59)$$

Soit alors  $w \in H^2(\Omega)$ ,  $w$  nulle sur  $\Gamma_D$  et  $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$  sur  $\Gamma_N$ . On prend le produit scalaire des deux membres de (3.2.59) avec  $e^{-\psi_\varepsilon} \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w)$ , on obtient

$$\varepsilon \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} \Delta (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy = \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} (n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} (p_{\varepsilon} - \tilde{p}_{\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& + \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& = - \int_{\Omega} e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w \cdot \nabla \left( (n_{\varepsilon} - \tilde{n}_{\varepsilon}) e^{-\psi_{\varepsilon}} \right) \, dx dy \\
& - \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} (p_{\varepsilon} - \tilde{p}_{\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& + \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left( e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla \left( (n_{\varepsilon} - \tilde{n}_{\varepsilon}) e^{-\psi_{\varepsilon}} \right) \right) w \, dx dy = - \int_{\Omega} e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla \left( (n_{\varepsilon} - \tilde{n}_{\varepsilon}) e^{-\psi_{\varepsilon}} \right) \nabla w \, dx dy$$

Ensuite puisque  $p_{\varepsilon} - \tilde{p}_{\varepsilon} = \delta^2 (e^{-\phi_{\varepsilon}} - e^{-\psi_{\varepsilon}})$  on en déduit aussitôt que

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} \Delta(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy & = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla \left( (n_{\varepsilon} - \tilde{n}_{\varepsilon}) e^{-\psi_{\varepsilon}} \right) \right) w \, dx dy \\
& + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_{\varepsilon}} (1 - e^{\psi_{\varepsilon} - \phi_{\varepsilon}}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& + \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy
\end{aligned}$$

Mais de (3.2.58) il résulte que

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} \Delta(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy & = \int_{\Omega} \nabla \cdot (n_{\varepsilon} \nabla(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon})) w \, dx dy \\
& + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_{\varepsilon}} (1 - e^{\psi_{\varepsilon} - \phi_{\varepsilon}}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& + \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& = - \int_{\Omega} n_{\varepsilon} \nabla(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \cdot \nabla w \, dx dy \\
& + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_{\varepsilon}} (1 - e^{\psi_{\varepsilon} - \phi_{\varepsilon}}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& + \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy
\end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} \Delta(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy & = - \int_{\Omega} \left( (n_{\varepsilon} - \tilde{n}_{\varepsilon}) - (p_{\varepsilon} - \tilde{p}_{\varepsilon}) \right) \nabla(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \cdot \nabla w \, dx dy \\
& - \int_{\Omega} (p_{\varepsilon} - \tilde{p}_{\varepsilon}) \nabla(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \cdot \nabla w \, dx dy \\
& - \int_{\Omega} (\tilde{n}_{\varepsilon} - n) \nabla(\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \cdot \nabla w \, dx dy \\
& + \int_{\Omega} (\phi_{\varepsilon} - \psi_{\varepsilon}) \nabla \cdot (n \nabla w) \, dx dy \\
& + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_{\varepsilon}} (1 - e^{\psi_{\varepsilon} - \phi_{\varepsilon}}) \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \\
& + \int_{\Omega} e^{-\psi_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \nabla \cdot (e^{\psi_{\varepsilon}} \nabla w) \, dx dy \tag{3.2.60}
\end{aligned}$$



$$\text{On pose } C_\varepsilon = \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy - \int_{\Omega} (p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon) \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \cdot \nabla w \, dx dy$$

On a alors

$$C_\varepsilon = \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \cdot \nabla w \, dx dy$$

$$C_\varepsilon = \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy + \delta^2 \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon + e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon} - 1) \cdot \nabla w \, dx dy$$

$$C_\varepsilon = \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy + \delta^2 \int_{\Omega} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon} - (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)) \nabla \cdot (e^{-\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy$$

$$C_\varepsilon = \delta^2 \int_{\Omega} e^{-2\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy + \delta^2 \int_{\Omega} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) \nabla \cdot (e^{-\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy \\ - \delta^2 \int_{\Omega} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{-\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy$$

$$C_\varepsilon = 2\delta^2 \int_{\Omega} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}) e^{-\psi_\varepsilon} \Delta w \, dx dy - \delta^2 \int_{\Omega} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{-\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy$$

$$C_\varepsilon = 2\delta^2 \int_{\Omega} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon} + \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) e^{-\psi_\varepsilon} \Delta w \, dx dy + 2\delta^2 \int_{\Omega} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) e^{-\psi_\varepsilon} \Delta w \, dx dy \\ - \delta^2 \int_{\Omega} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{-\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy$$

$$C_\varepsilon = 2\delta^2 \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon} + \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \Delta w \, dx dy + 2\delta^2 \int_{\Omega} (e^{-\psi_\varepsilon} - e^{-\phi}) (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \Delta w \, dx dy \\ + 2\delta^2 \int_{\Omega} e^{-\phi} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \Delta w \, dx dy - \delta^2 \int_{\Omega} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{-\phi} \nabla w) \, dx dy \\ + \delta^2 \int_{\Omega} (e^{-\psi_\varepsilon} - e^{-\phi}) \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \cdot \nabla w \, dx dy$$

Utilisant (3.2.60) on en déduit que

$$\int_{\Omega} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) (2\delta^2 e^{-\phi} \Delta w - \delta^2 \nabla \cdot (e^{-\phi} \nabla w) + \nabla \cdot (n \nabla w)) \, dx dy = C_{1\varepsilon} + C_{2\varepsilon} + C_{3\varepsilon} + C_{4\varepsilon} + C_{5\varepsilon} + C_{6\varepsilon},$$

où

$$C_{1\varepsilon} = \varepsilon \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} \Delta (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy,$$

$$C_{2\varepsilon} = -2\delta^2 \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} (1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon} + \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \Delta w \, dx dy,$$

$$C_{3\varepsilon} = -2\delta^2 \int_{\Omega} (e^{-\psi_\varepsilon} - e^{-\phi}) (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \Delta w \, dx dy,$$

$$C_{4\varepsilon} = -\delta^2 \int_{\Omega} (e^{-\psi_\varepsilon} - e^{-\phi}) \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \cdot \nabla w \, dx dy,$$

$$C_{5\varepsilon} = \int_{\Omega} ((n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon) - (p_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon)) \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \cdot \nabla w \, dx dy + \int_{\Omega} (\tilde{n}_\varepsilon - n) \nabla (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \cdot \nabla w \, dx dy,$$

et

$$C_{6\varepsilon} = - \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} g_\varepsilon \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) dx dy.$$

Puisque  $N \in W^{2,p_0}(\Omega)$ , et grâce à (3.2.7), on a

$$\int_{\Omega} (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \left( (\delta^2 e^{-\phi} + n) \Delta w + \nabla N \cdot \nabla w \right) dx dy = C_{1\varepsilon} + C_{2\varepsilon} + C_{3\varepsilon} + C_{4\varepsilon} + C_{5\varepsilon} + C_{6\varepsilon}. \quad (3.2.61)$$

Choisissons  $w$  tel que l'on ait

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left( (\delta^2 e^{-\phi} + n) \nabla w \right) + \nabla \left( N - (n + \delta^2 e^{-\phi}) \right) \cdot \nabla w = \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.2.62)$$

Comme les fonctions  $N$ ,  $\phi$  et  $u$  appartiennent à  $W^{2,p_0}(\Omega)$ , de plus  $\delta^2 e^{-\phi} + n \geq a_- > 0$ . L'existence et l'unicité de la solution de (3.2.62) dans  $H^1(\Omega)$  se déduisent de résultats généraux (par exemple, Trudinger [17]). Par suite il existe une constante strictement positive  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  et  $a_-$  telle que

$$\| \nabla w \|_{0,2} \leq C \| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,2} \quad (3.2.63)$$

Par ailleurs, grâce à la régularité des coefficients de l'équation (3.2.62), on a  $w \in H^2(\Omega)$ .

Réécrivons maintenant l'équation (3.2.62) vérifiée par  $w$  sous la forme suivante

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\nabla w) = \frac{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon}{\delta^2 e^{-\phi} + n} - \frac{\nabla N \cdot \nabla w}{\delta^2 e^{-\phi} + n} & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.2.64)$$

De là on en déduit d'après le lemme 2 de Alabau-Moussaoui [10] que  $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$  avec

$$\| \nabla w \|_{0,p} \leq C p \left( \left\| \frac{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon}{\delta^2 e^{-\phi} + n} \right\|_{0,2} + \left\| \frac{\nabla N \cdot \nabla w}{\delta^2 e^{-\phi} + n} \right\|_{0,2} \right) \quad \forall p \geq 2,$$

soit encore

$$\| \nabla w \|_{0,p} \leq C p \| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,2}. \quad (3.2.65)$$

La constante  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  et  $a_-$ .

Or puisque  $\frac{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon}{\delta^2 e^{-\phi} + n} - \frac{\nabla N \cdot \nabla w}{\delta^2 e^{-\phi} + n} \in L^{p_0}(\Omega)$ , on en déduit encore, grâce au lemme 2 [10] que

$$\| \nabla w \|_{0,\infty} \leq C \left( \left\| \frac{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon}{\delta^2 e^{-\phi} + n} \right\|_{0,p_0} + \left\| \frac{\nabla N \cdot \nabla w}{\delta^2 e^{-\phi} + n} \right\|_{0,p_0} \right)$$

Choisissant  $p = p_0$  dans l'inégalité (3.2.65), on en déduit que

$$\| \nabla w \|_{0,\infty} \leq C \| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,p_0} \quad (3.2.66)$$

La constante  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$ ,  $a_-$  et  $p_0$ .

Mais comme  $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , on déduit donc de (3.2.62) que

$$\| \Delta w \|_{0,2} \leq \| \frac{\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon}{\delta^2 e^{-\phi} + n} \|_{0,2} + \| \frac{\nabla N \cdot \nabla w}{\delta^2 e^{-\phi} + n} \|_{0,2},$$

et

$$\Delta w \in L^\infty(\Omega).$$

On obtient alors grâce à (3.2.63)-(3.2.64)

$$\| \Delta w \|_{0,2} \leq C \| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,2}, \quad (3.2.67)$$

et

$$\| \Delta w \|_{0,\infty} \leq C (\| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,\infty} + \| \nabla w \|_{0,\infty})$$

Par suite, en utilisant (3.2.66) et puisque  $\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , on a

$$\| \Delta w \|_{0,\infty} \leq C$$

Nous majorons maintenant les termes du second membre de (3.2.61). Considérons tout d'abord l'intégrale  $C_{1\varepsilon}$ .

$$\begin{aligned} | C_{1\varepsilon} | &= \left| \varepsilon \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \cdot (e^{\psi_\varepsilon} \nabla w) \, dx dy \right| \\ &= \left| \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \Delta w + \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla w) \, dx dy \right| \\ &\leq \varepsilon \| \Delta(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \|_{0,2} \left( \| \Delta w \|_{0,2} + \| \nabla \psi_\varepsilon \|_{0, \frac{2p}{p-1}} \| \nabla w \|_{0,2p} \right) \text{ pour tout } p \geq 2. \end{aligned}$$

Le changement de variable  $\tau = x\varepsilon^{-1/2}$  donne

$$\| \nabla \psi_\varepsilon \|_{0,q} \leq C \varepsilon^{1/2q-1/2} \quad \forall q \geq 2.$$

D'où en tenant compte du lemme 3.6 et en utilisant (3.2.65) et (3.2.67), on obtient la majoration

$$| C_{1\varepsilon} | \leq C p^2 \varepsilon^{1/4-3/4p} \| \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \|_{0,2} \quad \forall p \geq 2.$$

En ce qui concerne  $C_{2\varepsilon}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
|C_{2\varepsilon}| &\leq 2\delta^2 \int_{\Omega} e^{-\psi_\varepsilon} |1 - e^{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon} + \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon| |\Delta w| \, dx dy \\
&\leq C \int_{\Omega} |\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon|^2 |\Delta w| \, dx dy \\
&\leq C \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,\infty} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2} \|\Delta w\|_{0,2}
\end{aligned}$$

Alors (3.2.67) donne

$$|C_{2\varepsilon}| \leq C \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,\infty} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2}^2.$$

Nous majorons ensuite  $C_{3\varepsilon}$  par

$$\begin{aligned}
|C_{3\varepsilon}| &\leq 2\delta^2 \int_{\Omega} |e^{-\psi_\varepsilon} - e^{-\phi}| |\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon| |\Delta w| \, dx dy \\
&\leq C \|\phi_\varepsilon - \psi\|_{0,2} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2} \|\Delta w\|_{0,\infty} \\
&\leq C \varepsilon^{1/4} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2} \|\Delta w\|_{0,\infty} \\
&\leq C \varepsilon^{1/4} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2}
\end{aligned}$$

Etudions maintenant la quatrième intégrale figurant au second membre de (3.2.61)

$$\begin{aligned}
|C_{4\varepsilon}| &\leq \delta^2 \int_{\Omega} |e^{-\psi_\varepsilon} - e^{-\phi}| |\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)| |\nabla w| \, dx dy \\
&\leq C \|\phi - \psi_\varepsilon\|_{0,2} \|\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2} \|\nabla w\|_{0,\infty} \\
&\leq C \varepsilon^{1/4} \|\nabla w\|_{0,\infty} \\
&\leq C \varepsilon^{1/4} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,p_0}
\end{aligned}$$

Pour  $C_{5\varepsilon}$ , nous aboutissons à l'inégalité

$$\begin{aligned}
|C_{5\varepsilon}| &\leq \int_{\Omega} |D_\varepsilon - \tilde{D}_\varepsilon| |\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)| |\nabla w| \, dx dy + \int_{\Omega} |\tilde{n}_\varepsilon - n| |\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)| |\nabla w| \, dx dy \\
&\leq \|\nabla(\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\|_{0,2} \|\nabla w\|_{0,\infty} \left( \|D_\varepsilon - \tilde{D}_\varepsilon\|_{0,2} + \|\tilde{n}_\varepsilon - n\|_{0,2} \right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si l'on écrit  $\tilde{n}_\varepsilon(x, y) - n(x, y)$  sous la forme

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_\varepsilon(x, y) - n(x, y) &= \delta^2 \left( e^{\psi_\varepsilon(x, y)} \tilde{u}_\varepsilon(x, y) - e^{\phi(x, y)} u(x, y) \right) \\
&= \delta^2 e^{\psi_\varepsilon(x, y)} (\tilde{u}_\varepsilon(x, y) - u(x, y)) + \delta^2 u(x, y) (e^{\psi_\varepsilon(x, y)} - e^{\phi(x, y)}) \\
&= j_{3\varepsilon}(x, y) + \delta^2 u(x, y) (e^{\psi_\varepsilon(x, y)} - e^{\phi(x, y)}),
\end{aligned}$$

où  $j_{3\varepsilon}$  est définie dans la démonstration du lemme 3.5 et vérifie  $\|j_{3\varepsilon}\|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p}$   
 $\forall p \geq 2$ .

D'où l'on déduit

$$\|\tilde{n}_\varepsilon - n\|_{0,2} \leq C \varepsilon^{1/4}$$

D'après le lemme 3.6, et grâce à (3.2.66), on a

$$|C_{5\varepsilon}| \leq C \varepsilon^{1/4} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,p_0}$$

Pour la dernière intégrale on constate que

$$\begin{aligned} |C_{6\varepsilon}| &= \left| \int_{\Omega} (g_\varepsilon \Delta w + g_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla w) \, dx dy \right| \\ &\leq \|g_\varepsilon\|_{0,2} \|\Delta w\|_{0,2} + \|g_\varepsilon\|_{0,2} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{0,2} \|\nabla w\|_{0,\infty} \\ &\leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \|\Delta w\|_{0,2} + C p \varepsilon^{1/4-1/2p} \|\nabla w\|_{0,\infty} \\ &\leq C p \varepsilon^{1/2-1/2p} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2} + C p \varepsilon^{1/4-1/2p} \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,p_0} \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $w$  est solution du problème (3.2.62) et puisque  $w \in H^2(\Omega)$  ; il s'ensuit que

$$(\delta^2 e^{-\phi} + n) \Delta w + \nabla N \cdot \nabla w = \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon.$$

D'où en reportant cette relation dans l'équation (3.2.61) on a

$$\|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2}^2 - |C_{2\varepsilon}| \leq |C_{1\varepsilon}| + |C_{3\varepsilon}| + |C_{4\varepsilon}| + |C_{5\varepsilon}| + |C_{6\varepsilon}|$$

Donc d'après les estimations données ci-dessus.

$$\|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2}^2 (1 - C \|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,\infty}) \leq C p^2 \varepsilon^{1/4-3/4p} \quad \forall p \geq 2.$$

D'après le lemme 3.3, on a donc pour  $p \geq 2$

$$\|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2} \leq C p \varepsilon^{1/8-3/8p}. \quad (3.2.68)$$

On vérifie maintenant que la fonction  $f(p)$  définie sur  $[2, +\infty[$  par  $f(p) = p \varepsilon^{1/8-3/8p}$  présente un minimum absolu en  $-\frac{3}{8} \ln \varepsilon$  qui vaut  $-\frac{3e}{8} \varepsilon^{1/8} \ln \varepsilon$ .

Ce qui nous donne finalement l'inégalité

$$\|\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{0,2} \leq C \varepsilon^{1/8} |\ln \varepsilon|.$$

### Remarque 3.4

- . Nous avons considéré ici le cas de semi-conducteurs unipolaires sans restriction sur les différences de potentiel appliqué. Dans ce cas la propriété de monotonie uniforme par rapport au petit paramètre établie dans [10] n'est pas vérifiée.
- . La restriction aux semi-conducteurs unipolaires n'est pas surprenante. En effet, le problème réduit n'admet pas, en général, une solution unique. Or des estimations comme celles données dans le lemme 3.2 et dans le théorème 3.7 nécessitent en particulier l'unicité des solutions du problème réduit.



## Chapitre 4

# Etude de l'unicité des solutions pour les équations de dérive-diffusion à potentiel donné dans le cas des potentiels non monotones

Les modèles d'électro-diffusion font intervenir des systèmes non linéaires d'équations différentielles couplées de type Poisson et convection-diffusion. Ces systèmes dépendent d'un paramètre qui est vectoriel dans le cas multi-dimensionnel et qui traduit l'action du monde extérieur sur le dispositif. Ce paramètre est la différence de potentiel appliquée aux contacts dans le cas du modèle à potentiel donné et le courant aux contacts dans le cas du modèle à courant donné. Par ailleurs d'autres données sont essentielles, ce sont celles qui caractérisent le dispositif physique en jeu : la géométrie, le dopage et des paramètres physiques scalaires tels que la longueur de Debye et la concentration intrinsèque.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'unicité des solutions pour les équations de dérive-diffusion à potentiel appliqué donné, dans le cas où les potentiels électrostatiques ne sont pas monotones.

### 4.1 Modèle mathématique

On suppose que le semi-conducteur est non dégénéré. Les relations d'Einstein sont donc vérifiées. Nous supposons de plus que les mobilités sont constantes et qu'il n'y a pas d'effets de génération-recombinaison. Sous ces hypothèses et pour un potentiel donné  $V$  dans  $\mathcal{R}$  les équations de dérive-diffusion à potentiel donné en dimension un d'espace sont

sous forme normalisée ([24, 38])

$$\varepsilon\phi'' = n - p - N, \quad (4.1.1)$$

$$n' - n\phi' = J_n, \quad (4.1.2)$$

$$p' + p\phi' = -J_p, \quad (4.1.3)$$

$$J'_n = 0, \quad (4.1.4)$$

$$J'_p = 0, \quad (4.1.5)$$

dans  $\Omega = (-1, 1)$ . Les conditions aux limites associées sont données par

$$n(\pm 1) = n_{\pm 1} = \frac{N(\pm 1) + \sqrt{N^2(\pm 1) + 4\delta^4}}{2}, \quad p(\pm 1) = n_{\pm 1} - N(\pm 1), \quad (4.1.6)$$

$$\phi(\pm 1) = \phi_{\pm 1} = \log\left(\frac{n_{\pm 1}}{\delta^2}\right) - V(\pm 1). \quad (4.1.7)$$

Les données au bord  $n_{\pm 1} > 0$ ,  $p_{\pm 1} > 0$  apparaissant dans (4.1.6), vérifient la condition d'électro-neutralité suivante

$$n_x - p_x - N(x) = 0, \quad x = \pm 1, \quad (4.1.8)$$

et la condition suivante d'équilibre thermique

$$n_{-1}p_{-1} = n_1p_1 = \delta^4. \quad (4.1.9)$$

On rappelle que les inconnues du système (4.1.1)-(4.1.7) sont les fonctions  $\phi$ ,  $n$ ,  $p$  et les nombres  $J_n$  et  $J_p$  qui représentent respectivement le potentiel électrostatique, les concentrations d'électrons et de trous, les densités de courant d'électrons et de trous. Les constantes  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  sont des données physiques du semi-conducteur, vérifiant en pratique  $\varepsilon \ll 1$  et  $\delta^2 \ll 1$ . Le système (4.1.1)-(4.1.7) dépend de deux facteurs physiques : le paramètre  $V = V(1) - V(-1) \in \mathbb{R}$  qui représente la différence appliquée aux bornes du dispositif (et donc l'action du monde extérieur sur celui-ci) et le dopage  $N$  (caractéristique essentielle du dispositif) qui est une fonction donnée dans  $\overline{\Omega}$ , dont le nombre de changements de signe définit le type du dispositif (i.e. respectivement un, deux ou trois changements de signe pour une jonction  $PN$ , un transistor ou un thyristor par exemple). Le système (4.1.1)-(4.1.7) sera désigné dans ce qui suit par  $(VD)_{V,N}$ .

Les inconnues  $n$  et  $p$  correspondant à des concentrations, elles doivent bien sûr vérifier

$$0 < n, \quad 0 < p. \quad (4.1.10)$$



Pour un courant donné  $I$  dans  $\mathbb{R}$  on note par  $(CD)_{I,N}$  le système formé des équations (4.1.1)-(4.1.4) et  $J_p = I - J_n$  associées aux conditions aux limites (4.1.6) et  $\phi(-1) = \phi_{-1}$ . On sait d'après le Théorème 2.1 [9] que pour tout  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $(CD)_{I,N}$  admet une solution unique dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}$ .

On rappelle que pour tout  $\varepsilon$  et  $\delta$  strictement positifs, pour tout  $V \in \mathbb{R}$  et pour toute fonction  $N$ , constante par morceaux, le système  $(VD)_{V,N}$  admet (au moins) une solution

$$(\phi, n, p, J_n, J_p) \in (H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2.$$

En général la solution n'est pas unique : un exemple numérique de non-unicité est donné par Mock [29]. Toutefois certains résultats d'unicité dans le cas où le semi-conducteur est dans un état voisin de l'équilibre ont été obtenus par Markowich et Mock. Dans [30] Mock a démontré l'unicité des solutions pour le cas multi-dimensionnel avec un terme de génération-recombinaison nul pour le système  $(VD)_{V,N}$  dans le cas où  $|V|$  est suffisamment petit, c'est-à-dire dans un voisinage de l'équilibre. Markowich [24] a étendu ce résultat en un résultat d'unicité locale dans le cas d'un terme de génération-recombinaison non nul. Dans ce type de résultat il y a unicité sans restriction sur le dopage alors que dans le cas général si l'on souhaite obtenir des résultats d'unicité en dehors d'un voisinage de l'équilibre il est nécessaire de faire des hypothèses restrictives sur le dopage  $N$ .

Brezzi et al. [13] ont montré un résultat d'unicité de ce type dans le cas d'une diode polarisée en inverse. Leur méthode est basée sur une technique de perturbation singulière et permet d'obtenir l'unicité pour des potentiels variant dans un large intervalle borné contenant 0.

Par ailleurs, Alabau a obtenu, pour différents types de semi-conducteurs à jonctions multiples, des résultats d'unicité uniformes en potentiel ou bien valides dans des intervalles non bornés pour différents types de dopage dans le cas de potentiel électrostatique monotone.

Notre but étant de présenter une extension des résultats de Brezzi et al., et Alabau aux cas de potentiels non monotones. Nous nous bornons à donner ci-après les théorèmes d'unicité des solutions pour des diodes et des thyristors dans des cas de fonctionnement pour lesquels on montre que le potentiel électrostatique n'est pas monotone.

Ce travail est basé sur des techniques de comparaison et de découplage et sur l'obtention de conditions a priori sur les solutions suffisantes pour avoir l'unicité. On introduit une nouvelle technique permettant de traiter ces cas non monotones. Elle est basée sur un

lemme de monotonie local des densités de porteurs et sur un principe de comparaison local du potentiel électrostatique en fonction des variations du champ électrique.

Les démonstrations font intervenir des outils élémentaires mais elles sont très techniques parce que plusieurs cas de figure sont à examiner dus à la non monotonie du potentiel électrostatique et au nombre de barrières de potentiel présentes. Pour parvenir à simplifier l'exposé, on a essayé, autant que l'on a pu, de réduire les démonstrations sans perdre de vue les objets principaux de l'analyse mathématique et le sens même de sa démarche.

## 4.2 Propriétés d'un semi-conducteur symétrique

Avant d'énoncer les théorèmes d'unicité nous rappelons tout d'abord quelques notions sur les semi-conducteurs symétriques.

Dans le cas d'un semi-conducteur symétrique  $N$  est impair et de plus on a

$$\phi_{-1} + \phi_1 = 0, \quad (4.2.1)$$

et

$$n_{-1} = p_1 > 0, \quad p_{-1} = n_1 > 0, \quad (4.2.2)$$

où  $\phi_1$  vérifie

$$\phi_1 = U_{bi} - V. \quad (4.2.3)$$

$U_{bi}$  désignant le built-in potential est donné par

$$U_{bi} = 2^{-1} \log(n_1/p_1). \quad (4.2.4)$$

Dans le cas particulier de contacts ohmiques il est donné par

$$U_{bi} = \log\left(N(1) + (N^2(1) + 4\delta^4)^{1/2}\right) - \log(2\delta^2). \quad (4.2.5)$$

Dans le cas de l'équilibre  $V = 0$ , les nombres  $J_{n_e}$  et  $J_{p_e}$  sont nuls. De plus les densités d'électrons et de trous  $n_e$  et  $p_e$  sont données par

$$n_e = \delta^2 \exp(\phi_e), \quad p_e = \delta^2 \exp(-\phi_e),$$

où la fonction  $\phi_e$  est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon \phi_e'' = \delta^2 (\exp(\phi_e) - \exp(-\phi_e)) - N \\ \phi_e(1) = 2^{-1} \log(n_1/p_1), \quad \phi_e(-1) = -\phi_e(1) \end{cases} \quad (4.2.6)$$

$V$  et  $N$  étant donnés, on définit l'ensemble

$$S_{V,N} = \left\{ (\phi, n, p, J_n, J_p) \in (H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2, (\phi, n, p, J_n, J_p) \text{ est une solution faible de } (VD)_{V,N} \right\}$$

A toutes fins utiles, rappelons quelques résultats que nous utiliserons dans la suite et dont les démonstrations se trouvent dans [9].

**Théorème 4.1** *On suppose que  $N$  est dans  $L^\infty(\Omega)$ , est impair et les données au bord vérifient (4.2.1)-(4.2.5). Alors on a*

$$\forall V \in \mathbb{R}, \quad \forall (\phi, n, p, J_n, J_p) \in S_{V,N}$$

$$\phi(-x) = -\phi(x), \quad n(-x) = p(x), \quad p(-x) = n(x) \quad \forall x \in [0, 1], \quad (4.2.7)$$

et

$$J_n = J_p \quad (4.2.8)$$

**Lemme 4.1** *On suppose que  $N$  et  $\phi_{\pm 1}$ ,  $n_{\pm 1}$ ,  $p_{\pm 1}$ , vérifient les hypothèses du théorème 4.1. Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  donnés. Alors on a*

$\forall (\phi, n, p, J_n, J_p) \in S_{V,N}$ ,  $\forall (\tilde{\phi}, \tilde{n}, \tilde{p}, \tilde{J}_n, \tilde{J}_p) \in S_{\tilde{V},N}$ , la fonction  $v = (\phi - \tilde{\phi})'$  vérifie

$$\varepsilon v''(x) = b_2(x)v'(x) + b_1(x)v(x) + a_2(x)(I - \tilde{I}) + a_1(x)v(1) \quad \forall x \in [0, 1], \quad (4.2.9)$$

où

$$I = J_n + J_p, \quad \tilde{I} = \tilde{J}_n + \tilde{J}_p, \quad (4.2.10)$$

et où les fonctions  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, 2$  sont données par

$$b_2 = \varepsilon \tilde{\phi}'(n - p + \tilde{n} - \tilde{p})(n + p + \tilde{n} + \tilde{p})^{-1}, \quad (4.2.11)$$

$$b_1 = n + p - 2I\varepsilon \tilde{\phi}'(n + p + \tilde{n} + \tilde{p})^{-1}, \quad (4.2.12)$$

$$a_2(x) = (n + p + \tilde{n} + \tilde{p})^{-1} \left( n + p + \tilde{n} + \tilde{p} + 2\tilde{\phi}' \int_x^1 (\tilde{n} - \tilde{p})(t) dt \right), \quad (4.2.13)$$

$$a_1(x) = 2I\varepsilon \tilde{\phi}'(n + p + \tilde{n} + \tilde{p})^{-1}(x). \quad (4.2.14)$$

**Lemme 4.2** *On suppose que les données  $n_{\pm 1}$ ,  $p_{\pm 1}$  vérifient (4.1.9), et que  $N$  est analytique par morceaux sur  $\overline{\Omega}$ . On suppose de plus que  $I < \tilde{I}$  sont donnés tels que l'on ait*

$$0 \leq \phi'(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad (4.2.15)$$

ou

$$0 \leq \tilde{\phi}'(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (4.2.16)$$

où  $(\phi, n, p, J_n)$  (resp.  $(\tilde{\phi}, \tilde{n}, \tilde{p}, \tilde{J}_n)$ ) est la solution de  $(CD)_{I,N}$  (resp.  $(CD)_{\tilde{I},N}$ ) dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}$ .

Alors si  $(\phi - \tilde{\phi})'$  change de signe dans  $\Omega$ , on a les inégalités suivantes

(i)  $(\phi - \tilde{\phi})$  a au moins deux extréma dans  $\Omega$ , le plus petit (resp. grand) de ces extréma est un maximum (resp. minimum), et

(ii)  $0 < (n - \tilde{n})(x), \quad 0 < (p - \tilde{p})(x) \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}]$

où  $z_i$  est un point où  $(\phi - \tilde{\phi})$  atteint un maximum strict et  $z_{i+1}$  le point consécutif (sur la droite de  $z_i$ ) où  $(\phi - \tilde{\phi})$  atteint un extrémum strict.

De plus si  $I < \tilde{I}$  sont tels que les inégalités (4.2.15) et (4.2.16) sont renversées.

Alors la conclusion ci-dessus est vérifiée pourvu que (ii) soit remplacé par

(ii)'  $0 > (n - \tilde{n})(x), \quad 0 > (p - \tilde{p})(x) \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}]$

Le nombre  $I$  désigne le courant total circulant dans le semi-conducteur. Le Lemme 4.2 établit un résultat de monotonie sur les densités de porteurs dans le cas de potentiels électrostatiques monotones. Nous verrons par la suite comment ce lemme est adapté au cas de potentiels électrostatiques non monotones.

### 4.3 Résultats d'unicité dans le cas des diodes symétriques

On considère ici le cas où  $N$  a exactement un changement de signe (cas des diodes).  $N$  étant supposé impair, le point 0 désigne alors la jonction  $PN$ . On montre alors des résultats

d'unicité pour les cas de polarisation inverse et de polarisation directe. Pour faciliter l'exposé, on se place dans le cas particulier de contacts ohmiques. Dans ces conditions, les données aux bords  $n_{\pm 1}, p_{\pm 1}, \phi_{\pm 1}$  apparaissant dans (4.1.6)-(4.1.7) vérifient la relation (4.2.5).

D'après le Théorème 4.1 et puisque le dopage  $N$  est impair, on peut déduire que toute solution est symétrique. On est donc ramené à montrer l'unicité des solutions symétriques du système  $(VD)_{V,N}$ .

En effet pour une telle jonction, le comportement électrique du semi-conducteur est décrit par le système suivant

$$\varepsilon \phi''(x) = n(x) - p(x) - N(x) \tag{4.3.1}$$

$$I'(x) = 0 \quad 0 < x < 1 \tag{4.3.2}$$

$$n'(x) = n(x)\phi'(x) + I/2 \tag{4.3.3}$$

$$p'(x) = -p(x)\phi'(x) - I/2 \tag{4.3.4}$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = \phi_1(V) \tag{4.3.5}$$

$$n(0) = p(0), \quad n(1) = n_1, \quad p(1) = p_1. \tag{4.3.6}$$

où les nombres  $\phi_1(V), n_1, p_1$  sont donnés par

$$\phi_1(V) = \log \left( \frac{N(1) + \sqrt{N^2(1) + 4\delta^4}}{2\delta^2} \right) - V \tag{4.3.7}$$

$$n_1 = \frac{N(1) + \sqrt{N^2(1) + 4\delta^4}}{2} \tag{4.3.8}$$

$$p_1 = \frac{-N(1) + \sqrt{N^2(1) + 4\delta^4}}{2}. \tag{4.3.9}$$

Les inconnues (normalisées) dans ce cas sont  $\phi, n, p$  et  $I$  le courant total.

On rappelle que la polarisation directe (resp. inverse) a lieu lorsque la différence de potentiel  $V$  est strictement positive (resp. strictement négative) et que le semi-conducteur est en équilibre lorsqu'aucun potentiel n'est appliqué ( $V = 0$ ) et donc qu'aucun courant ne traverse.

Le système non linéaire (4.3.1)-(4.3.9) sera désigné dans ce qui suit par  $(SVD)_{V,N}$ . Soit  $(\phi, n, p, I)$  une solution faible de  $(SVD)_{V,N}$ . On montre que si  $N$  est continu par morceaux (resp. analytique) dans  $[0,1]$ , alors  $\phi, n, p$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  (resp. analytiques par morceaux) dans  $[0,1]$ .

### 4.3.1 Cas de polarisation inverse (i.e. $V < 0$ )

Dans cette partie, nous étudions le modèle à potentiel donné dans le cas d'un semi-conducteur symétrique uniformément dopé, polarisé en inverse et ayant une seule jonction de type  $pp^+n^+n$ . Le dopage  $N$  est donc impair et vérifie

$$N(x) = \begin{cases} N_0 & \text{si } a_0 = 0 \leq x \leq a_1 \\ N_1 & \text{si } a_1 < x \leq a_2 = 1 \end{cases} \quad (4.3.10)$$

où  $0 < a_1 < 1$ , et où les constantes  $N_0$  et  $N_1$  vérifient

$$0 < N_1 \quad \text{et} \quad N_1 < N_0 \quad (4.3.11)$$

Dans le cas où  $N_0 \leq N_1$  on retrouve en le précisant un théorème de F. Alabau [9] affirmant l'unicité de la solution du système  $(VD)_{V,N}$ . Néanmoins, si  $N_1 < N_0$  des barrières de potentiel peuvent apparaître, le potentiel électrostatique n'est alors plus monotone et les techniques développées dans [9] ne s'appliquent donc plus.

#### Propriétés qualitatives des solutions

Le but de ce paragraphe est de décrire le comportement des solutions du problème  $(SVD)_{V,N}$ .

**Lemme 4.3** *On suppose que  $V < 0$ . On suppose de plus que  $N$  vérifie (4.3.10)-(4.3.11) et soit  $(\phi, n, p, I)$  une solution de  $(SVD)_{V,N}$  dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}$ . Alors on a l'inégalité suivante*

$$0 < \phi'(0). \quad (4.3.12)$$

#### **Démonstration.**

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\phi'(0) \leq 0$ . Combinant (4.3.1) et (4.3.10) on a

$$\varepsilon \phi''(x) = (n - p)(x) - N_i \quad \forall x \in (a_i, a_{i+1}), \quad \text{pour } i = 0, 1. \quad (4.3.13)$$

En dérivant cette équation sur  $(a_i, a_{i+1})$  et en soustrayant (4.3.4) à (4.3.3), on obtient

$$\varepsilon \phi^{(3)}(x) = (n(x) + p(x)) \phi'(x) + I \quad \forall x \in (a_i, a_{i+1}). \quad (4.3.14)$$

Puisque  $V < 0$ , on a  $I < 0$  et  $J_n = J_p = I/2 < 0$ . Il est donc immédiat de voir grâce au principe du maximum ([31]) appliqué à l'équation (4.3.14), que si  $\phi'$  admet un minimum

local sur  $(a_i, a_{i+1})$ , alors ce minimum est positif. D'autre part, en reportant  $x = 0$  dans (4.3.1), on obtient  $\varepsilon\phi''(0) = -N_0 < 0$ . Il en résulte que  $\phi'$  est décroissante sur  $[0, a_1]$ . Par conséquent deux cas peuvent se produire

Soit  $\phi'$  garde un signe constant sur  $[0, 1]$  et dans ce cas on a  $\phi(1) \leq 0$ , mais ceci n'est pas possible puisque  $\phi(1) = \log \left\{ \frac{N(1) + \sqrt{N^2(1) + 4\delta^4}}{2\delta^2} \right\} - V > 0$ .

Soit il existe  $x^* \in (a_1, 1)$  tel que  $\phi'(x^*) = 0$  et  $\phi''(x^*) \geq 0$  (on désigne par  $x^*$  le premier point à partir de  $x = 0$  où  $\phi'$  change de signe).

On déduit alors de (4.3.3)-(4.3.4)

$$(n - p)'(x) = (n(x) + p(x))\phi'(x) + I \quad \forall x \in [0, 1] \quad (4.3.15)$$

Par suite  $(n - p)'(x) < 0$  sur  $[0, x^*]$  et donc d'après (4.3.1), on a

$$N_1 = N(x^*) \leq (n - p)(x^*) < (n - p)(0) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse  $N_1 > 0$ .

**Remarque 4.1** *D'après l'inégalité (4.3.12) deux cas sont à envisager*

**Cas 1-** *ou bien que la fonction  $\phi'$  garde un signe constant sur  $[0, 1]$ , alors on peut appliquer facilement les techniques développées dans [9] et montrer que le système  $(VD)_{V,N}$  admet une solution unique ;*

**Cas 2-** *ou bien que la fonction  $\phi'$  change de signe sur  $(0, 1)$ . On ne peut conclure par ce procédé.*

On considère dans toute la suite de ce paragraphe la situation du Cas 2 et nous résumons la liste des propriétés de la fonction  $\phi$  dans les propositions suivantes. Deux cas sont possibles suivant le signe de  $\phi'(1)$ .

**Proposition 4.1** *On fait les hypothèses du Lemme 4.2. Soit  $(\phi, n, p, I)$  une solution arbitraire du système  $(SVD)_{V,N}$ . On suppose de plus que  $\phi'(1) > 0$ .*

*Alors il existe  $x^* \in (0, a_1)$  et  $y^* \in (a_1, 1)$  tels que*

(i)  $\phi'$  vérifie

$$\begin{cases} 0 \leq \phi' \text{ sur } [0, x^*] \cup [y^*, 1] \\ \phi' < 0 \text{ sur } (x^*, y^*) \end{cases} \quad (4.3.16)$$

(ii)  $(n - p)(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ .

(iii)  $\phi'' \leq 0$  sur  $[0, a_1]$  et  $0 < \phi''$  sur  $(a_1, y^*)$ . De plus, la fonction  $\phi''$  change de signe au plus une fois sur  $(y^*, 1)$ .

**Démonstration.**

(i) Puisque  $\phi'$  change de signe sur  $(0, 1)$ , il existe  $x^* \in (0, 1)$  tel que  $\phi'(x^*) = 0$  (on désigne par  $x^*$  le premier point à partir de  $x = 0$  où  $\phi'$  change de signe). Montrons que  $x^* \in (0, a_1)$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $x^* \in [a_1, 1)$ . Comme  $\phi'(1) > 0$ , il en résulte que  $\phi'$  atteint un minimum strictement négatif sur  $(a_1, 1)$ , ce qui est absurde compte tenu de la relation (4.3.14) et on conclut que  $x^* \in (0, a_1)$ . Ensuite, puisque  $\phi'(0) > 0$  on a  $0 \leq \phi'$  sur  $[0, x^*]$  et  $\phi''(x^*) \leq 0$ . Grâce au Lemme 4.2 on sait que si  $\phi'$  admet un minimum local sur  $(a_i, a_{i+1})$ , alors ce minimum est strictement positif. Comme  $\phi'(1) > 0$  on en déduit qu'il existe  $y^* \in (a_1, 1)$  unique tel que  $\phi'$  change de signe en  $y^*$ . Par conséquent  $\phi''(y^*) \geq 0$ ,  $0 \leq \phi'$  sur  $[y^*, 1]$  et  $\phi' < 0$  sur  $(x^*, y^*)$ .

(ii) En dérivant deux fois l'équation (4.3.1) et en tenant compte des relations (4.3.3)-(4.3.4) on a

$$\varepsilon(n - p)'' = (n + p + \varepsilon\phi'^2)(n - p) - N_i(n + p) \text{ sur } [a_i, a_{i+1}], \text{ pour } i = 0, 1. \quad (4.3.17)$$

Par conséquent si  $n - p$  admet un minimum local  $(0, a_1) \cup (a_1, 1)$ , alors ce minimum est positif, grâce au principe du maximum appliqué à l'équation (4.3.17). En utilisant (4.3.15) la propriété (i) et puisque  $x^* < a_1 < y^*$  on a,  $(n - p)' < 0$  sur  $[a_1, y^*]$ . D'où l'on déduit, grâce à l'inégalité  $\phi''(y^*) \geq 0$  que

$$0 < N_1 \leq (n - p)(y^*) < (n - p)(a_1) \quad (4.3.18)$$

Comme  $n - p$  ne peut atteindre un minimum négatif sur  $(0, a_1) \cup (a_1, 1)$ , on obtient de (4.3.18) et des relations  $(n - p)(0) = 0$  et  $(n - p)(1) = N_1 > 0$  que  $n - p \geq 0$  sur  $[0, 1]$ .

(iii) Puisque  $(\phi, n, p, I)$  est une solution du système  $(SVD)_{V, N}$  on a

$$\varepsilon\phi^{(4)} = (n + p + \varepsilon\phi'^2)\phi'' + N_i\phi'^2 \text{ sur } [a_i, a_{i+1}], \text{ pour } i = 0, 1. \quad (4.3.19)$$

Etant donné  $N_i > 0$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$ , on sait d'après le principe du maximum appliqué à l'équation (4.3.19) que si  $\phi''$  atteint un maximum local sur  $(a_i, a_{i+1})$ , alors ce maximum est négatif. D'autre part, on vérifie aisément à l'aide des conditions aux limites sur  $n$  et



$p$  que  $\phi''(0) < 0$  et  $\phi''(1) = 0$ . Ensuite, la propriété (i) et la relation (4.3.15) expriment que  $(n - p)' < 0$  sur  $[x^*, a_1]$ . D'où l'on déduit, grâce à l'inégalité  $\psi''(x^*) \leq 0$  que

$$(n - p)(a_1) < (n - p)(x^*) \leq N_0. \quad (4.3.20)$$

Combinant (4.3.18) et (4.3.20) on obtient  $\phi''(a_1^+) > 0$  et  $\phi''(a_1^-) < 0$ . Appliquant à nouveau le principe du maximum sur l'intervalle  $[0, a_1]$  à l'équation (4.3.19) associée à des conditions aux limites de type Dirichlet en 0 et  $a_1$ , on a  $\phi'' \leq 0$  sur  $[0, a_1]$ . On déduit alors de (4.3.14) et en utilisant la définition de  $y^*$  que

$$0 \leq \phi''(y^*) < \phi''(x) \leq \phi''(a_1^+) \text{ sur } (a_1, y^*) \quad (4.3.21)$$

Maintenant montrons que  $\phi''$  change de signe au plus une fois sur  $(y^*, 1)$ - ce qui achèvera la démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\phi''$  change de signe au moins deux fois sur  $(y^*, 1)$ . Il en résulte qu'il existe  $x_1 \in (y^*, 1)$  et  $x_2 \in (x_1, 1)$  tels que  $\phi'' \leq 0$  sur  $[x_1, x_2]$  et  $\phi''$  change de  $x_1$  et  $x_2$ . Comme  $\phi''(1) = 0$ , la fonction  $x \mapsto \phi''(x)$  atteint un maximum positif sur  $(x_2, 1)$ , ce qui est absurde. Autrement dit, la fonction  $x \mapsto \phi''(x)$  est soit positive  $(y^*, 1)$ , soit elle change de signe au plus une fois sur  $(y^*, 1)$  et la Proposition 4.1 est démontrée.

Avec le même raisonnement on a

**Proposition 4.2** *Supposons les conditions du Lemme 4.2 vérifiées et soit  $(\phi, n, p, I)$  une solution arbitraire du système  $(SVD)_{V,N}$ . On suppose de plus que  $\phi'(1) \leq 0$ . Alors il existe  $z^* \in (0, a_1)$  tel que*

(i)  $\phi'$  vérifie

$$\begin{cases} 0 < \phi' \text{ sur } [0, z^*) \\ \phi' \leq 0 \text{ sur } [z^*, 1) \end{cases} \quad (4.3.22)$$

(ii)  $(n - p)(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ .

(iii)  $\phi'' \leq 0$  sur  $[0, a_1]$  et  $0 \leq \phi''$  sur  $[a_1, 1]$ .

Nous allons maintenant montrer que si  $(\phi, n, p, I)$  est une solution de  $(SVD)_{V,N}$  vérifiant les propriétés (4.3.16) ou (4.3.22), alors cette solution est unique. Pour cela, introduisons l'espace  $X = H^2(0, 1) \times (H^1(0, 1))^2 \times \mathbb{R}$ .  $V$  étant donné, le système non linéaire  $(VD)_{V,N}$

peut s'écrire sous la forme abstraite suivante  $\mathcal{F}(\phi, n, p, I) = 0$ , où  $\mathcal{F}$  est continûment différentiable défini sur  $X$  par

$$\mathcal{F}(\phi, n, p, I) = (\varepsilon\phi'' - (n - p - N), n' - n\phi' - I/2, p' + p\phi' + I/2, \phi(0), \phi(1) - \phi_1, \\ n(0) - p(0), n(1) - n_1, p(1) - p_1)$$

On découple ci-après le système linéarisé homogène associé à l'équation abstraite  $D_{(\phi, n, p, I)}\mathcal{F}(\phi, n, p, I).(u, w, z, i) = 0$  (cette technique de découplage avait été introduite pour la première fois par Alabau [6]). En particulier on montre que  $u$  est solution d'une équation différentielle du troisième ordre. D'autre part, il est facile de vérifier que si  $i$  est strictement positif on peut remplacer  $(u, w, z, i)$  par  $(-u, -w, -z, -i)$ . On peut supposer donc sans perte de généralité que  $i \leq 0$ . Soit maintenant  $(\phi, n, p, I)$  une solution faible du système  $(SVD)_{V, N}$ . L'équation abstraite  $D_{(\psi, n, p, I)}\mathcal{F}(\psi, n, p, I).(u, w, z, i) = 0$  où  $(u, w, z, i) \in X$  est équivalente au système linéaire d'équations différentielles couplées suivant.

$$\varepsilon u''(x) = w(x) - z(x) \quad \text{dans } (0, 1), \quad (4.3.23)$$

$$(w(x)e^{-\phi(x)})' = n(x)e^{-\phi(x)}u'(x) + \frac{i}{2}e^{-\phi(x)} \quad \text{dans } (0, 1), \quad (4.3.24)$$

$$(z(x)e^{\phi(x)})' = -p(x)e^{\phi(x)}u'(x) - \frac{i}{2}e^{\phi(x)} \quad \text{dans } (0, 1). \quad (4.3.25)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (4.3.26)$$

$$w(0) = z(0) \quad (4.3.27)$$

$$w(1) = 0, \quad z(1) = 0. \quad (4.3.28)$$

Puisque  $i \leq 0$ , grâce au principe de monotonie locale du champ électrique  $-\phi'$  par rapport au courant (voir Lemme 3.11 dans [8]) appliqué au système linéaire homogène, on a  $0 < u'(1)$ .

Nous conservons les notations introduites ci-dessus. Pour démontrer le résultat principal de ce paragraphe, nous aurons besoin des lemmes suivants.

**Lemme 4.4** *Sous les hypothèses de la Proposition 4.1. (resp. Proposition 4.2.), on montre que si  $v = u'$  admet un minimum local sur  $[0, x^*] \cup [y^*, 1]$  (resp.  $[0, z^*]$ ), alors ce minimum est positif.*

**Démonstration.**

Nous n'étudierons que le cas où les hypothèses de la Proposition 4.1 sont vérifiées, le

deuxième cas (i.e. si (4.3.22) est vérifiée) s'en déduisant immédiatement.

Il est maintenant aisé, par application de la technique de découplage du Lemme 4.1 au système linéaire homogène, de voir que  $v = u'$  est solution sur  $[0,1]$  de l'équation suivante

$$\varepsilon v'' = d_2(x)v' + d_1(x)v + c_2(x)i + c_1(x)v(1), \quad (4.3.29)$$

où les fonctions  $c_k, d_k$  pour  $k = 1, 2$  sont données par

$$d_2 = \varepsilon \phi'(n-p)(n+p)^{-1}, \quad d_1 = n+p - I\varepsilon \phi'(n+p)^{-1},$$

$$c_2(x) = (n+p)^{-1} \left( n+p + \phi' \int_x^1 (n-p)(t)dt \right), \quad c_1 = I\varepsilon \phi'(n+p)^{-1}.$$

Comme  $V < 0$  on a  $I < 0$ . Alors il résulte de la Proposition 4.1 **(i)**-**(ii)** que  $0 < d_1$  et  $c_1 \leq 0$  sur  $[0, x^*] \cup [y^*, 1]$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0,1]$  par

$$g(x) = (n+p)(x) + \phi'(x) \int_x^1 (n-p)(t)dt$$

Montrons que  $g > 0$  sur  $[0, x^*] \cup [y^*, 1]$ . D'après (4.3.3)-(4.3.4),

$$g'(x) = \phi''(x) \int_x^1 (n-p)(t)dt.$$

D'autre part, d'après la Proposition 4.1 **(i)**-**(ii)**; il résulte que  $g$  est décroissante sur  $[0, x^*]$ .

Par suite

$$g(x) \geq (n+p)(x^*) > 0 \quad \forall x \in [0, x^*].$$

Par ailleurs d'après la Proposition 4.1 **(iii)**,  $\phi''$  est soit positive sur  $[y^*, 1]$ , soit il existe  $x_0 \in (y^*, 1)$  unique où  $\phi''$  change de signe. Traitons d'abord le cas  $0 \leq \phi''$  sur  $[y^*, 1]$ .

Comme  $n-p \geq 0$  sur  $[0,1]$ , alors  $g$  est croissante sur  $[y^*, 1]$  ce qui entraîne

$$g(x) \geq (n+p)(y^*) > 0 \quad \forall x \in [y^*, 1].$$

Traitons ensuite le cas où  $\phi''$  change de signe en  $x_0 \in (y^*, 1)$ . D'où  $0 \leq \phi''$  sur  $[y^*, x_0]$  et  $\phi'' \leq 0$  sur  $[x_0, 1]$ . Alors, on en déduit que  $g$  est croissante (resp. décroissante) sur  $[y^*, x_0]$  (resp.  $[x_0, 1]$ ). Par suite

$$g(x) \geq \min((n+p)(y^*), (n+p)(1)) > 0 \quad \forall x \in [y^*, 1].$$

On a donc  $g(x) > 0 \forall x \in [y^*, 1]$  d'où  $c_2 > 0$  sur  $[0, x^*] \cup [y^*, 1]$ . D'autre part, puisque  $v(1) = u'(1) > 0, i < 0$  et en appliquant le principe du maximum à l'équation (4.3.29), on conclut que  $v = u'$  ne peut atteindre un minimum négatif sur  $[0, x^*] \cup [y^*, 1]$ .

**Lemme 4.5** *On fait les hypothèses du Lemme 4.3. On suppose de plus que  $V < 0$  est donné. Alors si  $u'$  change de signe dans  $(0,1)$ , on a l'inégalité suivante*

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}],$$

où  $z_i$  est un point où  $u$  atteint un maximum strict et  $z_{i+1}$  le point consécutif (à droite de  $z_i$ ) où  $u$  atteint un extrémum strict.

**Démonstration.**

Nous nous restreignons, encore une fois de plus, au cas où les hypothèses de la Proposition 4.1 sont valides. En utilisant le Lemme 4.3 et la définition de  $z_i$  et  $z_{i+1}$ , on se ramène à traiter les cas où

(a)  $z_i \leq x^* < z_{i+1} \leq y^*$ ,

(b)  $x^* \leq z_i < z_{i+1} \leq y^*$ ,

(c)  $z_i \leq x^* < y^* \leq z_{i+1}$ ,

(d)  $x^* \leq z_i < y^* \leq z_{i+1}$ .

Par définition de  $z_i$  et  $z_{i+1}$ , on a

$$u'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}], \quad (4.3.30)$$

et

$$u''(z_i) \leq 0, \quad 0 \leq u''(z_{i+1}). \quad (4.3.31)$$

Alors il résulte de (4.3.23) que

$$w(z_i) \leq z(z_i), \quad z(z_{i+1}) \leq w(z_{i+1}). \quad (4.3.32)$$

Comme  $i < 0$ , (4.3.24)-(4.3.25) et (4.3.30) impliquent que

$$(we^{-\phi})' < 0, \quad -(ze^{\phi})' < 0 \quad \text{sur} \quad [z_i, z_{i+1}] \quad (4.3.33)$$

D'où il résulte que

$$w(z_{i+1})e^{\phi(x)-\phi(z_{i+1})} < w(x) < w(z_i)e^{\phi(x)-\phi(z_i)} \quad \forall x \in (z_i, z_{i+1}) \quad (4.3.34)$$

et

$$-z(z_{i+1})e^{-\phi(x)+\phi(z_{i+1})} < -z(x) < -z(z_i)e^{-\phi(x)+\phi(z_i)} \quad \forall x \in (z_i, z_{i+1}) \quad (4.3.35)$$

D'autre part, en tenant compte de (4.3.34)-(4.3.35) et (4.3.32), on en déduit après addition et en utilisant (4.3.23) que pour tout  $x$  dans  $(z_i, z_{i+1})$ , on a

$$2z(z_{i+1}) \sinh(\phi(x) - \phi(z_{i+1})) < \varepsilon u''(x) < 2z(z_i) \sinh(\phi(x) - \phi(z_i)) \quad (4.3.36)$$

Traitons d'abord le cas **(a)**. Il résulte de la définition de  $z_i$  qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $u'$  est décroissante sur  $[z_i, z_i + \eta]$ . D'après le Lemme 4.3, on a  $u''(x^*) \leq 0$ .

Choisissant  $x = x^*$  dans l'inégalité (4.3.36), on en déduit que

$$2z(z_{i+1}) \sinh(\phi(x^*) - \phi(z_{i+1})) < \varepsilon u''(x^*) \leq 0.$$

Puisque  $\phi$  est décroissante sur  $[x^*, z_{i+1}]$ , on obtient finalement  $z(z_{i+1}) < 0$ . D'où il résulte de (4.3.32) et (4.3.34)-(4.3.35) que

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}].$$

Traitons le cas **(b)**. Comme  $\phi$  est décroissante sur  $[x^*, y^*]$ , écrivons (4.3.36) avec  $x = z_{i+1}$  et  $x = z_i$  respectivement, puisque  $u''(z_i) \leq 0 \leq u''(z_{i+1})$  on obtient

$$z(z_i) < 0, \quad z(z_{i+1}) < 0.$$

Par suite, d'après la première inégalité de (4.3.32),

$$w(z_i) < 0.$$

Utilisant (4.3.34)-(4.3.35) et en tenant compte des inégalités précédentes on conclut

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}].$$

D'autre part, comme  $z(z_i) < 0$  il en résulte de (4.3.36) pour  $x = x^*$  que  $u''(x^*) \leq 0$ .

Considérons maintenant le cas **(c)**. D'après (4.3.33), on peut écrire

$$w(y^*)e^{\phi(x)-\phi(y^*)} < w(x) < w(z_i)e^{\phi(x)-\phi(z_i)} \quad \forall x \in (z_i, y^*) \quad (4.3.37)$$

$$-z(y^*)e^{-\phi(x)+\phi(y^*)} < -z(x) < -z(z_i)e^{-\phi(x)+\phi(z_i)} \quad \forall x \in (z_i, y^*) \quad (4.3.38)$$

D'autre part, comme (c) est valide, le Lemme 4.3 entraîne que  $u''(x^*) \leq 0 \leq u''(y^*)$ . D'où d'après (4.3.37)-(4.3.38)

$$2z(y^*) \sinh(\phi(x) - \phi(y^*)) < \varepsilon u''(x) < 2z(z_i) \sinh(\phi(x) - \phi(z_i)) \quad \forall x \in (z_i, y^*) \quad (4.3.39)$$

En échangeant  $x$  par  $x^*$  dans l'expression (4.3.39), on obtient

$$2z(y^*) \sinh(\phi(x^*) - \phi(y^*)) < \varepsilon u''(x^*) \leq 0.$$

Puisque, d'après la Proposition 4.1 (i),  $\phi$  est décroissante sur  $[x^*, y^*]$ , on obtient que  $z(y^*) < 0$ . Utilisant les relations (4.3.37)-(4.3.38) et la première inégalité de (4.3.32) on obtient

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_i, y^*].$$

D'autre part, comme  $(we^{-\phi})' < 0$  sur  $[z_i, z_{i+1}]$  et  $w(z_i) < 0$ , on a

$$w(x) < 0, \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}].$$

Alors, puisque  $-(ze^{\phi})' < 0$  sur  $[z_i, z_{i+1}]$  et d'après la seconde inégalité de (4.3.32) on obtient

$$z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}].$$

Traitons enfin le dernier cas. D'après la définition de  $z_{i+1}$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $u'$  est croissante sur  $[z_{i+1} - \eta, z_{i+1}]$ . En utilisant le Lemme 4.3, on déduit  $0 \leq u''(y^*)$ . Alors, on a d'après (4.3.36), appliquée en  $x = y^*$ ,

$$0 \leq \varepsilon u''(y^*) < 2z(z_i) \sinh(\phi(y^*) - \phi(z_i)).$$

Comme  $\phi$  est décroissante sur  $[z_i, y^*]$ , on a  $z(z_i) < 0$ . D'où, il en résulte de (4.3.34) et (4.3.35) que

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}].$$

D'une façon analogue à (c), on montre que  $u''(x^*) \leq 0$ , d'où le lemme.

On a alors le théorème

**Théorème 4.2** *Supposons que  $\phi_{\pm 1}$ ,  $n_{\pm 1}$ ,  $p_{\pm 1}$  vérifient (4.2.1)-(4.2.3) et (4.2.5). On suppose de plus que  $N$  satisfait (4.3.10)-(4.3.11). Alors si  $V < 0$  est tel que l'on ait*

$\exists(\phi, n, p, J_n, J_p) \in S_{V,N}$  tel que  $\phi'$  change de signe dans  $(0,1)$  avec  $0 < \phi'(1)$  (resp.  $\phi'(1) \leq 0$ )

et

$\forall(\tilde{\phi}, \tilde{n}, \tilde{p}, \tilde{J}_n, \tilde{J}_p) \in S_{V,N}$ ,  $0 < \tilde{\phi}'(0)$ ,  $0 < \tilde{\phi}'(1)$  (resp.  $\tilde{\phi}'(1) \leq 0$ ), alors  $(VD)_{V,N}$  a une unique solution dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2$ .

**Démonstration.**

Démontrons-le dans le cas où  $0 < \phi'(1)$ . Soit  $V$  donné, on écrit le système  $(VD)_{V,N}$  sous la forme abstraite suivante

$$\mathcal{F}(\phi, n, p, J_n, J_p) = 0,$$

où  $\mathcal{F}$  est continûment différentiable défini sous la forme faible sur  $(H^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^2$ .

Etant donnée une solution  $(\phi, n, p, J_n, J_p)$  de  $(VD)_{V,N}$ , on considère un élément  $(u, w, z, j_n, j_p)$  de  $\mathcal{N}(\mathcal{F}'(\phi, n, p, J_n, J_p))$  (le noyau de l'opérateur linéarisé). Puisque  $N$  est impair on démontre que

$$u(-x) = -u(x), w(-x) = z(x), z(-x) = w(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

et

$$j_n = j_p.$$

(La technique de la démonstration est analogue à celle du Théorème 4.1 appliquée au système linéarisé).

Etant donné  $u(0) = u(1) = 0$ , remarquons que pour démontrer le théorème il suffit de montrer que  $u'$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $u'$  change de signe dans  $(0,1)$ . On désigne par  $(z_r)_{0 \leq r \leq K}$  les extréma stricts de  $u$  ordonnés de manière strictement croissante. Comme  $i < 0$ , en appliquant le lemme de monotonie locale, Lemme 3.11 donné dans [8] au système linéarisé, on en déduit que  $0 < u'(1)$ . Et donc  $u(z_K)$  est un minimum de  $u$ . Montrons que  $u \leq 0$  sur  $[0,1]$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $u$  change de signe dans  $(0,1)$ , alors il existe  $x_0 \in (0, 1)$  et  $r \in [0, K]$  tels que  $u$  change de signe en  $x_0$  et garde un signe constant sur  $[x_0, 1]$  et  $x_0 \in [z_r, z_{r+1}]$ ,  $u' \leq 0$  sur  $[z_r, z_{r+1}]$ . Comme  $0 < u'(1)$  on obtient qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $u$  est strictement croissante sur  $[1 - \eta, 1)$ . Par suite la condition  $u(1) = 0$  implique  $u \leq 0$

sur  $[x_0, 1]$ .

D'après (4.3.24)-(4.3.25) et (4.3.3)-(4.3.4) on obtient que

$$(we^{-\phi} - nue^{-\phi})' = \frac{i}{2}e^{-\phi} - \frac{I}{2}ue^{-\phi}, \quad (4.3.40)$$

et

$$(ze^{\phi} + pue^{\phi})' = -\frac{i}{2}e^{\phi} - \frac{I}{2}ue^{\phi}. \quad (4.3.41)$$

Supposons donc  $0 < \phi'(1)$ . La fonction  $\phi$ , satisfait les hypothèses de la Proposition 4.1. Puisque  $\phi(x)$  est bornée sur  $[0,1]$ , on peut définir  $0 < \beta < \min(e^{-2\phi(x^*)}, e^{-2\phi(1)})$  où  $x^*$  est défini dans la Proposition 4.1. Ceci entraîne que  $e^{-\phi} - \beta e^{\phi} > 0$  sur  $[0,1]$ .

En additionnant l'équation (4.3.40) à (4.3.41) multipliée par  $\beta$ , on obtient

$$((we^{-\phi} + \beta ze^{\phi}) - (ne^{-\phi} - \beta pe^{\phi})u)' = \frac{i}{2}(e^{-\phi} - \beta e^{\phi}) - \frac{I}{2}(e^{-\phi} + \beta e^{\phi})u. \quad (4.3.42)$$

On a d'après ce qui précède  $I < 0$ ,  $i < 0$  et  $u \leq 0$  sur  $[x_0, 1]$  et on déduit de (4.3.42) que

$$((we^{-\phi} + \beta ze^{\phi}) - (ne^{-\phi} - \beta pe^{\phi})u)' < 0 \quad \text{sur} \quad [x_0, 1].$$

D'où il résulte que

$$0 < w(x_0)e^{-\phi(x_0)} + \beta z(x_0)e^{\phi(x_0)},$$

ce qui contredit que  $w(x_0) < 0$  et  $z(x_0) < 0$  grâce au Lemme 4.4. Autrement dit la fonction  $u$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ . De plus, comme  $u'(1) > 0$  et  $u(0) = u(1) = 0$  on voit que  $u \leq 0$  sur  $[0,1]$  et  $u'(0) \leq 0$ . D'où il résulte de la définition de  $z_i$  que

$$u' \leq 0 \quad \text{sur} \quad [0, z_0] \quad \text{et} \quad u''(z_0) \geq 0. \quad (4.3.43)$$

D'autre part, utilisant (4.3.23), on a

$$z(z_0) \leq w(z_0). \quad (4.3.44)$$

D'où puisque  $i < 0$  et en utilisant (4.3.24)-(4.3.25), on obtient

$$(we^{-\phi})' < 0, \quad -(ze^{\phi})' < 0 \quad \text{sur} \quad [0, z_0], \quad (4.3.45)$$

et par conséquent

$$w(z_0)e^{\phi(x)-\phi(z_0)} < w(x) < w(0)e^{\phi(x)} \quad \forall x \in (0, z_0) \quad (4.3.46)$$



et

$$-z(z_0)e^{-\phi(x)+\phi(z_0)} < -z(x) < -z(0)e^{-\phi(x)} \quad \forall x \in (0, z_0) \quad (4.3.47)$$

Reportant (4.3.44) dans (4.3.46) et (4.3.47), par addition des inégalités résultantes et en tenant compte de (4.3.23), il vient

$$2z(z_0) \sinh(\phi(x) - \phi(z_0)) < \varepsilon u''(x) < 2z(0) \sinh(\phi(x)) \quad \forall x \in (0, z_0) \quad (4.3.48)$$

On poursuit la démonstration en montrant que

$$w(0) = z(0) < 0. \quad (4.3.49)$$

En effet, de la relation (4.3.29), on a  $u^{(3)}(0) < 0$ . Alors le Lemme 4.3 entraîne ou bien  $z_0 \in (x^*, y^*]$  ou bien  $z_0 \in (y^*, 1)$  où  $x^*$  et  $y^*$  sont définis dans la Proposition 4.1.

Puisque  $u^{(3)}(0) < 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $u'$  est décroissante sur  $(0, \eta]$ . En utilisant encore le Lemme 4.3; il découle de (4.3.43) que  $u''(x^*) \leq 0$ . Si  $z_0 \in (x^*, y^*]$ , dans (4.3.48) prenons  $x = x^*$

$$2z(z_0) \sinh(\phi(x^*) - \phi(z_0)) < \varepsilon u''(x^*) \leq 0.$$

Grâce à la proposition 4.1 (i), il découle que  $z(z_0) < 0$ . Donc, en utilisant (4.3.46)-(4.3.47) il s'en suit que

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [0, z_0].$$

Supposons maintenant que  $z_0 \in (y^*, 1)$ . Il suffit d'utiliser la définition de  $z_0$  pour déduire qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $u'$  est croissante sur  $[z_0 - \eta, z_0]$  et grâce au Lemme 4.3, on a  $0 \leq u''(y^*)$ . Donc, en tenant compte de  $(we^{-\phi})' < 0$  et  $-(ze^{\phi})' < 0$  sur  $[0, y^*]$ , on montre comme précédemment que

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [0, y^*].$$

Ainsi on a démontré que  $w(0) = z(0) < 0$ . D'autre part, en utilisant (4.3.42) et, aussi, parce que  $u \leq 0$  sur  $[0, 1]$ , on obtient

$$\left( (we^{-\phi} + \beta ze^{\phi}) - (ne^{-\phi} - \beta pe^{\phi})u \right)' < 0 \quad \text{sur} \quad [0, 1].$$

Ceci entraîne, en tenant compte des conditions aux limites sur  $u, w, z$  et  $\phi$  en  $x = 0$  et  $x = 1$  que

$$0 < w(0)(1 + \beta),$$

ce qui contredit que  $w(0) = z(0) < 0$  et on en déduit que  $u'$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ . Or  $u(0) = u(1) = 0$  par suite, d'après (4.3.23)-(4.3.28) on obtient  $(u, w, z, j_n, j_p) = 0$  ce qui entraîne que  $\mathcal{N}(\mathcal{F}'(\phi, n, p, J_n, J_p)) = \{0\}$ . Alors grâce au théorème des fonctions implicites et puisque  $\mathcal{F}'(\phi, n, p, J_n, J_p)$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0, on déduit que  $(\phi, n, p, J_n, J_p)$  est localement dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2$  une solution unique de  $(VD)_{V,N}$ . Or pour tout  $|V|$  suffisamment petit, l'unicité globale a été démontré même dans des cas multi-dimensionnels et sous des hypothèses très générales sur  $N$  dans [30], [24]. De plus puisque toutes les solutions de  $(VD)_{V,N}$  sont isolées, on sait d'après le Théorème 3.1 (voir [8]) qu'il existe  $V_-$  tel que pour tout  $V \leq V_-$ ,  $(VD)_{V,N}$  admet une solution unique et la démonstration est achevée.

### 4.3.2 Cas de polarisation directe (i.e. $0 < V$ )

On montre dans cette section le résultat d'unicité globale suivant pour une diode symétrique mono-dimensionnelle et pour  $0 < V$ , sous l'hypothèse supplémentaire de non monotonie sur le potentiel électrostatique. Remarquons que si  $0 < V$ , alors  $0 < I$  et on peut aussi supposer sans perte de généralité que  $i < 0$ . En appliquant le principe du maximum sur l'intervalle  $[0,1]$  à l'équation

$$\varepsilon\phi^{(4)} = (n + p + \varepsilon\phi'^2)\phi'' + \phi'^2$$

associée à des conditions aux limites de type Dirichlet en 0 et 1 vérifiant  $\phi''(0^+) \leq 0$ ,  $\phi''(1) = 0$ , on obtient  $0 \geq \phi''$  sur  $[0,1]$  ou encore  $\phi'(1) \leq \phi'(x) \leq \phi'(0) \quad \forall x \in [0,1]$ .

Si  $0 < V$  et  $(\phi, n, p, J_n, J_p)$  est une solution de  $(VD)_{V,N}$  telle que

- $0 \leq \phi'(1)$ , alors  $\forall x \in [0,1] \quad \phi'(x) \geq 0$  et on sait, d'après le Théorème 3.2 [9] que le système  $(VD)_{V,N}$  admet une solution unique.
- $\phi'(0) \leq 0$ , alors  $\forall x \in [0,1] \quad \phi'(x) \leq 0$ . Dans ce cas, on peut appliquer le Théorème 4.4 [9] pour conclure que  $(\phi, n, p, J_n, J_p)$  est localement dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2$  une solution unique de  $(VD)_{V,N}$ .

Par ailleurs, on peut aisément montrer que si  $V$  est suffisamment proche de 0 alors  $0 \leq \phi'(1)$  (on est alors dans le premier cas). Par contre, si  $V > 0$  est suffisamment grand, on a  $\phi'(0) \leq 0$  (voir [9]) (ce qui correspond au second cas).

Nous nous proposons d'étudier dans ce qui suit le cas où  $0 < \phi'(0)$  et  $\phi'(1) < 0$ . Montrons d'abord qu'il existe des données pour lesquelles  $\phi'(1) < 0 < \phi'(0)$ . Soit  $(\phi_\varepsilon, n_\varepsilon, p_\varepsilon, J_{n,\varepsilon})(I, \cdot)$  l'unique solution de  $(CD)_{I,\varepsilon}$ , on rappelle que cette solution dépend de manière  $C^\infty$  de  $I$  (voir [9]). On pose  $V_\varepsilon(I) = \log(n_1/\delta^2) - \phi_\varepsilon(1) - V(-1)$ . On sait que l'application

$$I \longmapsto V_\varepsilon(I)$$

est strictement croissante dans un voisinage de  $I = 0$ . De plus pour  $\varepsilon$  fixé on a

$\lim_{I \rightarrow \pm\infty} V_\varepsilon(I) = \pm\infty$ . On montre d'après ce qui précède que pour tout  $x \in (0, 1)$ , on a  $\phi'_{I=0}(x) > 0$ . On sait d'autre part que pour  $V > 0$  suffisamment grand, alors  $\phi'_I(1) < 0$  et d'après le principe de monotonie locale du champ électrique par rapport au courant, on a

$$I_1 \leq I_2 \implies \phi'_{I_2}(1) \leq \phi'_{I_1}(1).$$

Donc il existe  $I^* > 0$  unique tel que  $\phi'_{I^*}(1) = 0$ . D'autre part, on a

$$\phi'_{I^*}(1) = 0 \leq \phi'_{I^*}(x) \leq \phi'_{I^*}(0) \quad \forall x \in [0, 1].$$

D'où  $\phi'_{I^*}(0) \geq 0$ . Par suite pour  $I > I^*$  on a  $\phi'_I(1) < 0$  (monotonie de  $I \longmapsto \phi'_I(1)$ ). Comme  $\phi'_{I^*}(0) \geq 0$  et puisque  $I \longmapsto \phi'_I(0)$  est une fonction régulière, on en déduit que pour  $I > I^*$  ( $I$  proche de  $I^*$ ) on a  $\phi'_I(1) < 0$  et  $\phi'_I(0) > 0$ .

**Théorème 4.3** *On suppose que  $\phi_{\pm 1}, n_{\pm 1}, p_{\pm 1}$  vérifient (4.2.1)-(4.2.3) et (4.2.5). On suppose de plus que  $N(x) = \text{sign}(x) \forall x \in [-1, 1]$ . Alors si  $0 < V$  est tel que l'on a  $\exists(\phi, n, p, J_n, J_p) \in S_{V,N}$  vérifiant*

$$\exists! y_0 \in (0, 1) \quad \text{tel que} \quad \phi'(y_0) = 0, \tag{4.3.50}$$

$$\phi'(1) < 0 < \phi'(0), \tag{4.3.51}$$

et,

$$0 \leq \int_x^1 (n - p)(t) dt \quad \forall x \in [0, 1], \tag{4.3.52}$$

alors  $(VD)_{V,N}$  a une solution unique dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2$ .

**Démonstration.**

La technique de la démonstration est analogue à celle du Théorème 4.2. Puisque  $\phi'' \leq 0$  sur  $[0, 1]$  et en utilisant la relation

$$g(x) = (n + p)(x) + \phi'(x) \int_x^1 (n - p)(t) dt,$$

il découle de (4.3.52) que  $0 < g(x)$  sur  $[0,1]$ . De plus on sait d'après la relation (4.3.29) et puisque  $\phi' \leq 0$  sur  $[y_0, 1]$  que  $u'$  ne peut atteindre un minimum négatif sur  $[y_0, 1]$ . On désigne par  $(z_r)_{0 \leq r \leq K}$  les points de  $(0,1)$  où  $u$  atteint des extréma stricts. Comme  $u'(1) > 0$ ,  $u(z_K)$  est un minimum strict de  $u$ . On peut distinguer deux cas : ou bien  $z_K \in (y_0, 1]$  ou bien  $z_K \in [0, y_0]$ . La démonstration du Théorème 4.3 se divise en deux étapes.

**1<sup>re</sup> étape.** On montre d'abord que pour tout  $x \in [z_i, z_{i+1}]$  où  $u(z_i)$  (resp.  $u(z_{i+1})$ ) est un maximum local (resp. minimum local) de  $u$ , on a

$$0 < w(x), \quad 0 < z(x).$$

En effet, par définition de  $z_i$  et  $z_{i+1}$ , on a donc l'inégalité (4.3.36) pour tout  $x \in (z_i, z_{i+1})$ . si  $z_K \in [0, y_0]$ , comme  $\phi$  est croissante sur  $[0, y_0]$  en utilisant respectivement le terme à droite et à gauche de  $\varepsilon u''(x)$  dans l'inégalité (4.3.36), on en déduit que

$$0 < z(z_i), \quad 0 < z(z_{i+1}),$$

et comme  $u''(z_{i+1}) \geq 0$ , on obtient  $w(z_{i+1}) > 0$  d'où, en vertu des inégalités précédentes et de (4.3.34)-(4.3.35)

$$0 < w(x), \quad 0 < z(x) \quad \forall x \in [z_i, z_{i+1}].$$

Si maintenant  $z_K \in (y_0, 1]$ , il est aisé de voir que si  $z_{K-1}$  existe, alors  $z_{K-1} \in [0, y_0)$  et  $0 \leq u''(y_0)$ . En reprenant maintenant le plan de la démonstration du Lemme 4.4, on obtient

$$0 < w(x), \quad 0 < z(x) \quad \forall x \in [z_{K-1}, z_K].$$

Par ailleurs, puisque la fonction  $\phi$  est croissante sur  $[0, y_0]$  on montre comme précédemment que

$$0 < w(z_l), \quad 0 < z(z_l) \quad \forall l \in \{0, \dots, K-2\}.$$

Finalement on conclut que  $0 < w(x)$  et  $0 < z(x)$  pour tout  $x$  dans  $[z_i, z_{i+1}]$ .

**2<sup>nde</sup> étape.** Montrons maintenant que  $u'$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $u'$  change de signe dans  $(0,1)$ . Comme précédemment on commence par montrer que  $u$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ .

En effet, si  $u$  change de signe dans  $(0,1)$ , alors il existe  $x_0$  dans  $(0,1)$  et  $j \in \{0, \dots, K-1\}$  tels que

$$u(x_0) = 0, \quad u'(x_0) < 0, \quad u \leq 0 \quad \text{sur} \quad [x_0, 1],$$

et

$$x_0 \in (z_j, z_{j+1}).$$

On introduit ensuite le nombre  $\delta$  qui vérifie

$$\max(1, e^{-2\phi_1}) < \delta.$$

On a alors  $\delta e^\phi - e^{-\phi} > 0$  sur  $[0,1]$ . En échangeant  $\beta$  par  $\delta$  dans l'expression (4.3.42) et par un raisonnement analogue à celui du Théorème 4.2, on obtient

$$\left( (we^{-\phi} + \delta ze^\phi) - (ne^{-\phi} - \delta pe^\phi)u \right)' = -\frac{i}{2}(\delta e^\phi - e^{-\phi}) - \frac{I}{2}(e^{-\phi} + \delta e^\phi)u, \quad (4.3.53)$$

et

$$w(x_0)e^{-\phi(x_0)} + \delta z(x_0)e^{\phi(x_0)} < 0,$$

ce qui contredit que  $0 < w(x_0)$  et  $0 < z(x_0)$  d'où  $u$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ . Par suite comme  $u(0) = u(1) = 0$  et  $0 < u'(1)$ , on conclut que  $u \leq 0$  sur  $[0,1]$  et  $u'(0) \leq 0$ . D'autre part, d'après (4.3.53) et les conditions aux limites sur  $w$ ,  $z$ ,  $u$  et  $\phi$ , on obtient pour tout  $x \in (0,1)$

$$w(0)(1 + \delta) < \left( w(x)e^{-\phi(x)} + \delta z(x)e^{\phi(x)} \right) - \left( n(x)e^{-\phi(x)} - \delta p(x)e^{\phi(x)} \right) u(x) < 0.$$

Comme  $\delta > 0$  il en résulte de l'inégalité précédente que

$$w(0) = z(0) < 0. \quad (4.3.54)$$

D'après (4.3.24)-(4.3.25) et comme  $u''(z_0) \geq 0$  on en déduit aisément que

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [0, z_0].$$

Puisque  $w$  et  $z$  sont de classe  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ , alors en dérivant (4.3.23) et en utilisant (4.3.24)-(4.3.25) dans l'équation résultante, on a

$$\varepsilon u^{(3)} = (w + z)\phi' + (n + p)u' + i \quad \text{sur} \quad [0, 1]. \quad (4.3.55)$$

En posant  $x = 0$  dans l'équation précédente et en utilisant (4.3.51) et (4.3.54), on obtient

$$\varepsilon u^{(3)}(0) < 0.$$

Comme  $u'(0) \leq 0$ ,  $u''(0) = 0$  et  $u^{(3)}(0) < 0$  on en déduit qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $u' < 0$  sur  $(0, \eta]$ . Comme  $u'(1) > 0$  ceci montre que  $u'$  atteint un minimum strictement négatif dans  $(0, y_0]$  en  $x_{min}$  (puisque l'on rappelle que  $u'$  ne peut atteindre de minimum strictement négatif sur  $[y_0, 1]$ ). D'autre part, puisque  $x_{min} \leq y_0$  et d'après le définition de  $y_0$ , on a donc  $0 \leq \phi'(x_{min})$ . Par ailleurs  $x_{min} \leq z_0$ , donc  $w(x_{min}) < 0$  et  $z(x_{min}) < 0$ . D'où

$$\varepsilon u^{(3)}(x_{min}) = (w + z)(x_{min})\phi'(x_{min}) + (n + p)(x_{min})u'(x_{min}) + i < 0,$$

ce qui contredit que  $x_{min}$  est un minimum de  $u'$ . Par suite  $u'$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ . Poursuivant le même argument que celui du Théorème 4.2, on montre que  $(\phi, n, p, J_n, J_p)$  est globalement dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2$  une solution unique de  $(VD)_{V,N}$ .

## 4.4 Résultat d'unicité dans le cas de thyristors symétriques polarisés en inverse

On suppose maintenant que  $N$  a trois changements de signe (cas du thyristor). On a

$$\phi(\pm 1) = \log \left( \frac{N(\pm 1) + (N^2(\pm 1) + 4\delta^4)^{1/2}}{2\delta^2} \right) - V, \quad (4.4.1)$$

$$n(\pm 1) = \frac{N(\pm 1) + (N^2(\pm 1) + 4\delta^4)^{1/2}}{2}, \quad (4.4.2)$$

$$p(\pm 1) = \frac{-N(\pm 1) + (N^2(\pm 1) + 4\delta^4)^{1/2}}{2}, \quad (4.4.3)$$

où  $n_1 p_1 = \delta^4$ .

Dans le but de traiter le cas de thyristors polarisés en inverse et pour lesquels le potentiel électrostatique est non monotone on renormalise  $N$  de la manière suivante

$$N(x) = \begin{cases} N_- & \text{si } a_0 = 0 \leq x < a_1 \\ N_+ & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 = 1 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

où les constantes  $N_-$  et  $N_+$  vérifient

$$N_- < 0 \quad \text{et} \quad 0 < N_+. \quad (4.4.5)$$

Les points  $-a_1$ ,  $0$  et  $a_1$  désignent les trois jonctions  $PN$ .

**Remarque 4.2** *On peut, grâce au Lemme 6.1 [9], affirmer que, si  $|N_-|$  est assez grand alors  $\phi'(0) < 0$ . Le résultat d'unicité de la solution (voir Alabau [9]) établi au Théorème 6.7 [9] concerne un thyristor symétrique polarisé en inverse avec  $\phi$  monotone croissante. Dans l'exemple présent comme dans le Théorème 6.7, le semi-conducteur est supposé symétrique polarisé en inverse. Par contre, ici nous considérons des cas où  $\phi'(0) \leq 0$ ; la démonstration dans [9] ne se transpose pas car comme on va le voir le potentiel électrostatique n'est plus monotone.*

Cherchons alors s'il existe des données pour lesquelles on a effectivement des  $V \leq 0$  et des solutions de  $(VD)_{V,N}$  telles que  $\phi'(0) < 0$ . On considère la fonction  $N(x)$ , égale à  $\zeta N_-(x)$ , dans l'intervalle  $[0, a_1]$ , et à  $N_+(x)$  dans  $(a_1, 1]$ , où  $\zeta \geq 0$  est un paramètre et  $N_-$  et  $N_+$  sont des fonctions bornées définies respectivement sur  $[0, a_1]$  et  $(a_1, 1]$  telles que

$$N_- \leq 0, \quad N_- \not\equiv 0, \quad N_+ \geq 0, \quad N_+ \not\equiv 0.$$

On rappelle que (voir [9]) pour  $V \leq 0$  suffisamment grand, on a un résultat d'unicité à  $\zeta$  fixé dans le cas où le thyristor n'est plus supposé être proche d'une jonction *PIN*. D'autre part, rappelons qu'il existe  $\zeta^*$  tel que pour tout  $\zeta > \zeta^*$ , on a  $\phi'(0) < 0$  au voisinage de  $V = 0$ . On déduit aussitôt du principe de monotonie locale que pour tout  $I < 0$ , on a  $0 < \phi'_{I=0}(1) < \phi'_I(1)$ .

On pose  $\Omega_- = (0, a_1)$  et  $\Omega_+ = (a_1, 1)$ . On a alors le résultat suivant de convexité ou concavité du potentiel électrostatique.

**Proposition 4.3** *On suppose que les données au bord satisfont (4.4.1)-(4.4.3) et que  $N$  vérifie (4.4.4)-(4.4.5). Soit  $(\phi, n, p, J_n, J_p)$  une solution arbitraire de  $(VD)_{V,N}$ , alors il existe  $x^* \in (0, 1]$  tel que*

$$0 \leq \phi'' \quad \text{sur} \quad [0, x^*], \quad \phi'' \leq 0 \quad \text{sur} \quad [x^*, 1]. \quad (4.4.6)$$

La démonstration de la Proposition est donnée dans [9].

**Proposition 4.4** *On suppose que  $N$  et  $\phi_{\pm 1}, n_{\pm 1}, p_{\pm 1}$  vérifient les hypothèses de la Proposition 4.3. Soit  $V < 0$  donné. On suppose de plus que  $\phi'(0) < 0$ . Alors il existe  $y^* \in (0, a_1)$  unique tel que  $\phi'(y^*) = 0$  et le potentiel électrostatique  $\phi$  vérifie désormais la propriété suivante*

$$\phi'(x) \leq 0 \quad \text{sur} \quad [0, y^*], \quad 0 \leq \phi'(x) \quad \text{sur} \quad [y^*, 1]. \quad (4.4.7)$$

### **Démonstration.**

Notons d'abord que la relation  $\phi'(0) < 0$  entraîne que  $\phi'$  change de signe dans  $(0,1)$ . En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que  $\phi'$  garde un signe constant sur  $[0,1]$ , alors

$$\phi' \leq 0 \quad \text{sur} \quad [0,1],$$

d'où l'on conclut que l'on a

$$\phi(1) \leq \phi(0) = 0,$$

ce qui est absurde puisque  $\phi(1) = \log \left( \frac{N(1) + (N^2 + 4\delta^4)^{1/2}}{2\delta^2} \right) - V > 0$ . On déduit aussitôt de la Proposition 4.3 que la fonction  $\phi'$  change de signe au plus deux fois dans  $(0,1)$ . On désigne par  $y^*$  le premier point à partir de  $x = 0$  où  $\phi'$  change de signe, par suite  $0 \leq \phi''(y^*)$ . Cela étant, on a ou bien  $y^* \in (0, a_1)$  ou bien  $y^* \in [a_1, 1)$ . Supposons que  $y^* \in [a_1, 1)$ . Comme  $\phi' \leq 0$  sur  $[0, y^*]$  en vertu de (4.3.15), on a  $(n-p)' < 0$  sur  $[0, y^*]$ . On conclut de (4.3.1) que

$$N_+ = N(y^*) \leq (n-p)(y^*) < (n-p)(0) = 0,$$

ce qui est absurde puisque  $0 < N_+$ , ce qui prouve que  $y^* \in (0, a_1)$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $z^* \in (y^*, 1)$  où  $\phi'$  change de signe et  $\phi''(z^*) \leq 0$ . On a alors  $(n-p)' < 0$  sur  $[z^*, 1]$  et par suite

$$N_+ = (n-p)(1) < (n-p)(z^*) \leq N(z^*) = N_- \quad \text{ou} \quad N_+,$$

suivant la position de  $z^*$  par rapport à  $a_1$ . Ce qui est absurde, et la proposition est donc complètement démontrée.

**Théorème 4.4** *On fait les hypothèses de la Proposition 4.4. Alors si  $V < 0$  est tel que  $\exists(\phi, n, p, J_n, J_p) \in S_{V,N}$  vérifiant (4.4.7),*

*et*

$$\forall(\tilde{\phi}, \tilde{n}, \tilde{p}, \tilde{J}_n, \tilde{J}_p) \in S_{V,N}, \tilde{\phi}'(0) < 0, 0 \leq \tilde{\phi}'(1),$$

*alors  $(VD)_{V,N}$  a une solution unique dans  $(H^1(\Omega))^3 \times \mathbb{R}^2$ .*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin des lemmes suivants. Nous conservons les notations introduites dans la Section 4.3. Soit  $(u, w, z, i)$  une solution de (4.3.23)-(4.3.28). On suppose toujours  $i \leq 0$  et donc  $u'(1) > 0$ . En utilisant (4.3.24)-(4.3.25) et en multipliant l'équation (4.3.23) par  $\phi'$ , il vient

$$\varepsilon u''(x)\phi'(x) = (w+z)'(x) - (n(x) - p(x))u'(x), \quad (4.4.8)$$



puis en multipliant (4.1.1) par  $u'$ , on a

$$\varepsilon\phi''(x)u'(x) = (n(x) - p(x))u'(x) - N_{\pm}u'(x) \quad (4.4.9)$$

Après addition, il vient après intégration

$$\varepsilon\phi'(x)u'(x) + N_{\pm}u(x) = (w + z)(x) + \alpha_{\pm} \quad \forall x \in \overline{\Omega}_{\pm}, \quad (4.4.10)$$

où les nombres  $\alpha_{\pm}$  sont inconnus.

Comme  $u$ ,  $w$  et  $z$  sont continues dans  $\Omega$  on a la condition de transmission suivante

$$(N_+ - N_-)u(a_1) = \alpha_+ - \alpha_-. \quad (4.4.11)$$

Reportant  $x = 1$  dans (4.4.10), et d'après les conditions aux limites sur  $u$ ,  $w$  et  $z$  en 1, on a

$$0 \leq \alpha_+.$$

Raisonnons comme dans la Section 4.3, on veut montrer que  $u'$  garde un signe constant sur  $[0,1]$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $u'$  change de signe dans  $(0,1)$ . Soient  $z_r$  ( $0 \leq r \leq K$ ) des nombres réels tels que  $0 < z_r < 1$  et où  $u$  atteint des extréma stricts. On prétend alors que  $u$  ne change pas de signe dans  $(0,1)$ . En effet, si  $u$  change de signe dans  $(0,1)$ , alors l'indice  $K$  vérifie  $1 \leq K$  et  $u(z_K)$  est un minimum local strict de  $u$ . On peut alors énoncer le lemme suivant

**Lemme 4.6** *On fait les hypothèses du Théorème 4.4 et soit  $V < 0$  donné. Alors si  $(u, w, z, i)$  est une solution de (4.3.23)-(4.3.28),  $i \leq 0$  telle que  $u$  et  $u'$  changent de signe dans  $(0,1)$ , on a les inégalités suivantes*

(a)  $0 < z_{K-1} < y^*$ , où  $y^*$  est défini dans la Proposition 4.4,

(b)  $u$  garde un signe constant sur  $[z_{K-1}, z_K]$ .

**Démonstration.**

Nous nous bornerons à démontrer le lemme dans le cas où  $a_1 \leq z_K$ , le raisonnement étant tout à fait analogue pour le cas  $z_K < a_1$ .

On a

$$u'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [z_{K-1}, z_K], \quad (4.4.12)$$

et

$$u''(z_{K-1}) \leq 0, \quad 0 \leq u''(z_K). \quad (4.4.13)$$

Ensuite, compte tenu de (4.3.23), on obtient

$$w(z_{K-1}) \leq z(z_{K-1}), \quad z(z_K) \leq w(z_K). \quad (4.4.14)$$

On a donc comme auparavant grâce à (4.3.24) et (4.3.25)

$$(we^{-\phi})' < 0, \quad -(ze^{\phi})' < 0 \quad \text{sur} \quad [z_{K-1}, z_K]$$

ce qui donne évidemment

$$w(z_K)e^{\phi(x)-\phi(z_K)} < w(x) < w(z_{K-1})e^{\phi(x)-\phi(z_{K-1})} \quad \forall x \in (z_{K-1}, z_K) \quad (4.4.15)$$

et

$$-z(z_K)e^{-\phi(x)+\phi(z_K)} < -z(x) < -z(z_{K-1})e^{-\phi(x)+\phi(z_{K-1})} \quad \forall x \in (z_{K-1}, z_K) \quad (4.4.16)$$

On déduit donc de (4.4.14)-(4.4.16) et (4.3.23) que l'on a pour tout  $x$  dans  $(z_{K-1}, z_K)$

$$2z(z_K) \sinh(\phi(x) - \phi(z_K)) < \varepsilon u''(x) < 2z(z_{K-1}) \sinh(\phi(x) - \phi(z_{K-1})) \quad (4.4.17)$$

**(a)** Supposons maintenant que  $y^* \leq z_{K-1}$ . Alors  $\phi$  est monotone sur  $[z_{K-1}, z_K]$  (croissante). On a donc d'après la définition de  $z_{K-1}$  et  $z_K$  et de (4.4.17) que

$$0 < z(z_{K-1}), \quad 0 < z(z_K).$$

D'où, il résulte de la seconde inégalité de (4.4.14) que

$$0 < w(z_K)$$

et l'on déduit par suite de (4.4.15)-(4.4.16) que

$$0 < w(x), \quad 0 < z(x) \quad \forall x \in [z_{K-1}, z_K],$$

ce qui est absurde puisque la relation (4.4.10) entraîne

$$(w+z)(z_K) = N_+u(z_K) - \alpha_+ < 0,$$

ce qui prouve notre assertion, c'est-à-dire  $z_{K-1} \in (0, y^*)$ .

**(b)** Raisonnons par l'absurde et supposons que  $u$  change de signe en  $y_0 \in (z_{K-1}, z_K)$ . Puisque l'on a supposé  $a_1 \leq z_K$ , on déduit de **(a)** et de la définition de  $y^*$  donnée dans la Proposition 4.4 que notre assertion se montre en considérant les trois cas suivants

(i) Le cas où  $a_1 < y_0 < z_K$ .

(ii) Le cas où  $z_{K-1} < y_0 \leq y^*$ .

(iii) Le cas où  $y^* < y_0 \leq a_1$ .

Alors on prétend que  $0 < u''(y^*)$ . En effet si  $u''(y^*) \leq 0$ , en échangeant  $x$  par  $y^*$  dans l'expression (4.4.17), on obtient

$$2z(z_K) \sinh(\phi(y^*) - \phi(z_K)) < \varepsilon u''(y^*) \leq 0.$$

D'autre part, comme  $y^* < a_1 \leq z_K$  et d'après la Proposition 4.4, on a  $0 < z(z_K)$ , ce qui entraîne compte tenu de (4.4.14)-(4.4.16)

$$0 < w(x), \quad 0 < z(x) \quad \forall x \in [z_{K-1}, z_K].$$

(i) Faisons d'abord l'hypothèse  $y_0 \in (a_1, z_K)$ . Alors on obtient une contradiction puisque d'après la relation (4.4.10), on a

$$(w + z)(y_0) = \varepsilon \phi'(y_0) u'(y_0) - \alpha_+ \leq 0,$$

ce qui prouve que  $0 < u''(y^*)$ . Par suite en écrivant (4.4.17) pour  $x = y^*$ , on voit que

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_{K-1}, z_K]. \quad (4.4.18)$$

On choisit maintenant un réel  $\xi$  tel que  $0 < \xi < e^{-2\phi(1)}$ , alors  $0 < e^{-\phi} - \xi e^\phi$  sur  $[0, 1]$ . En remplaçant  $\beta$  par  $\xi$  dans (4.3.42), on obtient

$$\left( (we^{-\phi} + \xi ze^\phi) - (ne^{-\phi} - \xi pe^\phi)u \right)' = \frac{i}{2}(e^{-\phi} - \xi e^\phi) - \frac{I}{2}(e^{-\phi} + \xi e^\phi)u. \quad (4.4.19)$$

On a d'après ce qui précède  $I < 0$ ,  $i < 0$  et  $u \leq 0$  sur  $[y_0, 1]$  et on déduit de (4.4.19) que

$$\left( (we^{-\phi} + \xi ze^\phi) - (ne^{-\phi} - \xi pe^\phi)u \right)' < 0 \quad \text{sur} \quad [y_0, 1].$$

D'où il résulte que

$$0 < w(y_0)e^{-\phi(y_0)} + \xi z(y_0)e^{\phi(y_0)},$$

ce qui contredit (4.4.18). Par suite (i) entraîne que  $u$  garde un signe constant sur  $[z_{K-1}, z_K]$ .

Le raisonnement est tout à fait analogue pour (ii) et (iii) (on remarque que dans ces cas  $u(a_1) \leq 0$ , d'où d'après (4.4.11) on a  $0 \leq \alpha_+ \leq \alpha_-$ ).

Ceci entraîne aussitôt comme conséquence

**Lemme 4.7** *On fait les hypothèses du Lemme 4.5. Alors la fonction  $x \mapsto u(x)$  garde un signe constant sur  $[0, 1]$ .*

**Démonstration.**

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $u$  change de signe en  $y_0 \in (0, 1)$ . Comme  $z_K$  (resp.  $z_{K-1}$ ) est un point où  $u$  atteint un minimum (resp. maximum) strict, il résulte du Lemme 4.5 (b) que  $y_0 \in (0, z_{K-2})$  et l'indice  $K$  vérifie  $3 \leq K$ . Soit  $j$  un entier appartenant à  $\{0, \dots, K-1\}$  tel que  $y_0 \in (z_j, z_{j+1})$ . Du Lemme 4.5, on a  $y^* \in (z_{K-1}, 1)$ . Comme d'autre part, en vertu de la Proposition 4.4, on a  $\phi' \leq 0$  sur  $[0, y^*]$  on montre avec les techniques précédentes que

$$w(x) < 0, \quad z(x) < 0 \quad \forall x \in [z_j, z_{j+1}].$$

En particulier pour  $x = y_0$ , on a

$$w(y_0) < 0, \quad z(y_0) < 0.$$

D'une façon analogue à la démonstration du Lemme 4.5, on aboutit à une contradiction et le lemme est ainsi démontré.

**Démonstration du Théorème 4.4.**

Utilisant le Lemme 4.6, on déduit de  $0 < u'(1)$ , combiné avec la condition  $u(0) = u(1) = 0$  que  $u \leq 0$  sur  $[0, 1]$  et  $u'(0) \leq 0$ . Alors d'après la définition de  $z_i$ , on a

$$u' \leq 0 \quad \text{sur} \quad [0, z_0] \quad \text{et} \quad 0 \leq u''(z_0). \quad (4.4.20)$$

Utilisant maintenant (4.3.23), on obtient

$$z(z_0) \leq w(z_0). \quad (4.4.21)$$

Comme  $i < 0$ , reportons la première inégalité de (4.4.20) dans (4.3.24) et (4.3.25), on obtient

$$(we^{-\phi})' < 0, \quad -(ze^{\phi})' < 0 \quad \text{sur} \quad [0, z_0],$$

ce qui donne évidemment

$$w(z_0)e^{\phi(x)-\phi(z_0)} < w(x) < w(0)e^{\phi(x)} \quad \forall x \in (0, z_0) \quad (4.4.22)$$

et

$$-z(z_0)e^{-\phi(x)+\phi(z_0)} < -z(x) < -z(0)e^{-\phi(x)} \quad \forall x \in (0, z_0) \quad (4.4.23)$$

On tire donc de (4.4.21)-(4.4.23) et (4.3.23) que l'on a

$$2z(z_0) \sinh(\phi(x) - \phi(z_0)) < \varepsilon u''(x) < 2z(0) \sinh(\phi(x)) \quad \forall x \in (0, z_0). \quad (4.4.24)$$

Supposons d'abord que  $y^* < z_0$ , alors on en déduit comme dans le Lemme 4.5, que  $0 < u''(y^*)$ . Par suite on a, d'après (4.4.24), appliqué en  $x = y^*$ ,

$$0 < \varepsilon u''(y^*) < 2z(0) \sinh(\phi(y^*)),$$

par conséquent  $z(0) = w(0) < 0$ .

Soit maintenant  $z_0 \leq y^*$ . On fait  $x = z_0$  dans (4.4.24) et on utilise  $u''(z_0) \geq 0$ , ce qui donne  $z(0) = w(0) < 0$ . On a montré donc ainsi

$$z(0) = w(0) < 0. \quad (4.4.25)$$

D'autre part, d'après (4.4.19) en tenant compte de  $0 < \xi < e^{-2\phi(1)} < 1$ ,

$$\left( (we^{-\phi} + \xi ze^{\phi}) - (ne^{-\phi} - \xi pe^{\phi})u \right)' < 0 \quad \text{sur } [0, 1],$$

ou, en utilisant les conditions aux limites sur  $u$ ,  $w$ ,  $z$  et  $\phi$  en  $x = 0$  et  $x = 1$ ,

$$0 < w(0)(1 + \xi),$$

ce qui contredit (4.4.25). Par suite  $u'$  garde un signe constant sur  $(0,1)$ . La suite de la démonstration de ce théorème s'obtient en répétant les mêmes raisonnements que dans les Théorèmes 4.2, 4.3.



# Références bibliographiques

- [1] R.A. ADAMS, “*Sobolev Spaces*”, ACADEMIC PRESS, NEW YORK, 1975.
- [2] F. ALABAU, “*Analyse asymptotique des équations des semi-conducteurs*”, TECHNICAL REPORT 547, RAPPORT INRIA, 1986.
- [3] F. ALABAU, “*Analyse asymptotique et simulation numérique des équations de base des semi-conducteurs*”, THÈSE DE L’UNIVERSITÉ, UNIVERSITÉ PARIS VI, 1987.
- [4] F. ALABAU, “*Uniform asymptotic error estimates for semiconductor device and electrochemistry equations*”, JNA-TMA, 14:123-139, 1990.
- [5] F. ALABAU, “*A method for proving uniqueness theorems for the stationary semiconductor device and electrochemistry equations*”, NONLINEAR ANALYSIS, 18:861-872, 1992.
- [6] F. ALABAU, “*A uniqueness theorem for reverse-biased diodes*”, APPLICABLE ANAL., 52:261-276, 1994.
- [7] F. ALABAU, “*New uniqueness theorems for the one-dimensional drift-diffusion semiconductor device equations*”, SIAM J. MATH. ANAL., 26:715-737, 1995.
- [8] F. ALABAU, “*Structural properties of the one-dimensional drift-diffusion models for semiconductors*”, TRANS. AMS, 348:823-871, 1996.
- [9] F. ALABAU, “*Uniqueness results for the steady-state electrodiffusion equations in the case of monotonic potentials and multiple junctions*”, NONLINEAR ANAL. THEORY, METHOD APPL., 29:849-887, 1997.
- [10] F. ALABAU AND M. MOUSSAOUI, “*Asymptotic estimates for the multi-dimensional electro-diffusion equations*”, *M<sup>3</sup>AS*, 1997.

- [11] F. ALABAU, “*On the existence of multiple steady-state solutions of the voltage driven semiconductor device equations*”, A PARAÎTRE DANS TRANS OF THE AMS.
- [12] F. ALABAU, A. JABIR AND M. MOUSSAOUI, “*An asymptotic analysis of a unipolar junction model*”, A PARAÎTRE DANS APPLICABLE ANALYSIS.
- [13] F. BREZZI, A. CAPELO, AND L. GASTALDI, “*A singular perturbation analysis of reverse-biased diodes*”, SIAM J. MATH. ANAL., 20:372-387, 1989.
- [14] D.M. CAUGHEY, AND R.E. THOMAS, PROCEEDING OF THE IEEE, 55:2192-2193, 1967.
- [15] P. DEGOND, AND F. GUYOT-DELAURENS, “*Particle simulations of the semiconductor Boltzmann equation for the one-dimensional in homogeneous structures*”, J. COMPUT. PHYS.
- [16] J. FREHSE AND J. NAUMANN, “*On the existence of weak solutions to a system of stationary semiconductor equations with avalanche generation*”, MATHEMATICAL MODELS AND METHODS IN APPLIED SCIENCES, 4:273-289, 1994.
- [17] D. GILBARG AND N.S. TRUDINGER, “*Elliptic partial differential equations of second order*”, SPRINGER VERLAG, NEW YORK, 1977.
- [18] J. HENRY AND B. LOURO, “*Singular perturbation theory applied to the electrochemistry equations in the case of electroneutrality*”, JNA-TMA, 13:787-801, 1989.
- [19] T. KERKHOVEN, “*On the one-dimensional current driven semiconductor equations*”, SIAM J. APPL. MATH., 51:748-774, 1991.
- [20] J.L. LIONS, “*Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*”, SPRINGER-VERLAG, NEW YORK, 1973.
- [21] B. LOURO, “*Asymptotic analysis of the electrochemistry equations : correctors in the multi-dimensional case*”, PORTUGALIAE MATHEMATICA, VOL. 48 FASC. 2, 1991.
- [22] P.A. MARKOWICH, “*A singular perturbation analysis of the fundamental semiconductor device equations*”, SIAM J. APPL. MATH., 44, 1984.



- [23] P.A. MARKOWICH, “*A nonlinear eigenvalue problem modelling the avalanche effect in semiconductor diodes*”, SIAM J. MATH. ANAL., 1985.
- [24] P.A. MARKOWICH, “*The stationary semiconductor device equations*”, SPRINGER-VERLAG, 1986.
- [25] P.A. MARKOWICH AND C. SCHMEISER, “*Uniform asymptotic representation of solutions of the basic semiconductor equations*”, I.M.A.J. APPL. MATH., 36:43-57, 1986.
- [26] P.A. MARKOWICH, C. RINGHOFER, AND C. SCHMEISER, “*Semiconductor equations*”, SPRINGER, WIEN-NEW YORK, 1990.
- [27] N.G. MEYERS, “*An  $L^p$  estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*”, ANN. SC. NORM. SUP. PISA, 189-206, 1963.
- [28] M.S. MOCK, “*On equations describing steady-state carrier distribution in a semiconductor device*”, COMM. PURE APPL. MATH., 25:781-792, 1972.
- [29] M.S. MOCK, “*An example of nonuniqueness of stationary solutions in semiconductor device Models*”, COMPEL, 1:165-174, 1982.
- [30] M.S. MOCK, “*Analysis of mathematical models of semiconductor devices*”, BOOLE PRESS, DUBLIN, 1983.
- [31] M. PROTTER AND H. WEINBERGER, “*Maximum principles in differential equations*”, PRENTICE HALL, ENGLEWOOD CLIFFS, N.J., 1967.
- [32] I. RUBINSTEIN, “*Electro-diffusion of ions*”, SIAM STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS, 1990.
- [33] T.I. SEIDMAN, “*Steady-state solutions of diffusion-reaction systems with electrostatic convection*”, NONLINEAR ANAL., 4:623-637, 1980.
- [34] S. SELBERHERR, “*Analysis and simulation of semiconductor devices*”, SPRINGER-VERLAG, 1984.
- [35] H. STEINRUCK, “*Asymptotic analysis of the current-voltage curve of a pnpn semiconductor device*”, IMA J. APPL. MATH., 43:243-259, 1989.

- 
- [36] H. STEINRUCK, “*A bifurcation analysis of the one-dimensional steady-state semiconductor device equations*”, SIAM J. APPL. MATH., 49:1102-1121, 1989.
- [37] S.M. SZE, “*Physics of semiconductor devices*”, WILEY-INTERSCIENCE, 2ND EDITION, 1981.
- [38] W.V. VAN ROOSBROECK, “*Theory of flow of electrons and holes in germanium and other semiconductors*”, BELL SYST. TECHN. J., 29:560-607, 1950.
- [39] A.B. VASILEVA, V.F. STELMAKH, “*Singularly disturbed systems of the theory of semiconductor devices*”, USSR. COMPUT. MATH. PHYS., 17:48-58, 1977.
- [40] A.B. VASILEVA, V.F. BUTUZOW, “*Singularly perturbed equations in the critical case*”, MRC-TSR 2039, MATH. RES. CENTER, UNIVERSITY OF WISCONSIN-MADISON, U.S.A., 1980.